Funkce

Často se setkáte se dvěma pojmy - zobrazení a funkce. Velice zjednodušeně řečeno platí, že každá funkce je zobrazení, ale ne každé zobrazení je funkce. Například $y = x^2$ je zobrazení a zároveň funkce, ale $x^2 + y^2 = 1$ je pouze zobrazení.
Zobrazení z množiny X do množiny Y je podmnožina $\mathcal{F}$ kartézského součinu $X \times Y$, tj. množina uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in X$ a $y \in Y$, která splňuje vlastnost $[x, y_1], [x, y_2] \in \mathcal{F} \Rightarrow y_1 = y_2$. Platí tedy, že pro každé x existuje nejvýše jedno y. Množina $\mathcal{F}$ tak jednoznačně určuje předpis $f : x \mapsto y = f(x)$. Místo $[x, y] \in \mathcal{F}$ zapisujeme $y = f(x)$. Prvek x se nazývá **vzor** a prvek $y = f(x)$ je **obraz** prvku x v zobrazení f. Navíc pokud X a Y jsou číselné množiny, pak takto definované zobrazení je **funkce**. Proměnná x je nezávislá a proměnná y je závislá.

Definiční obor $\mathrm{D}(f)$ funkce f je množina všech x, která mají svůj obraz y (funkční hodnotu), a **obor hodnot** $\mathrm{H}(f)$ je množina všech hodnot $y = f(x)$. Jednoduše řečeno definiční obor je taková množina prvků x, pro které má předpis $f(x)$ smysl. Pokud mají dvě funkce stejný zápis ale různé definiční obory, pak funkce považujeme za různé. Tj. $y = x^2, x \in \mathbb{R}$ a $y = x^2, x \in \langle 0, \infty)$ jsou různé funkce.
Funkce F je **rozšířením** (extenze) funkce f a současně f je **zúžením** (restrikce) funkce F, pokud $\mathrm{D}(f) \subset \mathrm{D}(F)$ a $F(x) = f(x), \forall x \in \mathrm{D}(f)$. Rozšířením či zúžením se nemění funkce ale její definiční obor.

Mějme funkce $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$. Funkce f a g lze složit, pokud $\mathrm{H}(f) \subset \mathrm{D}(g)$. **Složená funkce** $g \circ f$ (čte se „g po f“) je dána vztahem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Skládání se provádí tak, že „vnitřní funkci“ f použijete jako argument vnější funkce g, tj. ve vnější funkci g nahradíte x za funkci vnitřní f.

Příklad 1. (Skládání funkcí)
Mějme funkce $f = x^2 + 1$ a funkce $g = x^3 + 2$. Nalezněte složené funkce $f(g(x))$ a $g(f(x))$.

$$f(g(x)) = f(x^3 + 2) = (x^3 + 2)^2 + 1 = x^6 + 4x^3 + 4 + 1 = x^6 + 4x^3 + 5$$
$$g(f(x)) = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^3 + 2 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1 + 2 = x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 3$$

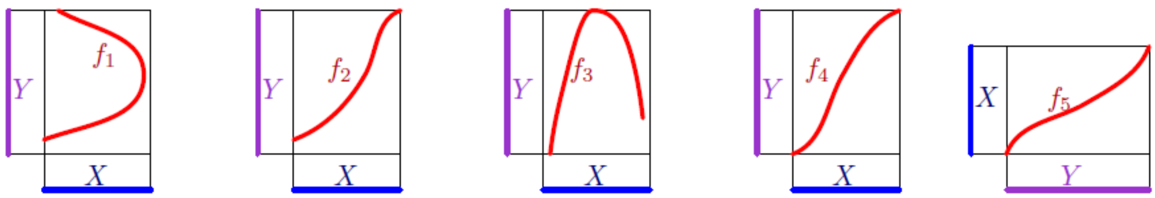
Pokud máme funkci $f : X \to Y$ s $\mathrm{D}(f) = X$, pak funkce f je:

- **Injektivní** (prostá), pokud $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, tj. pokud různá x mají různá y. Například $y = x$ je funkce prostá, ale $y = x^2$ funkce prostá není, protože pro hodnoty 2 a -2 máme stejnou hodnotu y.
- **Surjektivní**, pokud $\mathrm{H}(f) = Y$, tj. pokud je oborem hodnot celá množina obrazů. Pokud tedy $Y = \mathbb{R}$, pak $y = x^2$ surjektivní není, protože záporné hodnoty nemají vzory z množiny X. Pokud $Y = \langle 0, \infty)$, pak $y = x^2$ je surjektivní.
- **Bijektivní** (vzájemné jednoznačná), pokud je funkce f zároveň injektivní a surjektivní.

Pokud je funkce $f : X \to Y$ bijektivní, pak k ní existuje **inversní funkce** $g : Y \to X$ taková, že $g(y) = x$, právě když $f(x) = y$. Funkci inversní k funkci f obvykle značíme f^{-1}. Navíc platí, že $\mathrm{D}(f) = \mathrm{H}(g)$ a $\mathrm{D}(g) = \mathrm{H}(f)$.

Názorné příklady zobrazení funkcí.

- Funkce z X do Y znamená, že ne všechna $y \in Y$ mají vzor $x \in X$. Příkladem může být funkce $y = \operatorname{arctg} x$.
- Funkce z X na Y znamená, že všechna $y \in Y$ mají vzor $x \in X$. Příkladem může být funkce $y = x^3$.



Obrázek 1: f_1 není funkce $X \to Y$, f_2 je funkce prostá z X do Y, f_3 je funkce z X na Y, f_4 je funkce bijektivní z X na Y, f_5 je graf funkce inverzní k funkci f_4.

Vlastnosti funkcí

Dále budeme pod pojmem funkce rozumět funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s definičním oborem $\mathrm{D}(f) \subset \mathbb{R}$. Takové funkce nazýváme reálné funkce jedné reálné proměnné.

- Funkci zadáváme stanovením definičního oboru a funkčního předpisu.
- Pokud není explicitně uvedeno jinak, definičním oborem je celé $\mathbb{R}$.
- Funkci znázorňujeme **grafem**, což je množina bodů $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in \mathrm{D}(f)\}$.
- Jsou funkce, jejichž graf „nelze načrtnout“, viz například Dirichletova funkce nabývající hodnot 1 pro racionální x a hodnot 0 pro iracionální x.

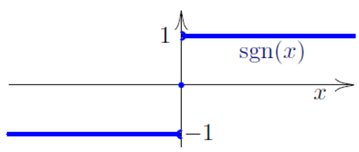
Některé zajímavé funkce:

a) Funkce **signum** (znaménková funkce) je dána předpisem

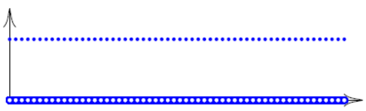
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

b) **Dirichletova** funkce je dána předpisem

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ racionální}, \\ 0 & \text{pro } x \text{ racionální}. \end{cases}$$



Obrázek 2: Znaménková funkce $\operatorname{sgn}(x)$.



Obrázek 3: Dirichletova funkce $D(x)$.

Sudá, lichá a periodická funkce

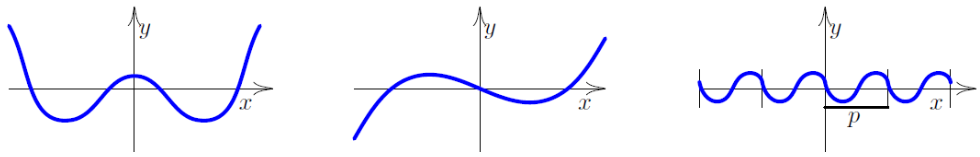
Množina $M \subset \mathbb{R}$ je **symetrická**, pokud $\forall x \in M$ platí, že $-x \in M$.

Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **sudá**, pokud definiční obor $D(f)$ je symetrická množina a platí, že $f(-x) = f(x), \forall D(f)$.

Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **lichá**, pokud definiční obor $D(f)$ je symetrická množina a platí, že $f(-x) = -f(x), \forall D(f)$.

Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je **periodická**, pokud $\exists\, p > 0$ takové, že
a) definiční obor funkce f je „periodická“ množina, tj. $x \in D(f) \Leftrightarrow x + p \in D(f)$,
b) platí $f(x + p) = f(x), \forall x \in D(f)$.
Pak řekneme, že funkce f je periodická s periodou p. Pokud je těchto period více, vybereme vždy tu nejmenší.

!!! Zapamatujte si, že součet sudých funkcí je sudá funkce a součet lichých funkcí je funkce lichá. Pro součin platí, že součin dvou sudých i dvou lichých funkcí je funkce sudá a že součin sudé a liché funkce je funkce lichá.



Obrázek 4: Postupně funkce - sudá, lichá, periodická s periodou p.

Příklady různých typů funkcí:

a) Sudými funkcemi jsou například funkce $1, x^2, x^4, \frac{1}{x^2}, \cos x$.
b) Lichými funkcemi jsou například funkce $x, x^3, \frac{1}{x}, \sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$.
c) Periodickými funkcemi jsou všechny goniometrické funkce $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$.
d) Žádného z výše uvedených typů nejsou například funkce e^x, nebo $\ln x$.

Klesající, omezená a rostoucí funkce

Nechť f je funkce a $M \subset D(f)$. Pak funkce f je:

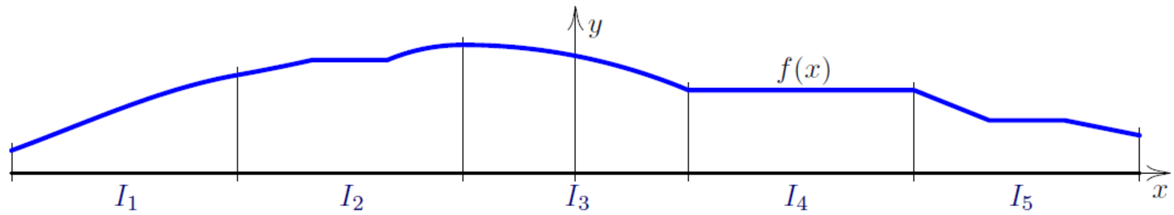
a) **Omezená zdola** na M, jestliže existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall x \in M$ je $f(x) \geq K$.
b) **Omezená shora** na M, jestliže existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall x \in M$ je $f(x) \leq L$.
c) **Omezená** na M, je-li současně na M omezená shora i zdola.
d) **Neomezená** na M, není-li na M omezená ani shora ani zdola.

Často se místo slov omezená a neomezená bude používat ohraničená a neohraničená funkce. Omezenými funkcemi jsou například e^x na celém $\mathbb{R}$ zdola, nebo například funkce $\sin x, \cos x$ na celém $\mathbb{R}$ shora i zdola.

Mějme funkci f a interval $I \subset D(f)$. Pak funkce f je:

a) **Klesající** na I, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ platí: $x_1 < x2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
b) **Nerostoucí** na I, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ platí: $x_1 < x2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
c) **Rostoucí** na I, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ platí: $x_1 < x2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
d) **Neklesající** na I, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ platí: $x_1 < x2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
e) **Konstantní** na I, jestliže pro každé $x_1, x_2 \in I$ platí: $f(x_1) = f(x_2)$.
f) **Monotónní** na I, jestliže je neklesající na I nebo nerostoucí na I.
g) **Ryze monotónní** na I, jestliže je rostoucí na I nebo klesající na I.

Pokud je funkce na intervalu I rostoucí, je zde také neklesající, a naopak pokud je klesající, pak je také nerostoucí.

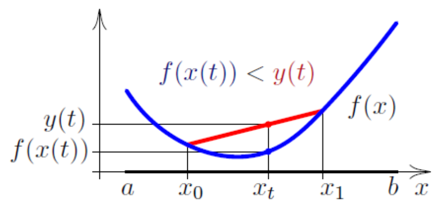


Obrázek 5: Funkce $f(x)$ je rostoucí na intervalu I_1, neklesající na intervalu I_2, klesající na intervalu I_3, konstantní na intervalu I_4 a nerostoucí na intervalu I_5.

Konkávní a konvexní funkce

Dále nás zajímá, zda je funkce konvexní, nebo konkávní. Rozhodující přitom je, zda spojnice dvou bodů grafu funkce leží nad grafem funkce nebo pod grafem funkce. Mějme tedy dva body $P_0 = [x_0, y_0]$ a $P_1 = [x_1, y_1]$. S pomocí jejich a s pomocí parametru $t \in \langle 0, 1\rangle$ můžeme zapsat parametrické rovnice úsečky (jejich spojnice):

$$x(t) = (1-t)x_0 + tx_1, \qquad y(t) = (1-t)y_0 + ty_1.$$



Obrázek 6: Příklad konvexní funkce.

Pak bod $P_t = [x_t, y_t], t \in \langle 0, 1\rangle$ je obecný bod této spojnice. Vyjádření $x(t)$ a $y(t)$ využijeme pro vyjádření konvexní funkce. Bod úsečky s koncovými body $[x_0, f(x_0)]$ a $[x_1, f(x_1)]$ se souřadnicí $x = x(t)$ má příslušnou y-ovou souřadnici danou rovnicí $y(t) = (1-t)f(x_0) + tf(x_1)$.

Nechť je tedy f funkce a $I \subset D(f)$ interval. Funkce f je

a) **konvexní** na I, jestliže pro všechna $x_0, x_1 \in I$ a všechna $t \in (0, 1)$ platí

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1),$$

b) **ryze konvexní** na I, jestliže pro všechna $x_0, x_1 \in I, x_0 \neq x_1$ a všechna $t \in (0, 1)$ platí

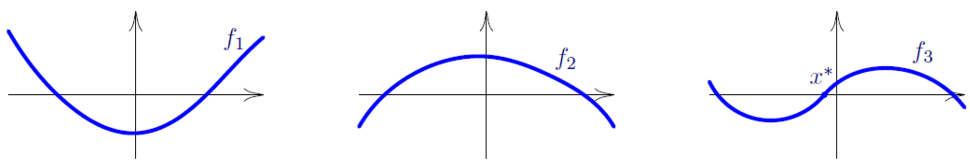
$$f((1-t)x_0 + tx_1) < (1-t)f(x_0) + tf(x_1),$$

c) **konkávní** na I, jestliže pro všechna $x_0, x_1 \in I$ a všechna $t \in (0, 1)$ platí

$$f((1-t)x_0 + tx_1) \geq (1-t)f(x_0) + tf(x_1),$$

a) **ryze konkávní** na I, jestliže pro všechna $x_0, x_1 \in I, x_0 \neq x_1$ a všechna $t \in (0, 1)$ platí

$$f((1-t)x_0 + tx_1) > (1-t)f(x_0) + tf(x_1).$$



Obrázek 7: Funkce f_1 je konvexní, funkce f_2 je konkávní a funkce f_3 má inflexní bod x^*.

Například funkce e^x a sudé mocniny x^2 a x^4 jsou ryze konvexní na celém $\mathbb{R}$, funkce $\ln x$ je ryze konkávní na intervalu $(0, \infty)$.

Navíc logicky platí, že pokud je funkce ryze konvexní, je také konvexní, a obdobně je-li funkce ryze konkávní, pak je také konkávní. Funkce, která je zároveň konvexní i konkávní na intervalu I, je na tomto intervalu lineární, tj. lze ji zapsat pomocí rovnice $f(x) = ax + b, x \in I$ a jejím grafem je úsečka.

Algebraické a transcendentní funkce

Funkce $y = f(x)$ je **algebraická**, jestliže je určena rovnici $P(x, y) = 0$, kde $P(x, y)$ je polynom v proměnných x, y. Algebraické funkce dělíme na podskupiny:

a) **Racionální funkce celistvé**, nebo také **polynomy**. Jsou to funkce $y = Q(x)$, kde $Q(x)$ je polynom proměnné x.

b) **Racionální funkce lomené** zkráceně **racionální funkce**. Jsou to funkce, které vzniknou podílem dvou polynomů $Q(x)$ a $R(x)$, kde $R(x) \neq 0$.

c) **Iracionální funkce**. Jsou to ostatní algebraické funkce, které nelze vyjádřit jako podíl dvou polynomů.

Analytické funkce, které nejsou algebraické, nazýváme **transcendentní**. Takové funkce dělíme na:

a) *Nižší transcendentní funkce*, mezi které řadíme elementární funkce: mocniny s iracionálním exponentem, exponenciální a logaritmické funkce, funkce goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a další.

b) *Vyšší transcendentní funkce*, mezi které řadíme například funkce definované pomocí integrálu. Například $y = \int_0^x e^{-t^2} dt$ a další.