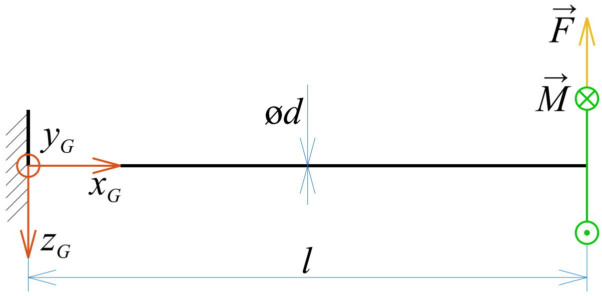
12. cvičení Pružnost a pevnost 1

Kombinované namáhání prutů

Příklad 1

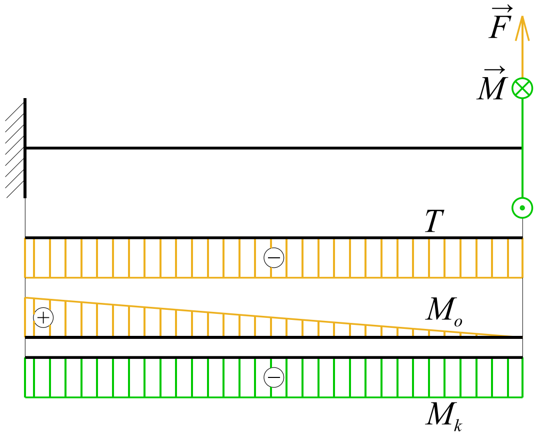
Stanovte součinitel bezpečnosti prutu vzhledem k meznímu stavu pružnosti (MSP) s využitím podmínky plasticity maxτ.

- délka *l*	1 m
- průměr *d*	8 mm
- síla *F*	12 N
- moment *M*	5 N·m
- mez kluzu σ_k	300 MPa

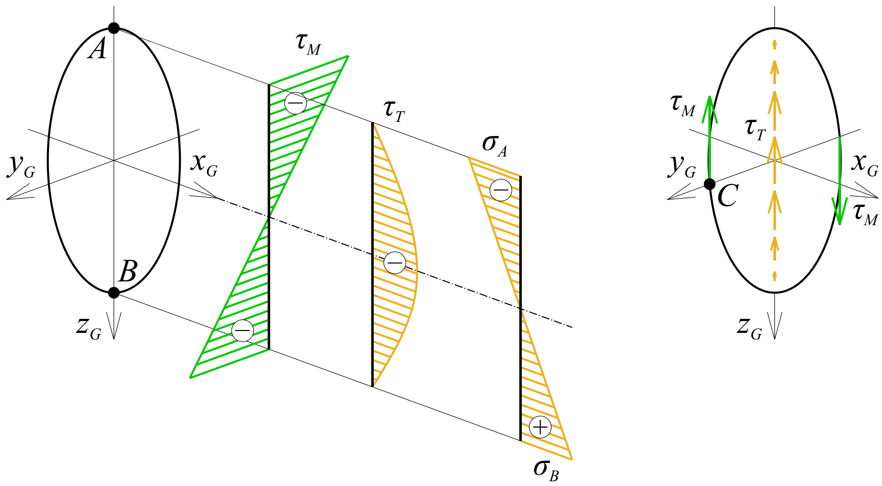


Řešení:

Určení výsledných vnitřních účinků



Z průběhů je patrné, že nebezpečné místo podél střednice prutu je ve vetknutí. Nyní je nutné konkretizovat nebezpečné místo v příčném průřezu. Nebezpečná místa v příčném průřezu jsou v místech *A* a *B*, kde je kombinace krutu a ohybu a v místě C, kde je kombinace krutu a smyku.



Posouzení bodů *A* a *B*

Výpočet normálového napětí od ohybu:

$$M_{o,A,B} = Fl = 12 \cdot 1000 = 12000\,\text{N}\cdot\text{mm}$$

Vzdálenost od neutrální osy se orientuje dle globálního souřadnicového systému (základní ohyb).

$$z_{\max,B} = \frac{d}{2} = \frac{8}{2} = 4\,\text{mm}$$

$$J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi 8^4}{64} = 201\text{ mm}^4$$

$$\sigma_B = \frac{M_{o,A,B}}{J_y} z_{\max,B} = \frac{12000}{201} 4 = 239\text{ MPa}$$

$$\sigma_A = -239\text{ MPa}$$

Výpočet smykového napětí od krutu:

$$M_k = -M = -5000\,\text{N·mm}$$

$$J_p = 2J_y = 2 \cdot 201 = 402\,\text{mm}^4$$

$$\rho_{\max} = \frac{d}{2} = \frac{8}{2} = 4\,\text{mm}$$

$$\tau_{Mk,B} = \tau_M = \frac{M_k}{J_p}\rho_{\max} = \frac{-5000}{402}.4 = -50\text{ MPa}$$

$$\tau_{Mk,A} = -50\text{ MPa}$$

Výpočet redukovaného napětí dle podmínky plasticity maxτ (pro prutovou napjatost).

$$\sigma_{red,B} = \sqrt{\sigma_B^2 + 4\tau_{Mk,B}^2} = \sqrt{239^2 + 4(-50)^2} = 259\text{ MPa}$$

$$\sigma_{red,A} = \sqrt{\sigma_A^2 + 4\tau_{Mk,A}^2} = \sqrt{(-239)^2 + 4(-50)^2} = 259\text{ MPa}$$

V místě *A* vyšlo stejné redukované napětí dle maxτ, tudíž bude stejný i součinitel bezpečnosti k MSP.

$$k_{k,B} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{red,B}} = \frac{300}{259} = 1{,}5 = k_{k,A}$$

Posouzení bodu *C*

Výpočet smykového napětí od posouvající síly.

$$T = -F = -12\,\text{N}$$

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 8^2}{4} = 50\text{ mm}^2$$

$$\tau_{T,C} = \tau_T = \frac{4}{3}\frac{T}{S} = \frac{4}{3}\frac{-12}{50} = -0{,}32\,\text{MPa}$$

Maximální smykové napětí (v případě obdélníkového příčného průřezu je průběh smykového napětí parabolický a ve výpočtu jsou 3/2 místo 4/3) od posouvající síly je zanedbatelné, proto jej není potřeba zahrnovat do výpočtu namáhání prutů, pokud platí *l* / *d* > 10.

Smykové napětí od krouticího momentu:

$$\tau_{Mk,C} = \tau_M = \frac{M_k}{J_p}\rho_{\max} = \frac{-5000}{402}.4 = -50\text{ MPa}$$

Normálové napětí od ohybového momentu:

$$\sigma_C = \ 0 \text{ MPa}$$

Smykové napětí od krutu je v bodě *C* stejné, jako v bodě *B* (body B a C jsou na vnějším povrchu prutu). Normálové napětí je v bodě *C* nulové, jelikož tento bod leží na neutrální ose. Jedná se tedy o smykovou napjatost.

Bezpečnost k meznímu stavu pružnosti (dvě možnosti):

a) pomocí redukovaného napětí

Celkové smykové napětí v bodě C:

$$\tau_C = \tau_{Mk,C} + \tau_{T,C} = \ -50 - 0{,}32 = -50{,}3 \text{ MPa}$$

Redukované napětí v bodě C (pro smykovou napjatost):

$$\sigma_{red,C} = 2.|\tau_C| = 2.|-50{,}3| = 100{,}6 \text{ MPa}$$

Součinitel bezpečnosti vhledem k meznímu stavu pružnosti:

$$k_{k,C} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{red,C}} = \frac{300}{101} = 2{,}98$$

b) pomocí meze kluzu ve smyku (není třeba počítat redukované napětí)

Celkové smykové napětí v bodě C:

$$\tau_C = \tau_{Mk,C} + \tau_{T,C} = \ -50 - 0{,}32 = -50{,}3 \text{ MPa}$$

Mez kluzu ve smyku (dle maxτ):

$$\tau_k = \frac{\sigma_k}{2} = \frac{300}{2} = 150 \text{ MPa}$$

Součinitel bezpečnosti vhledem k meznímu stavu pružnosti:

$$k_{k,C} = \frac{\tau_k}{|\tau_C|} = \frac{150}{50{,}3} = 2{,}98$$

Součinitel bezpečnosti celého prutu vzhledem k MSP se stanoví z množiny jednotlivých vypočtených součinitelů bezpečnosti jako minimum dílčích bezpečností.

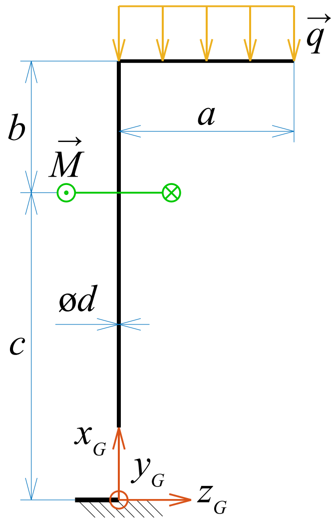
$$k_k = \min\{k_{k,i}\} = \min\{k_{k,A};\ k_{k,B};\ k_{k,C}\} = \min\{1{,}5; 1{,}5; 2{,}98\} = 1{,}5$$

Výsledný součinitel bezpečnosti je vyhovující.

Příklad 2

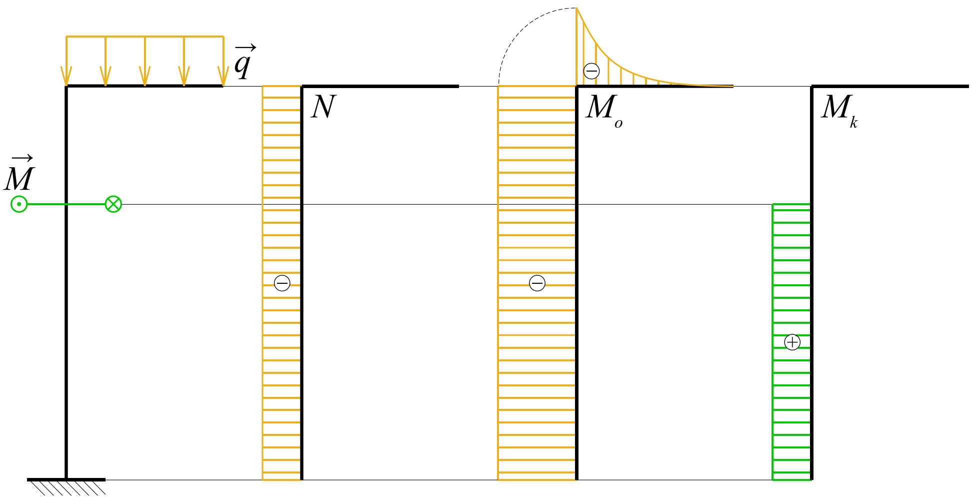
Stanovte součinitel bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu pružnosti (MSP)s využitím podmínky plasticity HMH.

- délka *a* 150 mm
- délka *b* 10 cm
- délka *c* 2 dm
- průměr *d* 3 cm
- liniové zatížení *q* 30 N·m^{-1}
- silová dvojice *M* 0,5 MN·m
- mez kluzu σ_k 260 MPa



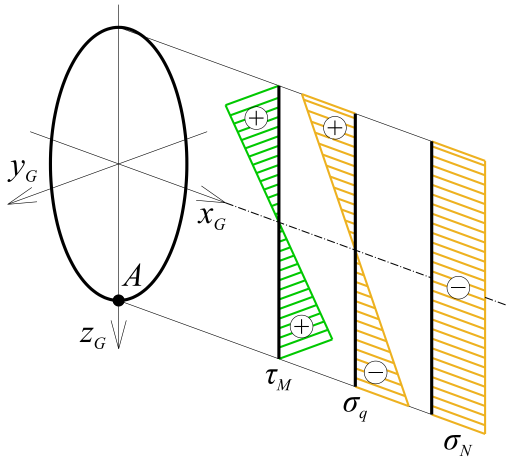
Řešení:

Určení výsledných vnitřních účinků



Z průběhů je patrné, že nebezpečné místo podél střednice prutu je mezi vetknutím a zatěžující silovou dvojicí (délka *c*). Nyní je nutné konkretizovat nebezpečné místo v příčném průřezu.

Nebezpečné místo v příčném průřezu je v místě *A*, kde je kombinace krutu, ohybu a tlaku.



Posouzení nebezpečného místa (bodu A)

Výpočet normálového napětí od ohybu:

$$M_{o,A} = -\frac{qa^2}{2} = -\frac{30 \cdot 150^2}{2} = -337500 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$z_{\max,A} = \frac{d}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ mm}$$

$$J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi 30^4}{64} = 39761 \text{ mm}^4$$

$$\sigma_{Mo,A} = \frac{M_{o,A}}{J_y} z_{\max,A} = \frac{-337500}{39761} . 15 = -127 \text{ MPa}$$

Výpočet normálového napětí od tlaku:

$$N_A = -qa = -30 \cdot 150 = -4500 \text{ N}$$

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 30^2}{4} = 707 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{N,A} = \frac{N_A}{S} = \frac{-4500}{707} = -6 \text{ MPa}$$

Normálové napětí v bodě *A* je součet složky od ohybu a tlaku.

$$\sigma_A = \sigma_{Mo,A} + \sigma_{N,A} = -127 - 6 = -133 \text{ MPa}$$

Výpočet smykového napětí od krutu:

$$M_{k,A} = M = 500000 \text{ N}\cdot\text{mm}$$

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi 30^4}{32} = 79522 \text{ mm}^4$$

$$\rho_{\max} = \frac{d}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ mm}$$

$$\tau_{Mk,A} = \frac{M_{k,A}}{J_p} \rho_{\max} = \frac{500000}{39522} . 15 = 94 \text{ MPa}$$

Smykové napětí od posouvající síly je v bodě *A* nulové, tzn. smykové napětí v bodě je

$$\tau_A = \tau_{Mk,A} = 94 \text{ MPa}$$

Výpočet redukovaného napětí dle podmínky plasticity HMH (pro prutovou napjatost):

$$\sigma_{red,A} = \sqrt{\sigma_A^2 + 3\tau_A^2} = \sqrt{(-133)^2 + 3.94^2} = 210 \text{ MPa}$$

Výpočet součinitele bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu pružnosti:

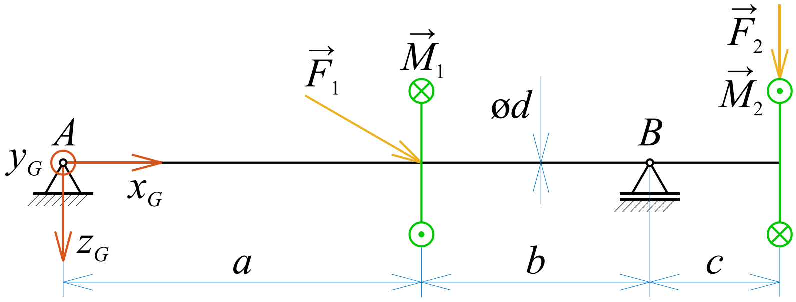
$$k_{k,A} = \frac{\sigma_k}{\sigma_{red,A}} = \frac{260}{210} = 1{,}24$$

Výsledný součinitel bezpečnosti není vyhovující, jelikož by měl ležet v rozmezí 1,5 – 1,75.

Neřešený příklad 1

Stanovte součinitel bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu pružnosti s použitím podmínky plasticity HMH transmisního hřídele z motoru automobilu. Hřídel vyrobený z oceli 12 050.6 je uložen v axiálně-radiálním ložisku v místě *A* a radiálním ložisku v místě *B*. Na hřídeli je v místě 1 umístěno ozubené kolo se šikmým ozubením a řetězové kolo je v místě 2. Tato kola přenášejí silové dvojice M_1 a M_2.

- délka *a* — 25 cm
- délka *b* — 150 mm
- délka *c* — 75 mm
- průměr *d* — 28 mm
- síla $\vec{F}_1$ — $20\vec{i} + 8\vec{k}$ kN
- síla F_2 — 5 kN
- silové dvojice M_1 a M_2 — 400 N·m
- mez kluzu σ_k — 390 MPa



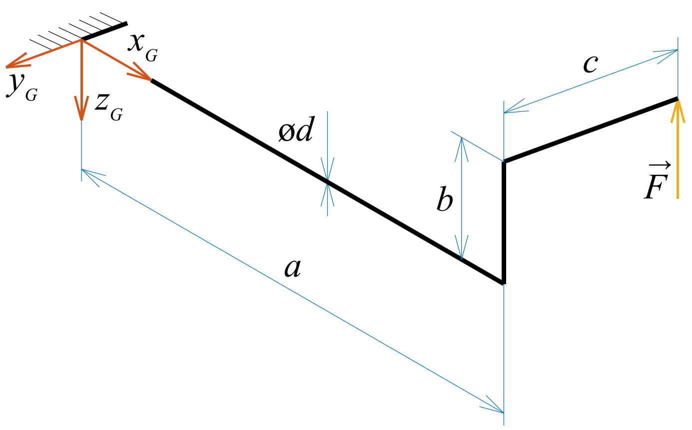
Výsledek:

$k_k = 1{,}24$

Neřešený příklad 2

Stanovte součinitel bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu pružnosti s použitím podmínky plasticity HMH a také složku průhybu v místě působení zadané síly ve směru osy z_G.

- délka *a* — 0,5 m
- délka *b* — 100 mm
- délka *c* — 15 cm
- průměr *d* — 18 mm
- síla *F* — 0,3 kN
- mez kluzu σ_k — 475 MPa
- Youngův modul *E* — 70 GPa
- Poissonův poměr μ — 0,34



Výsledek:

$k_k = 1{,}75$

$w_F = 50$ mm