Polynomy

Význam polynomů a racionálních funkcí spočívá v tom, že je lze dobře reprezentovat v programovacích jazycích, protože polynomy a racionální funkce jsou jediné funkce, které lze vyčíslit pomocí operací sčítání, násobení a dělení. V případě nutnosti vyčíslit transcendentní funkce (exponenciální, logaritmické, goniometrické funkce a další) v konkrétním bodě se využívají vhodné polynomy, které danou funkci v daném bodě aproximují (přibližně popisují).

Polynom, nebo také mnohočlen stupně n je funkce tvaru

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x = a_0.$$

Čísla $a_n, ..., a_0$ nazýváme *koeficienty polynomu.* Koeficient a_0 se nazývá *absolutní člen.* Pokud platí, že *vedoucí koeficient* $a_n \neq 0$, pak je polynom stupně n a my můžeme zapsat $\mathrm{St}(P(x)) = n$ nebo stručněji $P_n(x)$. Pokud uvažujeme $x \in \mathbb{R}$, mluvíme o polynomu v *reálném oboru*, pokud uvažujeme $x \in \mathbb{C}$, mluvíme o polynomu v *komplexním oboru.* I když se dále budeme zabývat výhradně polynomy v reálném oboru, je dobré nezapomenout, že platí $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, tedy že všechna reálná čísla jsou zároveň čísla komplexní.

Operace s polynomy

Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n a $Q(x) = b_m x^m + \cdots b_1 x + b_0$ je polynom stupně m, pak platí:

a) Polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ jsou si roviny, pokud jsou stejného stupně a všechny jejich příslušné koeficienty se shodují. Rozdílem $P(x) - Q(x)$ by pak byl nulový polynom.

b) Pro číslo $c \neq 0$ je násobek $c \cdot P(x)$ polynomem stejného stupně s koeficienty $c \cdot a_i, \forall i$.

c) Součet $P(x) + Q(x)$ je polynomem stupně $\max(m, n)$ s koeficienty $a_i + b_i$, pokud $n > m$, potom pro $i > m$ bereme $b_i = 0$.

d) Součin $P(x) \cdot Q(x)$ je polynom stupně $m + n$ s koeficienty c_k rovnými součtu $\sum a_i b_j$ přes $i \in \{0, 1, ..., n\}, j \in \{0, 1, ..., m\}$ splňující $i + j = k$, tj. $c_0 = a_0 \cdot b_0, c_1 = a_0 \cdot b_1 + a_1 + b_0, c_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0$ apod. Velice zjednodušeně řečeno probíhá násobení polynomů tak, že vynásobíme každý člen polynomu $P(x)$ se všemi členy polynomu $Q(x)$ a poté sečteme vždy koeficienty u příslušných mocnin x.

Příklad 1.
Mějme polynomy $P(x) = x^2 + 1$ a $Q(x) = x^3 + x + 1$. Postupně, , v, a dále a .

a) Nalezněte polynom $A(x)$ tak, aby se rovnal polynomu $P(x)$.

Budemte hledat polynom $A(x)$ ve tvaru $A(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, aby platilo $P(x) - A(x) = 0(x) = 0$.

$$\begin{aligned} P(x) - A(x) = x^2 + 1 - (a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = 0 \quad / + A(x) \\ P(x) = x^2 + 1 = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = A(x), \end{aligned}$$

odkud zřejmě vidíme, že $a_2 = 1, a_1 = 0, a_0 = 1$, tedy hledaný polynom $A(x) = x^2 + 1$.

b) Vypočítejte $c \cdot Q(x)$, pokud $c = 2$.

$$c \cdot P(x) = c \cdot (x^2 + 1) = 2 \cdot (x^2 + 1) = 2x^2 + 2.$$

c) Vypočítejte součet $P(x) + Q(x)$ polynomů $P(x)$ a $Q(x)$.

$$P(x) + Q(x) = (x^2 + 1) + (x^3 + x + 1) = x^2 + 1 + x^3 + x + 1 = x^3 + x^2 + x + 2.$$

d) Vypočítejte součin $P(x) \cdot Q(x)$ polynomů $P(x)$ a $Q(x)$.

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (x^2 + 1) \cdot (x^3 + x + 1) = x^2 \cdot (x^3 + x + 1) + 1 \cdot (x^3 + x + 1) \\ &= (x^5 + x^3 + x^2) + (x^3 + x + 1) = x^5 + 2x^3 + x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Vlastnosti operací sčítání a násobení polynomů $P(x), Q(x)$ a $R(x)$ jsou následující.

a) Komutativita obou operací (záměna pořadí):

$$P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x), \qquad P(x) \cdot Q(x) = Q(x) \cdot P(x).$$

b) Asociativita obou operací (nezáleží na uzávorkování):

$$\begin{aligned} (P(x) + Q(x)) + R(x) &= P(x) + (Q(x) + R(x)), \\ (P(x) \cdot Q(x)) \cdot R(x) &= P(x) \cdot (Q(x) \cdot R(x)). \end{aligned}$$

c) Distributivní zákony (levý a pravý):

$$\begin{aligned} (P(x) + Q(x)) \cdot R(x) &= P(x) \cdot R(x) + Q(x) \cdot R(x) \\ P(x) \cdot (Q(x) + R(x)) &= P(x) \cdot Q(x) + P(x) \cdot R(x). \end{aligned}$$

Dělení polynomů se zbytkem

Jestliže máme polynom $P(x)$ stupně n a nenulovým polynom $Q(x)$ stupně m, $n \geq m$, pak existuje právě jeden polynom $P_p(x)$ stupně $n-m$ zvaný podíl a polynom $P_r(x)$ stupně r, $r < m$ zvaný zbytek takový, že platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_px) + \frac{P_r(x)}{Q(x)}, \quad \text{a tedy platí} \quad P(x) = P_p(x) \cdot Q(x) + P_r(x).$$

Příklad 2. Vypočítejte podíl polynomů $\frac{x^3+x^2+2x+1}{x-1}$.
V prvním kroku vydělíme vedoucí člen polynomu v čitateli x^3 vedoucím členem x polynomu ve jmenovateli. Obdržíme x^2 a následně x^2 násobíme celého dělitele $(x-1)$. Tak získáme $(x^3 - x^2)$, což odečteme od polynomu v předchozím řádku. Pokud jsme dělení provedli správně, vedoucí členy polynomů se odečtou a stupeň polynomu, který dělíme v dalším kroku, se sníží. Postup opakujeme tak dlouho, dokud je stupeň polynomu v čitateli větší nebo roven stupni polynomu ve jmenovateli. Pokud už dělit dále nejde, zapíšeme do výsledku zlomek ve tvaru podílu zbytku a dělitele.

$$\begin{array}{rrrrl}
(x^3 + & x^2 & + 2x & + 1) & : (x-1) = x^2 + 2x + 4 + \frac{5}{(x-1)} \\
-(x^3 - & x^2) & & & \\ \hline
 & 2x^2 & + 2x & + 1 & \\
 & -(2x^2 & - 2x) & & \\ \cline{2-4}
 & & 4x & + 1 & \\
 & & -(4x & - 4) & \\ \cline{3-4}
 & & & 5 &
\end{array}$$

Kořeny polynomu

Kořenem polynomu je každé takové číslo α, pro které platí $P(\alpha) = 0$, tj. pokud dané číslo do polynomu dosadíme, výsledkem je 0. Číslo α může být reálné i komplexní, podle oboru, ve kterém pracujeme. Pro kořeny polynomů platí následující důležitá věta!

Základní věta algebry
Každý polynom stupně $n \geq 1$ má v komplexním oboru alespoň jeden komplexní kořen. Polynom může být reálný i komplexní.

Skutečně každý polynom stupně $n \geq 1$ má alespoň jeden komplexní kořen. Věta záměrně mluví o komplexním oboru, protože ne všechny polynomy mají reálné kořeny. Například polynom x^2+1 má kořeny $\pm i$, kde i je imaginární jednotka komplexního oboru. Důležité je uvědomit si, že kořen musí být „alespoň jeden“. To nás odkazuje k tomu, že polynomy stupňů $n \geq 2$ mohou mít vícenásobné kořeny.

Dále při hledání kořenů platí, že pokud $P_n(x)$ je polynom stupně $n > 1$ a číslo α je jeho kořen, pak existuje polynom $P_{n-1}(x)$ stupně $n-1$ takový, že $P_n(x) = (x-\alpha)\cdot P_{n-1}(x)$. Navíc každý polynom $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ stupně $n \geq$ má právě n kořenů v komplexním oboru ve smyslu, že existují (ne nutně různá!) komplexní čísla $\alpha_1, ..., \alpha_n$ taková, že

$$P(x) = (x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

Každý reálný polynom stupně $n \geq 1$ má v komplexním oboru buď reálné kořeny α nebo dvojice komplexně sdružených kořenů $\beta, \overline{\beta}$. Polynom $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ s reálnými koeficienty a_i má kořenový součin ve tvaru součinu mocnin dvojčlenů $(x-\alpha)$ a nerozložitelných trojčlenů (x^2+qx+r), tedy

$$P(x) = (x-\alpha_1)^{m_1}\cdot(x-\alpha_2)^{m_2}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k}\cdot(x^2+q_1x+r_1)^{n_1}\cdots(x^2+q_lx+r_l)^{n_l},$$

kde platí, že $m_1+m_2+\cdots m_k+2\cdot(n_1+n_2+\cdots+n_l) = n$ a $q_j^2 - 4r_j < 0$. Trojčleny (x^2+qx+r) nelze v reálném oboru rozložit, protože jejich diskriminant je záporný. V komplexním oboru však mají rozklad $(x^2+qx+r) = (x-\beta)\cdot(x+\overline{\beta})$.

Určování kořenů

Jestliže máme polynom stupně n, víme sice, že má v komplexním oboru n kořenů včetně násobností, ale nás zajímá, zda má také reálné kořeny a pokud ano, jak je určit. Pro polynom druhého stupně lze kořeny vypočíst s pomocí diskriminantu. Již v 16. století byly známy vzorce pro nalezení kořenů polynomů třetího a čtvrtého stupně. Jsou pojmenované po svém autorovi Gerolamu Cardanovi. Teprve v 19. století se podařilo francouzskému matematikovi Évaristu Galoisovi dokázat, že pro polynomy vyšších stupňů žádné analytické vzorce sestavit nelze. Učení se enormně složitých analytických vzorců nemá pro pouhé hledání kořenů polynomů přílišný význam, a proto si uvedeme podstatně jednodušší postup hledání kořenů pomocí Hornerova schématu.

Hornerovo schéma

Hornerovo schéma je postup umožňující nalezení kořenů polynomu libovolně vysokého stupně. Pro připomenutí, číslo α je kořenem polynomu, jestliže po dosazení do polynomu je hodnota polynomu rovna 0, tj. $P(\alpha) = 0$. Princip Hornerova schématu je předveden na následujícím příkladu pro polynom stupně 3.

x	a_3	a_2	a_1	a_0	$P(x)$
x	a_3	$C \cdot x + a_2$	$C \cdot x + a_1$	$C \cdot x + a_0$	$P(x) = C$

Konstantu C berte jako pomocné označení pro hodnotu z předchozího kroku. Postupně nabývá hodnot a_3, $C \cdot x + a_2$, atd. Užití Hornerova schématu ukážeme na příkladu.

Příklad 3. Najděte kořeny daného polynomu a převeďte ho na součinový tvar.

$$P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

Otázka zní, jak uhádnout nebo odkud vybírat potenciální kořeny polynomu. Absolutní člen si označíme p a koeficient u nejvyšší mocniny x si označíme q. V našem případě $p = -6$ a $q = 1$. Dále si vypíšeme čísla, která dělí p a q beze zbytku. V našem případě platí, že p dělí beze zbytku čísla: 1,-1,2,-2,3,-3,6,-6. Číslo q dělí beze zbytku čísla 1,-1. Pak sestrojíme množinu potenciálních kořenů jako podíl $\frac{p}{q}$: 1,-1,2,-2,3,-3,6,-6. Odtud postupně zkoušíme různé dělitele. Platí pravidlo, že pokud je jedno číslo kořenem, je vhodné vyzkoušet, zda není kořenem vícenásobným. Pokud se propracujete k tomu, že Vám zbývá polynom druhého stupně, je vhodné spočítat kořeny s pomocí diskriminantu, protože pokud by kořeny byla čísla $a \pm bi$, Hornerovo schéma je neodhalí.

x	a_3	a_2	a_1	a_0	$P(x)$
-	1	4	1	-6	-
$x_1 = 1$	$1 = 1$	$1 \cdot 1 + 4 = 5$	$1 \cdot 5 + 1 = 6$	$1 \cdot 6 - 6 = 0$	
$x_2 = -2$	1	3	0	-	P(-2) = 0
$x_3 = -3$	1	0	-	-	P(-3) = 0

Kořeny jsou tedy čísla 1, -2 a -3. Uvědomte si, že čísla v každém řádku odpovídají koeficientům polynomu, který je o stupeň nižší než v předchozím kroku. V druhém řádku tedy dostáváme součin $(x - 1) \cdot (x^2 + 5x + 6)$. V dalším řádku pak už přímo dostáváme součinový tvar $(x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$. Proto poslední řádek už není nutný, protože je to jasně viditelné. Najděte kořeny a součinové tvary pro následující polynomy.

Racionálně lomená funkce

Nechť $P(x)$ je reálný polynom stupně n a polynom $Q(x)$ je nenulový reálný polynom stupně m. Potom funkci

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

nazveme **racionální lomenou funkcí**, nebo prostě racionální funkcí. Pokud platí $n \geq m$, pak mluvíme o **neryze lomené racionální funkci**, a pokud platí $n < m$, pak mluvíme o **ryze lomené racionální funkci**.

Definičním oborem takové funkce $R(x)$ jsou všechna reálná čísla, mimo kořenů polynomu $Q(x)$, kterých je konečně mnoho.

Příklad 4. Příklady lomených funkcí.

a) Příkladem neryze lomené racionální funkce je například funkce $R(x) = \dfrac{2x^4 + 3x^2 + 2x - 3}{x^2 + x + 1}$,

b) Příkladem ryze lomené racionální funkce je například funkce $R(x) = \dfrac{2x^2 + x + 3}{x^3 + x + 2}$.

Mějme racionální lomenou funkci $R(x)$, pro kterou platí, že polynom $P(x)$ je stupně n a polynom $Q(x)$ je stupně m, přičemž platí $n \geq m$. Pak existují polynomy $P_p(x)$ stupně $n-m$ a $P_r(x)$ stupně $r < n$ takové, že platí:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = P_p(x) + \frac{P_r(x)}{Q(x)}$$

Parciální zlomky

Parciální zlomky najdou své uplatnění především při integraci racionálních funkcí. Podíl polynomů vyšších stupňů se velice špatně derivuje. Proto je třeba před integrací racionální funkce zkontrolovat, zda lze provést klasické dělení polynomů. Pokud ano, polynomy se podělí a pak přichází v úvahu převod podílu polynomů $\frac{P_r(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky. Pokud polynomy dělit nelze, další krok jsou přímo parciální zlomky.

Parciální zlomky jsou zlomky tvaru:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k} \quad \text{a} \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^l}, \qquad \text{kde}\, p^2-4q<0, \quad A, B, C \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Hlavním výsledkem je skutečnost, že každou ryze lomenou racionální funkci lze rozložit na součet parciálních zlomků. Postup při rozkladu racionální lomené funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky:

1. Zkontrolujte stupně polynomů $P(x)$ a $Q(x)$. Pokud je stupeň polynomu $P(x)$ vyšší nebo roven stupni polynomu $Q(x)$, je třeba provést dělení.

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = P_p(x) + \frac{P_r(x)}{Q(x)}.$$

2. Rozložte jmenovatel $Q(x)$ na kořenový součinitel, tj.

$$Q(x) = a_n(x-\alpha_1)^{m_1} \cdots (x-\alpha_k)^{m_k} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{n_1} \cdots (x^2+p_lx+q_l)^{n_l}.$$

3. Předepíšeme tvar rozkladu polynomu $\dfrac{P_r(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky s neurčitými koeficienty.

   Na levou stranu dáme zlomek $\dfrac{P_r(x)}{Q(x)}$ a na pravou stranu součet zlomků ve tvaru

   a) Za každý člen $(x-\alpha_i)$ ze součinového tvaru polynomu $Q(x)$ na pravou stranu přičteme zlomek ve tvaru

   $$\frac{A}{(x-\alpha_i)},$$

   Pokud je kořen α_i vícenásobný, tj. v kořenovém součinu polynomu $Q(x)$ se vyskytuje $(x-\alpha_i)^{m_i}$, na pravou stranu přičteme m_i zlomků s neznámými koeficienty A_{ij} takto

   $$\frac{A_{i1}}{(x-\alpha_i)} + \frac{A_{i2}}{(x-\alpha_i)^2} + \cdots + \frac{A_{im_i}}{(x-\alpha_i)^{m_i}}.$$

   b) Za každý člen $(x^2+p_ix+q_i)$ v součinovém tvaru polynomu $Q(x)$, kde $x^2+p_ix+q_i$ je nerozložitelný trojčlen, tj. $D = p_i^2 - 4q_i < 0$, na pravou stranu přičteme zlomek ve tvaru

   $$\frac{B_ix+C_i}{(x^2+px+q)},$$

Pokud je kořenovém součinu $Q(x)$ mocnina $(x^2+px+q)^{n_i}$, pak na pravou stranu přičteme n_i zlomků

$$\frac{B_{i1}x+C_{i1}}{(x^2+px+q)}+\frac{B_{i2}x+C_{i1}}{(x^2+px+q)}+\cdots\frac{B_{in_i}x+C_{in_i}}{(x^2+px+q)}$$

4. Dalším krokem je najít hodnoty koeficientů A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}. Vzniklý rozklad na parciální zlomky vynásobíme rozkladem jmenovatele $Q(x)$ na kořenový součin. Na obou stranách získané rovnosti obdržíme polynomy stupně nejvýše $n-1$. Na levé straně je to polynom $P_r(x)$ stupně menšího než n a na pravé straně součet členů s neurčitými koeficienty A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} násobených částmi kořenového rozkladu polynomu $Q(x)$ stupně nejvýše $n-1$.
5. Využíváme skutečnosti, že dva polynomy jsou si rovny, pokud jsou si rovny koeficienty příslušných mocnin proměnné x. Proto porovnáváme koeficienty při stejných mocninách, čímž obdržíme soustavu n lineárních rovnic pro n neznámých koeficientů A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}.
6. Vypočítané hodnoty koeficientů dosadíme do rozkladu výsledného rozkladu racionální funkce.

Příklad 5. Rozložte na parciální zlomky funkci $R(x)=\dfrac{2x^4-4x^3+7x+4}{x^3-x^2-2x}$.

1. Pro naší funkci $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ platí, že stupeň polynomu $P(x)$ je vyšší než stupeň polynomu $Q(x)$. Proto je třeba nejprve provést dělení polynomů. Dělením dostáváme

$$(2x^4-4x^3+7x+4):(x^3-x^2-2x)=2x-2,\quad \text{se zbytkem}\quad 2x^2+3x+4$$

Funkci $R(x)$ jsme tak rozložili na součet polynomu a ryze racionální funkce

$$R(x)=2x-2+\frac{2x^2+3x+4}{x^3-x^2-2x}$$

2. Dále je potřeba rozložit jmenovatel $Q(x)$.

$$Q(x)=x(x^2-x-2)=x(x+1)(x-2)$$

3. Parciální zlomky tedy budeme hledat ve tvaru

$$\frac{2x^2+3x+4}{x^3-x^2-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$$

4. Určíme hodnoty A, B, C. Rovnost vynásobíme polynomem $Q(x)=x(x+1)(x-2)$:

$$2x^2+3x+4=A(x+1)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+1).$$

5. Máme tři neznámé A, B, C a tedy musíme sestavit 3 rovnice:

$$\begin{aligned} x^2 &: 2=A+B+C,\\ x^1 &: 3=-A-2B+C,\\ x^0 &: 4=-2A, \end{aligned}$$

které dávají řešení $A=-2, B=1, C=3$.

Rozklad racionální funkce $R(x)$ na parciální zlomky pak má tvar:

$$R(x)=\frac{2x^4-4x^3+7x+4}{x^3-x^2-2x}=2x-2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x-2}$$

Příklady

Kořeny, součinový tvar

1. Nalezněte kořeny polynomu $P(x)$ a zapište polynom v součinovém tvaru.
   a) $P(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$,
   b) $P(x) = x^3 - 7x + 6$,
   c) $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$,
   d) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$,
   e) $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$,
   f) $P(x) = x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 8x^2 + 7x - 3$,
   g) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$,
   h) $P(x) = x^5 - x^4 - 15x^3 + 25x^2 + 14x - 24$.

   Výsledky:
   a) Kořeny: -1, -2, -2, součinový tvar: $P(x) = (x + 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 1)$.
   b) Kořeny: 1, 2, -3., součinový tvar: $P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$.
   c) Kořeny: -1, -2, -3, součinový tvar $P(x) = (x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$.
   d) Kořeny: -1, 1, 2, 3, součinový tvar $P(x) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$.
   e) Kořeny: 1, -2, součinový tvar: $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x^2 + 1)$.
   f) Kořeny: 1, 3, součinový tvar: $P(x) = (x - 3)(x - 1)^2(x^2 + 1)$.
   g) Kořeny: -1, 2, -2, 3, součinový tvar: $P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)(x - 3)$.
   h) Kořeny: 1, -1, 2, 3, -4, součinový tvar: $P(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x + 4)$.

2. Vyjádřete racionální funkce jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce:
   a) $R(x) = \dfrac{-4x^2 + 10x - 1}{x^2 - 3x + 6}$, $\left[R(x) = -4 + \dfrac{-2x + 23}{x^2 - 3x + 6}\right]$,
   b) $R(x) = \dfrac{2x^5 - x^4 + 3x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 4}$, $\left[R(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 13 + \dfrac{-19x + 53}{x^2 - 2x + 4}\right]$.

3. Rozložte funkci $R(x)$ na parciální zlomky.
   a) $R(x) = \dfrac{2x^4 + 3x^2 + 4x + 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$, $\left[R(x) = 2x - 4 + \dfrac{5}{3(x-1)} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{37}{3(x+2)}\right]$,
   b) $R(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^3 + x + 5}{x^3 + x^2 + x + 1}$, $\left[R(x) = 3x - 1 + \dfrac{7 - 9x}{2(x^2 + 1)} + \dfrac{5}{2(x+1)}\right]$,
   c) $R(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 + 3x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$, $\left[R(x) = 2 - \dfrac{11}{4(x+1)} + \dfrac{3}{2(x+1)^2} + \dfrac{7}{4(x-1)}\right]$,
   d) $R(x) = \dfrac{6x^4 + 2x + 2}{x^3 + 3x^2 + 2x}$, $\left[R(x) = 6x - 18 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x+1} + \dfrac{47}{x+2}\right]$,
   e) $R(x) = \dfrac{3x^4 + x^2 + 2x + 2}{x^3 + x}$, $\left[R(x) = 3x + \dfrac{2}{x} - \dfrac{4x - 2}{x^2 + 1}\right]$,

f) $R(x) = \dfrac{3x^5 + x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 8x + 9}{x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - 2x}$,

$$\left[R(x) = 3 - \frac{9}{2x} + \frac{1}{3(x+1)} + \frac{37}{6(x-2)} + \frac{2x-2}{x^2+1}\right].$$

Další příklady si můžete vymyslet sami. Na adrese `https://www.wolframalpha.com/` zadáte svůj polynom. Obdržíte jak součinový tvar, tak kořeny. :)