Elementární funkce

Exponenciální funkce

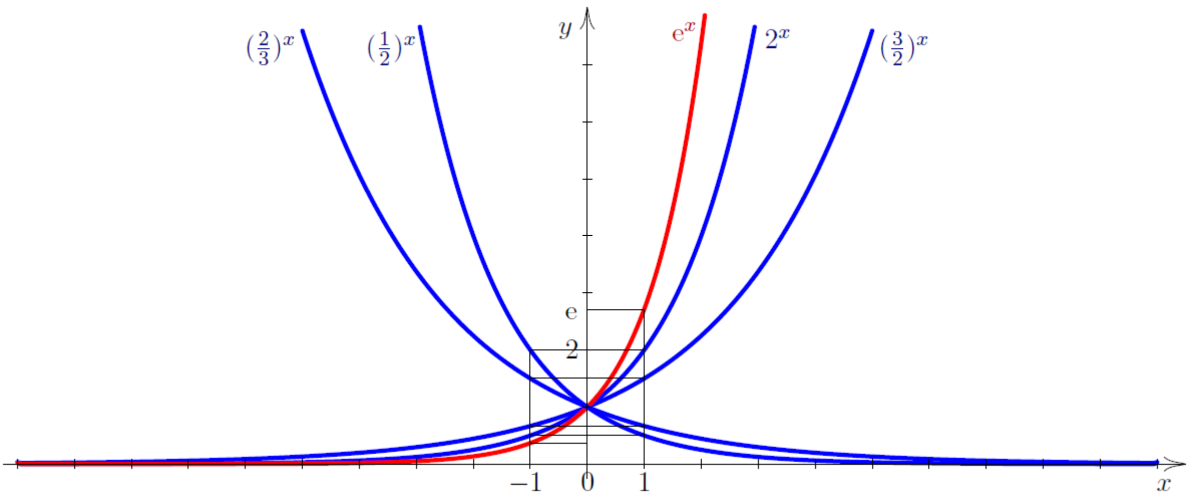
Exponenciální funkce jsou funkce typu a^x, kde exponent $x \in \mathbb{R}$ je proměnná a základ a je pevné kladné číslo různé od jedničky, tedy $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$. Definičním oborem takových funkcí je celé $\mathbb{R}$ a oborem hodnot $(0,\infty)$. Dále se budete setkávat s tzv. „přirozenou exponenciální funkcí“ e^x se základem $a = \mathrm{e}$, kde e je Eulerova konstanta, $\mathrm{e} \doteq 2.7182818$. Místo e^x se někdy píše $\exp(x)$.

Poznámka:
Eulerovu konstantu lze definovat jako limitu:

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Základní užitečné vzorce:

- $a^{x+0} = a^{0+x} = a^x \cdot a^0 = a^x$,
- $a^x \cdot a^{-x} = a^{x+(-x)} = a^0 = 1$,
- $(a^{\frac{1}{x}})^x = a^1 = a$,
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,
- $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$,
- $(a^x)^y = a^{xy}$,
- $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$, kde $y \neq 0$,
- $1^x = 1$ je konstantní funkce a proto se nepovažuje v případě základu $a = 1$ za funkci exponenciální.



Obrázek 1: Exponenciální funkce a^x pro základy $a = \frac{1}{2}, a = \frac{2}{3}, a = \frac{3}{2}, a = 2$ a $a = \mathrm{e}$. Všimněte si symetrie grafů 2^x a $(\frac{1}{2})^x$ a dalších. Platí obecná symetrie grafů a^x a $(\frac{1}{a})^x = a^{-x}$.

Zkuste si načrtnout grafy funkcí $\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{-x}, -\mathrm{e}^x, -\mathrm{e}^{-x}$.

Logaritmické funkce

Jelikož exponenciální funkce a^x jsou pro základ $a \in (0,1)$ klesající a pro $a \in (1,\infty)$ rostoucí, tedy v obou případech funkce prostě, existují k nim funkce inversní zvané logaritmické. Graf logaritmické funkce $y = \log_a x$je zrcadlově symetrický podle osy $y = x$ ke grafu funkce a^x.

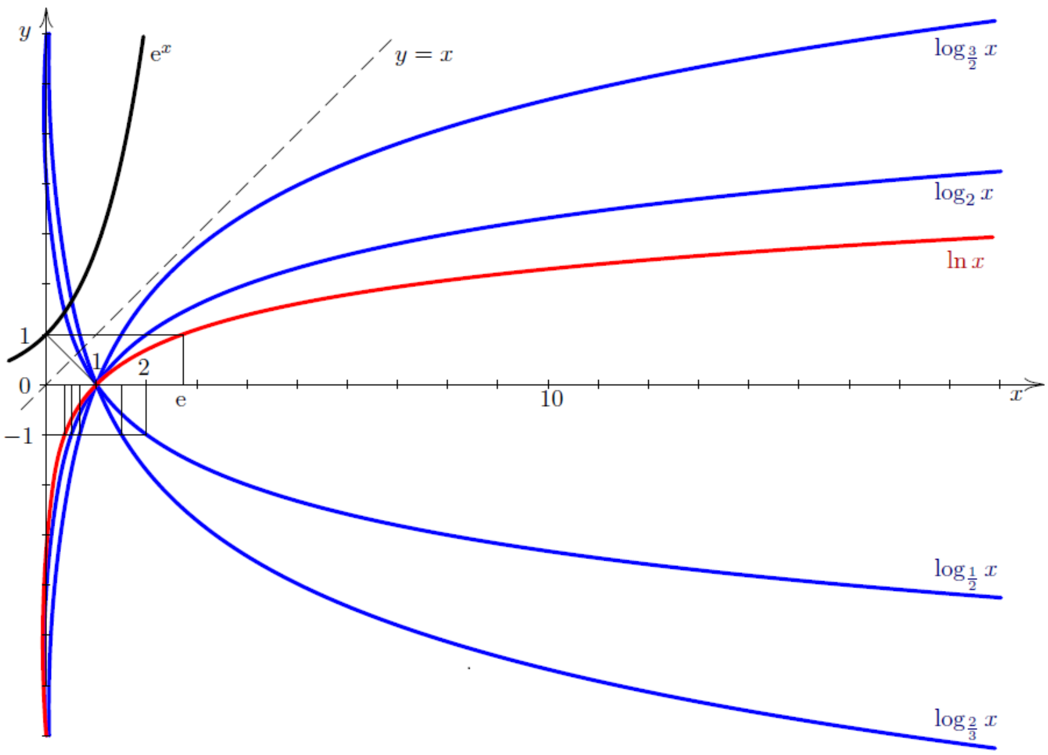
Nechť tedy $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$. Inversní funkce k funkci $f(x) = a^x$ se nazývá **logaritmická funkce o základu** a. Značí se $f(x) = \log_a(x)$ nebo bez závorek $\log_a x$. Definiční obor takových logaritmických funkcí je $D(f) = (0,\infty)$ a oborem hodnot je $(-\infty,\infty)$ a platí:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y.$$

Přirozený logaritmus je logaritmus se základem $a = \mathrm{e}$ a značíme ho $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$. Setkáte se také s **dekadickým logaritmem** se základem $a = 10$, který se často píše bez základu: $\log x = \log_{10} x$ a který je inversní funkcí k funkci 10^x.

Základní užitečné vzorce pro $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$ a $x \in (0,\infty)$:

- $\log_{\mathrm{e}} x = \ln x,\ \log_{10} x = \log x,$
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$
- $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y,$
- $\log_a(x^p) = p \cdot \log_a x,$
- $\log_a(\sqrt[p]{x}) = \frac{1}{p} \cdot \log_a x,$
- $a^x = \mathrm{e}^{x\,\ln a},$
- $\log_b x = \log_a x\,\frac{\ln a}{\ln b},$
- $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}, b^x = (a^x)^{\frac{\ln b}{\ln a}},$
- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$
- $\mathrm{e}^{\ln(xy)} = xy = \mathrm{e}^{\ln x}\mathrm{e}^{\ln y} = \mathrm{e}^{\ln x + \ln y},$
- $\mathrm{e}^{\ln(x/y)} = x/y = \mathrm{e}^{\ln x}/\mathrm{e}^{\ln y} = \mathrm{e}^{\ln x - \ln y},$
- $\mathrm{e}^{\ln(x^p)} = x^p = (\mathrm{e}^{\ln x})^p = \mathrm{e}^{p \ln x},$
- $\mathrm{e}^{\ln(\sqrt[p]{x})} = \sqrt[p]{x} = x^{1/p} = (\mathrm{e}^{\ln x})^{1/p} = \mathrm{e}^{(1/p)\ln x}.$



Obrázek 2: Logaritmické funkce $\log_a x$ pro $a = \frac{1}{2}, a = \frac{2}{3}, a = \frac{3}{2}, a = 2$. Všimněte si, že platí obecná zrcadlová symetrie podle osy c grafů $\log_a x$ a $\log_{1/a} x$.

Zkuste si načrtnout grafy funkcí $\log(x), \log(-x), -\log(x), -\log(-x)$.

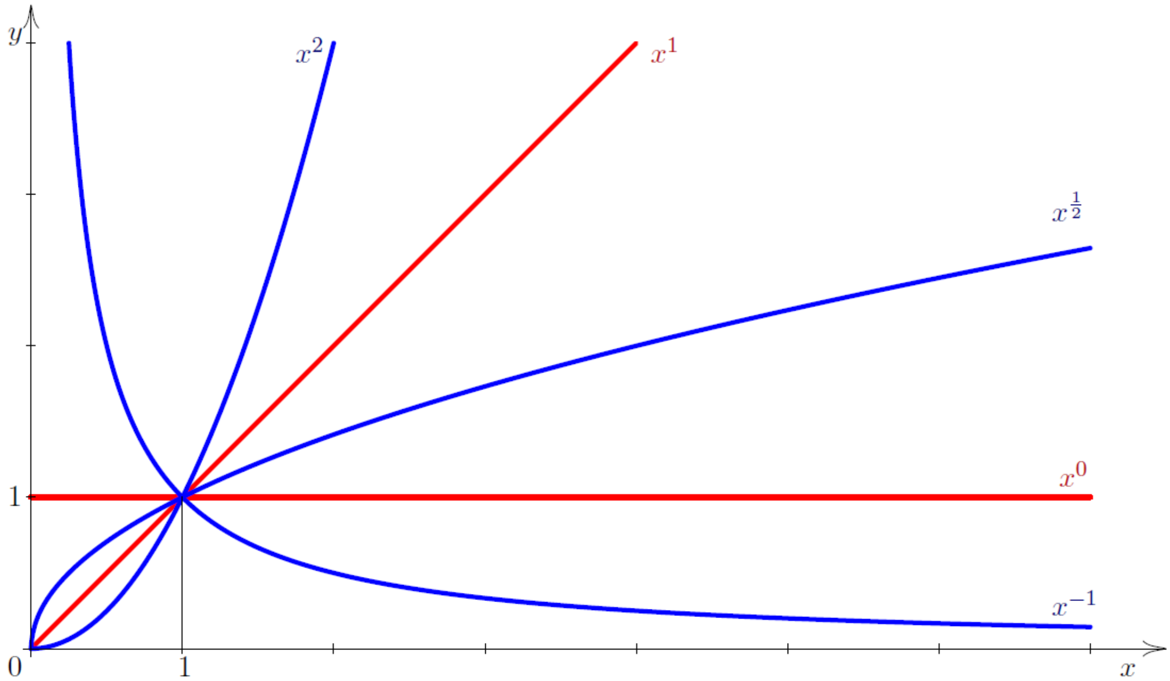
Obecná mocninná funkce

U exponenciálních funkcí byl pevný základ a exponentem byla proměnná. U mocninných funkcí je to přesně naopak. Mocninné funkce jsou definovány pro exponenty $p \in \mathbb{N}$ na celém $\mathbb{R}$ a pro záporné celé exponenty na celém $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Nechť tedy $p \in \mathbb{R}$. Funkce $f(x) = x^p$ je definována vztahem $x^p = \mathrm{e}^{p \ln x}$ pro všechna kladná $x \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Pro $p > 0$ máme $0^p = 0$. V případě celých exponentů $p \in \mathbb{Z}$ lze funkci rozšířit pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, navíc pokud $p \in \mathbb{N}$, funkce x^p je definována na celém $\mathbb{R}$.

Základní užitečné vzorce:

- $(xy)^p = x^p \cdot y^p$,
- $\left(\frac{x}{y}\right)^p = \frac{x^p}{y^p}$.



Obrázek 3: Mocninná funkce x^p pro $p = -1, p = 0, p = \frac{1}{2}, p = 1$ a $p = 2$ na intervalu $(0, \infty)$.

Zkuste si načrtnout grafy funkcí $x^1, x^{-1}, x^2, x^{-2}, -x^2, -x^{-2}$ na celém $\mathbb{R}$.

Goniometrické funkce

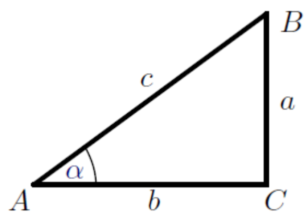
Připomeňme si pro začátek, co znáte ze střední školy. Goniometrické funkce se definovaly pro úhel α pravoúhlého trojúhelníku $\triangle ABC$ s úhlem α při vrcholu A, pravým úhlem při vrcholu C, odvěsnami a přeponou jako na obrázku.

a) $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, tj. poměr délek protilehlé odvěsny ku přeponě,

b) $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, tj. poměr přilehlé odvěsny ku přeponě,

c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, tj. poměr poměr protilehlé odvěsny ku přilehlé odvěsně

d) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$, tj. poměr poměr přilehlé odvěsny ku protilehlé odvěsně.



Obrázek 4: Značení trojúhelníku $\triangle ABC$.

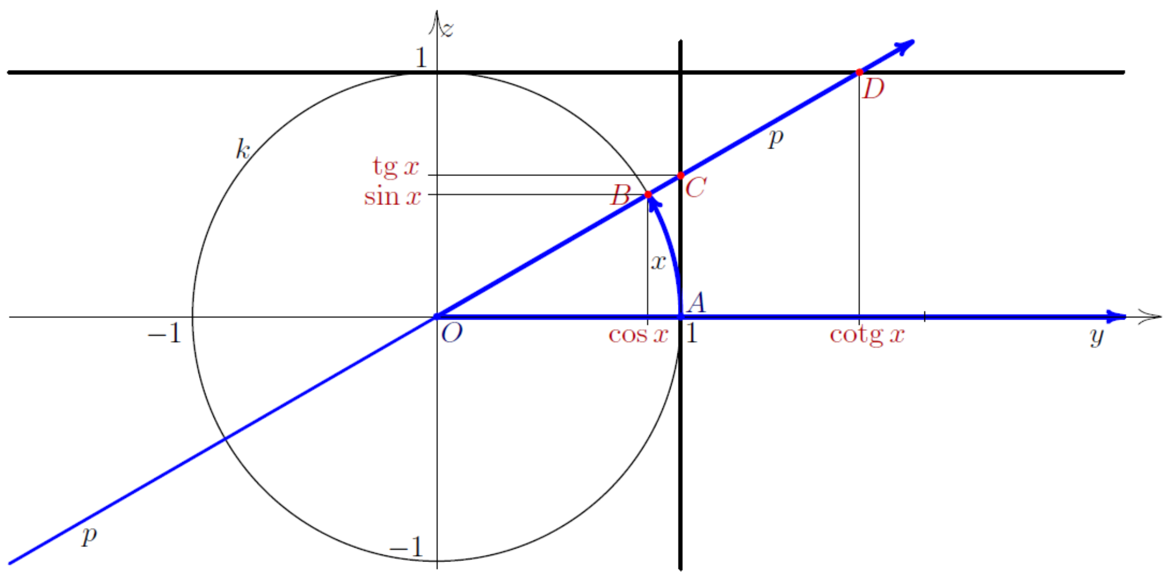
V literatuře anglofonních zemí, nebo při kontrole výsledku na *Wolframalpha* se často také setkáte s funkcemi sekans a kosekans. Sekans je definován jako $\sec\alpha = 1/\cos\alpha$ a kosekans jako $\operatorname{cosec}\alpha = 1/\sin\alpha$.

Délka jednotkové kružnice je 2π. Každá chytřejší kalkulačka zvládne přepočítávat úhly na násobky radiánů, pokud byste ale o kalkulačku nedopatřením přišli, můžete využít následující: Délka jednotkové kružnice je 2π, tedy $180°$ odpovídá π radiánům. Přepočet velikosti úhlu v radiánech na stupně a opačně je tento:

$$x\,[\text{radiánů}] = x \cdot \frac{180}{\pi}\,[\text{stupňů}] \quad \text{a naopak} \quad x\,[\text{stupňů}] = x \cdot \frac{\pi}{180}\,[\text{radiánů}].$$

Zároveň je dobré umět převádět základní úhly ze stupňů na násobky radiánů a naopak pomocí následující tabulky.

Stupně	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	540°	720°
Radiány	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	3π	4π



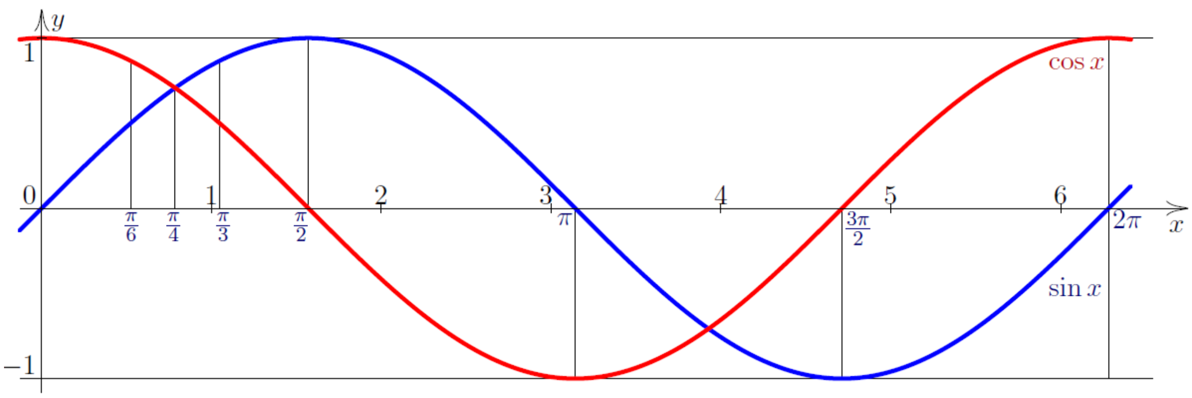
Obrázek 5: Funkce $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$.

Goniometrické funkce jsou odvozeny z jednotkové kružnice k se středem v počátku $O = [0, 0]$, kde uvažujeme orientovaný úhel s počátečním ramenem $\overrightarrow{OA}$ směřujícím proti směru hodinových ručiček a koncovým ramenem $\overrightarrow{OB}$, přičemž body $A = [1, 0]$ a B jsou průsečíky ramen s kružnicí k. Potom délka orientovaného úhlu AB určuje velikost úhlu x. Bod B má pak souřadnice $[\cos x, \sin x]$. Na vodorovné ose tedy odečítáme kosinus úhlu x a na svislé ose sinus úhlu x. Funkce tangens a kotangens jsou definovány jako podíly:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Rozhodně byste si měli zapamatovat následující tabulku. Jedná se o hodnoty goniometrických funkcí pro základní nejčastěji používané úhly. Dobrou pomůckou je zapamatování si například hodnot funkcí $\sin x$ a $\operatorname{tg} x$. Obě funkce jsou na intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$, naproti tomu funkce $\cos x$ a cotg jsou na daném intervalu klesající a jejich hodnoty jsou v přesně obráceném pořadí.

x	0	$\frac{\pi}{6}$, $30°$	$\frac{\pi}{4}$, $45°$	$\frac{\pi}{3}$, $60°$	$\frac{\pi}{2}$, $90°$	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$+ \nearrow$	$+ \searrow$	$- \searrow$	$- \nearrow$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$+ \searrow$	$- \searrow$	$- \nearrow$	$+ \nearrow$
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$+ \nearrow$	$- \nearrow$	$+ \nearrow$	$- \nearrow$
$\operatorname{cotg} x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$+ \searrow$	$- \searrow$	$+ \searrow$	$- \searrow$



Obrázek 6: Průběh funkcí $\sin x, \cos x$.

Zde se hodí zmínit některé důležité vlastnosti, které byste měli znát.

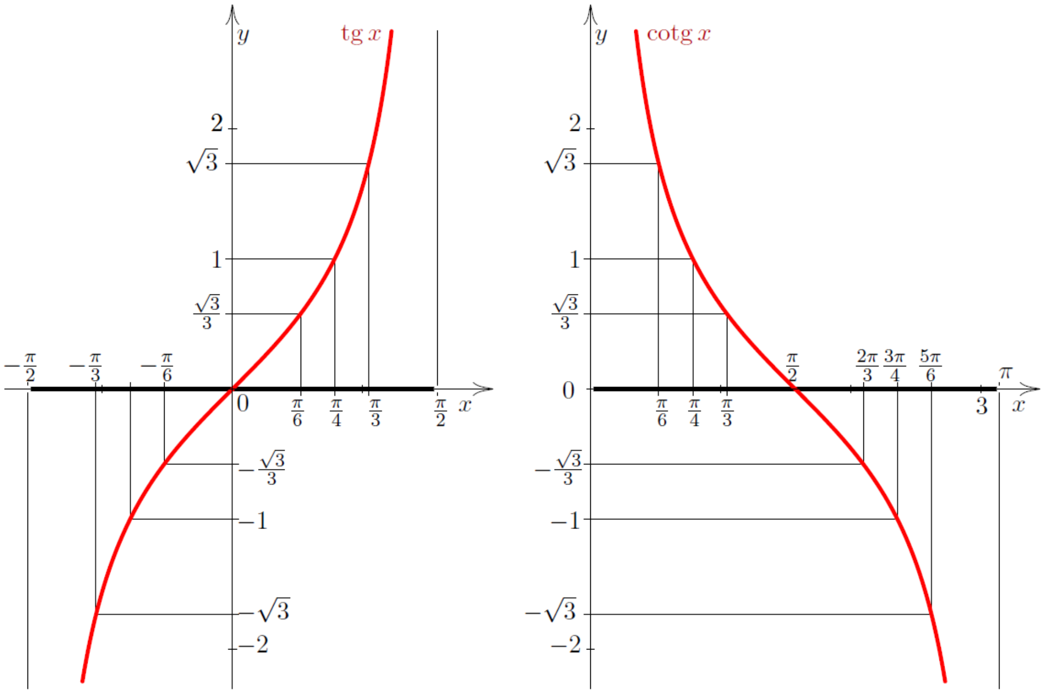
a) Definiční obory:

$$D(\sin x) = (-\infty, \infty), \qquad D(\cos x) = (-\infty, \infty),$$
$$D(\operatorname{tg} x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\tfrac{\pi}{2} + k\pi, \tfrac{\pi}{2} + k\pi\right), \qquad D(\operatorname{cotg} x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, k\pi + \pi).$$

b) Obory hodnot:

$$H(\sin x) = H(\cos x) = \langle -1, 1 \rangle, \qquad H(\operatorname{tg} x) = H(\operatorname{cotg} x) = (-\infty, \infty).$$

c) Funkce $\sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x$ jsou **liché** a funkce $\cos x$ je **sudá**.



Obrázek 7: Průběh funkcí $\mathrm{tg}\,x, \mathrm{cotg}\,x$.

Užitečné vztahy:

- $\sin^2 x = (\sin x)^2$,
- $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$,
- $\mathrm{tg}\,x = \mathrm{cotg}(\frac{\pi}{2} - x)$,
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
- $\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$,
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$,
- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$,
- $\sin u + \sin v = 2 \cdot \sin\frac{u+v}{2} \cdot \cos\frac{u-v}{2}$,
- $\sin u - \sin v = 2 \cdot \cos\frac{u+v}{2} \cdot \sin\frac{u-v}{2}$,
- $\sin x^2 = \sin(x^2)$,
- $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$,
- $\mathrm{cotg}\,x = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - x)$,
- $\mathrm{tg}\,x \cdot \mathrm{cotg}\,x = 1$,
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$,
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$,
- $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$,
- $\cos u + \cos v = 2 \cdot \cos\frac{u+v}{2} \cdot \cos\frac{u-v}{2}$,
- $\cos u - \cos v = -2 \cdot \sin\frac{u+v}{2} \cdot \sin\frac{u-v}{2}$.

Zkuste si načrtnout grafy funkcí $\sin(\frac{1}{x}), x \cdot \sin(\frac{1}{x}), \sin(2x), \sin(\frac{x}{2}), \cos(2x), \cos(\frac{x}{2})$.

Cyklometrické funkce

Cyklometrické funkce jsou inversní funkce ke goniometrickým. Je potřeba mít na paměti, že goniometrické funkce jsou periodické, a tím pádem nejsou prosté. Proto při hledání inversní funkce musíte vždy určit takový interval, aby na něm byla goniometrická funkce prostá. Ze všech možných intervalů vybíráme intervaly nejblíže k nule, které obsahují kladná čísla, tedy:

- $\sin x$ je prostý z $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ na $\langle -1, 1\rangle$, inversní funkcí je $\arcsin x$,
- $\cos x$ je prostý z $\langle 0, \pi\rangle$ na $\langle -1, 1\rangle$, inversní funkcí je $\arccos x$,
- $\operatorname{tg} x$ je prostý z $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ na $\langle -\infty, \infty\rangle$, inversní funkcí je $\operatorname{arctg} x$,
- $\operatorname{cotg} x$ je prostý z $\langle 0, \pi\rangle$ na $\langle -\infty, \infty\rangle$, inversní funkcí je $\operatorname{arccotg} x$.

Cyklometrické funkce jsou tedy definovány následovně:

a) Funkce **arkus sinus** je inversní k funkci sinus na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, tj. pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ platí

$$\arcsin x = y, \quad \text{pokud} \quad \sin y = x \quad \text{a} \quad y \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\rangle.$$

b) Funkce **arkus kosinus** je inversní k funkci kosinus na $\langle 0, \pi\rangle$, tj. pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ platí

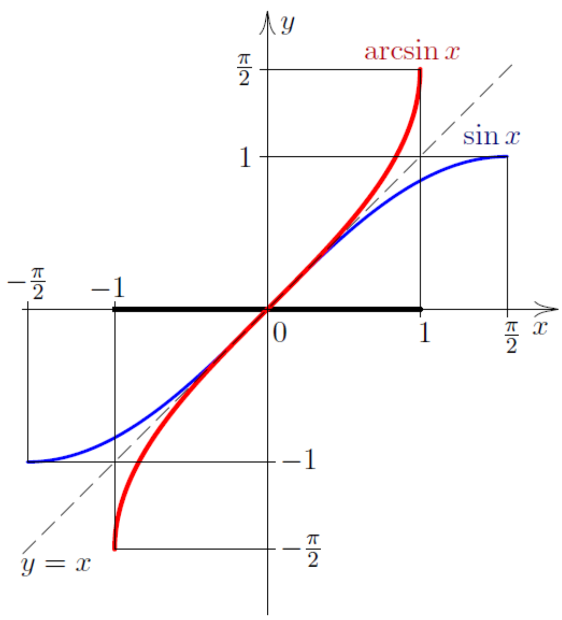
$$\arccos x = y, \quad \text{pokud} \quad \cos y = x \quad \text{a} \quad y \in \langle 0, \pi\rangle.$$

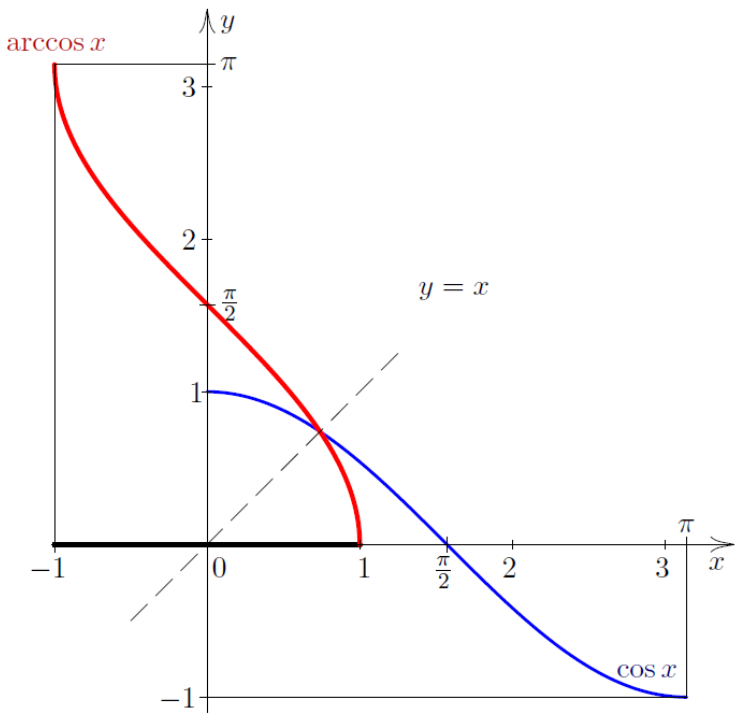
c) Funkce **arkus tangens** je inversní k funkci tangens na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, tj. pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{arctg} x = y, \quad \text{pokud} \quad \operatorname{tg} y = x \quad \text{a} \quad y \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\rangle.$$

d) Funkce **arkus kotangens** je inversní k funkci kotangens na $\langle 0, \pi\rangle$, tj. pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{arccotg} x = y, \quad \text{pokud} \quad \operatorname{cotg} y = x \quad \text{a} \quad y \in \langle 0, \pi\rangle.$$

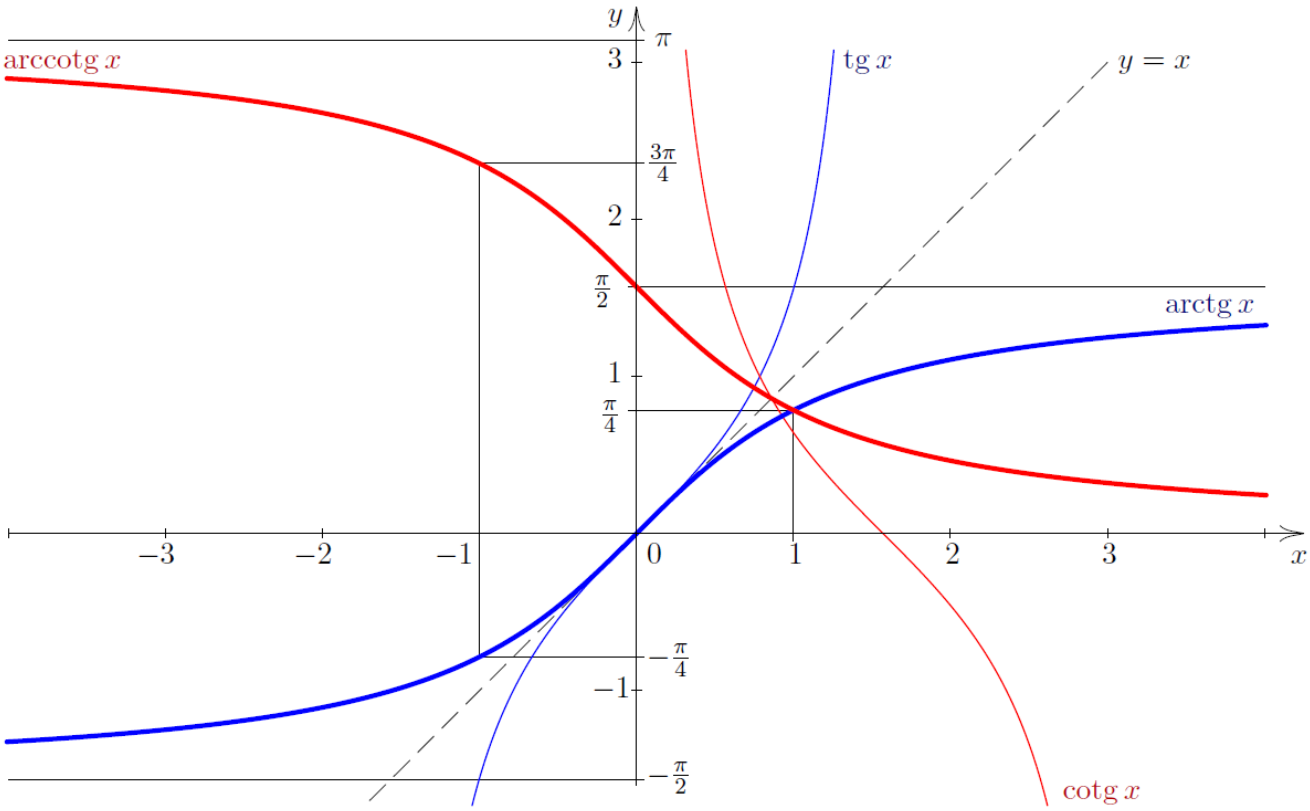




Obrázek 8: Průběh funkcí $\sin x, \cos x$ a k nim inversních funkcí $\arcsin x, \arccos x$.

Zde se hodí zmínit některé důležité vlastnosti, které byste měli znát.

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$(-1,1)$
arcsin$x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$
arccos$x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\searrow$



Obrázek 9: Průběh funkcí tg x, cotg x a k nim inversních funkcí arctg x, arccotg x.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$(-\infty,\infty)$
arctg x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$
arccotg$x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\searrow$

a) Definiční obory:

$$D(\arcsin x) = D(\arccos x) = \langle -1, 1\rangle, \qquad D(\mathrm{arctg}\, x) = D(\mathrm{arccotg}\, x) = (-\infty, \infty).$$

b) Obory hodnot:

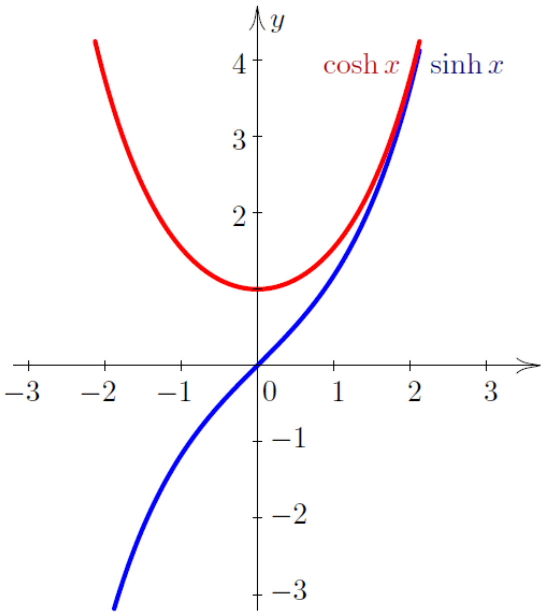
$$H(\arcsin x) = \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\rangle \qquad H(\arccos x) = \langle 0, \pi\rangle,$$
$$H(\mathrm{arctg}\, x) = (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), \qquad H(\mathrm{arccotg}\, x) = (0, \pi).$$

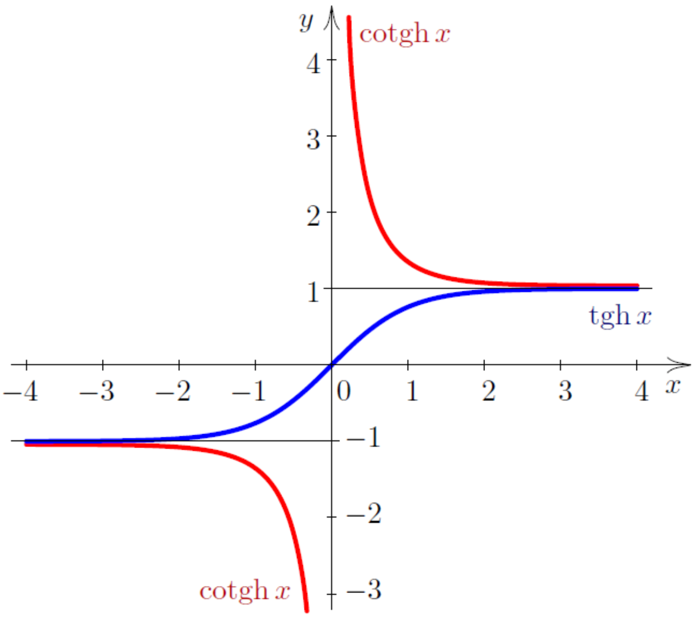
c) Funkce $\arcsin x, \arccos x$ jsou rostoucí a funkce $\mathrm{arctg}\, x, \mathrm{arccotg}\, x$ jsou klesající.

Hyperbolické funkce

Hyperbolické funkce mají velice podobné vlastnosti jako goniometrické funkce a mají některé aplikace v mechanice.

- Hyperbolický sinus $\sinh x$:
$$\sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$
- Hyperbolický kosinus $\cosh x$:
$$\cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$
- Hyperbolický tangens $\operatorname{tgh} x$:
$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$
- Hyperbolický kotangens $\operatorname{cotgh} x$:
$$\operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$





Obrázek 10: Průběh funkcí $\sinh x, \cosh x, \operatorname{tgh} x, \operatorname{cotgh} x$.

Zde se hodí zmínit některé důležité vlastnosti, které byste měli znát.

a) Definiční obory:
$$D(\sinh x) = \mathbb{R} \qquad D(\cosh x) = \mathbb{R},$$
$$D(\operatorname{tgh} x) = \mathbb{R}, \qquad D(\operatorname{cotgh} x) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

b) Obory hodnot:
$$H(\sinh x) = \mathbb{R}, \qquad H(\cosh x) = \langle 1, \infty \rangle,$$
$$H(\operatorname{tgh} x) = (-1, 1), \qquad H(\operatorname{cotgh} x) = (\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

c) Funkce $\sinh x, \operatorname{tgh} x, \operatorname{cotgh} x$ jsou liché a funkce $\cosh x$ je sudá.

Transformace grafů funkcí

Měli byste znát nejenom elementární funkce ale i to, jak se mění jejich grafy při jednoduchých lineárních transformacích.

Záměna hodnoty funkce, tj. závisle proměnné y

Mějme funkci $f(x)$ s definičním oborem $D(f) = \langle a, b\rangle$ a oborem hodnot $H(f) = \langle A, B\rangle$. Při následujících transformacích se mění **obor hodnot** a graf funkce.

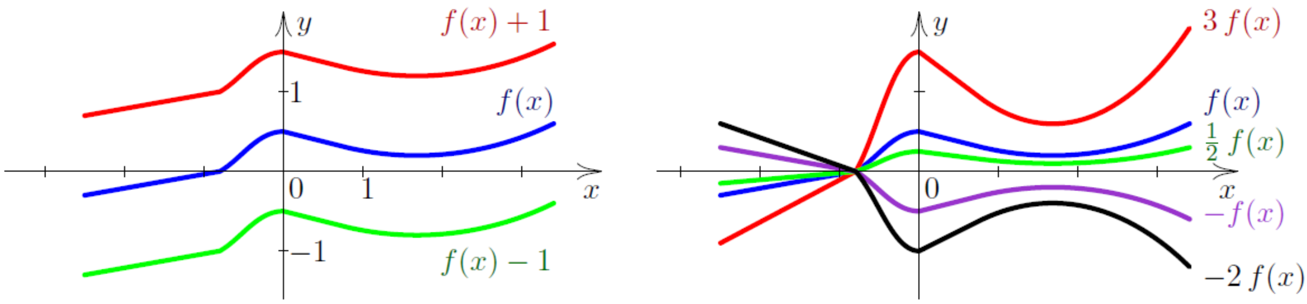
a) **Přičtení konstanty** $f(x) + D$ - Obor hodnot se posune o D. Pokud je tedy $D > 0$ graf se posune o D „nahoru“, pokud záporné, pak o D „dolů“.

b) **Násobek konstanty** $C \cdot f(x)$ - Pokud je $C > 1$ obor hodnot se C-krát „roztáhne“ ve svislém směru. Pokud je $0 < C < 1$, graf funkce se C-krát „stáhne“. Analogicky, pokud je $C < -1$, graf se převrátí kolem osy x a $|C|$-krát se „roztáhne“. Pokud je $-1 < C < 0$, graf se převrátí a $|C|$-krát se „stáhne“.

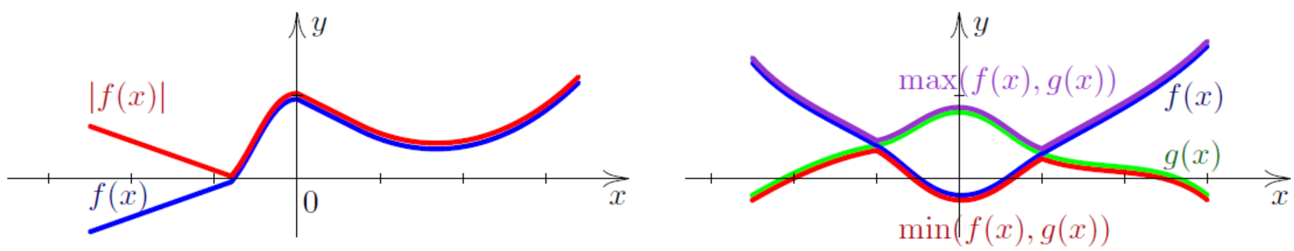
c) **Absolutní hodnota** $|f(x)|$ - Pokud má graf funkce záporné funkční hodnoty, daná část grafu se „překlopí“ souměrně kolem osy x do kladných hodnot.

d) **Maximum** $\max(f(x), g(x))$ - Maximum dvou funkcí se stejným definičním oborem vybere z obou grafů vyšší funkční hodnoty.

e) **Minimum** $\min(f(x), g(x))$ - Minimum dvou funkcí se stejným definičním oborem vybere z obou grafů nižší funkční hodnoty.



Obrázek 11: Posunutí hodnot funkce a násobek hodnot funkce.



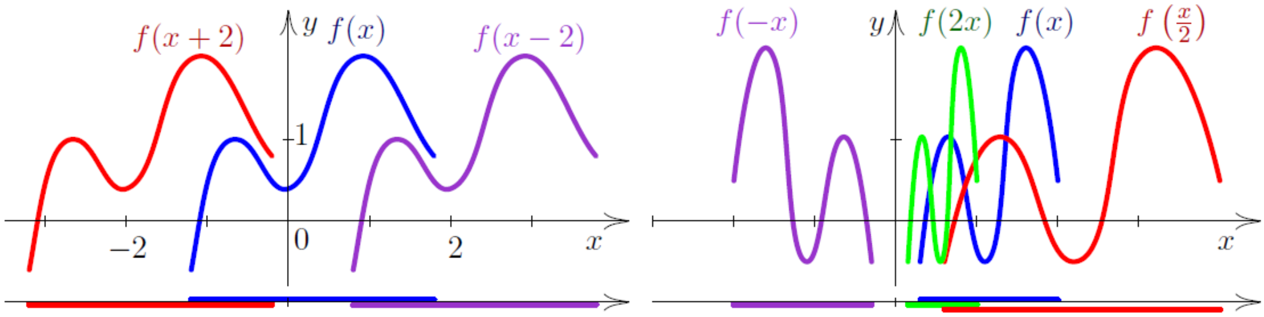
Obrázek 12: Funkce absolutní hodnota, minimum a maximum ze dvou funkcí.

Záměna argumentu funkce, tj. závislé proměnné x
Mějme funkci $f(x)$ s definičním oborem $D(f) = \langle a, b\rangle$ a oborem hodnot $H(f) = \langle A, B\rangle$. Při následujících lineárních transformacích se mění **definiční obor** a graf funkce.

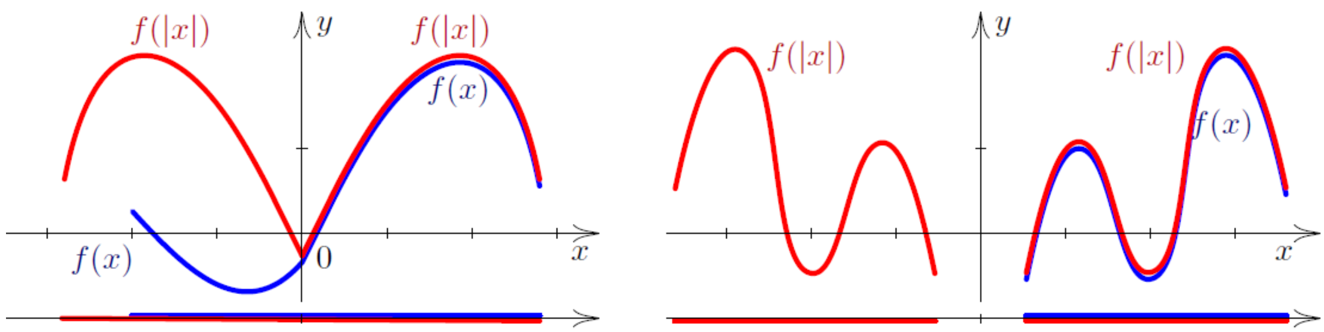
a) **Přičtení konstanty k argumentu** $f(x + d)$ - Definiční obor se posune o d doleva, pokud je $d > 0$. Pokud je $d < 0$, pak se posune o $|d|$ doprava.

b) **Násobek argumentu** $f(c \cdot x)$ - Pokud je $c > 1$, graf se ve vodorovném směru c-krát „zúží“, protože argument roste c-krát rychleji. Pokud je $0 < c < 1$, funkce se c-krát „roztáhne“. Analogicky, pokud je $c < -1$, graf se „otočí“ kolem osy y a $|c|$-krát se „zúží“. Pokud je $-1 < c < 0$, graf se „otočí“ kolem osy y a $|c|$-krát se „zúží“.

c) **Absolutní hodnota argumentu** $f(|x|)$ - Pro kladná x se graf funkce nezmění. Pro záporná x se graf „překlopí“ kolem osy y do kladné poloroviny.



Obrázek 13: Funkce $f(x + d)$ s posunutým argumentem a $f(cx)$ s vynásobeným argumentem.



Obrázek 14: Funkce $f(|x|)$ s argumentem v absolutní hodnotě.