Matice

Matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) zapisujeme ve tvaru:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

nebo zkráceně jako $\mathbf{A} = (a_{ij})$, kde a_{ij} je prvek na i-tém řádku a v j-tém sloupci. Platí tedy, že $1 \leq i \leq m$, a $1 \leq j \leq n$. První index i se tedy nazývá řádkový index a index j se nazývá sloupcový index. Prvky matice mohou být i například funkce (viz třeba ve 2M hledání extrému pomocí Hessovy matice (zkráceně „hessián“).

Příklad 1.
Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ je příklad matice typu (2,3). Platí například $a_{23} = 5$, protože prvek 5 leží ve druhém řádku a třetím sloupci.

Význačné typy matic

a) **Čtvercová matice** je matice typu (n, n), tj. má stejný počet sloupců a řádků.
b) **Obdélníková matice** je matice typu (m, n), kde $m \neq n$, tj. má různý počet sloupců a řádků.
c) **Nulová matice 0** je matice, jejíž prvky jsou pouze nuly.
d) **Diagonální matice** je čtvercová matice, která má nenulové prvky pouze na hlavní diagonále. Všechny ostatní prvky musí být nulové, tj. $d_{ij} = 0$, pro $i \neq j$.
e) **Jednotková matice E** je zvláštní případ diagonální matice, jejíž všechny prvky na hlavní diagonále jsou jedničky.
f) **Horní trojúhelníková matice** je matice, pod jejíž hlavní diagonálou jsou všechny prvky nulové, tj. pro $i > j$ platí $a_{ij} = 0$.
g) **Dolní trojúhelníková matice** je matice, naj jejíž hlavní diagonálou jsou všechny prvky nulové, tj. pro $i < j$ platí $a_{ij} = 0$.

Příklad 2. Příklady matic (**A** - Čtvercová, **B** - Obdélníková, **C** - Nulová, **D** - Diagonální, **E** - Jednotková, **F** - Horní trojúhelníková, **G** - Dolní trojúhelníková,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Operace s maticemi

1. **Transponování matice** - Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice typu (m, n). Matice k ní transponovaná je matice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ typu (n, m) s prvky (a_{ji}) původní matice, tj. $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = (a_{ji})$.

   Nejjednodušší způsob transpozice je vzít řádky a přepsat je do sloupců. Transponovat lze každou matici. Dvojitou transpozici dostanete $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$.

Příklad 3. Příklad transpozice matice:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. **Sčítání a odečítání matic** - Matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ lze sečíst a odečíst pouze, pokud **jsou stejného typu** (m, n). Součtem $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je matice $\mathbf{C}$ stejného typu (m, n) kde $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$. Rozdílem $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je matice $\mathbf{D}$ stejného typu (m, n) kde $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

   Při sčítání a odečítání vždy pracujete pouze s prvky na stejných pozicích.

   Příklad 4. Příklad sčítání a odečítání matic:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+4 & 3+2 \\ 4+2 & 2+2 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-4 & 3-2 \\ 4-2 & 2-2 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. **Násobení matic konstantou** - Matici $\mathbf{A}$ typu (m, n) lze vynásobit číslem $c \in \mathbb{R}$. Výsledkem násobení $c\mathbf{A}$ je matice $\mathbf{B} = (b_{ij})$ stejného typu (m, n) s prvky $b_{ij} = ca_{ij}$. Součin je definován i v opačném pořadí $(a_{ij})c = (a_{ij}c)$. Pro $c \in \mathbb{R}$ je navíc násobení komutativní, takže platí $c\mathbf{A} = \mathbf{A}c$.

   Příklad 5. Násobení matice skalárem:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 5 & 2\cdot 2 & 2\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 10 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

4. **Násobení matic** - Mějme matice $\mathbf{A}$ typu (m, p) a matice $\mathbf{B}$ typu (p, n). Potom součinem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ matic $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je matice $\mathbf{C} = (c_{ij})$ typu (m, n) s prvky

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}$$

   Příklad 6. Násobení matic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 0 & 1\cdot 2+2\cdot 0+3\cdot 1 \\ 1\cdot 1+0\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 2+0\cdot 0+2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 1 & 1\cdot 2+2\cdot 0 & 1\cdot 3+2\cdot 2 \\ 1\cdot 1+0\cdot 1 & 1\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot 3+0\cdot 2 \\ 0\cdot 1+1\cdot 1 & 0\cdot 2+1\cdot 0 & 0\cdot 3+1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vlastnosti maticových operací

1. Sčítání i násobení matic splňuje *asociativní zákon*, tj. nezáleží na uzávorkování operací.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}), \qquad (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}), \qquad (c \cdot d)\cdot\mathbf{A} = c\cdot(d\cdot\mathbf{A}).$$

2. Sčítání matic i násobení matice skalárem jsou *komutativní*, tj. lze zaměnit pořadí.

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}, \qquad c\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}\cdot c, \qquad [\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\neq\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}]$$

3. Operace sčítání je s oběma druhy násobení spojena *distributivními zákony*.

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}, \qquad (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C},$$
$$c\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})=c\cdot\mathbf{A}+c\cdot\mathbf{B}, \qquad (c+d)\cdot\mathbf{A}=c\cdot\mathbf{A}+d\cdot\mathbf{A}.$$

4. Jednotková matice $\mathbf{E}$ a nulová matice $\mathbf{0}$ se chovají jako obvyklá jednička a nula:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}, \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

5. Transpozice součtu a součinu se skalárem:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}+\mathbf{B}^{\mathrm{T}}, \qquad (c\cdot\mathbf{A})^{\mathrm{T}}=c\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

6. Transpozice součinu matic

$$(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

Determinanty

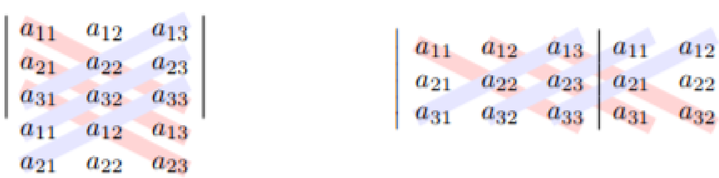
Determinant čtvercové matice $\mathbf{A}$ zapisujeme jako $|\mathbf{A}|$ nebo $\det(\mathbf{A})$ nebo jednoduše $\det \mathbf{A}$). Pro výpočet determinantů matic do řádu $n=3$ lze využít následující vzorce - tzv. „křížové pravidlo“ a *Sarrusovo pravidlo*. Při využití tohoto pravidla se determinant spočte jako součet součinů prvků na diagonálách rovnoběžných s hlavní diagonálou „ $\searrow$ “, vyznačeny červeně, od nichž se odečtou součiny prvků na diagonálách rovnoběžných s vedlejší diagonálou „ $\swarrow$ “, vyznačeny modře.

- $n=1$ Determinant matice $\mathbf{A}=(a_{11})$ je číslo $\det(\mathbf{A})=(a_{11})$
- $n=2$ Determinant počítáme pomocí „křížového pravidla“:

$$\det(\mathbf{A}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

- $n=3$ Determinant počítáme pomocí „Sarrusova pravidla“:

$$\det(\mathbf{A})=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32}).$$



Obrázek 1: Výpočet determinantu pro matice řádu 3 pomocí Sarrusova pravidla.

Příklady

Transponování matic

Transponujte následující matice:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}\right]$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\right]$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 4 & 8 & -9 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 8 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}\right]$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 78 & 92 \\ -5 & 41 \\ 21 & 3 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 78 & -5 & 21 \\ 92 & 41 & 3 \end{pmatrix}\right]$

e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}\right]$

Sčítání a odčítání matic

Spočtěte $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ a $\mathbf{A} - \mathbf{B}$:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\right]$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\right]$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 11 \end{pmatrix}, \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 7 \\ 15 & 16 \end{pmatrix}, \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right]$

e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 4 & 6 & 11 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right]$

f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 11 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}\right]$

Násobení matic konstantou

Spočtěte $c \cdot \mathbf{A}$:

a) $c = 2, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[c \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\right]$

b) $c = 3, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[c \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} \right]$

c) $c = -2, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[c \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 8 \\ -6 & -6 & -2 \end{pmatrix} \right]$

Násobení matic

Spočtěte $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \right]$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 15 & -10 \end{pmatrix}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 \end{pmatrix} \right]$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 18 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right]$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \right]$

e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 11 & 10 & 17 \\ 31 & 26 & 49 \end{pmatrix}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 27 & 54 \end{pmatrix} \right]$

f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 8 \\ 31 & 32 & 20 \\ 11 & 10 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 7 & 6 & 5 \\ 22 & 28 & 34 \end{pmatrix} \right]$

Spočtěte:

a) $\mathbf{X} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{\mathrm{T}} - 3 \cdot \mathbf{C}$,
b) $\mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} - 5 \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{T}}$,
c) $\mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{A}$, jsou-li dány tyto matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 20 & 17 \\ 41 & 24 \end{pmatrix}, \qquad \text{c) } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 34 & 33 & 13 \\ 27 & 24 & 5 \\ 45 & 47 & 20 \end{pmatrix}.$$

Determinant matice

Křížovým pravidlem spočtěte determinanty následujících matic:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $[\det(\mathbf{A}) = -1]$,

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $[\det(\mathbf{A}) = -6]$,

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $[\det(\mathbf{A}) = 9]$,

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $[\det(\mathbf{A}) = -14]$,

e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $[\det(\mathbf{A}) = 4]$,

f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $[\det(\mathbf{A}) = -2]$.

Sarrusovým pravidlem spočtěte determinanty těchto matic:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $[\det(\mathbf{A}) = -23]$,

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $[\det(\mathbf{A}) = -65]$,

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $[\det(\mathbf{A}) = -12]$,

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $[\det(\mathbf{A}) = -13]$,

e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$, $[\det(\mathbf{A}) = 0]$,

f) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $[\det(\mathbf{A}) = 4]$,

Další příklady si můžete vymyslet sami. Své matice zadáte do `https://www.wolframalpha.com/`. Matici řádu 3 zapíšete jako „{{2,3,2},{2,3,1},{0,2,1}}“ a s pomocí „+“, „-“, „*“, „*transpose*“, „*determinant*“ jste schopni dostat Vámi požadované výsledky.