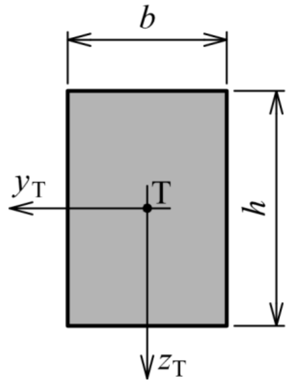
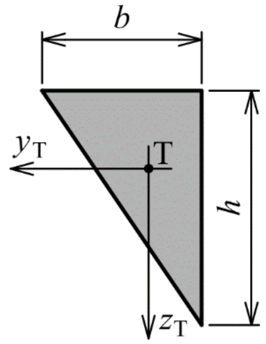
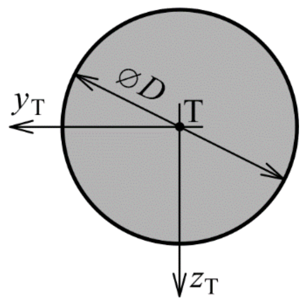
3. cvičení Pružnost a pevnost I

Kvadratické momenty příčného průřezu

Tab. 1 Centrální kvadratické momenty základních tvarů příčných průřezů

		
$J_{y_T} = \dfrac{bh^3}{12}$ $J_{z_T} = \dfrac{hb^3}{12}$ $J_{y_T z_T} = 0$	$J_{y_T} = \dfrac{bh^3}{36}$ $J_{z_T} = \dfrac{hb^3}{36}$ $J_{y_T z_T} = -\dfrac{h^2 b^2}{72}$	$J_{y_T} = \dfrac{\pi D^4}{64}$ $J_{z_T} = \dfrac{\pi D^4}{64}$ $J_{y_T z_T} = 0$

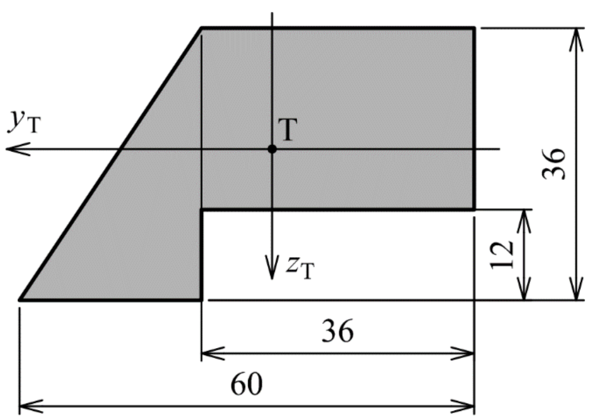
Příklad 1

Pro příčný průřez na obrázku:

(a) Vypočítejte centrální kvadratické momenty J_{y_T}, J_{z_T}, $J_{y_T z_T}$.

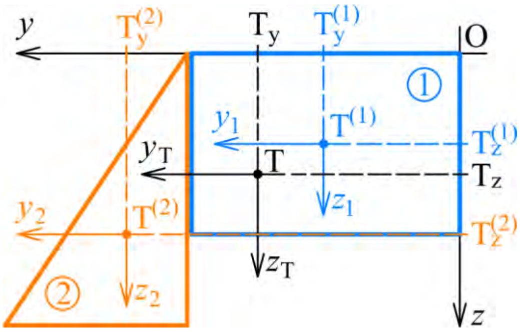
(b) Určete výpočtem polohu hlavních centrálních os a vypočítejte hlavní centrální kvadratické momenty J_1, J_2.

(c) Proveďte grafické řešení bodu (b) s využitím Mohrovy kružnice.



Řešení (a)

Příčný průřez se skládá z obdélníka (1) a trojúhelníka (2). Centrální kvadratické momenty celého průřezu k osám (y_T, z_T) vypočítáme jako součet kvadratických momentů obdélníka a trojúhelníka k osám (y_T, z_T).



Nejprve s využitím rovnic v Tab. 1 vypočítáme kvadratické momenty obdélníka k osám (y_1, z_1) a trojúhelníka k osám (y_2, z_2).

$$J_{y_1}^{(1)} = \frac{36 \cdot 24^3}{12} \doteq 41{,}5 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 \qquad J_{y_2}^{(2)} = \frac{24 \cdot 36^3}{36} \doteq 31{,}1 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_{z_1}^{(1)} = \frac{24 \cdot 36^3}{12} \doteq 93{,}3 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 \qquad J_{z_2}^{(2)} = \frac{36 \cdot 24^3}{36} \doteq 13{,}8 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_1 z_1}^{(1)} = 0 \text{ mm}^4 \qquad J_{y_2 z_2}^{(2)} = \frac{24^2 \cdot 36^2}{72} \doteq 10{,}4 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

Horní index u symbolu J označuje příslušnou podoblast (obdélník nebo trojúhelník), dolní index identifikuje souřadnicový systém, k němuž kvadratické momenty určujeme. U veličiny $J_{y_2 z_2}^{(2)}$ chybí v porovnání s Tab. 1 záporné znaménko. Důvodem je skutečnost, že trojúhelník (2) je ve srovnání s trojúhelníkem v Tab. 1 zrcadlově převrácený okolo osy y_2. Z vlastností kvadratických momentů vyplývá, že tato změna má za následek změnu znaménka deviačního momentu (osové kvadratické momenty zůstávají nezměněny).

Vypočítané kvadratické momenty nyní pomocí Steinerovy věty přepočítáme vzhledem k souřadnicovému systému (y_T, z_T). K tomu potřebujeme znát souřadnice těžišť $T^{(1)}, T^{(2)}, T$, plochu obdélníka $S^{(1)}$ a plochu trojúhelníka $S^{(2)}$.

$$T_y^{(1)} = 18 \text{ mm} \qquad T_y^{(2)} = 44 \text{ mm} \qquad T_y = \frac{S^{(1)} T_y^{(1)} + S^{(2)} T_y^{(2)}}{S^{(1)} + S^{(2)}} \doteq 26{,}7 \text{ mm}$$

$$T_z^{(1)} = 12 \text{ mm} \qquad T_z^{(2)} = 24 \text{ mm} \qquad T_z = \frac{S^{(1)} T_z^{(1)} + S^{(2)} T_z^{(2)}}{S^{(1)} + S^{(2)}} = 16 \text{ mm}$$

$$S^{(1)} = 24 \cdot 36 = 864 \text{ mm}^2 \qquad S^{(2)} = \frac{24 \cdot 36}{2} = 432 \text{ mm}^2$$

Dosazením do Steinerovy věty získáme kvadratické momenty obdélníka a trojúhelníka vzhledem k souřadnicovému systému (y_T, z_T).

$$J_{y_T}^{(1)} = J_{y_1}^{(1)} + S^{(1)}\left(T_z - T_z^{(1)}\right)^2 \doteq 55{,}3\cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_{z_T}^{(1)} = J_{z_1}^{(1)} + S^{(1)}\left(T_y - T_y^{(1)}\right)^2 \doteq 158\cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_T z_T}^{(1)} = J_{y_1 z_1}^{(1)} + S^{(1)}\left(T_y - T_y^{(1)}\right)\left(T_z - T_z^{(1)}\right) \doteq 30{,}0\cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_T}^{(2)} = J_{y_2}^{(2)} + S^{(2)}\left(T_z - T_z^{(2)}\right)^2 \doteq 58{,}8\cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_{z_T}^{(2)} = J_{z_2}^{(2)} + S^{(2)}\left(T_y - T_y^{(2)}\right)^2 \doteq 144\cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_T z_T}^{(2)} = J_{y_2 z_2}^{(2)} + S^{(2)}\left(T_y - T_y^{(2)}\right)\left(T_z - T_z^{(2)}\right) \doteq 70{,}3\cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

Vzhledem k tomu, že kvadratické momenty obou podoblastí máme nyní vyjádřeny ke stejnému souřadnicovému systému (y_T, z_T), můžeme je sečíst, čímž získáme centrální kvadratické momenty celého průřezu k osám (y_T, z_T).

$$J_{y_T} = J_{y_T}^{(1)} + J_{y_T}^{(2)} \doteq 114\cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_{z_T} = J_{z_T}^{(1)} + J_{z_T}^{(2)} \doteq 302\cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

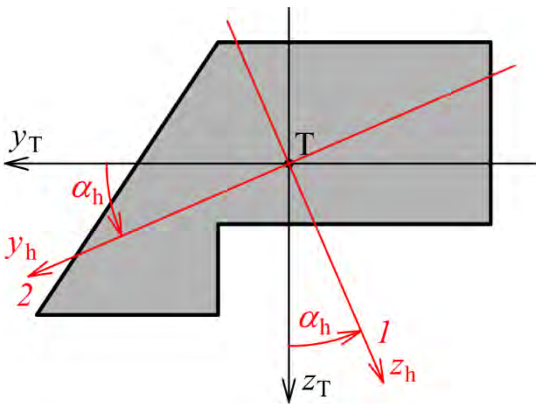
$$J_{y_T z_T} = J_{y_T z_T}^{(1)} + J_{y_T z_T}^{(2)} \doteq 100\cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

Řešení (b)

Poloha hlavního centrálního souřadnicového systému (y_h, z_h) je určena úhlem α_h :

$$\alpha_h = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{-2J_{y_T z_T}}{J_{y_T} - J_{z_T}}\right) \doteq 0{,}408 \text{ rad} \doteq 23{,}4°.$$

Použitý vztah byl odvozen pro úhel natočení α orientovaný proti směru hodin. Jestliže tedy úhel α_h vyšel kladný, znamená to, že souřadnicový systém (y_T, z_T) je nutné pootočit v tomto směru (viz obrázek). (Pozn.: Pokud by úhel vyšel záporný, otáčeli bychom po směru hodin.)

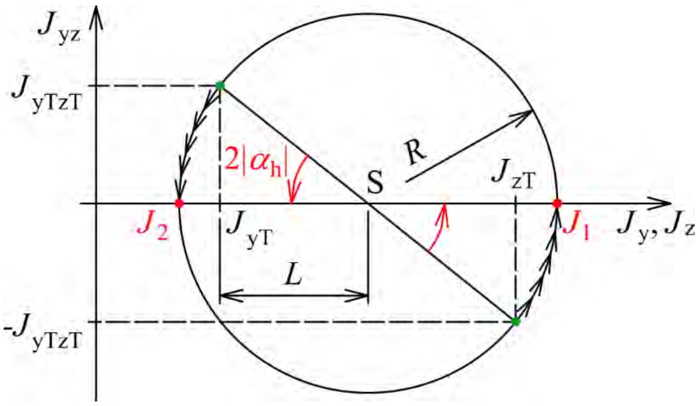


Osové kvadratické momenty vzhledem k pootočeným osám označíme dočasně symboly J_{y_h} a J_{z_h}, po vyčíslení označíme větší z momentů J_1 a menší J_2, odpovídající osy potom číslicemi *1* a *2*, tyto osy jsou hlavními centrálními osami příčného průřezu.

$$J_{y_h} = J_{y_T}\cos^2\alpha_h + J_{z_T}\sin^2\alpha_h - J_{y_Tz_T}\sin(2\alpha_h) \doteq 71\cdot10^3\ \mathrm{mm}^4 = J_2$$
$$J_{z_h} = J_{y_T}\sin^2\alpha_h + J_{z_T}\cos^2\alpha_h + J_{y_Tz_T}\sin(2\alpha_h) \doteq 345\cdot10^3\ \mathrm{mm}^4 = J_1$$

Řešení (c)

Do Mohrovy roviny definované vodorovnou osou, na kterou vynášíme osové kvadratické momenty, a svislou osou, na kterou vynášíme deviační momenty, zakreslíme body $(J_{y_T}, J_{y_Tz_T})$ a $(J_{z_T}, -J_{y_Tz_T})$ (v obrázku zeleně). Tyto body jsou dva známé body Mohrovy kružnice. Dále zakreslíme střed kružnice S, který leží v průsečíku spojnice obou bodů s vodorovnou osou, a následně sestrojíme celou kružnici. Hledaný úhel α_h a hlavní centrální kvadratické momenty J_1, J_2 jsou znázorněny v obrázku (pozor, úhel je v Mohrově kružnici dvojnásobný!). K jejich výpočtu nám nyní postačí základní znalosti z analytické geometrie (Pythagorova věta, funkce tangens).



$$S = \frac{J_{y_T} + J_{z_T}}{2}$$
$$L = \frac{J_{z_T} - J_{y_T}}{2}$$
$$R = \sqrt{L^2 + J_{y_Tz_T}^2} = \sqrt{\left(\frac{J_{z_T} - J_{y_T}}{2}\right)^2 + J_{y_Tz_T}^2}$$
$$J_1 = S + R \doteq 345\cdot10^3\ \mathrm{mm}^4$$
$$J_2 = S - R \doteq 71\cdot10^3\ \mathrm{mm}^4$$

$$\mathrm{tg}(2|\alpha_h|) = \frac{|J_{y_Tz_T}|}{L} = \frac{2J_{y_Tz_T}}{J_{z_T} - J_{y_T}}$$
$$2|\alpha_h| = \mathrm{arctg}\left(\frac{2J_{y_Tz_T}}{J_{z_T} - J_{y_T}}\right)$$
$$|\alpha_h| = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{2J_{y_Tz_T}}{J_{z_T} - J_{y_T}}\right) \doteq 23{,}4°$$

Souřadnicový systém (y_T, z_T) je potřeba pootočit o $23{,}4°$, a to <u>ve stejném směru, v jakém ukazují šipky v Mohrově diagramu</u>, což v tomto případě znamená proti směru hodin. Výsledkem jsou opět osy 1 a 2 zakreslené v řešení bodu (b).

Pozn.: Výpočet pomocí Mohrovy kružnice má tu výhodu, že není nutné pamatovat si složité rovnice použité v řešení bodu (b). Je však potřeba si uvědomit, že při výpočtu úhlu natočení využíváme geometrických vlastností pravoúhlého trojúhelníka. Délky stran trojúhelníka a jeho vnitřní úhly jsou vždy kladná čísla, a proto je nutné do vyjádření funkce tangens dosadit deviační moment $J_{y_Tz_T}$ a úhel α_h v absolutní hodnotě (tak jak je uvedeno v rovnici výše).

Výsledný úhel nám potom vyjde vždy kladný a o směru pootočení souřadnicového systému proto nelze rozhodnout podle znaménka. Směr natočení je v tomto případě dán směrem vyznačeným v Mohrově diagramu. Poloha hlavního souřadnicového systému je tedy určena buď velikostí úhlu a znaménkem (případ (b)), nebo ekvivalentně velikostí úhlu a směrem vyznačeným v Mohrově diagramu (případ (c)).

■

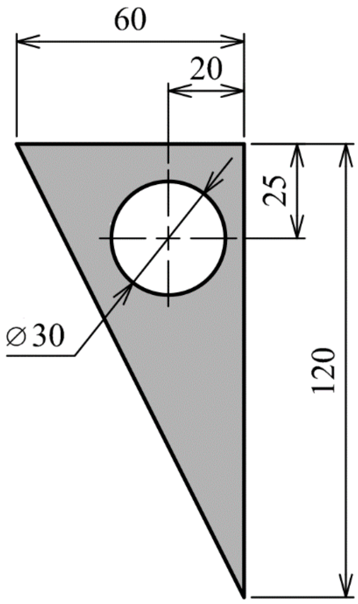
Příklad 2

Pro příčný průřez na obrázku:

(a) Vypočítejte centrální kvadratické momenty $J_{y_T}, J_{z_T}, J_{y_T z_T}$.

(b) Určete výpočtem polohu hlavních centrálních os a vypočítejte hlavní centrální kvadratické momenty J_1, J_2.

(c) Proveďte grafické řešení bodu (b) s využitím Mohrovy kružnice.



Řešení (a)

Příčný průřez vznikne vyříznutím kruhového otvoru (2) do pravoúhlého trojúhelníka (1). Postup řešení je obdobný jako u příkladu 1. Nejprve vypočítáme kvadratické momenty trojúhelníka k osám (y_1, z_1) a kruhu k osám (y_2, z_2) podle Tab. 1.

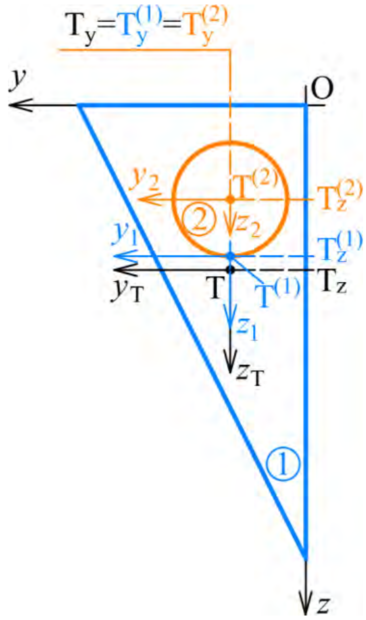
$$J_{y_1}^{(1)} = \frac{60 \cdot 120^3}{36} \doteq 288 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$J_{z_1}^{(1)} = \frac{120 \cdot 60^3}{36} \doteq 720 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_1 z_1}^{(1)} = -\frac{120^2 \cdot 60^2}{72} \doteq -720 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_2}^{(2)} = J_{z_2}^{(2)} = \frac{\pi \cdot 30^4}{64} \doteq 39{,}8 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_2 z_2}^{(2)} = 0 \text{ mm}^4$$



Dále určíme souřadnice těžišť a plochy obou podoblastí. Vzhledem k tomu, že těžiště kruhu a trojúhelníka leží na stejné souřadnici y, bude na této souřadnici ležet také těžiště celého průřezu. Dopočítat je tedy nutné pouze souřadnici T_z.

$$S^{(1)} = (120 \cdot 60)/2 = 3600 \text{ mm}^2$$
$$S^{(2)} = \left(\pi \cdot 30^2\right)/4 \doteq 707 \text{ mm}^2$$

$$T_y^{(1)} = T_y^{(2)} = T_y = 20 \text{ mm}$$
$$T_z^{(1)} = 40 \text{ mm}$$
$$T_z^{(2)} = 25 \text{ mm}$$
$$T_z = \frac{S^{(1)}T_z^{(1)} - S^{(2)}T_z^{(2)}}{S^{(1)} - S^{(2)}} \doteq 43,7 \text{ mm}$$

Dosazením do Steinerovy věty získáme kvadratické momenty obdélníka a trojúhelníka vzhledem k souřadnicovému systému (y_T, z_T). Jelikož $T_y^{(1)} = T_y^{(2)} = T_y$, není nutné přepočítávat momenty k ose z a deviační momenty (ověřte dosazením do rovnic!).

$$J_{y_T}^{(1)} = J_{y_1}^{(1)} + S^{(1)}\left(T_z - T_z^{(1)}\right)^2 \doteq 293 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$
$$J_{z_T}^{(1)} = J_{z_1}^{(1)} \doteq 720 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$
$$J_{y_T z_T}^{(1)} = J_{y_1 z_1}^{(1)} \doteq -720 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$J_{y_T}^{(2)} = J_{y_2}^{(2)} + S^{(2)}\left(T_z - T_z^{(2)}\right)^2 \doteq 287 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$
$$J_{z_T}^{(2)} = J_{z_2}^{(2)} \doteq 39,8 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$
$$J_{y_T z_T}^{(2)} = J_{y_2 z_2}^{(2)} = 0 \text{ mm}^4$$

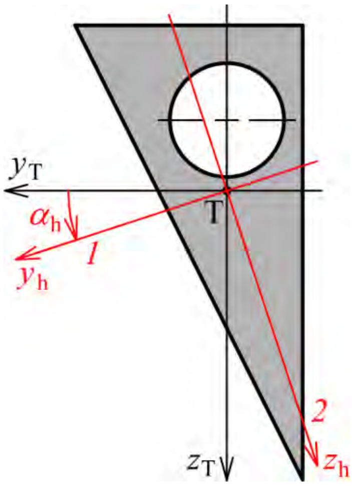
Kvadratické momenty obou oblastí máme nyní vztaženy ke stejnému souřadnicovému systému, můžeme je tedy odečíst, čímž získáme centrální kvadratické momenty zadaného průřezu.

$$J_{y_T} = J_{y_T}^{(1)} - J_{y_T}^{(2)} \doteq 264 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$
$$J_{z_T} = J_{z_T}^{(1)} - J_{z_T}^{(2)} \doteq 680 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$
$$J_{y_T z_T} = J_{y_T z_T}^{(1)} - J_{y_T z_T}^{(2)} \doteq -720 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

Řešení (b)

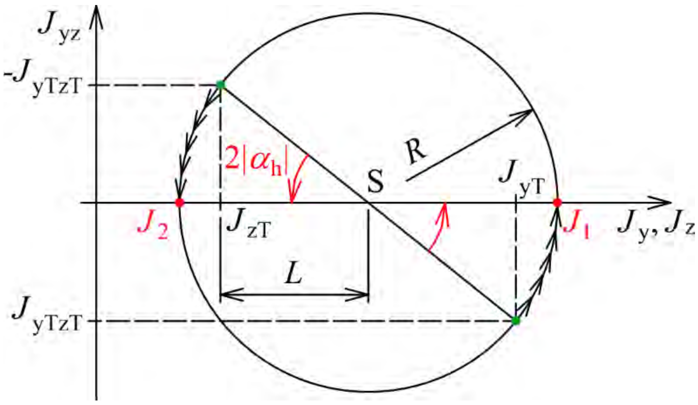
$$\alpha_h = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{-2J_{y_T z_T}}{J_{y_T} - J_{z_T}}\right) \doteq 0,317 \text{ rad} \doteq 18,2° > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{pootočení proti směru hodin}$$

$$J_{y_h} = J_{y_T}\cos^2\alpha_h + J_{z_T}\sin^2\alpha_h - J_{y_T z_T}\sin(2\alpha_h) \doteq 288 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 = J_1$$
$$J_{z_h} = J_{y_T}\sin^2\alpha_h + J_{z_T}\cos^2\alpha_h + J_{y_T z_T}\sin(2\alpha_h) \doteq 444 \cdot 10^3 \text{ mm}^4 = J_2$$



Řešení (c)

Do Mohrovy roviny vyneseme potřebné veličiny, sestrojíme Mohrovu kružnici a postupujeme stejným způsobem jako v příkladu 1.



$$S = \frac{J_{y_T} + J_{z_T}}{2}$$

$$L = \frac{J_{y_T} - J_{z_T}}{2}$$

$$R = \sqrt{L^2 + J_{y_T z_T}^2} = \sqrt{\left(\frac{J_{y_T} - J_{z_T}}{2}\right)^2 + J_{y_T z_T}^2}$$

$$J_1 = S + R \doteq 288 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$J_2 = S - R \doteq 444 \cdot 10^3 \text{ mm}^4$$

$$\operatorname{tg}(2|\alpha_h|) = \frac{|J_{y_T z_T}|}{L} = \frac{2|J_{y_T z_T}|}{J_{y_T} - J_{z_T}}$$

$$2|\alpha_h| = \operatorname{arctg}\left(\frac{2|J_{y_T z_T}|}{J_{y_T} - J_{z_T}}\right)$$

$$|\alpha_h| = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2|J_{y_T z_T}|}{J_{y_T} - J_{z_T}}\right) \doteq 18{,}2°$$

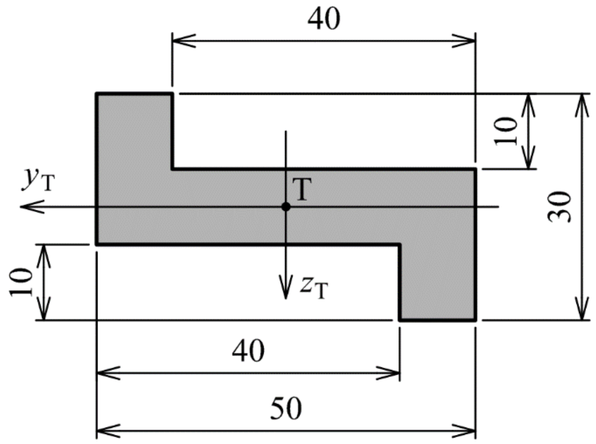
Vypočítaný úhel vynášíme ve stejném směru, v jakém ukazují šipky v Mohrově kružnici, tj. opět proti směru hodin. Získáváme tedy stejné osy, jaké ukazuje obrázek v bodu (b), obě řešení jsou tedy v souladu.

■

Příklad 3

Pro příčný průřez byly určeny centrální kvadratické momenty $J_{y_T} = 26 \cdot 10^3\ \mathrm{mm}^4$, $J_{z_T} = 186 \cdot 10^3\ \mathrm{mm}^4$, $J_{y_T z_T} = -40 \cdot 10^3\ \mathrm{mm}^4$. Určete polohu hlavních centrálních os a vypočítejte hlavní centrální kvadratické momenty J_1, J_2. Úlohu řešte:

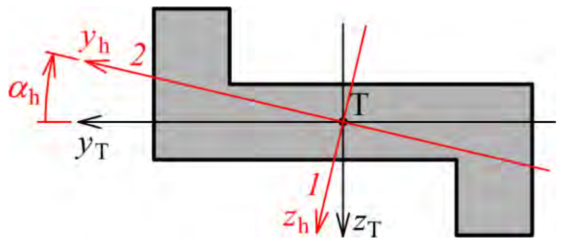
(a) výpočtem pomocí analytických vztahů,
(b) graficky pomocí Mohrovy kružnice.



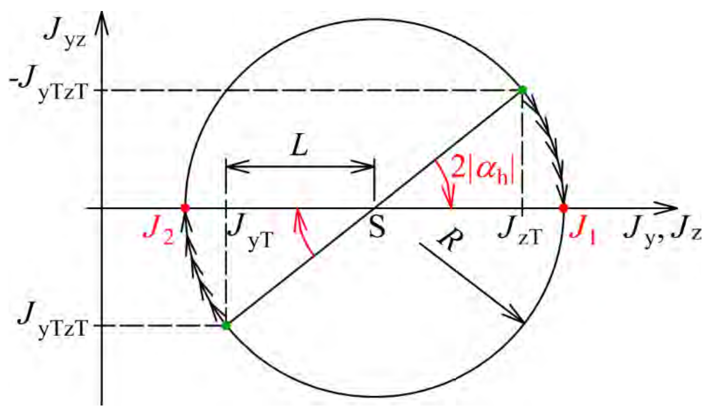
Řešení (a)

$$\alpha_h = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{-2J_{y_T z_T}}{J_{y_T} - J_{z_T}}\right) \doteq -13{,}3° < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{pootočení po směru hodin}$$

$$J_{y_h} = J_{y_T}\cos^2\alpha_h + J_{z_T}\sin^2\alpha_h - J_{y_T z_T}\sin(2\alpha_h) \doteq 16 \cdot 10^3\ \mathrm{mm}^4 = J_2$$
$$J_{z_h} = J_{y_T}\sin^2\alpha_h + J_{z_T}\cos^2\alpha_h + J_{y_T z_T}\sin(2\alpha_h) \doteq 195 \cdot 10^3\ \mathrm{mm}^4 = J_1$$



Řešení (b)



$$S = \frac{J_{y_T} + J_{z_T}}{2}$$

$$L = \frac{J_{z_T} - J_{y_T}}{2}$$

$$R = \sqrt{L^2 + J_{y_T z_T}^2} = \sqrt{\left(\frac{J_{z_T} - J_{y_T}}{2}\right)^2 + J_{y_T z_T}^2}$$

$$J_1 = S + R \doteq 195 \cdot 10^3 \ \mathrm{mm}^4$$

$$J_2 = S - R \doteq 16 \cdot 10^3 \ \mathrm{mm}^4$$

$$\tan(2|\alpha_\mathrm{h}|) = \frac{|J_{y_T z_T}|}{L} = \frac{2|J_{y_T z_T}|}{J_{z_T} - J_{y_T}}$$

$$2|\alpha_\mathrm{h}| = \mathrm{arctg}\left(\frac{2|J_{y_T z_T}|}{J_{z_T} - J_{y_T}}\right)$$

$$|\alpha_\mathrm{h}| = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{2|J_{y_T z_T}|}{J_{z_T} - J_{y_T}}\right) \doteq 13{,}3°$$

Souřadnicový systém je nutné pootočit ve směru šipek v Mohrově kružnici, tj. ve směru hodin. Získáváme tedy stejné osy 1 a 2 jako v bodu (a), přestože úhel α_h vyšel s opačným znaménkem.

■

Příklad 4 - DÚ

Pro příčný průřez na obrázku:

(a) Vypočítejte centrální kvadratické momenty J_{y_T}, J_{z_T}, $J_{y_T z_T}$.

(b) Určete výpočtem polohu hlavních centrálních os a vypočítejte hlavní centrální kvadratické momenty J_1, J_2.

(c) Proveďte grafické řešení bodu (b) s využitím Mohrovy kružnice.