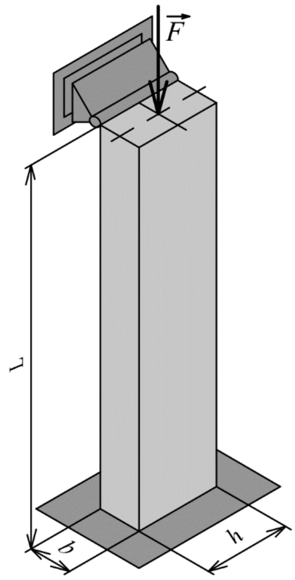
13. cvičení Pružnost a pevnost 1

Vzpěrná stabilita prutů

Příklad 1

Pro prut na obrázku určete bezpečnost vzhledem k možným mezním stavům.

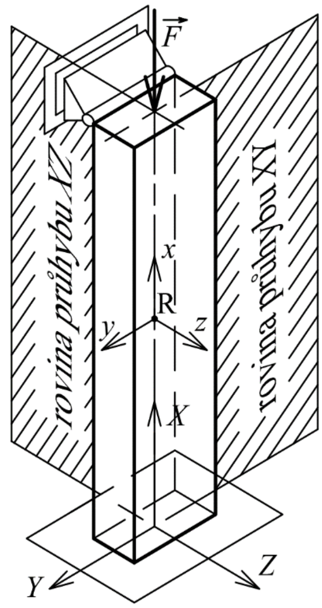


$$F = 25\ \mathrm{kN}$$
$$L = 2{,}5\ \mathrm{m}$$
$$b = 40\ \mathrm{mm}$$
$$h = 80\ \mathrm{mm}$$
$$E = 2{,}1 \cdot 10^5\ \mathrm{MPa}$$
$$\sigma_K = 380\ \mathrm{MPa}$$

Ze zadání materiálové charakteristiky vyplývá, že materiál prutu je tvárný, takže kromě mezního stavu vzpěrné stability (MSVS) může nastat i mezní stav pružnosti (MSP). Nejprve zkontrolujeme, zda je prut v elastickém stavu:

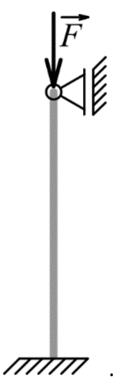
$$k_k = \frac{\sigma}{\sigma_k} = \frac{\frac{F}{b.h}}{\sigma_k} = 48{,}6$$

Bezpečnost k_k je větší než 1, tzn. prut je v elastickém stavu.



Pro výpočet bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu vzpěrné stability potřebujeme určit nejnižší hodnotu kritické síly F_V. Definujme nejprve globální souřadnicový systém *XYZ* znázorněný na obrázek vpravo, jehož počátek leží v průsečíku střednice prutu s jedním z čel prutu, osa *X* jde podél střednice prutu, osa *Y* je rovnoběžná s druhými hlavními centrálními osami příčných průřezů a osa *Z* je rovnoběžná s prvními hlavními centrálními osami příčných průřezů. Lokální souřadnicový systém *xyz* v obecném bodě R střednice nechť vznikne translací globálního souřadnicového systému do bodu R.

Kritickou sílu pro vázaný prut vypočítáme ze vztahu $F_V = \frac{\alpha^2 EJ}{L^2}$ přičemž její hodnota se bude lišit pro rovinu XY a XZ z důvodu různého omezení pohybu v jednotlivých rovinách, které je zahrnuté v součiniteli α.

V rovině XY je $\alpha = \frac{\pi}{2}$, což odpovídá , v rovině XZ je $\alpha = \sqrt{2}\pi$  .

Součinitele α jsou: $\alpha_{XY} = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_{XZ} = \sqrt{2}\pi$.

Hlavní centrální kvadratické momenty jsou dány vztahy: $J_y = J_2 = \frac{hb^3}{12}, \quad J_z = J_1 = \frac{bh^3}{12}$.

Pro kritické síly v jednotlivých rovinách dostáváme: $F_{\mathrm{V},XY} = \frac{\alpha_{XY}^2 E J_z}{L^2}, \quad F_{\mathrm{V},XZ} = \frac{\alpha_{XZ}^2 E J_y}{L^2}$.

Z uvedených vztahů je zřejmé, že $\alpha_{XY} < \alpha_{XZ}$ a $J_y < J_z$. Pro výpočet síly $F_{\mathrm{V},XY}$ tedy používáme menší konstantu α a větší moment *J*, naopak pro výpočet $F_{\mathrm{V},XZ}$ používáme větší α a menší *J*. Nelze tedy předem určit, která ze sil bude menší, a je proto nutné rozhodnout výpočtem. Z něj obdržíme:

$$F_{V,XY} = 141491\ N$$

$$F_{V,XZ} = 282981\ N$$

$$F_{V,XY} < F_{V,XZ}$$

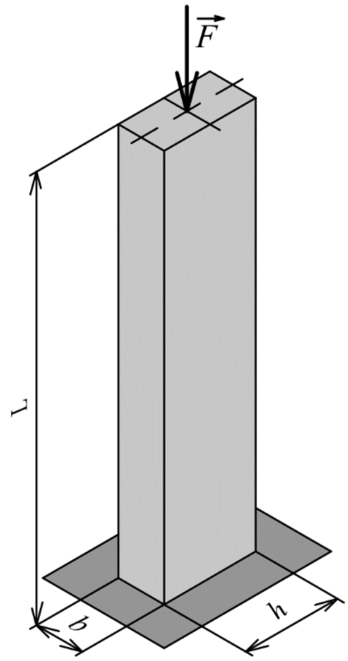
Kritickou silou je tedy $F_{\mathrm{V},XY}$, což značí, že vybočení nastane v rovině XY a bezpečnost k meznímu stavu vzpěrné stability bude

$$k_V = \frac{F_{V,XY}}{F} = 5{,}7.$$

Vypočítaná hodnota je výrazně větší než 1, bezpečnost lze proto považovat za dostačující.

Příklad 2

Jak velkou silou $\vec{F}$ je možné zatížit prut na obrázku, je-li požadována bezpečnost vzhledem k meznímu stavu vzpěrné stability alespoň 3,5?



$L = 2{,}5\ \mathrm{m}$

$b = 40\ \mathrm{mm}$

$h = 80\ \mathrm{mm}$

$E = 2{,}1 \cdot 10^5\ \mathrm{MPa}$

$\sigma_{\mathrm{K}} = 380\ \mathrm{MPa}$

$k_{\mathrm{Vmin}} = 3{,}5$

Jedná se o inverzní úlohu, jejímž cílem je určit, pro jaký rozsah velikosti síly $\vec{F}$ je splněna požadovaná podmínka $k_{\mathrm{V}} \geq k_{\mathrm{Vmin}}$. Je zadán stejný prut jako v příkladu 1, můžeme proto opět použít souřadnicové systémy a označení rovin z tohoto příkladu. Uložení je však tentokrát v obou rovinách stejné, charakterizované konstantou $\alpha = \pi/2$. Z dvojice sil $F_{\mathrm{V},XY}$ a $F_{\mathrm{V},XZ}$ bude proto bezpochyby menší síla $F_{\mathrm{V},XZ}$, která je vyjádřena v závislosti na menším (resp. minimálním) kvadratickém momentu $J_y = J_2$. Jelikož budeme dále pracovat pouze s touto silou, není nutné v dolním indexu uvádět označení roviny. Zavedeme proto substituci $F_{\mathrm{V}} = F_{\mathrm{V},XZ}$ a kritickou sílu vyjádříme pomocí zadaných veličin ve tvaru:

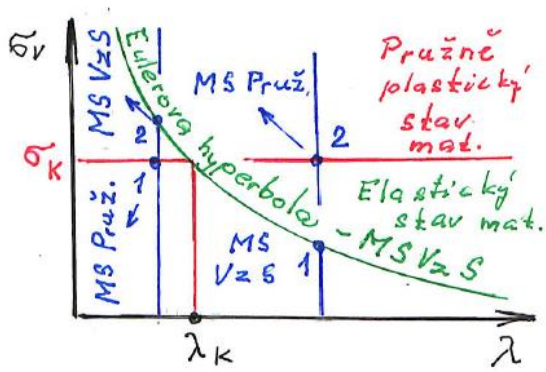
$$F_{\mathrm{V}} = \frac{\alpha^2 E J_y}{L^2} = \frac{\pi^2 E h b^3}{48 L^2}\,.$$

Dále v diagramu „napětí-štíhlost prutu“ zkontrolujeme, zda nemůže dříve nastat MSP než MSVS.

Určíme si štíhlost prutu: $\lambda = L\sqrt{\frac{S}{J_y}} = 216{,}5.$

Kritická štíhlost: $\lambda_{\mathrm{k}} = \alpha\sqrt{\frac{E}{\sigma_k}} = 36{,}9.$

Z relace $\lambda > \lambda_{\mathrm{k}}$ vyplývá, že nejprve dojde k MVSV viz obrázek.



Rozepíšeme-li zadanou podmínku $k_{\mathrm{V}} \geq k_{\mathrm{Vmin}}$, dostaneme:

$$k_{\mathrm{V}} = \frac{F_{\mathrm{V}}}{F} = \frac{\pi^2 E h b^3}{48 L^2 F} \geq k_{\mathrm{Vmin}}$$

a odtud

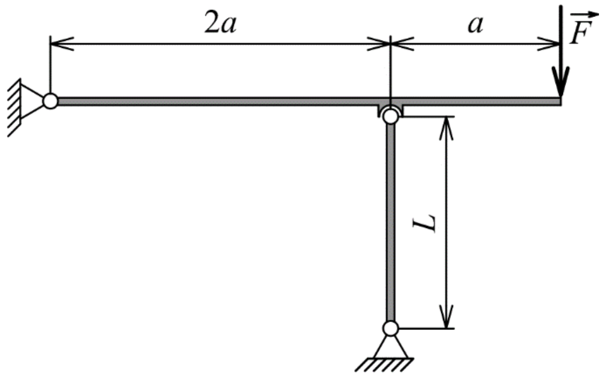
$$F \leq \frac{\pi^2 E h b^3}{48 L^2 k_{\mathrm{Vmin}}} = 10106\ \mathrm{N}\,.$$

Z výpočtu tedy vyplývá, že pro zajištění požadované bezpečnosti k_{Vmin} prut nesmí být stlačován silou větší než 10,1 kN. Případné vybočení prutu nastane v rovině *XZ*.

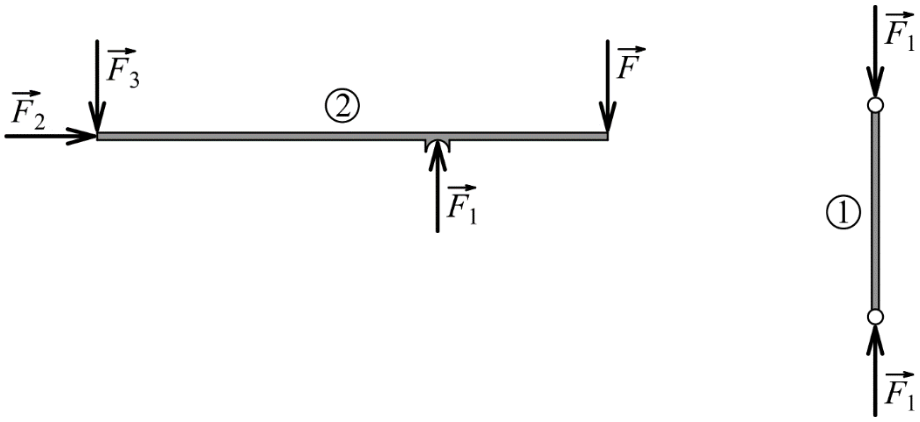
Příklad 3

Navrhněte průměr D příčného průřezu prutu o délce L, je-li u něj požadována bezpečnost vzhledem k meznímu stavu vzpěrné stability alespoň k_{Vmin}?

$$F = 11\,\mathrm{kN}$$
$$a = 450\ \mathrm{mm}$$
$$L = 600\ \mathrm{mm}$$
$$E = 2{,}1\cdot 10^{5}\ \mathrm{MPa}$$
$$\sigma_{\mathrm{K}} = 300\ \mathrm{MPa}$$
$$k_{\mathrm{Vmin}} = 3{,}5$$



Zadaná je soustava dvou prutů, úloha je však zaměřena pouze na zajištění požadované bezpečnosti k_{Vmin} u prutu o délce L, který je vystaven riziku vybočení v důsledku působení tlakové síly. Proveďme nejprve úplné uvolnění a statický rozbor:



$$\mu = 3$$
$$\nu = 0 + 3 = 3$$
$$s = \mu - \nu = 0$$

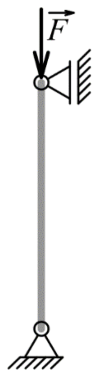
Uložení prutů je staticky určité. Velikost síly $\vec{F_1}$, kterou je prut 1 stlačován, můžeme určit z momentové podmínky pro prut 2 vyjádřené k působišti síly $\vec{F_2}$. Ta má tvar:

$$2F_1 a - 3Fa = 0$$

a odtud plyne:

$$F_1 = \frac{3F}{2}.$$

Dále je třeba určit kritickou sílu F_{V}. Uložení prutu ve všech rovinách odpovídá případu



a $\alpha = \pi$.

Prut 1 má mít kruhový příčný průřez, pro který jsou všechny centrální osy osami hlavními a kvadratický moment ke všem těmto osám má tedy stejnou hodnotu definovanou vztahem:

$$J = \frac{\pi D^4}{64}.$$

Z těchto poznatků vyplývá, že riziko vybočení prutu je ve všech rovinách stejné a pro kritickou sílu v libovolné rovině platí:

$$F_{\mathrm{V}} = \frac{\alpha^2 EJ}{L^2} = \frac{\pi^3 D^4 E}{64 L^2}.$$

Jelikož neznáme průměr *D* prutu, nemůžeme vypočítat štíhlosti λ a λ_{K}, a tedy ani posoudit, který mezní stav nastane dříve. Průměr *D* tedy nejprve navrhneme a potom vypočítáme štíhlost prutu λ. Podmínku bezpečnosti $k_{\mathrm{V}} \geq k_{\mathrm{Vmin}}$ nejprve rozepíšeme do tvaru:

$$k_{\mathrm{V}} = \frac{F_{\mathrm{V}}}{F_1} = \frac{\pi^3 D^4 E}{96 L^2 F} \geq k_{\mathrm{Vmin}}\,.$$

Z této nerovnice můžeme vyjádřit neznámou *D* a získaný výraz vyčíslit:

$$D \geq \left(\frac{96 L^2 F\, k_{\mathrm{Vmin}}}{\pi^3 E} \right)^{1/4} = \ 21{,}3\,\mathrm{mm}\,.$$

Průměr je vhodné vyjádřit celým číslem, zaokrouhlení však musíme provést nahoru, aby byla splněna požadovaná nerovnost. Jelikož žádné další omezení pro volbu průměru ze zadání nevyplývají, můžeme zvolit nejbližší vyšší celé číslo, tedy D = 22 mm.

Nyní je třeba provést kontrolu, zda MSP nepředchází MSVS, což ověříme standardním způsobem:

Určíme si štíhlost prutu: $\lambda = L\sqrt{\frac{S}{J}} = 109.$

Kritická štíhlost: $\lambda_{\mathrm{k}} = \alpha\sqrt{\frac{E}{\sigma_k}} = 83.$

Z relace $\lambda > \lambda_{\mathrm{k}}$ vyplývá, že nejprve dojde k MVSV, takže předpoklad pro výpočet parametru D byl potvrzen.

Neřešení příklady

Doporučujeme si příklad ve cvičení č. 7 rozšířit i o kontrolu k MSVS.