Diferenci

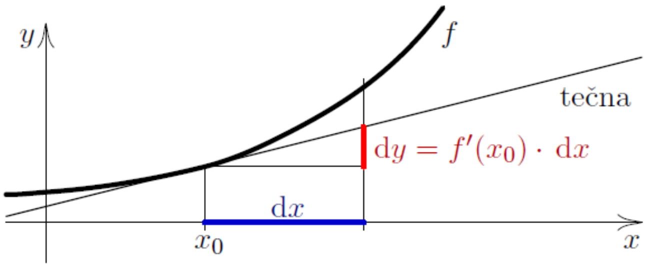
Podle definice je derivace funkce $f(x)$ v bod x_0 smrnice teny ke grafu funkce v bod x_0. D tomu lze zapsat rovnici teny nedujm zpsobem.

Rovnice teny

Nech funkce $f(x)$ mod x_0 derivaci $f'(x_0)$. Potom tena ke grafu funkce $f(x)$ v bod $[x_0, f(x_0)]$ mvnici

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Derivace funkce $f(x)$ v bod x_0 je o. Naproti tomu diferencid$funkce$f(x)$vbod$x$_0$ je **zobrazen**, kterstku dx piadstek *mathrmdy* na ten ke grafu funkce v bod x_0, tj. pstek nben hodnotou derivace $f'(x_0)$.



Obrázek 1: Diferencie pstek funkce na ten.

Diferenciunkce

Nech funkce $y = f(x)$ mrivaci v bod x_0. Potom diferencidf$funkce$f(x)$vbod$x$_0$ je zobrazenterstku dx promnn*piadstekhodnotydynaten* :
Diferencid, o kolik se piblin zmndnota funkce $f(x)$, zmn-li promnnou x o dx. asto ho zapisujeme ve tvaru $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$.

Pad 1. Vypojte diferenciunkce $f(x) = \sin x$ v bod x_0, je-li $\mathrm{d}x = 0,1$.

Nejprve vypome derivaci funkce $f(x)$. Derivace $f'(x) = [\sin x]' = \cos x$. Dosad bod x_0 do derivace, tedy $f'(x_0) = \cos(0) = 1$. Pak diferencie $\mathrm{d}f(0) = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x = 1 \cdot 0,1 = 0,1$.

Pad 2. Urete piblinou hodnotu funkce $\operatorname{arctg} x$ v bod $x_0 = 1,05$ pomocferenci.

Diferenciyjaduje pstek pi posunu o dx. Abychom mohli vyit piblinou hodnotu $\operatorname{arctg}(1,05)$, potebujeme urit bod, v nm jsme schopni $\operatorname{arctg} x$ vyit pesn. Takovm bodem je $x = 1$, kde je $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$. V takovd bude $\mathrm{d}x = 0,05$. Ur derivaci $f'(x) = [\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{x^2+1}$, derivaci funkce v bod x_0, tedy $f'(x_0) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$. D vypome diferencidf(x$_0$) $= f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot 0,05 = 0,025$. Piblinou hodnotu funkce $\operatorname{arctg} x$ v bod $x_0 = 1,05$ vyj jako souet funkndnoty v bod x_0 a diferenci, tedy piblindnota $\operatorname{arctg}(1,05) = \operatorname{arctg}(1) + \mathrm{d}f(1) = \frac{\pi}{4} + 0,025 \doteq 0,8104$. (Pro porovn $\operatorname{arctg}(1,05) \doteq 0,8098$.)

Druh diferenci diferenci vy

Analogicky jako prvnferencize pomocuhrivace zav druh diferenci kter ale na rozdd prvn diferenci nelze p geometricky popsat. V nedujm textu budeme pomocferenci konstruovat tzv. Taylorv polynom, kter v okoldu x_0 aproximuje hodnoty funkce $f(x)$.

Druh diferenciunkce

Diferencid$^2 f$ funkce $f(x)$ v bod x_0 je zobrazenterstku dx promnn*piadslo* :
Diferenciunkce k-t

Nech $f(x)$ mod x_0 k-tou derivaci. Diferencik$-t$d$^k f$ funkce $f(x)$ v bod x_0 je zobrazenterstku dx piadslo:

$$\mathrm{d}^k f : \mathrm{d}x \longmapsto \mathrm{d}y = f^{(k)}(x_0) \cdot (\mathrm{d}x)^k, \qquad \text{tj.} \qquad \mathrm{d}^k f(x_0)\mathrm{d}x = f^{(k)}(x_0) \cdot (\mathrm{d}x)^k.$$

Taylorv polynom

V matematice zn adu element funkcap. $\sin x, \cos x, \mathrm{e}^x, \ln x, \arcsin x, \operatorname{arctg} x$. Zn jejich chov, ale jsme schopni je vyit pouze v nkolika m vybranch bodech. Dobe lze pot s racion y, kter st, odt a nbit. Z toho dvodu dovedeme snadno vyit libovoln polynom s racion koeficienty v libovolnacionod. Um taklit, co umouje vyit i libovolnou racionnkci.

Jak ale vyit hodnotu elementnkce alespo piblin? V praxi pesnou hodnotu nepotebujeme, zpravidla ntaesnost na nkolik desetinnch m. K vyen vyu **Taylorv polynom**, kter dok spot hledanou hodnotu s pedem danou pesnostohoto zpsobu vpotu vyujlkulaky, kde je pro kadou elementnkci naprogramovan algoritmus, kter po hodnotu funkce pomoclynomu. Pouit polynom zs funkci a hodnot x, v nhceme hodnotu funkce vyit.

Taylorv polynom

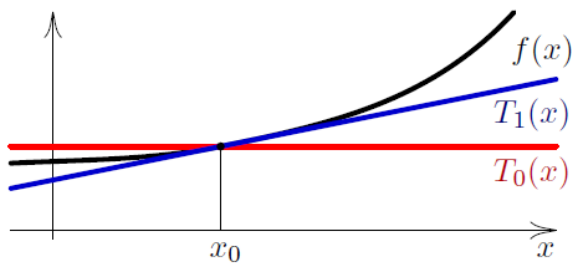
Nech funkce $f(x)$ mod x_0 derivace do n. Potom Taylorv polynom stupn n se stedem v bod x_0 je polynom

$$T_n^{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Pokud je z kontextu jasn kterou funkci a sted jde, symboly funkce f a stedu x_0 v oznaenylorova polynomu meme vynechat a psenom $T_n(x)$. Specidem je Taylorv polynom se stedem $x_0 = 0$, kter se nazvk.

Pro aproximaci hodnot funkce $f(x)$ v bod x poume Taylorv polynom se stedem v bod x_0, kter je bl bodu x, aby chyba aproximace byla co nejmen Taylorov polynomu se stedem $x \neq 0$ jednotlivcniny $(x-x_0)^k$ **nikdy neroznbujeme**, protoe by pi numerickyov jejich hodnoty dochlo k velkm zaokrouhlovachyb

Podmou existence Taylorova polynomu stupn n funkce $f(x)$ je pouze existence derivacnkce $f(x)$ do n v bod x_0. Taylorv polynom nezs tom, jak se chovnkce $f(x)$ a jejrivace v bodech x rznch od x_0. To je dvodem, pro rznnkce mohou mtejnylorovy polynomy. Napad pitenbku $(x-x_0)^{n+1}$ k funkci $f(x)$ dostaneme jinou funkci, Taylorv polynom stupn n se pitom nezmn5pt



Obrázek 2: Taylorv polynom $T_0(x)$ nult stupn a $T_1(x)$ prvn stupn funkce $f(x)$.

Taylorv polynom nult stupn je konstantnnkce $T_0(x) = f(x_0)$. Taylorv polynom prvn stupn $T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ uruje rovnici teny $y = T_1(x)$ ke grafu funkce $f(x)$ v bod x_0.

Taylorv polynom $T_n^{f,x_0}(x)$ funkce $f(x)$ lze zapsat pomocferenci $\mathrm{d}^k f(x_0)$ s pstkem $\mathrm{d}x = x - x_0$. Protoe

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(x_0)(x-x_0) &= f'(x_0)\cdot(x-x_0), \\ \mathrm{d}^2 f(x_0)(x-x_0) &= f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2, \\ \mathrm{d}^3 f(x_0)(x-x_0) &= f^{(3)}(x_0)\cdot(x-x_0)^3, \end{aligned}$$

Taylorv polynom tet stupn se stedem v bod x_0 meme zapsat ve tvaru

$$T_3(x) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{3!}\mathrm{d}^3 f(x_0)(x - x_0).$$

Jestlie je funkce $f(x)$ polynom stupn p, pak Taylorovm polynomem stupn $n \geq p$ t funkce se stedem v $x_0 = 0$ je polynom se stejnmi koeficienty. Pokud $n > p$, pak koeficienty u mocnin $x^{p+1}, ..., x^n$ jsou nulovokud vezmeme Taylorv polynom t funkce s jinm stedem $x_0 \neq 0$, pak pun Taylorv polynom mce jin tvar a jineficienty, ale d stejndnoty $T_n^{f,x_0} = f(x)$ a po roznbencnin $(x - x_0)^k$ a nednrav dostaneme pvodnlynom $f(x)$.

Pad 3. Naleznte Taylorv polynom funkce $f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 7x + 2$ v bod $x_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 7x + 2, & f(1) &= 1 - 3 + 4 - 7 + 2 = -3,\\
f'(x) &= 4x^3 - 9x^2 + 8x - 7, & f'(1) &= 4 - 9 + 8 - 7 = -4,\\
f''(x) &= 12x^2 - 18x + 8, & f''(1) &= 12 - 18 + 8 = 2,\\
f^{(3)}(x) &= 24x - 18, & f^{(3)}(1) &= 24 - 18 = 6,\\
f^{(4)}(x) &= 24, & f^{(4)}(1) &= 24.
\end{aligned}$$

Vyrivace jsou nulovaylorv polynom tvrt (i vy) stupn je

$$T_4^{f,1}(x) = -3 - 4(x - 1) + (x - 1)^2 + (x - 1)^3 + (x - 1)^4.$$

Po roznbenstaneme pvodnlynom $f(x) = 2 - 7x + 4x^2 - 3x^3 + x^4$.

Taylorv polynom $T_n(x)$ funkce $f(x)$ se stedem v bod x_0 je tesnjy jeho stupe n a takm krat vzdnost mezi bodem x_0 a bodem x, v nm pomocylorova polynomu aproximujeme funkndnotu funkce $f(x)$.

Taylorovy polynomy vybranch funkc

Exponencinkce - funkce e^x je definov na cel$\mathbb{R}amechnyderivacestejne^x = [\mathrm{e}^x]' = [\mathrm{e}^x]'' = [\mathrm{e}^x]^{(3)} = \cdots = [\mathrm{e}^x]^{(k)}$.

Pokud zvol $x_0 = 0$, pak jsou vechny derivace funkce e^x rovny 1. Taylorv polynom stupn n je proto

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Logaritmicknkce - funkce $\ln x$ je definovan intervalu $(0, \infty)$. Proto nelze za sted vzulu. Vhodnm stedem bude $x_0 = 1$. Alternativnnost posunou funkci na $\ln(x + 1)$, kde u lze vzted $x_0 = 0$. Spojme tedy derivace funkce $\ln(x + 1)$:

$$\begin{aligned}
[\ln(x + 1)]' &= \frac{1}{x + 1},\\
[\ln(x + 1)]'' &= \frac{-1}{(x + 1)^2},\\
[\ln(x + 1)]^{(3)} &= \frac{2}{(x + 1)^3},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
[\ln(x + 1)]^{(k)} &= (-1)^{k-1}(k - 1)!\frac{1}{(x + 1)^k}.
\end{aligned}$$

Pro $x_0 = 0$ je $f(x_0) = \ln(x+1) = 0$, v dal lenech ve vzorci se v pod $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ faktori zkr na $(-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}$. Lze proto psgather* $\mathrm{T}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot x^n$.

Funkce sinus - funkce sin$x$ je definovan celR.$Derivacek = 0,1,2,3,4,5,6,7 jsoupostupnFunkceseopakujeriodo$ $[\sin x]^k$. Pro sted $x_0 = 0$ dostme postupn hodnoty 0,1,0,-1,0,1,0,-1, ... Taylorv polynom moto kad druh len roven nule, nenulovou jen lichcniny x. Je to v souladu s t e funkce $\sin x$ je funkce licholynom funkce $\sin x$ stupn $2n+1$ lze proto zapsat jako

$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}.$$

Funkce kosinus - funkce cos$x$ je definovan celR.$Derivacek = 0,1,2,3,4,5,6,7 jsoupostupnFunkceseopakujeri$ $[\cos x]^k$. Pro sted $x_0 = 0$ dostme postupn hodnoty 1,0,-1,0,1,0,-1,0, ... Taylorv polynom moto kad druh len roven nule, nenulovou jen sudcniny x. Je to v souladu s t e funkce $\cos x$ je funkce sudolynom funkce $\cos x$ stupn $2n$ lze proto zapsat jako

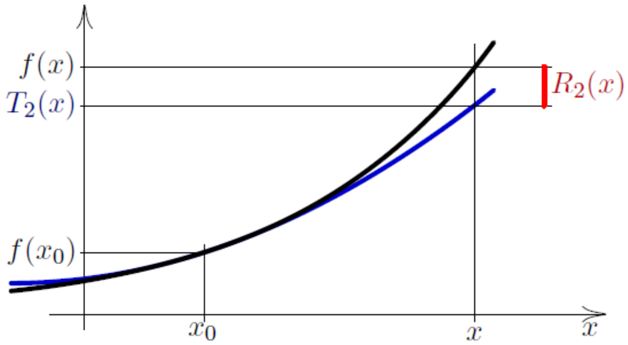
$$T_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k} = 1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}.$$

Taylorv zbytek

Pi aproximaci hodnot funkce $f(x)$ punm Taylorovm polynomem $T_n(x)$ stupn n naj „chyba“ aproximace, tedy rozdkutendnoty $f(x)$ o hodnoty polynomu $T_n(x)$. Ozna jej penem $R_n(x)$ podle slova reziduum znamenaj zbytek.

Nech $T_n(x)$ je Taylorv polynom funkce $f(x)$ stupn n se stedem v bod x_0. Rozd$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ nazv **Taylorv zbytek.** Jak lze odhadnout Taylorv zbytek? Taylorv polynom nult stupn se stedem x_0 je konstantnnkce $T_0(x) = f(x_0)$. Podle vty o stedndnot pro $x > x_0$ lze Taylorv zbytek vyjit pomocvnrivace

$$R_0(x) = f(x) - T_0(x) = f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0), \quad \xi \in (x_0, x).$$



Obrázek 3: Taylorv zbytek $R_2(x) = f(x) - T_2(x)$.

Taylorv zbytek pro Taylorv polynom vy stupn lze vyjit v tzv. Lagrangeov tvaru pomocrivace funkce $f(x)$ $(n+1)$:

Nech funkce $f(x)$ mkoldu x_0 derivace do $(n+1)$. Potom pro kad$vvtomtookolistuje\xi mezibody\mathrm{x}_0$ a x takove Taylorv zbytek $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ lze vyjit ve tvaru

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}.$$

Pad 4. Padu odhadu chyby pomocylorova zbytku

Ukame si odhad chyby Taylorova polynomu funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$. Uvaujme polynom $T_5(x)$ se stedem v bod $x_0 = 0$ v bod $x > 0$. Podle Taylorovy vty existuje $\xi \in (x_0, x)$ spluj

$$R_5(x) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \cdot x^6 = \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{6!} \cdot x^6.$$

Protoe e^x je rostoucnkce a $\xi < x$ plate$^{\xi} < \mathrm{e}^x$. Vsledn odhad vy pro $x = 0,2$

$$|R_5(x)| < \frac{\mathrm{e}^x}{6!} \cdot x^6, \quad |R_5(0,2)| < \frac{\mathrm{e}^{0,2}}{6!} \cdot (0,2)^6 \doteq 1,09 \cdot 10^{-7}.$$

Jak stupe polynomu je poteba vz aby chyba $\mathrm{e}^{0,2}$ byla men 10^{-12}? Plat $|\mathrm{R}_n(0,2)| < \frac{\mathrm{e}^{0,2}}{(n+1)!} \cdot (0,2)^{n+1}$.

Pro $n = 8$ odhad d chybu $1,7 \cdot 10^{-12}$, pro $n = 9$ je chyba pouze $3,4 \cdot 10^{-14}$, a proto stalynom 9. stupn.

Kivky (rozpracovanrze)

Derivace nachjlatnnki studiu kivek. Obrazn eeno, kivka v rovin je mnoina bod, kternikne pohybem pera po pap. Pedpoklme pitom, e hrot pera je st v kontaktu s papm a hrot pera je bod - mlov prmr.

Polohu $[x, y]$ hrotu pera v rovin pap v ase t popisuj funkce $X(t), Y(t)$ uruj jeho souadnice $x = X(t), y = Y(t)$. Tyto dv funkce jsou definovanpojit njaknterval I.

Napad graf spojitnkce $f(x)$ na intervalu I je kivka, kdy $X(t) = t$ a $Y(t) = f(t), t \in I$. Graf nespojitnkce nenivka. Mnohivky vak nejsou grafem nkce, ob souadnice proto urujeme pomocojitch funkcomnn, $tzv.parametru.Uvemejednoduchoudefinici, kterakpipoutnoiny, kterzikivkynepome.$

Kivka

Bute $X(t), Y(t)$ dv funkce definovanpojit intervalu I, kter me bt oteven nebo uzaven, omezen i neomezen, pdn celR.**Kivkou**$vrovinnazvememnoinu\Gamma urenouvztahya$P = { x=X(t), y=Y(t), t∈I}$nazveme$**parametrizac**P$kivky\Gamma$.

Strun lze , e kivka je spojitm obrazem intervalu, tj. kivka je obor hodnot (obraz) zobrazen ∈I ↦[X(t),Y(t)] ∈R^2. Kivka jakoto spojit obraz intervalu je vdy souvislj. „nepetren

mnoina. Nesouvisl nenivkou. Podle t definice je kivkou i jednobodovoina v pd konstantn funkc(t) = c$_1, Y(t) = c_2$.

Zejm kadojice spojitch funkc(t), Y(t)$nastejnnintervalu$I$urujejednoznannjakoumnoinu-kivku\Gamma, tj.parametr$
I = (a,b)$urujekivku\Gamma, potom`posunut$

funkce $X_c(t) = X(t-c), Y_c(t) = Y(t-c)$ na „posunut intervalu $I_c = (a+c, b+c)$ urujejnou mnoinu i kivku Γ. Podobn mnoina Γ se nezmni „zmn rychlosti“ pohybu bodu v parametrizaci. Napad pro $v > 0$ parametrizace $X_v(t) = X(vt), Y_v(t) = Y(vt)$ a $I_v = \langle \frac{a}{v}, \frac{b}{v} \rangle$ tak urujejnou mnoinu i kivku Γ. „Posunut

i rzn „rychl

parametrizace urujejnoiny i kivky Γ.

Kivka vak nennom mnoina bod, zk parametrizaci. Napad rovnice $x = \cos t$ a $y = \sin t$ pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ urujunice. Tytovnice pro $t \in \langle 0, 4\pi \rangle$ urujejnou mnoinu, ale pi urov dy kivky, modelov pohybu po kivce ji povaujeme za jinou kivku, protoe parametrizace proch kadm bodem dvakr Kivky povaujeme za stejnestlie kadm bodem kivky parametrizace proch stejn kr Kivky budete podrobnji studovat v pedmtu Matematika 2 (kivkov integr.

Regulladkivky

Kivka jakoto spojit obraz intervalu vak jet me vypadat dost divoce, omez se proto na „hezk

kivky, kterou „hladk

, tj. bez „zlom“. V technickaxi asto potebujeme „po ech hladk

kivky, kterjnom konen mnoho zlom.

Regulivka

Nech funkce $X(t)$ a $Y(t)$ jsou definovanpojit intervalu I. Pedpokljme, e funkce majva I spojitrivace $X'(t)$ a $Y'(t)$ na celntervalu I, v pdnch krajn bodech intervalu derivace jednostrannedpokljme navgather* (X'(t),Y'(t)) ≠(0,0), ∀t ∈I.

Potom kivku nazveme kivkou **regul**, nebo tak.

Kivku Γ nazveme **po ech regul**, pokud funkce $X(t), Y(t)$ jsou spojit celI, $alejejichderivacejsouspojitinterva$
Y'(t)$jsouspojitkintervalech$I$_1 = (a, t_1), I_2 = (t_1, t_2), ..., I_k = (t_{k-1}, b)$, piem v bodech t_i existujuze jednostrannmity derivace. Podmou $(X'(t), Y'(t)) \neq (0,0)$ vyadujeme na celI, $vbodech`zlomu$10t$_i$ pouze jednostrannrivace.

Body, ve kterch spojitnkce $X(t)$ nebo $Y(t)$ nemajojitou derivace nazveme **singul**, ostatnodm, ve kterch oboustrannrivace existujme **regul**.

Daljmy a vlastnosti kivky

V pd omezen uzaven intervalu $I = \langle a, b \rangle$ body $[X(a), Y(a)]$ a $[X(b), Y(b)]$ nazv **koncovmi body**. Pokud je interval I neomezen, kivka nemden nebo oba koncovdy. Kivka s obma koncovmi body je vdy **omezen**.

Kivku nazveme **uzavenou**, pokud jejncovdy splvajj. parametrizace kivky spluje $[X(a), Y(a)] = [X(b), Y(b)]$.

V pd **regulavenivky** poadujeme, aby existovala parametrizace kivky maj nejen stejnncovdy $[X(a), Y(a)] = [X(b), Y(b)]$, ale i stejndnostrannrivace v koncovch bodech, tj. $X'(a^+) = X'(b^-), Y'(a^+) = Y'(b^-)$.

Kivku nazveme **jednoduchou, prostou** nebo takj se, pokud

$$[X(s), Y(s)] \neq [X(t), Y(t)], \quad \forall s, t \in I, s < t$$

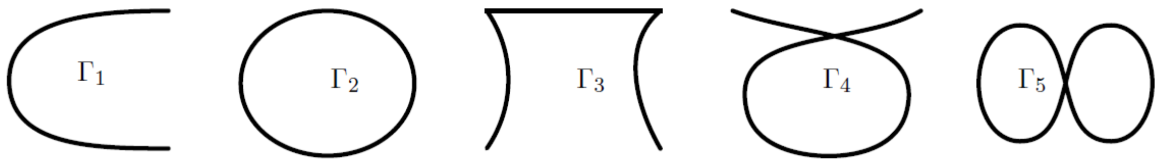
v pd uzavenivky s vjimkou $s = a$ a $t = b$. Pokud rovnost nastane pro njak $\leq$s < t $\leq$b, *ekneme*, *e***se kivka prot**

Kivku nazveme **orientovanou**, pokud je d jejientace, tj. „smr pohybu po kivce“. V tomto pd plate dv parametrizace jsou ekvivalentnokud existuje rostoucnkce $\varphi : I_1 \to I_2$ (vylou funkce klesaj) takove plat$_1(t) = X_2(\varphi(t))$, $Y_1(t) = Y_2(\varphi(t)), \forall t \in I_1$. V tomto pd rozliujeme parametrizace, kterou orientovan - pi rostoucarametru t se bod $[X(t), Y(t)]$ pohybuje podle orientace kivky - a parametrizace orientovan s orientovanou kivkou.

Pokud mnoina Γ je omezenluv o **kivce omezenhranien**, v opand o **kivce neomezeneohranien**.

Kivku nazveme C^k**-hladkou** pdn **nekonen hladkou**, pokud funkce $X(t), Y(t)$ majojitrivace do k, pdn spojitrivace vech . Terminologie zde nenela jednotnbvykle **hladkou kivkou** rozum kivku, kterou lze parametrizovat funkcemi $X(t), Y(t)$, kterjojitvnrivace.

Na nedujm obru jsou kivky $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_5$ regulladk Γ_3 je po ech regulivky $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4$ jsou otevenivky Γ_2 a Γ_5 jsou uzavenivky $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ jsou prosteprotj se), Γ_4 a Γ_5 nejsou prostrotj, majden dvojnbn bod. Vechny uvedenivky jsou omezen



Obrázek 4: Pady kivek rznch vlastnost

Derivace „funkce zadanrametricky“

Pedpokljme, e kivky Γ zadanrametricky rovnicemi $x = X(t), y = Y(t), t \in I$ je grafem njaknkce $y = f(x), x \in J$, tj. $Y(t) = f(X(t)), t \in I$. V tomto pd budeme strun t, e funkce $y = f(x)$ je zadanrametricky. Jak urit jejrivace?

Pomocavidla o derivov sloennkce snadno odvod derivaci funkce $y = f(x)$. Z rovnosti $Y(t) = f(X(t))$ derivovm podle t dostme

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(X(t)) \cdot \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t), \qquad (*)$$

odkud za pedpokladu $X'(t) \neq 0$ dostme

$$f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(X(t)) = \frac{\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}(t)}{\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t)} \equiv \frac{Y'(t)}{X'(t)}.$$

Pro vpoet druhrivace znovu derivujeme rovnost (∗) podle promnn, $argument$(t)$ufunkc(t), Y(t)$ budeme vynecht

$$\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(X) \cdot \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right] = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(X) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(X) \cdot \frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}. \qquad (**)$$

Z rovnosti $(**)$ opt d $X'(t) \neq 0$ meme vyjit druhou derivaci funkce $f(x)$:

$$f''(x) \equiv \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(X) = \left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)^{-2}\left[\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(X)\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2}\right] \equiv \frac{Y'' - f'(X) \cdot X''}{(X')^2}$$

a po dosazen'(X) = Y'/X'$popravdostme$

Derivace funkce zadanrametricky

Nech $X(t), Y(t)$ jsou funkce t $\mathcal{C}^2$ na intervalu I, piem $X'(t) \neq 0, \forall t \in I$. Nech $y = f(x)$ je funkce „danrametricky“ rovnic(t) = f(X(t))$.Potomjejvnruhrivacejsoudvztahy$

Pomoce uvedench derivac(t)aY(t)$jsmeschopnizjistit, zdafunkce$f(x)$zadanrametrickyvokolnbodujerostouc$

Tena hladkivky

Vrame se k obecnm kivk ktermust grafem njaknkce. Mo smrnice teny ke kivce Γ v bod $[x_0, y_0] = [X(t_0), Y(t_0)]$ tenu kivky uruje ten vektor $(u, v) = (X'(t_0), Y'(t_0))$. Z parametrickch rovnic py $x = x_0 + u(t - t_0), y = y_0 + v(t - t_0)$ prochj bodem $[x_0, y_0]$ a smrovm vektorem z rovnici teny.

Rovnice teny

Nech $[X(t_0), Y(t_0)]$ je reguld kivky Γ. Potom vektor $(X'(t_0), Y'(t_0)$ je ten vektor kivky Γ v bod $[X(t_0), Y(t_0)]$ a rovnice

$$x = X(t_0) + (t - t_0) \cdot X'(t_0), \qquad y = Y(t_0) + (t - t_0) \cdot Y'(t_0), \qquad t \in \mathbb{R}$$

jsou parametrickvnice teny ke kivce Γ v bod $[X(t_0), Y(t_0)]$. Pokud $X'(t_0) \neq 0$ a $Y'(t_0) \neq 0$, potom rovnici teny lze zapsat v sekovvaru

$$\frac{x - X(t_0)}{X'(t_0)} = \frac{y - Y(t_0)}{Y'(t_0)}.$$

Vektor $(-Y'(t_0), X'(t_0))$ je normv vektor kivky Γ v bod $[X(t_0), Y(t_0)]$.