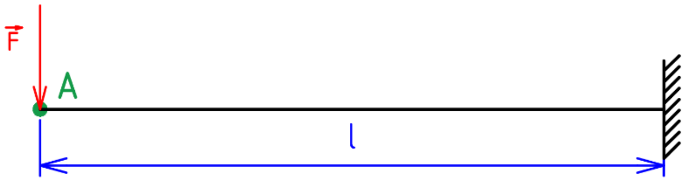
8. cvičení Pružnost a pevnost 1

Namáhání na ohyb – staticky určité uložení

Příklad 1

U prutu dle obrázku určete velikost průhybu a úhlu natočení volného konce prutu (v bodě A), s využitím (1) Castiglianovy věty a (2) diferenciální rovnice průhybové čáry. Příčný průřez prutu je kruhový s průměrem velikosti D. Pro materiál můžeme použít Hookovký model materiálu (homogenní, izotropní, lineárně pružný, dokonale pevný).

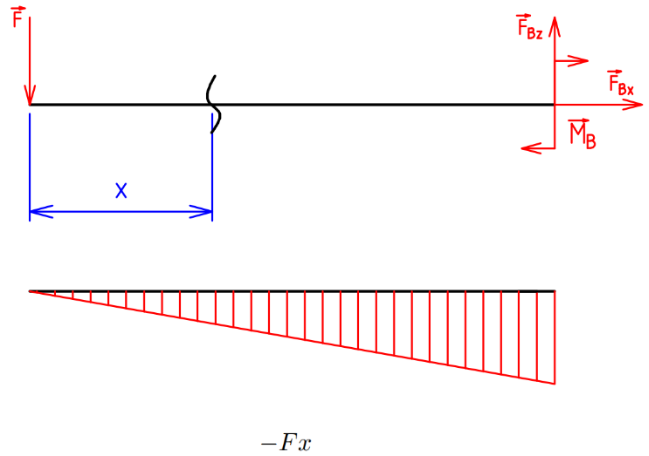


l = 1 m

$$J = \frac{\pi D^4}{64}$$

F = 2 kN
E = 200 GPa
D = 35 mm
σ_K = 500 MPa

Prut je jednostranně vetknutý, uložení je tedy staticky určité a pro vyjádření průběhu VVÚ není nutné prut uvolňovat. Pro forma jsou zde úplné uvolnění, statický rozbor a průběh ohybového momentu uvedeny:



Statický rozbor:

s = μ- ν = 3 – 3 = 0

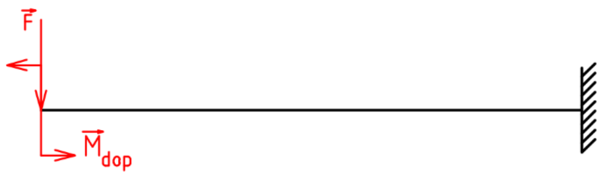
Uložení je staticky určité.

VVÚ: N=0, M_k=0,
p=-F,
Průběh ohybového momentu:

$$M_o(x) = -Fx$$

(1) Určení průhybu a úhlu natočení pomocí Castiglianovy věty

Castiglianovu větu můžeme použít pro lineární úlohy. Zadání úlohy splňuje podmínky lineárnosti do meze kluzu. Pomocí Castiglianovy věty určíme deformační charakteristiku v jednom bodě:
- průhyb, jestliže v tomto bodě působí síla, derivací energie napjatosti podle této síly. Obdržíme průhyb ve směru působící síly,
- úhel natočení, jestliže v tomto bodě působí moment, derivací energie napjatosti podle tohoto momentu.



$$M_o(x) = -Fx - M_{dop}$$

Obdržíme úhel natočení ve směru působícího momentu
- pokud v bodě, ve kterém určujeme posuv u_F, nepůsobí síla, zavádíme doplňkovou sílu F_{dop}, v případě úhlu natočení φ_M zavádíme doplňkový moment M_{dop}.
- vzhledem k tomu, že l/d=1000/35=28,6 je podstatně větší než 5 je energie napjatosti od posouvající síly z hlediska určení deformačního parametru nepodstatná Viz Skripta MT Úlohy z PPI A65.

V MT Úlohy z PPI je v úloze A66 porovnáno řešení pomocí Castiglianovy věty a Maxwell-Mohrovy varianty Castiglianovy věty, které vede k závěru, že použití Maxwell-Mohrovy varianty Castiglianovy věty je operačně podstatně jednoduší než použití Castiglianovy věty, proto pro následující řešení použijeme Maxwell-Mohrovu variantu.

Vyjádřený ohybový moment a jeho parciální derivaci podle působící síly F dosadíme do Maxwell-Mohrovy varianty Castiglianovy věty pro průhyb:

$$w_A = \int_0^l \frac{M_o(x)}{EJ} \frac{\partial M_o(x)}{\partial F} dx = \int_0^l \frac{-Fx - M_{dop}}{EJ} (-x)\, dx = \frac{Fl^3}{3EJ} = \frac{64Fl^3}{3E\pi D^4} = \frac{64 \cdot 2000 \cdot 1^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot 0,035^4} = 0,045\, m$$

Do Maxwell-Mohrovy varianty Castiglianovy věty pro úhel natočení dosazujeme ohybový moment a parciální derivaci ohybového momentu podle doplňkového momentu M_{dop}:

$$\varphi_A = \int_0^l \frac{M_o(x)}{EJ} \frac{\partial M_o(x)}{\partial M_{dop}} dx = \int_0^l \frac{-Fx - M_{dop}}{EJ} (-1)\, dx = \frac{Fl^2}{2EJ} = \frac{32Fl^2}{E\pi D^4} = \frac{32 \cdot 2000 \cdot 1^2}{2 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot 0,035^4} = 0,067\, rad$$

(2) Určení průhybu a úhlu natočení pomocí Diferenciální rovnice průhybové čáry

Řešením diferenciální rovnice průhybové čáry získáme funkci průhybu w(x) a úhlu natočení w´(x) po celé délce prutu. Velikost průhybu a úhlu natočeni v bodě střednice obdržíme dosazením souřadnice x bodu do w(x) a w´(x).

Diferenciální rovnice $$w''(x) = -\frac{M_o(x)}{EJ} = -\frac{-Fx}{EJ} \qquad w'^2(x) \ll 1$$

je odvozena pro *E(x)=konst.=E a J(x)=konst.=J.*

Přímou integrací dif. rovnice průhybové čáry získáme obecné řešení 1. derivace průhybu (tedy natočení w´(x)) a přímou integrací natočení získáme obecné řešení průhybu w(x):

$$w'(x) = \frac{Fx^2}{2EJ} + C_1$$

$$w(x) = \frac{Fx^3}{6EJ} + C_1 x + C_2$$

Hodnoty integračních konstant C_1 a C_2 určíme z okrajových podmínek. V tomto případě je prut v místě x = l vetknutý. V místě vetknutá je nulová hodnota průhybu i úhlu natočení:

$$w(l) = 0 \qquad\qquad w'(l) = 0$$

Po dosazení okrajových podmínek získáváme soustavu dvou lineárních rovnic s neznámými C_1 a C_2:

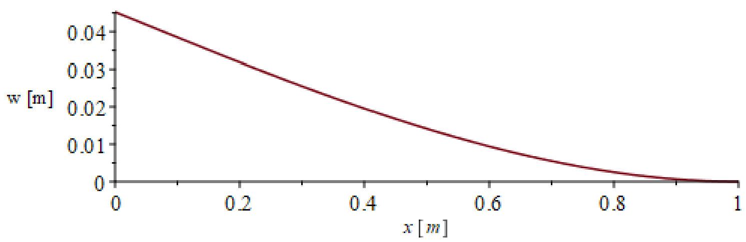
$$\left.\begin{aligned} w'(l) &= \frac{Fl^2}{2EJ} + C_1 = 0 \\ w(l) &= \frac{Fx^3}{6EJ} + C_1 l + C_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} C_1 &= -\frac{Fl^2}{2EJ} \\ C_2 &= -\frac{Fl^3}{6EJ} + \frac{Fl^3}{2EJ} = \frac{Fl^3}{3EJ} \end{aligned}$$

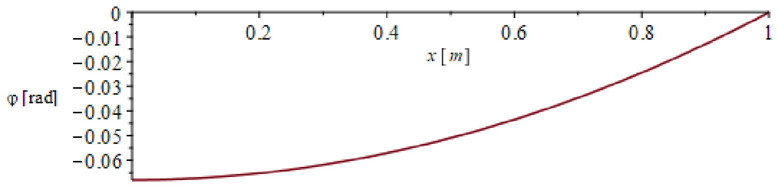
Zpětným dosazením C_1 a C_2 do obecného řešení průhybu a natočení obdržíme *w(x)* a *w´(x)*:

$$w'(x) = \frac{Fx^2}{2EJ} - \frac{Fl^2}{2EJ}$$

$$w(x) = \frac{Fx^3}{6EJ} - \frac{Fl^2}{2EJ}x + \frac{Fl^3}{3EJ}$$

Grafy funkcí průhybu a natočení:





Hodnotu průhybu a natočení v bodě A jsou funkční hodnoty w(x) a w‘(x) pro x = 0:

$$w^{'}(0) = \frac{F0^2}{2EJ} - \frac{Fl^2}{2EJ} = -\frac{Fl^2}{2EJ} = -\frac{32Fl^2}{E\pi D^4} = -0,067\,rad$$

$$w(0) = \frac{F0^3}{6EJ} - \frac{Fl^2}{2EJ}0 + \frac{Fl^3}{3EJ} = \frac{Fl^3}{3EJ} = \frac{64Fl^3}{3E\pi D^4} = 0,045\,m$$

V místě A je velikost průhybu 45 mm a velikost úhlu natočení 3,84°.

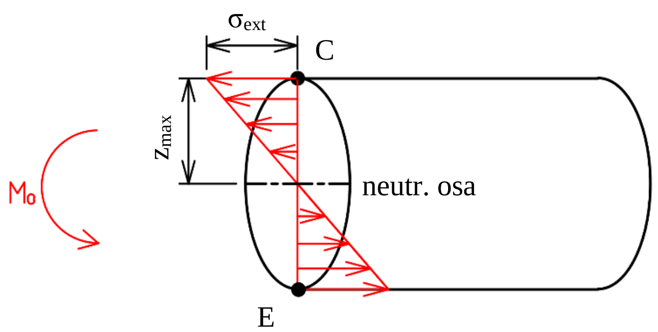
Model Hookovského materiálu je použitelný pro většinu běžných strojírenských ocelí do meze kluzu, tedy pro bezpečnost součásti vzhledem k meznímu stavu pružnosti větší nebo rovnou 1.

Kontrola bezpečnosti

Úloha je lineární, pokud maximální napětí součásti nepřekročí mez kluzu, tedy pokud je bezpečnost součásti vzhledem k meznímu stavu pružnosti větší nebo rovna 1. Maximální hodnota ohybového momentu je v místě vetknutí. Protože prut má konstantní průřez, je ve stejném místě i maximální hodnota napětí.

Velikost maximálního ohybového momentu v místě vetknutí: $M_{o,max} = Fl$

Protože průběh normálového napětí v příčném průřezu u prutu namáhaného na ohyb je lineární[1], určíme nebezpečná místa v příčném průřezu, tj. body, v nichž je napětí největší.



$$z_{max} = \frac{D}{2}$$

Nebezpečná místa v průřezu jsou vyznačené body C a E na obrysové čáře. V těchto bodech působí v průřezu největší napětí σ_{ext}, v bodě C tahové a v bodě E tlakové. Dále je vyznačena neutrální osa, která je tvořená body průřezu s nulovým napětím. Napětí σ_{ext} je vždy na povrchu příčného průřezu, v bodech nejvíce vzdálených od neutrální osy.

Extrémní napětí v příčném průřezu je určeno podílem ohybového momentu a modulu průřezu v ohybu. Vztah pro modul kruhového příčného průřezu v ohybuje:

$$W_o = \frac{J_y}{z_{max}} = \frac{\frac{\pi D^4}{64}}{\frac{D}{2}} = \frac{\pi D3}{32}$$

$$\sigma_{ext} = \frac{M_{o,max}}{W_o} = \frac{32Fl}{\pi D^3} = \frac{32 \cdot 2000 \cdot 1000}{\pi \cdot 35^3} = 475,14\,MPa$$

[1] Na rozdíl od tahu, kde je v celém příčném průřezu napětí konstantní.

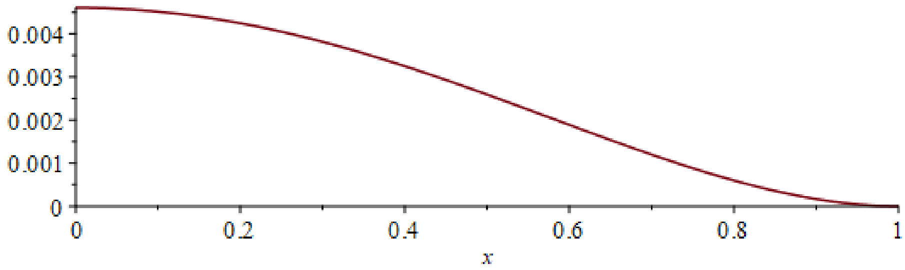
Pokud je hodnota mez kluzu v tahu a tlaku stejná, pak bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti v bodech C a E je stejná a má hodnotu:

$$k_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{ext}} = \frac{500}{475,14} = 1,05 > 1$$

Tvar diferenciální rovnice průhybové čáry je odvozen za předpokladu

$$w''(x) = -\frac{M_o(x)}{EJ} = -\frac{-Fx}{EJ} \qquad\qquad w'^2(x) \ll 1$$

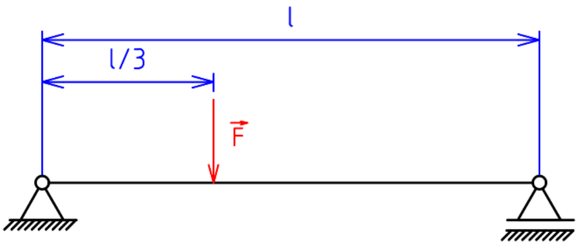
Tento předpoklad ověříme vykreslením funkce $w'^2(x)$:



Z průběhu funkce je patrné, že po celé délce prutu je podmínka splněna.

Příklad 2

U prutu dle obrázku určete místo a velikost maximálního průhybu. Příčný průřez prutu je kruhový s průměrem velikosti D.



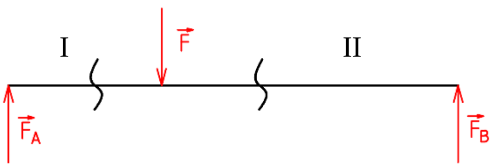
l = 1 m
F = 3,5 kN
E = 200 GPa
D = 25 mm
σ_K = 550 MPa

Rozbor:
Prut je vázaný, nejprve určíme velikost stykových sil, aby bylo možné vyjádřit VVÚ. Místo maximálního průhybu není známé, k řešení proto použijeme diferenciální rovnici průhybové čáry, kterou získáme funkční závislost průhybu w(x) po celé délce prutu a následně určíme maximální průhyb prutu.

Nyní následuje úplné uvolnění, sestavení rovnic statické rovnováhy a vyjádření velikosti stykových sil ve vazbách A a B – domácí úkol.

Statický rozbor : μ=3, v=3, s=0 Uložení je staticky určité.

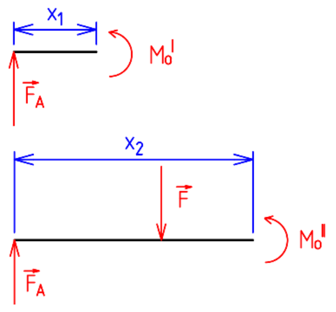
Vzhledem k tomu, že se zatížení mění po délce střednice je nutné prut rozdělit na dva intervaly.



$$F_A = \frac{2}{3}F$$

$$F_B = \frac{1}{3}F$$

Otázka – jsou obrázky nakresleny správně?



$x_1 \epsilon < 0, \frac{l}{3})$, $x_2 \epsilon (\frac{l}{3}, l >$

V dalším kroku vyjádříme ohybový moment v jednotlivých intervalech prutu.

$$M_o^I(x_1) = \frac{2}{3}Fx_1, x_1 \in \left(0, \frac{l}{3}\right)$$

$$M_o^{II}(x_2) = \frac{2}{3}Fx_2 - F\left(x_2 - \frac{l}{3}\right), x_2 \in \left(\frac{l}{3}, l\right)$$

Pro každý interval následně vyjádříme diferenciální rovnici průhybové čáry:

$$w_I''(x_1) = -\frac{M_o^I(x_1)}{EJ} = -\frac{2Fx_1}{3EJ}$$

$$w_{II}''(x_2) = -\frac{M_o^{II}(x_2)}{EJ} = -\frac{\frac{2}{3}Fx_2 - F\left(x_2 - \frac{l}{3}\right)}{EJ}$$

Přímou integrací získáváme obecná řešení průhybu v jednotlivých intervalech:

$$w_I'(x_1) = -\frac{Fx_1^2}{3EJ} + C_1$$

$$w_{II}'(x_2) = -\frac{\frac{1}{3}Fx_2^2 - F\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{lx_2}{3}\right)}{EJ} + C_3$$

$$w_I(x_1) = -\frac{Fx_1^3}{9EJ} + C_1x_1 + C_2$$

$$w_{II}(x_2) = -\frac{\frac{1}{9}Fx_2^3 - F\left(\frac{x_2^3}{6} - \frac{lx_2^2}{6}\right)}{EJ} + C_3x_2 + C_4$$

Integrační konstanty určíme ze čtyř okrajových podmínek.

Dvě okrajové podmínky určíme ze známého průhybu ve vazbách

$$w_I(0) = 0 \qquad w_{II}(l) = 0$$

a zbylé dvě ze spojitosti a hladkosti průhybové čáry na hranici intervalů I a II[2]:

$$w_I\left(\frac{l}{3}\right) = w_{II}\left(\frac{l}{3}\right) \qquad w_I'\left(\frac{l}{3}\right) = w_{II}'\left(\frac{l}{3}\right)$$

Dosazením do předchozích čtyř rovnic obdržíme soustavu čtyř lineárních rovnic s neznámými integračními konstantami C_1, C_2, C_3 a C_4:

$$-\frac{F \cdot 0^3}{9EJ} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$-\frac{\frac{1}{9}Fl^3 - F\left(\frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{6}\right)}{EJ} + C_3l + C_4 = 0$$

$$-\frac{Fl^3}{243EJ} + C_1\frac{l}{3} + C_2 = -\frac{\frac{1}{243}Fl^3 - F\left(\frac{l^3}{162} - \frac{l^3}{54}\right)}{EJ} + C_3\frac{l}{3} + C_4$$

$$-\frac{Fl^2}{27EJ} + C_1 = -\frac{\frac{1}{27}Fl^3 - F\left(\frac{l^2}{18} - \frac{l^2}{9}\right)}{EJ} + C_3$$

[2] Průhybová čára je spojitou a hladkou křivkou

Řešením soustavy rovnic získáváme integrační~~ch~~ konstanty:

$$C_1 = \frac{5Fl^2}{81EJ},\ C_2 = 0,\ C_3 = \frac{19Fl^2}{162EJ},\ C_4 = -\frac{Fl^3}{162EJ}$$

Dosazením do obecného řešení obdržíme vztahy pro průhyb a úhel natočení v jednotlivých intervalech prutu.

$$w_I^{'}(x_1) = -\frac{Fx_1^2}{3EJ} + \frac{5Fl^2}{81EJ}$$

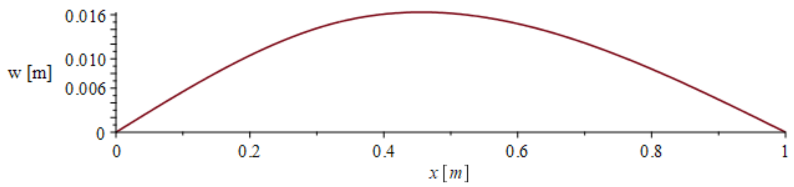
$$w_{II}^{'}(x_2) = -\frac{\frac{1}{3}Fx_2^2 - F\left(\frac{x_2^2}{2} - \frac{lx_2}{3}\right)}{EJ} + \frac{19Fl^2}{162EJ}$$

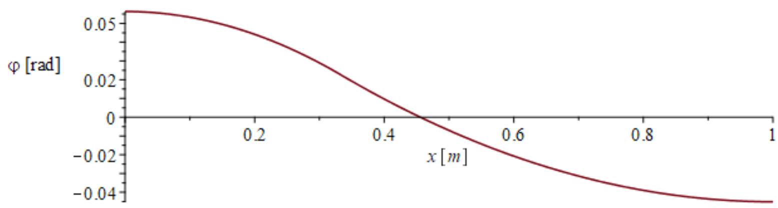
$$w_I(x_1) = -\frac{Fx_1^3}{9EJ} + \frac{5Fl^2}{81EJ}x_1$$

$$w_{II}(x_2) = -\frac{\frac{1}{9}Fx_2^3 - F\left(\frac{x_2^3}{6} - \frac{lx_2^2}{6}\right)}{EJ} + \frac{19Fl^2}{162EJ}x_2 - \frac{Fl^3}{162EJ}$$

Úpravou vztahů pro průhyb a úhel natočení na jednotlivých intervalech můžeme obdržet jeden vztah pro průhyb a jeden vztah pro úhel natočení po celé délce prutu.

Grafy vypočtených funkcí:





Nyní lze určit místo maximálního průhybu, a to položením 1. derivace průhybu rovné nule:

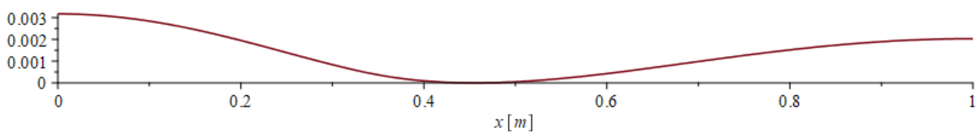
$$w_I^{'}(x_1) = 0 \ \rightarrow\ x_1 = \{-0,430,\ 0,430\}\, m \qquad w_{II}^{'}(x_2) = 0 \ \rightarrow\ x_2 = \{0,455,\ 1,544\}\, m$$

Obecně řešením dvou kvadratických rovnic dostaneme čtyři kořeny, při uvážení definičních oborů obou funkcí je zřejmé, že maximální průhyb je v intervalu II v bodě se souřadnicí $x_2 = 0{,}455$ m. Dosazením této souřadnice do $w_{II}(x_2)$ obržíme hodnotu maximálního průhybu:

$$w_{II}(0,455) = 0,0163\, m$$

Maximální průhyb prutu je ve vzdálenosti 0,455 m od levého konce a jeho velikost je 16,3 mm.

Na závěr ověříme předpoklad: $w'^2(x) \ll 1$



Předpoklad je splněný.

Určení bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu pružnosti:

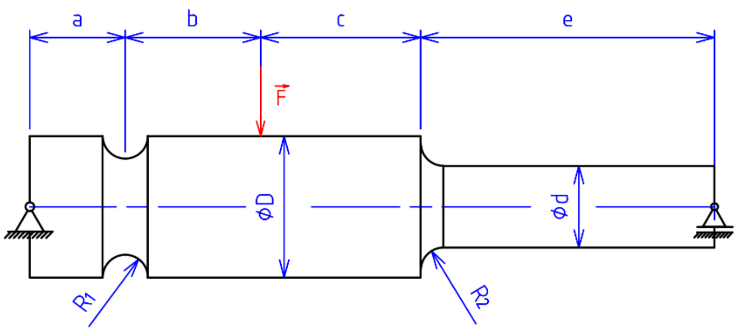
$$M_{o,max} = M_o^I\left(\frac{l}{3}\right) = \frac{2}{3}F \cdot \frac{l}{3}$$

$$\sigma_{ext} = \frac{M_{o,max}}{W_o} = \frac{64Fl}{9\pi D^3} = \frac{64 \cdot 3500 \cdot 1000}{9 \cdot \pi \cdot 25^3} = 507,03\, MPa$$

$$k_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{ext}} = \frac{550}{507,03} = 1,08 > 1$$

Příklad 3

Určete bezpečnost součásti vzhledem k meznímu stavu pružnosti.



a = 200 mm
b = 200 mm
c = 400 mm
e = 600 mm
F = 3,5 kN
D = 100 mm
d = 50 mm
R_1 = 3 mm
R_2 = 5 mm
E = 200 GPa
σ_K = 350 MPa

Kontrola zadání: Chybí zakótování zápichu – budeme předpokládat, že tento minimální průměr v místě zápichu je D – 2.R_1 = 94 mm a šířka zápichu je . 2.R_1 = 6 mm..

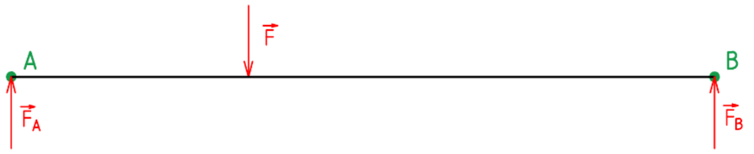
Zamyšlení:
Bezpečnost součásti vzhledem k meznímu stavu pružnosti je dána vztahem:

$$k_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{max}}$$

Pro určení bezpečnosti je tedy nutné určit maximální napětí součásti.

Pro určení napětí je potřeba znát ohybový moment, k tomu je nutné nejprve provést úplné uvolnění a určit velikosti stykových sil:

Je následující obrázek úplné uvolnění nebo tam něco chybí?



$$F_A = \frac{5}{7}F = 2500\,N$$

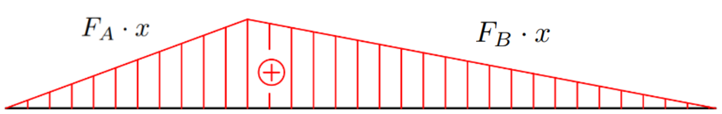
$$F_B = \frac{2}{7}F = 1000\,N$$

Statický rozbor:
μ=3, v=3, s=0
Součást je uložená staticky určitě.

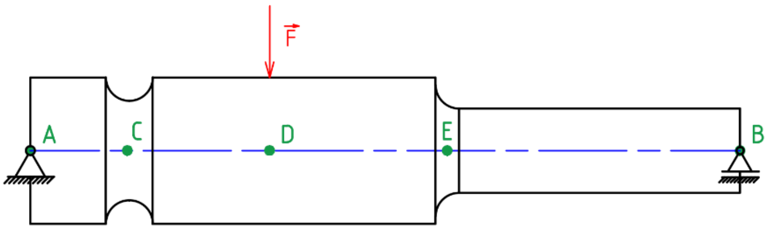
VVÚ: N = 0, M_k = 0,

T = ? - dokreslete si průběh tohoto VVÚ

M_o



Následně určíme nebezpečné průřezy:



Pozor na kolizi v označení: průměr D a bod D, kde působí síla F.

U součásti podle obrázku jsou dva vruby (ozn. C a E), Ve vrubu dochází v důsledku náhlé změny příčného průřezu ke koncentraci napětí, proto příčné průřezy v bodech C, E jsou nebezpečné průřezy. Dalším nebezpečným průřezem je příčný průřez v bodě D, kde $M_o = M_{omax}$.

Maximální napětí ve vrubu určíme jako součin nominálního napětí a součinitele koncentrace napětí α [3].

$$\sigma_{max} = \alpha . \sigma_{nom.}$$

Maximální napětí součásti určíme jako maximum z hodnot maximálního napětí v řezech C, E (konstrukční vruby) a D (maximální ohybový moment):

$$\sigma_{max} = max(\sigma_{maxC}, \sigma_{maxE}, \sigma_{Dext})$$

Pozn. Index *n* znamená nominální, vhodnější by bylo použít *nom*, aby nedošlo k záměně s přívlastkem normálový.

Napětí v řezu C.:

Ohybový moment v místě C:

$$M_{o,C} = F_A \cdot a$$

Hodnota nominálního napětí ve vrubu (malý průměr dle nomogramu):

$$\sigma_{n,C} = \frac{32M_{o,C}}{\pi(D-2R_1)^3} = \frac{32F_A a}{\pi(D-2R_1)^3} = \frac{32 \cdot 2500 \cdot 0,2}{\pi \cdot (0,1 - 2 \cdot 0,003)^3} = 6,12\, MPa$$

Určení součinitele koncentrace napětí:

$$\frac{r}{d} = \frac{3}{94} = 0,032; \ \frac{D}{d} = \frac{100}{94} = 1,062; \ \alpha_C = 2,5$$

Maximální napětí v řezu C:

$$\sigma_{ext,C} = \sigma_{n,C} \cdot \alpha_C = \cdot \alpha_C = 6,12 \cdot 2,5 = 15,3\, MPa$$

Napětí v řezu D:

Ohybový moment v místě D:

$$M_{o,D} = F_A \cdot (a+b)$$

Maximální napětí v průřezu:

$$\sigma_{ext,D} = \frac{M_{o,D}}{W_{o,D}} = \frac{32F_A(a+b)}{\pi D^3} = \frac{32 \cdot 2500 \cdot (0,2+0,2)}{\pi \cdot 0,1^3} = 10,2\, MPa$$

[3] Součinitele koncentrace napětí je nutné určit z odpovídajícího nomogramu ve skriptech PPI, str. 280–283. Pozor na nominální napětí, pro které je daný nomogram sestaven a je u něj vždy uvedeno, standardně jsou nomogramy odvozeny pro nominální napětí na menším průřezu.

Napětí v řezu E:

Ohybový moment v místě E:

$$M_{o,E} = F_B \cdot c$$

Nominální napětí ve vrubu:

$$\sigma_{n,E} = \frac{32M_{o,E}}{\pi d^3} = \frac{32F_B e}{\pi d^3} = \frac{32 \cdot 1000 \cdot 0,6}{\pi \cdot 0,05^3} = 48,8\,MPa$$

Určení hodnoty součinitele koncentrace napětí:

$$\frac{r}{d} = \frac{5}{50} = 0,1; \ \frac{D}{d} = \frac{100}{50} = 2; \ \alpha_E = 1,8$$

Maximální napětí v řezu C:

$$\sigma_{ext,E} = \sigma_{n,E} \cdot \alpha_E = 48,8 \cdot 1,8 = 88,0\,MPa$$

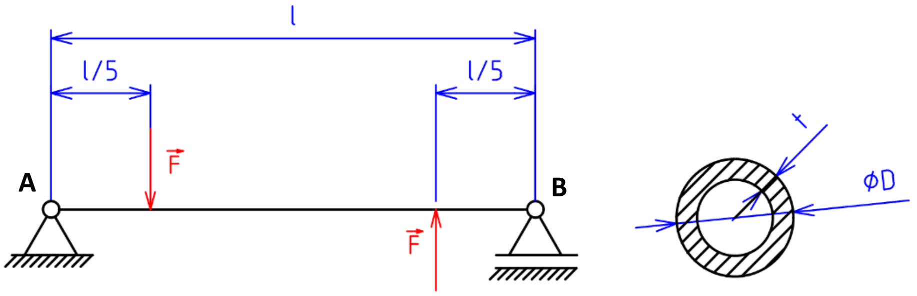
Maximální napětí v součásti je tedy rovno napětí $\sigma_{max,\,E}$ v místě E. Bezpečnost součásti vzhledem k meznímu stavu pružnosti:

$$k_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{ext,E}} = \frac{350}{88} = 3,97$$

Bezpečnost součásti vzhledem k meznímu stavu pružnosti je 3,97.

Příklad 4

Určete minimální tloušťku trubky tak, aby bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti byla 1,5. Dále určete úhel natočení ve vzdálenosti l/5 od levého konce prutu.



l = 5000 mm
F = 5000 N
D = 100 mm
σ_k = 350 MPa

Rozbor:

Úkolem je určit neznámý parametr – tloušťku mezikruhového příčného průřezu – tak, aby byla splněna podmínka bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu pružnosti:

$$k_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{ext}} = 1,5$$

Extrémní napětí vyjádříme jako funkci tloušťky příčného průřezu.

Prut má po celé délce konstantní průřez. Maximální napětí je v řezech, kde jsou maximální vnitřní účinky. Extrémní napětí při prostém ohybu je dáno vztahem:

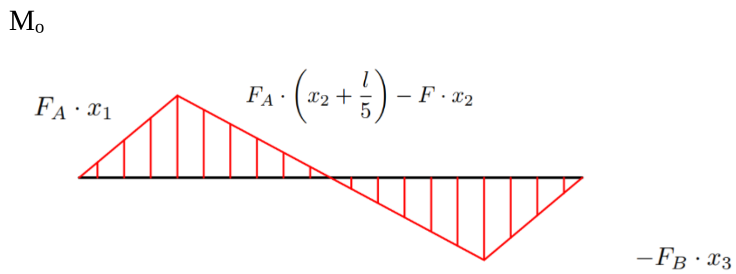
$$\sigma_{ext} = \frac{M_{o,max}}{W_o}$$

Nyní proveďte úplné uvolnění, statický rozbor a určete stykové síly ve vazbách A a B.

$$F_A = F_B = \frac{3}{5}F$$

VVÚ: $N = 0$, $M_k = 0$,

nakreslete průběh T



Z průběhu ohybového momentu je zřejmé, že maximální ohybové momenty jsou v místech, kde působí síly F. Velikosti maximálních ohybových momentů jsou stejné, mají pouze opačné znaménko:

$$M_{o,max} = F_A \cdot \frac{l}{5} = \frac{3Fl}{25}$$

Určení modulu průřezu v ohybu:

$$J_y = \frac{\pi\left[D^4 - (D-2t)^4\right]}{64}$$

$$W_o = \frac{J_y}{\frac{D}{2}} = \frac{2\pi\left[D^4 - (D-2t)^4\right]}{64D}$$

Dosazením ohybového momentu a modulu průřezu v ohybu do obecného vztahu pro extrémní napětí získáváme $\sigma_{ext}(t)$ jako funkci proměnné t:

$$\sigma_{ext}(t) = \frac{\frac{3Fl}{25}}{\frac{2\pi\left[D^4-(D-2t_{min})^4\right]}{64D}} = \frac{96FlD}{25\pi\left[D^4 - (D-2t_{min})^4\right]}$$

Dosazením do podmínky bezpečnosti získáváme rovnici s neznámou t_{min}:

$$k_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{ext}} = 1{,}5 = \frac{25\sigma_k\pi\left[D^4-(D-2t_{min})^4\right]}{96FlD}$$

V posledním kroku z předchozí rovnice vyjádříme t_{min} :

$$t_{min} = \frac{\sqrt[4]{D^4-\frac{96FlDk_{k,min}}{25\sigma_k\pi}}-D}{-2} = 0{,}00172\,m$$

Minimální tloušťka trubky pro bezpečnost 1,5 je 1,72 mm.

Druhou částí úlohy je určení úhlu natočení ve vzdálenosti l/5 od levého konce prutu. Pro určení deformační charakteristiky v bodě použijeme Castiglianovu větu. Ve vzdálenosti l/5 od levého konce prutu nepůsobí moment, proto v tomto místě zavedeme doplňkový moment (v tomto příkladu označený M_D) a určíme výsledné stykové síly a VVÚ:

$$F_A = F_B = \frac{3}{5}F - \frac{M_D}{l}$$

$$M_o^I = F_A \cdot x_1 = \left(\frac{3}{5}F - \frac{M_D}{l}\right)\cdot x_1$$

$$M_o^{II} = F_A \cdot \left(x_2 + \frac{l}{5}\right) + M_D - F\cdot x_2 = \left(\frac{3}{5}F - \frac{M_D}{l}\right)\cdot\left(x_2 + \frac{l}{5}\right) + M_D - F\cdot x_2$$

$$M_o^{III} = -F_B\cdot x_3 = -\left(\frac{3}{5}F - \frac{M_D}{l}\right)\cdot x_3$$

Parciální derivace ohybových momentů podle doplňkového momentu M_D:

$$\frac{\partial M_o^I}{\partial M_D} = -\frac{x_1}{l} \qquad \frac{\partial M_o^{II}}{\partial M_D} = -\frac{x_2}{l} + \frac{4}{5} \qquad \frac{\partial M_o^{III}}{\partial M_D} = \frac{x_3}{l}$$

Určení velikosti úhlu natočení pomocí Castiglianovy věty:

$$\varphi = \frac{\partial W}{\partial M_D} = \int_0^{l/5}\frac{M_o^I}{EJ}\cdot\frac{\partial M_o^I}{\partial M_D}dx_1 + \int_0^{3l/5}\frac{M_o^{II}}{EJ}\cdot\frac{\partial M_o^{II}}{\partial M_D}dx_2 + \int_0^{l/5}\frac{M_o^{III}}{EJ}\cdot\frac{\partial M_o^{III}}{\partial M_D}dx_3 = \frac{l^2F}{250EJ} = 0{,}00019\,rad = 0{,}011°$$

Příklad 5

U prutu podle obrázku určete bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti.

$M_1 = 800$ Nm
$M_2 = 500$ Nm
B = 40 mm
H = 60 mm
l = 1 m
E = 200 GPa
$\sigma_k = 250$ MPa

Rozbor:
Prut je zatížený silovou dvojicí, jejíž nositelka není totožná se žádnou z hlavních centrálních os, ale prochází těžištěm příčného průřezu. Hlavní centrální souřadnicový systém příčného průřezu prochází těžištěm a osa 1 je

totožná s osou y a osa 2 je totožná s osou z. Souřadnice momentu silové dvojice ve směru osy y ≡ 1 je M_1 a ve směru osy z ≡ 2 je M_2.

Vztah pro velikost maximálního normálového napětí v příčném průřezu u prostorového ohybu je:

$$\sigma_{ext} = \frac{M_{oy}}{J_y} \cdot z_{max} - \frac{M_{oz}}{J_z} \cdot y_{max}$$

Souřadnice z_{max} a y_{max} jsou souřadnice bodů příčného průřezu s největší vzdáleností od neutrální osy.

Uložení prutu je stejné jako u příkladu 1.
Proto *μ=3, ν=3, s=0 – uložení je staticky určité;*

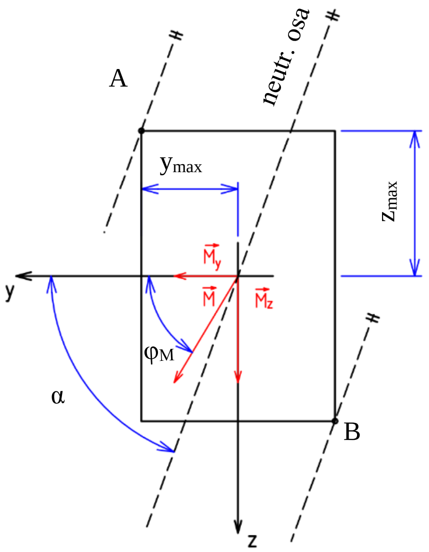
VVÚ: N = 0, M_k = 0, T = 0
Jedinou nenulovou složkou je ohybový moment, jehož souřadnice jsou:

$$M_{oy} = -M_1 \qquad\qquad M_{oz} = -M_2$$

Vztahy pro osové kvadratické momenty obdélníkového příčného průřezu k osám y a z:

$$J_z = \frac{HB^3}{12} \qquad\qquad J_y = \frac{BH^3}{12}$$

Nyní určíme body příčného průřezu s největší vzdálenosti od neutrální osy. Nositelka ohybového momentu svírá s osou y úhel φ_M.



Poloha neutrální osy je určena úhlem α, který svírá nositelka neutrální osy s osou y. Vztah pro polohu neutrální osy:

$$\alpha = arctg\left(\frac{M_{oz}}{M_{oy}} \cdot \frac{J_y}{J_z}\right) = 54,6°$$

V případě zadaného příčného průřezu jsou body A a B nejvzdálenějšími body od neutrální osy viz obrázek *(obrázek je pouze ilustrační, je třeba si uvědomit, že u tohoto příkladu jsou M_{oy}, M_{oz} i M záporné).*

Průběh napětí je lineární viz vztah pro σ_{ext}. V bodě A je maximální tahové napětí a v bodě B maximální tlakové napětí. Pokud materiál má stejnou hodnotu pro mez kluzu v tahu i v tlaku, potom bezpečnost vzhledem k MSP bude v obou bodech stejná. Souřadnice bodu A jsou y_{max} = B/2 a z_{max} = -H/2.

Dosazením souřadnic bodu A do vztahu pro extrémní napětí v příčném průřezu dostáváme:

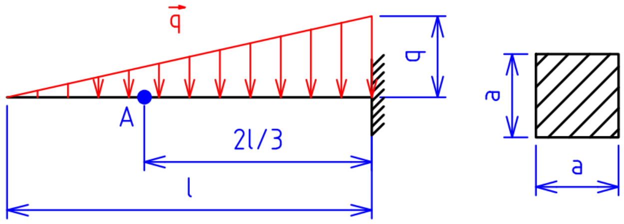
$$\sigma_{ext,A} = \frac{12(-M_1)}{BH^3} \cdot \left(-\frac{H}{2}\right) - \frac{12(-M_2)}{HB^3} \cdot \frac{B}{2} = \frac{12 \cdot (-800000)}{40 \cdot 60^3} \cdot \left(-\frac{60}{2}\right) - \frac{12 \cdot (-500000)}{60 \cdot 40^3} \cdot \frac{40}{2} = 64,6\,MPa$$

Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti

$$k_k = \frac{\sigma_k}{\sigma_{ext}} = 3,87$$

Příklad 6

Určete posuv a natočení v bodě A.

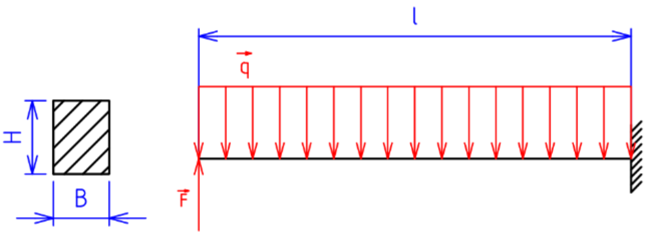


l = 1 m
q = 0,3 kN/m
a = 20 mm
E = 200 GPa
σ_k = 250 MPa

(w_A = 2,19 mm; φ_A = -0,0046 rad, k_k = 6,6)

Příklad 7

Určete místo maximálního průhybu a jeho velikost.

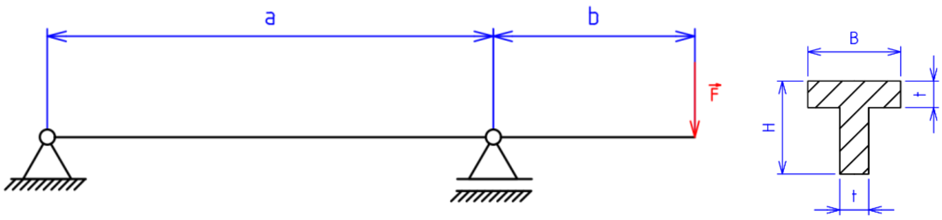


l = 1 m
q = 0,8 kN/m
F = 300 N
H = 20 mm
B = 15 mm
E = 200 GPa
σ_k = 300 MPa

(x_{max} = 0,42 m; w_{max} = 0,0022 m, k_k = 5,3)

Příklad 8

Určete průhyb a natočení volného konce prutu.

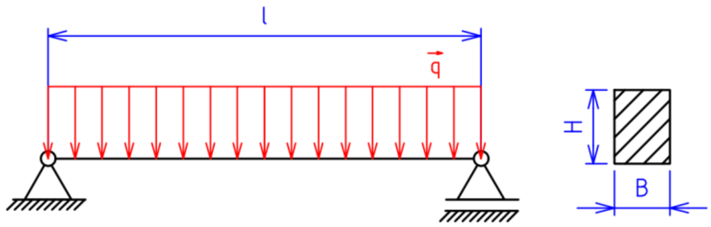


a = 1000 mm
b = 400 mm
F = 600 N
B = 30 mm
H = 30 mm
t = 10 mm

E = 200 GPa
(w = 0,0062 m; φ = 0,0177 rad)

Příklad 9

Určete minimální rozměry obdélníkového příčného průřezu prutu dle obrázku, jestliže H = 2B tak, aby maximální průhyb prutu byl 5 mm.



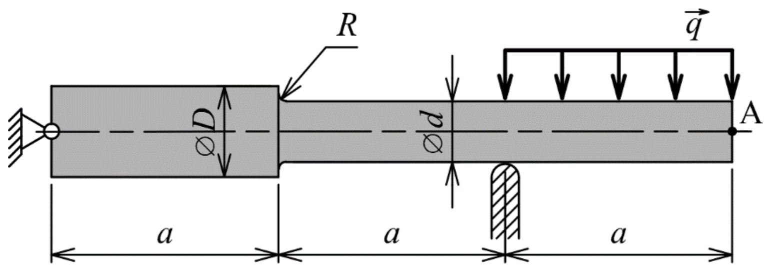
l = 1 m
q = 0,3 kN/m
E = 200 GPa
σ_k = 300 MPa

(B_{min} = 8,74 mm, k_k = 3,5)

Domácí úkol:

DÚ 8

Pro těleso na obrázku určete bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti a vypočítejte průhyb v místě A.



$$q = 5,5 \text{ N/mm}$$
$$a = 1 \text{ m}$$
$$D = 120 \text{ mm}$$
$$d = 80 \text{ mm}$$
$$R = 10 \text{ mm}$$
$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$
$$\sigma_K = 400 \text{ MPa}$$