4. cvičení Pružnost a pevnost

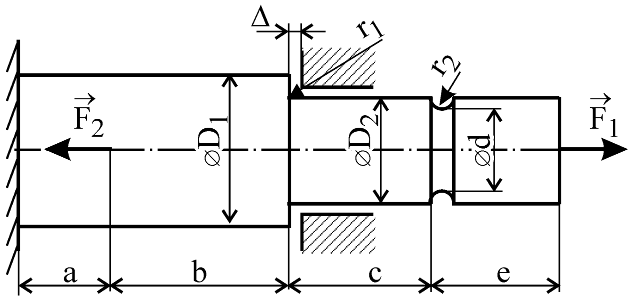
Namáhání tahem. Staticky určité úlohy

Příklad 1

Součást podle obrázku má po montáži vůli mezi osazením a rámem Δ_0. Po zatížení musí být zajištěna minimální vůle $\Delta_{\min}$.

a) Zkontrolujte součást s ohledem na možné mezní stavy, je-li materiál v houževnatém stavu.

b) Určete prodloužení prutu.



Dáno:

$F_1 = 4\,\mathrm{kN}$,	$F_2 = 2\,\mathrm{kN}$,	$E = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$,
$D_1 = 15\,\mathrm{mm}$,	$D_2 = 10\,\mathrm{mm}$,	$d = 8\,\mathrm{mm}$,
$a = 100\,\mathrm{mm}$,	$b = 200\,\mathrm{mm}$,	$c = 60\,\mathrm{mm}$,
$e = 40\,\mathrm{mm}$,	$r_1 = 2\,\mathrm{mm}$,	$r_2 = 1\,\mathrm{mm}$,
$\Delta_0 = 0,5\,\mathrm{mm}$,	$\Delta_{\min} = 0,3\,\mathrm{mm}$,	$\sigma_K = 300\,\mathrm{MPa}$.

Řešení

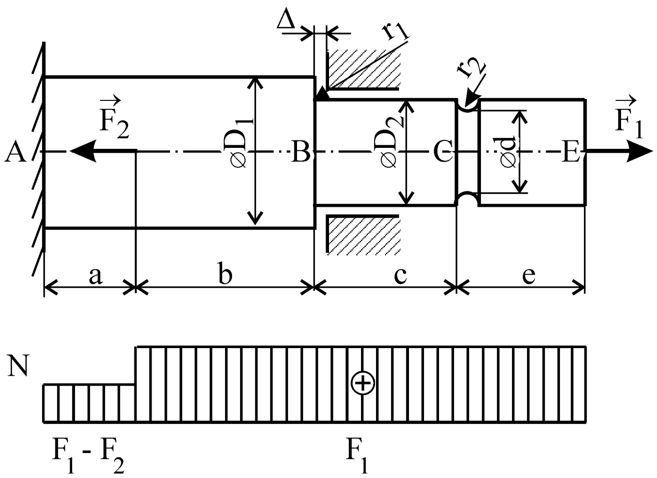
Rozbor

Ze zadání vyplývá, že cílem úlohy je posouzení mezního stavu pružnosti a mezního stavu deformace (musí zůstat vůle mezi osazením a rámem). Uložení prutu je podle zadání staticky určité.

Klasifikace prutu: Prut přímý (splňuje geometrické prutové předpoklady, $l \gg d$), po částech konstantní přímý průřez, 2 vruby (vrub významně ovlivní napjatost), silově zatížený, vázaný.

Statický rozbor: $\mu = 1, \quad \nu = 1$ (síly na 1 nositelce)
$s = \mu - \nu = 1 - 1 = 0$

Uložení staticky určité (pokud nedojde ke styku s rámem v místě osazení, ale ze zadání vyplývá, že k tomu nedojde). Prut má volný konec, nemusíme řešit stykové síly.



Po celé střednici je jediné nenulové VVÚ - normálová síla $\vec{N}$. Prut je namáhán prostým tahem, kromě míst, kde nejsou splněny prutové předpoklady: vazba (omezuje jen posuv a natočení střednice), působiště sil $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ (zatížení je soustředěno ma střednici), vruby. Ze Saint Venantova principu vyplývá že můžeme řešit napjatost pomocí prosté pružnosti v místech, která jsou mimo místa, ve kterých nejsou splněny prutové předpoklady. Můžeme tedy použít teorii prostého tahu.

VVÚ:

$$N_I(x) = F_1$$

$$N_{II}(x) = F_1 - F_2$$

Mezní stav pružnosti (MSP)

Pro posuzování mezního stavu pružnosti je důležité znát nebezpečný průřez a extrémní hodnoty napětí v příčném průřezu. U prostého tahu (tlaku) je napětí po průřezu rozloženo rovnoměrně, tedy všechny body průřezu jsou stejně nebezpečné a maximální napětí určíme ze vztahu

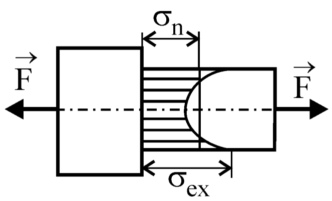
$$\sigma_{\max} = \frac{N}{S}\,.$$

Možný nebepečný průřez:

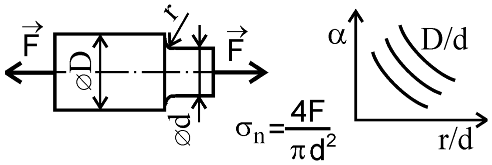
a) kde je největší N nebo nejmenší S

$$\sigma_{(c+e)} = \frac{N(x)}{S(x)} = \frac{4 \cdot F_1}{\pi D_2^2} = 50,9\,\mathrm{MPa}$$

b) v místě vrubu B



Metodika založená na korekci prosté pružnosti prutů určuje extrémní hodnoty napětí v kořeni vrubu σ_{ex} z nominálního napětí σ_n pomocí **součinitele koncentrace napětí** $\alpha = \sigma_{ex}/\sigma_n$.
Nominální napětí je vypočteno ze vztahů prosté pružnosti a pevnosti, tj. z předpokladu rovnoměrného rozložení napětí po průřezu v místě vrubu.

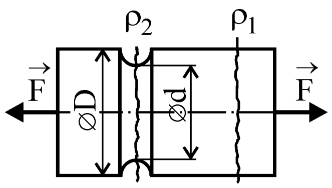


$$\sigma_n = \sigma_{(c+e)} = 50,9\,\mathrm{MPa}$$

Hodnoty součinitelů koncentrace napětí α určíme z nomogramů (skripta PP 280-283):

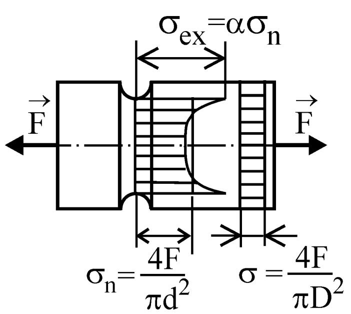
$$\frac{r_1}{D_2} = 0,2, \quad \frac{D_1}{D_2} = 1,5, \quad \alpha = 1,55, \qquad \sigma_{ex,B} = \alpha\sigma_n = 78,9\,\mathrm{MPa}$$

c) v místě vrubu C



$$\sigma_n = \frac{4F_1}{\pi d^2} = 79,6\,\mathrm{MPa}$$

$$\frac{r_2}{d} = 0,125, \quad \frac{D_2}{d} = 1,25, \quad \alpha = 2, \qquad \sigma_{ex,C} = \alpha\sigma_n = 159,2\,\mathrm{MPa}$$



Bezpečnost vůči meznímu stavu pružnosti:

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_K}{\sigma_{ex,C}} = 1,9$$

Mezní stav deformace (MSD)

Při posuzování mezního stavu deformace (deformace funkčně přípustná se změní na funkčně nepřípustnou) řešíme deformaci v místě, kde je nějakým způsobem omezena. V našem příkladě je to v místě B, kde platí podmínka, že po zatížení musí být zajištěna minimální vůle $\Delta_{\min}$. Posuv bodu střednice určíme ze vztahu

$$u(x) = \int_0^x \frac{N(x)}{E(x)S(x)} \mathrm{d}x = \frac{N_i x_i}{E_i S_i}$$

$$u_B = \frac{1}{ES_1} \left[(F_1 - F_2)a + F_1 b \right]$$

$$S_1 = \frac{\pi D_1^2}{4}$$

$$u_B = 0,028 \,\mathrm{mm}$$

Bezpečnost vůči meznímu stavu deformace:

$$k_D = \frac{u_M}{u} = \frac{\Delta_0 - \Delta_{\min}}{u_B} = 7,1$$

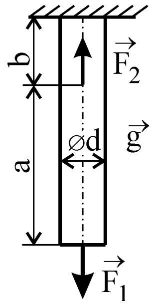
b) Prodloužení prutu

$$\Delta l = \sum \frac{N_i x_i}{E_i S_i} = \frac{1}{ES_1} \left[(F_1 - F_2)a + F_1 b \right] + \frac{F_1(c+e)}{ES_2} = \frac{4}{E\pi D_1^2} \left[(F_1 - F_2)a + F_1 b \right] + \frac{4F_1(c+e)}{E\pi D_2^2} = 0,054 \,\mathrm{mm}$$

Upozorňuji na skutečnost, že vruby, které velmi ovlivnili napjatost, jsou při řešení deformace nepodstatné a při výpočtu prodloužení prutu jsme je neuvažovali.

Příklad 2

Určete prodloužení prutu kruhového průřezu podle obrázku, zatíženého 2 osamělými silami a vlastní tíhou.



Dáno: $F_1 = 10\,\text{kN}$, $F_2 = 5\,\text{kN}$, $\sigma_K = 350\,\text{MPa}$,
$a = 20\,\text{m}$, $b = 10\,\text{m}$, $E = 2 \cdot 10^5\,\text{MPa}$,
$\varnothing d = 40\,\text{mm}$, $g = 10\,\text{ms}^{-2}$, $\rho = 7,8 \cdot 10^3\,\text{kgm}^{-3}$.

Řešení

Rozbor

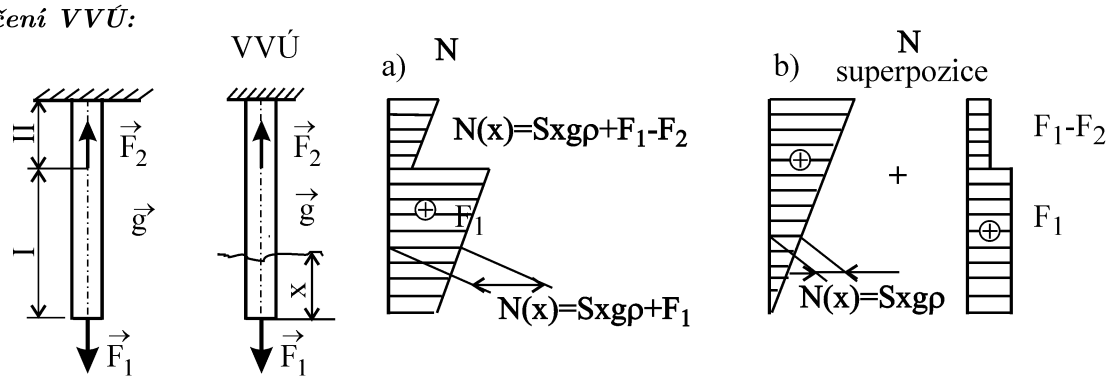
Homogenní prizmatický prut je zatížen proměnnou normálovou silou charakteru vlastní tíhy, kdy není narušena jednoosost napjatosti a je tedy použitelná prostá pružnost prutů. Napětí, posuv v bodě R střednice a energii napjatosti prutu délky l počítáme podle vztahů respektujících proměnnost normálové síly:

$$\sigma(x_R) = \frac{N(x_R)}{S}, \quad u(x_R) = \int_0^{x_R} \frac{N(x)}{ES}\,\mathrm{d}\,x, \quad W(l) = \int_0^{l} \frac{N^2(x)}{2ES}\,\mathrm{d}\,x.$$

Klasifikace prutu: Prut přímý, zatížený 2 silami a objemovým zatížením od vlastní tíhy, vázaný.
Statický rozbor: $\mu = 1, \quad \nu = 1$ (síly na 1 nositelce)
$s = \mu - \nu = 1 - 1 = 0$

Uložení staticky určité, prut má volný konec, nemusíme řešit stykové síly.

Určení VVÚ:



Jedinou nenulovou složkou VVÚ je normálová síla $\vec{N}(x)$. Protože charakter zatížení se po délce prutu mění, musíme prut rozdělit na 2 intervaly. V tomto příkladu je rozumné využít superpozice zatížení, ukážeme si 2 možnosti řešení.

a) Prodloužení prutu:

$$\Delta l = \int_\gamma \frac{N(x)}{ES(x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{ES}\left[\int_0^a (F_1 + Sx\rho g)\mathrm{d}x + \int_a^{a+b} (F_1 - F_2 + Sx\rho g)\mathrm{d}x\right] = 1,17\,\text{mm}$$

b) Prodloužení prutu s využitím superpozice:

$$\Delta l = \int_\gamma \frac{N(x)}{ES(x)}\mathrm{d}x = \frac{F_1 a}{ES} + \frac{(F_1 - F_2)b}{ES} + \int_0^{a+b} \frac{Sx\rho g}{ES}\mathrm{d}x = \frac{1}{ES}\left[F_1 a + (F_1 - F_2)b + \int_0^{a+b} Sx\rho g\mathrm{d}x\right] = 1,17\,\text{mm}$$

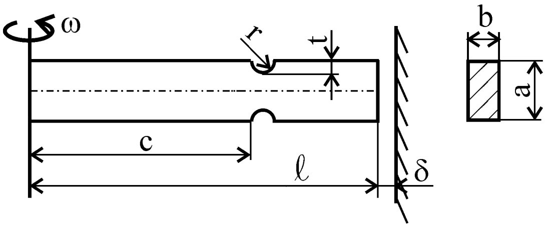
Kontrola, zda je splněna podmínka lineárnosti úlohy:

Je zapotřebí zkontrolovat, zda nedošlo k překročení mezního stavu pružnosti.

$$N_{\text{max}} = N(a) = 11\,960,4\,\text{N} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{\text{max}} = \frac{N_{\text{max}}}{S} = 9,5\,\text{MPa} < \sigma_K$$

Příklad 3

Homogenní rameno obdélníkového průřezu s vrubem se otáčí rovnoměrně rychlostí 3000 otáček/minutu. Geometrie je dána obrázkem, materiál má vlastnosti oceli 11 500. Vůle mezi ramenem a skříní je δ. Posuďte bezpečnost vzhledem k možným mezním stavům. Uvažujte, že součást pracuje za teploty, kdy je materiál v houževnatém stavu a z funkčního hlediska je nežádoucí, aby v rameni vznikly trvalé deformace a aby došlo k vymezení vůle mezi ramenem a statorem.



Dáno:	$l = 460\,\mathrm{mm}$,	$c = 290\,\mathrm{mm}$,	$\sigma_K = 350\,\mathrm{MPa}$,
	$a = 35\,\mathrm{mm}$,	$b = 10\,\mathrm{mm}$,	$E = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$,
	$r = 1,5\,\mathrm{mm}$,	$t = 2,5\,\mathrm{mm}$,	$\delta = 0,5\,\mathrm{mm}$,
	$n = 3000\,\mathrm{min}^{-1}$,	$\rho = 7,8 \cdot 10^3\,\mathrm{kgm}^{-3}$.	

Řešení

Rozbor

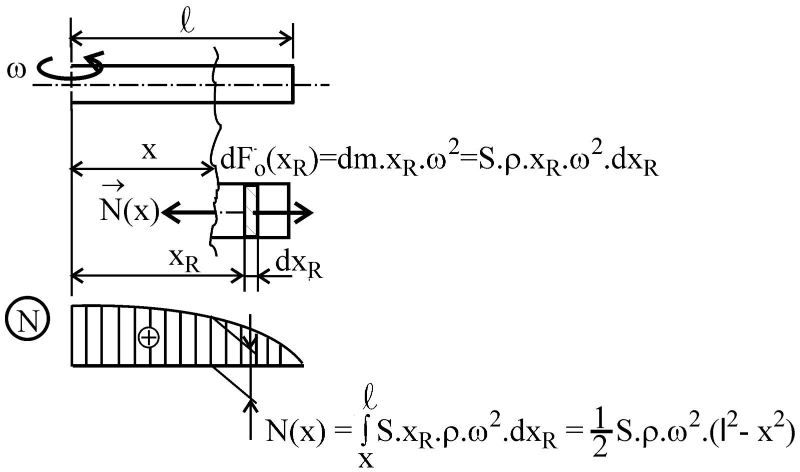
Cílem úlohy je kontrola mezního stavu pružnosti a mezního stavu deformace.

Klasifikace prutu: prut přímý, s vrubem, zatížený rozloženou objemovou silou q_N ve směru osy prutu. Tíhové síly jsou zanedbatelné, protože odstředivé zrychlení je řádově větší než tíhové, úhlová rychlost $\omega = 2\pi n = 314,16\,\mathrm{s}^{-1}$. Prutové předpoklady nejsou splněny v místě upevnění a ve vrubu.

Statický rozbor: $\mu = 1, \quad \nu = 1$ (síly na 1 nositelce)
$s = \mu - \nu = 1 - 1 = 0$

Uložení staticky určité, prut má volný konec, nemusíme řešit stykové síly.

Určení VVÚ:



Proměnnost $N(x)$ podél střednice způsobená objemovými silami nezpůsobuje vznik smykových napětí a tím borcení příčných průřezů. Pro určení deformace a napětí v příčném průřezu jsou použitelné vztahy pro prostý tah.

Průběh napětí:

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{S} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\left(l^2 - x^2\right)$$

Prodloužení prutu:

$$\Delta l = \int_\gamma \frac{N(x)}{ES}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\rho\omega^2}{2E}\int_0^l \left(l^2 - x^2\right)\mathrm{d}\,x = \frac{\rho\omega^2 l^3}{3E} = 0,125\,\mathrm{mm}$$

Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti:

Možné nebezpečné průřezy:

1. vetknutí (maximální normálová síla N): $\sigma(0) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 l^2 = 81,4\,\mathrm{MPa}$
2. vrub
   součinitel koncentrace napětí:

$$\frac{b}{B} = \frac{a-2t}{a} = \frac{30}{35} = 0,9 \qquad \frac{r}{t} = \frac{1,5}{2,5} = 0,6 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 3,5$$

$$\sigma_{ex} = \alpha\sigma_n = \alpha\frac{N(c)}{(a-2t)b} = 200,4\,\mathrm{MPa}$$

Bezpečnost vůči meznímu stavu pružnosti:

$$k_K = \frac{\sigma_K}{\sigma_{\max}} = 1,7$$

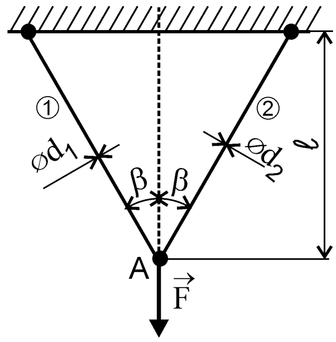
Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu deformace:

Mezní stav deformace nastane, když se rameno dotkne skříně (deformace funkčně nepřípustná).

$$k_D = \frac{\delta}{\Delta l} = \frac{0,5}{0,125} = 4$$

Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti je menší, tudíž rozhodující, mezní stav pružnosti by tedy nastal jako první.

Příklad 4



2 homogenní pruty jsou spojeny v bodě A.

a) Určete, jakou maximální silou je můžeme zatížit, aby v prutech nevznikly plastické deformace. Prut 1 má průměr d_1, prut 2 průměr d_2. Oba pruty jsou vyrobeny ze stejného materiálu, jehož materiálové charakteristiky jsou zadány.

b) Určete posuv bodu A při zatížení vypočítanou maximální silou.

Dáno:
$\varnothing d_1 = 50\,\text{mm}$, $\varnothing d_2 = 30\,\text{mm}$, $l = 1\,\text{m}$,
$\beta = 30^o$, $E = 2\cdot 10^5\,\text{MPa}$, $\sigma_K = 400\,\text{MPa}$.

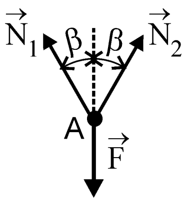
Řešení

Rozbor

Cílem úlohy je návrh zatížení a výpočet posuvu bodu A.

Klasifikace soustavy prutů: soustava 2 prutů vázaných v bodě A, každý prut je vázán k základnímu tělesu.

Uvolnění styčníku A:



Statický rozbor: $\mu = 2$, $\nu = 2$ (centrální silová soustava)
$s = \mu - \nu = 2 - 2 = 0$ (uložení staticky určité)

Použitelné podmínky SR:

$$F_x: \quad -N_1\sin\beta + N_2\sin\beta = 0 \qquad N_1 = N_2$$

$$F_y: \quad N_1\cos\beta + N_2\cos\beta - F = 0 \qquad N_1 = N_2 = F\frac{\sqrt{3}}{3}$$

a) Určení** $F_{\max}$**:

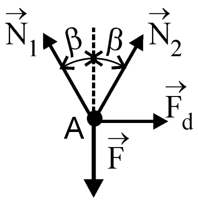
Síly v prutech jsou stejné, ale protože $d_2 < d_1$ $\quad \sigma_{\max} = \dfrac{N_2}{S_2} = \dfrac{4F\sqrt{3}}{3\pi\,\mathrm{d}_2^2}$.

Aby byla splněna podmínka, že v prutech nebudou plastické deformace, musí platit, že napětí v obou prutech budou menší než mez kluzu. Maximální zatěžující síla tedy musí splnit podmínku:

$$\sigma_{\max} = \sigma_K \qquad \rightarrow \qquad \frac{4F\sqrt{3}}{3\pi\,\mathrm{d}_2^2} = \sigma_K \qquad \rightarrow \qquad F = \frac{3\pi\,\mathrm{d}_2^2\,\sigma_K}{4F\sqrt{3}} = 489\,726\,\text{N}$$

b) Určení posuvu bodu A:

K řešení použijeme Maxwell-Mohrovu variantu Castiglianovy věty. Protože posuv bodu C bude vektor v rovině, musíme vypočítat složku ve směru vodorovném a svislém. Ve vodorovném směru tedy musíme připojit doplňkovou sílu $\vec{F_d}$. Pro nové zatížení tedy musíme uvolnit styčník C a vypočítat síly v prutech.



Použitelné podmínky SR:

$$F_x: \quad -N_1\sin\beta + N_2\sin\beta + F_d = 0 \qquad N_1 = N_2 + 2F_d$$

$$F_y: \quad N_1\cos\beta + N_2\cos\beta - F = 0 \qquad N_2 = F\frac{\sqrt{3}}{3} - F_d$$

$$N_1 = F\frac{\sqrt{3}}{3} + F_d$$

$$l_1 = l_2 = \frac{l}{\cos\beta} = \frac{2l}{\sqrt{3}}$$

Horizontální posuv u styčníku A

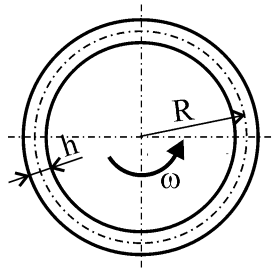
$$u_A = \frac{\partial W}{\partial F_d} = \sum_{i=1}^{2}\frac{N_i l_i}{E_i S_i}\frac{\partial N_i}{\partial F_d} = \frac{4F\frac{\sqrt{3}}{3}}{E\pi d_1^2}l_1\cdot 1 + \frac{4F\frac{\sqrt{3}}{3}}{E\pi d_2^2}l_2\cdot(-1) = \frac{8Fl}{3\pi E}\left(\frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{d_2^2}\right) = -1{,}5\,\text{mm}$$

Vertikální posuv bodu v styčníku A

$$v_A = \frac{\partial W}{\partial F} = \sum_{i=1}^{2}\frac{N_i l_i}{E_i S_i}\frac{\partial N_i}{\partial F} = \frac{4F\frac{\sqrt{3}}{3}}{E\pi d_1^2}l_1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4F\frac{\sqrt{3}}{3}}{E\pi d_2^2}l_2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{8Fl\sqrt{3}}{9\pi E}\left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2}\right) = 1{,}8\,\text{mm}$$

Příklad 5

Určete, jaké napětí napětí vznikne v tenkostěnném kroužku, který je uveden do pohybu s úhlovou rychlostí 4000 otáček/min. Kroužek je vyroben z mědi ($\rho_1 = 8,9 \cdot 10^3\,\mathrm{kgm^{-3}}$, $E_1 = 1,2 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$).
Určete změnu poloměru ΔR od vlastní rotace.



Dáno:
$R = 200\,\mathrm{mm}$, $h = 6\,\mathrm{mm}$
$n = 4000\,\mathrm{ot/min}$.

Řešení

Inspirací pro řešení by mohla být teorie kapitoly 11.10. Oblasti použitelnosti prostého tahu prutů, a to část 11.10.3. Zakřivení střednice prutu.

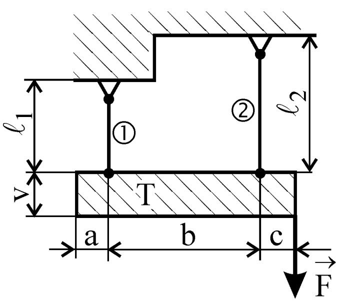
Výsledky:

$$\sigma_t = 62,5\,\mathrm{MPa} \qquad \Delta R = 0,104\,\mathrm{mm}$$

Domácí úkol:

DÚ 5

a) Určete minimální průměr prutů, kterými je vázáno těleso T zatížené silkou $\vec{F}$, aby bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti dané soustavy nebyla menší než 2,5. Deformace tělesa T je vzhledem k deformacím prutů zanedbatelná („tuhé těleso“). Oba pruty jsou homogenní, jsou vyrobeny ze stejného materiálu a mají shodný kruhový průřez o $\o d$. Vlastní tíhu a výrobní nepřesnosti neuvažujte.
b) Pro vypočítaný průměr prutů určete posuv působiště síly $\vec{F}$.



Dáno:
$a = 200\,\mathrm{mm}$, $b = 300\,\mathrm{mm}$, $c = 250\,\mathrm{mm}$,
$l_1 = 500\,\mathrm{mm}$, $l_2 = 800\,\mathrm{mm}$, $F = 2\,\mathrm{kN}$,
$v = 300\,\mathrm{mm}$, $E = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$, $\sigma_K = 350\,\mathrm{MPa}$.