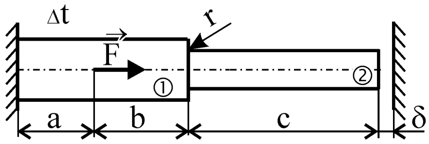
5. Cvičení Pružnost a pevnost

Namáhání tahem. Staticky neurčité úlohy

Příklad 1

Určete bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti prutu uloženého podle obrázku, zatíženého silou $\vec{F}$ a rovnoměrně ohřátého o Δt. Část 1 je měděná, část 2 je ocelová. Rozměry prutu jsou měřeny při teplotě $T_0 = 20^o$C.



Dáno:

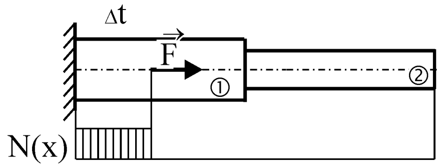
$\o d_1 = 40\,\mathrm{mm}$,	$a = 400\,\mathrm{mm}$	$E_1 = 1,2 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$,
$r = 2\,\mathrm{mm}$,	$b = 500\,\mathrm{mm}$	$\alpha_1 = 16 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$,
$\o d_2 = 35\,\mathrm{mm}$,	$c = 1000\,\mathrm{mm}$	$E_2 = 2,1 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$,
$\delta = 0,1\,\mathrm{mm}$,	$\Delta t = 35^o\,\mathrm{C}$	$\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$,
$F = 20\,\mathrm{kN}$,	$\sigma_{K1} = 130\,\mathrm{MPa}$,	$\sigma_{K2} = 350\,\mathrm{MPa}$.

Řešení

Rozbor

Ze zadání vyplývá, že cílem úlohy je posouzení mezního stavu pružnosti. Uložení prutu je **podmíněně staticky určité**. Pokud dojde ke styku prutu se základním tělesem, bude prut uložen 1x staticky neurčitě.

a) $\Delta l < \delta \quad \Rightarrow \quad s = 0$ (uložení staticky určité)



VVÚ:

$$N(x) = F$$

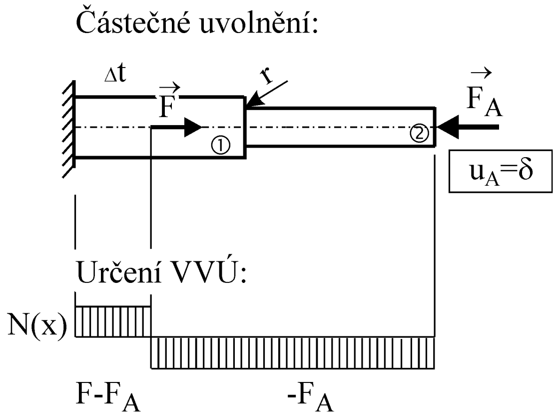
Kontrola, zda nedojde ke styku prutu se základním tělesem:

Změna délky prutu:

$$\Delta l = \frac{Fa}{E_1 S_1} + (a+b)\alpha_1 \Delta t + c\alpha_2 \Delta t = 0,98\,\mathrm{mm}$$

Protože $\Delta l > \delta$, došlo ke styku prutu se základním tělesem. Prut je tedy uložen 1x staticky neurčitě.

b) $\Delta l > \delta \quad \Rightarrow \quad s = 1$ (uložení 1x staticky neurčité)



Dosazení do deformační podmínky:

Posuv bodu A určíme

a) ze vztahu

$$u_A = \int_\gamma \frac{N(x)}{E(x)S(x)}\mathrm{d}x + u^{\Delta t} =$$

$$= \frac{F - F_A}{E_1 S_1}a + \frac{-F_A}{E_1 S_1}b + \frac{-F_A}{E_2 S_2}c + (a+b)\alpha_1 \Delta t + c\alpha_2 \Delta t = \delta$$

b) pomocí Castiglianovy věty

$$u_A = \frac{\partial W}{\partial F_A} + u^{\Delta t} = \int\limits_{\gamma} \frac{N(x)}{E(x)S(x)} \frac{\partial N(x)}{\partial F_A} \mathrm{d}x + u^{\Delta t} =$$

$$= \int\limits_0^a \frac{F - F_A}{ES_1}(-1)\mathrm{d}x + \int\limits_0^b \frac{-F_A}{E_1 S_1}(-1)\mathrm{d}x + \int\limits_0^c \frac{-F_A}{E_2 S_2}(-1)\mathrm{d}x - (a+b)\alpha_1 \Delta t - c\alpha_2 \Delta t = -\delta$$

Diskuse ke znaménkům:

a) Při použití vztahu $u(x) = \int\limits_0^x \frac{N(x)}{ES(x)}\mathrm{d}x$ je zřejmé, že kladný smysl posuvu je od vetknutí ve směru střednice, tzn. při ohřevu se prodlužuje prut ve směru kladném, a protože mezi volným koncem prutu a rámem je vůle, bude v deformační podmínce na pravé straně rovnice kladné znaménko.
b) V Castiglianově větě určuje kladný směr orientace síly, podle které derivujeme energii napjatosti. V částečném uvolnění jsme zadali sílu $\vec{F}_A$ ve směru zprava doleva, tzn. pokud vyjádříme deformační podmínku ve tvaru $u_A = \dfrac{\partial W}{\partial F_A}$, je kladný smysl posuvu ve směru síly $\vec{F}_A$ a posuv od ohřevu je záporný a také na pravé straně rovnice bude záporné znaménko.

Deformační podmínka musí vyjít stejně, záleží tedy na Vás, který způsob si vyberete. Z deformační podmínky vypočítáme sílu

$$F_A = 80\,333\,\mathrm{N}$$

Maximální napětí

Pro posuzování mezního stavu pružnosti je důležité znát nebezpečný průřez a extrémní hodnoty napětí v příčném průřezu. U prostého tahu (tlaku) je napětí po průřezu rozloženo rovnoměrně, tedy všechny body průřezu jsou stejně nebezpečné a maximální napětí určíme ze vztahu

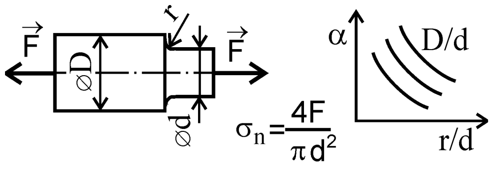
$$\sigma_{\max} = \frac{N}{S}\,.$$

Možný nebezpečný průřez:

a) Průřezy v úseku **b**:
V tomto úseku je N maximální

$$\sigma_b = \frac{-F_A}{S_1} = -64\,\mathrm{MPa}$$

b) Vrub:
Metodika založená na korekci prosté pružnosti prutů určuje extrémní hodnoty napětí v kořeni vrubu σ_{ex} z nominálního napětí σ_n pomocí **součinitele koncentrace napětí** $\alpha = \sigma_{ex}/\sigma_n$. Nominální napětí je vypočteno ze vztahů prosté pružnosti a pevnosti, tj. z předpokladu rovnoměrného rozložení napětí po průřezu v místě vrubu.



$$\sigma_n = \frac{-F_A}{S_2} = -83,5\,\mathrm{MPa}$$

Hodnoty součinitelů koncentrace napětí α určíme z nomogramů (skripta PP):

$$\frac{r}{d_2} = 0,06, \frac{d_1}{d_2} = 1,14, \alpha = 1,9, \sigma_{ex} = \alpha\sigma_n = -159\,\mathrm{MPa}$$

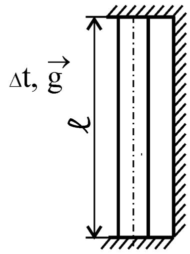
Kontrola mezního stavu pružnosti

Protože prut je složen z částí z různých materiálů, musíme určit bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti pro každý materiál zvlášť (různé meze kluzu) a bezpečnost celého prutu bude menší z obou hodnot.

$$k_{K1} = \frac{\sigma_{K1}}{|\sigma_b|} = 2,0, \quad k_{K2} = \frac{\sigma_{K2}}{|\sigma_{ex}|} = 2,2, \quad k_K = \min\{k_{K1}, k_{K2}\} = 2,0.$$

Příklad 2

Homogenní prizmatický prut je vložen bez vůle a přesahu do drážky v základním tělese. Stanovte průběhy napětí v průřezu podél střednice prutu od zatížení vlastní tíhou a rovnoměrného ohřevu prutu o Δt. Výrobní nepřesnosti prutu neuvažujte.



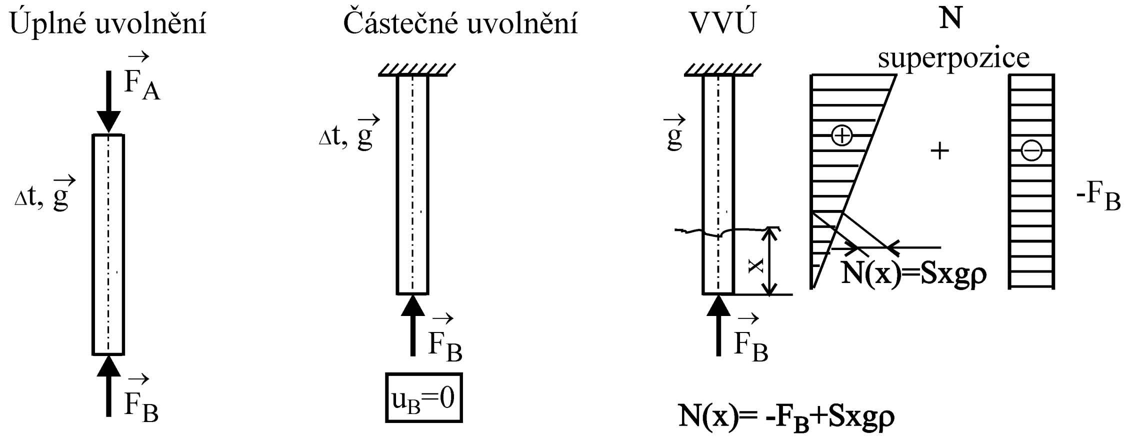
Dáno:
$S = 500\,\mathrm{mm}^2$, $l = 10\,\mathrm{m}$, $\rho = 7,8 \cdot 10^3\,\mathrm{kgm}^{-3}$, $g = 10\,\mathrm{ms}^{-2}$,
$\alpha = 12 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K}^{-1}$, $\Delta t = 60^o$, $E = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$.

Řešení

Rozbor

Homogenní prizmatický prut je zatížen proměnnou normálovou silou charakteru vlastní tíhy, kdy není narušena jednoosost napjatosti a je tedy použitelná prostá pružnost prutů. Napětí, posuv v bodě R střednice a energii napjatosti prutu délky l počítáme podle vztahů respektujících proměnnost normálové síly:

$$\sigma(x_R) = \frac{N(x_R)}{S}, \quad u(x_R) = \int\limits_0^{x_R} \frac{N(x)}{ES}\,\mathrm{d}\,x, \quad W(l) = \int\limits_0^{l} \frac{N^2(x)}{2ES}\,\mathrm{d}\,x.$$



Statický rozbor:
s=μ-ν=2-1=1
uložení 1x staticky neurčité

Dosazení do deformační podmínky:

$$u_B = \int\limits_\gamma \frac{N(x)}{ES(x)}\mathrm{d}x + u^{\Delta t} = \int\limits_0^l \frac{-F_B + Sx\rho g}{ES}\mathrm{d}x + l\alpha\Delta t = 0$$

Výpočet stykové síly F_B ***a napětí*** $\sigma(x)$

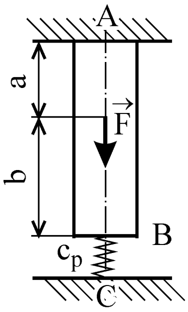
$$F_B = \frac{1}{2}\rho g l S + \alpha\Delta t E S = 72\ 195\,\mathrm{N}$$

průběh $\sigma(x)$

$$\sigma_{\max} = \sigma(x=0) = -144\,\mathrm{MPa}$$

Příklad 3

Prut podle obrázku je na jednom konci přivařen k základnímu tělesu a na druhém konci je vázán prostřednictvím pružiny o poddajnosti c_p [m/N]. Je zatížen silou $\vec{F}$. Posuďte bezpečnost prutu vzhledem k meznímu stavu pružnosti. Geometrie, zatížení i materiálové charakteristiky (mez kluzu σ_K, Youngův modul pružnosti E) jsou zadány. Změny teploty a výrobní nepřesnosti jsou zanedbatelné, vlastní tíha rovněž.

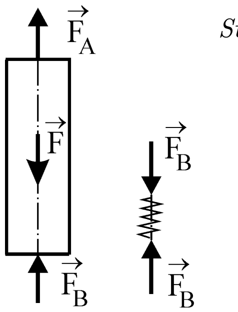


Řešení

Rozbor

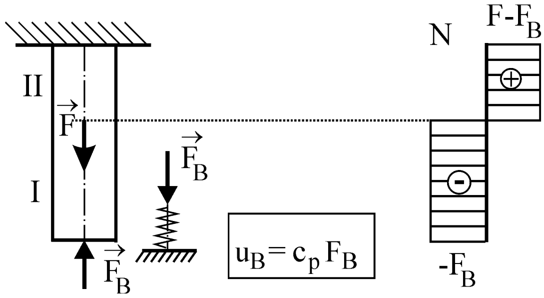
Cílem úlohy je kontrola mezního stavu pružnosti přímého prutu, silově zatíženého, vázaného jednou tuhou a jednou poddajnou (pružnou) vazbou.

Úplné uvolnění:



Statický rozbor: $\nu = 1, \quad \mu = 2$ (soustava sil na jedné nositelce)
$s = \mu - \nu = 1 \quad \Rightarrow \quad$ úloha je 1x staticky neurčitá

Částečné uvolnění:
silově závislá deformační podmínka (nehomogenní)



Průběh VVÚ:
$x \in (0, b): \quad N_I = -F_B$
$x \in (0, a): \quad N_{II} = F - F_B$

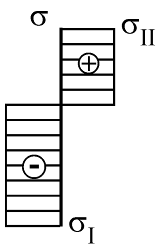
Deformační podmínka:

$$u_B^{(1)} = -\frac{F_B}{ES}b + \frac{F - F_B}{ES}a = u_B^{(2)} = F_B c_p$$

Použili jsme vztah $u(x) = \int\limits_0^x \frac{N(x)}{ES(x)}\mathrm{d}x$, proto je na pravé straně rovnice kladné znaménko - souhlasný smysl posuvu prutu i pružiny (dolů pro $N > 0, F_B > 0$).
Úkol k zamyšlení: napište tuto deformační podmínku pomocí Castiglianovy věty.
Výpočet stykové síly F_B:

$$F_B = \frac{Fa}{a + b + c_p ES}$$

Průběh napětí:



Protože se jedná o prut namáhaný prostým tahem, je napětí v průřezu prutu konstantní a určíme ho ze vztahu

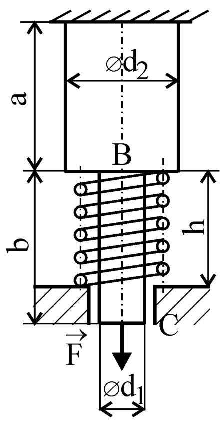
$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{S(x)}: \qquad \sigma_I = \frac{N_I}{S} = \frac{-F_B}{S}, \quad \sigma_{II} = \frac{N_{II}}{S} = \frac{F_A}{S}$$

Kontrola mezního stavu pružnosti: Z průběhu napětí zjistíme průřez, ve kterém je napětí největší (nebezpečný průřez) a vypočítáme bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti:

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{\max}}.$$

Příklad 4

Odvoďte vztah pro posuv bodu C střednice prutu podle obrázku. V místě B je prut opřen o pružinu s tuhostí K [Nm^{-1}]. Vliv vlastní tíhy pokládáme za nepodstatný.

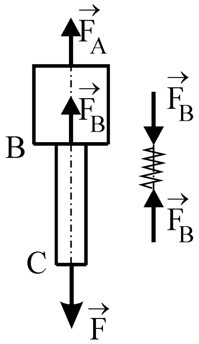


Dáno: a, b, E, d_1, d_2, F, K.

Řešení

Rozbor

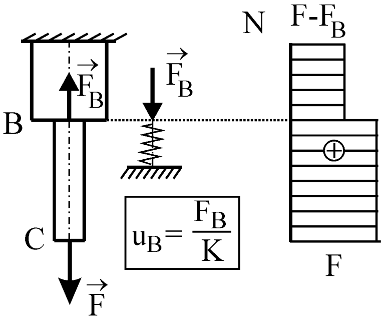
Cílem úlohy je deformační posuv bodu střednice přímého prutu, po částech konstantního průřezu vázaného vetknutím a pružnou vazbou.



Úplné uvolnění:

Statický rozbor: $\nu = 1, \qquad \mu = 2$ (soustava sil na jedné nositelce)
$s = \mu - \nu = 1 \quad \Rightarrow \quad$ úloha je 1x staticky neurčitá

Částečné uvolnění:
silově závislá deformační podmínka (nehomogenní)



Průběh VVÚ:
$x \in (0, b): \quad N_I = F$
$x \in (0, a): \quad N_{II} = F - F_B$

Deformační podmínka:

a) dosazením do vztahu $u_B = \int\limits_0^{x_B} \frac{N(x)}{E(x)S(x)}\mathrm{d}x$

$$u_B = \frac{F - F_B}{ES_1} a = \frac{F_B}{K}$$

Použili jsme vztah $u(x) = \int\limits_0^{x} \frac{N(x)}{ES(x)}\mathrm{d}x$, proto je na pravé straně rovnice kladné znaménko - souhlasný smysl posuvu prutu i pružiny (dolů pro $N > 0, F_B > 0$).

b) pomocí Castiglianovy věty

$$u_B = \frac{\partial W}{\partial F_B} = \int\limits_\gamma \frac{N(x)}{E(x)S(x)} \frac{\partial N(x)}{\partial F_B}\mathrm{d}x = \int\limits_0^a \frac{F - F_B}{ES_1} \cdot (-1)\mathrm{d}x + \int\limits_0^b \frac{F}{ES_2} \cdot (0)\mathrm{d}x = -\frac{F_B}{K}$$

V Castiglianově větě určuje kladný směr orientace síly, podle které derivujeme energii napjatosti. V částečném uvolnění jsme zadali sílu $\vec{F}_B$ ve směru nahoru, tedy kladný smysl spočítaného posuvu bodu B prutu je směrem nahoru. Deformaci pružiny počítáme pomocí vztahu $\frac{F_B}{K}$, kde za F_B dosazujeme velikost síly $\vec{F}_B$. Vypočítaný posuv bodu B u pružiny tedy bude kladný ve smyslu působení $\vec{F}_B$. Deformační podmínka ale musí zajistit, aby bod B prutu a pružiny zůstal spojený, tzn. posuv bodu B prutu i pružiny musí mít stejný smysl, proto je na pravé straně rovnice záporné znaménko.

Oba postupy vedou ke stejnému řešení:

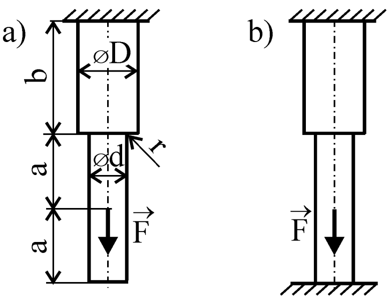
$$F_B = \frac{FaK}{aK + ES_1}$$

Posuv bodu C:
(vyřešte buď dosazením do vztahu pro posuv nebo do Castiglianovy věty)

$$u_C = \frac{F - F_B}{ES_1}a + \frac{Fb}{ES_2}$$

Příklad 5

Zhodnoťte z hlediska PP dvě možnosti uložení součásti, zatížené za provozu silou $\vec{F}$. Délka prutu byla stanovena s tolerancí $\pm 0,1\,\mathrm{mm}$. V případě b) je prut na obou koncích přivařen k základnímu tělesu.



Dáno:
$a = 0,1\,\mathrm{m}$, $F = 50\,\mathrm{kN}$, $E = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$,
$b = 0,15\,\mathrm{m}$, $r = 3\,\mathrm{mm}$, $\sigma_K = 300\,\mathrm{MPa}$,
$\varnothing D = 25\,\mathrm{mm}$, $\varnothing d = 20\,\mathrm{mm}$.

Řešení

Inspirací pro řešení by mohly být řešené příklady 414, 417 a 418 z Interaktivního učebního textu dostupného na E-learningu v Literatuře.

Výsledky:

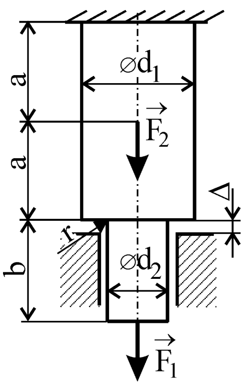
$\alpha = 1,55$ $\quad \sigma^a_{ex} = 247\,\mathrm{MPa}$ $\quad \sigma^b_{ex1} = 188\,\mathrm{MPa}$ $\quad \sigma^b_{max2} = -173\,\mathrm{MPa}$

$k^a_k = 1,2$ $\quad k^b_{k1} = 1,6$ $\quad k^b_{k2} = 1,7$

Domácí úkol:

DÚ 6

Prut uložený podle obrázku je zatížen silami $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ ($F_2 = 3F_1$). Po montáži je vůle mezi osazením a rámem Δ (vlastní tíhu prutu neuvažujte). Určete bezpečnost prutu vzhledem k meznímu stavu pružnosti.



Dáno: $a = 0,4\,\mathrm{m}$, $b = 0,5\,\mathrm{m}$, $F_1 = 30\,\mathrm{kN}$, $F_2 = 3F_1 = 90\,\mathrm{kN}$,
$d_1 = 40\,\mathrm{mm}$, $d_2 = 32\,\mathrm{mm}$, $r = 4\,\mathrm{mm}$,
$\Delta = 0,2\,\mathrm{mm}$, $E = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$, $\sigma_K = 250\,\mathrm{MPa}$.