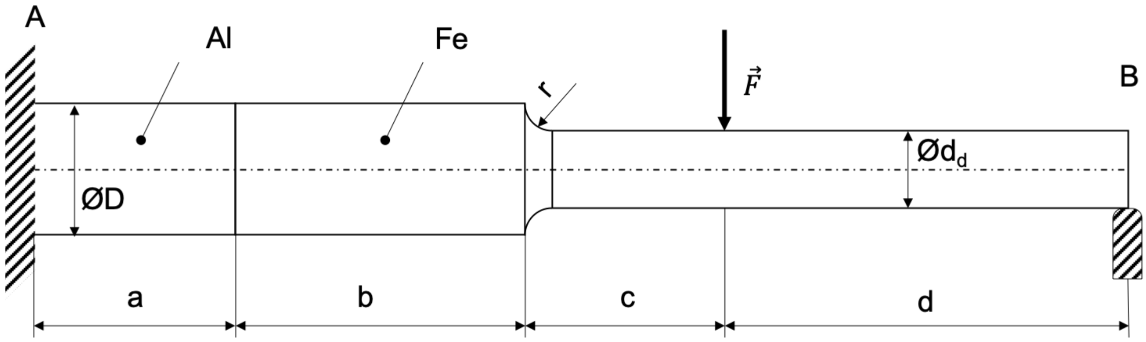
9. cvičení Pružnost a pevnost 1

Namáhání na ohyb - staticky neurčitě uloženého prutu

Řešený příklad 1

U prutu (hřídele) dle obrázku vyrobeného z hliníkové slitiny (a) a oceli (b, c, d) stanovte bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti. Dále stanovte průhyb v působišti síly F. Vlastní tíhu neuvažujte.



geometrické parametry

a	30	mm
b	40	mm
c	20	mm
d	50	mm
D	12	mm
d_d	10	mm
r	2	mm

materiálové parametry

E_{Fe}	200	GPa
E_{Al}	69	GPa
μ_{Fe}	0,3	
μ_{Al}	0,3	
σ_{KFe}	500	MPa
σ_{KAl}	300	MPa

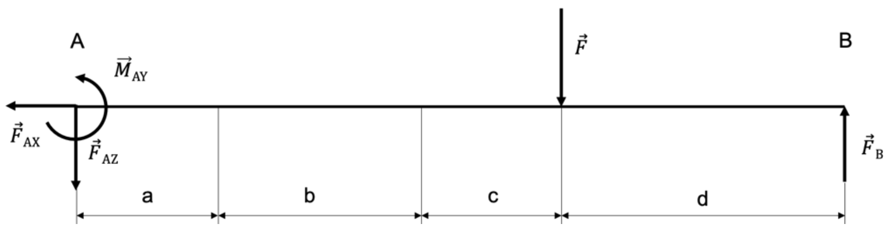
silové parametry

F	1500	N

Rozbor

Rovinná úloha, přímý vázaný prut, zatížený silově.

Úplné uvolnění



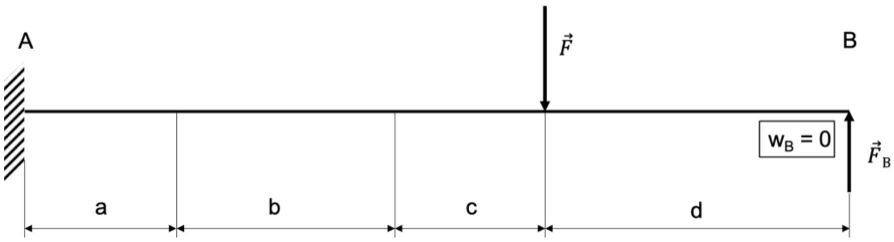
Statický rozbor

$\mu = 4$

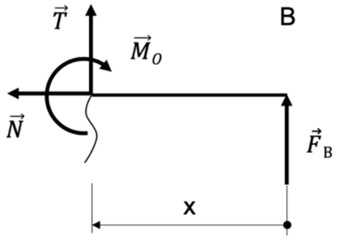
$\nu = 3$ (obecná rovinná silová soustava)

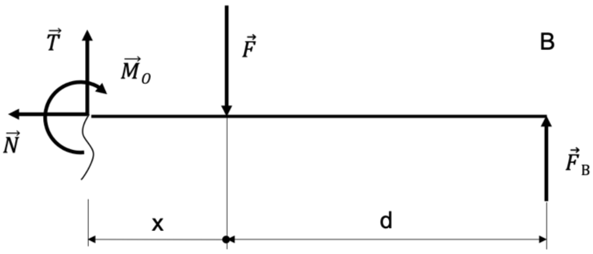
$s = \mu - \nu = 1$ (úloha je 1x staticky neurčitá)

Částečné uvolnění



VVÚ:





$x \in (0; d)$

$$N^I(x) = 0$$
$$T^I(x) = -F_\mathrm{B}$$
$$M_O^I(x) = F_\mathrm{B}x$$

$x \in (0; c)$

$$N^{II}(x) = 0$$
$$T^{II}(x) = -F_\mathrm{B} + F$$
$$M_O^{II}(x) = F_\mathrm{B}(x + d) - Fx$$

$x \in (0; b)$

$$N^{III}(x) = 0$$
$$T^{III}(x) = -F_\mathrm{B} + F$$
$$M_O^{III}(x) = F_\mathrm{B}(x + c + d) - F(x + c)$$

$x \in (0; a)$

$$N^{IV}(x) = 0$$
$$T^{IV}(x) = -F_\mathrm{B} + F$$
$$M_O^{IV}(x) = F_\mathrm{B}(x + b + c + d) - F(x + b + c)$$

Vyjádření deformační podmínky a výpočet stykových sil

Prut je zatížený kombinací smyku a ohybu. Pro pruty s délkou střednice řádově větší než je největší průřez platí, že pro vyjádření deformačního podmínek je podstatný pouze ohybový moment M_O.

$$w_B = 0 = \frac{\partial W}{\partial F_B} = \sum_{i=I}^{IV} \int_{\gamma_i} \frac{M_O^i}{E_i J_y^i} \frac{\partial M_O^i}{\partial F_B} \mathrm{d}x_i$$

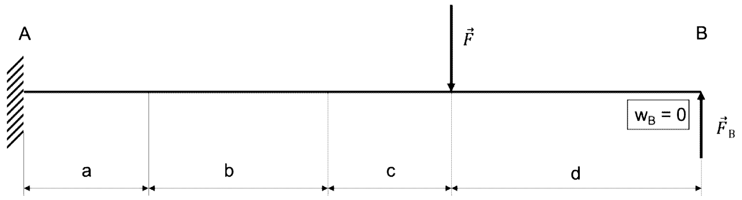
□

$$0 = \int_0^d \frac{M_O^I}{E_{Fe} J_y^{d_d}} \frac{\partial M_O^I}{\partial F_B} \mathrm{d}x + \int_0^c \frac{M_O^{II}}{E_{Fe} J_y^{d_d}} \frac{\partial M_O^{II}}{\partial F_B} \mathrm{d}x + \int_0^b \frac{M_O^{III}}{E_{Fe} J_y^D} \frac{\partial M_O^{III}}{\partial F_B} \mathrm{d}x + \int_0^a \frac{M_O^{IV}}{E_{Al} J_y^D} \frac{\partial M_O^{IV}}{\partial F_B} \mathrm{d}x$$

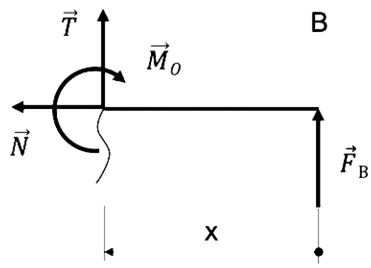
Řešením rovnice určíme stykovou sílu ve vazbě B

$$F_\mathrm{B} = 774{,}5\ \mathrm{N}.$$

Poznámka k volbě intervalů



b) VVÚ:



$x \in (0; d)$
$M_{oI}(x) = F_B x$

$x \in (d; d + c + b + a)$
$M_{oII}(x) = F_B x - F(x - d)$

b) deformační podmínka:

$$w_B = \frac{\partial W}{\partial F_B} = \int_0^d \frac{M_{oI}}{E_{Fe} J_{d_d}} \cdot x\mathrm{d}x + \int_d^{d+c} \frac{M_{oII}}{E_{Fe} J_{d_d}} \cdot x\mathrm{d}x + \int_{d+c}^{d+c+b} \frac{M_{oII}}{E_{Fe} J_D} \cdot x\mathrm{d}x + \int_{d+c+b}^{d+c+b+a} \frac{M_{oII}}{E_{Al} J_D} \cdot x\mathrm{d}x = 0$$

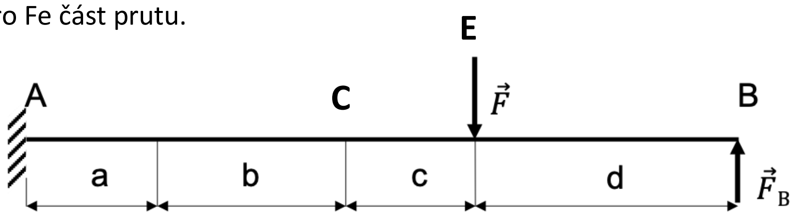
Kontrola mezního stavu pružnosti

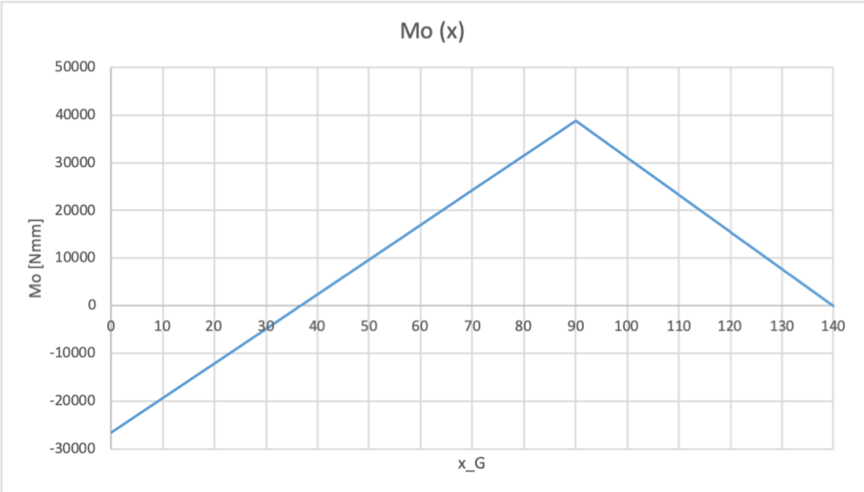
Je třeba určit nebezpečná řezy, tj. tam kde je:

(i) Maximální M_O pro Al část prutu,

(ii) Průřez s koncentrací napětí,

(iii) Maximální M_O pro Fe část prutu.





(i) Maximální ohybový moment pro Al část hřídele se nachází ve vetknutí M_{OA} = -26 573 Nmm.

(ii) Ohybový moment při průřezu s koncentrací napětí M_{OC} = 24 213 Nmm.

(iii) Maximální M_O pro Fe část prutu se nachází v působišti síly, M_{OE} = 38 724 Nmm.

Nejdříve určíme moduly průřezu v ohybu (hodnoty extrémních napětí jsou na vnějším povrchu prutu)

$$W_O^D = \frac{J_y^D}{h_{ex}} = \frac{\pi D^3}{32} = 170 \text{ mm}^3$$

$$W_O^d = \frac{J_y^d}{h_{ex}} = \frac{\pi d^3}{32} = 98 \text{ mm}^3$$

Ad (i) Kontrola MS pružnosti pro Al část prutu v blízkosti vetknutí (místo A)

Extrémní ohybové napětí je

$$\sigma_{ext,A} = \frac{M_{O,A}}{W_O^D} = \frac{26\,573}{170} = 157 \text{ MPa}$$

Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti je

$$k_{k,A} = \frac{\sigma_{KAl}}{\sigma_{ext,A}} = \frac{300}{157} = 1{,}92$$

Ad (ii) Kontrola MS pružnosti v místě koncentrace napětí (místo C)

Nominální napětí v ohybu spočítáme

$$\sigma_{nom} = \frac{M_{O,C}}{W_O^d} = \frac{24\,213}{98} = 247 \text{ MPa}$$

Z grafu určíme součinitel koncentrace napětí α [1]

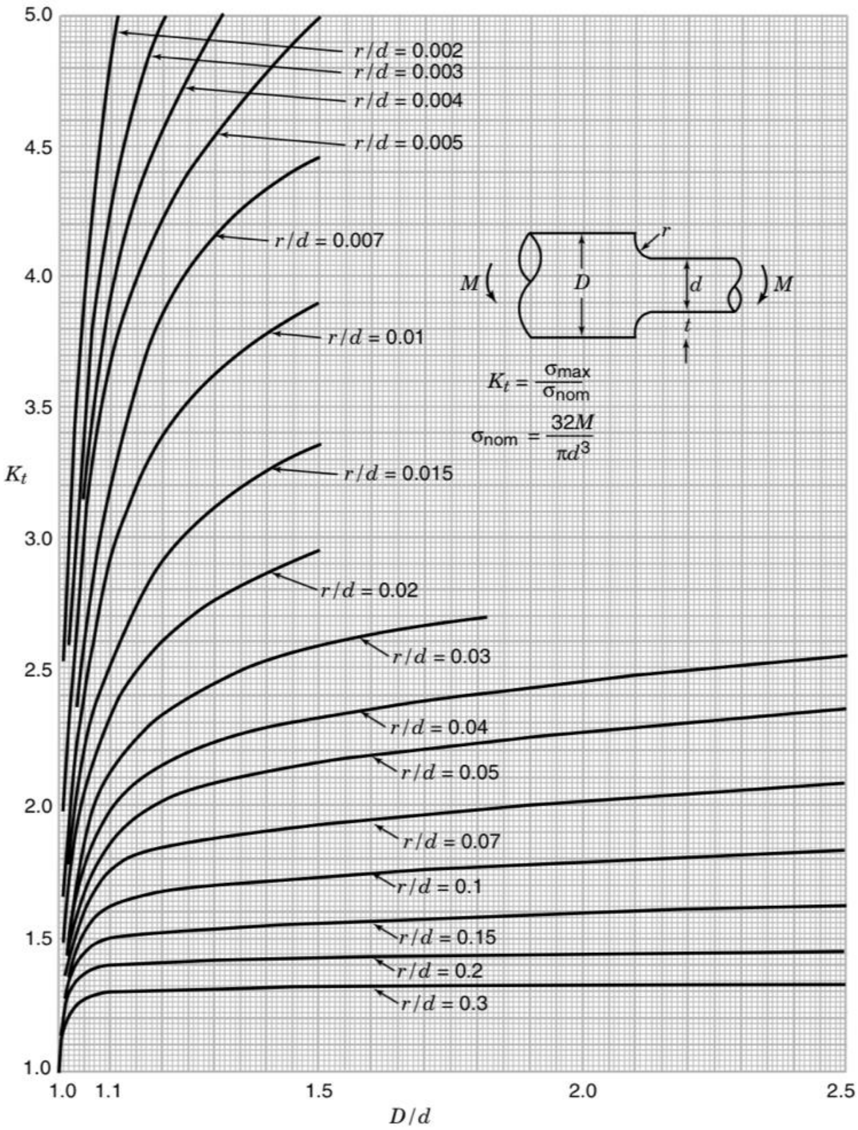


Chart 3.11 Stress concentration factors K_t for bending of a stepped bar of circular cross section with a shoulder fillet (based on photoelastic tests of Leven and Hartman 1951; Wilson and White 1973). This chart serves to supplement Chart 3.10.

$D/d_d = 1{,}2$ $\quad$ $r/d_d = 0{,}2$ $\quad$ $\alpha \approx 1{,}4$

S ohledem na koncentraci maximální napětí určíme

$$\sigma_{max} = \alpha.\sigma_{nom} = 1{,}4 \cdot 247 = 345 \text{ MPa}$$

Bezpečnost k MS pružnosti je

$$k_{k,C} = \frac{\sigma_{KFe}}{\sigma_{max}} = \frac{500}{345} = 1{,}44$$

Ad (iii) Kontrola vzhledem k MSP v místě s maximálním ohybovým momentem (místo E)

$$\sigma_{ext,E} = \frac{M_{O,E}}{W_O^d} = \frac{38\,724}{98} = 394 \text{ MPa}$$

Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti je

$$k_{k,E} = \frac{\sigma_{KFe}}{\sigma_{max}} = \frac{500}{394} = 1{,}27$$

Stanovení průhybu v místě působící síly F

Průhyb stanovíme z Castigliánovy věty jako

$$w \quad = \frac{\partial W}{\partial F} = \sum_{i=I}^{IV} \int_{\gamma_i} \frac{M_O^i}{E_i J_y^i} \frac{\partial M_O^i}{\partial F} \mathrm{d}x_i$$

$$w = \int_0^d \frac{M_O^I}{E_{Fe} J_y^{d_d}} \frac{\partial M_O^I}{\partial F} \mathrm{d}x + \int_0^c \frac{M_O^{II}}{E_{Fe} J_y^{d_d}} \frac{\partial M_O^{II}}{\partial F} \mathrm{d}x + \int_0^b \frac{M_O^{III}}{E_{Fe} J_y^D} \frac{\partial M_O^{III}}{\partial F} \mathrm{d}x + \int_0^a \frac{M_O^{IV}}{E_{Al} J_y^D} \frac{\partial M_O^{IV}}{\partial F} \mathrm{d}x$$

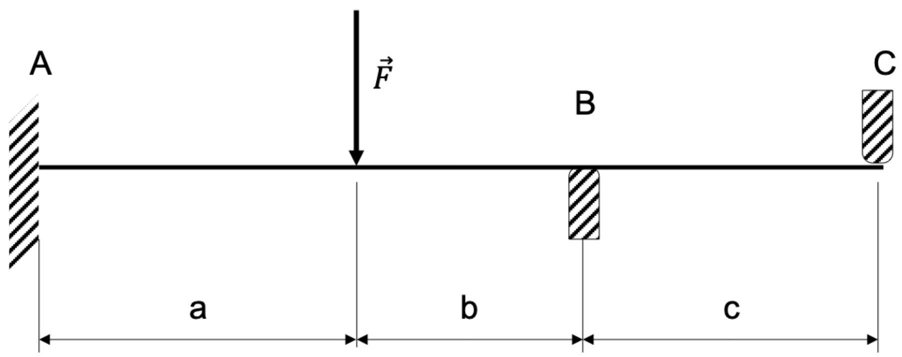
$$w = 0{,}41\ \mathrm{mm}$$

Závěr

Minimální bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti o velikosti 1,27 nalezneme v místě E (kde působí síla F).
V místě působení síly F je průhyb 0,41 mm.

Řešený příklad 2

Pro prut (nosník) dle obrázku určete maximální průhyb pomocí diferenciálního přístupu. Nosník má obdélníkový průřez o výšce H a šířce B.



geometrické parametry		
a	60	mm
b	20	mm
c	40	mm
B	6	mm
H	2	mm

materiálové parametry		
E_{Fe}	200	GPa

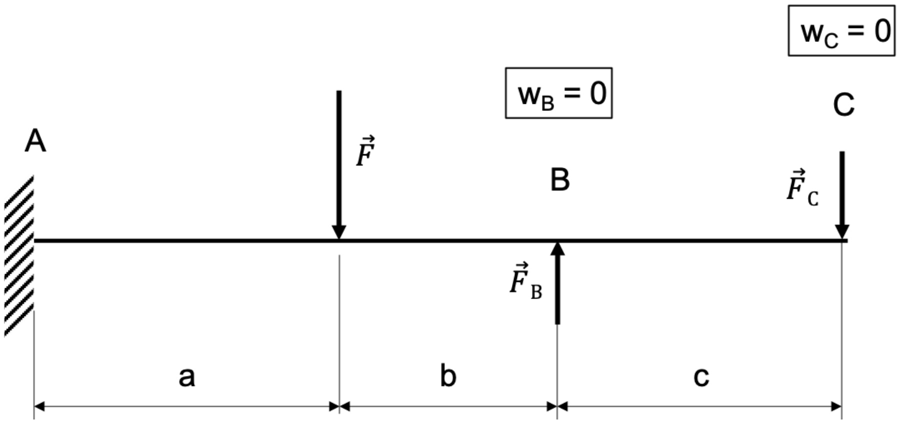
silové parametry		
F	640	N

Rozbor (studenti provedou sami)

Úplné uvolnění (studenti provedou sami)

Statický rozbor (studenti provedou sami)

Částečné uvolnění



$x_I \in (0; c)$ $\quad M_O^I(x) = -F_C x_I$

$x_{II} \in (0; b)$ $\quad M_O^{II}(x) = -F_C(x_{II} + c) + F_B x_{II}$

$x_{III} \in (0; a)$ $\quad M_O^{III}(x) = -F_C(x_{III} + b + c) + F_B(x_{III} + b) - F x_{III}$

I. interval

$$w_I''(x_I) = -\frac{M_O^I(x_I)}{EJ_Y} = \frac{F_C x_I}{EJ_Y}$$

$$w_I'(x_I) = \frac{F_C x_I^2}{2EJ_Y} + C_1$$

$$w_I\ (x_I) = \frac{F_C x_{II}^3}{6EJ_Y} + C_1 x_I + C_2$$

II. interval

$$w_{II}''(x_{II}) = -\frac{M_O^{II}(x_{II})}{EJ_Y} = \frac{(F_C - F_B)x_{II} + F_C c}{EJ_Y}$$

$$w_{II}'(x_{II}) = \frac{(F_C - F_B)x_{II}^2}{2EJ_Y} + \frac{F_C c x_{II}}{EJ_Y} + C_3$$

$$w_{II}\ (x_{II}) = \frac{(F_C - F_B)x_{II}^3}{6EJ_Y} + \frac{F_C c x_{II}^2}{2EJ_Y} + C_3 x_{II} + C_4$$

III. interval

$$w_{III}''(x_{III}) = -\frac{M_O^{III}(x_{III})}{EJ_Y} = \frac{(F_C - F_B + F)x_{III} + (F_C - F_B)b + F_C c}{EJ_Y}$$

$$w_{III}'(x_{III}) = \frac{(F_C - F_B + F)x_{III}^2}{2EJ_Y} + \frac{(F_C - F_B)b x_{III}}{EJ_Y} + \frac{F_C c x_{III}}{EJ_Y} + C_5$$

$$w_{III}(x_{III}) = \frac{(F_C - F_B + F)x_{III}^3}{6EJ_Y} + \frac{(F_C - F_B)b x_{III}^2}{2EJ_Y} + \frac{F_C c x_{III}^2}{2EJ_Y} + C_5 x_{III} + C_6$$

Je nutné určit šest neznámých konstant $C_1 \div C_6$.

Okrajové podmínky

Okrajové podmínky řešené úlohy jsou následující:

(1) Nulový průhyb v bodě C:

$$w_I \ (x_I = 0) = 0$$

(2) Nulový průhyb v bodě B:

$$w_{II} \ (x_{II} = 0) = 0$$

(3) Nulový průhyb v bodě A:

$$w_{III}(x_{III} = a) = 0$$

(4) Nulové natočení v bodě A:

$$w'_{III}(x_{III} = a) = 0$$

(5) Podmínka spojitosti v bodě B:

$$w_I \ (x_I = c) = w_{II} \ (x_{II} = 0)$$

(6) Podmínka hladkosti v bodě B:

$$w'_I(x_I = c) = w'_{II}(x_{II} = 0)$$

(7) Podmínka spojitosti v bodě působení síly F:

$$w_{II} \ (x_{II} = b) = w_{III}(x_{III} = 0)$$

(8) Podmínka hladkosti v bodě působení síly F:

$$w'_{II}(x_{II} = b) = w'_{III}(x_{III} = 0)$$

Určení neznámých konstant

Dosazení do (1) $\Rightarrow C_2 = 0$

Dosazení do (2) $\Rightarrow C_4 = 0$

Dosazení do (3) $\Rightarrow$ vztah mezi C_5 a C_6

Dosazení do (4) $\Rightarrow$ určení C_5 a poté pomocí předchozí závislosti určení C_6

$$C_5 = \frac{1}{EJ_y}\left[-F\frac{a^2}{2} + F_B\left(\frac{a^2}{2} + ab\right) - F_C\left(\frac{a^2}{2} + ab + ac\right)\right]$$

$$C_6 = \frac{1}{EJ_y}\left[F\frac{a^3}{3} - F_B\left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^2 b}{2}\right) + F_C\left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^2 b}{2} + \frac{a^2 c}{2}\right)\right]$$

Dosazení do (5) $\Rightarrow$ určení C_1

$$C_1 = -\frac{F_C c^2}{6EJ_y}$$

Dosazení do (6) $\Rightarrow$ určení C_3

$$C_2 = \frac{F_C c^2}{3EJ_y}$$

Dosazení do (7) $\Rightarrow$ vztah mezi F_B a F_C

Dosazení do (8) $\Rightarrow$ určení F_C a poté pomocí předchozí závislosti určení F_B

$$F_C = \frac{3Fa^2b}{c\left(3a^2+6ab+4ac+3b^2+4bc\right)}$$

$$F_B = \frac{Fa^2\left(3a^2b+3a^2c+6ab^2+12abc+4ac^2+3b^3+9b^2c+6bc^2\right)}{c\left(3a^4+12a^3b+4a^3c+18a^2b^2+12a^2bc+12ab^3+12ab^2c+3b^4+4b^3c\right)}$$

$$F_C = \frac{54}{320}F = 108\ \mathrm{N}$$

$$F_B = \frac{297}{320}F = 594\ \mathrm{N}$$

Výsledné rovnice pro průhyb a natočení jednotlivých intervalů po dosazení geometrických, materiálových a silových parametrů mají tvar:

$$w_I'(x_I) = 7{,}5\cdot 10^{-6}x_I^2 - 0{,}004$$

$$w_I\ \ (x_I) = 2{,}5\cdot 10^{-6}x_I^3 - 0{,}004x_I$$

$$w_{II}'(x_{II}) = -3{,}375\cdot 10^{-5}x_{II}^2 + 0{,}0006x_{II} + 0{,}008$$

$$w_{II}\ (x_{II}) = -1{,}125\cdot 10^{-5}x_{II}^3 + 0{,}0003x_{II}^2 + 0{,}008x_{II}$$

$$w_{III}'(x_{III}) = 1{,}069\overline{4}\cdot 10^{-5}x_{III}^2 - 0{,}00075x_{III} + 0{,}0065$$

$$w_{III}(x_{III}) = 3{,}56\overline{481}\cdot 10^{-6}x_{III}^3 - 0{,}000375x_{III}^2 + 0{,}0065x_{III} + 0{,}19$$

Určení maximálního průhybu

Místa podezřelá z extrémního průhybu určíme, jestliže postavíme první derivace průhybu w (tedy natočení w') rovny nule na jednotlivých intervalech. Přístupné řešení rovnice musí ležet v příslušném intervalu.

$x_I \in (0;c)$	$7{,}5\cdot 10^{-6}x_I^2 - 0{,}004 = 0$	$x_I = 23{,}1$	přípustné řešení
		$x_I = -23{,}1$	nepřípustné řešení
$x_{II} \in (0;b)$	$-3{,}375\cdot 10^{-5}x_{II}^2 + 0{,}0006x_{II} + 0{,}008 = 0$	$x_{II} = -8{,}9$	nepřípustné řešení
		$x_{II} = 26{,}7$	nepřípustné řešení
$x_{III} \in (0;a)$	$1{,}069\overline{4}\cdot 10^{-5}x_{III}^2 - 0{,}00075x_{III} + 0{,}0065 = 0$	$x_{III} = 10{,}1$	přípustné řešení
		$x\check{\jmath}_{III} = 60{,}0$	přípustné řešení

Maximální průhyb určíme dosazením přípustného kořene do rovnice pro w

$x_I \in (0;c)$	$w_I\ \ (x_I) = 2{,}5\cdot 10^{-6}x_I^3 - 0{,}004x_I$	$w_I\ \ = -0{,}06\ \mathrm{mm}$
$x_{III} \in (0;a)$	$w_{III}(x_{III}) = 3{,}56\cdot 10^{-6}x_{III}^3 - 0{,}000375x_{III}^2 + 0{,}0065x_{III} + 0{,}19$	$w_{III}\ (x_{III}) = 0{,}22\ \mathrm{mm}$
		$w_{III}\ (x'_{III}) = 0$

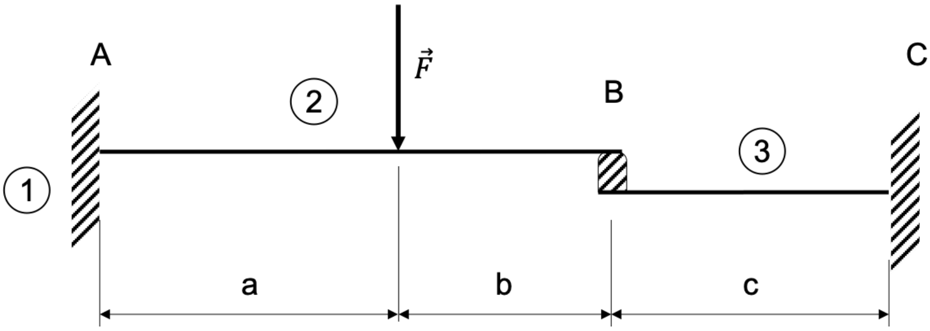
Proveďte kontrolu, zda je prut v elastickém stavu.

Závěr

Maximální průhyb nastane v bodě $x_{III} =\ 10{,}1$ mm má velikost a $w_{III} = 0{,}22$ mm (za předpokladu, že je prut v elastickém stavu).

Řešený příklad 3

U prutů (nosníků) dle obrázku s kruhovým průřezem o průměru D vyrobených z oceli stanovte bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti a průhyb v bodě B. Vlastní tíha je nepodstatná. V bodě B je vazba mezi tělesy 2 a 3 realizována podporou a přenáší se zde pouze síla ve směru osy z.



geometrické parametry

a	300	mm
b	200	mm
c	250	mm
D	15	mm

materiálové parametry

E	200	GPa
μ	0,3	
σ_K	400	MPa

silové parametry

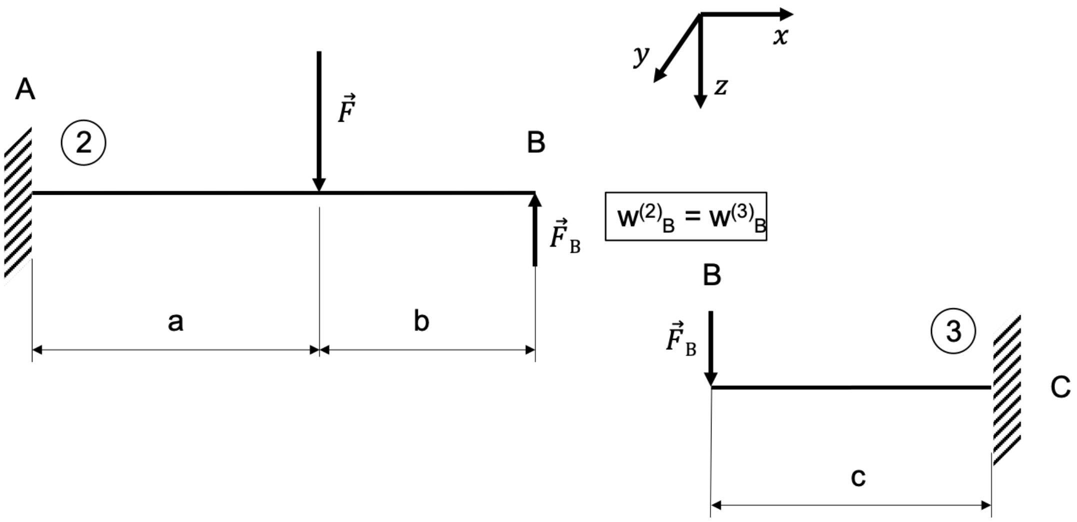
F	750	N

Rozbor (studenti provedou sami)

Úplné uvolnění (studenti provedou sami)

Statický rozbor (studenti provedou sami)

Částečné uvolnění



Určení neznámé síly F_B pomocí Castiglianovy věty

Pro nosník 2 posuv $w_B^{(2)}$ a síla F_B mají opačný smysl, proto znaménko mínus. Deformační podmínka v silovém tvaru je

$$w_B^{(2)} = -\frac{\partial W^{(2)}}{\partial F_B}$$

Pro nosník 3 nastane posuv $w_B^{(3)}$ nastane ve shodném smyslu jako má F_B proto

$$w_B^{(3)} = \frac{\partial W^{(3)}}{\partial F_B}$$

Dosazení do deformační podmínky

$$w_B^{(2)} = w_B^{(3)}$$

$$-\frac{\partial W^{(2)}}{\partial F_B} = \frac{\partial W^{(3)}}{\partial F_B}$$

$$-\left(\int_0^b \frac{M_O^I}{EJ_y}\frac{\partial M_O^I}{\partial F_B}\mathrm{d}x + \int_0^a \frac{M_O^{II}}{EJ_y}\frac{\partial M_O^{II}}{\partial F_B}\mathrm{d}x\right) = \int_0^c \frac{M_O^{III}}{EJ_y}\frac{\partial M_O^{III}}{\partial F_B}\mathrm{d}x$$

VVU pro nosník 2

$x \in (0; b)$

$$N^I(x) = 0$$
$$T^I(x) = -F_\mathrm{B}$$
$$M_O^I(x) = F_\mathrm{B}x$$

$x \in (0; a)$

$$N^{II}(x) = 0$$
$$T^{II}(x) = -F_\mathrm{B} + F$$
$$M_O^{II}(x) = F_\mathrm{B}(x + b) - Fx$$

VVU pro nosník 3

$x \in (0; c)$

$$N^{III}(x) = 0$$
$$T^{III}(x) = -F_\mathrm{B}$$
$$M_O^{III}(x) = -F_\mathrm{B}x$$

Výpočet neznámé stykové síly F_B

$$-\int_0^a \frac{1}{EJ_y}(-Fx + F_B\,(b+x))\,\frac{\partial}{\partial F_B}(-Fx + F_B\,(b+x))\ dx - \int_0^b \frac{F_B x}{EJ_y}\frac{\partial}{\partial F_B}(F_B x)\ dx = \int_0^c -\frac{F_B x}{EJ_y}\frac{\partial}{\partial F_B}(-F_B x)\ dx$$

což vede na

$$F_B = \frac{Fa^2(2a + 3b)}{2a^3 + 6a^2b + 6ab^2 + 2b^3 + 2c^3}$$

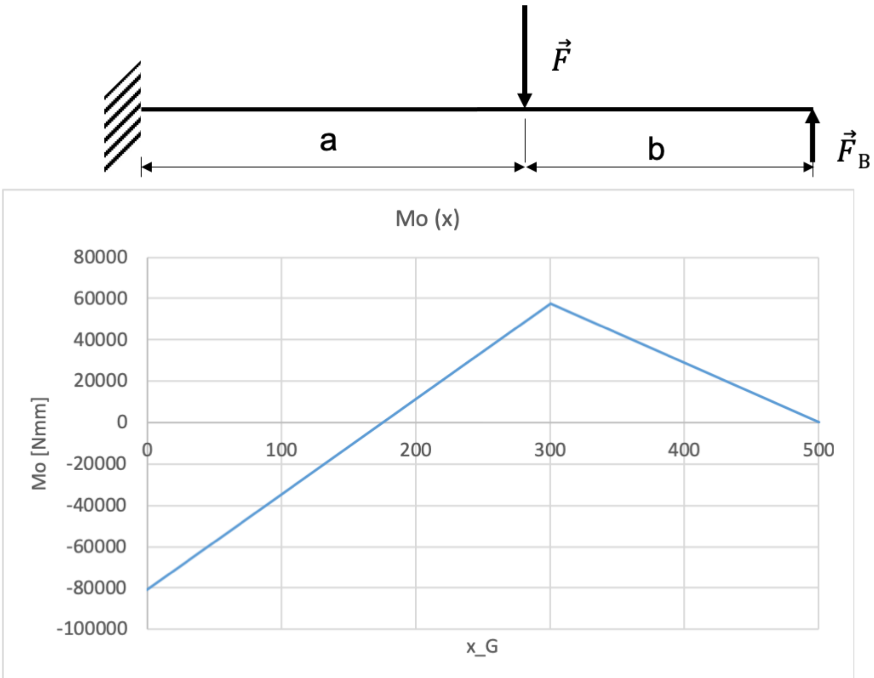
Po dosazení geometrických a silových parametrů dostáváme

$$F_B = 288\ \mathrm{N}$$

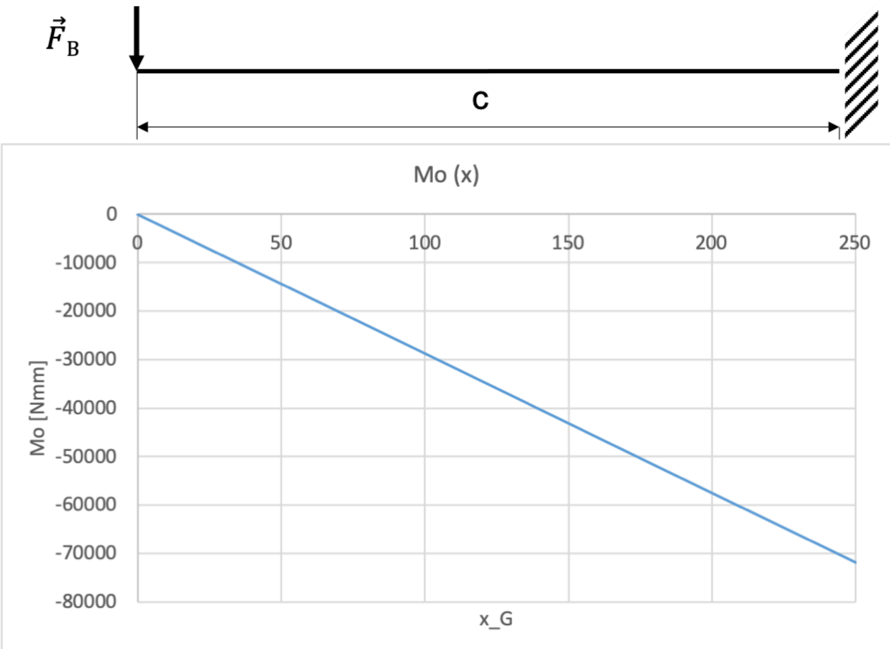
Kontrola mezního stavu pružnosti

Je třeba určit nebezpečná místa, tj. tam, kde je maximální M_O.

Průběh ohybového momentu pro nosník 2



Průběh ohybového momentu pro nosník 3



Maximální ohybový moment $M_{O\max} = \max\{M_O^I, M_O^{II}, M_O^{III}\}$ je ve vetknutí nosníku 2 (místo A) a má velikost $M_O^{II} = 81\ 000\ \mathrm{Nmm} = M_{O,A}$. Následuje kontrola MS pružnosti ve vetknutí.

Nejdříve určíme modul průřezu v ohybu

$$W_O^D = \frac{J_y^D}{h_{ex}} = \frac{\pi D^3}{32} = 331\ \mathrm{mm}^3$$

Extrémní napětí bude

$$\sigma_{ext,A} = \frac{M_{O,A}}{W_O^D} = \frac{81000}{331} = 245 \text{ MPa}$$

Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti je

$$k_{k,A} = \frac{\sigma_K}{\sigma_{ext,A}} = \frac{300}{245} = 1{,}22$$

Určení průhybu v bodě B

Průhyb určíme pomocí Castigliánovy věty. Je možné průhyb stanovit pro nosník 2 nebo 3, ovšem jednodušší z hlediska výpočtu je zvolit nosník 3. Pro průhyb bodu B píšeme

$$w_B^{(3)} = \frac{\partial W^{(3)}}{\partial F_B}$$

$$w_B^{(3)} = \int_0^c \frac{M_O^{III}}{EJ_y} \frac{\partial M_O^{III}}{\partial F_B} \mathrm{d}x$$

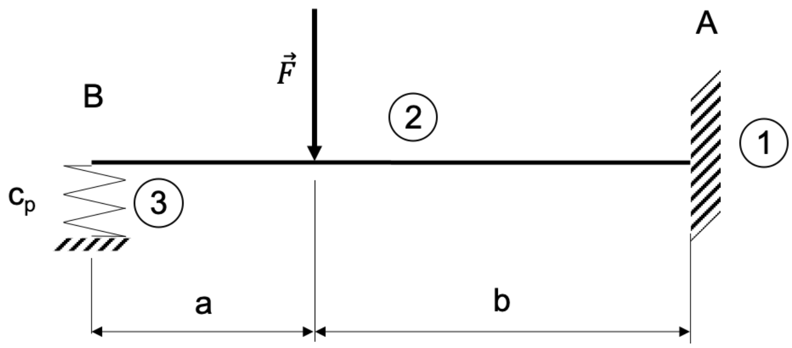
$$w_B^{(3)} = 3{,}02 \text{ mm}$$

Závěr

Bezpečnost k MPS je 1,22 a průhyb v místě B je 3,02 mm.

Řešený příklad 4

Prut (nosník) dle obrázku s kruhovým příčným průřezem D je vázán lineární pružinou o poddajnosti c_p. Proveďte kontrolu k MS pružnosti, určete průhyb na konci prutu (v místě B) a v místě, kde působí síla F.



geometrické parametry

a	80	mm
b	120	mm
D	15	mm

materiálové parametry

E	200	GPa
μ	0,3	
σ_K	400	MPa

silové parametry

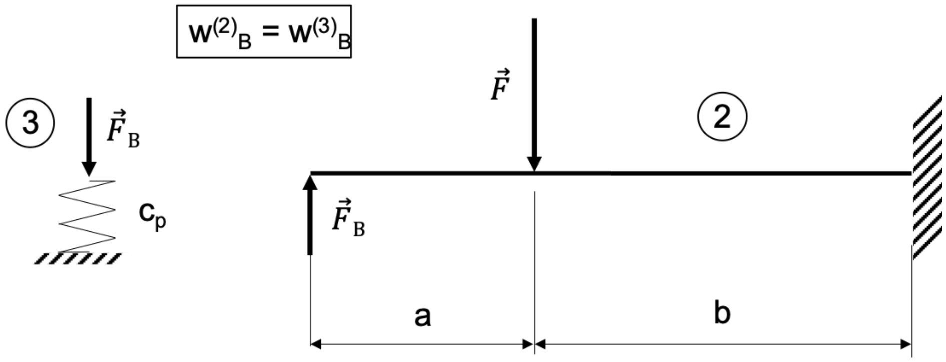
F	1000	N
c_p	0,01	mm/N

Rozbor (studenti provedou sami)

Úplné uvolnění (studenti provedou sami)

Statický rozbor (studenti provedou sami)

Částečné uvolnění



Pro nosník 2 platí, že síla a posuv jsou opačného smyslu, proto

$$w_B^{(2)} = -\frac{\partial W^{(2)}}{\partial F_B}$$

Pro těleso 3 pružinu píšeme silově závislou deformační podmínku

$$w_B^{(3)} = c_p F_B$$

Dosazení do deformační podmínky soustavy

$$w_B^{(2)} = w_B^{(3)}$$

$$-\frac{\partial W^{(2)}}{\partial F_B} = c_p F_B$$

$$-\left(\int_0^a \frac{M_O^I}{EJ_y}\frac{\partial M_O^I}{\partial F_B}\mathrm{d}x + \int_0^b \frac{M_O^{II}}{EJ_y}\frac{\partial M_O^{II}}{\partial F_B}\mathrm{d}x\right) = c_p F_B$$

VVU pro nosník 2

$x \in (0; a)$

$$N^I(x) = 0$$
$$T^I(x) = -F_\mathrm{B}$$
$$M_O^I(x) = F_\mathrm{B} x$$

$x \in (0; b)$

$$N^{II}(x) = 0$$
$$T^{II}(x) = -F_\mathrm{B} + F$$
$$M_O^{II}(x) = F_\mathrm{B}(x + a) - Fx$$

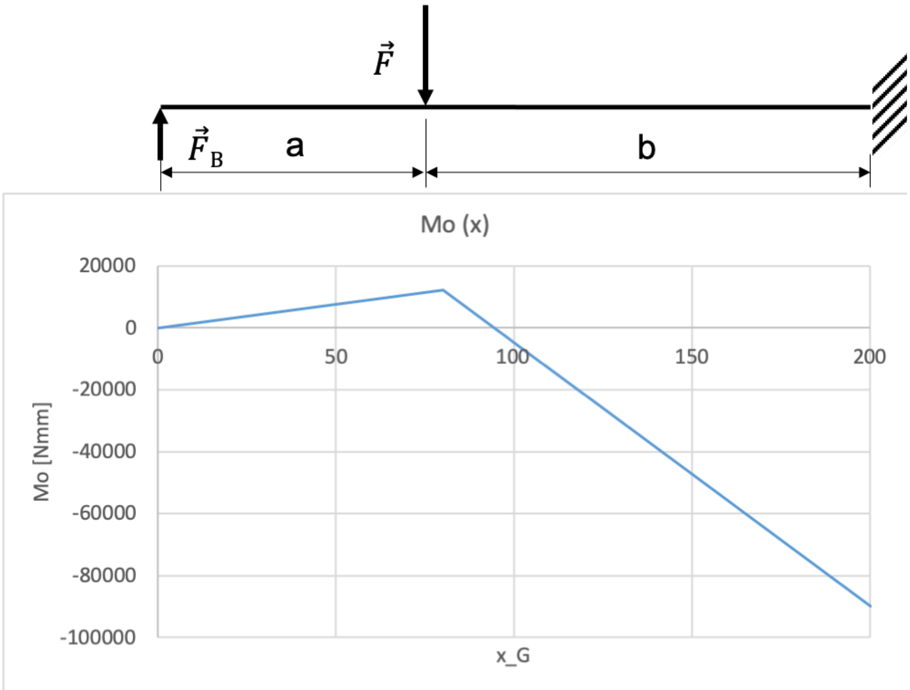
Výpočet neznámé stykové síly F_B je řešením rovnice vyplývající z deformační podmínky a vede na vztah

$$F_B = \frac{32Fb^2(3a + 2b)}{3\pi D^4 E c_p + 64a^3 + 192a^2 b + 192ab^2 + 64b^3}$$

$$F_B = 150{,}9\ \mathrm{N}$$

Kontrola mezního stavu pružnosti

Je třeba určit nebezpečná místa, tj. tam, kde je maximální M_O.



Maximální ohybový moment M_O je ve vetknutí (místo A) a má velikost $M_{O,A} = 89\,840\ \mathrm{Nmm}$. Dále určíme modul průřezu v ohybu

$$W_O^D = \frac{J_y^D}{h_{ex}} = \frac{\pi D^3}{32}$$

Extrémní napětí poté bude

$$\sigma_{ext,A} = \frac{M_{O,A}}{W_O^D}$$

$$\sigma_{max} = 271\ \mathrm{MPa}$$

Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti je

$$k_{k,A} = \frac{\sigma_K}{\sigma_{ext,A}}$$

$$k_{k,A} = 1{,}5$$

Určení maximálního průhybu v místě B

Určíme jednoduše dosazením velikosti síly F_B do rovnice pro deformaci pružiny

$$w_B^{(3)} = c_p F_B$$

$$w_B^{(3)} = 1{,}51\ \mathrm{mm}$$

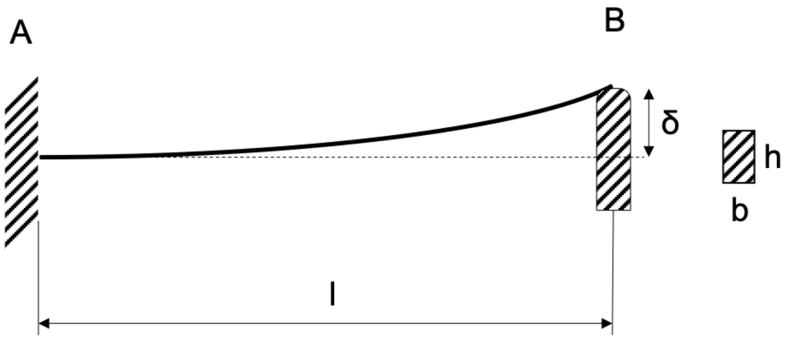
Určení průhybu v místě působení síly F

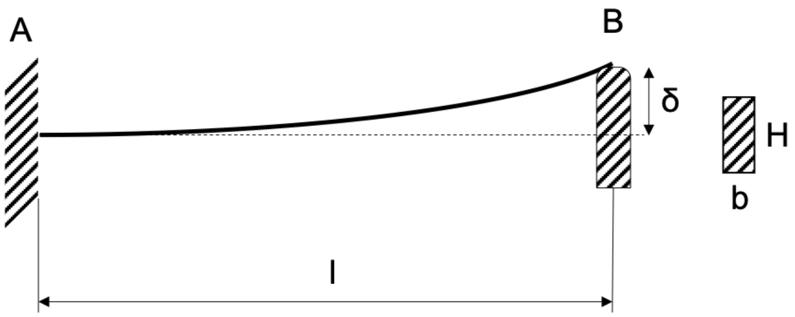
$$w_F^{(2)} = \frac{\partial W^{(2)}}{\partial F} = \int_0^a \frac{M_O^I}{EJ_y}\frac{\partial M_O^I}{\partial F}\mathrm{d}x + \int_0^b \frac{M_O^{II}}{EJ_y}\frac{\partial M_O^{II}}{\partial F}\mathrm{d}x$$

$$w_F^{(2)} = 0{,}81\ \mathrm{mm}$$

Řešený příklad 5

Vázané pruty (nosníky) dle obrázku shodné délky l, jsou deformačně zatíženy shodným posuvem δ. Příčné průřezy nosníků mají shodnou šířku b, ale rozdílnou výšku, přičemž H > h. Odvoďte vztah mezi velikosti maximálních napětí na nosnících v závislosti na poměru H/h.





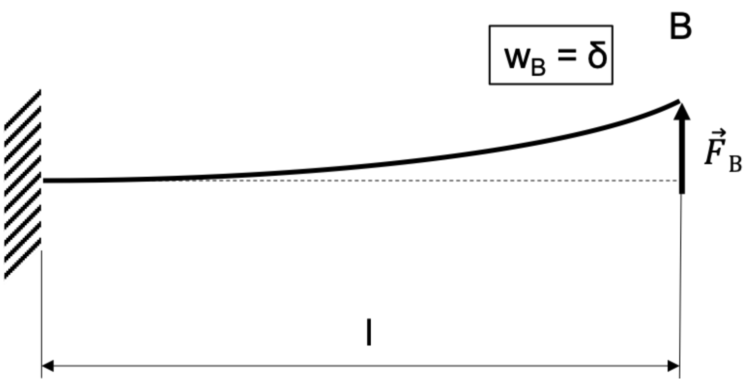
Rozbor (studenti provedou sami)

Úplné uvolnění (studenti provedou sami)

Statický rozbor (studenti provedou sami)

Částečné uvolnění

Deformační podmínka a částečné uvolnění je shodné pro oba nosníky.



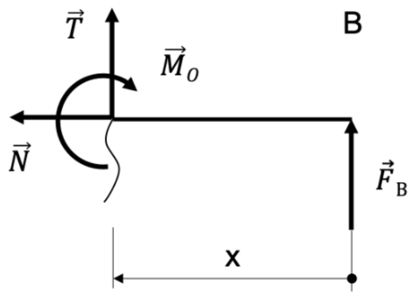
Deformační podmínku pro oba nosníky vyjádříme v silovém tvaru:

$$w_B = \delta = \frac{\partial W^h}{\partial F_B^h} = \int_0^l \frac{M_O^h}{EJ_y^h}\frac{\partial M_O^h}{\partial F_B^h}\mathrm{d}x = \frac{F_B^h l^3}{3EJ_y^h}$$

$$F_B^h = \frac{3EJ_y^h\delta}{l^3} = \frac{Ebh^3\delta}{4l^3}$$

$$w_B = \delta = \frac{\partial W^H}{\partial F_B^H} = \int_0^l \frac{M_O^H}{EJ_y^H}\frac{\partial M_O^H}{\partial F_B^H}\mathrm{d}x = \frac{F_B^H l^3}{3EJ_y^H}$$

$$F_B^H = \frac{3EJ_y^H\delta}{l^3} = \frac{EbH^3\delta}{4l^3}$$



VVÚ pro nosníky

$x \in (0; l)$

$$N^h(x) = 0$$
$$T^h(x) = -F_B^h$$
$$M_O^h(x) = -F_B^h x$$

$x \in (0; l)$

$$N^H(x) = 0$$
$$T^H(x) = -F_B^H$$
$$M_O^H(x) = -F_B^H x$$

Pro moduly průřezu v ohybu platí:

$$W_O^h = \frac{J_y^h}{h_{ex}} = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_O^H = \frac{J_y^H}{H_{ex}} = \frac{bH^2}{6}$$

Nyní můžeme odvodit vztah mezi velikostí maximálních napětí na obou nosnících

$$\frac{\sigma^h}{\sigma^H} = \frac{\frac{M_O^h}{W_O^h}}{\frac{M_O^H}{W_O^H}} = \frac{\frac{3Eh\delta}{2l^2}}{\frac{3EH\delta}{2l^2}} = \frac{h}{H}$$

Maximální ohybové napětí od posuvu $w_B = \delta$ na nosníku s příčným průřezem H bude vyšší a to v poměru:

$$\sigma^H = \frac{H}{h}\sigma^h$$

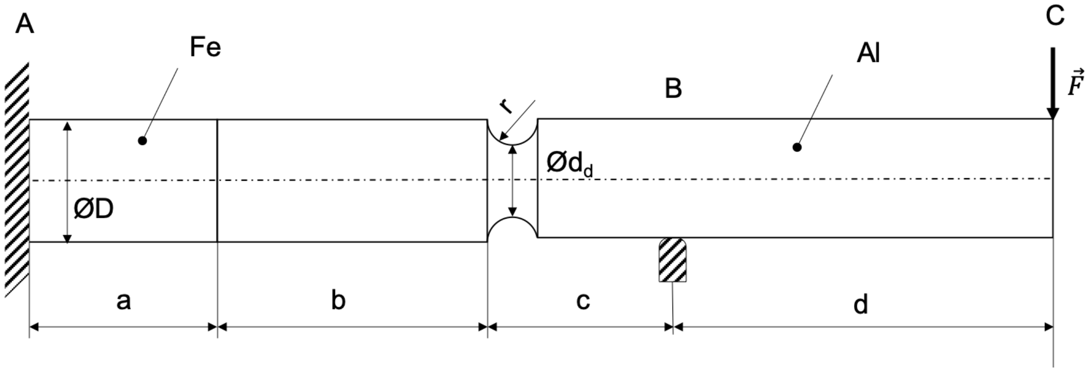
Zmíněný vztah platí pouze za předpokladu lineárního chování materiálu, tj. jestliže nenastane mezní stav pružnosti.

Literatura

[1] PILKEY, W.D. and F.P, PILKEY, Peterson's Stress Concentration Factors, John Wiley & Sons, 2008 New Jersey

Neřešený příklad 1

U prutu (hřídele) dle obrázku vyrobeného z oceli (a) a hliníkové slitiny (b, c, d) stanovte bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti. Vlastní tíha je nepodstatná a součinitel koncentrace napětí α vyhledejte v tabulkách.



geometrické parametry

a	30	mm
b	40	mm
c	20	mm
d	50	mm
D	12	mm
d_d	10	mm
r	1	mm

materiálové parametry

E_{Fe}	200	GPa
E_{Al}	69	GPa
μ_{Fe}	0,3	
μ_{Al}	0,3	
σ_{KFe}	400	MPa
σ_{KAl}	300	MPa

silové parametry

F	400	N

Výsledky:

Styková síla $F_B = 793{,}3\ \mathrm{N}$.

Okolí vetknutí: $\sigma_{ext,A} = 91\ \mathrm{MPa}$, $k_k = 4{,}41$.

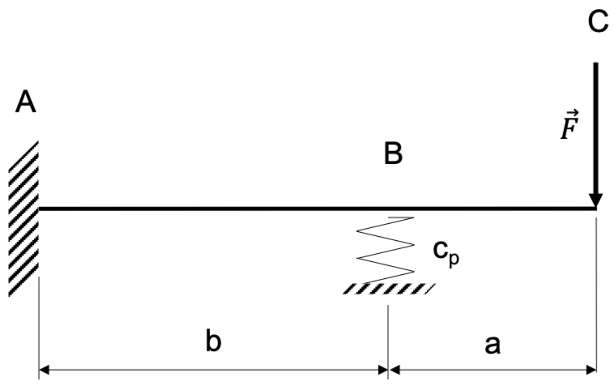
Vrub: $\sigma_{nom} = 124\ \mathrm{MPa}$, α ≈ 1,98, $\sigma_{max} = 245\ \mathrm{MPa}$, $k_k = 1{,}23$

Maximální ohybový moment: $\sigma_{ext,Momax} = 118\ \mathrm{MPa}$, $k_k = 2{,}54$

Průhyb v místě působení síly F $w = 0{,}52\ \mathrm{mm}$

Neřešený příklad 2

Prut (nosník) dle obrázku s obdélníkovým příčným průřezem je vázán lineární pružinou o poddajnosti c_p. Proveďte kontrolu k MS pružnosti, určete průhyb v místě B a v místě kde působí síla F.



geometrické parametry

a	80	mm
b	120	mm
B	8	mm
H	12	mm

materiálové parametry

E	200	GPa
μ	0,3	
σ_K	400	MPa

silové parametry

F	500	N
c_p	0,01	mm/N

Výsledky:

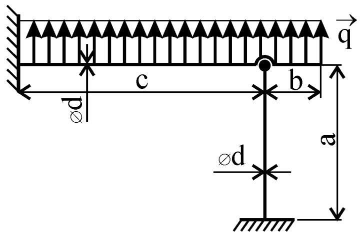
Styková síla $F_B = 200\ \mathrm{N}$

Průhyb $w_B = 2{,}0\ \mathrm{mm}$ a $w_C = 4{,}78\ \mathrm{mm}$

Vetknutí: $\sigma_{ext,A} = 396\ \mathrm{MPa}$, $k_k = 1{,}3$

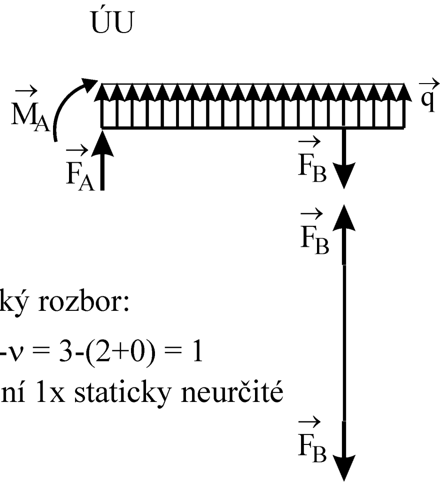
Příklad 6

Určete maximální velikost spojitého liniového zatížení $\vec{q}$, kterým můžeme zatížit soustavu tvořenou 2 pruty shodného kruhového průřezu o $\o d$, vyrobených ze stejného materiálu, aby bezpečnost vzhledem k možným mezním stavům nebyla menší než 2.



Dáno: $a = 1\,\mathrm{m}$, $b = 0,2\,\mathrm{m}$,
$c = 0,6\,\mathrm{m}$, $\o d = 20\,\mathrm{mm}$,
$\sigma_K = 300\,\mathrm{MPa}$, $E = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$.

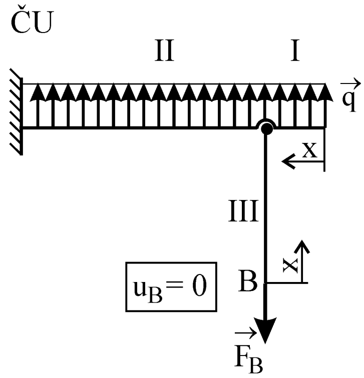
Řešení



Statický rozbor:

s = μ-ν = 3-(2+0) = 1

uložení 1x staticky neurčité



VVÚ:

$$M_{oI}(x) = -\frac{qx^2}{2}$$

$$M_{oII}(x) = -\frac{qx^2}{2} + F_B(x - b)$$

$$N_{III} = F_B$$

Částečné uvolnění:

$$u_B = \frac{\partial W}{\partial F_B} = \int_\gamma \frac{M_o(x)}{EJ}\frac{\partial M_o(x)}{\partial F_B}\mathrm{d}x + \int_\gamma \frac{N(x)}{ES}\frac{\partial N(x)}{\partial F_B}\mathrm{d}x = 0$$

$$u_B = \frac{1}{EJ}\left[\int_0^b -\frac{qx^2}{2}\cdot 0\mathrm{d}x + \int_b^{b+c}\left(-\frac{qx^2}{2} + F_B(x-b)\right)\cdot(x-b)\mathrm{d}x\right] + \frac{1}{ES}\int_0^a F_B \cdot 1\mathrm{d}x = 0$$

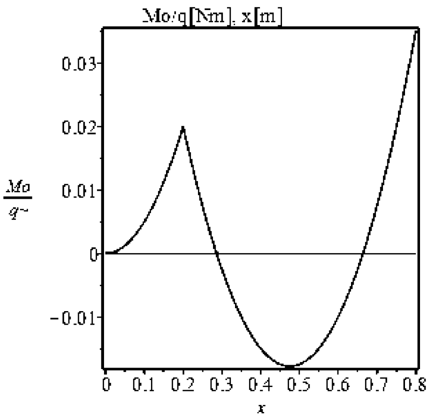
$$F_B = \frac{2c^2(6b^2 + 8bc + 3c^2)}{3ad^2 + 16c^3}\cdot q = 0,4748 \cdot q$$

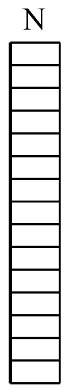
Určení VVÚ:

$$M_{oI}(x) = -\frac{qx^2}{2}$$

$$M_{oII}(x) = -\frac{qx^2}{2} + 0,4748 \cdot q \cdot (x - b)$$

$$N_{III} = F_B$$





Určení extrémních VVÚ:

Vodorovný prut (SI jednotky):

$$M_{oI}(b) = -\frac{qb^2}{2} = -0,02q$$

$$M_{oII}(c+b) = -\frac{q(c+b)^2}{2} + 0,4748 \cdot q \cdot c = 0,0351q$$

$$\frac{\partial M_{oII}}{\partial x} = -qx + 0,4748q = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_{\max} = 0,4748\,\mathrm{m}$$

$$M_{oII}(x_{\max}) = -0,0178q$$

$$M_{o\max} = M_{oII}(c+b) = 0,0351q$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{o\max}}{W_o} = \frac{0,0351q}{\frac{\pi d^3}{32}}$$

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{\max}} \qquad \Rightarrow \qquad q_1 = 3\,356,5\mathrm{N/m}$$

Svislý prut:

$$\sigma_N = \frac{F_B}{S} = \frac{0,4748 \cdot q}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_N} \qquad \Rightarrow \qquad q_2 = 99\,242,5\mathrm{N/m}$$

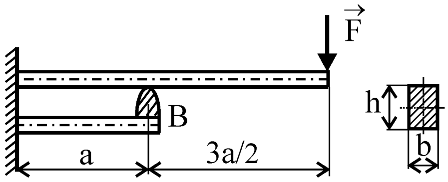
Maximální velikost spojitého liniového zatížení $\vec{q}$:

$$q_{\max} = \min(q_1, q_2) = q_1 = 3\,356,5\mathrm{N/m}$$

Domácí úkol:

DÚ 9

Dva pruty shodného obdélníkového průřezu vyrobené ze stejného materiálu jsou na jednom konci přivařeny k rámu a v bodě B se dotýkají prostřednictvím obecné vazby. Navrhněte výšku příčného průřezu h tak, aby bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti nebyla menší než 2.



Dáno:

$a = 0,5\,\mathrm{m}$,	$h = 2 \cdot b$,	$F = 3\,\mathrm{kN}$,
materiál ocel:	$E = 2,1 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$,	$\sigma_K = 300\,\mathrm{MPa}$.