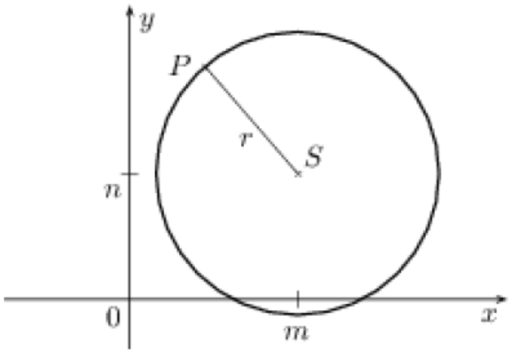
Kvadratické křivky - Kuželosečky

Jsou to křivky, jejichž rovnice obsahují kvadratické členy, tj, x^2, xy a y^2.

Kružnice

- Středová rovnice kružnice je $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$, kde $S=[m,n]$ jsou souřadnice středu kružnice a r je její poloměr.
- Parametrické rovnice kružnice jsou například $x=m+r\cos t$, $y=n+r\sin t$, kde $t\in\langle 0,2\pi)$.



Obrázek 1: Kružnice.

Elipsa

- Středová rovnice elipsy je $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$, kde $S=[m,n]$ jsou souřadnice středu elipsy. Pokud je $a>b$, je elipsa „protáhlá“ ve směru osy x, jinak opačně.
- Parametrické rovnice elipsy jsou například $x=m+a\cos t$, $y=n+b\sin t$, kde $t\in\langle 0,2\pi)$.
- Body E a F nazýváme ohniska a jsou od sebe vzdáleny $2e$ a platí, že $a>e$. Elipsa je množina všech bodů P, jejichž součet vzdáleností od bodů E a F je roven $2a$, tj.

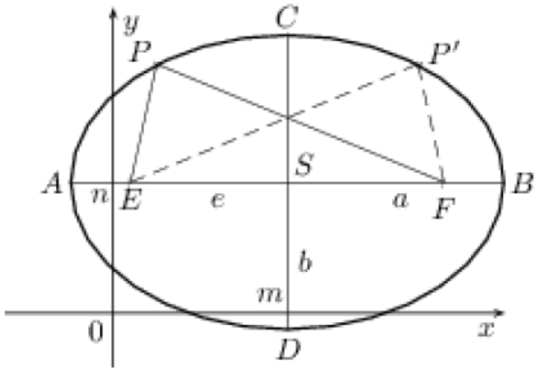
$$|EP|+|FP|=2a.$$

- Pak a je hlavní poloosa, b vedlejší poloosa a e je excentricita elipsy.

Hyperbola

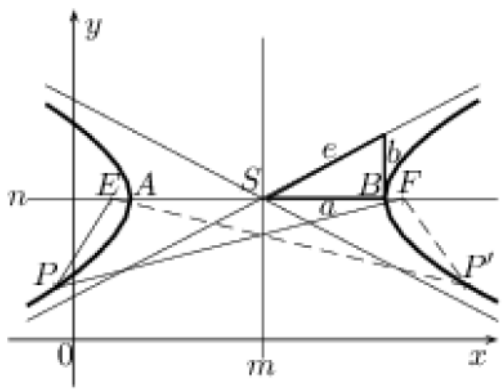
- Středová rovnice hyperboly je $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$, pokud je hlavní osa $y=n$, tj. větve jsou otevřeny „vlevo a vpravo“, souřadnice středu jsou $[m,n]$. Pokud jsou větve otevřeny „nahoru a dolů“, středová rovnice hyperboly je pak $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=-1$.
- Parametrické rovnice hyperboly jsou $x=m\pm a\cosh t$, a $y=n+b\sin t$. (U x je $\pm$, protože uvažujeme dvě větve.)
- Body E,F jsou ohniska, dva různé body v rovině a a je kladné číslo menší než polovina vzdálenosti bodů E,F. Hyperbola je tedy množina všech bodů, jejichž rozdíl vzdáleností od bodů E a F je $2a$, tj.

$$\big|\,|EP|-|FP|\,\big|=2a.$$



Obrázek 2: Elipsa.

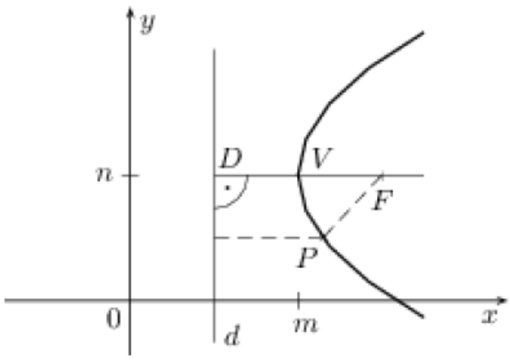
- Střed úsečky EF je střed hyperboly a přímka určená ohnisky je hlavní osa symetrie. Body A, B jsou vrcholy hyperboly. Přímka kolmá na hlavní osu symetrie a procházející bodem S je vedlejší osa symetrie. Vzdálenost a se nazývá hlavní poloosa, e se nazývá excentricita a $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ vedlejší poloosa hypoerboly



Obrázek 3: Hyperbola.

Parabola

- Paraboly s „vodorovnou“ osou symetrie a parametrem p mají rovnice $2p(x - m) = (y - n)^2$ a $2p(x - m) = -(y - n)^2$, kde $[m, n]$ jsou souřadnice vrcholu. První parabola je otevřena „vpravo“, druhá „vlevo“.
- Paraboly se „svislou“ osou symetrie a parametrem p mají rovnice $2p(y - n) = (x - m)^2$ a $2p(y - n) = -(x - m)^2$, kde $[m, n]$ jsou souřadnice vrcholu. První parabola je otevřena „nahoru“, druhá „dolů“.
- Bod $V = [m, n]$ je vrchol paraboly, F je ohnisko paraboly, $p = |DF|$ parametr paraboly a d řídící přímky paraboly.
- Parabola je tedy množina bodů, která má stejnou vzdálenost od řídící přímky d a bodu F.



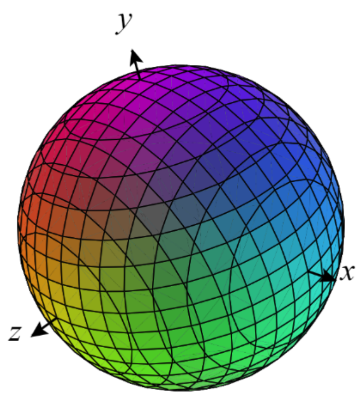
Obrázek 4: Parabola.

Kvadratické plochy - Kvadriky

Jedná se o plochy, jejichž rovnice obsahují kvadratické členy proměnných x, y, z. Níže, ze zcela pragmatických důvodů, uvádíme přehled základních kvadrik, které jsou nedegenerované, tj. regulární.

Sféra/Kulová plocha

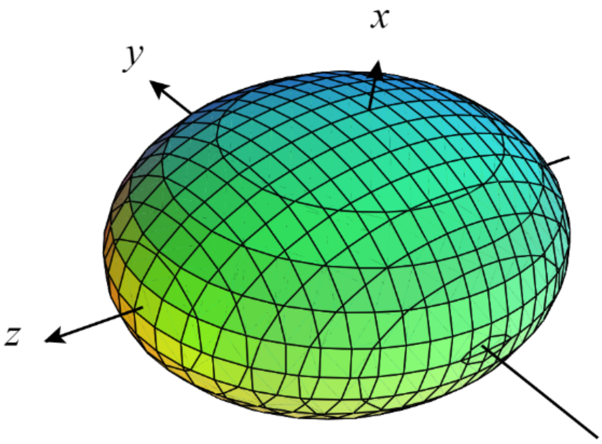
- Rovnice sféry $(x^2 - x_S) + (y^2 - y_S) + (z^2 - z_S) = r^2$ se středem v bodě $S = [x_S, y_S, z_S]$ a poloměrem r.
- Rozdíl mezi sférou a koulí je ten, že koule je těleso a sféra je pouze plocha (uvnitř prázdná).



Obrázek 5: Sféra.

Elipsoid

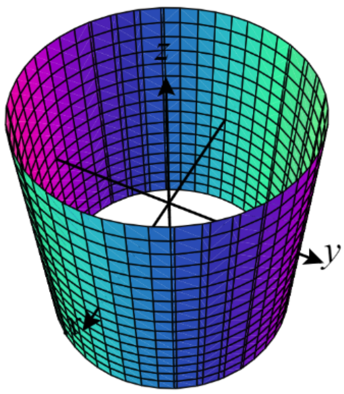
- Rovnice elipsoidu $\frac{(x^2-x_S)}{a^2} + \frac{(y^2-y_S)}{b^2} + \frac{(z^2-z_S)}{c^2} = r^2$ se středem v bodě $S = [x_S, y_S, z_S]$ s poloosami $a, b, c > 0$ po řadě v osách x, y, z.



Obrázek 6: Elipsoid („Vajíčko“).

Válec

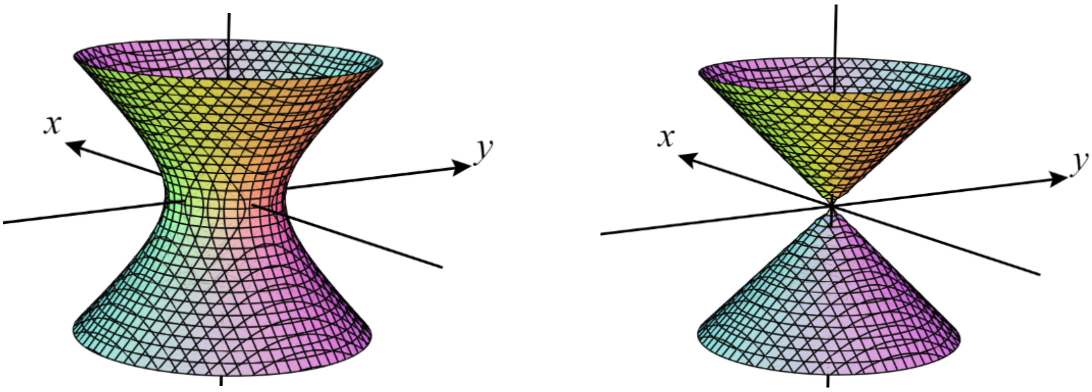
- Rovnice válce $(x^2 - x_S) + (y^2 - y_S) = r^2$ se středem v bodě $S = [x_S, y_S, z_S]$, osou z a poloměrem r.



Obrázek 7: Válec s kruhovým průřezem.

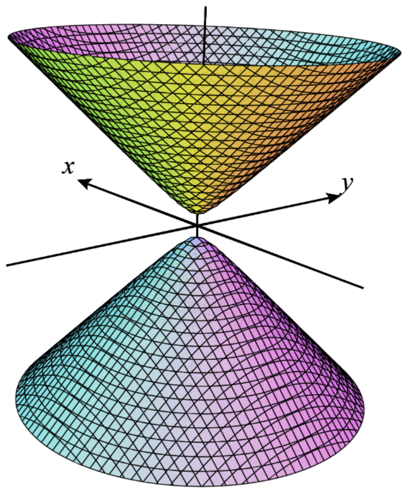
Hyperboloid

- Rovnice hyperboloidu je $\frac{(x^2 - x_S)}{a^2} + \frac{(y^2 - y_S)}{b^2} - \frac{(z^2 - z_S)}{c^2} = r^2$, kde
  - pokud $r > 0$, pak se jedná o jednodílný hyperboloid,
  - pokud $r = 0$, pak se jedná o dva kužely,
  - pokud $r < 0$, pak se jedná o dvoudílný hyperboloid.
  - Pokud $r = 0$, pak dostáváme dva kužely: kužel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, který je otevřen „nahoru“ a kužel otevřený „dolů“ s rovnicí $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

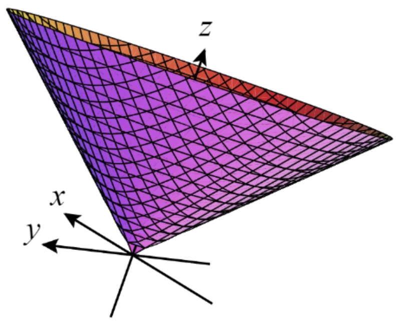


(a) Jednodílný hyperboloid, pokud $r > 0$. (b) Jednodílný hyperboloid, pokud $r = 0$.

Obrázek 8: Hyperboloidy.



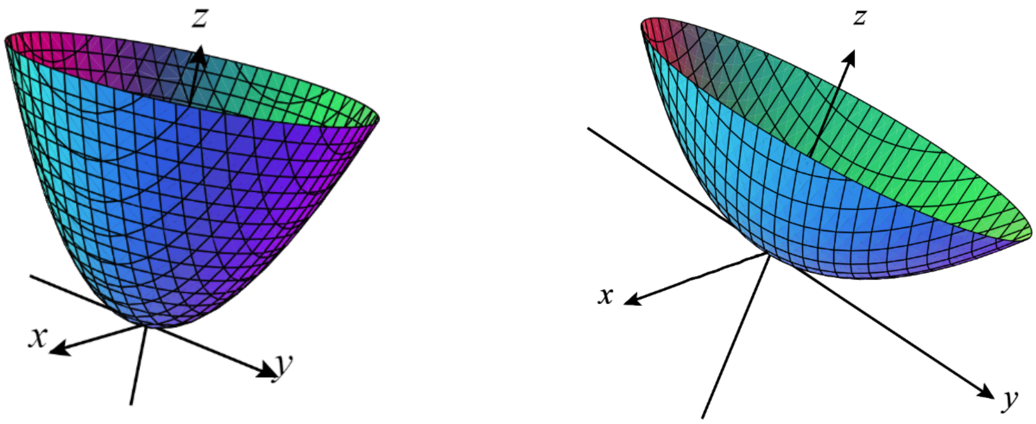
Obrázek 9: Dvoudílný hyperboloid, pokud $r < 0$.



Obrázek 10: Kužel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, který je „horní“ částí hyperboloidu 11b.

Eliptický paraboloid

- Rovnice eliptického paraboloidu $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ s hlavní osou symetrie z a parametry p, q.
- Pro $p = q$ se plocha nazývá rotační paraboloid.
- Pro $p > 0, q > 0$ je paraboloid otevřen „nahoru“, pro $p < 0, q < 0$ je otevřen „dolů“. Oba mají společný bod v počátku.

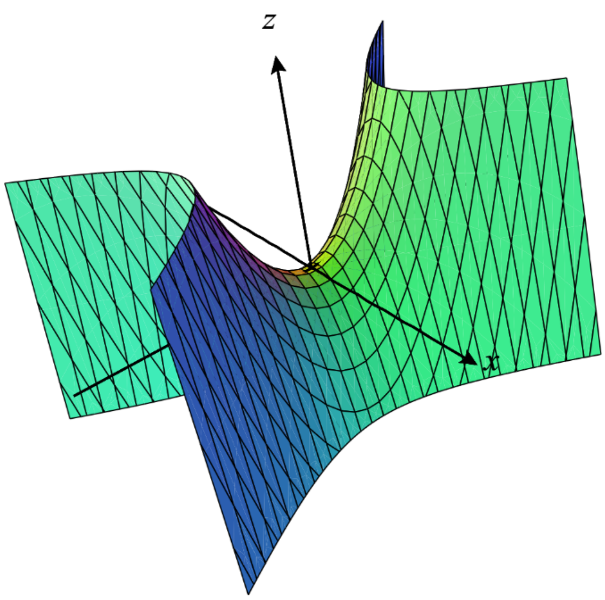


(a) Rotační paraboloid, pokud $p = q$.   (b) Eliptický paraboloid.

Obrázek 11: Hyperboloidy.

Hyperbolický paraboloid (Sedlová plocha)

- Hyperbolický paraboloid se středem v počátku a hlavní osou symetrie z a parametry p, q, kde p a q jsou oba zároveň kladné, nebo záporné, je dán rovnicí $z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$.



Obrázek 12: Hyperbolický paraboloid.

Poznámky:

- Oficiální výukový text k této problematice naleznete na stránkách Ústavu matematiky https://mathonline.fme.vutbr.cz/Analyticka-geometrie/sc-17-sr-1-a-35/default.aspx
- Pro vykreslování grafů ve 2D i 3D lze využít https://www.wolframalpha.com/
- Na stránkách https://www.monroecc.edu/faculty/paulseeburger/calcnsf/CalcPlot3D/ lze vykreslovat grafy funkcí zapsaných implicitně, explicitně i parametricky ve 2D, 3D. Navíc zde lze vykreslovat i vektorová pole a prostorové křivky.