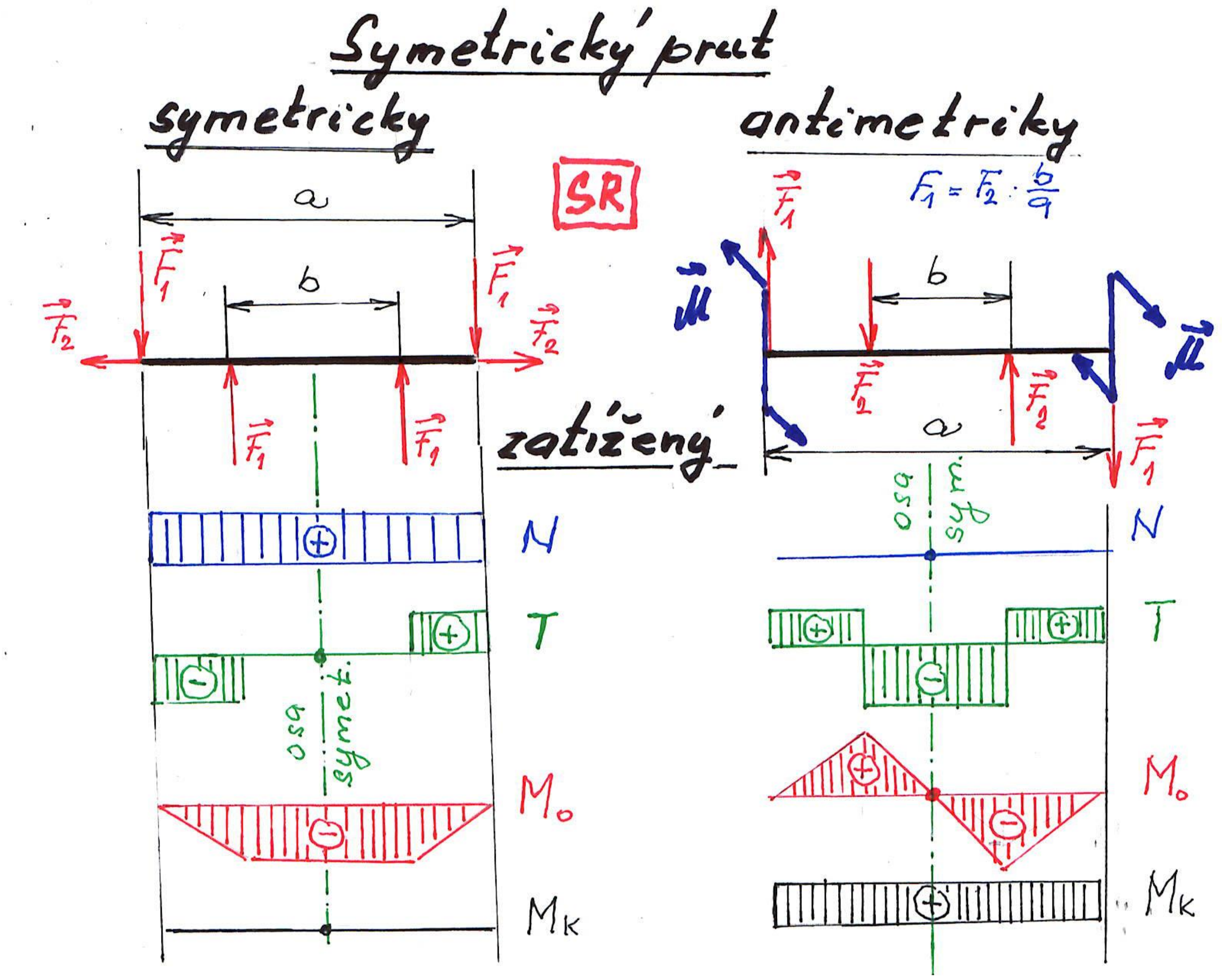
10. cvičení Pružnost a pevnost 1

Namáhání na ohyb – Pruty zakřivené a zalomené. Uzavřené pruty (rámy). Využití symetrie a antimetrie (antisymetrie)

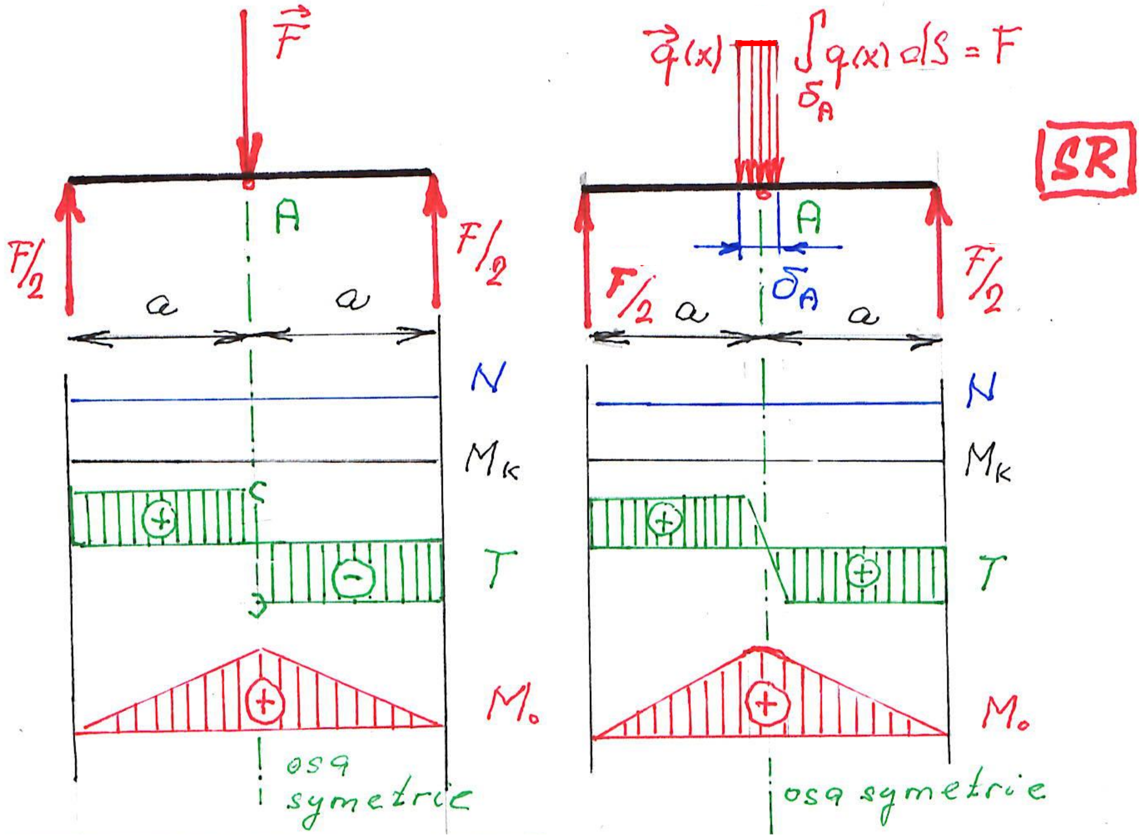
Úvod

Výsledné vnitřní účinky, v bodě tělesa (dále jen „VVÚ“) jsou obecně množina šesti souřadnic silové a momentové výslednice výsledných vnitřních sil v těžišti příčného průřezu ($\mathrm{VVÚ} = \{\mathrm{N}, \mathrm{T_y}, \mathrm{T_z}, \mathrm{M_k}, \mathrm{M_{oy}}, \mathrm{M_{oz}}\}$). VVÚ a vnější silová soustava jsou v rovnováze na uvolněném prvku Ω_0.

V dalším výkladu se zaměříme na rovinné symetrické, symetricky a antimetricky zatížené pruty. Symetrický prut je symetrický z hlediska geometrie, materiálu a vazeb. U symetrického, symetricky zatíženého prutu jsou **na ose symetrie** nenulové pouze **symetrické souřadnice VVÚ (N, M_o)** a u symetrického antimetricky zatíženého prutu jsou **na ose symetrie** nenulové pouze **antimetrické souřadnice VVÚ (T, M_k)** - viz obr. 0.1.



Obr. 0.1

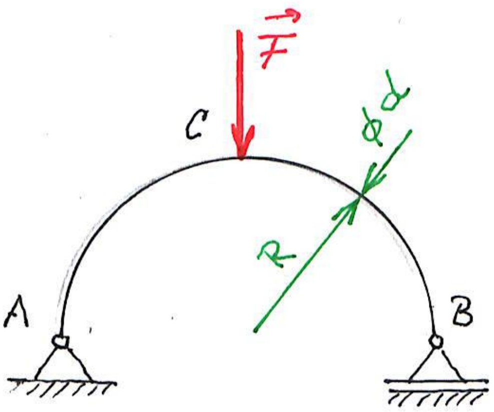


Obr. 0.2

Poznámka: Pokud je silové působení na těleso vyjádřeno silou, pak v místě působení síly není definovaná posouvající síla T(x), (bod nespojitosti). V případě, že použijeme reálnější model rozloženého silového působení je posouvající síla u symetrického prutu symetricky zatíženého na ose symetrie nulová, viz obr. 0.2.

Příklad 1

U tělesa podle obr. 1.1 určete bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti a svislý posuv bodu C, je-li:



Obr. 1.1

$\phi d = 15$ mm,
R = 150 mm,
F = 1000 N.

Materiál tělesa je ocel s mezí kluzu $\sigma_k = 350$ MPa. Pro materiál tělesa můžeme použít model Hookovského materiálu.

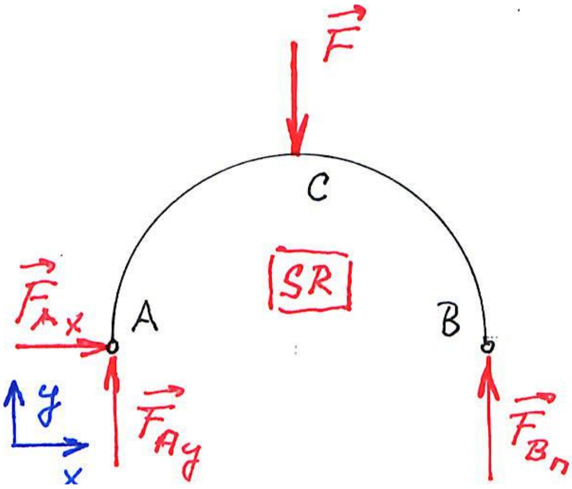
Rozbor:

Těleso má charakter vnějškově uzavřeného, slabězakřiveného prutu, protože poměr délky prutu a průměru je větší než 5 ($\pi R/d > 5$). Pokud extrémní napětí je menší nebo rovno σ_k, ($\sigma_{ext} \leq \sigma_k$), splňuje úloha podmínku lineárnosti.

Řešení:

1) Úplné uvolnění: Náčrt úplného uvolnění viz obr. 1.2.

2) Statický rozbor: NP = {F_{ax}, F_{Ay}, F_{Bn}}, počet neznámých μ = 3. Soustava sil π působících na těleso je rovinná obecná, ν = 3, s = 0. Úloha je staticky určitá.



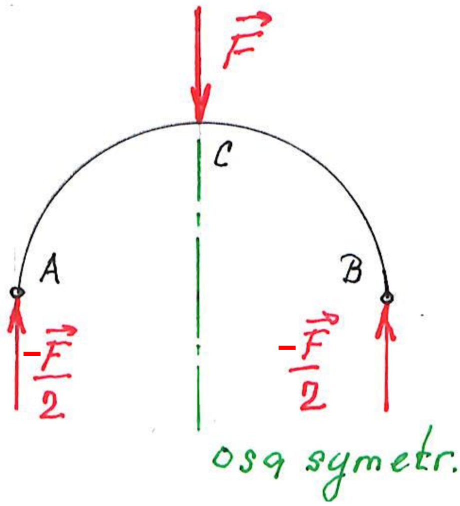
Obr. 1.2

3) Rovnice rovnováhy:

F_x: $F_{Ax} = 0$

M_{zA}: $F_{Bn} \,.\, 2R - F.R = 0 \Rightarrow F_{Bn} = F_{Ay} = \frac{F}{2}$

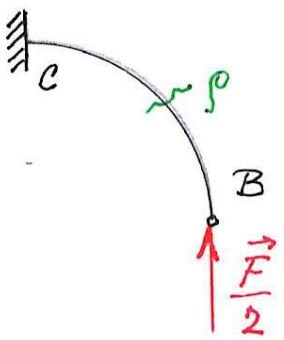
Nyní načrtneme uvolnění prutu s nenulovými výslednými stykovými silami – obr. 1.3.



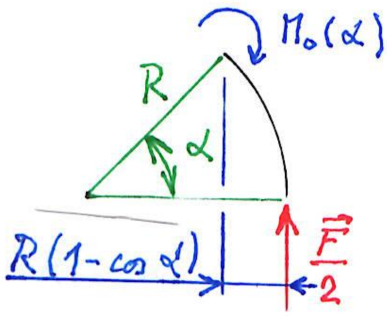
Obr. 1.3

I když uložení prutu není symetrické, působení nenulových sil symetrické je. Proto bod C má vlastnosti bodu na ose symetrie symetrického, symetricky zatíženého prutu, tedy u_C =0 a φ_C = 0.

Pokud by i w_C = 0, pak v bodě C by byly stejné podmínky jako ve vetknutí. Vzhledem k tomu, že body A, B jsou uvolněné, umístíme-li v bodě C pevnou vazba (vetknutí), deformace prutu bude stejná jako při původním uložení, pouze vertikální posuv (w) bodů prutu se relativně změní o hodnotu posuvu w_C. Deformace a namáhání prutu budou symetrické podle osy symetrie. Dále se budeme zabývat polovinou prutu viz obr. 1.4a. Řezem ρ oddělíme prvek a vyznačíme podstatnou souřadnici VVÚ - $M_o(\alpha)$ viz obr. 1.4b. Protože $\pi R/d > 5$, je z hlediska určení deformačního parametru podstatnou souřadnicí VVÚ $M_o(\alpha)$.



Obr. 1.4a



Obr. 1.4b

$M_o(\alpha) = \frac{F}{2}$. R.(1- cos α), maximální ohybový moment je v místě C pro α = 90 °, cos α = 0.

$$M_{o,max} = \frac{F}{2}\,.\,R$$

V bodě C je T = 0, N= 0 a $M_{o,max} = \frac{F}{2}\,.\,R$ = 500.150 = 75 000 Nmm

Extrémní ohybové napětí $\sigma_{ext} = \frac{Mo,max}{Wo}$ = 32 $M_{o\,max}/\pi.d^3$ = 75000 / 331 = 226 MPa

Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti: $k_k = \sigma_k/\sigma_{ext}$ = 350/226 = 1,55.

Určení posuvu v bodě C

V předchozím jsme vysvětlili, že posuv v bodě C na obr. 1.1 je roven posuvu v bodě B u prutu na obr. 1.4a. Úloha je lineární, proto k určení u_B použijeme Maxwell – Mohrovu variantu Castiglianovy věty.

$$u_B = \frac{\partial W}{\partial (F/_2)} = \int_0^{\pi/2} \frac{M_{o(\alpha)}}{EJ}\frac{\partial M_{o(\alpha)}}{\partial(\frac{F}{2})}.R.d\alpha$$

$$M_o(\alpha) = \frac{F}{2}.R.(1-\cos\alpha), \qquad \frac{\partial M_{o(\alpha)}}{\partial(\frac{F}{2})} = R.(1-\cos\alpha)$$

$$u_B = \frac{1}{EJ}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{F}{2}.R.(1-\cos\alpha).R.(1-\cos\alpha).R.d\alpha$$

$$M_o(\alpha) = \frac{F}{2}.R(1-\cos\alpha);\quad \frac{\partial M_o}{\partial\frac{F}{2}} = R(1-\cos\alpha)$$

$$u_B = \frac{F}{2EJ}\int_0^{\pi/2} R(1-\cos\alpha).R(1-\cos\alpha).Rd\alpha = \frac{FR^3}{2EJ}\int_0^{\pi/2}(1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha)d\alpha$$

$$= \frac{FR^3}{2EJ}\int_0^{\pi/2}\left(1-2\cos\alpha+\frac{1+\cos2\alpha}{2}\right)d\alpha = \dots = \frac{FR^3}{2EJ}\left[\frac{3}{4}\pi-2\right]$$

$F = 1000\,N$; $R = 150\,mm$; $\phi d = 15\,mm$, $E = 2{,}1.10^5\,MPa$

$R^3 = 3{,}375.10^6\,mm^3$; $J = \frac{\pi d^4}{64} = 2{,}485.10^3\,mm^4$

$$u_B = \frac{1000.3{,}375.10^6}{2.2{,}1.10^5.2{,}485.10^3}\left[\frac{3}{4}\pi-2\right] = 3{,}234.0{,}3562 =$$

$$\underline{1{,}152\,mm}$$

Závěr

Bezpečnost prutu vzhledem k meznímu stavu pružnosti je 1,55 a posuv v bodě C je 1,152 mm.

Poznámka: $\sin^2\alpha = \frac{1-cos2\alpha}{2}$; $\cos^2\alpha = \frac{1+cos2\alpha}{2}$

Příklad 2

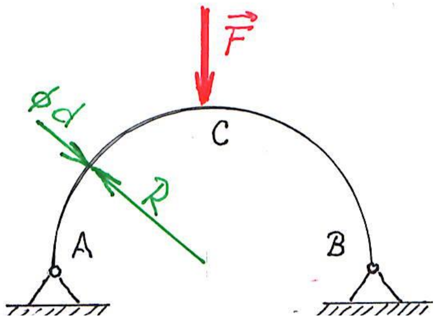
U tělesa podle obr. 2.1 určete bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti a průhyb v bodě C, je-li:

ϕd = 15 mm,

R = 150 mm,

F = 1000 N.

Materiál tělesa je ocel s mezí kluzu σ_k = 350 MPa. Pro materiál tělesa můžeme použít model Hookovského materiálu.



Obr. 2.1

Rozbor:

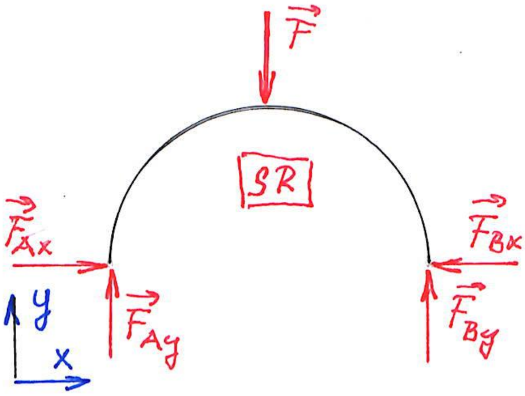
Těleso má charakter vnějškově uzavřeného, slabě zakřiveného prutu, protože délka prutu R/d > 5. Pokud extrémní napětí je menší nebo rovno σ_k, ($\sigma_{ext} \leq \sigma_k$), splňuje úloha podmínku lineárnosti.

Řešení:

1) Úplné uvolnění: Náčrt úplného uvolnění viz obr. 2.2.

2) Statický rozbor: NP = {F_{ax}, F_{Ay}, $F_{Bx,}$ F_{By}}, počet neznámých μ=4 . Soustava sil π působících na těleso je rovinná obecná, ν = 3, s = 1. Úloha je 1x staticky neurčitá.

3) Rovnice rovnováhy:



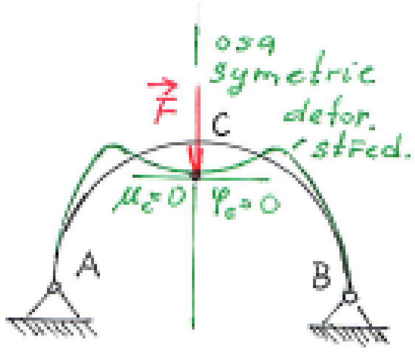
Z momentové rovnice M_{zA} určíme F_{By} a F_{Ay}.

Mz_A: $F_{By}.2R - F.R = 0 \Rightarrow F_{Bn} = F_{Ay} = \frac{F}{2}$

Obr. 2. 2

Protože F_{By} a F_{Ay} určíme z podmínky SR, nemůžeme pro částečné uvolnění uvolnit část vazeb související s v_A nebo $v_{B,}$ viz obr. 2.7a, b.

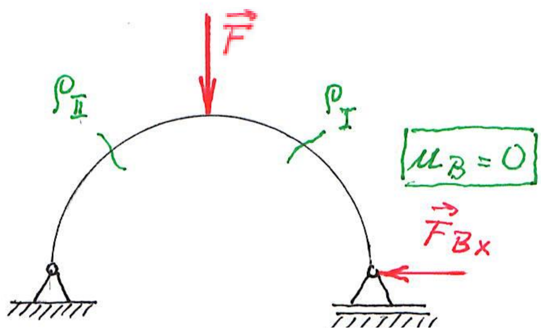
Prut je symetricky, symetricky zatížený. Osa symatrie je svislá a prochází bodem C, viz obr. 2.3.



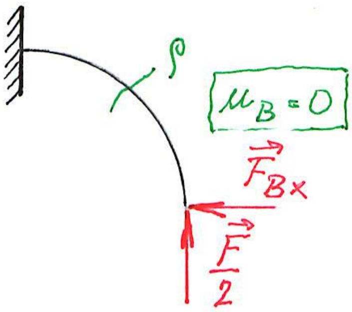
Obr. 2.3

4. Částečné uvolnění:

Prut můžeme částečně uvolnit bez využití symetrie (viz obr. 2.4) nebo s využitím symetrie (viz obr. 2.5).



Obr. 2.4



Obr. 2.5

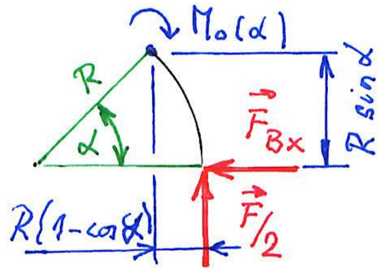
Řešení s využitím symetrie (jeden řez) je operačně podstatně jednodušší než bez využití symetrie (dva řezy), proto použijeme řešení s využitím symetrie viz obr. 2.5. K částečnému uvolnění s využitím symetrie využijeme znalostí z Příkladu 1.

5. Vyjádření deformační podmínky v silovém tvaru:

K vyjádření deformační podmínky v silovém tvaru použijeme Maxwell – Mohrovu variantu Castigliánovy věty. Vzhledem k poměru $\pi R/d > 5$ (MT-Úlohy z PP I, A 65) je z VVÚ podstatný $M_o(\alpha)$, proto oddělíme prvek a vyjádříme $M_o(\alpha)$ viz obr. 2.6.

$$M_o(\alpha) = \frac{F}{2}.\ R.(1-\cos\alpha) - F_{Bx}.R.\sin\alpha$$

$$\frac{\partial M_{o(\alpha)}}{\partial(F_{Bx})} = R.\sin\alpha$$



Obr. 2.6

Vyjádření deformační podmínky **$u_B = 0$**, v silovém tvaru viz obr. 2.5. Ze známého posuvu u_B určíme výslednou stykovou sílu **F_{Bx}**.

$$M_o(\alpha) = \frac{F}{2}.R(1-\cos\alpha) - F_{Bx}.R.\sin\alpha; \quad \frac{\partial M_o(\alpha)}{\partial F_{Bx}} = -R\sin\alpha$$

$$u_B = \frac{1}{EJ}\int_0^{\pi/2}\left[\left(\frac{F}{2}.R(1-\cos\alpha) - F_{Bx}.R\sin\alpha\right)(-R\sin\alpha)\right]R\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{EJ}\int_0^{\pi/2}\left[\left(\frac{F}{2}.R^2(\sin\alpha.\cos\alpha - \sin\alpha\right) + F_{Bx}R^2.\sin^2\alpha\right].R\,d\alpha =$$

$$= \frac{R^3}{EJ}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{F}{2}\left(\frac{2}{2}\sin\alpha.\cos\alpha - \sin\alpha\right) + F_{Bx}\,\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\right]d\alpha =$$

$$= \frac{R^3}{EJ}\left[\frac{F}{2}\left(-\frac{1}{2}\,\frac{\cos 2\alpha}{2} + \cos\alpha\right) + F_{Bx}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4}\right)\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{R^3}{EJ}\left[\frac{F}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0 - 1\right) + F_{Bx}\left(\frac{\pi}{4} - 0 + 0\right)\right] =$$

$$= \frac{R^3}{EJ}\left[-\frac{F}{4} + \frac{F_{Bx}}{4}.\pi\right] = 0 \Rightarrow \underline{F_{Bx} = \frac{F}{\pi}}$$

Dále určíme vertikální posuv v bodě B viz obr. 2.5, který odpovídá w_C u původního uložení obr. 2.1.

$$v = \frac{\partial W}{\partial\left(\frac{F}{2}\right)}; \quad M_o(\alpha) = \frac{F}{2}R(1-\cos\alpha) - F_{Bx}R.\sin\alpha;$$

$$\frac{\partial M_o(\alpha)}{\partial\left(\frac{F}{2}\right)} = R(1-\cos\alpha)$$

$$V = \frac{1}{EJ}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{F}{2}R(1-\cos\alpha) - F_{Bx}\cdot R.\sin\alpha\right).R(1-\cos\alpha)R\,d\alpha =$$

$$= \frac{R^3}{EJ}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{F}{2}(1-\cos\alpha)^2 - F_{Bx}(\sin\alpha - \sin\alpha.\cos\alpha)\right]d\alpha =$$

$$= \frac{R^3}{EJ}\int_0^{\pi/2}\left[(1-2\cos\alpha+\cos^2\alpha) + F_{Bx}(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha)\right]d\alpha =$$

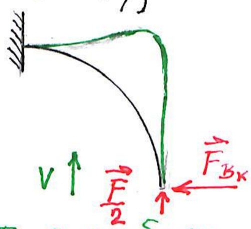
$$= \frac{R^3}{EJ}\int_0^{\pi/2}\left[\cdot\left(1-2\cos\alpha + \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\right) + F_{Bx}\left(\frac{1}{2}\sin 2\alpha - \sin\alpha\right)\right]d\alpha =$$

$$= \frac{R^3}{EJ}\left[\frac{F}{2}\left(\alpha - 2\sin\alpha + \frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4}\right) + F_{Bx}\left(-\frac{1}{2}\frac{\cos 2\alpha}{4} + \cos\alpha\right)\right]_0^{\pi/2} =$$

$\to F_{Bx} = F/\pi$

$$= \frac{R^3}{EJ}\left[\frac{F}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 2 + \frac{\pi}{4} + 0\right) + F_{Bx}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 0 - 1\right)\right] =$$

$$= \frac{FR^3}{EJ}\left[\frac{3}{8}\pi - 1 - \frac{1}{2\pi}\right] = \underline{0{,}02\,\frac{FR^3}{EJ}}$$



Pro $F = 1000\,N$, $R = 150\,mm$, $\phi d = 15\,mm$, $E = 2{,}1.10^5\,MPa$

$v_B = 0{,}02 \,.\, 6{,}467 = 0{,}129$ mm

Průhyb v místě C je 0,129 mm.

Určení nebezpečného řezu, extrémního napětí σ_{ext} a bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu pružnosti.

$$M_o(\alpha) = \frac{F}{2}R(1-\cos\alpha) - \frac{F}{\pi}R.\sin\alpha$$

$$\frac{\partial M_o(\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{F}{2}R.\sin\alpha - \frac{F}{\pi}R.\sin\alpha = 0;\quad tg\,\alpha = \frac{2}{\pi} \to \alpha = 32{,}5^\circ$$

$$\frac{\partial^2 M_o(\alpha)}{\partial\alpha^2} = \frac{F}{2}.R\cos\alpha + \frac{F}{\pi}R.\sin\alpha = 0{,}591\,FR > 0$$

$\alpha = 32{,}5^\circ$ lokální minimum

$\alpha = 0\,;\; M_o(0) = 0$

$\alpha = \frac{\pi}{2}\,;\; \underline{M_o(\frac{\pi}{2})} = \frac{FR}{2} - \frac{FR}{\pi} = \underline{0{,}18\,FR}$ absolutní maximum

$F = 1000\,N,\ R = 150\,mm,\ \phi d = 15\,mm,\ E = 2{,}1.10^5\,MPa$

$M_{o\,max} = 0{,}18 . 1000 . 150 = 27 . 10^3\,Nmm \qquad \sigma_k = 350\,MPa$

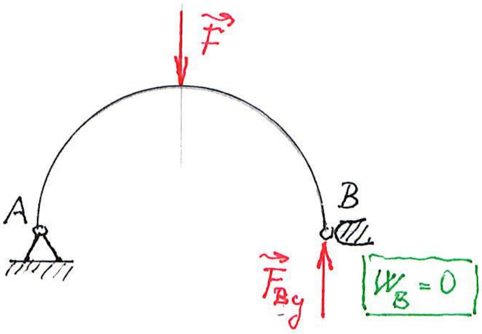
$W_o = \frac{\pi d^3}{32} = 331{,}3\,mm^3$

$$\sigma_{ex,o} = \frac{M_{o\,max}}{W_o} = 81{,}5\,MPa\ ;\quad \sigma_T = \frac{4\,F/\pi}{\pi d^2} \doteq 1{,}8\,MPa$$

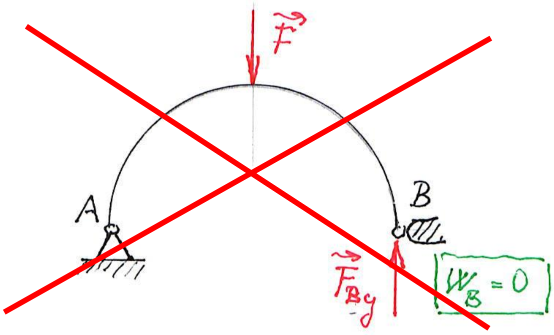
$$k_k = \frac{350}{82} \doteq 4{,}3$$

Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti $k_k = 4{,}3$.

Poznámka: Pokud prut podle obr. 2.1, který je 1x staticky neurčitý, uvolníme podle obr. 2.7a, nebude uložení prutu staticky určité, ale vyjímkové. Prut je uložený pohyblivě (vazby A, B neomezují otáčení kolem bodu A) s jedním omezeným deformačním parametrem (posuv ve směru AB). Uvolnění podle obr. 2.7b nesplňje podmínky částečného uvolnění.



Obr. 2.7a



Obr. 2.7b

Příklad 3

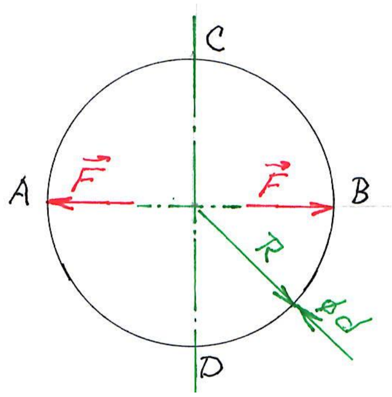
U tělesa podle obrázku 3.1 určete bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti a změnu vzdálenosti bodů A, B, je-li:

$\phi d = 15$ mm,

R = 150 mm,

F = 1000 N.

Materiál tělesa je ocel, mez kluzu σ_k = 350 MPa. Pro materiál tělesa můžeme použít model Hookovského materiálu.



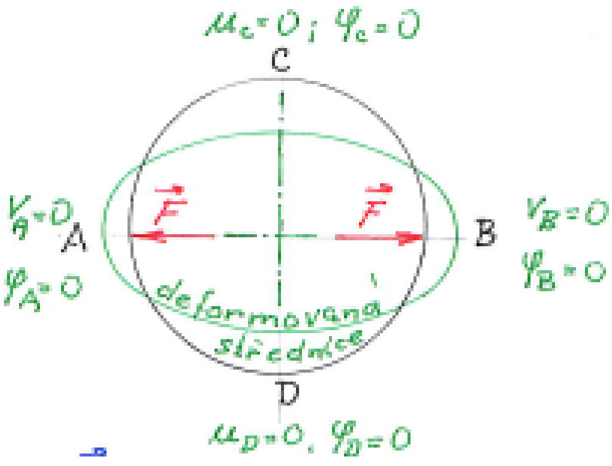
Obr. 3.1

Rozbor:

Těleso má charakter uzavřeného, slabě zakřiveného, rovinného prutu. Pokud extrémní napětí bude menší nebo rovno σ_k, ($\sigma_{ext} \leq \sigma_k$), splňuje úloha podmínku lineárnosti. Prut má dvě nezávislé osy symetrie, procházející body AB a CD. Nenulové souřadnice VVÚ na osách symetrie jsou N a M_o.

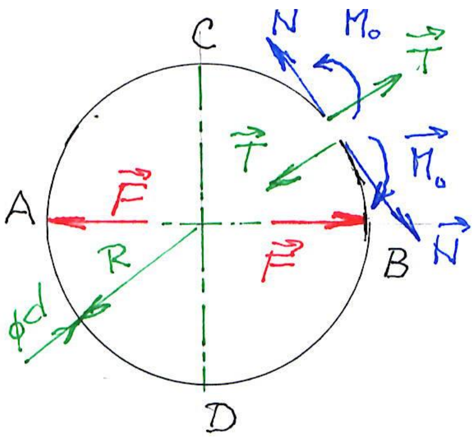
Řešení:

Prut je volný, jako celek ve statické rovnováze. Na osách symetrie jsou v důsledku symetrrie vyznačeny nulové souřadni posuvu a úhlu natočení viz obr. 3.2.



Obr. 3.2

1) Úplné uvolnění: Pokud provedeme na obecném místě prutu řez, nenulové souřadnice VVÚ v řezu jsou {N, T, Mo}, viz obr. 3.3.



Obr. 3.3

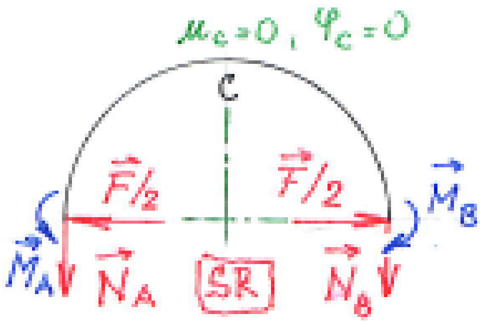
2) Statický rozbor z hlediska určení VVÚ:

NP = {N, T, Mo}, počet neznámých $\mu = 3$. Všechny rovnice rovnováhy jsou lineárně závislé, $\nu = 0$, $s = 3$. Úloha je obecně 3x staticky neurčitá.

3) Uvolnění:

Uvolníme-li prvek na ose symetrie, sníží se stupeň statické neurčitosti o 1 (obr. 3.4). Uvolníme-li prvek prutu řezy na obou osách symetrie, bude s = 1.

Nyní popíšeme uvolňování prvku řezem na ose AB a pak na CD. Následně pořadí řezů zaměníme. Osa AB je osou symetrie symetricky zatíženého úprutu, proto v řezu jsou nenulové pouze souřadnice N a Mo.



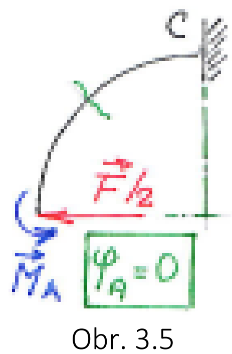
Obr. 3.4

Z momentové rovnice rovnováhy obdržíme M_{zA}: $2R.N_B = 0 \Rightarrow N_B = 0 = N_A$.

4) Částečné uvolnění čtvrtiny prutu:

Následně **částečně uvolníme** čtvrtinu prutu řezem podle osy symetrie CD (obr. 3.5). Možnost vetknout prutu v bodě C byla vysvětlena v Příkladě 1.

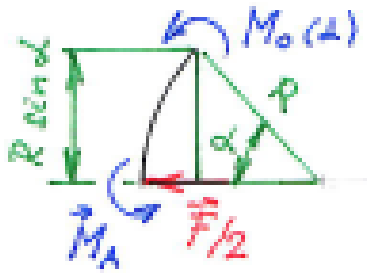
V bodě C je $u_c = 0$, $\varphi_c = 0$ a v bodě A je možněný posuv ve směru osy y, v bodě C jsme oprávnění uvažovat vetknutí



Obr. 3.5

5) Vyjádření deformační podmínky v silovém tvaru

Pro $\sigma_{ext} \leq \sigma_k$ je úloha lineární. K vyjádření φ_A použijeme Maxwell-Mohrovu variantu Castiglianovy věty. Vzhledem k tomu, že délka prvku je podstatně větši než 5d (235 > 75) , je podstatnou souřadnicí VVÚ, z hlediska určení úhlu natočení φ_A, ohybový moment Mo(α). Ohybový moment vyjádříme z odděleného prvku, viz obr 3.6.



Obr. 3.6

$$M_o\,(\alpha) = \frac{F}{2}.\,R.\sin\alpha - M_A$$

$$\frac{\partial M_{o(\alpha)}}{\partial (MA)} = -1$$

Vyjádření deformační podmínky $\varphi_A = 0$ v silovém tvaru:

$$\varphi_A = \frac{\partial W}{\partial M_A} = \frac{1}{EJ}\int_0^{\pi/2} M_o(\alpha)\cdot\frac{\partial M_o(\alpha)}{\partial M_A}\cdot R\,.\,d\alpha =$$

$$= \frac{1}{EJ}\int_0^{\pi/2}\left(F/2\cdot R.\sin\alpha - M_A\right)(-1)R\,d\alpha =$$

$$= \frac{R^2}{EJ}\int_0^{\pi/2}\left(M_A - \frac{F}{2}R.\sin\alpha\right)d\alpha = \frac{R^2}{EJ}\left[M_A\alpha - \frac{F}{2}R(-\cos\alpha)\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{R^2}{EJ}\left[M_A\frac{\pi}{2} - \frac{F}{2}R.1\right] = 0 \Rightarrow \underline{\underline{M_A = \frac{F}{\pi}R}}$$

Extrémní ohybový moment:

$$M_o(\alpha) = \frac{F}{2}\cdot R.\sin\alpha - \frac{F}{\pi}\cdot R;\quad \frac{\partial M_o(\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{F}{2}R.\cos\alpha = 0;$$

$\alpha_{ex} = \frac{\pi}{2}$; krajní bod intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, absol. extr.

$$\underline{M_o(0)} = -\frac{F}{\pi}\cdot R = \underline{-0{,}318\,FR};\quad \underline{M_o\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{FR}{2} - \frac{F.R}{\pi} = \underline{0{,}18\,FR}$$

Extremní napětí je v A, B

$$\underline{\sigma_{ex}^{A,B}} = \frac{|M_o(0)|}{W_o} = \frac{32\,|M_o(0)|}{\pi d^3} = \underline{81{,}5\ MPa}$$

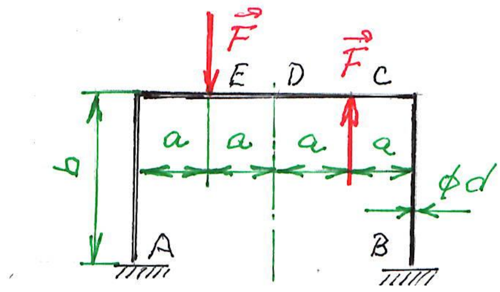
Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti k_k

$k_k = \frac{350}{81{,}5} = 4{,}29$ prut je v elastickém stavu

Poznámka: Provedeme-li řez nejdříve podle osy CD a nasledně podle AB bude postup podobný, ale ne totožny.

Příklad č. 4

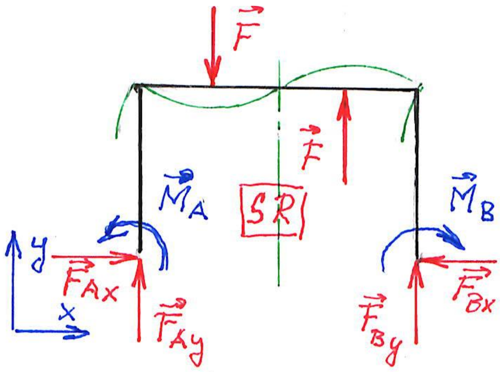
U prutu podle obrázku určete charakter uložení, je-li uložení staticky neurčité, tak načrtněte částečné uvolnění a částečné uvolnění s využitím symetrie antimetricky zatíženého prutu. Dále určete bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti, je-li: a = 150 mm, b = 200 mm, ϕd = 20 mm, F = 1000 N, materiál je ocel σ_k = 210 MPa.



Obr. 4.1

Rozbor:

Prut je symetrický, antimetricky zatížený. Charakter uložení určíme na základě statického rozboru úplně uvolněného prutu.



Obr. 4.2

1) Úplné uvolnění: Náčrt úplného uvolnění viz obr. 4.2.

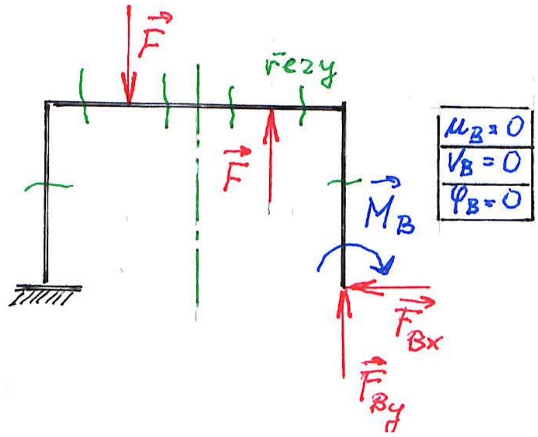
2) Statický rozbor: NP = {F_{ax}, F_{Ay}, M_A, F_{Bx}, F_{By}, M_B}, počet neznámých μ= 6. Soustava sil π působících na těleso je rovinná obecná, ν = 3, s = 3. Úloha je 3x staticky neurčitá.

3) Rovnice rovnováhy:

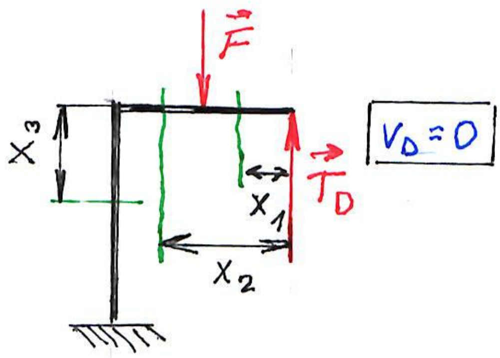
F_x: $F_{Ax} = 0$

M_{zA}: $F_{Bn} \,.\, 2R - F.R = 0 \Rightarrow F_{Bn} = F_{Ay} = \frac{F}{2}$

4) Náčrt částečného uvolnění:



Obr. 4.3



Obr. 4.4

Na obr. 4.3 je částečné uvolnění bez využití symetrie. Na obr. 4.4 je částečné uvolnění s využitím symetrie.

Řešení úlohy bez využití symetrie je operačně velmi náročné, proto k dalšímu řešení využijeme částečné uvolnění řezem na ose symetrie. Pro jednotlivé úseky prutu platí l/d > 5. Podstatnou souřadnicí VVÚ, pro určení deformační charakteristiky je ohybový moment $M_o(x)$. V důsledku zalomení střednice prut rozdělíme na tři úseky, viz obr. 4.4. K vyjádření deformační podmínky $\mathbf{v_D = 0}$, použijeme Maxwell – Mohrovu variantu Castiglianovy věty.

Nejdříve si vyjádříme ohybový moment a derivace ohybového momentu podle T_D, na jednotlivých úsecích.

$$M_o^{I}(x_1) = T_D \cdot x_1; \qquad \frac{\partial M_o^{I}(x_1)}{\partial T_D} = x_1$$

$$M_o^{II}(x_2) = T_D\,(x_2 + a) - F \cdot x_2; \qquad \frac{\partial M_o^{II}(x_2)}{\partial T_D} = x_2 + a$$

$$M_o^{III}(x_3) = T_D \cdot 2a - F \cdot a; \qquad \frac{\partial M_o^{III}(x_3)}{\partial T_D} = 2a$$

Nyní dosadíme do deformační podmínky **v_D = 0** a ze známé hodnoty posuvu určíme T_D.

$$\boxed{v_D = 0}$$

$$v_D = \frac{1}{EJ}\left[\int_0^a M_o^{I}(x_1)\cdot\frac{\partial M_o^{I}(x_1)}{\partial T_D}\cdot dx_1 + \int_0^a M_o^{II}(x_2)\frac{\partial M_o^{II}(x_2)}{\partial T_D}\,dx_2 + \int_0^b M_o^{III}(x_3)\cdot\frac{\partial M_o^{III}(x_3)}{\partial T_D}\,dx_3\right] = 0; \quad : \frac{1}{EJ} \neq 0$$

$$\int_0^a T_D\cdot x_1\cdot x_1\,dx_1 + \int_0^a \left(T_D\,(a + x_2) - F x_2\right)(x_2 + a)\,dx_2 +$$

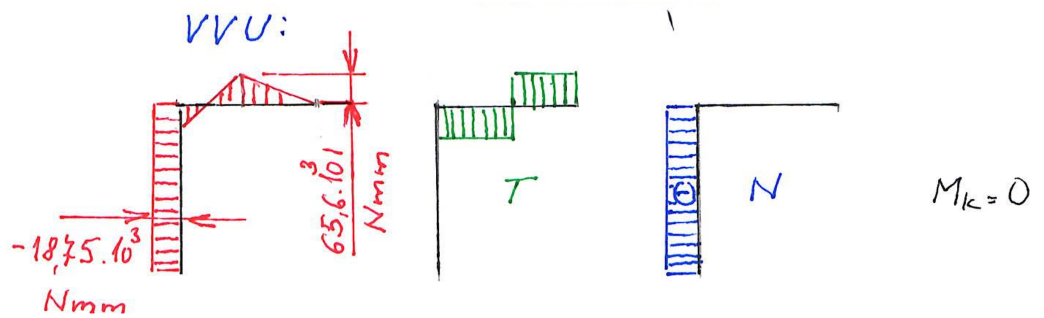
$$\int_0^a T_D\cdot x_1\cdot x_1\,dx_1 + \int_0^a \left(T_D\,(a + x_2) - F x_2\right)(x_2 + a)\,dx_2 +$$

$$+\int_0^b (T_D\cdot 2a - F\cdot a)\cdot 2a\cdot dx_3 = 0$$

$$T_D\left[\frac{x_1^3}{3}\right]_0^a + T_D\left[a^2 x_2 + \frac{2a x_2^2}{2} + \frac{x_2^3}{3}\right]_0^a - F\left[\frac{x_2^3}{3} + a\frac{x_2^2}{2}\right]_0^a +$$

$$+ (T_D\cdot 2a - F\cdot a)\cdot 2a\,[x_3]_0^b = 0 \;\ldots\; \underline{T_D = 0{,}4375\,F}$$

$$\underline{T_D = 437{,}5\,N}$$



Z průběhu VVÚ je patrné, že nebezpečný řez prochází bodem E střednice a nebezpečná místa jsou ve dvou bodech na povrchu tohoto řezu. Následně určíme extrémní napětí a bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti:

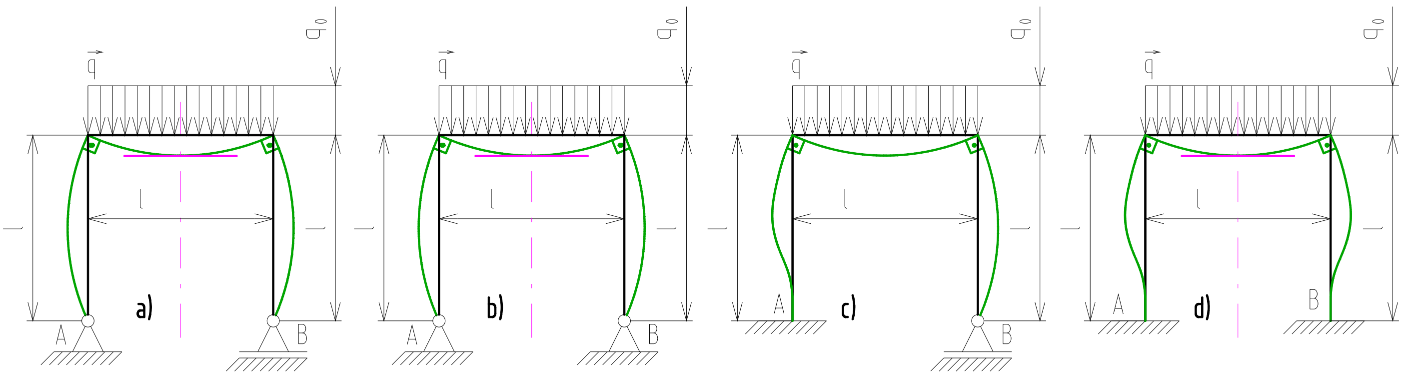
$$\sigma_{ex}^{E} = \frac{M_o^E}{W_o} = \frac{32 M_o^E}{\pi d^3} = \frac{32 . 437{,}5 . 150}{\pi \, 20^3} = \underline{\underline{83{,}6 \ MPa}}$$

$$k_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{ex}} = \frac{210}{83{,}6} = 2{,}5$$

Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti je 2,5.

Příklad č. 5 (neřešený)

Posuďte bezpečnost k mezníku stavu pružnosti u 4 konstrukčních variant rámu, znázorněných na obr. 5.1. Rám je v horní části zatížen spojitým liniovým zatížením q_0 = 2 N/mm. Délka l = 0,8 m a příčný průřez je kruhového tvaru o průměru ød = 25 mm. Rám je vyroben z oceli s σ_k = 250 MPa. Jednotlivé varianty se od sebe liší pouze vazbami, které spojují rám k základnímu tělesu.



Obr. 5. 1

Výsledky:

a) k_k = 2,39

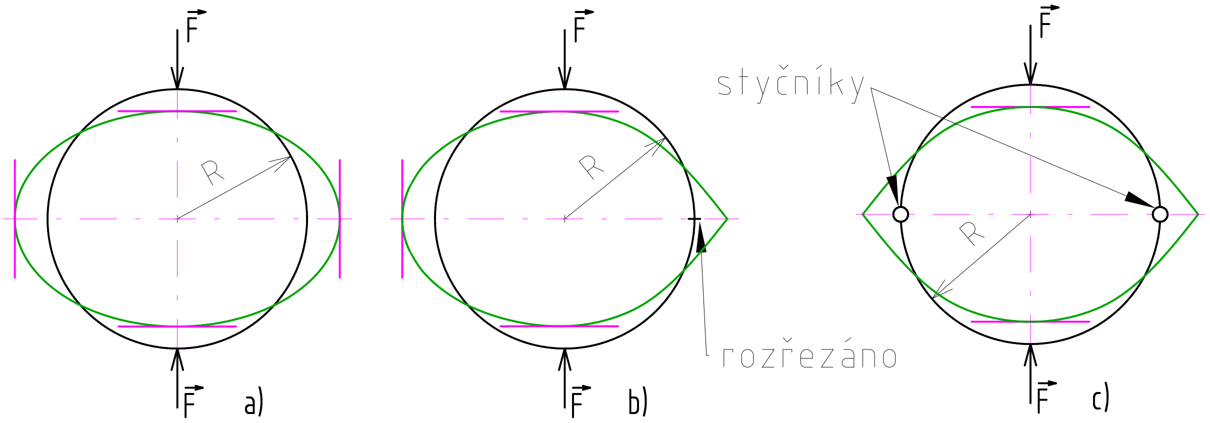
b) k_k = 3,99

c) k_k = 2,73

d) k_k = 4,31

Příklad č. 6 (neřešený)

Určete bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pro 3 varianty prutu dle obr. 6. 1. Prut má příčný průřez kruhového tvaru o průměru ød = 25 mm a poloměr zakřivení střednice R = 1 m. Zatížení je realizováno dvěma silami o hodnotě F = 500 N. Rám je vyroben z oceli s σ_k = 250 MPa.



Obr. 6.1: Kruhový rám: a) s uzavřenou střednicí; b) s otevřenou střednicí; c) se dvěma styčníky.

Výsledky:

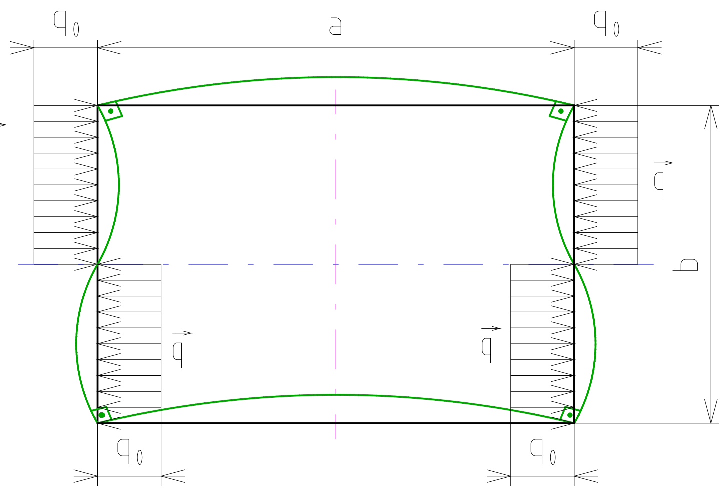
a) k_k = 2,4

b) k_k = 2,02

c) k_k = 1,54

Příklad č. 7 (neřešený)

Určete bezpečnost k meznímu stavu pružnosti uzavřeného obdélníkového rámu (obr. 7.1). Rám je zatížen spojitým liniovým zatížením q_0 = 12 Nmm^{-1}. Je tvořen délkami a = 1,2 m a b = 0,8 m a příčným průřezem kruhového tvaru o průměru ød = 25 mm. Mez kluzu materiálu, ze kterého je rám vyroben, je $\sigma_K = 250\ \mathrm{MPa}$.



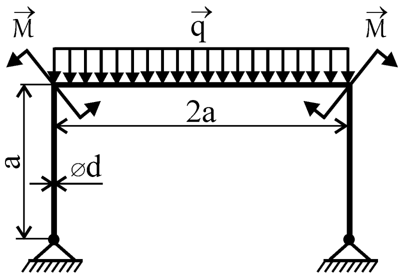
Obr. 7.1

Výsledek: k_k = 1,75

Domácí úkol:

DÚ 10

U lomeného prutu kruhového průřezu o průměru d, zatíženého spojitým liniovým zatížením $\vec{q}$ a silovými dvojicemi $\vec{\mathcal{M}}$, určete bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti. Vlastní tíhu prutu ani koncentraci napětí v místě zlomů neuvažujte.



Dáno:
$a = 0,4\,\mathrm{m}$, $q = 6\,\mathrm{Nmm}^{-1}$, $E = 2,1 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$,
$d = 20\,\mathrm{mm}$, $\mathcal{M} = \frac{1}{20} q a^2 = 48\,\mathrm{Nm}$, $\sigma_K = 400\,\mathrm{MPa}$.