Derivace

Po limitě a spojitosti je derivace dalším základním kamenem diferenciálního počtu. Derivace funkce v bodě x_0 je číslo, které označujeme $f'(x_0)$ a které vypovídá o chování funkce $f(x)$ v okolí bodu x_0. Vezmeme-li derivaci $f'(x)$ ve všech bodech intervalu (a, b), je derivace funkce opět funkcí.

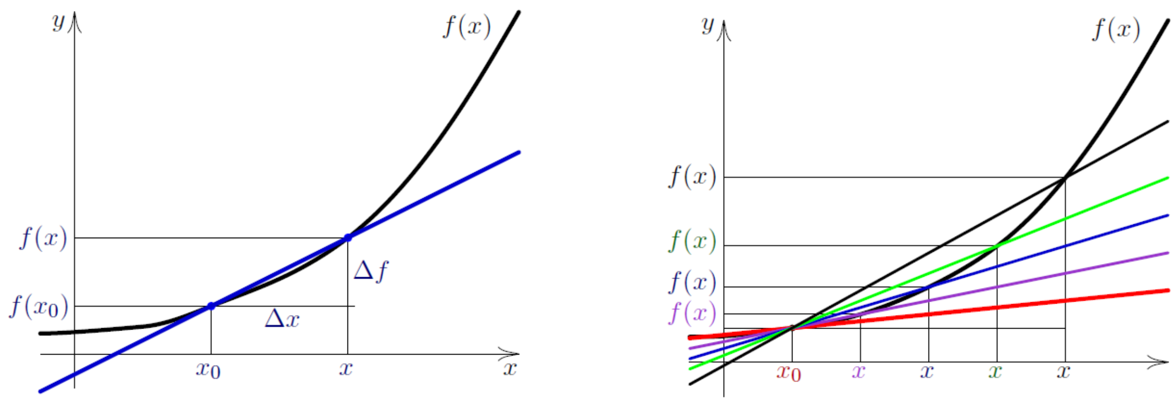
Pojem derivace funkce

Geometricky lze říci, že derivace funkce v bodě je směrnice tečny ke grafu funkce v tomto bodě. Směrnice přímky je poměr přírůstku Δy hodnot závislé proměnné ke přírůstku hodnot Δx nezávislé proměnné, tedy tangens orientovaného úhlu, který svírá tečná ke grafu funkce s „vodorovnou“ osou x. Tečnu neumíme vyjádřit přímo, a proto uvažujeme sečny grafu funkce v bodě a blízkém bodě. Když se tyto body k sobě blíží, sečny přecházejí v tečnu.

Konkrétně v případě derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 vezmeme sečnu grafu funkce v bodě x_0 a v blízkém bodě $x = x_0 + h$. Body grafu $[x_0, f(x_0)]$ a $[x, f(x)]$ vlevo či vpravo od x_0 určují sečnu grafu funkce $f(x)$. Její směrnice je podíl

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

kde $h = \Delta x$. Pokud se „blíží“ $x \to x_0$, tj. $\Delta x = h \to 0$, sečna přechází v tečnu ke grafu funkce $f(x)$ v bodě x_0. Existuje-li limita pro $h \to 0$, dostáváme směrnici tečny, tj. derivaci funkce v bodě x_0.



Obrázek 1: Derivace je limita podílu změny funkčních hodnot Δf a změny argumentu Δx. Při $x \to x_0$ sečny přechází v tečnu.

Derivace funkce

Nechť $f(x)$ je funkce a x_0 vnitřní bod definičního oboru funkce $f(x)$. Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 je číslo označované $f'(x_0)$, které je rovno limitě

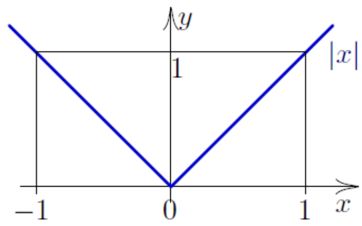
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Pokud tato limita existuje a je konečná, řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci. Derivaci označujeme jménem funkce a apostrofem, například $f'(x)$ nebo někdy zkráceně f', nebo také ve tvaru zlomku se symboly d a jmény funkce a proměnné, podle které se derivuje. Podobně jako u funkce připojujeme i bod, v němž derivaci uvažujeme.

$$f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \qquad f'(x_0) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0).$$

Pokud limita neexistuje nebo není konečná, říkáme, že derivace neexistuje. Případem takové funkce je například funkce $f(x) = |x|$, která nemá derivaci v bodě $x_0 = 0$. Funkce je definovaná jako

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0, \\ -x & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

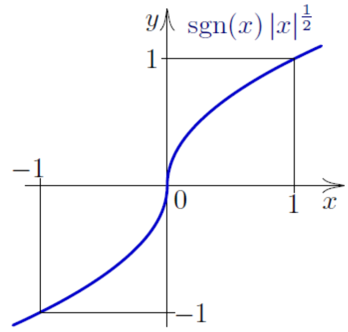


Obrázek 2: Funkce $f(x) = |x|$.

Pokud uvažujeme limitu zleva, je rovna -1. Pokud bereme limitu zprava, je rovna 1. Limity zleva a zprava si nejsou rovny, proto neexistuje oboustranná limita, a tedy v bodě $x_0 = 0$ neexistuje derivace.

Obdobně funkce odmocniny prodloužená na lichou funkci nemá v bodě $x_0 = 0$ derivaci. Tuto funkci zapíšeme jako

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|x|} = \begin{cases} x^{\frac{1}{2}} & \text{pro } x \geq 0, \\ -|x|^{\frac{1}{2}} & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$



Obrázek 3: Odmocnina prodloužená na lichou funkci.

Pokud bereme limitu zleva, je rovna ∞. Pokud uvažujeme limitu zprava, je rovna $-\infty$. Limity zleva a zprava si v bodě $x_0 = 0$, nejsou rovny a tedy v tomto bodě neexistuje derivace.

Dosud jsme se věnovali derivaci funkce v jednom bodě. Nyní rozšíříme pojem derivace na pojem derivace na otevřeném intervalu. V případě uzavřeného intervalu $I = \langle a, b\rangle$ bychom museli doplnit pojmy jednostranné derivace zleva a zprava, kdy i limita definující derivaci je pouze jednostranná.

Derivace funkce na intervalu

Řekneme, že funkce má derivaci na intervalu $I = (a, b)$, jestliže má derivaci v každém bodě tohoto intervalu. Derivace funkce na intervalu je opět funkce s hodnotami derivace v každém bodě intervalu. O takové funkci říkáme, že je **diferencovatelná**.

Jednostranné derivace

Řekneme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci zprava, případně zleva, jestliže existují jednostranné limity

$$f'(x_{0+}) = \lim_{x \to x_{0+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'(x_{0-}) = \lim_{x \to x_{0-}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

Řekneme, že funkce $f(x)$ má derivaci na uzavřeném intervalu $I = \langle a, b\rangle$, pokud má jednostrannou derivaci zprava v bodě a, derivaci zleva v bodě b a oboustrannou derivaci v každém vnitřním bodě intervalu (a, b).

Derivace druhého řádu a vyšších řádů

Pokud má funkce derivaci ve všech bodech intervalu, tato derivace tvoří funkci na intervalu a tuto derivaci lze opět derivovat v bodě, případně na intervalu.

Derivace vyšších řádů

Nechť funkce $f(x)$ má derivaci $f'(x)$ v každém bodě nějakého okolí bodu x_0. Potom druhá derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 je limita

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h}.$$

Druhou derivaci značíme $f''(x_0)$ nebo také $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$. Pokud druhá derivace $f''(x)$ existuje v každém bodě intervalu (a, b), tyto derivace tvoří novou funkci zvanou druhá derivace funkce $f(x)$ na intervalu (a, b). Obdobným způsobem lze zavádět derivace třetí, čtvrtého a dalších řádů. Derivace i-tého řádu se tedy vždy počítá z derivace řádu $(i - 1)$. Fakticky vezmeme funkci, pokud lze derivovat, zderivujeme a máme první derivaci. Pokud chceme druhou derivaci, vezmeme první derivaci a tu zderivujeme. U třetí derivace bychom derivovali derivaci druhou a tak dále.

Důležité vlastnosti derivací:

a) Nutnou podmínkou druhé derivace v bodě x je existence první derivace v nějakém okolí bodu x. Obdobně pro derivace řádu $k + 1$ musí v okolí bodu x existovat i derivace řádu k.

b) Funkce může mít derivaci k-tého řádu, ale derivaci řádu $k+1$ už mít nemusí. Například funkce $f(x) = |x^3| \equiv \operatorname{sgn}(x) \cdot x^3$, má derivace postupně $f'(x) = 3x^2 \cdot \operatorname{sgn}(x)$, $f''(x) = 6x \cdot \operatorname{sgn}(x)$, ale v nule už nemá derivaci třetího řádu, protože v bodě nula sice existují jednostranné limity, ale jsou různé.

c) Funkce typu x^p, kde $p \in \mathbb{N}$ mají derivace všech řádů na celém $\mathbb{R}$. Od řádu $p + 1$ jsou tyto derivace nulové.

d) Existuje jedna skupina funkcí, které mají derivace všech řádů a které se při derivování nemění. Jsou to násobky exponenciální funkce $f(x) = c\,\mathrm{e}^x$, kde c je libovolná konstanta. Tyto funkce mají všechny derivace stejné, tj. $[c\,\mathrm{e}^x]^{(k)} = c\,\mathrm{e}^x$.

Výpočet derivace

Počítat derivace podle definice je náročné, a proto jsme jej v předchozím textu vynechali. Derivace budeme počítat prostým matematickým přístupem, který spočívá v tom, že určíme derivace elementárních funkcí a pomocí určitých pravidl derivaci dané funkce převedeme na derivace elementárních funkcí, které umíme derivovat.

Základní pravidla derivování

Mezi základní pravidla derivování patří derivace skalárního násobku, součtu a rozdílu funkcí, součinu a podílu funkcí a také derivace složené funkce.

Derivace násobku, součtu a rozdílu funkcí

Nechť $c \in \mathbb{R}$ a $f(x)$, $g(x)$ jsou reálné funkce, které mají v bodě x derivace $f'(x), g'(x)$. Pak platí:

$$\begin{aligned}&[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x),\\ &[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x),\\ &[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x).\end{aligned}$$

Pokud funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají derivace ve všech bodech nějakého intervalu, potom uvedené rovnosti platí na celém intervalu.

Příklad 1. Derivace násobku a součtu
Nalezněte derivace funkce $f(x) = 2x^2$ a funkce $f(x) + g(x)$, kde $g(x) = \sin x$.

$$\begin{aligned}&[f(x)]' = [2x^2]' = 2 \cdot [x^2]' = 2 \cdot 2x = 4x.\\ &[f(x) + g(x)]' = [2x^2 + \sin x]' = f'(x) + g'(x) = [2x^2]' + [\sin x]' = 4x + \cos x.\end{aligned}$$

Derivace součinu funkcí

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou reálné funkce, které mají v bodě x derivace $f'(x)$ a $g'(x)$. Potom platí:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Pokud funkce mají derivace na intervalu $I = (a, b)$, potom rovnost platí na celém intervalu. Pokud bychom chtěli derivovat součin tří funkcí, derivovali bychom ho takto:

$$[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)]' = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x).$$

Příklad 2. Derivace součinu funkcí
Nalezněte derivaci funkce $f(x) \cdot g(x)$, kde $f(x) = 2x^2$ a $g(x) = \sin x$.

$$\begin{aligned}[f(x) \cdot g(x)]' &= [2x^2 \cdot \sin x]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) =\\ &= [2x^2]' \cdot \sin x + 2x^2 \cdot [\sin x]' =\\ &= 4x \cdot \sin x + 2x^2 \cdot \cos x.\end{aligned}$$

Derivace podílu funkcí

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou reálné funkce, které mají v bodě x derivace $f'(x)$ a $g'(x)$ a jmenovatel $g(x)$ je různý od nuly. Potom platí:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Pokud obě funkce mají derivace v nějakém intervalu, přičemž v celém intervalu platí $g(x) \neq 0$, potom rovnost platí v celém intervalu.

Příklad 3. Derivace podílu funkcí
Nalezněte derivaci funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$, kde $f(x) = 2x^2$ a $g(x) = \sin x$.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \left[\frac{2x^2}{\sin x}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{4x \cdot \sin x - 2x^2 \cdot \cos x}{\sin^2 x}.$$

Derivace složené funkce

Nechť funkce $g(x)$ má derivaci v bodě x a funkce $F(\xi)$ derivaci v bodě $\xi_0 = g(x)$. Potom složená funkce $(F \circ g)(x) \equiv F(g(x))$ má derivaci v bodě x a platí:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Nechť $g(x)$ je funkce definovaná na intervalu (a, b). Je-li obor hodnot funkce $g(x)$ podmnožinou definičního oboru funkce $F(\xi)$ a obě funkce jsou diferencovatelné, uvedená rovnost platí na celém intervalu (a, b). Pro derivaci tří složených funkcí, kde funkce lze složit a každou z nich lze derivovat, platí vzorec:

$$[h(g(f(x)))]' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

pro derivace funkce více funkcí bychom postupovali obdobně.

Příklad 4. Derivace složené funkce
Nalezněte derivaci funkce $h(g(f(x)))$, kde $f(x) = 2x^2$ a $g(x) = \sin x$ a $h(x) = \ln x$.

$$\begin{aligned} [h(g(f(x)))]' &= [\ln(\sin(2x^2))]' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x) = \\ &= \ln'(\sin(2x^2)) \cdot \sin'(2x^2) \cdot (2x^2)' = \\ &= \frac{1}{\sin(2x^2)} \cdot \cos(2x^2) \cdot 4x. \end{aligned}$$

Derivace „funkce na funkci“

Nechť $f(x)$ a $g(x)$ jsou reálné funkce, které mají v bodě x derivace $f'(x)$ a $g'(x)$. Potom platí:

$$\left[(f(x))^{g(x)}\right]' = \left[\mathrm{e}^{\ln(f(x))\cdot g(x)}\right]' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot g(x) + \ln(f(x)) \cdot g'(x)\right)$$

Příklad 5. Derivace „funkce na funkci“
Nalezněte derivaci funkce $g(x)^{f(x)}$, kde $f(x) = 2x^2$ a $g(x) = \sin x$.

$$\begin{aligned} \left[(g(x))^{f(x)}\right]' &= \left[(\sin x)^{2x^2}\right] = \left[\mathrm{e}^{\ln(g(x))\cdot f(x)}\right]' = \left[\mathrm{e}^{\ln(\sin x)\cdot 2x^2}\right]' = \\ &= g(x)^{f(x)} \cdot \left(\frac{g'(x)}{g(x)} \cdot f(x) + \ln(g(x)) \cdot f'(x)\right) = \\ &= (\sin x)^{2x^2} \cdot \left(\frac{\cos x}{\sin x} \cdot 2x^2 + \ln(\sin x) \cdot 4x\right). \end{aligned}$$

Derivace inversní funkce

Nechť $y = f^{-1}(x)$ je funkce inversní k prosté funkci $x = f(y)$. Potom platí:

$$\left[f^{-1}(x)\right] = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Derivace elementárních funkcí

1. $[c]' = 0,$
2. $[x^p]' = p \cdot x^{p-1}, \quad x \in (0, \infty), (p \in \mathbb{R})$

3. $[\mathrm{e}^x]' = \mathrm{e}^x, \quad x \in (-\infty, \infty)$,
4. $[a^x]' = \ln a \cdot a^x, \quad x \in (-\infty, \infty), (a > 0, a \neq 1)$,
5. $[\ln x]' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$,
6. $[\log_a x]' = \frac{1}{\ln a \cdot x}, \quad x > 0, (a > 0, a \neq 1)$,
7. $[\sin x]' = \cos x, \quad x \in (-\infty, \infty)$,
8. $[\cos x]' = -\sin x, \quad x \in (-\infty, \infty)$,
9. $[\mathrm{tg}\, x]' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq (k + \frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}$,
10. $[\mathrm{cotg}\, x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$,
11. $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$,
12. $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$,
13. $[\mathrm{arctg}\, x]' = \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in (-\infty, \infty)$,
14. $[\mathrm{arccotg}\, x]' = -\frac{1}{x^2+1}, \quad x \in (-\infty, \infty)$,

Diferenciál funkce

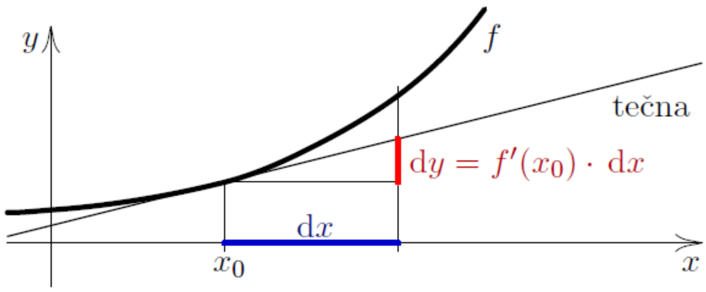
Podle definice je derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 směrnice tečny ke grafu funkce v bodě x_0. Toho lze využít pro napsání rovnice tečny.

Rovnice tečny

Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$. Potom tečna ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$ má rovnici

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Derivace funkce $f(x)$ v bodě x_0 je číslo. Naproti tomu diferenciál d funkce $f(x)$ v bodě x_0 je **zobrazení**, které přírůstku dx přiřadí přírůstek dy na tečně ke grafu funkce v bodě x_0, tj. přírůstek dx násobený hodnotou derivace $f'(x_0)$.



Obrázek 4: Diferenciál je přírůstek funkce na tečně.

Diferenciál funkce

Nechť funkce $y = f(x)$ má derivaci v bodě x_0. Potom diferenciál df funkce $f(x)$ v bodě x_0 je zobrazení, které přírůstku dx proměnné x přiřadí přírůstek hodnoty dy na tečně:

$$\mathrm{d}f : \mathrm{d}x \mapsto \mathrm{d}y = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x \qquad \text{přesněji} \qquad (\mathrm{d}f)(x_0)\mathrm{d}x = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x.$$

Diferenciál udává, o kolik se přibližně změní hodnota funkce $f(x)$, pokud se od bodu x posuneme o hodnotu dx.

Příklad 6. (Diferenciál funkce)
Vypočítejte funkční hodnotu funkce $f(x) = \sin x$ v bodě 0,1.

Víme, že funkce je $f(x) = \sin x$, ale chybí nám dx a x_0. Uvědomíme si, kterou nejbližší hodnotu funkce $f(x)$ k hledanému bodu známe. Známe hodnotu funkce $f(x)$ v bodě $x_0 = 0$, a tedy dx = 0,1.

Postupně $f'(x) = \cos x$, $f'(x_0) = \cos 0 = 1$. Pak $(\mathrm{d}f)(x_0)\mathrm{d}x = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x = 1 \cdot 0{,}1 = 0{,}1$. Tedy přibližná hodnota $\sin 0{,}1 = 0{,}1$.

Druhý diferenciál funkce

Diferenciál $\mathrm{d}^2 f$ funkce $f(x)$ v bodě x_0 je zobrazení, které přírůstku $\mathrm{d}x$ proměnné x přiřadí číslo:

$$\mathrm{d}^2 f : \mathrm{d}x \mapsto \mathrm{d}y = f''(x_0) \cdot (\mathrm{d}x)^2 \qquad \text{tj.} \qquad (\mathrm{d}^2 f)(x_0)\mathrm{d}x = f''(x_0) \cdot (\mathrm{d}x)^2.$$

Na rozdíl od prvního diferenciálu nelze druhý diferenciál přímo geometricky popsat. Později pomocí prvního, druhého a dalších diferenciálů budeme konstruovat **Taylorův polynom**, který v okolí bodu x_0 bude aproximovat hodnoty funkce $f(x)$.

K-tý diferenciál funkce

Nechť funkce $f(x)$ má v bodě x_0 k-tou derivaci. Diferenciál k-tého řádu $\mathrm{d}^k f$ funkce $f(x)$ v bodě x_0 je zobrazení, které přírůstku $\mathrm{d}x$ proměnné x přiřadí číslo:

$$\mathrm{d}^k f : \mathrm{d}x \mapsto \mathrm{d}y = f^{(k)}(x_0) \cdot (\mathrm{d}x)^{(k)} \qquad \text{tj.} \qquad (\mathrm{d}^k f)(x_0)\mathrm{d}x = f^{(k)}(x_0) \cdot (\mathrm{d}x)^{(k)}.$$

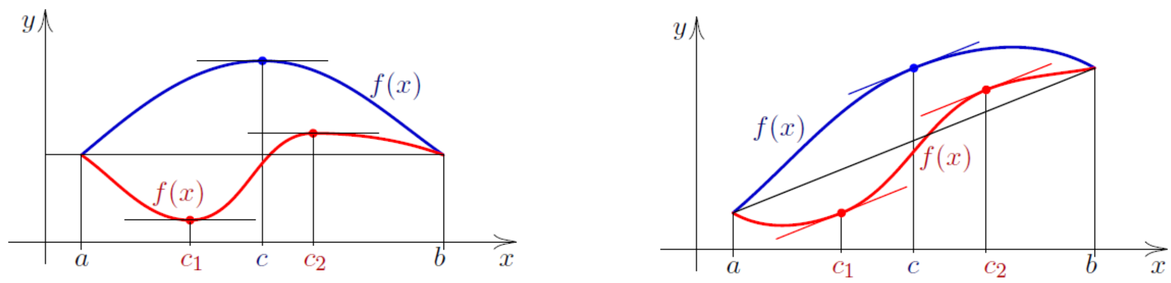
Věty o střední hodnotě

Víme, že funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $I = \langle a, b\rangle$ nabývá všech hodnot mezi hodnotami $f(a)$ a $f(b)$. Speciálně, pokud hodnoty $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znaménka, pak existuje alespoň jedno $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.

Podobné tvrzení platí i pro derivaci funkce. Pokud funkce má derivace na intervalu (a, b), která je na jednom konci intervalu kladná a na druhém konci záporná, potom existuje uvnitř intervalu alespoň jeden bod, ve kterém je derivace nulová.

Rolleova věta

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť má derivaci v každém bodě $x \in (a, b)$, a navíc platí $f(a) = f(b)$. Potom existuje alespoň jedno číslo $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.



Obrázek 5: Vlevo Rolleova věta o nulové derivaci. Vpravo Lagrangeova věta o střední hodnotě.

Rolleova věta v podstatě říká, že v intervalu (a, b) existuje bod, ve kterém je tečna ke grafu funkce rovnoběžná s osou x.

Vypuštěním předpokladu $f(a) = f(b)$ dostáváme následující větu.

Lagrangeova věta o střední hodnotě

Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, která má derivaci v každém bodě x z intervalu (a, b). Potom existuje alespoň jedno číslo $c \in (a, b)$ takové, že

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Lagrangeova věta o střední hodnotě říká, že v intervalu (a, b) existuje bod, ve kterém je tečna ke grafu funkce rovnoběžná se spojnicí bodu $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$. Věta o střední hodnotě je užitečná v řadě aplikací. Jejím důsledkem je tvrzení, že pokud $f'(x) > 0$ v intervalu (a, b), potom je v tomto intervalu funkce **rostoucí**. Pokud je $f'(x) < 0$ v intervalu (a, b), potom je v tomto intervalu funkce **klesající**.

Výpočet limity pomocí L'Hospitalova pravidla

Běžné limity výrazů, které vzniknou operacemi nebo složením několika spojitých funkcí, spočítáme zpravidla snadno, protože nám pomohou pravidla pro limity součtu, součinu, podílu či složení limit. Situace je zcela přehledná i v případech, kdy obdržíme výrazy typu $\infty + \infty = \infty, \infty \cdot \infty = \infty, 0 \cdot 0 = 0, \frac{0}{\infty} = 0$.

Skutečný problém nastává, když obdržíme některý z neurčitých výrazů, které jsme uvedli dříve. Připomeňme si je: $\infty - \infty, \quad -\infty + \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^{\infty}$. Výpočet limity neurčitých výrazů ve tvaru podílu lze často určit pomocí derivace užitím tvrzení, které se nazývá **L'Hospitalovo pravidlo**.

L'Hospitalovo pravidlo pro limity typu $\frac{0}{0}$

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají konečné derivace v pravém ryzím okolí bodu x_0, tj. v intervalu $(x_0, x_0 + \Delta)$, a nulové limity v bodě x_0 zprava, tj. $\lim_{x \to x_0+} f(x) = \lim_{x \to x_0+} g(x) = 0$. Nechť existuje limita podílu derivací

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

konečná nebo nekonečná. Potom existuje i limita podílu funkcí a obě limity se rovnají, tj.

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Tvrzení platí pro oboustrannou i jednostrannou limitu zleva v konečném bodě x_0 a také pro limity v nekonečnu, tj. pro $x \to \infty$ a $x \to -\infty$.

L'Hospitalovo pravidlo pro limity typu $\frac{\infty}{\infty}$

Nechť funkce $f(x)$ a $g(x)$ mají konečné derivace v pravém ryzím okolí bodu x_0, tj. v intervalu $(x_0, x_0 + \Delta)$, a nekonečné limity v bodě x_0 zprava, tj. $\lim_{x \to x_0+} |f(x)| = \lim_{x \to x_0+} |g(x)| = 0$. Nechť existuje limita podílu derivací

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

konečná nebo nekonečná. Potom existuje i limita podílu funkcí a obě limity se rovnají, tj.

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Tvrzení platí pro oboustrannou i jednostrannou limitu zleva v konečném bodě x_0 a také pro limity v nekonečnu, tj. pro $x \to \infty$ a $x \to -\infty$.

Důležité poznámky:

a) Vždy ověřte typ limity, než začnete počítat. V případě limity typu $\frac{c}{\infty}$, kde c je konstanta, L'Hospitalovo pravidlo aplikovat nemusíte.

b) Tvrzení říkají, že pokud existuje limita vpravo, tj. umíme ji určit, existuje i limita vlevo. Pokud limita vpravo neexistuje, neexistuje ani limita vlevo.

c) Pravidlo lze použít po úpravě i na limity, které nemají tvar podílu, ale které lze na podíl převést.

d) Často nevíme, zda existuje limita vpravo nebo ji neumíme určit. Pokud zjistíme, že jde o limitu typu $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$, lze pravidlo použít znovu. Pokud existuje limita podílu druhých derivací, existuje i limita podílu prvních derivací a díky tomu existuje i původní limita podílu funkcí. Tyto limity jsou vždy stejné.

Příklady využití L'Hospitalova pravidla

a) **Dvojí aplikace L'Hospitalova pravidla:**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{0+\sin x}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

b) **Trojí aplikace L'Hospitalova pravidla:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{3x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{6x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{6} = \infty.$$

c) **Příklad, kdy limita vpravo po aplikaci L'Hospitalova pravidla neexistuje, ale původní limita existuje:**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\cos x}{1} = 2 + \lim_{x\to\infty}\cos x.$$

Limita vpravo neexistuje, protože funkce $\cos x$ například pro $x = k\pi$ nabývá hodnot $\cos(k\pi) = (-1)^k$. Jednoduchou úpravou však lze spočítat původní limitu:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x(2+\frac{1}{x}\sin x}{x} = 2 + \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 2.$$

d) **Součin funkcí**

L'Hospitalovo pravidlo funguje pro podíl dvou funkcí, nikoli pro součin. Proto je třeba součin funkcí převést „trikem" na jejich podíl.

$$\lim_{x\to x_{0+}} x\cdot\ln x = \lim_{x\to x_{0+}}\frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to x_{0+}}\frac{1}{-\frac{1}{x(\ln x)^2}} = \lim_{x\to x_{0+}}\Big(-x\cdot(\ln x)^2\Big),$$

odkud opět dostáváme neurčitý výraz typu $0\cdot\infty$. Co to zkusit obráceně?

$$\lim_{x\to x_{0+}} x\cdot\ln x = \lim_{x\to x_{0+}}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to x_{0+}}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to x_{0+}}(-x) = 0.$$

e) **Případ „funkce na funkci" 1** (1^∞)

Limita $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ je neurčitý výraz typu 1^∞. Jak jsme uvedli dříve, funkci typu $f(x)^{g(x)}$ převedeme nejprve na typ $\mathrm{e}^{g(x)\cdot\ln(f(x))}$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left[\mathrm{e}^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]^x = \mathrm{e}^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

a vypočítáme limitu exponentu.

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2+x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x} = 1.$$

Vypočtenou hodnotu limity exponentu dosadíme do původní funkce. Spočítali jsme tak limitu, které se užívá k zavedení Eulerovy konstanty e.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

f) **Případ „funkce na funkci" 2** (0^0)

$$\lim_{x\to x_{0+}} x^x = \lim_{x\to x_{0+}} \mathrm{e}^{x\cdot\ln x}.$$

Vypočítáme limitu exponentu.

$$\lim_{x\to x_{0+}} x\cdot\ln x = \lim_{x\to x_{0+}}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to x_{0+}}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to x_{0+}}(-x) = 0,$$

odkud plyne $\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$.

g) **Případ „funkce na funkci" 3** (∞^0)

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{(\ln x)/x}$$

Opět vypočítáme limitu exponentu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0,$$

odkud plyne $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x} = \mathrm{e}^0 = 1$.

Některé užitečné limity

Umění porovnat limity funkcí $\ln x, x^p$ a e^x v nule a v nekonečnu v případě, kdy hodnoty funkcí jdou „proti sobě", může značně usnadnit práci s limitami. Jde například i limity typu $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.
a) V nule mocnina „přemůže" logaritmus:

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0.$$

Stejný výsledek platí pro libovolnou kladnou mocninu x^p, kde $p>0$.

b) V nekonečnu je mocnina „silnější" než logaritmus, ale „slabší" než exponenciála:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{1} = \infty.$$

Oba výsledky platí pro libovolné kladné mocniny x^p.

c) Exponenciála e^x je „silnější" než mocnina x také v minus nekonečnu:

$$\lim_{x\to-\infty} x\cdot\mathrm{e}^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^{-x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\mathrm{e}^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} -\mathrm{e}^x = 0.$$

Výsledek platí i pro obecnou kladnou mocninu x^p.