Využití prvních derivací

Znaménko derivace funkce v konkrétním intervalu určuje, zda je v daném intervalu funkce rostoucí nebo klesající. Uvažujeme funkci $f(x)$ a libovolný interval I, který může být omezený i neomezený. Nechť $x_1, x_2 \in I$ jsou dva body splňující $x_1 < x_2$. Podle věty o střední hodnotě existuje $\xi \in (x_1, x_2)$ takové, že platí

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1).$$

Pokud je derivace $f'(x)$ kladná v intervalu I, pak je funkce $f(x)$ v intervalu I rostoucí, a naopak pokud je derivace záporná, je funkce klesající.

Funkce rostoucí/klesající

Nechť funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $I = \langle a, b \rangle$ a má derivaci $f'(x)$ v intervalu (a, b), pak platí

a) $f'(x) > 0$ v intervalu (a, b), pak funkce $f(x)$ je **rostoucí** na I,

b) $f'(x) < 0$ v intervalu (a, b), pak funkce $f(x)$ je **klesající** na I,

c) $f'(x) \geq 0$ v intervalu (a, b) právě tehdy, když funkce $f(x)$ je **neklesající** na I,

d) $f'(x) \leq 0$ v intervalu (a, b) právě tehdy, když funkce $f(x)$ je **nerostoucí** na I.

Obecně se předpokládá, že funkce je spojitá na celém intervalu, tedy i včetně jednostranné spojitosti v případných koncových bodech. Derivaci vyžadujeme jenom ve vnitřních bodech intervalu. Pokud je derivace také funkce spojitá na celém intervalu, může měnit znaménko jenom ve **stacionárních bodech**, tj. v bodech, kde má nulovou derivaci $f'(x) = 0$. Stačí proto na intervalech, kde je $f'(x)$ nenulová, zjistit znaménko derivace vyčíslením hodnoty derivace v libovolném bodě daného intervalu.

Při vyšetřování znaménka derivace, tedy toho, zda je funkce rostoucí či klesající, vyznačíme na reálné ose body, kde funkce není definována, kde není spojitá, nebo kde je nulová (stacionární body). Ve vyznačených bodech funkce často mění znaménko. Může se však stát, že derivace na sousedních intervalech má znaménka stejná.

Globální a lokální extrémy

Důležitými charakteristikami funkce jsou lokální extrémy, tj. lokální minima a maxima. Ze všech lokálních extrémů lze pochopitelně vybrat globální (absolutní) extrémy na množině D, kdy nerovnost $f(x) \leq f(x_0)$ v případě maxima a nerovnost $f(x) \geq f(x_0)$ v případě minima platí $\forall x \in D$ a lokální, kdy nerovnost platí pouze na nějakém okolí bodu x_0.

Extrémy funkce

Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na množině D. Řekneme, že funkce $f(x)$

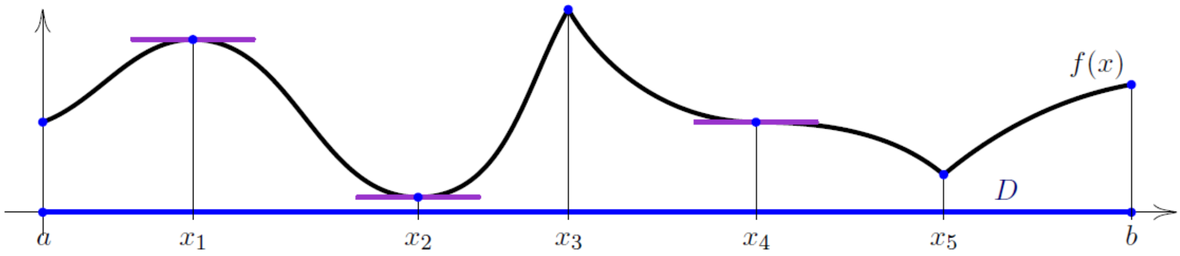
a) má na množině D **absolutní maximum** M, jestliže existuje $x_0 \in D$ takové, že $f(x_0) = M$ a nerovnost $f(x) \leq M$ platí $\forall x \in D$,

b) má na množině D **absolutní minimum** M, jestliže existuje $x_0 \in D$ takové, že $f(x_0) = M$ a nerovnost $f(x) \geq M$ platí $\forall x \in D$,

c) má v bodě x_0 **lokální maximum** m, jestliže existuje okolí O bodu x_0 takové, že nerovnost $f(x) \leq f(x_0) = m$ platí $\forall x \in O \cap D$,

d) má v bodě x_0 **lokální minimum** m, jestliže existuje okolí O bodu x_0 takové, že nerovnost $f(x) \geq f(x_0) = m$ platí $\forall x \in O \cap D$,

Pokud v podmínce platí ostrá nerovnost pro každé $x \neq x_0$, mluvíme o ostrém maximu nebo ostrém minimu, v případě neostré nerovnosti o neostrém maximu nebo neostrém minimu.



Obrázek 1: Funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b\rangle$ má globální maximum v bodě x_3, globální minimum v x_2, lokální maxima v a, x_1, x_3, b, lokální minima v x_2, x_5 a stacionární body jsou x_1, x_2, x_4.

Důležité je, že nestačí uvést pouze bod x_0, ve kterém je nějaký extrém, ale i příslušnou funkční hodnotu $f(x)$.

Globální extrémy jsou vždy určeny jednoznačně, pokud existují. Funkce může nabývat globálního extrému, ať už minima či maxima, v nekonečně mnoho bodech, viz například funkce $\sin x$ a $\cos x$.

Na druhou stranu funkce nemusí mít ani globální ani lokální extrémy. Prvním příkladem je funkce, která není omezená na množině D, tedy například funkce $f(x) = x$ na $(-\infty, \infty)$, nebo $f(x) = \operatorname{tg} x$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Druhým příkladem je omezená funkce, která taktéž extrémy mít nemusí. Může se to stát tehdy, když bod, ve kterém by byl extrém, už v množině D není - rostoucí funkce na otevřeném intervalu nemá žádné extrémy.

Platí ale!, že **spojitá funkce na omezené uzavřené množině má vždy absolutní minimum i maximum!.**

Lokální extrémy ve vnitřních bodech

Jestliže spojitá funkce $f(x)$ má ve vnitřním bodě x_0 množiny D maximum nebo minimum a má v tomto bodě $f'(x_0)$ derivaci, pak tato derivace je nulová. Pokud derivace $f'(x_0)$ je ve vnitřním bodě x_0 intervalu různá od nuly, potom funkce $f(x)$ je v okolí x_0 rostoucí nebo klesající, a proto nemá v tomto bodě žádný extrém.

Body, v nichž je derivace $f'(x)$ nulová, nazýváme **stacionární body**. Body „podezřelé“ z toho, že v nich může být extrém, jsou všechny body, které

a) jsou **stacionární body**, tj. body, kde $f'(x) = 0$,

b) a v nichž **derivace** $f'(x)$ **neexistuje**.

Mimo vnitřních bodů může být extrém i v hraničním bodě množiny D, tedy v krajním bodě intervalu nebo v izolovaném bodě množiny D. Zbývá otázka, jak určit, zda má funkce ve stacionárním bodě x_0 lokální minimum nebo lokální maximum.

Nechť $f(x)$ je funkce definovaná v okolí bodu x_0.

a) Jestliže $f(x)$ je v levém okolí bodu x_0 rostoucí a v pravém klesající ($\nearrow x_0 \searrow$), potom má v bodě x_0 ostré lokální maximum.

b) Jestliže $f(x)$ je v levém okolí bodu x_0 klesající a v pravém rostoucí ($\searrow x_0 \nearrow$), potom má v bodě x_0 ostré lokální minimum.

c) Jestliže $f(x)$ je v levém i pravém okolí x_0 rostoucí ($\nearrow x_0 \nearrow$), nebo v levém i pravém okolí klesající ($\searrow x_0 \searrow$), potom v bodě x_0 funkce lokální extrém nemá.

K rozhodnutí, zda je ve stacionárním bodě $f'(x_0) = 0$ extrém, může posloužit druhá derivace. Pokud je $f''(x)$ v bodě x_0 kladná, potom je první derivace v okolí bodu x_0 rostoucí, v levém okolí bodu x_0 je záporná a funkce $f(x)$ klesající, v pravém okolí je kladná a funkce rostoucí - v bodě x_0 je tedy ostré lokální minimum. Podobná úvaha vede k závěru, že jestliže $f''(x_0) < 0$, první derivace je klesající a funkce má v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Nechť spojitá funkce $f(x)$ má ve vnitřním bodě x_0 nulovou derivaci $f'(x_0) = 0$ a druhá derivace $f''(x_0)$ existuje. Potom platí

a) $f''(x_0) > 0$, pak $f(x)$ má v bodě x_0 **ostré lokální minimum**,

b) $f''(x_0) < 0$, pak $f(x)$ má v bodě x_0 **ostré lokální maximum**.

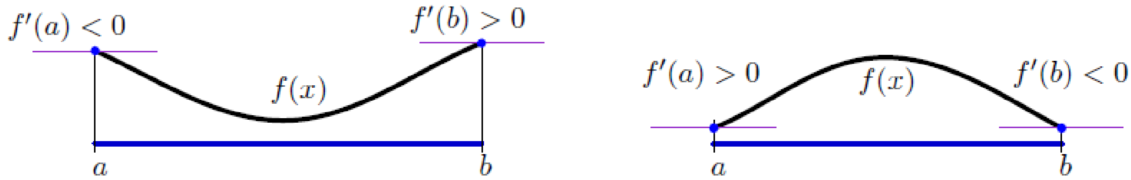
c) V případě, že $f''(x_0) = 0$, nelze rozhodnout. Extrém v bodě x_0 být může, ale nemusí. O případném extrému se rozhodne taky, že liché derivace musí být nulové a rozhodne až první nenulová sudá derivace funkce.

Příklad 1. Určení extrému pomocí derivací - Nalezněte extrémy funkce $f(x) = x^4$.
První derivace je $f'(x) = 4x^3$. Pokud položíme $f'(x) = 0$, pak dostáváme stacionární bod $x_0 = 0$, tj. bod podezřelý z extrému. Druhá derivace je $f''(x) = 12x^2$, kde po dosazení stacionárního bodu dostáváme $f(x_0) = 0$. Druhá derivace o extrému podle výše uvedeného nerozhodne. Třetí derivace je $f'''(x) = 24x$, kde po dosazení bodu $x_0 = 0$ dostáváme $f(x_0) = 0$, tedy pořád zde může být extrém. Čtvrtá derivace vyjde $f^{(4)}(x) = 24$. Dosazení bodu nijak nezmění hodnotu derivace a podle dříve uvedeného je v bodě $x_0 = 0$ ostré lokální minimum.

Lokální extrémy v hraničních bodech

Každý omezený uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ má dva hraniční body, intervaly $(-\infty, b\rangle$ a $\langle a, \infty)$ mají jeden hraniční bod. V hraničním bodě může být lokální extrém, ale derivace zde nulová být nemusí. Podmínky zajišťující lokální extrémy v hraničních bodech jsou následující:

- Nechť A je levý koncový bod intervalu a funkce $f(x)$ je rostoucí (klesající) v nějakém pravém okolí $\rangle a, a+\delta)$ bodu a, potom v bodě a funkce $f(x)$ má ostré lokální minimum (maximum). Pokud tedy v levém koncovém bodě a intervalu existuje kladná (záporná) jednostranná limita derivace $\lim_{x\to a^+} f'(x)$, potom v bodě a je ostré lokální minimum (maximum).
- Analogicky, pokud funkce $f(x)$ je rostoucí (klesající) v nějakém levém okolí bodu $(b-\delta, b\rangle$, potom má v bodě b funkce $f(x)$ ostré lokální maximum (minimum). Tedy pokud v pravém koncovém bodě b intervalu existuje kladná (záporná) jednostranná limita derivace $\lim_{x\to b^-} f'(x)$, potom v bodě b je ostré lokální maximum (minimum).
- Pokud je limita derivace v koncovém bodě nulová, potom zde může být ostrý i neostrý extrém, nebo extrém nemusí být vůbec.



Obrázek 2: Nenulové jednostranné limity derivace v lokálním maximu (minimu) v hraničních bodech.

Globální extrémy

Globální extrémy se definují pomocí pojmů **infimum** (dolní závora) a **suprémum** (horní závora), které jsme nezavedli. Abychom situaci nekomplikovali dalšími pojmy, rozdělíme si situace, které mohou nastat, na dva případy.

a) Funkce $f(x)$ roste v bodě x_0 do ∞.
   - Příkladem může být funkce $f(x) = x$, která pro $x \to \infty$ roste do nekonečna a nemá žádné extrémy. (Nezapomeňte, že extrémem musí být bod z $D(f)$, tedy například ani funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nemá v bodě x_0 žádný extrém, protože zde není funkce definována.

b) Funkce $f(x)$ nabývá lokálních extrémů v několika bodech svého definičního oboru.
   - Pokud hledáme globální maximum na omezené funkci (tj. funkce nikde neroste do nekonečna), pak určíme všechna lokální maxima a vybereme z nich takové, kde je nejvyšší funkční hodnota. Pokud nejvyšší hodnota nastává ve více bodech, pak jsou všechny tyto body globálními maximy. Situace pro globální minima je analogická.
   - V tomto případě není ani nutné zjišťovat, zda je ve stacionárním bodu, bodu, v němž není derivace, nebo krajním bodu extrém. Stačí vyčíslit hodnoty ve všech „podezřelých“ bodech, mezi které patří i koncové body intervalu.

Platí tedy, že pokud D je omezená uzavřená množina, tj. například omezený uzavřený interval, a funkce $f(x)$ je spojitá na množině D (v koncových bodech intervalu je spojitá zleva nebo zprava), pak funkce $f(x)$ má na množině D absolutní minimum i maximum.

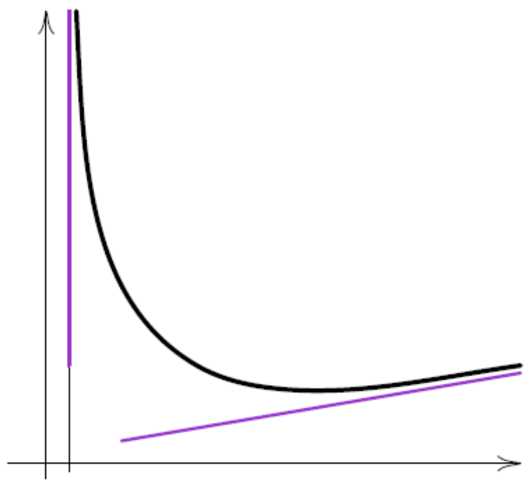
Asymptoty

Asymptota je intuitivně řečeno „tečna ke grafu funkce v nekonečnu“. Asymptota funkce $f(x)$ je tedy taková přímka, jejíž vzdálenost od bodu grafu $[x, f(x)]$ se blíží k nule, když se x nebo $f(x)$ vzdalují do nekonečna.

Přímky v rovině lze rozdělit na dva druhy, podle nichž analogicky budeme dělit asymptoty:

a) **Přímky se směrnicí** zapsané jako $y = kx + q$.

b) **Přímky bez směrnice**, tj. přímky, které jsou rovnoběžné s osou y a které mají rovnici $x = x_0$.



Obrázek 3: Asymptota bez a se směrnicí.

Asymptoty

Nechť $f(x)$ je funkce definovaná na okolí nekonečna (c, ∞), respektive na okolí minus nekonečná $(-\infty, c)$. Pak přímka $y = kx + q$ je **asymptota se směrnicí** funkce $f(x)$ pro $x \to \infty$ (resp. pro $x \to -\infty$), jestliže

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (kx + q)) = 0, \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{x\to-\infty}(f(x) - (kx + q)) = 0$$

Nechť $f(x)$ je funkce definovaná v nějakém levém nebo pravém ryzím okolí bodu x_0, pak přímka $x = x_0$ je **asymptota bez směrnice** funkce $f(x)$, jestliže alespoň jedna z jednostranných limit funkce $f(x)$ je nevlastní, tj. je rovna ∞ nebo $-\infty$.

Logickou otázkou zůstává, jak najít správné hodnoty směrnice k a úseku q. K nalezení nám pomůže následující. Nechť $f(x)$ je funkce definovaná v okolí nekonečna. Pokud existují konečné limity

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{a} \qquad q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx),$$

pak přímka $y = kx + q$ je asymptota funkce $f(x)$ pro $x \to \infty$. Obdobně je třeba vyšetřit případ, kdy $x \to -\infty$.

Příklad 2. Vybrané příklady.

a) Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left[\frac{\frac{\pi}{2}}{\infty}\right] = 0. \qquad q = \lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x - 0 \cdot x = \tfrac{\pi}{2}.$$

Funkce $\operatorname{arctg} x$ má pro $x \to \infty$ asymptotu $y = \frac{\pi}{2}$. Pokud analogicky vyšetříme případ $x \to -\infty$, obdržíme druhou asymptotu $y = -\frac{\pi}{2}$. Funkce má definiční obor $D(f) = \mathbb{R}$ a tedy nemá asymptoty bez směrnice.

b) Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \text{limita neexistuje.}$$

Jestliže limita pro výpočet k neexistuje, nelze počítat ani limitu pro q, a tedy $\operatorname{tg} x$ nemá žádnou asymptotu se směrnicí. Asymptoty bez směrnice hledáme v bodech, kde funkce $\operatorname{tg} x$ není definována, například tedy v bodech $\frac{\pi}{2}$ a $-\frac{\pi}{2}$.

$$a = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \infty \qquad b = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Jelikož obě výše uvedené limity pro vybrané body, kde není $\operatorname{tg} x$ definován vyšly rovny ∞, resp. $-\infty$, budou v těch bodech asymptoty bez směrnice. Protože víme, že funkce $\operatorname{tg} x$ je funkce periodická s periodou π, pak na základě předchozího výpočtu víme, že asymptotami bez směrnice jsou přímky $x = x_0$, kde $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

c) Nalezněte asymptoty funkce $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 + \tfrac{1}{x^3} = 1. \qquad q = \lim_{x\to\infty} x + \tfrac{1}{x^2} - 1 \cdot x = \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{x^2} = 0.$$

Funkce $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ má asymptotu se směrnicí $y = x$ pro $x \to \infty$. V případě $x \to -\infty$ obdržíme opět asymptotu $y = x$. Asymptotu bez směrnice budeme hledat v bodě $x = 0$, protože zde funkce není definována.

$$a = \lim_{x\to 0} x + \tfrac{1}{x^2} = \infty.$$

Jelikož limita pro $x \to 0$ je rovna ∞, bude v bodě $x_0 = 0$ asymptota bez směrnice.

d) Nalezněte asymptotu funkce $\sin x$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{\infty}\right] = 0. \qquad q = \lim_{x\to\infty} \sin x - 0 \cdot x = \text{limita neexistuje.}$$

Jelikož limita pro q neexistuje, pak funkce $\sin x$ nemá žádnou asymptotu. Navíc je definována na celém $\mathbb{R}$, takže nemá smysl hledat asymptoty bez směrnice.

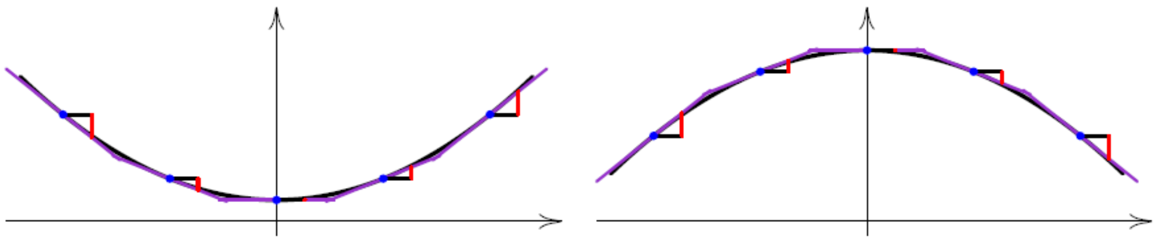
e) Nalezněte asymptotu funkce $f(x) = x^2$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x} = \infty.$$

Limita pro směrnici k je rovna ∞. Asymptota se směrnicí tedy neexistuje. Asymptotu bez směrnice nemá smysl hledat, protože $D(f) = \mathbb{R}$.

Využití druhých derivací

Pomocí druhé derivace lze určit, zda je funkce **konvexní** či **konkávní**. Funkce můžeme uvažovat na libovolném intervalu I, tedy interval může být otevřený, nebo uzavřený, omezený, nebo neomezený. Pokud je funkce $f(x)$ ryze konvexní, směrnice $f'(x)$ jejich tečen je funkce rostoucí, a proto derivace směrnic, tedy druhá derivace $f''(x)$, je funkce kladná. Analogicky pro funkci ryze konkávní je směrnice tečen funkce klesající, a proto druhá derivace $f''(x)$ je záporná.



Obrázek 4: Směrnice tečen u ryze konvexní funkce (vlevo) roste, u ryze konkávní (vpravo) klesá.

Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu I mající v (a,b) druhou derivaci. Pak platí:

a) $f''(x) \geq 0$ na intervalu I, potom $f(x)$ je na intervalu I **konvexní**,

b) $f''(x) \leq 0$ na intervalu I, potom $f(x)$ je na intervalu I **konkávní**.

Pokud pro druhou derivaci platí ostrá nerovnost, potom funkce $f(x)$ je na intervalu I ryze konvexní nebo ryze konkávní. Jestliže druhá derivace $f''(x)$ v bodě x_0 mění znaménko, je x_0 **inflexním bodem** funkce $f(x)$. Pokud druhá derivace funkce existuje, v inflexním bodě je rovna nule.

Příklad 3. Vybrané příklady.

a) Určete inflexní body funkce $f(x) = x^3$ a určete, kde je funkce konvexní a kde konkávní.

$$f(x) = x^3, \qquad f'(x) = 3x^2, \qquad f''(x) = 6x.$$

Pro nalezení inflexních bodu položíme $f''(x) = 0$, tedy $6x = 0$ pouze v bodě $x_0 = 0$. Tento bod je podezřelý z toho, že je inflexním bodem. Funkce má $D(f) = \mathbb{R}$, proto nám tento podezřelý bod dělí definiční obor na intervaly $(-\infty, 0\rangle$ a $\langle 0, \infty)$. Pro $x \in (-\infty, 0\rangle$ je $f''(x) = 6x$ záporná ($f''(x) \leq 0$) a pro $x \in \langle 0, \infty)$ je $f''(x) = 6x$ kladná ($f''(x) \geq 0$). Tedy bod $x_0 = 0$ je inflexní, funkce je konkávní na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a konvexní na intervalu $\langle 0, \infty)$.

b) Určete inflexní body funkce $f(x) = \mathrm{e}^x$ a určete, kde je funkce konvexní a kde konkávní.

$$f(x) = \mathrm{e}^x, \qquad f'(x) = \mathrm{e}^x, \qquad f''(x) = \mathrm{e}^x.$$

Funkce nemá inflexní body, protože $f''(x) \neq 0$ v žádném bodě definičního oboru $D(f) = \mathbb{R}$. Na celém definičním oboru tedy bude funkce buď konvexní, nebo konkávní. Pro libovolné $x \in D(f)$ platí, že $f''(x) \geq 0$, tedy $f(x) = \mathrm{e}^x$ je konvexní na celém $\mathbb{R}$.

c) Určete inflexní body funkce $f(x) = \ln x$ a určete, kde je funkce konvexní a kde konkávní.

$$f(x) = \ln x, \qquad f'(x) = \tfrac{1}{x}, \qquad f''(x) = -\tfrac{1}{x^2}.$$

Funkce nemá inflexní body, protože $f''(x) \neq 0$ v žádném bodě definičního oboru $D(f) = (0, \infty)$. Na svém definičním oboru může funkce být tedy konvexní nebo konkávní. Pro libovolné $x \in D(f)$ platí, že $f''(x) \leq 0$, tedy $f(x) = \ln x$ je konvexní na celém svém $D(f)$.

Postup při vyšetřování průběhu funkce

Pokud v zadání není uvedeno jinak, při vyšetřování průběhu funkce je třeba zkoumat následující vlastnosti funkce.

1. **Definiční obor** a množinu, kde je funkce **spojitá**, případně **body nespojitosti**.
2. **Sudost**, **lichost** a **periodičnost** funkce.
3. **Nulové body**, tj. průsečíky s osou x, a znaménka $f(x)$, tedy intervaly, na kterých je funkce **kladná**, nebo **záporná**.
4. **Asymptoty**
   a) Limity pro $x \to \infty$ a $x \to -\infty$, tak zjistíme k a viz dříve spočítáme limitu pro q. Zjistíme tak, zda existují **asymptoty se směrnicí**, pokud je funkce definovaná v okolí $\pm\infty$.
   b) Jednostranné limity v bodech nespojitosti a v krajních bodech, tedy zda existují **asymptoty bez směrnice**.
5. Spočítáme první derivaci $f'(x)$ a dále
   a) nalezneme nulové body $f'(x) = 0$, tj. **stacionární body** (body podezřelé z extrému),
   b) určíme znaménko $f'(x)$, tedy intervaly, kde je funkce **rostoucí**, nebo **klesající**,
   c) určíme **lokální maxima** a **minima** včetně jejich hodnot,
6. Spočítáme druhou derivaci $f''(x)$ a dále
   a) najdeme nulové body druhé derivace $f''(x) = 0$,
   b) určíme znaménka druhé derivace, tj. intervaly, kde je funkce **konvexní**, nebo **konkávní**,
   c) určíme **inflexní body** včetně hodnoty funkce.
7. Závěrem načrtneme **graf funkce** pomocí předchozích výsledků:
   a) zvolíme vhodný interval a měřítka podle definičního oboru funkce a oboru hodnot,
   b) vyznačíme koncové body definičního oboru a příslušné hodnoty nebo limity funkce,
   c) vyznačíme nulové body a znaménka funkce $f(x)$,
   d) vyneseme hodnoty funkce ve stacionárních bodech a vyznačíme intervaly, kde je funkce rostoucí, nebo klesající,
   e) načrtneme případné asymptoty,
   f) vyneseme hodnoty v případných inflexních bodech,
   g) vyznačíme intervaly, kde je funkce konvexní, nebo konkávní,
   h) „spojíme“ příslušné body křivkou (rostoucí, klesající, konvexní, konkávní, ...) na intervalech definičního oboru.

Poznámky:

a) Definiční obor celé funkce $f(x)$ je průnikem definičních oborů dílčích funkcí. Vychází se z množiny reálných čísel $\mathbb{R}$, přičemž musí platit:
   - při dělení $g(x)/h(x)$ je jmenovatel nenulový, tj. $h(x) \neq 0$,
   - odmocnina $\sqrt{g(x)}$ je definovaná pro nezáporná $g(x)$,
   - logaritmické funkce $\log_a(g(x))$ a $\ln(g(x))$ jsou definovány pro kladná $g(x)$,

- pro funkce $\mathrm{tg}(g(x))$ je $g(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, pro $\mathrm{cotg}(g(x))$ je $g(x) \neq k\pi$, pro $k \in \mathbb{Z}$,
- u funkcí $\arcsin(g(x))$ a $\arccos(g(x))$ musí $g(x)$ být v intervalu $\langle -1, 1\rangle$.
- Body, kde není funkce definována, a hraniční body definičního oboru jsou často také kandidáty na to, že jimi bude procházet asymptota bez směrnice.

b) Pro sudost/lichost periodické funkce je nutnou podmínkou definiční obor symetrický podle osy y, tj. $x \in D(f) \Leftrightarrow -x \in D(f)$. Pro připomenutí:
   - Sudá funkce má graf osově souměrný podle osy y a platí $f(-x) = f(x), \forall x \in D(f)$.
   - Lichá funkce má graf středově souměrný podle počátku a platí $f(-x) = -f(x), \forall x \in D(f)$.
   - Periodická funkce má periodu p, pokud její definiční obor splňuje $x \in D(f) \Rightarrow x + kp \in D(f), (k \in \mathbb{Z})$ a $\forall x \in D(f) = f(x) + f(x + kp)$, tj. graf funkce se „opakuje“. Pokud je těchto $p > 0$ více, hledáme nejmenší takové.

c) Nulové body jsou body na ose x, pro jejichž nalezení stačí vyřešit rovnici $f(x) = 0$.

d) První derivace, stacionární body, monotónnost a extrémy. Stacionární body jsou řešením rovnice $f'(x) = 0$. V těchto bodech může být extrém, ale také inflexní bod. Podle znaménka derivace určíme, zda je funkce rostoucí, nebo klesající. Využíváme faktu, že funkce může změnit znaménko pouze v nulových bodech, nebo v bodech, kde funkce není spojitá. Podobně derivace může změnit znaménko ve stacionárním bodě, nebo v bodě, kde není derivace definována.

e) Druhá derivace, konvexnost/konkávnost, inflexní body. Body podezřelé z toho, že jsou inflexní, jsou řešením rovnice $f''(x) = 0$. Podle znaménka pak určíme, zda je funkce konvexní nebo konkávní.

f) Asymptoty se směrnicí $y = kx+q$ spočítáme pomocí limit $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx$ a $k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $q = \lim_{x\to-\infty} f(x) - kx$. Asymptoty bez směrnice se mohou vyskytovat pouze v bodech, kde funkce není definována, nebo není spojitá.

g) **Při zkoušce i při zápočtu vyšetřujte ty vlastnosti, které jsou po vás požadovány v zadání.**

Příklady

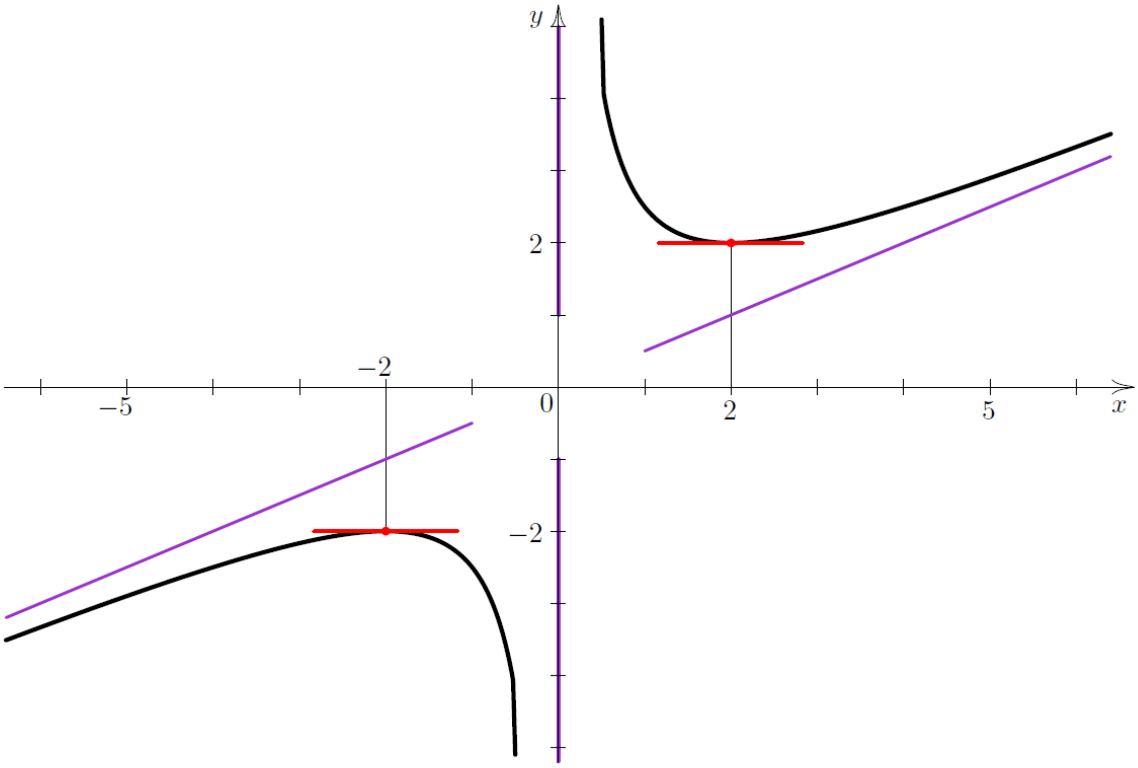
Příklad 1. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$.

1. Definiční obor je kvůli zlomku $\frac{2}{x}$, kde $x \neq 0$, následující $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
2. Protože platí, že $f(-x) = -f(x)$, jedna se o lichou funkci, která bude středově symetrická kolem počátku. Stačilo by ji vyšetřovat pouze na intervalu $\langle 0, \infty)$.
3. Nulové body zde získáme převedením funkce $f(x)$ na společného jmenovatele, pak položíme $f(x) = 4 + x^2 = 0$. Rovnice nemá řešení, a proto funkce nemá nulové body. Původní funkce je pro $x \in (0, \infty)$ kladná, a protože je lichá, pak bude pro $x \in (-\infty, 0)$ záporná.
4. Kvůli výrazu $\frac{2}{x}$ je $\lim_{x\to0^+} f(x) = \infty$ a $\lim_{x\to0^-} f(x) = -\infty$. Funkce má proto v $x_0 = 0$ asymptotu bez směrnice. Limity $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ a $q = \lim_{x\to\infty} f(x) - \frac{1}{2} \cdot x = 0$. Funkce má proto asymptotu se směrnicí $y = \frac{x}{2}$. Stejně vyjdou i limity pro $x \to -\infty$, což souhlasí s tím, že jde o lichou funkci.
5. První derivace je $f'(x) = [\frac{2}{x} + \frac{x}{2}]' = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2} = \frac{-4+x^2}{2x^2}$. Zlomek se rovná nule, pokud se rovná nule jeho čitatel (pokud je v tomto bodě derivace a funkce definována). Hledáme

tedy řešení rovnice $x^2 - 4 = 0$, jejímž řešením jsou body $x = \pm 2$. Dostáváme tedy čtyři intervaly $(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2)$ a $(2, \infty)$. Vyčíslením první derivace v libovolných bodech těchto intervalů zjistíme, že funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -2)$ a $(2, \infty)$ a klesající v intervalech $(-2, 0)$ a $(0, 2)$.

Protože v bodě $x = -2$ funkce přechází z rostoucí na klesající, jde zde lokální maximum $f(-2) = -2$. Podobně v bodě $x = 2$ funkce přechází z klesající na rostoucí, a proto zde bude lokální minimum $f(2) = 2$. Okolo bodu nespojitosti je funkce na obou stranách klesající, a proto zde lokální extrém není.

6. Druhá derivace je $f''(x) = [-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2}]' = \frac{4}{x^3}$. Druhá derivace $f''(x) \neq 0$ v žádném bodě svého definičního oboru. Zbývá ověřit, zda nemá inflexní bod v bodě, kde není definována, tedy v bodě $x_0 = 0$. Druhá derivace je na intervalu $(-\infty, 0)$ záporná, tedy funkce bude na tomto intervalu konkávní, a na intervalu $(0, \infty)$ je kladná, tedy funkce bude na tomto intervalu konvexní.
7. Se znalostí předchozích výsledků zbývá načrtnout graf funkce.



Obrázek 5: Graf funkce $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$.

Příklad 2. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

1. Definičním oborem je celé $\mathbb{R}$, protože jmenovatel $1 + x^2$ je vždy kladný a funkce je spojitá na celém svém definičním oboru.

2. Díky druhým mocninám (součin dvou sudých funkcí je sudá funkce) platí, že $f(-x) = f(x)$, a tedy se jedná o sudou funkci. Graf bude souměrný podle osy y. Opět by teoreticky stačilo vyšetřit funkci pouze na intervalu $\langle 0, \infty)$.

3. Nulové body získáme řešením rovnice $f(x) = 0$. Jmenovatel zlomku je vždy kladný, navíc zlomek se rovná nule pouze pokud se čitatel rovná nule. Řešíme případ $x^2 = 0$, jehož řešením

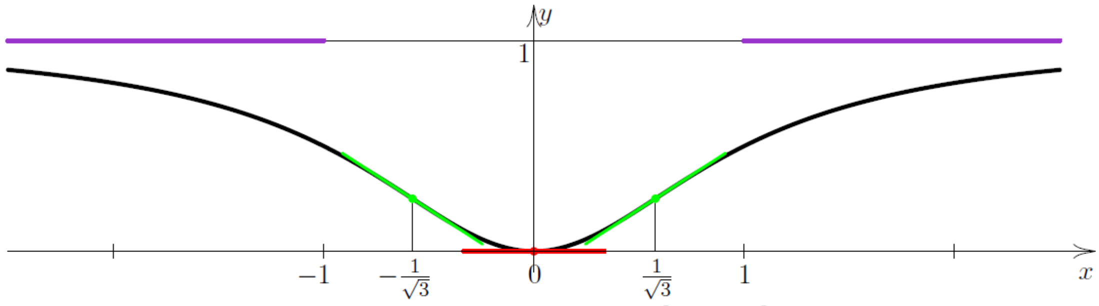
je bod $x_0 = 0$. Protože pro $x_0 \neq 0$ je čitatel i jmenovatel zlomku kladný, je funkce kladná na obou intervalech $(-\infty, 0), (0, \infty)$.

4. Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$, proto nemá žádnou asymptotu bez směrnice. Pro asymptoty se směrnicí je opět třeba vyřešit limity $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ a $q = \lim_{x\to\infty} f(x) - 0 \cdot x = 1$, tedy asymptotou je přímka $y = 1$. Obdobně dostaneme pro $x \to -\infty$ znovu asymptotu $y = 1$, což je důsledkem sudosti funkce.

5. První derivace je $f'(x) = [\frac{x^2}{1+x^2}]' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$. Rovnice $f'(x) = 0$ má jediné řešení v bodě $x_0 = 0$. Protože je jmenovatel kladný, znaménko určí vždy pouze čitatel, který je záporný pro $x \in (-\infty, 0)$, tedy na tomto intervalu je funkce klesající, a kladný pro $x \in (0, \infty)$, kde je funkce rostoucí. Proto je v bodě $x_0 = 0$ lokální minimum.

6. Druhá derivace je $f''(x) = [\frac{2x}{(1+x^2)^2}]' = \frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$. Hledáme řešení rovnice $f''(x) = 0$, tedy v našem případě hodnotu, kde je čitatel $2(1-3x^2) = 2-6x^2 = 0$. Řešením teto rovnice jsou body $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Protože jmenovatel je vždy kladný, znaménko druhé derivace ovlivní pouze čitatel. Konvexnost/konkávnost musíme vyšetřit na intervalech $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) a (\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$. Dosazením bodů z těchto intervalů zjistíme, že funkce je konvexní na intervalu $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ a konkávní na intervalech $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}), \frac{1}{\sqrt{3}}) a (\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$.

7. Na závěr načrtneme graf.



Obrázek 6: Graf funkce $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

Příklad 3. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. Definiční obor je celé $\mathbb{R}$, protože jmenovatel je vždy kladný. Funkce je spojitá na celém definičním oboru.

2. Protože platí $f(-x) = -f(x)$, jedná se o funkci lichou a graf bude středově souměrný podle počátku.

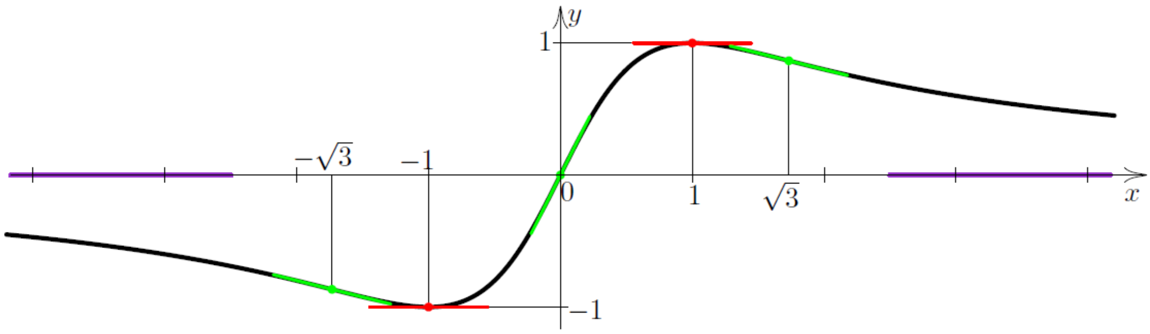
3. Nulové body hledáme jako řešení rovnice $f(x) = 0$, kde jediným řešením je bod $x_0 = 0$. Protože je jmenovatel vždy kladný, znaménko funkce závisí vždy na hodnotě čitatele, tedy na intervalu $(-\infty, 0)$ je funkce záporná a na intervalu $(0, \infty)$ je funkce kladná.

4. Funkce je spojitá na celém $\mathbb{R}$, proto nemá asymptotu bez směrnice. Asymptoty bez směrnice nalezneme pomocí limit $k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ a $q = \lim_{x\to\infty} f(x) - 0 \cdot x = 0$, tedy asymptotou je přímka $y = 0$ pro $x \to \pm\infty$.

5. První derivace je $f'(x) = [\frac{2x}{1+x^2}]' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. Řešením rovnice $f'(x) = 0$ jsou body $x = \pm 1$. Protože jmenovatel je vždy kladný, znaménko derivace závisí na znaménku čitatele. Pro $|x| > 1$ je derivace záporná, pro $|x| < 1$ je derivace kladná. Z toho důvodu je funkce klesající v intervalech $(-\infty, -1), (1, \infty)$. a rostoucí na intervalu $(-1, 1)$.

V bodě $x=-1$ funkce přechází z klesající na rostoucí, proto je zde lokální minimum $f(-1)=-1$. V bodě $x=1$ funkce předchází z rostoucí na klesající, proto je zde lokální maximum $f(1)=1$.

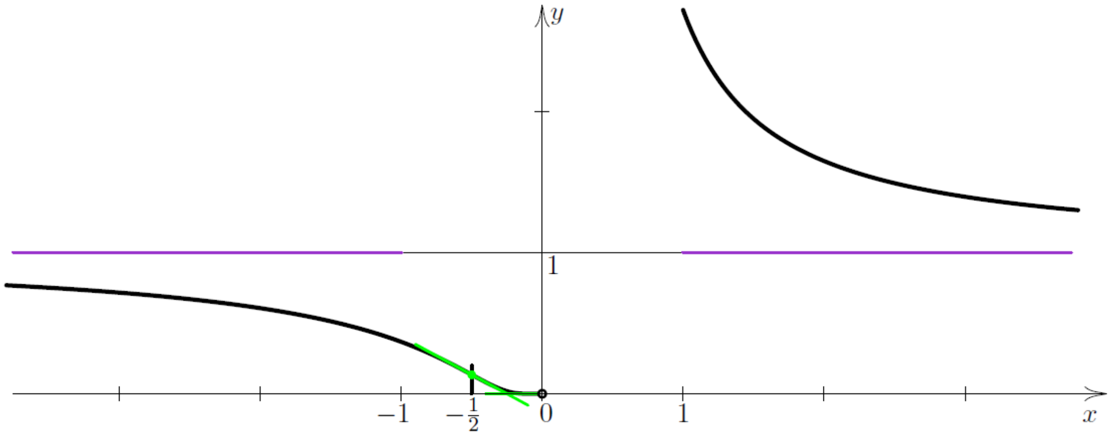
6. Druhá derivace je $f''(x)=[\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}]'=\frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$. Hledáme nyní řešení rovnice $f''(x)=0$. Zlomek se rovná nule, pokud se nule rovná čitatel, tedy řešíme rovnici $4x(x^2-3)=0$, která má řešení $x=0$ a $x=\pm\sqrt{3}$. Protože jmenovatel je vždy kladný, znaménko druhé derivace mění čitatel v bodech $-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$. Funkce $f(x)$ je proto konkávní na intervalech $(-\infty,-\sqrt{3})$, a $(0,\sqrt{3})$ a konvexní na intervalech $(-\sqrt{3},0)$ a $(\sqrt{3},\infty)$. Funkce má tedy tři inflexní body $x=0,\pm\sqrt{3}$.
7. Zbývá načrtnout graf funkce.



Obrázek 7: Graf funkce $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

Příklad 4. Vyšetřete průběh funkce $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

1. Z definičního oboru je kvůli zlomku $\frac{1}{x}$ nutné vyloučit bod $x=0$, proto je $D(f)=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$. Funkce ja na $D(f)$ spojitá s jediným bodem nespojitosti $x=0$.
2. Funkce není ani sudá, ani lichá, ani periodická.
3. Exponenciální funkce e^x je vždy kladná, tedy ani naše funkce $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ nemá žádné nulové body.
4. Bodem nespojitosti je $x=0$. Pro $x\to 0^+$ je asymptota bez směrnice $x=0$. Limita v nule zleva dává $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$. Pro asymptotu se směrnicí je třeba vypočíst $k=\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}/x=0$ a $q=\lim_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-0\cdot x=1$. Asymptota se směrnice je tedy $y=1$.
5. První derivace je $f'(x)=[\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}]'=-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}/x^2$, což je funkce stále záporná. Funkce tedy klesá na obou intervalech $(-\infty,0)$ i $(0,\infty)$. Navíc $f'(x)\neq 0$ na celém $D(f)$, tedy nemá žádné extrémy.
6. Druhá derivace je $f''(x)=[-e^{\frac{1}{x}}/x^2]'=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1+2x}{x^4}$. Jediným řešením rovnice $f''(x)=0$ je bod $x=-\frac{1}{2}$. Pro $x>-\frac{1}{2}$ je druhá derivace kladná a pro $x<-\frac{1}{2}$ záporná. Funkce je tedy konkávní na intervalu $(-\infty,-\frac{1}{2})$ a konvexní na intervalech $(-\frac{1}{2},0)$ a $(0,\infty)$. Inflexním bodem je $x=-\frac{1}{2}$. Dopočítejme ještě $f(-\frac{1}{2})=\mathrm{e}^{-2}\doteq 0,135$.
7. Na závěr načrtněme graf.



Obrázek 8: Graf funkce $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.