# Lineární množiny v rovině

Lineární množiny reprezentují „rovinné“ útvary, které popisujeme lineárními rovnicemi. Způsobů zápisů lineárních množin je mnoho. Než s nimi začneme, připomeňme si, že ve dvourozměrném prostoru máme osy $x$ a $y$. Body značíme velkými písmeny a souřadnice konkrétních bodů budeme značit $x$ a $y$ s indexy daného bodu, tj. například $A = [x_A, y_A]$. Vektory jako obvykle značíme malými tučnými písmeny $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ nebo $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$.

## Přímka v rovině

Přímku v rovině lze popsat hned čtyřmi způsoby. Z důvodu stručnosti budou uvedeny zápisy bez hlubšího komentáře a uvedení způsobů, jak mezi různými zápisy přecházet bude uvedeno v navazující části věnující se lineárním množinám v prostoru.

Přímka v rovině je množina bodů $P = [x, y]$, která je určena jedním z následujících způsobů:

a) **Obecná rovnice přímky**:

$$\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\},$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$ a alespoň jedno z čísel $a, b \neq 0$. Navíc platí, že $\mathbf{n} = (a, b)$, kde $\mathbf{n}$ je **normálový vektor** dané přímky.

b) **Parametrické rovnice přímky**:

$$\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x = x_A + s_1 t, y = y_A + s_2 t, t \in \mathbb{R}\},$$

kde $A = [x_A, y_A]$ je bod, kterým přímka prochází a $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ je nenulový **směrový vektor** dané přímky. Rovnici lze zapsat taktéž vektorově: $\{P \in \mathbb{R}^2 : P = A + t\mathbf{s}, t \in \mathbb{R}\}$.

c) **Směrnicová rovnice přímky**:

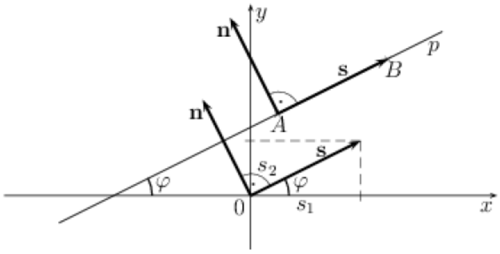
$$\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y = kx + q\},$$

kde $k, q \in \mathbb{R}$. Číslo $q$ je souřadnice průsečíku přímky s osou $y$, $k$ je tzv. směrnice.

d) **Úseková rovnice přímky**:

$$\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid \tfrac{x}{p} + \tfrac{y}{q} = 1\},$$

kde $p, q \neq 0$ jsou úseky, které přímka „vytíná“ na osách $x$, $y$, tj. průsečíky s osami jsou $[p, 0]$ a $[0, q]$.




Obrázek 1: Přímka v rovině a směřování vektorů **n** a **s**.

Přímky zpravidla značíme malými písmeny, např. $p, q, r, s, t$. Vektor $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ nazýváme **směrový vektor**, vektor $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ nazýváme **normálový vektor**. Platí, že směrový a normálový vektor jsou na sebe kolmé. Úhel $\varphi$ je směrový úhel přímky a $k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{s_2}{s_1}$ je směrnice přímky $p$.

**Příklad 1.** (Zápisy přímky v rovině)
Mějme přímku $p: 3x - y - 6 = 0$. Určete směrový a normálový vektor a všechny zápisy přímky $p$.

- Normálový vektor $\mathbf{n}$ plyne přímo ze zadání rovnice v obecném tvaru, $\mathbf{n} = (3, -1)$.
- Směrový vektor lze určit ze směrnicového tvaru, který je $y = 3x - 6$, odkud máme $\mathbf{s} = (1, k)$, tedy $\mathbf{s} = (1, 3)$.
- Obecná rovnice přímky je přímo v zadání, $p: 3x - y - 6 = 0$.
- Směrnicová rovnice přímky je uvedena výše, $y = 3x - 6$.
- Úsekovou rovnici přímky získáme vydělením celé rovnice 6, abychom získali jedničku jako absolutní člen. Dostaneme $\frac{x}{2} - \frac{y}{6} - 1 = 0$, odkud snadno získáme $\frac{x}{2} - \frac{y}{6} = 1$.
- Parametrické rovnice přímky získáme tak, že zvolíme jednu souřadnici bodu, dopočítáme druhou. Máme bod a již známe směrový vektor $\mathbf{s} = (1, 3)$. Například tedy volbou $x = 0$ získáme druhou souřadnici $y = -6$. Tedy parametrické rovnice přímky budou $x = 0 + t, y = -6 + 3t, t \in \mathbb{R}$.

**Vzdálenost bodů v rovině**
Nejjednodušším způsobem, jak zjistit vzdálenost dvou bodů v rovině je sestrojit mezi nimi vektor a spočítat jeho délku.

**Příklad 2.** (Vzdálenost bodů v rovině)
Mějme body $A = [1, 3]$ a $B = [2, 4]$. Vypočtěte jejich vzdálenost.

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 1, 4 - 3), ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

**Vzdálenost bodu od přímky**
Logicky, pokud bod splňuje rovnice přímky, pak leží na přímce. V opačném případě, když na přímce neleží je třeba zjistit jeho vzdálenost. Minima vzdáleností je dosaženo na přímce, která je kolmá na zadanou přímku.

Pokud tedy máme danou přímku $p: ax + by + c = 0$ a bod $A = [x_A, y_A]$, pak vzdálenost bodu od přímky vypočítáme vztahem

$$d = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Vzájemná poloha přímek v rovině**
V rovině mohou nastat pouze tři případy vzájemné polohy přímek.

- Přímky jsou různoběžné, tedy mají jeden společný bod - průsečík.
- Přímky jsou rovnoběžné, tedy nemají žádné společné body.
- Přímky jsou totožné.

Otázkou zůstává, jak vyšetřit vzájemnou polohu přímek. Nejjednodušší způsob je porovnání jejich směrových nebo normálových vektorů. Pokud jsou vektory lineárně nezávislé, přímky jsou různoběžné. Pokud jsou lineárně závislé, přímky jsou buď rovnoběžné, anebo totožné. V případě lineární závislosti je nejjednodušší spočítat jejich vzdálenost, pokud přímo z jedné rovnice není zřejmé, že jedna rovnice je/není násobkem druhé, což by poukazovalo na totožnost přímek.

Mějme dvě rovnoběžné přímky $p$ a $q$, které zapíšeme pomocí **stejných koeficientů** $a$ a $b$. Přímka $p$ pak má rovnici $p : ax + by + c_p = 0$ a přímka $q$ má rovnici $q : ax + by + c_q = 0$. Potom vzdálenost přímek $p$ a $q$ určíme podle vzorce

$$d = \frac{|c_p - c_q|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

V případě nutnosti zjistit úhel $\alpha$, který svírají různoběžné přímky $p, q$ využijeme dobře známe vzorce pro výpočet úhlů dvou vektorů:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\mathbf{s}_p \cdot \mathbf{s}_q|}{||\mathbf{s}_p|| \cdot ||\mathbf{s}_q||}, \quad \sin(\alpha) = \frac{||\mathbf{s}_p \times \mathbf{s}_q||}{||\mathbf{s}_p|| \cdot ||\mathbf{s}_q||}$$

Zřejmě jsou na sebe přímky navzájem kolmé, pokud směrové nebo normálové vektory svírají pravý úhel, tedy $\mathbf{s}_p \cdot \mathbf{s}_q = \mathbf{n}_p \cdot \mathbf{n}_q = 0$.

**Příklad 3.**
Mějme trojúhelník $\triangle ABC$ určený vrcholy $A = [1, -1], B = [5, 0], C = [3, 4]$. Určete jeho obsah, těžiště a délky stran.

- Obsah trojúhelníka vypočítáme pomocí vektorového součinu vektorů $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$. (Lze ale využít libovolnou dvojici různých vektorů, které mají začátek v témže bodě.)

$$|\triangle ABC| = \tfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \tfrac{1}{2}|(4, 1) \times (2, 5)| = \tfrac{1}{2}|20 - 2| = 9.$$

- Těžiště se vypočte snadno jako průměr souřadnic vrcholů trojúhelníka.

$$x_T = \tfrac{1}{3}(1 + 5 + 3) = 3, \quad y_T = \tfrac{1}{3}(-1 + 0 + 4) = 1,$$

  tedy těžiště je $T = [3, 1]$.

- Délky stran vypočteme jako normy příslušných vektorů.

$$|\overrightarrow{AB}| = |(4, 1)| = \sqrt{17}, \quad |\overrightarrow{AC}| = |(2, 5)| = \sqrt{29}, \quad |\overrightarrow{BC}| = |(-2, 4)| = \sqrt{20}.$$

# Lineární množiny v prostoru

Zde není oproti lineárním množinám v rovině žádná zvláštní neočekávaná změna. K popisu všech objektů potřebujete souřadnici navíc. Tedy pohybujeme se v prostoru vymezeném osami $x, y, z$. Body nyní budeme zapisovat $A = [x_A, y_A, z_A]$ a vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ nebo $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$.

## Rovina v prostoru

Rovinu lze zapsat čtyřmi způsoby.

a) **Obecná rovnice roviny**

$$\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz + d = 0\},$$

kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a alespoň jedno z čísel $a, b, c \neq 0$.

b) **Parametrické rovnice roviny**

$$\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_A + u_1 s + v_1 t, y = y_A + u_2 s + v_2 t, z = z_A + u_3 s + v_3 t, \ \ s,t \in \mathbb{R}\},$$

kde $A = [x_A, y_A, z_A]$ je bod, kterým rovina prochází a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ jsou nezávislé vektory ležící v dané rovině. Tyto rovnice lze taktéž zapsat vektorově: $\{P \in \mathbb{R}^3 : P = A + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}, \ \ s,t \in \mathbb{R}$.

c) **Úseková rovnice roviny**

$$\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid \tfrac{x}{p} + \tfrac{y}{q} + \tfrac{z}{r} = 1\},$$

kde $p,q,r \neq 0$ jsou úseky, které rovina „vytíná“ na osách $x,y,z$, tj. průsečíky s osami $x,y,z$ jsou po řadě body $[p,0,0], [0,q,0], [0,0,r]$.

d) **Směrnicová rovnice roviny**

$$\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid z = kx + ly + q\},$$

kde $k,l,q \in \mathbb{R}$. Číslo $q$ je souřadnice průsečíku roviny s osou $z$ a $k,l$ jsou směrnice.

Roviny značíme zpravidla malými řeckými písmeny, např. $\alpha, \beta, \gamma$. Je dobré umět převádět různé zápisy mezi sebou.

**Příklad 4.** (Zápisy roviny v prostoru)
Mějme body $A = [1,1,3], B = [5,4,1], C = [2,1,6]$. Ověřte, že body neleží na přímce. Pokud neleží na přímce, určují rovinu. Napište případně všechna vyjádření roviny a spočtěte těžiště trojúhelníka $\triangle ABC$.

- Body $A,B,C$ neleží na přímce, jsou-li vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$ lineárně nezávislé. Jelikož vektorový $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (4,3,-2) \times (1,0,3) = (9,-14,-3)$ je nenulový, vektory jsou lineárně nezávislé a tedy neleží na jedné přímce.
- Z výše uvedeného výpočtu jsme navíc obdrželi normálový vektor $\mathbf{n} = (9,-14,-3)$ dané roviny. Lze tedy zapsat obecný tvar roviny $9x - 14y - 3z + d = 0$, kde hodnotu $d$ vypočteme tak, že dosadíme libovolný bod roviny do této rovnice. Jelikož $d = 14$, pak obecná rovnice roviny je $9x - 14y - 3z + 14 = 0$.
- Směrnicový tvar roviny dostaneme tak, že „osamostatníme“ $z$ na jedné straně rovnice, tedy vydělíme 3 a přičteme $z$. Směrnicová rovnice pak má tvar $z = 3x - \frac{14}{3}y + \frac{14}{3}$.
- Zároveň z obecného tvaru vydělením 14, abychom získali jedničku, získáme také úsekový tvar roviny, který je $\dfrac{x}{-\frac{14}{9}} + y + \dfrac{z}{\frac{14}{3}} = 1$.
- Již dříve jsme nalezli dva vektory $\mathbf{u} = (4,3,-2), \mathbf{v} = (1,0,3)$, které leží v rovině. Navíc známe tři body. Tedy parametrické rovnice roviny budou vypadat s využitím bodu $A$ následovně: $x = 1 + 4s + t, y = 1 + 3s, z = 3 - 2s + 3t, s,t \in \mathbb{R}$.

## Přímka v prostoru

Přímku v prostoru nelze zapsat pouze jednou rovnicí. Možné zápisy přímky jsou následující.

a) **Parametrické rovnice přímky**

$$\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 | x = x_A + s_1 t, y = y_A = s_2 t, z = z_A + s_3 t, t \in \mathbb{R}\},$$

kde $A = [x_A, y_A, z_A]$ je bod, který leží na zadané přímce a $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ je směrový vektor dané přímky.

b) **Průnik dvou rovnoběžných rovin**

$$\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 | a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0\},$$

kde $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}, \forall i$ a vektory $(a_1, b_1, c_1)$ a $(a_2, b_2, c_2)$ jsou lineárně nezávislé.

c) **Kanonický tvar rovnic přímky**

$$\left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \middle| \frac{x - x_A}{s_1} = \frac{y - y_A}{s_2} = \frac{z - z_A}{s_3} \in \mathbb{R}\right\},$$

kde $A = [x_A, y_A, z_A]$ je bod přímky a $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$ její směrový vektor s nenulovými složkami.

**Příklad 5.** (Zápis přímky v prostoru)
Zapište přímku procházející body $A = [1, 2, 3], B = [4, -2, 5]$ všemi způsoby.

a) Body určují směrový vektor $\mathbf{s} = (3, -4, 2)$. S použitím bodu $A = [1, 2, 3]$ dostaneme parametrické rovnice přímky $x = 1 + 3t, y = 2 - 4t, z = 3 + 2t, t \in \mathbb{R}$.
b) Protože směrový vektor $\mathbf{s}$ má všechny složky nenulové, můžeme zrovna zapsat kanonický tvar rovnic přímky vyjádřením parametru $t$ z parametrických rovnic. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{2}$.
c) Mimo jiných možností, jestliže máme kanonický tvar rovnic přímky, je nejsnazší „poskládat dohromady“ první a druhou rovnost. Tak dostaneme rovnice $4x+3y-10 = 0$ a $y+2z-8 = 0$.

## Vzájemná poloha objektů v prostoru

**Vzdálenost bodu od roviny**, pokud máte bod $A = [x_A, y_A, z_A]$ a rovinu $\alpha = ax+by+cz+d = 0$ určíte vztahem:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Vzdálenost bodu $A$ od roviny $\alpha$ je vzdálenost bodu $A$ a průsečíku $P$, který leží v rovině $\alpha$ a zároveň na přímce kolmé na rovinu $\alpha$, která prochází bodem $A$.

**Příklad 6.** (Vzdálenost bodu od roviny)
Určete vzdálenost bodu $A = [1, 2, 4]$ od roviny $\alpha = x - 2y + 3z + 2 = 0$.

$$v = \frac{|1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{11}{\sqrt{14}}.$$

**Vzdálenost bodu od přímky**, pokud máte bod $A = [x_A, y_A, z_A]$ a přímku $p$ danou bodem $B$ a směrovým vektorem $\mathbf{s}$ určíte vztahem:

$$v = \frac{||\mathbf{u} \times \mathbf{s}||}{||\mathbf{s}||},$$

kde $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ je vektor určený bodem $A$ a bodem $B$, který leží na přímce $p$, a $\mathbf{s}$ je směrový vektor přímky $p$. Geometricky toto znamená, že pomocí vektorového součinu spočítáme plochu $S$ rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{s}$ a využijeme faktu, že plochu rovnoběžníku můžeme zároveň spočítat, jako součin délky vektoru $\mathbf{s}$ a výšky $v$ rovnoběžníku, tedy $S = ||\mathbf{u} \times \mathbf{s}|| = ||\mathbf{s}|| \cdot v$.

**Vzájemná poloha dvou rovin**

V prostoru mohou nastat tři různé případy. Uvažujme roviny $\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ a $\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, které mají normálové vektory $\mathbf{n}_\alpha = (a_1, b_1, c_1)$ a $\mathbf{n}_\beta = (a_2, b_2, c_2)$. Nastat mohou následující situace.

a) Pokud jsou vektory $\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\beta$ lineárně nezávislé, tj. platí $\mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta \neq 0$, roviny jsou **různoběžné** a svírají úhel $\varphi$, který je roven úhlu jejich normálových vektorů $\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\beta$. Pokud by byl úhel $\varphi$ tupý, bereme vždy jeho doplněk do 180°. Úhel určíme pomocí jedné z následujících rovností:

$$\cos(\varphi) = \frac{|\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta|}{||\mathbf{n}_\alpha|| \cdot ||\mathbf{n}_\beta||}, \qquad \sin(\varphi) = \frac{||\mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta||}{||\mathbf{n}_\alpha|| \cdot ||\mathbf{n}_\beta||}.$$

Navíc platí, že průsečnice $p$ rovin $\alpha$ a $\beta$ má směrový vektor $\mathbf{s} = \mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{n}_\beta$.

b) Jsou-li vektory $\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\beta$ lineárně závislé, tj. existuje $k \neq 0$ tak, že $\mathbf{n}_\alpha = k \cdot \mathbf{n}_\beta$, roviny jsou **rovnoběžné** a lze jejich rovnice zapsat se stejnými koeficienty, tj. $\alpha : ax + by + cz + d_1 = 0$ a $\beta : ax + by + cz + d_2 = 0$. Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin určíme vztahem:

$$v = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

c) Pokud jsou vektory $\mathbf{n}_\alpha, \mathbf{n}_\beta$ lineárně závislé a navíc platí, že při zápisu rovnic pomocí stejných koeficientů $a, b, c$ platí $d_1 = d_2$, pak jsou roviny **totožné**. Totožnost rovin lze přímo vidět, je-li jedna rovnice roviny nenulovým násobkem rovnice druhé roviny.

**Vzájemná poloha roviny a přímky**

Mějme rovinu $\alpha := ax + by + cz + d = 0$ s normálovým vektorem $\mathbf{n}_\alpha = (a, b, c)$ a přímku $p$ danou bodem $A$ a směrovým vektorem $\mathbf{s}$. V prostoru mohou nastat tři situace:

a) Přímka protíná rovinu v jednom bodě, pokud $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \neq 0$. Odchylka přímky $p$ a roviny $\alpha$ je velikost úhlu $\varphi$, který svírá směrový vektor $\mathbf{s}$ a jeho kolmý průmět do roviny $\alpha$. (Takový úhel je doplňkem úhlu $\theta$, který svírá směrový vektor $\mathbf{s}$ a normálový vektor $\mathbf{n}_\alpha$, do pravého úhlu.) Úhel $\theta$ určíme vztahem:

$$\sin(\theta) = \frac{||\mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{s}||}{||\mathbf{n}_\alpha|| \cdot ||\mathbf{s}||}, \quad \text{pak hledaný úhel přímky a roviny je } \varphi = 90° - \theta.$$

b) Přímka je rovnoběžná s rovinou, pokud $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0$. Přímka s rovinou tedy nemá žádný společný bod a vzdálenost přímky $p$ od roviny $\alpha$ je rovna vzdálenosti libovolného bodu přímky od roviny $\alpha$. Tj. nechť přímka je dána směrovým vektorem $\mathbf{s}$ a bodem $A = [x_A, y_A, z_A]$ a nechť $\mathbf{n}$ je normálový vektor roviny, pak lze vzdálenost přímky od roviny určit vztahem:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

c) Přímka leží v rovině, pokud $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0$ a bod $A$ leží v rovině $\alpha$.

**Vzájemná poloha přímek** - v prostoru mohou nastat čtyři následující případy.

a) **Různoběžné** přímky, pokud mají společný právě jeden bod. Jejich směrové vektory jsou nezávislé, tj. neexistuje $k \neq 0$, aby $\mathbf{s}_1 = k \cdot \mathbf{s}_2$.

b) **Mimoběžné** přímky, pokud nemají společný bod a jejich směrové vektory jsou nezávislé.

c) **Rovnoběžné** přímky, pokud nemají společný bod a jejich směrové vektory jsou závislé.

d) **Totožné** (splývající) přímky, pokud mají všechny body společné.

Vzájemnou polohu přímek vyšetříme následujícím způsobem. Uvažujme přímku $p$ určenou bodem $A$ a směrovým vektorem $\mathbf{u}$ a přímku $q$ určenou bodem $B$ a směrovým vektorem $\mathbf{v}$. Navíc označíme $\mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$. Pak platí:

a) Přímky jsou **různoběžné**, pokud vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé, tj. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq 0$, a vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně závislé, tj. jejich smíšený součin $(\mathbf{uvw}) = 0$.

b) Přímky jsou **mimoběžné**, pokud vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé, tj. jejich smíšený součin $(\mathbf{uvw}) \neq 0$.

c) Přímky jsou **rovnoběžné**, pokud vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou závislé, tj. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$, bod $A$ neleží na přímce $q$, nebo vektor $\overrightarrow{AB} \times \mathbf{u} \neq 0$.

**Úhel různoběžných a mimoběžných přímek** je úhel $\alpha$, který svírají jejich směrové vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$. Opět, pokud by tento úhel byl tupý, vezme se jeho doplněk do 180°. Úhel přímek v prostoru lze spočítat pomocí vzorce

$$\cos(\alpha) = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||}, \quad \sin(\alpha) = \frac{||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||}{||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||}$$

**Vzdálenost mimoběžek** se geometricky počítá jako podíl objemu rovnoběžnostěnu, který je určen vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} = \overrightarrow{AB}$, a obsahu jeho podstavy určené vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$. Z tohoto podílu dostaneme výšku rovnoběžnostěnu, která představuje vzdálenost mimoběžek. Vektor $\mathbf{u}$ je směrový vektor přímky $p$ procházející bodem $A$ a $\mathbf{v}$ je směrový vektor přímky $q$ procházející bodem $B$. Vzdálenost mimoběžek se tedy vypočte podle vzorce

$$d = \frac{|(\mathbf{uvw})|}{||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||},$$

kde $(\mathbf{uvw})$ je smíšený součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

# Příklady

## Rovnice přímky a roviny

1. Napište parametrické rovnice přímky $p$, která prochází daným bodem a má daný směrový vektor:
   a) $A = [3, -1, 4]$, $\mathbf{a} = (3, -2, 1)$, $[p : x = 3 + 3t, y = -1 - 2t, 4 + t, t \in \mathbb{R}]$,
   b) $B = [2, -1, 3]$, $\mathbf{b} = (2, 1, 0)$, $[p : x = 2 + 2t, y = -1 + t, z = 3, t \in \mathbb{R}]$,
   c) $C = [0, 3, 2]$, $\mathbf{c} = (2, 1, 2)$, $[p : x = 2t, y = 3 + t, z = 2 + 2t, t \in \mathbb{R}]$.

2. Napište parametrickou rovnic přímky $p$, která je zadána jako průsečnice dvou rovin:
   a) $\rho : x + y + z + 1 = 0, \sigma : 2x - 3y + z = 0$,
   $$\left[p : x = +4t, y = -\tfrac{1}{4} + t, z = -\tfrac{3}{4} - 5t, t \in \mathbb{R}\right],$$
   b) $\rho : 3x - 2y + 2z + 2 = 0, \sigma : 2y + z - 2 = 0$,
   $$[p : x = -2t, y = 1 - t, z = 2t, t \in \mathbb{R}],$$
   c) $\rho : 2x + 3z - 2 = 0, \sigma : -x + y + 2z - 4 = 0$,
   $$\left[p : x = -\tfrac{8}{7} - 3t, y = -7t, z = \tfrac{10}{7} + 2t, t \in \mathbb{R}\right].$$

3. Napište parametrické rovnice roviny $\rho$, která prochází daným bodem a má dané směrové vektory:
   a) $A = [3, -1, 4]$, $\mathbf{a_1} = (3, -2, 1)$, $\mathbf{a_1} = (1, -2, 2)$,
   $[\rho : x = 3 + 3t + s, y = -1 - 2t - 2s, 4 + t + 2s; s, t \in \mathbb{R}]$,
   b) $B = [2, -1, 3]$, $\mathbf{b_2} = (2, 1, 0)$,$\mathbf{b_2} = (1, 3, 0)$,
   $[\rho : x = 2 + 2t + s, y = -1 + t + 3s, z = 3; s, t \in \mathbb{R}]$,
   c) $C = [0, 3, 2]$, $\mathbf{c_1} = (2, 1, 2)$, $\mathbf{c_2} = (3, -2, 1)$,
   $[\rho : x = 2t + 3s, y = 3 + t - 2s, z = 2 + 2t + s; s, t \in \mathbb{R}]$.
4. Zapište obecnou rovnici roviny, pokud v ní leží daný bod a má dané směrové vektory
   a) $A = [3, -1, 4]$, $\mathbf{a_1} = (3, -2, 1)$, $\mathbf{a_1} = (1, -2, 2)$, $[2x + 5y + 4z - 17 = 0]$,
   b) $B = [2, -1, 3]$, $\mathbf{b_2} = (2, 1, 0)$,$\mathbf{b_2} = (1, 3, 0)$, $[5z - 15 = 0]$,
   c) $C = [0, 3, 2]$, $\mathbf{c_1} = (2, 1, 2)$, $\mathbf{c_2} = (3, -2, 1)$, $[5x + 4y - 7z + 2 = 0]$.
5. Napište obecnou rovnici roviny $\rho$, který prochází daným bodem a má normálový vektor $\mathbf{n}$
   a) $A = [0, 0, 0], \mathbf{n} = (3, 8, -4)$, $[\rho : 3x + 8y - 4z = 0]$,
   b) $B = [5, -1, 0], \mathbf{n} = (1, -2, 1)$, $[\rho : x - 2y + z - 7 = 0]$,
   c) $C = [1, 2, 3], \mathbf{n} = (1, 2, 2)$, $[\rho : x + 2y + 2z - 11 = 0]$.
6. Napište rovnici roviny, která je definovaná body $A, B, C$.
   a) $A = [0, 0, 0], B = [1, 1, 2], C = [2, 2, 3]$, $[\rho : -x + y = 0]$,
   b) $A = [5, -1, 0], B = [3, 1, 2], C = [2, 2, 2]$, $[\rho : x + y = 0]$,
   c) $A = [1, 2, 3], B = [1, 1, 1], C = [2, 0, 1]$, $[rho : 2x + 2y - z - 3 = 0]$.

## Průměty, průsečíky

1. Nalezněte kolmý průmět bodu do roviny:
   a) $A = [1, 4, 3], \rho : 3x + y + z - 2 = 0$, $\left[A' = [-\frac{13}{11}, \frac{36}{11}, \frac{25}{11}]\right]$,
   b) $B = [3, 1, -2], \rho : x - 2y + 2z + 4 = 0$, $\left[B' = [\frac{26}{9}, \frac{11}{9}, -\frac{20}{9}]\right]$,
   c) $C = [-1, -1, 2], \rho : 2x - 3y + z + 4 = 0$, $\left[C' = [-2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}]\right]$.
2. Nalezněte průsečík $P$ přímky $p$ a roviny $\rho$:
   a) $\rho : x + y + z - 2 = 0, p : x = 1 + 2t, y = 2 + t, z = -2t$, $[P = [-1, 1, 2]]$.
   b) $\rho : -x + y - 2z + 4 = 0, p : x = 2 + 2t, y = 2 - 2t, z = 2 - t$, $[P = [2, 2, 2]]$.
   c) $\rho : 2x + 3y - 4z + 2 = 0, p : x = 1 - t, y = 2 + t, z = 2 + 2t$, $\left[P = [\frac{5}{7}, \frac{16}{7}, \frac{18}{7}]\right]$.

## Obsahy a objemy

1. Spočtěte plochu trojúhelníka zadaného body:
   a) $A = [0, 0, 0], B = [1, 1, 2], C = [2, 2, 3]$, $\left[S = \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,
   b) $A = [5, -1, 0], B = [3, 1, 2], C = [2, 2, 2]$, $\left[S = \sqrt{2}\right]$,

c) $A = [1, 2, 3], B = [1, 1, 1], C = [2, 0, 1],$ $\left[S = \frac{3}{2}\right].$

2. Spočtěte objem rovnoběžnostěnu zadaného body:
   a) $A = [0, 0, 0], B = [1, 1, 2], C = [2, 2, 3], D = [4, 1, 2],$ $[V = 3],$
   b) $A = [2, -1, 2], B = [3, 1, 3], C = [2, 2, 6], D = [1, 3, 3],$ $[V = 18],$
   c) $A = [1, 2, 3], B = [1, 1, 1], C = [2, 0, 1], D = [5, 3, 4],$ $[V = 9].$

## Vzdálenosti

1. Vypočítejte vzdálenost $d$ bodu od roviny:
   a) $A = [1, 4, 3], \rho : 3x + y + z - 2 = 0,$ $\left[d = \frac{8}{\sqrt{11}}\right],$
   b) $B = [3, 1, -2], \rho : x - 2y + 2z + 4 = 0,$ $\left[d = \frac{1}{3}\right],$
   c) $C = [-1, -1, 2], \rho : 2x - 3y + z + 4 = 0,$ $\left[d = \frac{\sqrt{14}}{2}\right].$
2. Určete vzdálenost $d$ daného bodu od příslušné přímky:
   a) $A = [2, 3, 5],\ p : x = 1 + 2t, y = -1 + t, z = 1 - t,$ $\left[d = \frac{\sqrt{291}}{3}\right],$
   b) $B = [1, -1, 0],\ p : x = 2t, y = 1 + 2t, z = 1 - t,$ $\left[d = \frac{\sqrt{53}}{3}\right],$
   c) $C = [2, 2, 3],\ p : x = 2 + 2t, y = -2 + 2t, z = 4 - 2t,$ $\left[d = \frac{\sqrt{78}}{3}\right].$
3. Určete vzdálenost $d$ dvou rovnoběžných přímek:
   a) $p : x = 1 + 2t, y = -1 + t, z = 1 - t,\ q : x = 3 + 2t, y = 4 + t, z = 2 - t,$ $\left[d = \frac{\sqrt{174}}{3}\right],$
   b) $p : x = 2t, y = 1 + 2t, z = 1 - t,\ p : x = 2 + 2t, y = 4 + 2t, z = 1 - t,$ $\left[d = \frac{\sqrt{17}}{3}\right],$
   c) $p : x = 2 + 2t, y = -2 + 2t, z = 4 - 2t,\ p : x = 1 + 2t, y = 0 + 2t, z = 2 - 2t,$ $\left[d = \sqrt{6}\right].$
4. Vypočítejte vzdálenost dvou rovnoběžných rovin:
   a) $\rho : 3x + y + z - 2 = 0, \sigma : 6x + 2y + 2z - 8 = 0,$ $\left[d = \frac{2}{\sqrt{11}}\right],$
   b) $\rho : x - 2y + 2z + 4 = 0, \sigma - 2x + 4y - 4z + 10 = 0 :,$ $[d = 3],$
   c) $\rho : 2x - 3y + z + 4 = 0, \sigma : 6x - 9y + 3z - 12 = 0,$ $[d = 0,$ jsou totožné$].$

## Vzájemná poloha

1. Určete vzájemnou polohu rovin:
   a) $\rho : x + y + z - 2 = 0, \sigma : 2x - 3y + z - 4 = 0,$ $\left[\text{Různoběžné, svírají úhel } \alpha = \frac{\pi}{2}\right],$
   b) $\rho : x - 2y + z + 4 = 0, \sigma : 3x - 6y + 3z - 10 = 0,$ $\left[\text{Rovnoběžné, vzdálenost } d = \frac{11}{9}\sqrt{6}\right],$
   c) $\rho : x - 3y + 2z + 4 = 0, \sigma : -x + 2y - z - 5 = 0,$ $\left[\text{Různoběžné, svírají úhel} \sin(\alpha) = \frac{\sqrt{7}}{14}\right].$

2. Najděte rovnici roviny, která prochází bodem a je kolmá na zadané roviny:
   a) $A = [1, 2, 3], \rho : x + y + z - 2 = 0, \sigma : 2x - 3y + z - 4 = 0,$ $[\rho : 4x + y - 5z + 9 = 0],$
   b) $B = [1, 0, 1], \rho : x - 2y + z + 4 = 0, \sigma : 2x - y + 3z - 10 = 0,$ $[\rho : 5x + y - 3z - 2 = 0],$
   c) $C = [3, 1, 1], \rho : x - 3y + 2z + 4 = 0, \sigma : -x + 2y - z - 5 = 0,$ $[\rho : x + y + z - 5 = 0].$