6. cvičení Pružnost a pevnost

Namáhání tahem - soustavy těles. Staticky neurčité úlohy

Mnoho informací pro řešení úloh z této oblasti najdete na přednášce z Pružnosti v kapitole 11.12.3. Jsou tu ukázky řešení soustav s pruty rozdělených do skupin:

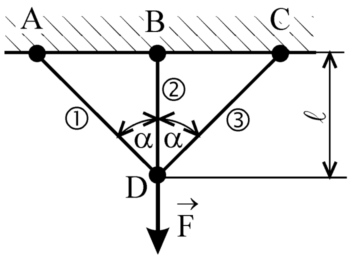
a) přímé souosé, osově zatížené pruty,
b) každý prut vázán k základnímu tělesu,
c) pruty a neprutová tělesa,
d) prutové těleso vázané k základnímu tělesu.

Tato část vyžaduje znalosti ze Statiky, kde jste se dozvěděli o řešení pomocí **postupné styčníkové metody** a v neposlední řadě i o výpočtu stupně statické neurčitosti uložení těchto soustav. Pokud zjistíte v této oblasti, že potřebujete něco doplnit, vraťte se ke studijním materiálům ze Statiky, případně nahlédněte do interaktivního textu Pružnost a pevnost (dostupný na e-learningu).

Nyní se budeme věnovat řešení příkladů z uvedených oblastí a) - d).

Příklad 1

Závěs podle obrázku je vyroben ze štíhlých tyčí shodného kruhového průřezu S. Je zatížen silou $\vec{F}$. Posuďte jeho bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti. Geometrie, zatížení i materiálové charakteristiky (všechny 3 pruty jsou ze stejného materiálu) jsou zadány (plocha příčného průřezu S, mez kluzu σ_K, Youngův modul pružnosti E). Prut 2 je vyroben o δ kratší než je jmenovitá délka na výkrese. Vlastní tíha prutů a změny teploty jsou zanedbatelné.



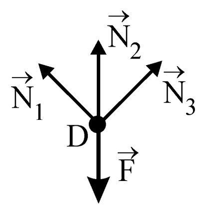
Řešení

Rozbor

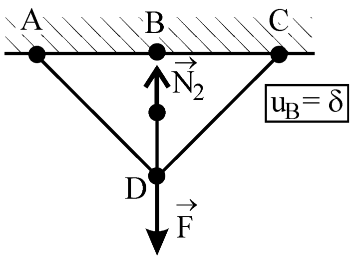
Řešená úloha patří do skupiny **b)** - soustava 3 přímých štíhlých prutů, každý je vázán k základnímu tělesu, všechny vazby lze nahradit rotačními kinematickými dvojicemi, silové zatížení je realizováno ve styčníku. Prut 2 je vyroben s **malou** výrobní nepřesností, po montáži je tedy soustava zatížena i deformačně.

Úplné uvolnění:

Uvolníme styčník D:
Statický rozbor: $\mu = 3, \quad \nu = 2$ (centrální rovinná silová soustava)
$s = \mu - \nu = 1 \quad \Rightarrow$ uložení je 1x staticky neurčité



Částečné uvolnění:



Nejjednodušší je obvykle částečné uvolnění od základního tělesa, jehož deformace je proti deformaci jednotlivých prutů nepodstatná (neuvažujeme ji). Je zde menší pravděpodobnost udělat chybu.
Uvolníme prut, který je vyrobený kratší, protože deformační podmínka se nám bude formulovat snadněji. Uvolníme tedy prut 2 od základního tělesa a do bodu B zavedeme vazbovou deformační podmínku $u_B = \delta$.
Posuv bodu B vyjádříme pomocí Castiglianovy věty, kladný směr posuvu bude tedy ve směru síly N_2, což je souhlasný směr s požadovaným posunutím konce prutu 2 při montáži (kladné znaménko posuvu δ na pravé straně rovnice):

$$u_B = \frac{\partial W}{\partial N_2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{N_i l_i}{ES} \frac{\partial N_i}{\partial N_2} = \delta$$

Použitelné podmínky statické rovnováhy:
$\sum F_x = 0: \quad -N_1 \sin\alpha + N_3 \sin\alpha = 0$
$\sum F_y = 0: \quad N_1 \cos\alpha + N_2 + N_3 \cos\alpha - F = 0$

Síly v prutech vyjádříme pomocí síly N_2 v prutu 2:

$$N_1 = N_3, \qquad N_1 = \frac{F - N_2}{2\cos\alpha}.$$

Vyjádření deformační podmínky a výpočet sil v prutech:

$$u_B = \frac{1}{ES}\left[\frac{(F-N_2)l_1}{2\cos\alpha}\left(-\frac{1}{2\cos\alpha}\right)\cdot 2 + N_2 l_2 \cdot 1\right] = \frac{1}{ES}\left[\frac{(N_2-F)l}{2\cos^3\alpha} + N_2 l\right] = \delta$$

$$N_2 = \frac{Fl + 2\delta ES\cos^3\alpha}{l(2\cos^3\alpha + 1)}, \qquad N_1 = N_3 = \frac{F - N_2}{2\cos\alpha}$$

Průběh napětí:

Protože se jedná o pruty shodného průřezu namáhané prostým tahem nebo tlakem, je napětí v průřezu prutu konstantní a určíme ho ze vztahu

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{S(x)}: \qquad \sigma_1 = \sigma_3 = \frac{N_1}{S}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{S}.$$

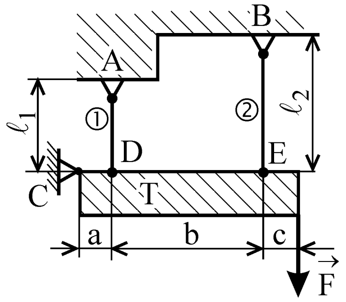
Kontrola mezního stavu pružnosti:

Protože průběh napětí je po délce střednice prutů konstantní a pruty jsou vyrobeny ze stejného materiálu (stejná mez kluzu), zjistíme, ve kterém prutu je napětí největší a vypočítáme bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti:

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{\max}}.$$

U této úlohy je zapotřebí zhodnotit stav po montáži ($F = 0$) a stav provozní.

Příklad 2



Těleso T je uloženo a zatíženo silou $\vec{F}$ podle obrázku. Posuďte bezpečnost této soustavy vzhledem k meznímu stavu pružnosti. Geometrie, zatížení i materiálové charakteristiky (plocha příčného průřezu prutů S_1, S_2, délka prutů l_1, l_2, mez kluzu σ_{K1}, σ_{K2}, Youngův modul pružnosti E_1, E_2) jsou zadány. Vlastní tíhu neuvažujte. Deformace tělesa T je vzhledem k deformacím tyčí zanedbatelná („tuhé těleso“).

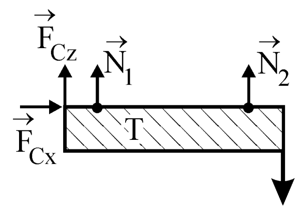
Řešení

Rozbor

Řešená úloha patří do skupiny **c)** - soustava 2 přímých prutů, každý je vázán k základnímu tělesu a k tělesu T, všechny vazby lze nahradit rotačními kinematickými dvojicemi.

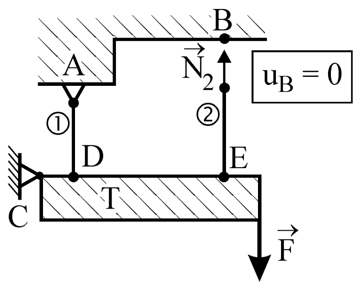
Úplné uvolnění:

Pro úplné uvolnění dané soustavy stačí uvolnit pouze těleso T:



Statický rozbor:
$\mu = 4 \qquad \nu = 3$ (obecná rovinná silová soustava)
$s = \mu - \nu = 1 \quad \Rightarrow \quad$ uložení je 1x staticky neurčité.

Částečné uvolnění: Nejjednodušší je obvykle částečné uvolnění od základního tělesa, které je v klidu a jehož deformace je proti deformaci jednotlivých prutů nepodstatná (neuvažujeme ji).
Uvolníme např. prut 2 od základního tělesa a do bodu B zavedeme vazbovou deformační podmínku $u_B = 0$:



$$u_B = \frac{\partial W}{\partial N_2} = \sum_{i=1}^{2} \frac{N_i l_i}{E_i S_i} \frac{\partial N_i}{\partial N_2} = 0.$$

Použitelné podmínky statické rovnováhy:

$$\begin{aligned}
&\sum F_x = 0: && F_{Cx} = 0\\
&\sum F_z = 0: && F_{Cz} + N_1 + N_2 - F = 0\\
&\sum M_{Cy} = 0: && F(a+b+c) - N_2(a+b) - N_1 a = 0
\end{aligned}$$

Síly ve vazbách
vyjádříme pomocí síly N_2, kterou jsme zavedli v částečném uvolnění do uvolněné vazby B:

$$F_{Cx} = 0, \quad F_{Cz} = N_2 \frac{b}{a} - F\frac{b+c}{a}, \quad N_1 = F\frac{a+b+c}{a} - N_2\frac{a+b}{a}.$$

Vyjádření deformační podmínky a výpočet sil v prutech:

$$u_B = \sum_{i=1}^{2} \frac{N_i l_i}{E_i S_i} \frac{\partial N_i}{\partial N_2} = \frac{F\frac{a+b+c}{a} - N_2\frac{a+b}{a}}{E_1 S_1} l_1 \left(-\frac{a+b}{a}\right) + \frac{N_2 l_2}{E_2 S_2} \cdot 1 = 0$$

$$N_2 = \frac{F(a+b+c)l_1(a+b)E_2S_2}{(a+b)^2 l_1 E_2 S_2 + a^2 l_2 E_1 S_1}, \qquad N_1 = F\frac{a+b+c}{a} - N_2\frac{a+b}{a} = \frac{F(a+b+c)l_2 a E_1 S_1}{(a+b)^2 l_1 E_2 S_2 + a^2 l_2 E_1 S_1}.$$

Průběh napětí:

Protože se jedná o pruty namáhané prostým tahem nebo tlakem s konstantní normálovou silou, je napětí v prutu konstantní a určíme ho ze vztahu $\sigma(x) = \dfrac{N(x)}{S(x)}$:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = \frac{F(a+b+c)l_2 a E_1}{(a+b)^2 l_1 E_2 S_2 + a^2 l_2 E_1 S_1}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{S_2} = \frac{F(a+b+c)l_1(a+b)E_2}{(a+b)^2 l_1 E_2 S_2 + a^2 l_2 E_1 S_1}.$$

Kontrola mezního stavu pružnosti:

Vypočítáme bezpečnost obou prutů vzhledem k meznímu stavu pružnosti a menší z nich bude bezpečností celé soustavy.

$$k_{K1} = \frac{\sigma_{K1}}{|\sigma_1|}, \quad k_{K2} = \frac{\sigma_{K2}}{|\sigma_2|}, \quad k_K = \min\{k_{K1}, k_{K2}\}.$$

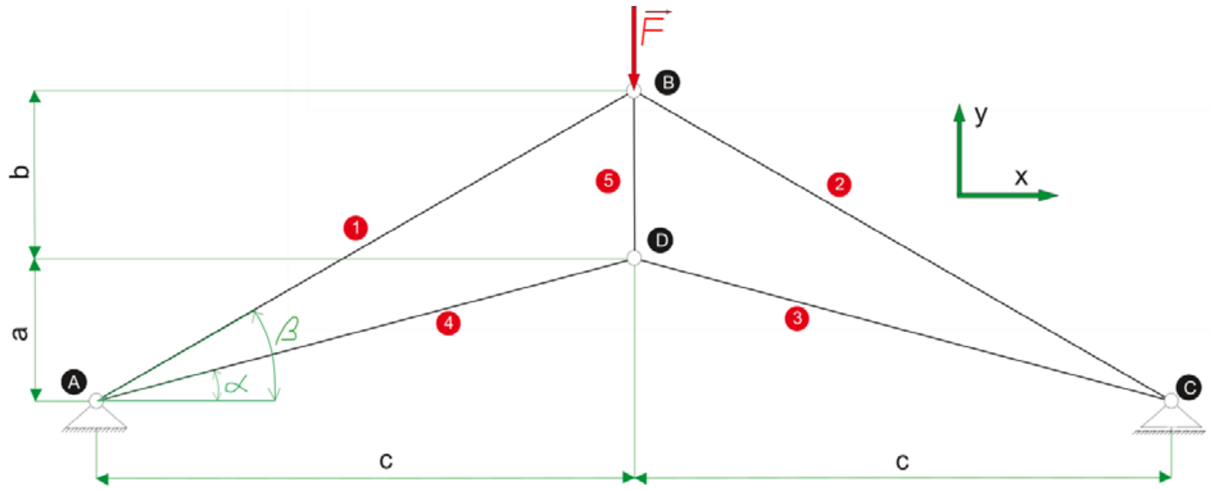
Poznámka:
Vzhledem ke statické neurčitosti uložení je řešení platné pouze za předpokladu zanedbatelných výrobních tolerancí a změn teploty.

Příklad 3

Určete změnu vzdálenosti kloubových podpor ΔAC a posunutí styčníku B ve směru síly F.

Dáno:

a = 2 m	$S_1 = S_2 = 900\ mm^2$	F = 12 kN
b = 3m	$S_3 = S_4 = 730\ mm^2$	$E = 2{,}1.10^5$ MPa
c = 10 m	$S_5 = 250\ mm^2$	$R_e = 220$ MPa

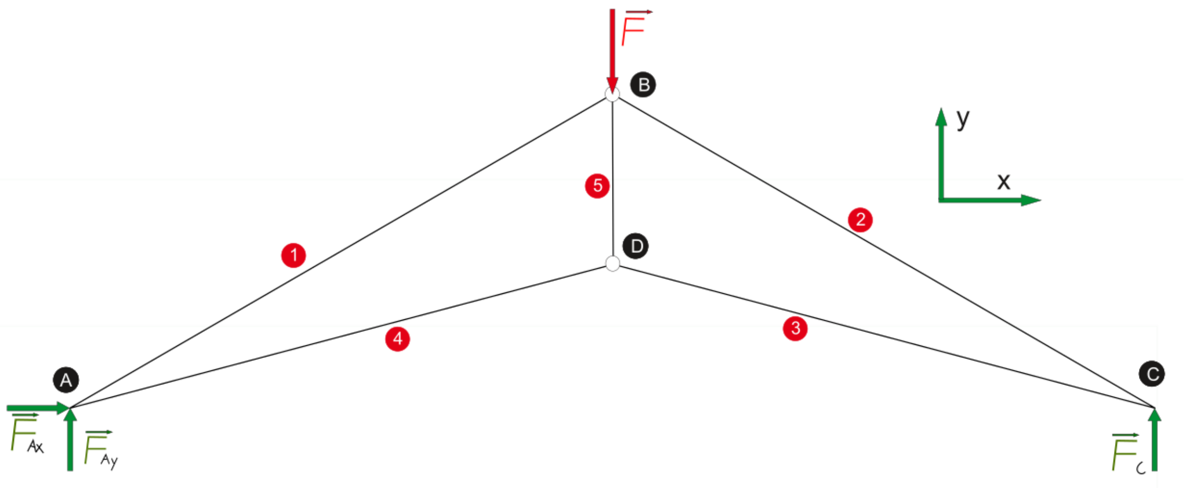


Řešení

Rozbor:

Řešená úloha patří do skupiny **d)** – prutové těleso vázané k základnímu tělesu.

Úplné uvolnění prutového tělesa:



Statický rozbor

- Vnější statický rozbor

$NP = \{F_{Ay};\ F_C; F_{Ax}\} => \mu = 3;\ \nu = \nu_F + \nu_M = 2 + 1 = 3$

$s_e = \mu - \nu = 0 \rightarrow\ uložení\ vně\ staticky\ určité$

- Vnitřní statický rozbor

$2.k - 3 = p;$ kde k .....počet styčníků
p ....počet prutů bez základního tělesa

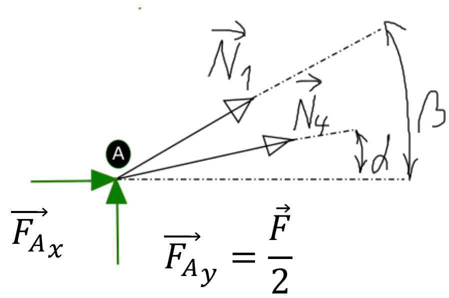
$s_{in} = p - (2.k - 3) = 5 - (2.4 - 3) = 0$ uložení je vnitřně staticky určité

- Rovnice statické rovnováhy pro uvolněné prutové těleso

$F_x\!:\ F_{Ax} = 0$ *(1)*
$F_y\!:\ F_{Ay} + F_C - F = 0$ *(2)*
$M_A\!:\ F_C.2c - F.c = 0$ *(3)*
$z\ rovnice\ (3)\!:\ F_C = \frac{F}{2}$ *(4)*
$(4)\ do\ (2)\!: F_{Ay} + \frac{F}{2} - F = 0;\ F_{Ay} = \frac{F}{2}\ \ /pozn.\!: silová\ symetrie/$ *(5)*

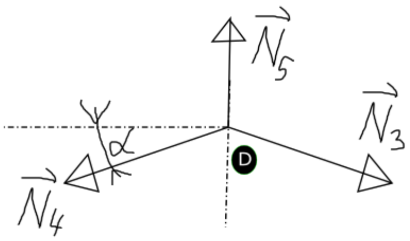
Cílem úlohy je určit změnu vzdálenosti vazeb A a C, a posuv působiště síly F (bod B). Uložení je vně i vnitřně staticky určité, prutová soustava symetrická z hlediska zatížení, materiálu a geometrie – tzn. stačí určit síly v prutech 1, 4 a 5.

Uvolnění styčníku A



$F_x\!: N_1.\cos\beta + N_4.\cos\alpha = 0$ *(6)*
$F_y\!: N_1.\sin\beta + N_4.\sin\alpha + \frac{F}{2} = 0$ *(7)*
$z\ rovnice\ (6)\!:\ N_1 = -N_4.\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = -1{,}096N_4$ *(8)*
$(8)\ do\ (7)\!: N_4 = 1{,}7F = 20\,396\ \text{N}$ *(9)*
$pak\ N_1 = -1{,}863F = -22\,361\ \text{N}$

Uvolnění styčníku D



$Fz\!: -2N_4.\sin\alpha + N_5 = 0$ *(10)*
$(9)\ do\ (10)\!: N_5 = 0{,}6668F = 8\,000\ \text{N}$

Kontrola mezního stavu pružnosti (MSP)

Díky symetrii (materiálové, geometrické a silové) můžeme psát:

$$N_1 = N_2 = -22\,361\text{ N};$$
$$N_3 = N_4 = 20\,396\text{ N};$$
$$N_5 = 8\,000\text{ N}$$

Pruty 1 a 2 jsou namáhány na tlak; pruty 5, 4 a 3 na tah.

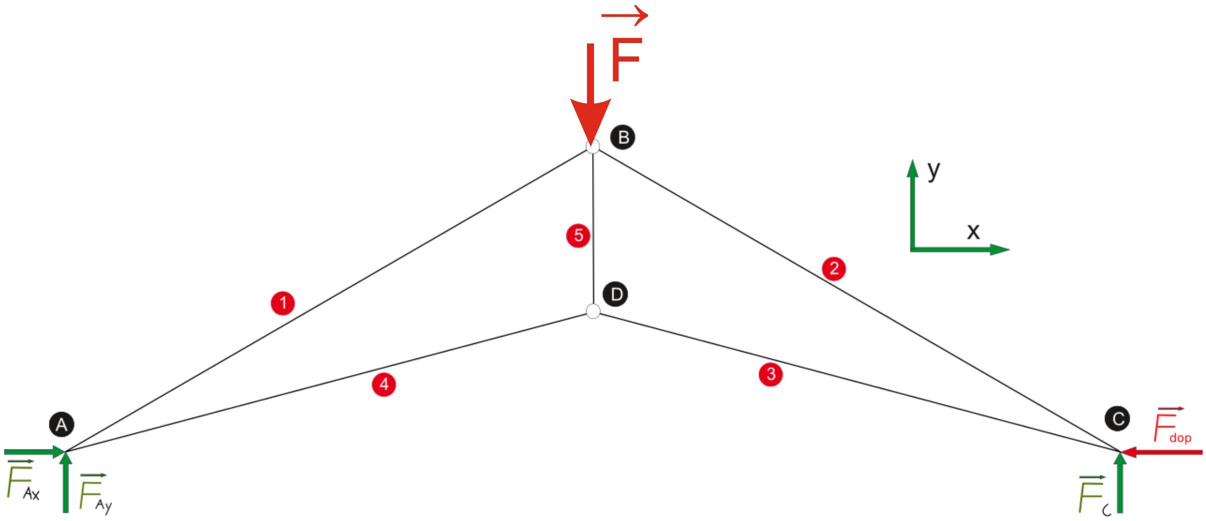
$$\sigma_1 = \frac{N_1}{S_1} = -25\text{ MPa};\ \sigma_3 = \frac{N_3}{S_3} = 28\text{ MPa};\ \sigma_5 = \frac{N_5}{S_5} = 32\text{ MPa};$$

$$k_{k,min} = \frac{R_e}{|\sigma_5|} = \frac{220}{32} = 6{,}9 > 1$$

V prutu 5 je maximální napětí, ale $k_{k,min}$ je zde mnohem > 1, což znamená, že prut je v elastickém stavu.

Výpočet posuvu ve vazbě C ve směru osy *x*

- Castiglianova věta (rov. 11) nám určuje posuv ve směru síly, podle které derivujeme energii napjatosti. Protože ve směru osy x nemáme ve vazbě C žádnou sílu, je potřeba zavést sílu doplňkovou $\vec{F}_{dop} = \vec{0}$ N a znovu spočítat síly v prutech.
- $u_c = \frac{\partial W}{\partial F_{dop}} = \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S_i}\frac{\partial N_{id}}{\partial F_{dop}}\right)$ *(11)*



- Rovnice statické rovnováhy pro uvolněné prutové těleso

F_x: $F_{Ax} - F_{dop} = 0$

F_y: $F_{Ay} + F_C - F = 0$

M_A: $F_C.2c - F.c = 0$

$F_C = \frac{F}{2}$

$F_{Ax} = F_{dop};\ F_{Ay} = \frac{F}{2}$

- Styčník A:

F_x: $N_1\, cos\,\beta + N_4\, cos\,\alpha + F_{dop} = 0$ *(12)*

$F_{y:}$ $N_1\, sin\,\beta + N_4\, sin\,\alpha + \frac{F}{2} = 0 \Rightarrow N_4 = -N_1 \frac{sin\,\beta}{sin\,\alpha} - \frac{F}{2\sin\alpha}$ *(13)*

$(13)\ do\ (12)$: $N_1 \left(cos\,\beta - \frac{sin\,\beta}{sin\,\alpha} cos\,\alpha \right) - \frac{F\cos\alpha}{2\sin\alpha} = -F_{dop}$ *(14)*

$N_1 = N_2 = -1{,}863F + 0{,}745F_{dop};\ N_4 = N_3 = 1{,}6988F - 1{,}6989F_{dop}$

- Styčník D:

$F_{y:} - N_4\, sin\,\alpha - N_3\, sin\,\alpha + N_5 = 0$ *(15)*

$N_5 = 2N_3\, sin\,\alpha = 0{,}6663F - 0{,}6664F_{dop}$

Nyní můžeme provést parciální derivace dle doplňkové síly, které budeme potřebovat do Castiglianovy věty:

$\frac{\partial N_5}{\partial F_{dop}} = -0{,}6664;\ \frac{\partial N_1}{\partial F_{dop}} = \frac{\partial N_2}{\partial F_{dop}} = 0{,}745;\ \frac{\partial N_4}{\partial F_{dop}} = \frac{\partial N_3}{\partial F_{dop}} = -1{,}6989$

$l_1 = l_2 = \sqrt{125 \cdot 10^6}$ mm; $l_3 = l_4 = \sqrt{104 \cdot 10^6}$ mm; $l_5 = 3000$ mm

$$u_c = \sum_{i=1}^{5} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S_i} \frac{\partial N_i}{\partial F_{dop}} = \frac{1}{E}\left[\frac{N_1 \cdot l_1}{S_1} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial F_{dop}} + \cdots + \frac{N_5 \cdot l_5}{S_5} \cdot \frac{\partial N_5}{\partial F_{dop}}\right] =$$

$$= \frac{F}{2{,}1.\,10^5}\left[\frac{-1{,}863 \cdot \sqrt{125 \cdot 10^6}}{900} \cdot 0{,}745 \cdot 2 + \frac{1{,}6988 \cdot \sqrt{104 \cdot 10^6}}{730} \cdot (-1{,}6989) \cdot 2 + \frac{0{,}6663 \cdot 3000}{250}.(-0{,}6664)\right] = -6{,}9 \text{ mm}$$

Výpočet posuvu ve vazbě B

$$v_B = \sum_{i=1}^{5} \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S_i} \frac{\partial N_i}{\partial F} = \frac{1}{E}\left[\frac{N_1 \cdot l_1}{S_1} \cdot \frac{\partial N_1}{\partial F} + \cdots + \frac{N_5 \cdot l_5}{S_5} \cdot \frac{\partial N_5}{\partial F}\right] =$$

$$= \frac{F}{2{,}1.\,10^5}\left[\frac{-1{,}863F \cdot \sqrt{125 \cdot 10^6}}{900} \cdot (-1{,}863) \cdot 2 + \frac{1{,}6988 \cdot \sqrt{104 \cdot 10^6}}{730} \cdot 1{,}6988 \cdot 2 + \frac{0{,}6663 \cdot 3000}{250}.\,0{,}6663\right] = 10 \text{ mm}$$

Závěrečné zhodnocení:

Prutová soustava je v elastickém stavu (k_{k_min} => 1). Vazba C se posune proti smyslu doplňkové síly o hodnotu 6,9 mm a působiště síly F se posune ve směru síly o 10 mm .

Příklad 4

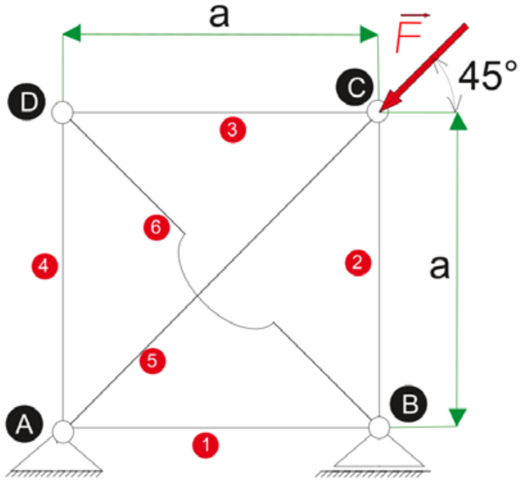
Určete bezpečnost vůči meznímu stavu pružnosti (MSP) a vypočítejte posunutí styčníku C ve směru působící síly.

Dáno

$a = 1$ m

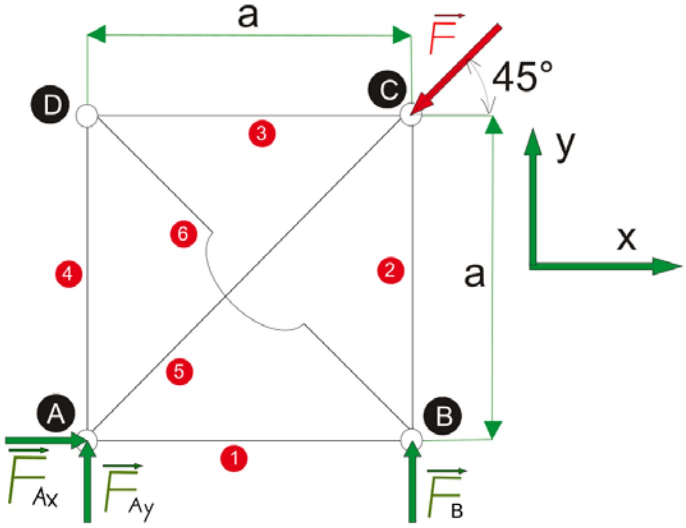
$\varnothing d = 30$ mm $\quad E = 2{,}1.10^5$ MPa

$F = 1{,}5.10^5$ N $\quad R_e = 210$ MPa



Řešení

Úplné uvolnění prutového tělesa:



Statický rozbor

- Vnější statický rozbor

$NP = \{F_{Ay}; F_{Ax}; F_B\} => \mu = 3;\ \nu = \nu_F + \nu_M = 2 + 1 = 3$

$s_{ex} = \mu - \nu = 0 \rightarrow\ vně\ staticky\ určitá$

- Vnitřní statický rozbor

$2.k - 3 = p;$ kde k .....počet styčníků

p ....počet prutů bez základního tělesa

$s_{in} = p - (2.k - 3) = 6 - (2.4 - 3) = 1$ .... uložení je 1x vnitřně staticky neurčité

- Rovnice statické rovnováhy pro uvolněné prutové těleso

$F_x:\ \ F_{Ax} = F\frac{\sqrt{2}}{2}$ *(1a)*

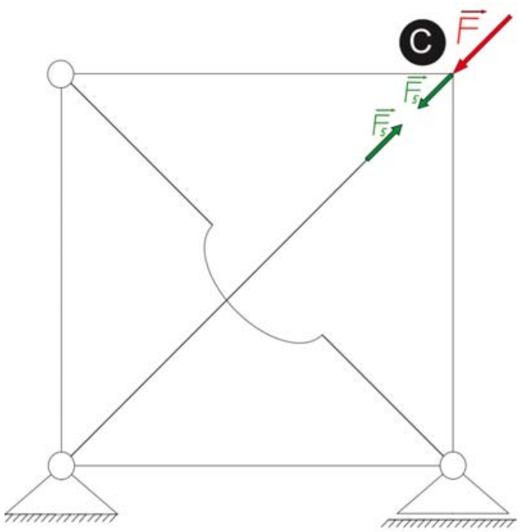
$F_y:\ \ -F\frac{\sqrt{2}}{2} + F_{Ay} + F_B = 0$ *(1b)*

$M_A:\ \ F_B \cdot a = 0$ *(2)*

$$F_{Ax} = F\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ F_{Ay} = F\frac{\sqrt{2}}{2},\ F_B = 0$$

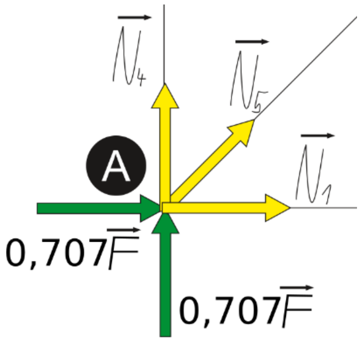
Cílem úlohy je určit bezpečnost vůči MSP. Uložení je vně staticky určité a vnitřně 1x staticky neurčité. Protože nositelka jediné vnější síly F prochází vazbou A, je vazba B nefunkční.

Částečné uvolnění – deformační podmínka (relativní posuv):



$u_{C\_rel} = \frac{\partial W}{\partial F_5} = 0\ ;\ F_5 = N_5\ (pozn.relativní\ posuv\ ve\ styčníku\ je\ roven\ 0)$ *(3)*

Uvolnění styčníku A:



$$F_x\colon\ N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}F + \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 = 0 \qquad (4)$$

$$N_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(F + N_5)$$

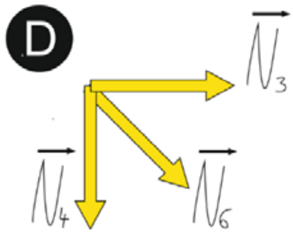
$$F_y\colon\ N_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}F + \frac{\sqrt{2}}{2}N_5 = 0 \qquad (5)$$

$$N_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(F + N_5)$$

pozn.: vyjádříme si jednotlivé normálové síly jako funkci síly N_5

Z důvodů symetrie: $N_3 = N_2 = N_1 = N_4$ *(6)*

Uvolnění styčníku D:



$$F_x\colon\ N_3 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_6 = 0 \qquad (7)$$

$$s\ využitím\ (6)\colon\ N_6 = -\sqrt{2}N_3 = F + N_5 \qquad (8)$$

Výpočet síly N_5 z deformační podmínky (3):

$$u_{C\_rel} = \sum_{i=1}^{6}\left(\frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S}\frac{\partial N_i}{\partial N_5}\right) = 0$$

Jednotlivé parciální derivace jsou:

$$\frac{\partial N_1}{\partial N_5} = \frac{\partial N_2}{\partial N_5} = \frac{\partial N_3}{\partial N_5} = \frac{\partial N_4}{\partial N_5} = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\partial N_5}{\partial F N_5} = \frac{\partial N_6}{\partial N_5} = 1$$

$$\frac{1}{ES}\left[N_1 \cdot l_1 \cdot \frac{\partial N_1}{\partial N_5} + \cdots + N_6 \cdot l_6 \cdot \frac{\partial N_6}{\partial N_5}\right] = 0\ ; kde\ l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 1\,\mathrm{m}\ \text{ a }\ l_5 = l_6 = \sqrt{2}\,\mathrm{m}$$

$$\frac{1}{ES}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}N_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}N_4 + N_5\sqrt{2} + N_6\sqrt{2}\right] = 0$$

$$\frac{1}{ES}\Bigg[-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(F + N_5)\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(F + N_5)\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(F + N_5)\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}(F + N_5)\right)$$

$$+ N_5\sqrt{2} + (F + N_5)\sqrt{2}\Bigg] = 0 \Rightarrow N_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2}F$$

$$s\ využitím\ (8)\colon\ N_6 = F - \frac{\sqrt{2}}{2}F = \frac{2-\sqrt{2}}{2}F$$

$$s\ využitím\ (4)\ a\ (6)\colon\ N_3 = N_2 = N_1 = N_4 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}F$$

Kontrola mezního stavu pružnosti (MSP)

Díky symetrii (materiálové, geometrické a silové) můžeme psát:

$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = -31\,066$ N;
$N_5 = -106\,066$ N; $N_6 = 43\,934$ N;
Pruty 1 ÷ 5 jsou namáhány na tlak; prut 6 na tah. Protože pruty mají stejný průřez, napětí vyhodnotíme pouze pro prut 5, ve kterém je síla nejvyšší.
$\sigma_5 = \frac{N_5}{S} = -150$ MPa
Koeficient bezpečnosti k MSP musí být > 1, aby úloha byla lineární.
$k_{k\_min} = \frac{R_e}{|\sigma_5|} = \frac{210}{|-150|} = 1{,}4 > 1$

Závěrečné hodnocení:
Stávající prutová soustava z hlediska bezpečnosti vůči MSP vyhovuje, ale je zapotřebí ještě vyšetřit mezní stav vzpěrné stability.

Posunutí ve styčníku C ve směru síly F :

inspirace pro samostudium

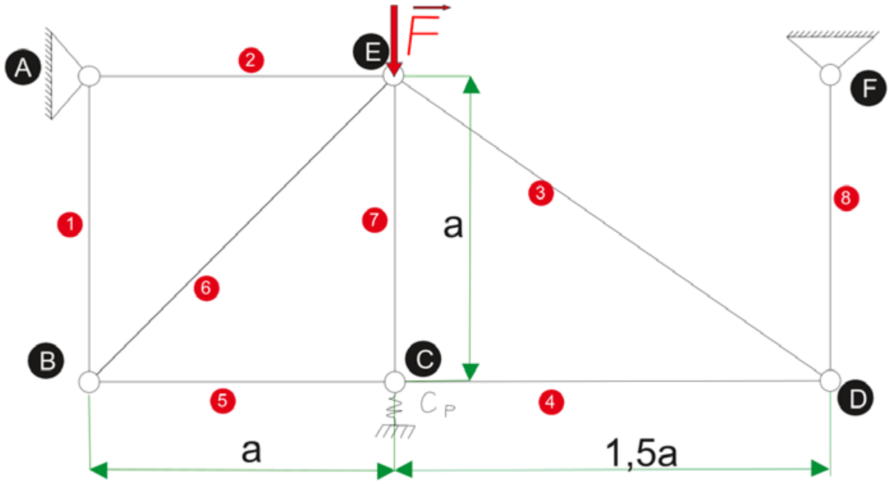
Příklad 5

Určete bezpečnost konstrukce vůči meznímu stavu pružnosti (MSP).

Dáno

$a = 1$ m $F = 10$ kN $ød_{1\text{-}7} = 30$ mm $Re = 310$ MPa $ød_8 = 3$ mm $E = 2{,}1.10^5$ MPa

$c_p = 8.10^{-5}$ mm.N^{-1}

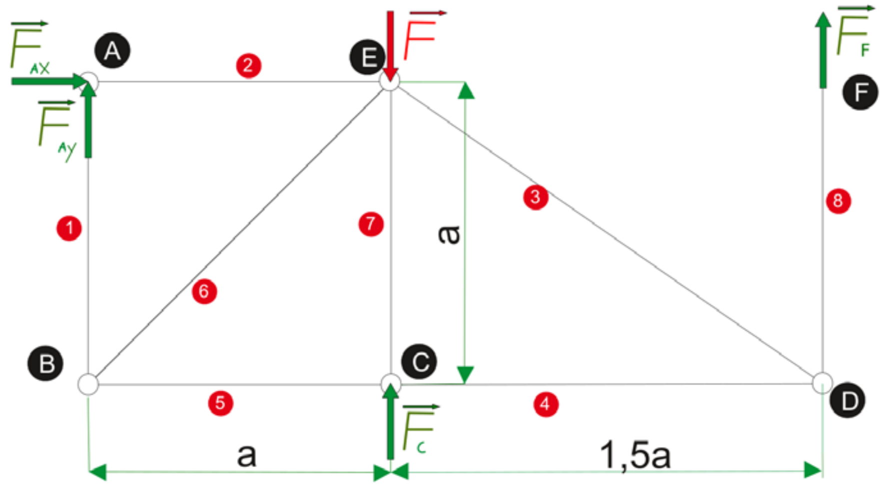


Řešení

Rozbor:

Řešená úloha patří do skupiny **d)** – prutové těleso vázané k základnímu tělesu vazbou rotační (A), pružnou (C) a prutem (č.8).

Úplné uvolnění:



Statický rozbor

- Vnější statický rozbor

$NP = \{F_{Ay}; F_{Ax}; F_C; F_F\} => \mu = 4;\ \nu = \nu_F + \nu_M = 2 + 1 = 3$

$s_e = \mu - \nu = 1 \rightarrow\ uložení\ 1x\ vně\ staticky\ neurčité$

- Vnitřní statický rozbor

Pro rozbor vnitřní statické určitosti rozdělíme úlohu na dvě části: pruty 1 ÷ 7 tvoří prutovou soustavu, která je k základnímu tělesu vázána prutem 8.

$s_{in} = p - (2.k - 3) = 7 - (2.5 - 3) = 0$ .... uložení je vnitřně staticky určité

- Rovnice statické rovnováhy uvolněného prutového tělesa:

$F_x\!: F_{Ax} = 0$ *(1)*

$F_y\!: F_{Ay} + F_C - F + F_F = 0$ *(2)*

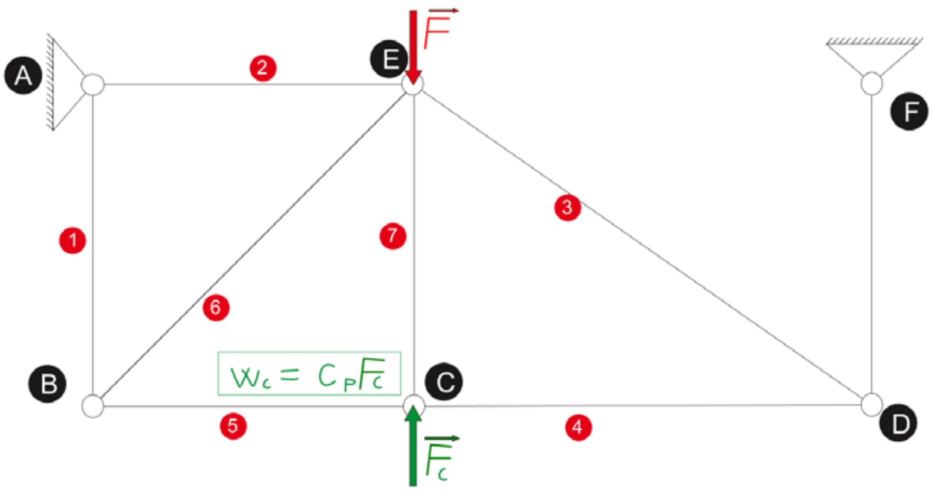
$M_A\!: F_C \cdot a - F \cdot a + F_F \cdot 2{,}5a = 0$ *(3)*

$z\ rovnice\ (3)\!:\ F_F = N_8 = 0{,}4F - 0{,}4F_C$ *(4)*

$(4)\ do\ (2)\!:\quad F_{Ay} = 0{,}6F - 0{,}6F_C$ *(5)*

Cílem úlohy je určit bezpečnost vůči MSP. Uložení je vně staticky 1x neurčité a vnitřně staticky určité. Protože je úloha 1x staticky neurčitá a vazba C je pružná, je vhodné tuto vazbu využít pro částečné uvolnění a síly ve styčnících a síly stykové vyjádříme jako funkce síly F_C.

Částečné uvolnění:

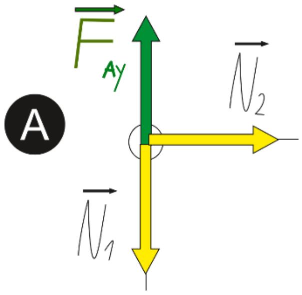


$w_C = \frac{\partial W}{\partial F_c} = \sum_{i=1}^{8}\left(\frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot S}\frac{\partial N_i}{\partial F_C}\right) = -c_p F_C$ *(6)*

(pozn. 1: do deformační podmínky musíme zahrnout všechny pruty;
pozn. 2: v deformační podmínce v obr. částečného uvolnění ještě není rozhodnuto, který smysl posuvu bude kladný. O tom je definitivně rozhodnuto až po zápisu deformační podmínky ve tvaru Castiglianovy věty (6);)

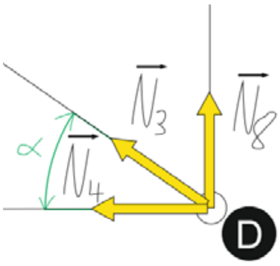
Síly v prutech řešíme postupnou styčníkovou metodou. Protože nenajdeme styčník, kde jsou pouze 2 neznámé, využijeme stykové síly vypočítané ze statické rovnováhy uvolněného prutového tělesa a můžeme tedy začít uvolněním styčníku A.

Uvolnění styčníku A:



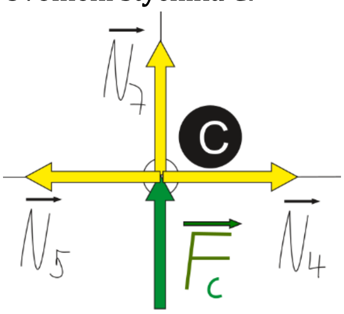
$$F_x:\ N_2 = 0 \tag{7}$$
$$F_y:\ N_1 = F_{Ay} = 0{,}6(F - F_C) \tag{8}$$

Uvolnění styčníku D:



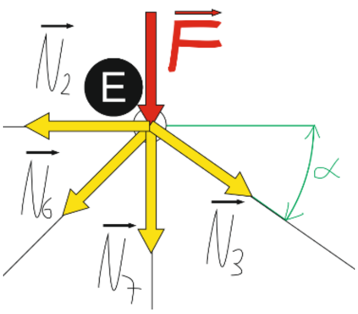
$$F_x:\quad N_4 + N_3 \cos\alpha = 0 \tag{9}$$
$$F_y:\quad N_8 + N_3 \sin\alpha = 0 \ \rightarrow N_3 = -\frac{0{,}4}{\sin\alpha}(F - F_C) \tag{10}$$
$$N_4 = -N_3 \cos\alpha = 0{,}4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(F - F_C) \tag{11}$$

Uvolnění styčníku C:



$$F_x:\ N_4 - N_5 = 0 \rightarrow N_5 = N_4 = 0{,}4(F - F_C) \tag{12}$$
$$F_y:\ F_C + N_7 = 0 \rightarrow N_7 = -F_C \tag{13}$$

Uvolnění styčníku E:



$$F_x:\ N_3 \cos\alpha - N_6\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \rightarrow N_6 = N_3 \cos\alpha\sqrt{2}$$
$$= -\frac{0{,}4\sqrt{2}\cos\alpha}{\sin\alpha}(F - F_C)$$

Výpočet síly $\mathbf{F_C}$ z deformační podmínky (6):

$$\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{(1{,}5\,a)^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{3{,}25}}\ , \qquad \cos\alpha = \frac{1{,}5a}{\sqrt{(1{,}5\,a)^2 + a^2}} = \frac{1{,}5}{\sqrt{3{,}25}}\ , \quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1{,}5$$

Pro přehlednost:

$N_1 = 0{,}6(F - F_C)$	$\frac{\partial N_1}{\partial F_c} = -0{,}6$	$l_1 = a$
$N_2 = 0$	$\frac{\partial N_2}{\partial F_c} = 0$	$l_2 = a$
$N_3 = -\frac{0{,}4}{sin\,\alpha}(F - F_C)$	$\frac{\partial N_3}{\partial F_c} = \frac{0{,}4}{sin\,\alpha}$	$l_3 = a\sqrt{3{,}25}$
$N_4 = 0{,}4\frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}(F - F_C) = 0{,}6(F - F_C)$	$\frac{\partial N_4}{\partial F_c} = -0{,}6$	$l_4 = 1{,}5a$
$N_5 = 0{,}4\frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}(F - F_C) = 0{,}6(F - F_C)$	$\frac{\partial N_5}{\partial F_c} = -0{,}6$	$l_5 = a$
$N_6 = -\frac{0{,}4\sqrt{2}\,cos\,\alpha}{sin\,\alpha}(F - F_C) = -0{,}6\sqrt{2}(F - F_C)$	$\frac{\partial N_5}{\partial F_c} = -0{,}6$	$l_6 = a\sqrt{2}$
$N_7 = -F_C$	$\frac{\partial N_7}{\partial F_c} = -1$	$l_7 = a$
$N_8 = 0{,}4(F - F_C)$	$\frac{\partial N_8}{\partial F_c} = -0{,}4$	$l_8 = a$

$$w_c = \frac{1}{ES_{1-7}}\left[N_1 \cdot l_1 \cdot \frac{\partial N_1}{\partial F_C} + \cdots + N_7 \cdot l_7 \cdot \frac{\partial N_7}{\partial F_C}\right] + \frac{(N_8 \cdot l_8)}{ES_8} \cdot \frac{\partial N_8}{\partial F_C} = -F_C c_p$$

$$\frac{1}{ES_{1-7}}[N_1 \cdot a \cdot (-0{,}6) + 0 + N_3 \cdot a\sqrt{3{,}25} \cdot \frac{0{,}4}{sin\,\alpha} + N_4 \cdot 1{,}5a \cdot (-0{,}6) + N_5 \cdot a \cdot (-0{,}6) + N_6 \cdot a\sqrt{2} \cdot (-0{,}6) + N_7 \cdot a \cdot (-1)\ ] + \frac{1}{ES_8}\ [N_8 \cdot a \cdot (-0{,}4)] + F_C c_p = 0$$

$\boldsymbol{F_C} = \mathbf{5988\ N}$

Dosazením do vztahů pro síly v prutech získaných řešením statické rovnováhy styčníků dostaneme velikosti sil v prutech:

$N_1 = \quad 2\,407$ N
$N_2 = \quad\quad 0$ N
$N_3 = -2\,893$ N
$N_4 = \quad 2\,407$ N
$N_5 = \quad 2\,407$ N
$N_6 = -3\,404$ N
$N_7 = -5\,988$ N
$N_8 = \quad 1\,605$ N

Kontrola mezního stavu pružnosti (MSP)

Prut 8 má 10x menší průřez, než ostatní pruty a z velikostí sil ve všech prutech můžeme očekávat v tomto prutu největší napětí. Bezpečnost vůči MSP tedy spočítáme v prutu 8.

$\sigma_8 = \frac{N_8}{S_8} = 227 \text{ MPa}$

Koeficient bezpečnosti k MSP musí být > 1, aby úloha byla lineární.

$$k_{k\_min} = \frac{R_e}{|\sigma_8|} = \frac{310}{227} = 1{,}4 > 1$$

Závěrečné hodnocení:

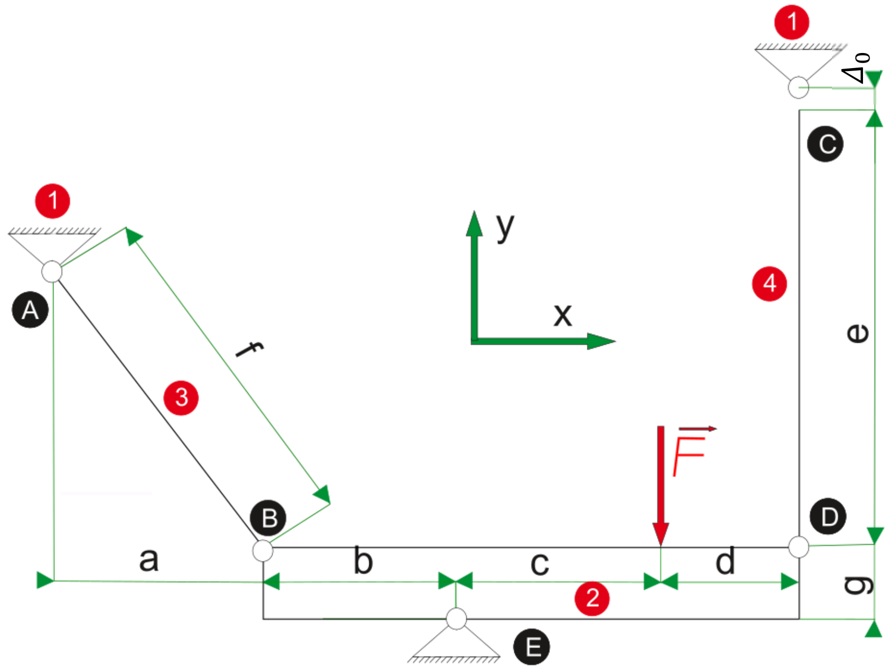
Provedli jsme hodnocení bezpečnosti konstrukce vůči MSP. Bezpečnost vzhledem k MSP je vyhovující, ale protože v prutech 3, 6 a 7 je tlak, je nutné pro podmínku lineárnosti úlohy zkontrolovat, zda nedojde v těchto prutech k překročení **mezního stavu vzpěrné stability**.

Příklad 6

Těleso 2, jehož deformace je vůči deformaci prutů zanedbatelná, je zavěšeno v horizontální poloze. Prut 4 je uložen s vůlí 1,5 mm. Určete průměr prutů tak (oba mají stejný průměr), aby byla bezpečnost vůči MSP alespoň 2.

Dáno

a = 0,7 m	b = c = 0,5 m	d = 0,3 m	e = 1 m	f = 1,5 m	g = 0,2 m
$F = 3.10^5$ N	ød = ? mm	R_e = 500 MPa	$E = 2,1.10^5$ MPa		



Výsledky:

$\emptyset d = 31{,}4\ mm$

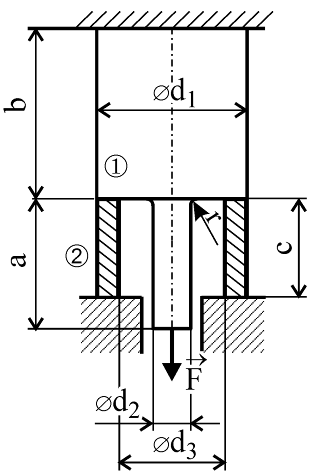
Nápověda:

Inspirovat se můžete řešenými příklady ve skriptech: úlohy z pružnosti pevnosti I, str.: 72 - 74.

Domácí úkol:

DÚ 7

Určete maximální velikost síly $\vec{F}$, kterou můžeme zatížit soustavu podle obrázku, aby bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti nebyla menší než 2. Prut 1 je jedním koncem přivařen k základnímu tělesu a je opřen o trubku 2, která je vložena bez vůle a přesahu do prostoru dle obrázku.



Dáno:
$\o d_1 = 20\,\text{mm}$, $a = 600\,\text{mm}$, $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5\,\text{MPa}$,
$\o d_2 = 16\,\text{mm}$, $b = 1000\,\text{mm}$, $\sigma_{K1} = \sigma_{K2} = 350\,\text{MPa}$,
$\o d_3 = 18\,\text{mm}$, $c = 200\,\text{mm}$, $r = 3\,\text{mm}$.

Řešená úloha patří do skupiny **a)** - přímé souosé, osově zatížené pruty. Podobný příklad byl rozebrán na přednášce.