Determinanty

Obecně pro matice řádu $n \geq 2$ lze využít **Laplaceovy věty** (viz přednáška nebo učební texty na Matematice online), která říká, že lze determinant rozepsat pomocí rozvoje podle i-tého řádku či j-tého sloupce.

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}\det(\mathbf{A}_{ik}) = (-1)^{i+1}a_{i1}\det(\mathbf{A}_{i1}) + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}\det(\mathbf{A}_{in}),$$
$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}\det(\mathbf{A}_{kj}) = (-1)^{1+j}a_{1j}\det(\mathbf{A}_{1j}) + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}\det(\mathbf{A}_{nj}).$$

Postup si ukážeme na konkrétním příkladu. Následující determinant je rozvinut podle druhého řádku. Zkuste si sami rozvinout determinant podle jiného řádku či sloupce. Měli byste dostat stejný výsledek.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}\cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} +$$
$$+(-1)^{2+3}\cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}\cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 276.$$

Elementární řádkové/sloupcové úpravy

Při práci s maticemi je vhodné vědět, jaký vliv na determinant mají elementární řádkové a sloupcové úpravy. Při elementárních úpravách matice $\mathbf{A}$ se hodnota determinantu $\det(\mathbf{A})$ změní takto:

a) při výměně dvou řádků/sloupců se změní znaménko determinantu,
b) pokud libovolný řádek/sloupec vynásobíme konstantou c, determinant se taktéž vynásobí konstantou c,
c) hodnota determinantu se nezmění, jestliže k řádku/sloupci přičteme násobek jiného řádku či sloupce,
d) hodnota determinantu se nemění transpozicí matice.

Hodnost matice

Lineární nezávislost

Důležitou charakteristikou matic je jejich hodnost, která, stručně řečeno, vyjadřuje počet nezávislých řádků nebo sloupců. Mějme nějakou matici $\mathbf{A}$ typu (m, n). Pro $c_1, c_2, ..., c_m \in \mathbb{R}$ lineární kombinací řádků nazveme vektor

$$c_1\mathbf{r}_1 + c_2\mathbf{r}_2 + ... + c_m\mathbf{r}_m = (c_1a_{11} + ... + c_ma_{m1}, ..., c_1a_{1n} + ... + c_ma_{mn}).$$

Pokud řádek $\mathbf{r}_1$ lze vyjádřit jako lineární kombinací libovolných řádků $\mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_m$, tj. existují čísla c_1, $c_2, ..., c_m$ tak, že $\mathbf{r}_1 = c_2\mathbf{r}_2 + ... + c_m\mathbf{r}_m$, řekneme, že řádek $\mathbf{r}_1$ je závislých na řádcích $\mathbf{r}_2, ..., \mathbf{r}_m$. Pokud žádný řádek $\mathbf{r}_i, i = 1, ..., m$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci jiných řádků matice $\mathbf{A}$, pak jsou řádky **lineárně nezávislé** a platí, že jediná jejich kombinace, která dává nulový vektor $\mathbf{0} = (0, ..., 0)$ je nulová kombinace, tj.

$$c_1\mathbf{r}_1 + c_2\mathbf{r}_2 + ... + c_m\mathbf{r}_m \Rightarrow c_1 = c_2 = ... = c_m = 0.$$

Příklad 1.
Mějme matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Řádek $\mathbf{r}_1$ je zřejmě lineární na ostatních řádcích. Zkuste sami ověřit, že platí $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{r}_2 - 3\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4$.

Hodnost matice

Hodností matice $\mathbf{A}$ rozumíme počet jejích lineárně nezávislých řádků. Značíme ji zpravidla $h(\mathbf{A})$, nebo také $r(\mathbf{A})$ (z ang. „rank“). Matice má hodnost $h(\mathbf{A}) = p$, jestliže je v ní p nezávislých řádků, zatímco ostatní řádky jsou na těch nezávislých závislé. Hodnost nulové matice je $h(\mathbf{0}) = 0$.

Níže jsou některé důležité poznatky k hodnosti matice:

a) nulový řádek je vždy závislý,
b) pokud jsou v matici dva stejné řádky, jeden je závislý na druhém,
c) hodnost matice $\mathbf{A}$ typu (m, n) je počet nezávislých řádků a tedy vždy platí, že $h(\mathbf{A}) \leq m$,
d) řádky jednotkové matice jsou nezávislé, proto je její hodnost rovna počtu jejích řádků,
e) nejlépe lze určit hodnost matice u takové, která je ve schodovitém tvaru.

Schodovitým tvarem matice $\mathbf{A}$ rozumíme takovou matici, jejíž každý další nenulový řádek „začíná více nulami“ než řádek předchozí.

Příklad 2.
Například matice $\mathbf{A}$ typu $(5, 7)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

má postupně „schody“ šířky 1, 3, 1 a poslední řádek je nulový. Má proto čtyři nezávislé řádky, její hodnost je proto $h(\mathbf{A}) = 4$.

Hodnost matice se zpravidla určuje složitě, protože je potřeba ověřit všelijaké lineární kombinace řádků. V tomto případě nám však pomůže dříve zmiňovaný způsob - převedení matice na schodovitý tvar. K převedení matice na schodovitý tvar slouží následující řádkové úpravy.

Elementární řádkové úpravy

Následující řádkové úpravy nemění hodnost matice $\mathbf{A}$:

a) výměna pořadí řádků,
b) vynásobení řádku konstantou $c \neq 0$,

c) přičtení násobků jiných řádků nebo lineární kombinace k danému řádku,
d) vypuštění nulového řádku.

Logicky platí, že lze libovolnou konečnou matici převést konečným počtem elementárních řádkových úprav na matici ve schodovitém tvaru. Navíc také lze dokázat a platí, že transponováním se hodnost matice nemění. Hodnost matice je tedy taktéž rovna počtu nezávislých sloupců, které lze upravovat úpravami, které jsou analogické úpravám řádkovým.

Příklad 3.
Převeďte následující matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & 6 & 3 & 8 \\ -2 & -6 & 10 & 2 \end{pmatrix}$ na schodovitý tvar pomocí řádkových úprav.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 2 & 6 & 3 & 8 \\ -2 & -6 & 10 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ / -2\mathbf{r}_1 \\ / +2\mathbf{r}_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(\mathbf{A}) = 2.$$

Důležité vlastnosti čtvercových matic

Zejména u čtvercových matic a jejich determinantů je potřeba zdůraznit některé vlastnosti. Při determinantu součinu dvou matic platí následující vztah:

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B}),$$

odkud logicky plyne, že

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{E}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{E}) = \det\mathbf{A}.$$

Hodnota determinantu matice $\mathbf{A}$ vyjadřuje důležitou vlastnost matice. Matici $\mathbf{A}$ nazveme **regulární**, jestliže $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ a v opačném případě ji nazveme **singulární**.

Následující vlastnosti matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ stupně n jsou ekvivalentní:

a) Matice $\mathbf{A}$ je regulární, tj. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.
b) Matice $\mathbf{A}$ má největší možnou hodnost, tedy $h(\mathbf{A}) = n$.
c) Matice $\mathbf{A}$ má nezávislé řádky.
d) Matice $\mathbf{A}$ má nezávislé sloupce.

Inversní matice

Inversní matice stejně jako determinanty lze počítat pouze u čtvercových matic. Čtvercové matice mají mezi maticemi obecně významné postavení v tom ohledu, že je lze bez omezení sčítat, ale i násobit. Zatímco u čísel je neutrálním prvkem 1, tj. platí $1x = x1 = x$, u matic je neutrálním prvkem jednotková matice $\mathbf{E}$. Pro matice vhodných řádů tedy platí:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Inversní operací k násobení je dělení, nebo vynásobení převrácenou hodnotou čísla, tj. například k číslu 2 je inversní $\frac{1}{2}$. Obdobně u čtvercových matic lze nalézt inversní matici, pro kterou platí následující vztah:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

V takovém případě je matice $\mathbf{B}$ inversní k matici $\mathbf{A}$ a bude se značit $\mathbf{A}^{-1}$.
Jsou-li matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ stejného typu, pak platí:

$$\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B}).$$

Z výše uvedeného logicky plyne, že součin matice a její inverse dávají jednotkovou matici, jejíž determinant je roven 1 (součin jedniček na hlavní diagonále). Logicky tedy musí platit, že $\det(\mathbf{A}) \neq 0, \det(\mathbf{B}) \neq 0$. Tato podmínka je postačující.

Pro výpočet inversní matice lze využít dva způsoby. Prvním z nich je převést původní matici na jednotkovou matici. Při tomto převodu se využívá vlastnosti matic, že $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$. Druhým způsobem je výpočet inversní matice pomocí *adjungované matice*.

Výpočet inversní matice pomocí jednotkové matice

V tomto případě využíváme vlastnosti, že pomocí řádkových úprav z původní matice A dostaneme jednotkovou matici a z jednotkové matice pomocí týchž úprav získáme matici inversní A^{-1}. Tj. $(\mathbf{A}|\mathbf{E}) \sim$ řádkové úpravy $\sim (\mathbf{E}|\mathbf{B}) = (\mathbf{E}|\mathbf{A}^{-1})$.

Příklad 4.

Vypočtěte inversní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. s využitím jednotkové matice.

Budeme upravovat rozšířenou matici $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$ s využitím řádkových úprav.

$$(\mathbf{A}|\mathbf{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} /-2\mathbf{r}_3 \\ /-\mathbf{r}_3 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} /-3\mathbf{r}_2 \\ \\ /+2\mathbf{r}_2 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -5 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /+\frac{2}{5}\mathbf{r}_1 \\ /+\frac{4}{5}\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -5 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right).$$

Na pravé straně rozšířené matice je hledaná inversní matice:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Výpočet inversní matice pomocí adjungované matice

Druhým způsobem nalezení inversní matice je využití adjungované matice. Mějme matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Dále označíme $\mathbf{A}_{ij}$ matici vzniklou z matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Algebraickým doplňkem prvku a_{ij} nazveme číslo:

$$d_{ij} = (-1)^{i+j}\det(\mathbf{A}_{ij}),$$

kde matice $\mathbf{A}_{ij}$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Transponováním matice algebraických doplňků získáme matici adjungovanou k původní matici $\mathbf{A}$ a označíme ji $\mathbf{A}^* = (d_{ij})^{\mathrm{T}}$. Navíc platí, že ke každé matici lze sestavit adjungovanou matici.

Inversní matici získáme následujícím způsobem. Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice. Potom existuje matice adjungovaná $\mathbf{A}^*$ a platí:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{E},$$

odkud v případě, že je matice regulární, tj. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, dostáváme vztah pro výpočet inversní matíce:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \mathbf{A}^*$$

Příklad 5.

Vypočtěte adjungovanou matici $\mathbf{A}^*$ a inversní matici $\mathbf{A}^{-1}$ k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Dále před výpočtem inversní matice musíte nejprve spočítat determinant matice $\mathbf{A}$. Vyjde, že $\det(\mathbf{A}) = -5$, tedy matice $\mathbf{A}$ je regulární a lze počítat inversi. Dostáváme:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \mathbf{A}^* = \frac{1}{-5} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Soustavy lineárních rovnic

Mnoho úloh, s nimiž se v budoucnu setkáte vede na řešení soustavy lineárních rovnic. Jejich zápis pomocí matic je praktický nejen z hlediska výpočtů, ale zároveň z hlediska jejich reprezentace v programovacích jazycích. Otázkou tedy zůstává, jak zjistit, zda má soustava lineárních rovnic řešení a případně kolik jich má. Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých lze zapsat následujícím způsobem:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Koeficienty a_{ij} tvoří **matici soustavy A**, koeficienty b_i tvoří **vektor pravé strany b** a proměnné x_j tvoří **vektor neznámých x**. Pomocí matic lze ekvivalentně přepsat výše uvedenou soustavu takto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Soustavu lineárních rovnic lze zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b},$$

nebo pomocí **rozšířené matice soustavy** $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, která vždy jednoznačně soustavu lineárních rovnic reprezentuje a která vznikne tak, že matici koeficientů rozšíříme o vektor pravé strany:

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_2 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Zcela logický nazveme řešením soustavy lineárních rovnic takový vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^{\mathrm{T}}$, po jehož dosazení jsou splněny všechny rovnice.

Soustavy lineárních rovnic (dále jen SLR) se řeší pomocí ekvivalentních úprav, při nichž se nemění množina řešení (tj. nemění se množina sloupcových vektorů $\mathbf{x}$). Jaké úpravy jsou tedy **ekvivalentní**?

- Záměna pořadí rovnic odpovídá záměně pořadí řádků rozšířené matice.
- Násobení rovnice nenulovým číslem odpovídá násobení řádku rozšířené matice týmž číslem.
- Přičtení násobku rovnice k jiné rovnici odpovídá přičtené stejného násobku odpovídajícího řádku.
- Rovnici se samými nulami lze vynechat stejně, jako lze vynechat nulový řádek.

Věta 6. Frobeniova věta - Řešitelnost SLR
Mějme soustavu m rovnic o n neznámých zapsanou v maticovém tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ s maticí soustavy $\mathbf{A}$ a rozšířenou maticí $\mathbf{A}|\mathbf{b}$. Pak platí:

a) Pokud $h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, soustava **nemá řešení**.
b) Pokud $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$, soustava **má právě jedno řešení**.
c) Pokud $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) < n$, soustava **má nekonečně mnoho řešení**, která lze všechna vyjádřit v závislosti na $n - h(\mathbf{A})$ parametrech.

Řešení SLR pomocí Gaussovy eliminace

První metodou řešení soustav lineárních rovnic je **Gaussova eliminační metoda**. Smysl metody spočívá v tom, že se hodnoty prvků v matici koeficientů převedou na schodovitou nebo diagonální matici. Úpravami „v levé“ části rozšířené matice soustavy se mění vektor pravé strany, z něhož lze pak snadno získat řešení. Princip metody i různé počty řešení si ukážeme na následujících příkladech.

Příklad 7.
Vyřešte následující SLR.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & & & = & -4 \end{array}$$

Řešení: Pomocí elementárních řádkových úprav převedeme matici na schodovitý tvar.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /-\mathbf{r}_1 \\ /-2\mathbf{r}_1 \\ /-2\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /+\frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \\ /-\frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

Odtud už je řešení soustavy zřejmé. Z posledního řádku máme $2x_3 = 3$, odkud $x_3 = \frac{3}{2}$. Z druhého řádku vidíme přímo $x_2 = 1$ a dosazením hodnota x_2 a x_3 do prvního řádku dostaneme $x_1 = -\frac{1}{2}$. Řešením soustavy je tedy vektor $\mathbf{x} = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$.

Příklad 8.
Vyřešte následující SLR.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ -2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ & & x_2 & & & + & 2x_4 & = & 3 \end{array}$$

Řešení: Pomocí elementárních řádkových úprav převedeme matici na schodovitý tvar.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} /+2\mathbf{r}_1 \\ /-\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ /+\mathbf{r}_2 \\ /-\mathbf{r}_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Přestože matice není ve schodovitém tvaru, je zřejmé, že daná soustava nemá řešení, protože ve třetím řádku máme rovnici $0 = 2$. Zřejmě také platí, že hodnost rozšířené matice soustavy je 4 a hodnost matice soustavy jsou 3. Tedy $h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) > h(\mathbf{A})$ a podle Frobeniovy věty taktéž soustava nemá řešení.

Příklad 9.
Vyřešte následující SLR.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 6 \end{array}$$

Řešení: Pomocí elementárních řádkových úprav převedeme matici na schodovitý tvar.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /-\mathbf{r}_1 \\ /-\mathbf{r}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Výsledkem je soustava 2 rovnic pro 4 neznámé. Dle Frobeniovy věty můžeme v případě $h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = h(\mathbf{A}) < n$ vyjádřit řešení soustavy v závislosti na $n - h(\mathbf{A})$ proměnných. Zde platí, že $\mathbf{A} = 2$, tedy budeme vyjadřovat řešení v závislosti na 4-2 proměnných. Z poslední rovnice vidíme explicitně, že $x_3 = 2$. Tedy můžeme volit parametry za proměnné x_1, x_2, nebo x_4. Zvolme tedy $x_2 = t$ a $x_4 = s$, pak má soustava nekonečně mnoho řešení ve tvaru $\mathbf{x} = (2t - s, t, 2, s)$, kde $s, t \in \mathbb{R}$. Pokud bychom zvolili parametry za jinou dvojici proměnných, výsledný vektor bude sice vypadat jinak, ale bude popisovat tutéž množinu řešení.

Další skupinu SLR tvoří homogenní rovnice, jejichž vektor pravé strany je nulový. Zajímavostí je, že tyto rovnice mají triviálně nulové řešení, tj. vektor $\mathbf{x} = (0, ..., 0)$, a dále mají nekonečně mnoho řešení v závislosti na $n - h(\mathbf{A})$ parametrech. Nicméně řeší se úplně stejným způsobem jako úlohy výše a nebudeme se jimi nijak zvlášť zabývat. Řešení soustav pomocí Gaussovy eliminace je výhodnější, protože umožňuje řešit SLR pro libovolný počet rovnic nezávisle na počtu proměnných.

Řešení SLR pomocí determinantů

Pro řešení SLR lze využít také determinanty, ale pouze v případě, že matice soustavy $\mathbf{A}$ je čtvercová, tj. počet rovnic odpovídá počtu neznámých a determinant matice $\mathbf{A}$ je nenulový. Řešení se hledá pomocí tzv. **Cramerova pravidla**.

Věta 10. Cramerovo pravidlo
Mějme soustavu n lineárních rovnic o n neznámých zapsanou jako $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, jejíž matice soustavy $\mathbf{A}$ má nenulový determinant. Pak má soustava jediné řešení, které určíme takto:

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{|\mathbf{A}|}, x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{|\mathbf{A}|}, \cdots, x_n = \frac{|\mathbf{A}_n|}{|\mathbf{A}|},$$

kde matice $\mathbf{A_j}$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ nahrazením j-tého sloupce vektorem pravé strany $\mathbf{b}$. Princip ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 11.
S pomocí **Cramerova pravidla** vyřešte následující SLR.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12 \end{array}$$

Řešení: Nejprve spočítáme determinant matice soustavy a následně další determinanty. Pak určíme řešení SLR.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12,$$

$$|\mathbf{A}_1| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 12 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24, \quad |\mathbf{A}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 36, \quad |\mathbf{A}_3| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 12 \end{vmatrix} = 60.$$

Podle Cramerova pravidla je tedy řešením

$$x_1 = \frac{|\mathbf{A}_1|}{\mathbf{A}} = \frac{24}{12} = 2, \quad x_2 = \frac{|\mathbf{A}_2|}{\mathbf{A}} = \frac{36}{12} = 3, \quad x_3 = \frac{|\mathbf{A}_3|}{\mathbf{A}} = \frac{60}{12} = 5,$$

tedy soustava má právě jedno řešení ve tvaru $\mathbf{x} = (2, 3, 5)^{\mathrm{T}}$.

Maticové rovnice

Obdobně jako máme rovnice typu $a \cdot x = b$ máme taktéž maticové rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = B$. Takové rovnice logicky uvažujeme pouze v případě, že jsou matice vhodných typů a operace na nich dávají smysl.

Ekvivalentní úpravy maticových rovnic - Předpokládejme, že matice jsou vhodných typů a jsme schopni je sčítat a násobit. Množina řešení maticové rovnice se nemění pokud:

a) Přičteme stejnou matici k oběma stranám rovnice.
b) Násobíme obě strany rovnice stejným nenulovým číslem.
c) Násobíme obě strany rovnice stejnou regulární matici zleva.
d) Násobíme obě strany rovnice stejnou regulární matici zprava.

Za připomenutí stojí, že násobení matic **není komutativní**, tedy v součinu nelze zaměnit pořadí matic. Při řešení maticových rovnic je dobré připomenout některé vlastnosti matic. Pro regulární matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ platí:

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}, \quad (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

Princip maticových rovnic vysvětlíme na některých jednoduchých příkladech níže.

Příklad 12.
Řešte následující maticové rovnice. Součástí řešení je pochopitelně uvést, za jakých předpokladů řešení existuje.

a) $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$,
b) $\mathbf{XA} - \mathbf{B} = \mathbf{C}$,
c) $\mathbf{AXB} + \mathbf{C} = \mathbf{D}$,
d) $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{XB}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}$,
e) $2\mathbf{X} + \mathbf{A} = \mathbf{BX}$.

Řešení (vždy za předpokladu, že jsou matice vhodných typů!):

a) Řešením je vynásobení rovnice maticí $\mathbf{A}^{-1}$ zleva, čímž dostaneme $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, za předpokladu, že $\mathbf{A}$ je regulární.
b) Řešením je přičtení matice $\mathbf{B}$ a vynásobení maticí $\mathbf{A}^{-1}$ zprava, čímž dostaneme $\mathbf{X} = (\mathbf{C} + \mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}$. (Za předpokladu, že $\mathbf{A}$ je regulární.)
c) Řešením je přičtení matice $\mathbf{C}$, vynásobení maticí $\mathbf{A}^{-1}$ zleva a maticí $\mathbf{B}^{-1}$ zprava, čímž dostaneme $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{C})\mathbf{B}^{-1}$. (Za předpokladu, že $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou regulární.
d) Řešením je vynásobení maticí $\mathbf{A}$ zleva a maticí $(\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$ zprava, čímž dostaneme $\mathbf{X} = \mathbf{AC}(\mathbf{B}^{\mathrm{T}})^{-1}$. (Za předpokladu, že matice $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ jsou regulární.)
e) Řešením je odečtení matice $\mathbf{A}$ a odečtení součinu matic $\mathbf{BX}$. Násobení matice konstantou je ekvivalentní vynásobení všech prvků matice danou konstantou. Vzpomeňte si, že $\mathbf{EX} = \mathbf{X}$, kde všechny prvky násobíte jedničkou. Pak tedy $2\mathbf{X} = 2\mathbf{EX}$. V dalším kroku se tedy vytkne nalevo tak, že levá strana rovnice bude $(2\mathbf{E} - \mathbf{B})\mathbf{X}$, odkud pak zleva vynásobíme inverzí matice, která je výsledkem závorky. Výsledek tedy bude $\mathbf{X} = (2\mathbf{E} - \mathbf{B})^{-1} \cdot (-\mathbf{A})$. (Za předpokladu, že $\mathbf{B}$ je stejného typu jako $\mathbf{E}$, že matice $\mathbf{A}$ je vhodného typu, a že matice v závorce, která vznikne z rozdílu je regulární.

Příklady

Determinanty

Vypočítejte determinanty následujících matic.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $[\det(\mathbf{A}) = 1]$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $[\det(\mathbf{A}) = -9]$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $[\det(\mathbf{A}) = 40]$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ $[\det(\mathbf{A}) = -64]$

e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $[\det(\mathbf{A}) = -54]$

Hodnost matice

Zjistěte hodnost následujících matic:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $[h(\mathbf{A}) = 3]$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $[h(\mathbf{A}) = 2]$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ $[h(\mathbf{A}) = 2]$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ $[h(\mathbf{A}) = 3]$

e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 7 & -4 & -7 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $[h(\mathbf{A}) = 3]$

Inversní matice

Nalezněte inversní matice k následujícím maticím oběma možnými způsoby.

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right]$

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{7}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\right]$

c) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right]$

d) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}\right]$

e) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\left[\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{13}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{6}{9} & -\frac{12}{9} & \frac{3}{9} \end{pmatrix}\right]$

Soustavy lineárních rovnic

Vyřešte následující SLR.

a) $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -6 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_4 & = & 7 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_4 & = & -1 \end{array}$ $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & = & 1 \end{array}$ $[\mathbf{x} = \emptyset]$, soustava nemá řešení.

c) $\begin{array}{rcrcrcrcrcl} & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & - & 4x_5 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 3 \\ -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & & & - & 6x_5 & = & 2 \end{array}$ $\left[\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 - s + 2t \\ s \\ \frac{3}{2} \\ t \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R}.\right]$

Maticové rovnice

Vyřešte následující maticové rovnice

a) $\mathbf{D} + (\mathbf{AX} + \mathbf{B})\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \mathbf{FG}$ $\left[\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}[(\mathbf{FG} - \mathbf{D})(\mathbf{C}^{\mathrm{T}})^{-1} - \mathbf{B}]\right]$

b) $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{F}\mathbf{X}\mathbf{D}^{-1}) + \mathbf{C} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}}$ $\left[\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{G}^{\mathrm{T}} - \mathbf{C})\mathbf{D}\right]$

Další příklady si můžete vymyslet sami. Své matice zadáte do `https://www.wolframalpha.com/`. Například matici **A** zapíšete jako „{{2,3,2},{2,3,1},{0,2,1}}“ a s pomocí „*determinant*“, „*inverse matrix*“, či „*rank*“ (hodnost matice) jste schopni dostat Vámi požadované výsledky.