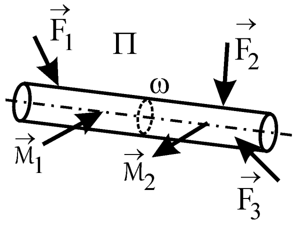
1. Cvičení Pružnost a pevnost - 1. týden

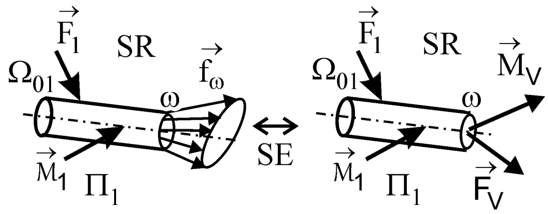
Výsledné vnitřní účinky (VVÚ) - přímý prut

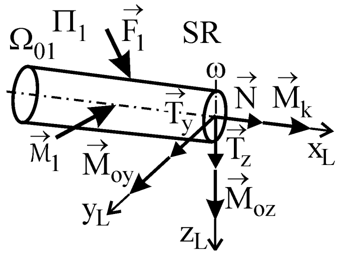
Teorie je odpřednášena v předmětu Statika, proto jen stručně:



Řešíme *úlohu pružnosti* pro prutové těleso, na něž působí silová soustava Π. Vnitřním projevem odezvy jsou deformace a napjatost v každém bodě tělesa.
Prut rozdělíme příčným řezem ω na dva konečné prvky, jejich statickou rovnováhu zajišťují vnitřní síly, mající obecně charakter sil spojitě rozložených v průřezu ω (obecné napětí $\vec{f_\omega}$).

Aby úloha (mnohonásobně staticky neurčitá) byla řešitelná, nahradíme obecná napětí v řezu staticky ekvivalentně výslednicí silovou $\vec{F_V}$ a momentovou $\vec{M_V}$ v těžišti příčného průřezu.





$$\vec{F_V} = \vec{F}_{Vx} + \vec{F}_{Vy} + \vec{F}_{Vz} = N\vec{i} + T_y\vec{j} + T_z\vec{k}$$

$$\vec{M_V} = \vec{M}_{Vx} + \vec{M}_{Vy} + \vec{M}_{Vz} = M_k\vec{i} + M_{oy}\vec{j} + M_{oz}\vec{k}$$

$$\text{VVÚ} = \{N, T_y, T_z, M_k, M_{oy}, M_{oz}\}$$

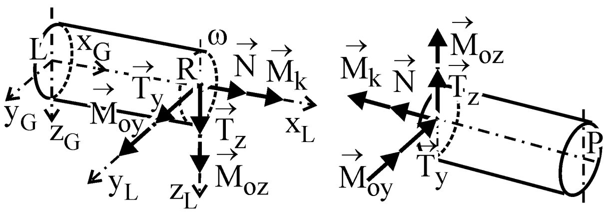
Složky VVÚ:

N	-	normálová síla
T_y, T_z	-	posouvající síly
M_k	-	kroutící moment
M_{oy}, M_{oz}	-	ohybové momenty

VVÚ v bodě střednice se určují z podmínek statické rovnováhy uvolněného prvku.

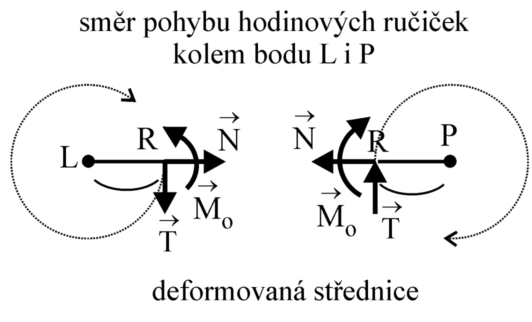
Znaménková konvence:

Veličiny $N, T_y, T_z, M_k, M_{oy}, M_{oz}$ považujeme za **kladné**, když mají smysl **kladných** (záporných) os lokálního souřadnicového systému pro uvolněný prvek obsahující počáteční L (koncový P) bod střednice.



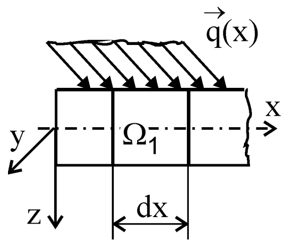
Zjednodušená znaménkové konvence pro rovinnou úlohu u přímého prutu:

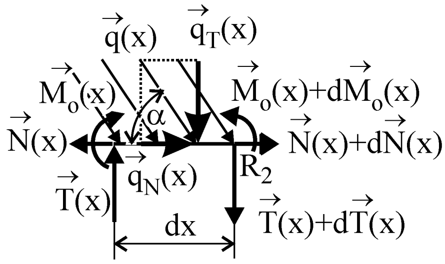
1. kladná normálová síla $\vec{N}$ směřuje ven z řezu,
2. kladná posouvající síla $\vec{T}$ má snahu otáčet prutem kolem bodu L i P ve směru pohybu hodinových ručiček,
3. kladný ohybový moment $\vec{M_o}$ deformuje střednici do konvexního tvaru (křivka na obrázku - střed křivosti nahoře)



Přístupy k řešení průběhů VVÚ:

a) **Integrální přístup** – řešení podmínek SR konečného prvku prutu.
b) **Diferenciální přístup - Schwedlerova věta** – řešení podmínek SR elementárního prvku prutu.





$$\frac{\mathrm{d}\,N(x)}{\mathrm{d}\,x} = -q_N(x)$$

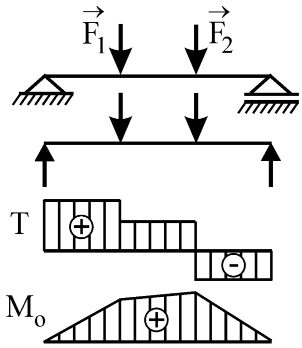
$$\frac{\mathrm{d}\,T(x)}{\mathrm{d}\,x} = -q_T(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,M_o(x)}{\mathrm{d}\,x} = T(x)$$

Pomocná pravidla pro vyšetřování průběhu VVÚ u přímých prutů

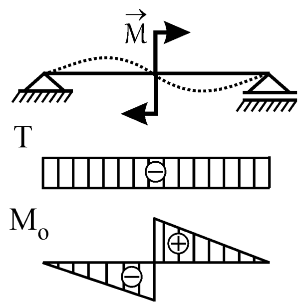
1. Skok v průběhu $N(x)$ nebo $T(x)$ jen tam, kde působí vnější osamělá síla odpovídajícího směru.

2. V místě, kde je skok v průběhu $T(x)$, musí být zlom v průběhu $M_o(x)$ (různé směrnice).
$$\frac{\mathrm{d}\,M_o(x)}{\mathrm{d}\,x} = T(x)$$



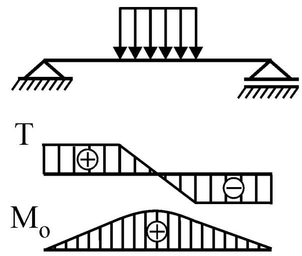
3. Skok v průběhu $M_o(x)$ může být jen tehdy, když v tomto místě působí vnější silová dvojice.
$M_o > 0$, je-li střed křivosti ohybové čáry nahoře (čárkovaná křivka).

4. Je-li prut zatížen jen osamělými silami a dvojicemi (ne spojitým zatížením), jsou průběhy $N(x)$ a $T(x)$ konstantní a $M_o(x)$ je tvořen pouze lomenými přímkami, nikoliv křivkami.



5. Kde průběh $T(x)$ prochází nulou, má $M_o(x)$ extrém.
$$\left(\frac{\mathrm{d}\,M_o(x)}{\mathrm{d}\,x} = T(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \text{extrém}\right)$$

6. V průřezu prutu, kde je posouvající síla kladná (záporná), je průběh $M_o(x)$ rostoucí (klesající)



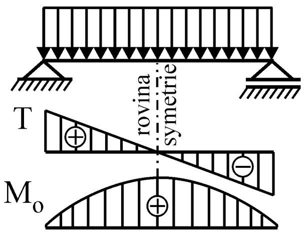
7. Na konci prutu musí všechny složky VVÚ dosáhnout nulové hodnoty, pokud zde nepůsobí odpovídající složka vnějšího zatížení (ta by vyvolala skok VVÚ podle bodu 1 nebo 3).

9. Pro kreslení průběhu VVÚ je výhodné využít symetrie a antisymetrie prutů.

Je-li prut z hlediska **geometrie symetrický** a z hlediska **vnějších silových účinků** (zatížení a sil ve vazbách)

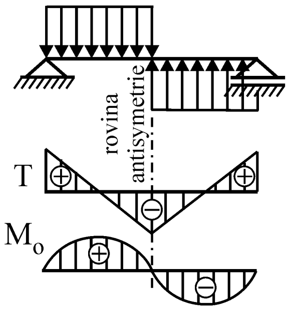
symetrický, pak v rovině symetrie je

- nulová posouvající síla,
- extrémní ohybový moment,
- nulový kroutící moment,



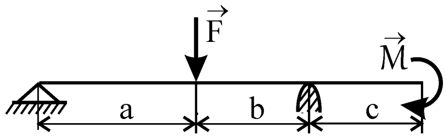
antisymetrický, v rovině antisymetrie je

- nulová normálová síla,
- extrémní posouvající síla,
- nulový ohybový moment.



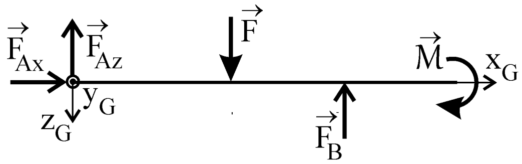
Příklad 1

U prutu podle obrázku určete průběh VVÚ.
Dáno:
$a = 300\,\mathrm{mm}$, $b = 200\,\mathrm{mm}$ $c = 200\,\mathrm{mm}$,
$F = 1500\,\mathrm{N}$, $\mathcal{M} = 600\,\mathrm{Nm}$.



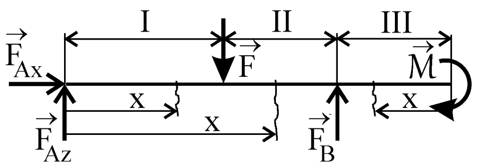
Klasifikace prutu: Prut přímý, silově zatížený, vázaný.
Statický rozbor: $\mu = 3$, $\nu = 3$ (obecná rovinná silová soustava)
$s = \mu - \nu = 3 - 3 = 0$

Uložení staticky určité. Prut nemá volný konec, musíme určit stykové síly z podmínek statické rovnováhy.

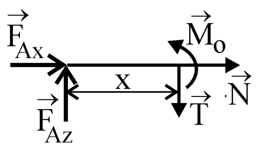


Uvolnění prutu a určení výsledných stykových sil:
F_x : $F_{Ax} = 0$
F_z : $-F_{Az}$-$F_B + F = 0$
M_{yA}: $-Fa + F_B(a + b) - \mathcal{M} = 0$

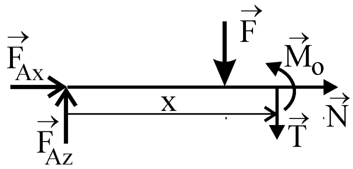
Řešení:
$F_{Ax} = 0$
$F_{Az} = -600\,\mathrm{N}$
$F_B = 2100\,\mathrm{N}$



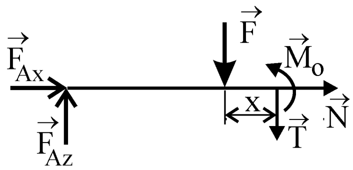
Prut rozdělíme na 3 intervaly s hranicemi v místech změny zatížení podél střednice prutu.V každém intervalu vedeme jeden řez.



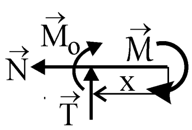
Určení VVÚ v intervalu I: $x \in (0; a)$
F_x : $N(x) = 0$
F_z : $T(x) = F_{Az} = -600\,\mathrm{N}$
M_y: $M_o(x) = F_{Az}x = -600x$



Určení VVÚ v intervalu II: $x \in (a; a + b)$
F_x : $N(x) = 0$
F_z : $T(x) = F_{Az} - F = -2100\,\mathrm{N}$
M_y: $M_o(x) = F_{Az}x - F(x - a)$



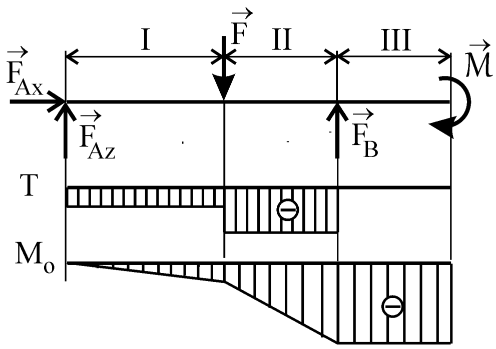
Ukázka možnosti jiné volby počátku lokálního s.s.:
b) Určení VVÚ v intervalu II: $x \in (0; b)$
F_x : $N(x) = 0$
F_z : $T(x) = F_{Az} - F = -2100\,\mathrm{N}$
M_y: $M_o(x) = F_{Az}(x + a) - Fx$



Interval III uvolníme z prava - jednodušší:
Určení VVÚ v intervalu III: $x \in (0; c)$
F_x : $N(x) = 0$
F_z : $T(x) = 0$
M_y: $M_o(x) = -\mathcal{M} = -600\,\mathrm{Nm}$

Grafické znázornění průběhu VVÚ:

Posouvající síla:



I. interval: konstantní posouvající síla $T(x) = F_{Az}$

II. interval: skok ve směru působení $\vec{F}$
$\rightarrow \quad T(x) = F_{Az} - F$

III. interval: skok ve směru působení $\vec{F}_B$
$\rightarrow \quad T(x) = F_{Az} - F + F_B = 0$

Ve všech intervalech je $q_T(x) = 0$:
$\frac{\mathrm{d}\,T(x)}{\mathrm{d}\,x} = -q_T(x) = 0 \rightarrow T(x)$ je rovnoběžná s osou x.

Ohybový moment:

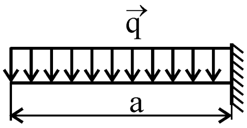
I. interval: $T(x) =$ konst.$\rightarrow \frac{\mathrm{d}\,M_o(x)}{\mathrm{d}\,x} = T(x) =$ konst.$\rightarrow$ lineární závislost $M_o(x)$.
$T(x) < 0 \rightarrow$ funkce $M_o(x)$ je klesající přímka s nulou na konci prutu (není zde vnější silová dvojice).

II. interval: $T(x) =$ konst.$\rightarrow$ funkce $M_o(x)$ je opět klesající přímka, ale s větším odklonem od střednice (osy x).

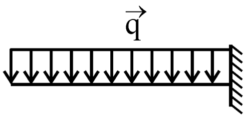
III. interval: $T(x) = 0 \rightarrow$ funkce $M_o(x)$ je přímka rovnoběžná s osou x, na pravém konci skok od silové dvojice.

Příklad 2

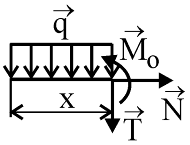
U prutu podle obrázku určete průběh VVÚ.



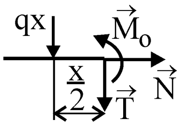
Klasifikace prutu: Prut přímý, silově zatížený, vázaný.
Statický rozbor: $s = \mu - \nu = 3 - 3 = 0$.



Prut má jeden konec volný ⇒ nepočítáme stykové síly, uvolníme od volného konce.
Pro vyšetření VVÚ postačuje 1 interval, nedochází ke změně zatížení.



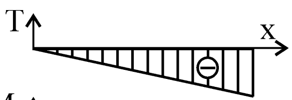
Uvolníme prvek, jeho délka je určena souřadnicí x. Na prvek působí spojité liniové zatížení. Ze statiky znáte, že toto zatížení můžete staticky ekvivalentně nahradit 1 silou (velikost síly odpovídá velikosti plochy uříznutého spojitého zatížení – viz obrázek) s působištěm v těžišti této plochy.



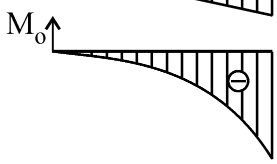
Určení VVÚ: $x \in (0; a)$

F_x : $N(x) = 0$
F_z : $T(x) = -qx$
M_y: $M_o(x) = -\frac{qx^2}{2}$

Grafické znázornění průběhu VVÚ:
Využijeme závěrů vyplývajících ze Schwedlerovy věty.



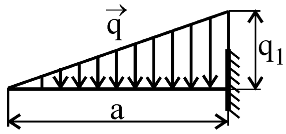
Posouvající síla:
$q_T(x) =$ konst. $> 0 \rightarrow T(x)$ přímka klesající.

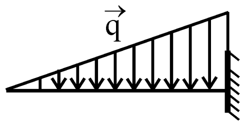


Ohybový moment:
$T(x) < 0$ (lineárně klesá) $\rightarrow$ $M_o(x)$ je kvadratická křivka (parabola), na volném konci střednice je $T(0) = 0 \rightarrow \frac{\mathrm{d}\, M_o(x)}{\mathrm{d}\, x} = T(x) = 0 \rightarrow$ směrnice tečny k funkci $M_o(x)$ je v tomto bodě nulová $\rightarrow M_o(x)$ má v tomto bodě extrém.
Pomůcka při rozhodování o znaménku: zatížený prut se deformuje tak, že střed křivosti deformované střednice je pod střednicí $\rightarrow M_o(x) < 0$.

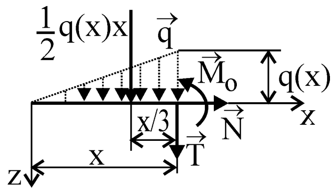
Příklad 3

U prutu podle obrázku určete průběh VVÚ.
Dáno: $q_1 = 1600\,\mathrm{Nm}^{-1}$, $a = 800\,\mathrm{mm}$.
Klasifikace prutu: Prut přímý, silově zatížený, vázaný.
Statický rozbor: $s = \mu - \nu = 3 - 3 = 0$.



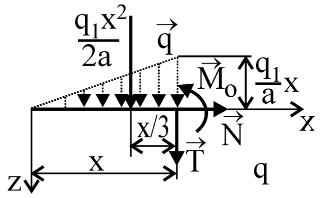


Prut má jeden konec volný $\Rightarrow$ nepočítáme stykové síly, uvolníme od volného konce.
Protože charakter zatížení se po celé délce prutu nemění,nemusíme prut rozdělovat na intervaly.



Uvolníme prvek, jeho délka je určena souřadnicí x. Na prvek působí spojité liniové zatížení. Jako v předchozím příkladu nahradíme toto zatížení staticky ekvivalentní silou (velikost síly odpovídá velikosti plochy uříznutého spojitého zatížení – viz obrázek) s působištěm v těžišti této plochy. Využijeme vlastnosti podobných trojúhelníků:

$$\frac{q(x)}{q_1} = \frac{x}{a} \to q(x) = \frac{q_1}{a}x$$

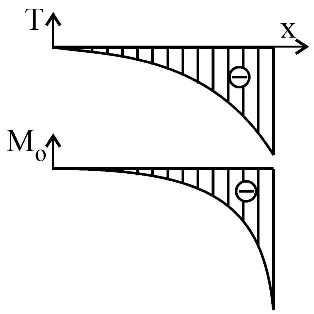


Určení VVÚ: $x \in (0; a)$

$$F_x: \quad N(x) = 0$$

$$F_z: \quad T(x) = -\frac{q(x)x}{2} = -\frac{q_1 x^2}{2a}$$

$$M_y: \quad M_o(x) = -\frac{q(x)x}{2}\frac{x}{3} = -\frac{q_1 x^3}{6a}$$



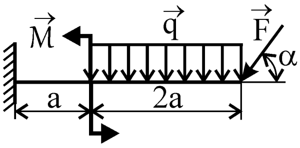
Grafické znázornění průběhu VVÚ:
Využijeme závěrů vyplývajících ze Schwedlerovy věty.

Posouvající síla:
$q_T(x) > 0$ (lineární) $\to$ $T(x)$ je kvadratická křivka (parabola)

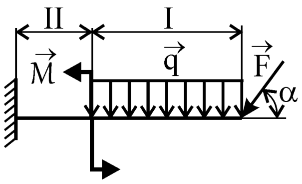
Ohybový moment:
Funkce $T(x)$ kvadratická $\to$ $M_o(x)$ je kubická parabola.
Pomůcka při rozhodování o znaménku: zatížený prut se deformuje tak, že střed křivosti deformované střednice je pod střednicí $\to M_o(x) < 0$.

Příklad 4

U prutu podle obrázku určete průběh VVÚ.
Dáno: $\mathcal{M} = 2\,\mathrm{kNm}$, $q = 1\,\mathrm{kNm}^{-1}$, $F = 2\,\mathrm{kN}$, $a = 2\,\mathrm{m}$, $\alpha = 60^{\mathrm{o}}$.

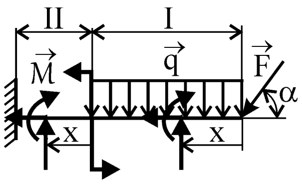


Klasifikace prutu: Prut přímý, silově zatížený, vázaný.
Statický rozbor: $s = \mu - \nu = 3 - 3 = 0$.



Prut má jeden konec volný ⇒ nepočítáme stykové síly, uvolníme od volného konce.
Protože charakter zatížení se po délce prutu mění,musíme prut rozdělit na 2 intervaly.

Uvolníme prvky, pro zjednodušení už prvky nerozkreslujeme, jen si do místa řezu naznačím kladné smysly VVÚ. Pozor na správnou orientaci, uvolňujeme prvky zprava.



Určení VVÚ:

Interval I: $x \in (0; 2a)$

$F_x:\quad N(x) = -F\cos\alpha$

$F_z:\quad T(x) = F\sin\alpha + qx$

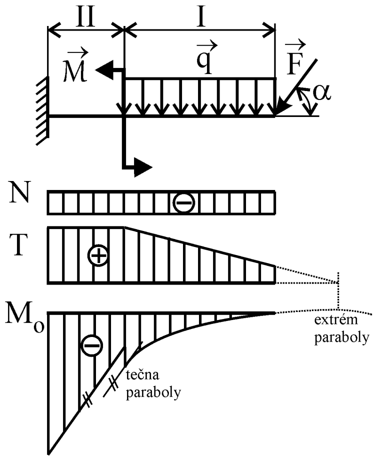
$M_y:\quad M_o(x) = -F\sin\alpha\cdot x - \frac{qx^2}{2}$

Interval II: $x \in (0; a)$

$F_x:\quad N(x) = -F\cos\alpha$

$F_z:\quad T(x) = F\sin\alpha + 2qa$

$M_y:\quad M_o(x) = -F\sin\alpha(x+2a) - 2qa(x+a) + \mathcal{M}$



Grafické znázornění průběhu VVÚ:

Diferenciální přístup (Schwedlerova věta) používá vždy osu x orientovanou zleva doprava. Proto při využívání zákonitostí vyplývajících ze Schwedlerovy věty musíme dodržet tuto orientaci osy x.

Normálová síla:
Po celé délce střednice $\frac{\mathrm{d}\,N(x)}{\mathrm{d}\,x} = -q_N(x) = 0 \rightarrow N(x) \|$ s osou x (tj.konstanta).

Posouvající síla:
Začneme od volného konce, kde je jasné, že funkce $T(x)$ končí na střednici a je zde skok od síly $\vec{F}_z$.

I. interval: předchází volnému konci, $q_T(x) = \text{konst.} > 0 \rightarrow T(x)$ přímka klesající.
Na hranici mezi intervaly I a II změnila funkce $q_T(x)$ skokově svoji velikost (klesla na 0) $\rightarrow$ zlom funkce $T(x)$.

II. interval: $\frac{\mathrm{d}\,T(x)}{\mathrm{d}\,x} = -q_T(x) = 0 \rightarrow T(x) \|$ s osou x (tj. konstanta).

Ohybový moment:

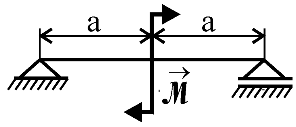
I. interval: $T(x)$ lineárně klesá $\rightarrow$ $M_o(x)$ je kvadratická křivka, ale na volném konci střednice je $T(0) \neq 0$. Pomůžeme si tak, že funkci $T(x)$ prodloužíme mimo střednici (čárkovaná čára) a v místě, kde $T(x) = 0$ by parabola měla extrém. Tato parabola musí procházet přes volný konec střednice a že bude pod střednicí napoví představa zdeformované střednice (střed křivosti bude pod střednicí).

II. interval: $\frac{\mathrm{d}\,M_o(x)}{\mathrm{d}\,x} = T(x) = \text{konst.} > 0 \rightarrow$ funkce $M_o(x)$ bude rostoucí přímka, která by měla na hranici intervalů I a II plynule navázat na parabolu z intervalu I., protože zde není skoková změna $T(x)$ (je tu jen zlom) $\rightarrow$ směrnice tečny k funkci $M_o(x)$ v tomto bodě zleva i zprava stejná.
Ale protože v tomto bodě působí silová dvojice $\vec{\mathcal{M}}$, způsobí skok v průběhu $M_o(x)$ a přímka, která měla plynule navázat na parabolu tedy **musí být rovnoběžná** s tečnou k parabole na hranici intervalů I a II.

Neřešené příklady

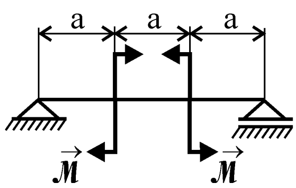
Příklad 5

Určete průběh VVÚ u prutu podle obrázku.
Dáno: $a = 2\,\text{m}$, $\mathcal{M} = 4\,\text{kNm}$.



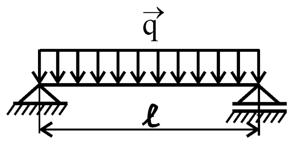
Příklad 6

Určete průběh VVÚ u prutu podle obrázku.
Dáno: $\mathcal{M} = 2\,\text{kNm}$, $a = 1\,\text{m}$.



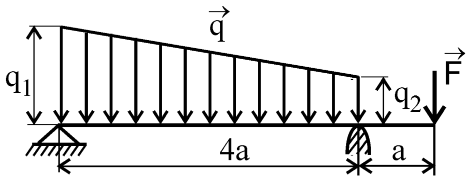
Příklad 7

Určete průběh VVÚ u prutu podle obrázku.
Dáno: $q = 1000\,\text{Nm}^{-1}$, $l = 1\,\text{m}$.



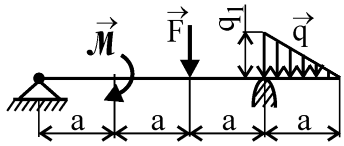
Příklad 8

Určete průběh VVÚ u prutu podle obrázku.
Dáno: $F = 4000\,\text{N}$, $q_1 = 3\,\text{kNm}^{-1}$, $q_2 = 2\,\text{kNm}^{-1}$, $a = 1\,\text{m}$.



Příklad 9

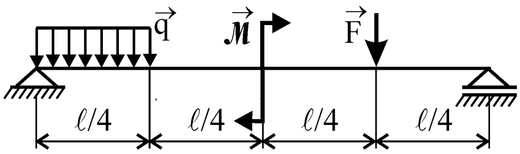
Určete průběh VVÚ u prutu podle obrázku.
Dáno: $F = 4000\,\text{N}$, $\mathcal{M} = 2\,\text{kNm}$ $q_1 = 3\,\text{kNm}^{-1}$, $a = 1\,\text{m}$.



Domácí úkol:

DÚ 1

Určete průběh VVÚ u prutu podle obrázku.



Dáno:

a) $F = 150\,\mathrm{N}$, $q = 500\,\mathrm{Nm}^{-1}$, $\mathcal{M} = 200\,\mathrm{Nm}$, $l = 2\,\mathrm{m}$
b) $F = 800\,\mathrm{N}$, $q = 500\,\mathrm{Nm}^{-1}$, $\mathcal{M} = 200\,\mathrm{Nm}$, $l = 2\,\mathrm{m}$
c) $F = 150\,\mathrm{N}$, $q = 500\,\mathrm{Nm}^{-1}$, $\mathcal{M} = 600\,\mathrm{Nm}$, $l = 2\,\mathrm{m}$