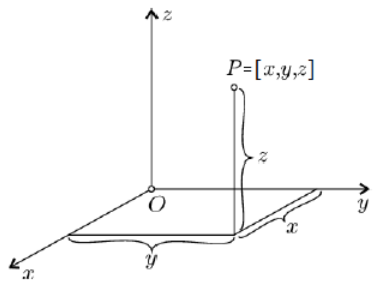
# Vektorový počet

Objekty v rovině i prostoru popisujeme pomocí čísel a rovnic, které popisují objekty jako přímky, křivky, roviny, plochy a další. Hlavní aplikace této partie matematiky je zejména v konstrukci strojů a řízení například obráběcích strojů. Pro nás nejdůležitější objekty se logicky nachází ve 2D a 3D. Dané prostory popisujeme pomocí kartézských součinů množiny reálných čísel.

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

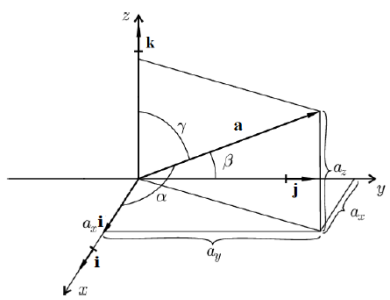
V prostoru uvažujeme bod $O$, který nazýváme počátek souřadné soustavy, a tři na sebe navzájem kolmé osy $x, y, z$. V takové soustavě jsme pak schopni každý bod reprezentovat trojicí čísel $[x, y, z]$. Bod zapisujeme $P = [x, y, z]$, nebo také $P[x, y, z]$. Případným vynecháním osy $z$ dostáváme osami $x$ a $y$ definovanou souřadnicovou soustavu v rovině.




Obrázek 1: Souřadnice $[x, y, z]$ charakterizují polohu bodu $P = [x, y, z]$ v dané pravotočivé soustavě (viz pravidlo pravé ruky - palec ukazuje ve směru osy $z$).

Budeme využívat běžné značení, které znáte ze střední školy. Bod tedy zapisujeme jako uspořádanou trojici $A = [x_A, y_A, z_A]$ a vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Pokud máme vektor určený dvěma body $A$ a $B$ s počátkem v bodě $A$, pak budeme psát $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

Uvažujme nyní vektor $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ jako nenulový vektor v $\mathbb{R}^3$. Kolmé průměty vektoru do os $x, y, z$ budeme označovat $a_x, a_y, a_z$. Úhly, které vektor $\mathbf{a}$ svírá s osami $x, y, z$ označíme postupně $\alpha, \beta, \gamma$. Pak čísla $\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)$ nazveme *směrové kosíny* vektoru $\mathbf{a}$. **Velikost**, nebo také **normu** vektoru $\mathbf{a}$ značíme $|\mathbf{a}|$, nebo také $||\mathbf{a}||$, a označujeme tak jeho délku. Jednotkové vektory ve směru os $x, y, z$ snažíme $\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$.




Obrázek 2: Vyjádření vektoru pomocí jeho složek $a_x, a_y, a_z$, vyznačené úhly $\alpha, \beta, \gamma$, které vektor svírá s osami a jednotkové vektory $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Pro výše uvedené pojmy platí následující vztahy:

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad a_x = ||\mathbf{a}|| \cdot \cos(\alpha), \quad a_y = ||\mathbf{a}|| \cdot \cos(\beta), \quad a_z = ||\mathbf{a}|| \cdot \cos(\gamma).$$

**Poznámka:**
Norma vektoru nijak neovlivňuje jeho směr. Například pokud máme vektory $\mathbf{a} = (3, 6, 3)$ a $\mathbf{b} = (1, 2, 1)$, ukazují stejným směrem, ale mají jinou normu.

**Příklad 1.** Vypočtěte normy vektorů $\mathbf{a} = (3, 6, 3)$ a $\mathbf{b} = (1, 2, 1)$.

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (3)^2} = \sqrt{9 + 36 + 9} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6},$$
$$||\mathbf{b}|| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6} = \sqrt{6}.$$

**Součet a skalární násobek vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$** definujeme vztahy:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3),$$
$$c \cdot \mathbf{u} = c \cdot (u_1, u_2, u_3) = (c \cdot u_1, c \cdot u_2, c \cdot u_3),$$

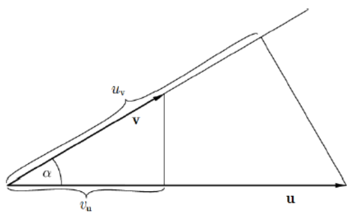
kde $c \in \mathbb{R}$ je konstanta.

## Skalární součin

**Skalární součin vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$** definujeme jako:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||\cos(\alpha),$$
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3,$$

kde úhel $\alpha$ je úhel, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$, a $u_i, v_i$ jsou složky vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Výsledkem skalárního součinu je tedy vždy **číslo**.




Obrázek 3: Geometrický význam skalárního součinu $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ||\mathbf{u}|| \cdot v_u = ||\mathbf{v}|| \cdot u_v$, kde $v_u$ je kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}$ na přímku určenou směrem vektoru $\mathbf{u}$.

**Příklad 2.** Vypočítejte skalární součin vektorů $\mathbf{a} = (3, 6, 3)$ a $\mathbf{b} = (1, 2, 1)$.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 3 + 12 + 3 = 18$$

**Poznámka:**
Skalární součin dvou na sebe kolmých vektorů je roven 0, protože úsečky spolu svírají úhel 90°, a tedy průmět jednoho vektoru do druhého má nulovou délku.

**Poznámka:**
Skalární součin je komutativní, platí tedy $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.

**Poznámka:**
Z výše uvedeného platí následující důležitá rovnost:

$$\cos(\alpha) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||} = \frac{|u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}},$$

kde $\cos(\alpha)$ je kosinus úhlu, který svírají vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.

## Vektorový součin

**Vektorový součin** vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ budeme zapisovat jako $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ a platí

a) výsledný vektor $\mathbf{w}$ je kolmý na vektory $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$ a platí $\mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \cdot \sin(\alpha)$. Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou vždy takové orientace, že tvoří pravotočivý systém (analogie s osami $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ v tomto pořadí), kde $\alpha$ je úhel, který vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ svírají.

b) $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$,

kde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ jsou jednotkové vektory souřadnicových os.

**Poznámka:**
Pro výpočet vektorového součinu lze součin rozepsat jako:

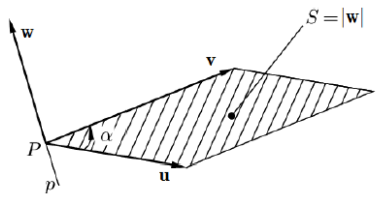
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Vektorový součin je navíc antikomutativní. Platí tedy $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

**Příklad 3.** Vypočtěte vektorový součin vektorů $\mathbf{u} = (2, 1, 3)$ a $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left( \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-5, 1, 3).$$

**Poznámka:**
Výsledkem vektorového součinu $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ je vektor $\mathbf{w}$, který je kolmý na vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Jeho velikost se rovná plošnému obsahu $S = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \cdot \sin(\alpha)$ rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Vektorový součin dvou lineárně závislých vektorů je roven 0, protože rovnoběžník určený lineárně závislými vektory degeneruje na úsečku s nulovým plošným obsahem.




Obrázek 4: Geometrický význam vektorového součinu $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ a $S = ||\mathbf{w}|| = ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \cdot \sin(\alpha)$.

**Poznámka:**
Z dříve uvedených definic pro skalární a vektorový součin plynou následující užitečné vztahy:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|}{||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||}, \qquad \sin(\alpha) = \frac{||\mathbf{u} \times \mathbf{v}||}{||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||}$$

## Smíšený součin

**Smíšený součin** vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ zapíšeme jako $[\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w}]$. Výsledkem smíšeného součinu je skalár, který získáme pomocí vztahu $[\mathbf{u}\ \mathbf{v}\ \mathbf{w}] = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

**Poznámka:**
Absolutní hodnota smíšeného součinu je rovna objemu rovnoběžnostěnu definovaného vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

Nechť jsou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, pak lze smíšený součin spočítat jako determinant

$$[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Smíšený součin není komutativní. Při změně pořadí vektorů se mění znaménko podle znaménka permutace (sudá permutace beze změny, lichá se změnou znaménka).

$$[\mathbf{u}\,\mathbf{v}\,\mathbf{w}] = [\mathbf{v}\,\mathbf{w}\,\mathbf{u}] = [\mathbf{w}\,\mathbf{u}\,\mathbf{v}] = -[\mathbf{u}\,\mathbf{w}\,\mathbf{v}] = -[\mathbf{v}\,\mathbf{u}\,\mathbf{w}] = -[\mathbf{w}\,\mathbf{v}\,\mathbf{u}].$$

# Příklady

## Základní operace s vektory

1. Vypočítejte normu vektoru $\mathbf{a}$:
   a) $\mathbf{a} = (1, 4, 7)$, $\left[||\mathbf{a}|| = \sqrt{66}\right]$,
   b) $\mathbf{a} = (-2, 4, -3)$, $\left[||\mathbf{a}|| = \sqrt{29}\right]$,
   c) $\mathbf{a} = (4, 0, -3)$, $[||\mathbf{a}|| = 5]$.

2. Vypočítejte $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, jsou-li dány vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:
   a) $\mathbf{a} = (1, 2, 4), \mathbf{b} = (2, 3, 5)$, $[\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, 5, 9)]$,
   b) $\mathbf{a} = (-2, 3, -1), \mathbf{b} = (1, 4, 3)$, $[\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-1, 7, 2)]$,
   c) $\mathbf{a} = (0, 3, 2), \mathbf{b} = (-1, -2, 4)$, $[\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-1, 1, 6)]$.

3. Zjistěte, jaké úhly svírá vektor $\mathbf{a}$ s osami $x, y, z$:
   a) $\mathbf{a} = (2, -3, 4)$, $[\alpha \doteq 68,2°, \beta \doteq 123,9°, \gamma \doteq 42°]$,
   b) $\mathbf{a} = (-1, 2, 2)$, $[\alpha \doteq 109,5°, \beta \doteq 48,2°, \gamma \doteq 48,2°]$,
   c) $\mathbf{a} = (4, 5, -3)$, $[\alpha \doteq 55,6°, \beta = 45°, \gamma \doteq 115,1°]$.

## Skalární součin

1. Spočtěte skalární součin $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:
   a) $\mathbf{a} = (1, 2, 4), \mathbf{b} = (2, 3, 5)$, $[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 28]$,
   b) $\mathbf{a} = (-2, 3, -1), \mathbf{b} = (1, 4, 3)$, $[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 7]$,
   c) $\mathbf{a} = (0, 3, 2), \mathbf{b} = (-1, -2, 4)$, $[\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2]$.

2. Spočítejte pomocí skalárního úhel $\alpha$ vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:
   a) $\mathbf{a} = (1, 2, 4), \mathbf{b} = (2, 3, 5)$, $[\alpha \doteq 7,6°]$,
   b) $\mathbf{a} = (-2, 3, -1), \mathbf{b} = (1, 4, 3)$, $[\alpha \doteq 68,5°]$,
   c) $\mathbf{a} = (0, 3, 2), \mathbf{b} = (-1, -2, 4)$, $[\alpha \doteq 83°]$.

## Vektorový součin

1. Spočítejte vektorový součin vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:
   a) $\mathbf{a} = (1, -2, 3), \mathbf{b} = (2, -2, -3)$ $[\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (12, 9, 2)]$
   b) $\mathbf{a} = (-2, 1, 3), \mathbf{b} = (1, 0, 3)$ $[\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (3, 9, -1)]$
   c) $\mathbf{a} = (4, 5, -1), \mathbf{b} = (-2, 2, 0)$ $[\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2, 2, 18)]$

2. Spočítejte pomocí vektorového součinu úhel $\alpha$ vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:
   a) $\mathbf{a} = (4, 1, -2), \mathbf{b} = (1, 5, 3)$ $[\alpha \doteq 83,6°]$
   b) $\mathbf{a} = (1, 0, 8), \mathbf{b} = (2, 4, -3)$ $[\alpha \doteq 59,6°]$
   c) $\mathbf{a} = (4, 2, -5), \mathbf{b} = (-2, 2, 3)$ $[\alpha \doteq 46,6°]$

3. Spočítejte plochu $S$ rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:
   a) $\mathbf{a} = (4, 1, -2), \mathbf{b} = (1, 5, 3)$ $[S \doteq 26,94\, j^2]$
   b) $\mathbf{a} = (1, 0, 8), \mathbf{b} = (2, 4, -3)$ $[S \doteq 37,43\, j^2]$
   c) $\mathbf{a} = (4, 2, -5), \mathbf{b} = (-2, 2, 3)$ $[S \doteq 20,1\, j^2]$

## Smíšený součin

1. Vypočítejte smíšený součin vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$:
   a) $\mathbf{a} = (4, 2, -1), \mathbf{b} = (1, 2, 6), \mathbf{c} = (0, -1, 1)$ $[[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = 31]$
   b) $\mathbf{a} = (2, -3, 1), \mathbf{b} = (1, 2, 3), \mathbf{c} = (4, 2, -2)$ $[[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = -68]$
   c) $\mathbf{a} = (1, -5, 2), \mathbf{b} = (4, 2, 3), \mathbf{c} = (2, 1, -1)$ $[[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = -55]$

2. Vypočítejte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$:
   a) $\mathbf{a} = (4, 2, -1), \mathbf{b} = (1, 2, 6), \mathbf{c} = (0, -1, 1)$ $[[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = 31\, j^3]$
   b) $\mathbf{a} = (2, -3, 1), \mathbf{b} = (1, 2, 3), \mathbf{c} = (4, 2, -2)$ $[[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = 68\, j^3]$
   c) $\mathbf{a} = (1, -5, 2), \mathbf{b} = (4, 2, 3), \mathbf{c} = (2, 1, -1)$ $[[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}] = 55\, j^3]$