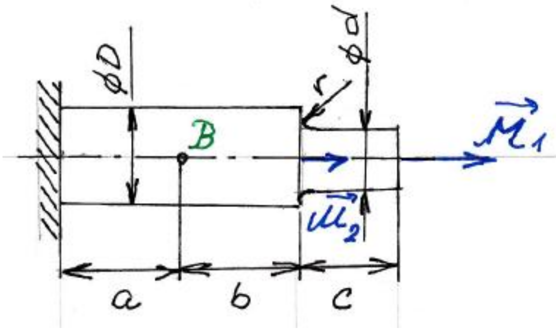
7. cvičení Pružnost a pevnost

Namáhání prostým krutem

Příklad 1

U prutu, podle obr. 1.1, určete bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti a úhly natočení v bodech B a D je-li:
a = 150 mm, b = 200 mm, c = 100 mm, ϕd = 20 mm,
ϕD = 30 mm, $\mathcal{M}_1 = 1{,}5 \cdot 10^5$ N.mm, $\mathcal{M}_2 = 6 \cdot 10^5$ N.mm,
r = 1 mm, materiál je ocel E = 2,1 . 10^5 MPa, μ = 0,3,
σ_k = 420 MPa. Pro materiál můžete použít Hookovský model materiálu.

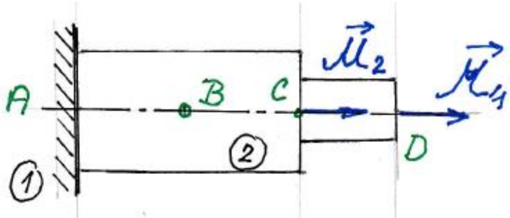


Obr. 1.1

Součinitel koncentrace napětí α_τ = 1,7 je stanoven z diagramu ve skriptech MT – PP I (str. 281 –viz e-learning). Nominální napětí je určeno ze vztahu $\tau_n = \frac{16M_k}{\pi d^3}$, tedy z malého průměru.

Rozbor

Prut je vázán pouze na levém konci. K určení VVÚ a napětí není nutné prut uvolňovat jako celek, pouze je nutné zkontrolovat, nepohyblivost uložení prutu.
$i = i_v(n-1) - (\Sigma z - \eta) - k\delta$;
i = 3.1 – (3 – 0) – 0 = 0,
i = 0, η = 0.

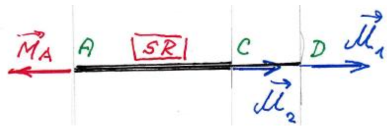


Obr. 1.2

Prut je uložen nepohyblivě bez omezení deformačních parametrů – obr. 1.2.

1) Úplné uvolnění a statický rozbor

Vyznačíme pouze nenulové souřadnice výsledných stykových sil.



Obr. 1.3

2) Statický rozbor

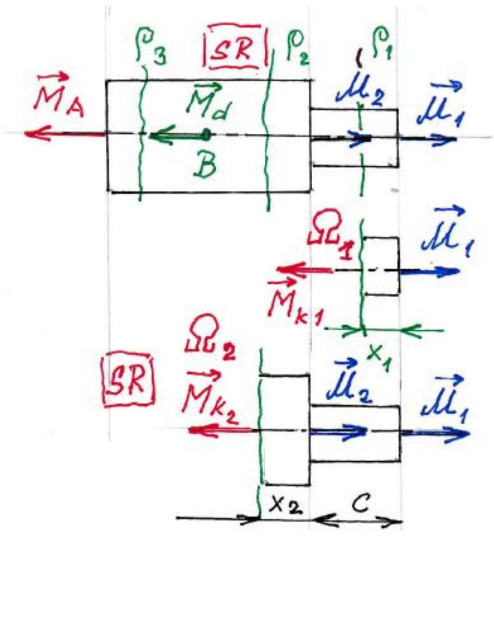
NP = {M_A}, počet neznámých μ = 1. Soustava sil π působících na těleso je soustava silových dvojic na jedné nositelce, ν = 1, s = μ- ν= 0. Úloha je staticky určitá.

3) Rovnice rovnováhy

M_{xA}: $- M_A + \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = 0 \Rightarrow M_A = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = 7{,}5 \cdot 10^5$ N.mm

4) Určení napětí a bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu pružnosti

V důsledku změny zatížení a příčných průřezů po délce střednice uvolníme dva prvky Ω_1 a Ω_2 a určíme Mk_1 a Mk_2 (obr. 1.4).



Obr.1.4

Ω_1: M_x: $-M_{k_1} + \mathcal{M}_1 = 0$; $M_{k_1} = \mathcal{M}_1 = 1{,}5 . 10^5$ Nmm

$\tau_{ex}^1 = \dfrac{M_k^1}{W_k^1}$; $W_k^1 = \dfrac{\pi d^3}{16} = \dfrac{\pi . 20^3}{16} = 1{,}57 . 10^3 \, mm^3$

$\underline{\tau_{ex}^1} = \dfrac{1{,}5 . 10^5}{1{,}57 . 10^3} = \underline{95{,}5 \text{ MPa}}$

Obr. 1.5

Ω_2: M_x: $-M_{k_2} + \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = 0$; $M_{k_2} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = (1{,}5 + 6) . 10^5 =$
$= 7{,}5 . 10^5$ Nmm

$\tau_{ex}^2 = \dfrac{M_{k_2}}{W_k^2}$; $W_k^2 = \dfrac{\pi D^3}{16} = \dfrac{\pi \, 30^3}{16} = 5{,}3 . 10^3 \, mm^3$

$\underline{\tau_{ex}^2} = \dfrac{7{,}5 . 10^5}{5{,}3 . 10^3} = \underline{141{,}5 \text{ MPa}}$

$\tau_{max}^1 = \alpha \, \tau_{nom} = \alpha \, \tau_{ex}^1 = 1{,}7 . \ 95{,}5 = 162{,}4$ MPa

$\underline{\tau_{max}} = \max(\tau_{max}^1, \tau_{ex}^1, \tau_{ex}^2) = \max(162{,}4 ; 95{,}5 ;$
$141{,}5) = \underline{162{,}4 \text{ MPa}}$

$\tau_K = \dfrac{\sigma_K}{2}$ (podle koncepce max τ) ; $\underline{\tau_K} = \dfrac{420}{2} = \underline{210 \text{ MPa}}$

$\underline{k_k} = \dfrac{\tau_K}{\tau_{max}} = \dfrac{210}{162{,}5} = \underline{\underline{1{,}29}}$

Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti $k_k = 1{,}29$.

5) Určení úhlů natočení příčných průřezů v bodech B a D

Pro určení úhlů natočení příčných průřezů vyjdeme ze základního vztahu pro úhel natočení příčného průřezu u prutu namáhaného prostým krutem s respektováním rozdělení prutu na úseky.

$\varphi_k = \int_0^l \dfrac{M_{k(x)}}{G \, J_{p(x)}} dx$ pro $\dfrac{M_{k(x)}}{G \, J_{p(x)}} = konst$ $\varphi_k = \dfrac{M_k . l}{G \, J_p}$

pro více úseků $\dfrac{M_{k(x)}^i}{G \, J_{p(x)}^i} = konst$; $\varphi_k = \sum_{i=1}^n \dfrac{M_k^i \, l_i}{G \, J_p^i}$

G modul pružnosti ve smyku $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$

$E = 2{,}1 . 10^5$ MPa , $\mu = 0{,}3$; $\underline{G = 8 . 10^4 \text{ MPa}}$

$J_p = \dfrac{\pi d^4}{32}$; $\underline{J_p^1} = \dfrac{\pi d^4}{32} = \dfrac{\pi . 20^4}{32} = \underline{15{,}71 . 10^3 \, mm^4}$

$\underline{J_p^2} = \dfrac{\pi D^4}{32} = \dfrac{\pi \, 30^4}{32} = \underline{79{,}5 . 10^3 \, mm^4}$

$$\underline{\varphi_D} = \frac{M_k^1 \cdot c}{G\, J_p^1} + \frac{M_k^2 (a+b)}{G\, J_p^2} = \frac{1{,}5 \cdot 10^5 \cdot 100}{8 \cdot 10^4 \cdot 15{,}71 \cdot 10^3} + \frac{7{,}5 \cdot 10^5 \cdot 350}{8 \cdot 10^4 \cdot 79{,}5 \cdot 10^3} =$$

$$= 0{,}0119 + 0{,}0413 = \underline{0{,}0532\ rad = 3{,}05^\circ}$$

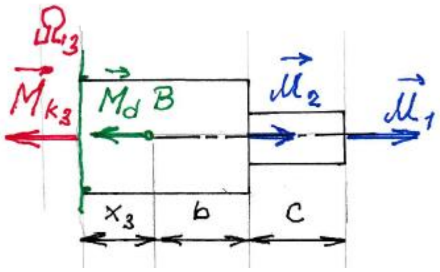
$$\underline{\varphi_B} = \frac{M_k^2 \cdot a}{G\, J_p^2} = \frac{7{,}5 \cdot 10^5 \cdot 150}{8 \cdot 10^4 \cdot 79{,}5 \cdot 10^3} = \underline{0{,}0177\ rad = 0{,}97^\circ}$$

M_{ki} jsou kladné, proto i znaménka φ_B a φ_D jsou kladná, úhly natočení mají smysl vnější normály řezů v bodech B a D.

Úhel natočení můžeme určit také pomocí Castigliánovy věty, resp. Maxwell - Mohrovy varianty Castiglianovy věty (protože $\tau_{max} < \tau_k$ a pro materiál můžeme použít Hookovský model materiálu, je úloha lineární). Obecný vztah pro určení úhlu natočení pomocí Maxwell - Mohrovy varianty Castiglianovy věty:

$$\varphi_B = \frac{\partial W}{\partial M_B} = \int_0^l \frac{M_k}{GJ_p} \frac{\partial M_k(x)}{\partial M_B} dx$$

Z cvičných důvodů, určíme úhel natočení v bodě B (φ_B) také pomocí Maxwell - Mohrovy varianty Castiglianovy věty. V bodě B nepůsobí silová dvojice proto do bodu B zavedeme doplňkovou silou dvojici Md_B. Po zavedením Md_B je nutné uvolnit další prvek Ω_3 a určit M_{k3}.



Obr. 1.6

$$\varphi_B \text{ – Maxwell-Mohrova varianta Castiglianovy věty}$$

$$M_k^1 = \mathcal{M}_1\ ; \quad M_k^2 = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2\ ; \quad M_k^3 = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 - Md$$

$$\frac{\partial M_k^1(x)}{\partial Md} = 0\ ; \quad \frac{\partial M_k^2(x)}{\partial Md} = 0\ ; \quad \frac{\partial M_k^3(x)}{\partial Md} = -1\ ; \ M_d = 0$$

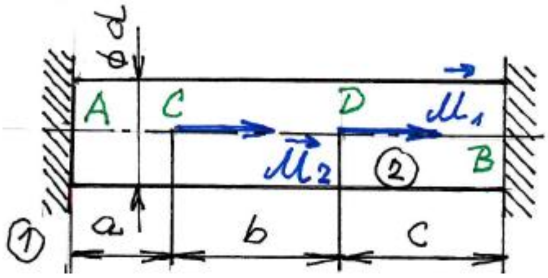
$$\underline{\varphi_B} = \int_0^{150} \frac{M_k^3(x)}{G\, J_p^2} \cdot \frac{\partial M_k^3}{\partial Md} \cdot dx = \frac{7{,}5 \cdot 10^5}{8 \cdot 10^4 \cdot 79{,}5 \cdot 10^3} \int_0^{150} (-1) \cdot dx =$$

$$= \underline{-0{,}0177\, rad} = -\underline{0{,}97^\circ}$$

Velikost úhlu natočení oběma metodami vyšla stejná, ale znamánka opačná, což značí, že v obou případech, je smysl φ_B ve smyslu vnější normály příčného průřezu procházejícího bodem B. U φ určeného pomocí Castigliánovy věty je znaménko kladné, jestiže smysl φ je stejný jako smysl **M,** protože Md má smysl vnitřní normály příčného průřezu, $\varphi_B < 0$ znamená, že smysl φ_B je ve smyslu vnější normály příčného průřezu, tedy i smysl φ_B v obou případech vyšel stejný.

Příklad 2

U prutu, podle obr. 2.1, určete bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti a úhel natočení v bodě C je-li:
a = 100 mm, b = 200 mm, c = 300 mm, ϕd = 25 mm,
$\mathcal{M}_1 = 4 \cdot 10^5$ N.mm, $\mathcal{M}_2 = 3 \cdot 10^5$ N.mm, materiál je ocel
E = 2,1 . 10^5 MPa, $\mu = 0.3$, $\sigma_k = 350$ MPa.
Pro materiál můžete použít Hookovský model materiálu.

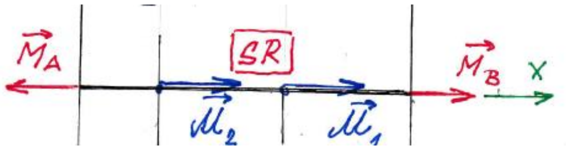


Obr. 2.1

Rozbor

Vazby omezují pouze úhel natočení kolem osy x (φ_x).

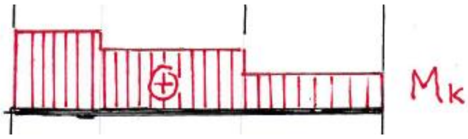
1) Úplné uvolnění



Obr. 2.2

2) Náčrt kvalitativního průběhu M_k

N = 0, T = 0, $M_o = 0$



Obr. 2.3

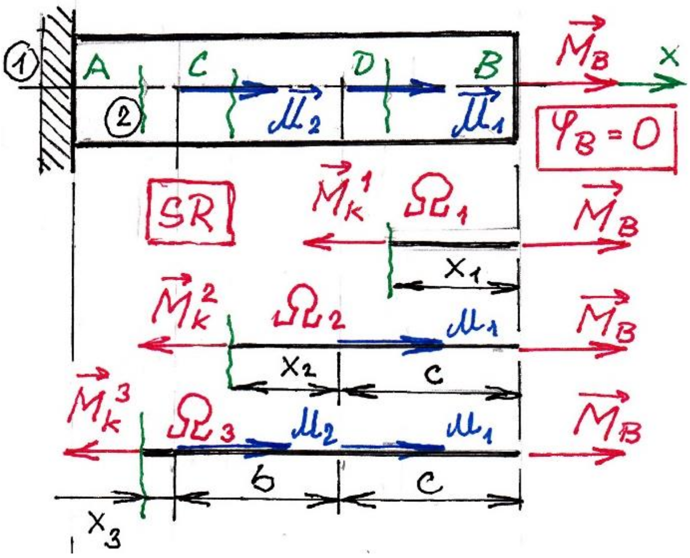
3) Statický rozbor

NP = {M_A, M_B}, počet neznámých $\mu = 2$. Soustava silových prvků π působících na těleso je soustava silových dvojic na jedné nositelce, $\nu = 1$, $s = \mu - \nu = 2 - 1 = 1$. **Úloha je 1 x staticky neurčitá.**

4) Částečné uvolnění, rozdělení prutu na intervaly a vyjádření M_k^i v jednotlivých intervalech

Z podmínek SR na uvolněných prvcích určíme krouticí momenty M_k^i

$M_k^1 = M_B$
$M_k^2 = M_B - \mathcal{M}_1$
$M_k^3 = M_B - \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2$



Obr. 2.4

5) Vyjádření deformační podmínky v silovém tvaru

a) ze základního vztahu pro úhel natočení: $\varphi = \int_0^l \frac{M_k}{GJ_p} dx$, pro $\frac{M_k}{GJ_p} = konst$, $\varphi = \frac{M_k\, l}{GJ_p}$

$$\varphi_B = \frac{1}{GJ_p}\left[M_B.c + (M_c + \mathcal{M}_1)b + (M_B + \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)a\right] = 0$$

$$M_B(a+b+c) + \mathcal{M}_1(a+b) + \mathcal{M}_2 a = 0$$

$$\underline{\underline{M_B}} = -\frac{\mathcal{M}_1(a+b) + \mathcal{M}_2 a}{a+b+c} = -\frac{\mathcal{M}_1 . 300 + \mathcal{M}_2 . 100}{600} =$$

$$= -\left(\frac{1}{2}\mathcal{M}_1 + \frac{1}{6}\mathcal{M}_2\right) = -\left(\frac{1}{2}.4 + \frac{1}{6}3\right).10^5 = \underline{\underline{-2{,}5\,10^5\,Nmm}}$$

b) pomocí Maxwell – Mohrovy varianty Castiglianovy věty: $\varphi_B = \frac{\partial W}{\partial M_B} = \int_0^l \frac{M_k}{GJ_p}\frac{\partial M_k(x)}{\partial M_B}dx = 0$

$$\frac{\partial M_k^1(x)}{\partial M_B} = 1 \qquad \frac{\partial M_k^2(x)}{\partial M_B} = 1 \qquad \frac{\partial M_k^3(x)}{\partial M_B} = 1$$

$$\varphi_B = \frac{1}{GJ_p}\left[M_B.c.1 + (M_B + \mathcal{M}_1)b + (M_B + \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2)a.1\right] = 0$$

6) Určení extrémních napětí v jednotlivých řezech

$$W_k = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi . 25^3}{16} = 3068\ mm^3$$

$$\tau_{ex}^1 = \frac{M_k^1}{W_k} = \frac{-2{,}5.10^5}{3068} = \underline{\underline{-81{,}5\,MPa}}$$

$$\tau_{ex}^2 = \frac{M_k^2}{W_k} = \frac{M_B + \mathcal{M}_1}{W_k} = \frac{(-2{,}5+4).10^5}{3069} = \underline{\underline{-48{,}9\,MPa}}$$

$$\tau_{ex}^3 = \frac{M_k^3}{W_k} = \frac{M_B + \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2}{W_k} = \frac{(-2{,}5+4+3).10^5}{3069} = \underline{\underline{146{,}7\,MPa}}$$

7) Bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti

$$\tau_k = \frac{\sigma_k}{2}\ \text{podle max}\,\tau \qquad k_k = \frac{\tau_k}{\tau_{max}} = \frac{175}{147} = \underline{\underline{1{,}19}}$$

$$\tau_k = \frac{\sigma_k}{2} = \frac{350}{2} = 175\ MPa$$

$$\tau_{max} = \max(\tau_{ex}^1, \tau_{ex}^2, \tau_{ex}^3) = \tau_{ex}^3 = \underline{\underline{146{,}7\,MPa}}$$

8) Úhel natočení v bodě C

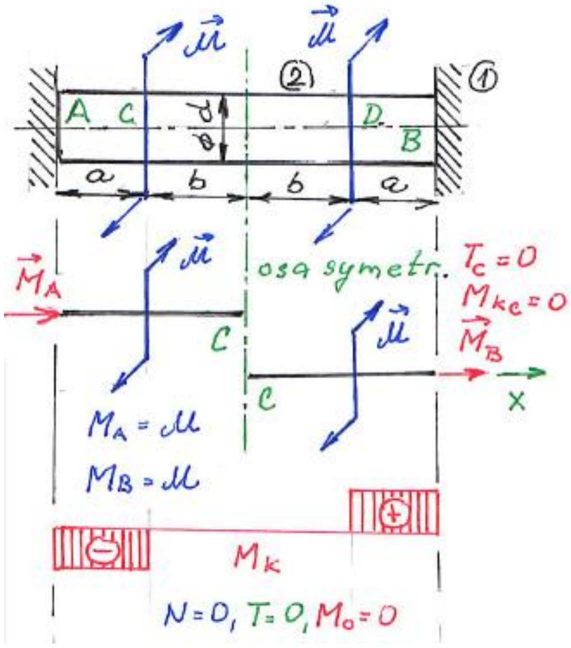
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{2{,}1.10^5}{2(1+0{,}3)} = \underline{\underline{8.10^4\,MPa}}$$

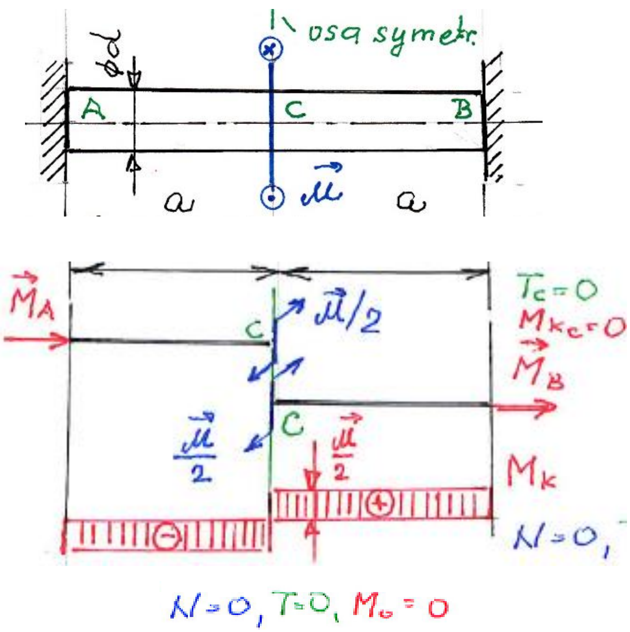
$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi . 25^4}{32} = \underline{\underline{38349{,}5\,mm^4}}$$

$$\varphi_c = \frac{1}{GJ_p}\cdot\left[M_B(b+c) + \mathcal{M}_1 b\right] = \frac{10^5}{8.10^4 . 38349{,}5}\left[-2{,}5(300+200) +\right.$$

$$\left. + 4.200\right] = \frac{-4{,}5.10^7}{3068.10^6} = -0{,}01467\,rad = \underline{\underline{-0{,}84^\circ}}$$

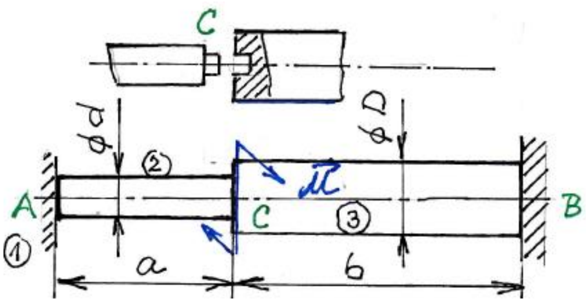
Poznámka: Prostý krut a symetrie.
U prutu podle obrázku načrtněte VVÚ. Vazby omezují pouze úhly natočení ve směru osy x. Prut je symetrický symetricky zatížený. Na ose symatrie jsou nenulové pouze symetrické souřednice VVÚ (N, M_o).





Příklad 3

U prutu podle obr. 3.1 určete v celém průběhu zatěžování bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti a úhel natočení v bodě C je-li: a = 300 mm, b = 450 mm, ϕd = 20 mm, ϕD = 35 mm, $\mathcal{M}$ = 1,5 . 10^6 N.mm, materiál je ocel E = 2,1 . 10^5 MPa, μ = 0,3, σ_k = 420 MPa. Pro materiál můžete použít Hookovský model materiálu.



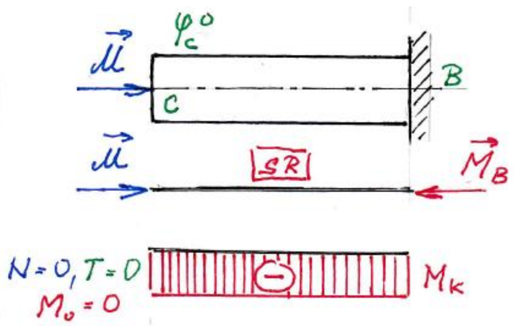
Obr. 3.1

Zatěžování: V prvním kroku zatížíme silovou dvojicí $\mathcal{M}$ těleso 3. Ve druhém kroku tělesa 2 a 3 svaříme a po svaření odtížíme ($\mathcal{M}$ = 0).

Rozbor
Vazby omezují pouze úhel natočení kolem osy x (φ_x).

1) První krok: Zatíženo je pouze těleso 3.

1.1) Úplné uvolnění a náčrt VVÚ - viz obr. 3.2.



Obr. 3.2

1.2) Statický rozbor

NP = { M_B }, počet neznámých μ = 1. Soustava Π působící na těleso je soustava silových dvojic na jedné nositelce, ν = 1, s = μ - ν = 1 – 1 = 0. Úloha je staticky určitá.

1.3) Určení extrémního napětí a bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu pružnosti

$$W_k^3 = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi 35^3}{16} = \underline{8418\ mm^3}\ ; \quad J_p^3 = \frac{\pi D^4}{32} = 147{,}3 \cdot 10^3\ mm^4$$

$$M_k^3 = \mathcal{M} = \underline{1{,}5 . 10^6\ Nmm}$$

$$\tau_{ex}^3 = \frac{M_k^3}{W_k^3} = \frac{1{,}5 . 10^6}{8418} = \underline{178{,}2\ MPa}\ ; \quad \tau_k = \frac{\sigma_k}{2} = \frac{420}{2} = 210\ MPa$$

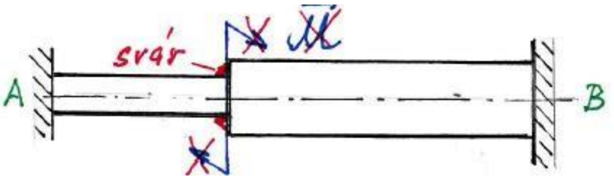
$$k_k^3 = \frac{210}{178{,}2} = \underline{1{,}12}$$

1.4) Určení úhlu natočení v bodě C

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} = \frac{2{,}1\,10^5}{2{,}6} = \underline{8 . 10^4\ MPa}$$

$$\varphi_{oc}^3 = \frac{M_k^3 . b}{G\, J_p^3} = \frac{1{,}5 . 10^6 . 450}{8 . 10^4 . 148{,}3 . 10^3} = \underline{0{,}0573\ rad = 3{,}28^o}$$

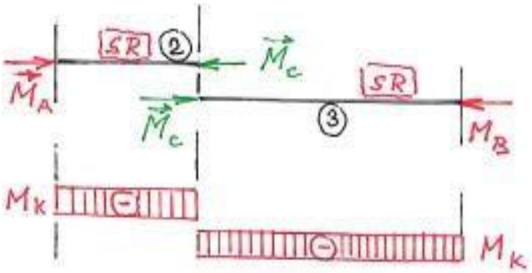
2) Druhý krok: *Ve druhém kroku tělesa 2 a 3 svaříme a po svaření odtížíme ($\mathcal{M}$ = 0)*



Obr. 3.3

2.1) Úplné uvolnění

$N = 0,\ T = 0,\ M_o = 0$

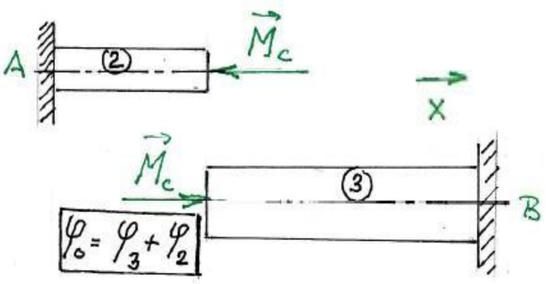


Obr. 3.4

2.2) Statický rozbor

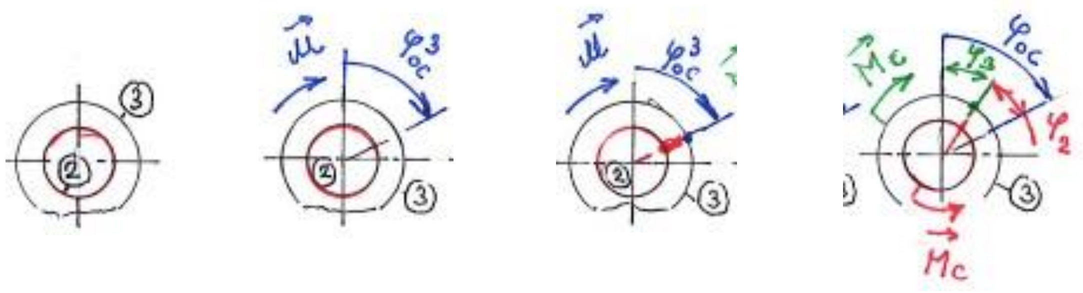
NP = { M_A M_B }, počet neznámých μ = 2. Soustava sil Π působících na těleso je soustava silových dvojic na jedné nositelce, ν = 1, s = μ - ν = 2 – 1 = 1. Úloha je 1x staticky neurčitá.

2.3) Částečné uvolnění



Obr. 3.5

Deformační podmínku formulujeme na základě natočení těles v příčném průřezu procházejícím bodem C. Pohled je v kladném smyslu osy x (obr. 3. 5).



a) b) c) d)

Obr. 3.6

Na obr. 3.6a je vyznačen nezatížený stav. Na obrázku je deformace tělesa 3 zatíženého silovou dvojicí $\mathcal{M}$.

Obr. 3.6c zobrazuje stav při svaření těles 2 a 3 a obr. 3.6d znázorňuje stav deformace těles po odlehčení ($\mathcal{M}$ = 0). Z obr. 3.6d) je zřejmé, že $\varphi_0{}^C = \varphi_2{}^C + \varphi_3{}^C$.

2.4) Vyjádření deformační podmínky v silovém tvaru

$$W_k^2 = \frac{\pi d^3}{16} = \underline{1571\ mm^3}\ ; \quad J_p^2 = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \cdot 20^4}{32} = 15{,}7 \cdot 10^3\ mm^4$$

$$\varphi_{oc}^3 = \varphi_c^2 + \varphi_c^3 \qquad \varphi_{oc}^3 = \frac{M_c a}{G J_p^2} + \frac{M_c b}{G J_p^3}$$

$$\frac{M_c \cdot 300}{8 \cdot 10^4 \cdot 15{,}7 \cdot 10^3} + \frac{M_c \cdot 450}{8 \cdot 10^4 \cdot 147{,}3 \cdot 10^3} = 0{,}0573$$

$$M_c = 2{,}068 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$$

2.5) Určení extrémního napětí a bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu pružnosti

$$\tau_{ex}^2 = \frac{M_k^2}{W_k^2} = \frac{M_c}{W_k^2} = \frac{2{,}068 \cdot 10^5}{1571} = \underline{132\text{ MPa}}$$

$$k_k^2 = \frac{210}{132} = \underline{1{,}6}$$

$$\tau_{ex}^3 = \frac{M_k^3}{W_k^3} = \frac{M_c}{W_k^3} = \frac{2{,}068 \cdot 10^5}{8418} = \underline{24{,}6\text{ MPa}}$$

$$k_k^3 = \frac{210}{24{,}6} = 8{,}5$$

2.6) Určení úhlu natočení v bodě C

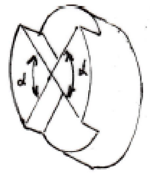
$$\varphi_c^2 = \frac{M_c \cdot a}{G \cdot J_P^2} = \frac{2{,}068 \cdot 10^5 \cdot 300}{8 \cdot 10^4 \cdot 15{,}7 \cdot 10^3} = 0{,}0494 = 2{,}83^o$$

$$\varphi_c^3 = \frac{M_c \cdot b}{G \cdot J_P^3} = \frac{2{,}068 \cdot 10^5 \cdot 450}{8 \cdot 10^4 \cdot 147{,}3 \cdot 10^3} = 0{,}00789 = 0{,}45^o$$

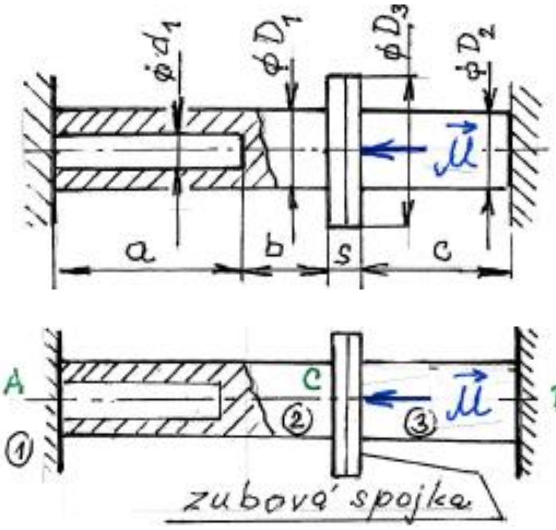
Příklad 4

Soustava těles podle obrázku obsahuje zubovou spojku (obr. 4.1). Maximální vůle v zubové spojce je 0,5 °. Určete bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti a úhel natočení v působišti silové dvojice, pro nulovou a maximální vůli ve spojce, je-li: a = 250 mm, b = 180 mm, c = 200 mm, ϕd_1 = 16 mm, ϕD_1 = 20 mm, ϕD_2 = 20 mm, ϕD_3 = 35 mm, s = 10 mm, $\mathcal{M}$ = 2 . 10^5 N.mm, materiál je ocel E = 2,1 . 10^5 MPa, μ = 0,3; σ_k = 350 MPa. Pro materiál můžete použít Hookovský model materiálu.

Schématické znázornění spojky je na obr. 4.2, pokud α = 90°, pak pravá a levá strana se liší pouze o vůli, například na pravé straně je α = 90° na levé straně je $\alpha' = 90 - \frac{\varphi_v}{2}$.



Obr. 4.2



Obr. 4.1

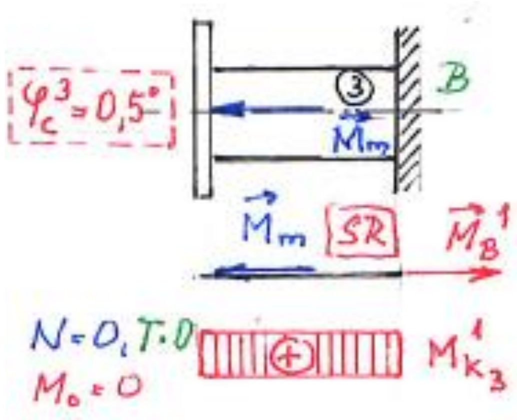
Rozbor: Vazby omezují pouze úhel natočení kolem osy x (φ_x). Deformace zubové spojky je nepodstatná. Velikost silové dvojice potřebné k vymezení maximální vůle určíme ze vztahu:

$$v = 0{,}5^\circ = 8{,}73 . 10^{-3}\,rad$$

$$\varphi_v = \frac{M_m . c}{G\, J_p^3} = \frac{M_m . 200}{8.10^4\; 1{,}57 . 10^4} = 8{,}73 . 10^{-3}; \quad M_m = 5{,}48 . 10^4\, Nmm$$

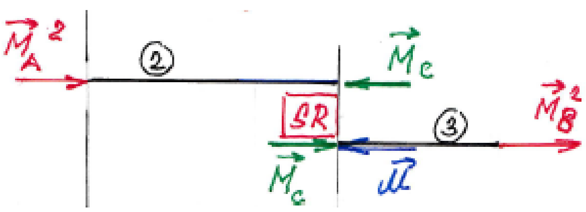
Vzhledem k tomu, že M_m = 5,48.10^4 < 2.10^5 = $\mathcal{M}$ $[N.mm]$ jsou všechny vazby funkční.

Pokud by byl moment M_m větší než moment zátěžné dvojice M, pak by nedošlo k vymezení vůle a vazba C by nebyla funkční. Namáháno by bylo pouze těleso 3 a uložení by bylo staticky určité – obr. 4.3.



Obr. 4.3

2) Úplné uvolnění

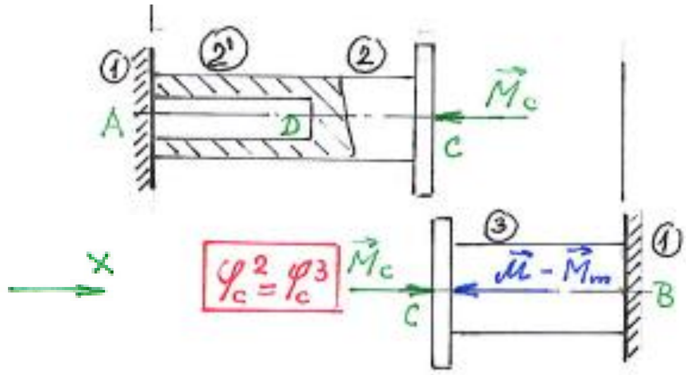


Obr. 4.4

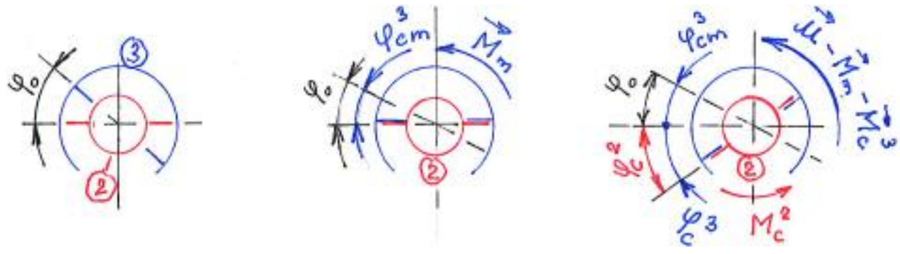
3) Statický rozbor

NP = { M_A M_B M_C }, počet neznámých μ = 3. Soustavy silových prvků π působících na tělesa jsou soustavami silových dvojic na jedné nositelce, ν = 2, $s = \mu - \nu = 3 - 2 = 1$. **Úloha je 1x staticky neurčitá.**

4) Částečné uvolnění



Obr. 4.4



a) b) c)

Obr. 4.5

Deformační podmínka je zformulována na základě deformace v příčném průřezu procházející bodem C, pro různé stavy zatěžování. Na obr. 4.5a je zobrazen neztížený stav, na obr. 4.5b je stav, při němž došlo právě k vymezení vůle a na obr. 4.5c je zobrazen stav, při kterém je vazba C funkční a jsou namáhaná obě tělesa. Deformační stavy jsou zobrazeny pro nenulovou vůli. V případě nulové vůle je $\varphi_0 = 0$ a $M_m = 0$.

5) Určení extrémního napětí a bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu pružnosti

Nejdříve si určíme průřezové charakteristiky.

$$J_\circ^{2'} = \frac{\pi(D_1^4 - d_1^4)}{32} = \frac{\pi(20^4 - 16^4)}{32} = \underline{9{,}28.10^3\,mm^4}$$

$$J_\circ^{2} = J_\circ^{3} = \frac{\pi\,20^4}{32} = \underline{1{,}57.10^4}$$

$$W_{k\circ}^{2'} = \frac{J_\circ^{2'}.2}{D_1} = \underline{1{,}16.10^3\,mm^3}$$

$$W_{k}^{2,3} = \frac{J_\circ^{2,3}.2}{D_1} = 1{,}96.10^3\,mm^3$$

6a) Vyjádření deformační podmínky v silovém tvaru pro nulovou vůli

$$\varphi_c^2 = \varphi_c^3$$

$$\frac{M_c.a}{G J_p^{2'}} + \frac{M_c b}{G J_p^2} = \frac{(\mathcal{M} - M_c).c}{G J_p^3} \;;\; J_p^2 = J_p^3$$

$$M_c\left(\frac{a}{\ } + \frac{b+c}{\ }\right) = \frac{\mathcal{M}.c}{\ }$$

$$M_c\left(\frac{250}{9{,}28.10^3} + \frac{380}{1{,}57.10^4}\right) = \frac{2.10^5.200}{1{,}57.10^4}$$

$$M_c = \underline{0{,}2535\,\mathcal{M} = 5{,}067.10^4\,Nmm}$$

7a) Určení extrémních napětí a bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu pružnosti pro nulovou vůli

$$\tau_{ex}^{2'} = \frac{M_c}{W_k^{2'}} = \frac{5{,}067.10^4}{1{,}16.10^3} = 43{,}7\ MPa$$

$$k_k^{2'} = \frac{210}{43{,}7} = 4{,}8$$

8a) Určení úhlu natočení v bodě C pro nulovou vůli

$$\varphi_c^2 = \frac{M_c}{G}\left(\frac{a}{J_p^{2'}} + \frac{b}{J_p^2}\right) = \frac{5{,}067.10^4}{8.10^4}\left(\frac{250}{9{,}28.10^3} + \frac{180}{1{,}57.10^4}\right) =$$

$$= \underline{0{,}0243\ rad = 1{,}39^\circ}$$

$$\varphi_c^3 = \frac{(\mathcal{M} - M_c).c}{G\, J_p^3} = \frac{(2.10^5 - 5{,}067.10^4).200}{8.10^4.1{,}57.10^4} =$$

$$= \underline{0{,}024\ rad = 1{,}36^\circ}$$

6b) Vyjádření deformační podmínky v silovém tvaru pro nenulovou vůli

$$\frac{M_c}{G}\left(\frac{a}{J_p^{2'}} + \frac{b}{J_p^2}\right) = \frac{(\mathcal{M} - M_m - M_c).c}{G\, J_p^3} \qquad J_p^2 = J_p^3$$

$$M_c\left(\frac{250}{9{,}28.10^3} + \frac{180}{1{,}57.10^4} + \frac{200}{1{,}57.10^4}\right) = \frac{(2.10^5 - 5{,}48).200}{1{,}57.10^4}$$

$$\underline{M_c = 3{,}680.10^4\ Nmm}$$

7b) Určení extrémních napětí a bezpečnosti vzhledem k meznímu stavu pružnosti pro nenulovou vůli

$$\tau_{ex}^{2'} = \frac{M_c}{W_k^{2'}} = \frac{3{,}68.10^4}{1{,}16.10^3} = \underline{31{,}72\ MPa}$$

$$k_k^{2'} = \frac{\tau_k}{\tau_{ex}^{2'}} = \frac{210}{31{,}72} = \underline{\underline{6{,}4}}$$

$$\tau_{ex}^3 = \frac{\mathcal{M} - M_c}{W_k^3} = \frac{2.10^5 - 3{,}68.10^4}{1{,}96.10^3} = \underline{\underline{83{,}26\ MPa}}$$

$$k_k^3 = \frac{\tau_k}{\tau_{ex}^3} = \frac{210}{83{,}26} = 2{,}52$$

8b) Určení úhlu natočení v bodě C pro nenulovou vůli

$$\varphi_C^2 = \frac{M_C}{G}\left(\frac{a}{J_p^{21}} + \frac{b}{J_p^2}\right) = \frac{3{,}68.10^4}{8.10^4}\left(\frac{250}{9{,}28.10^3} + \frac{180}{1{,}57.10^4}\right) =$$

$$= 0{,}0176\ rad = 1{,}01^\circ$$

$$\varphi_C^3 = \frac{M - M_m - M_C}{G J_p^3} \cdot c = \frac{2.10^5 - 5{,}48.10^4 - 3{,}68.10^4}{8.10^4 . 1{,}57.10^4} \cdot 200 =$$

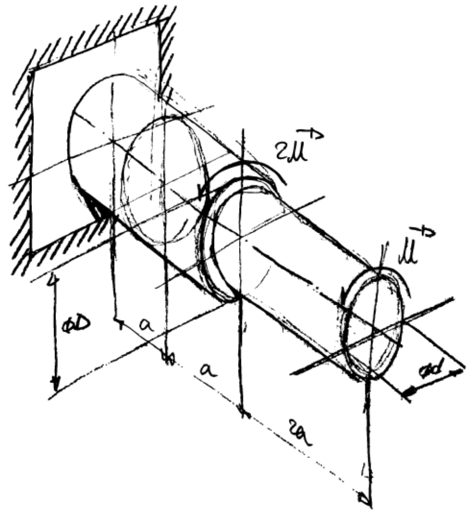
$$= \underline{0{,}01726\ rad = 0{,}99^\circ}$$

9) Závěr:

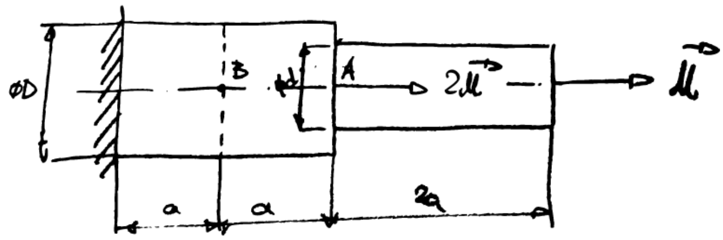
Výrobní vůle a přesah má vliv na na napjatost a deformaci součásti. Při jejich řešení je nutné věnovat pozorno montážnímu a provoznímu stavu.

Neřešený příklad 1

U prutu podle obrázku stanovte maximální napětí, natočení volného konce, místa vrubu (bod A střednice prutu) a poloviny osazené části (bod B střednice prutu), jestliže je dáno $a = 100\ \mathrm{mm}$, $d = 20\ \mathrm{mm}$, $D = 30\ \mathrm{mm}$, součinitel koncentrace napětí v místě A $\alpha = 1{,}7$, $\mathcal{M} = 0{,}3\ .\ 10^6\ \mathrm{N}\ .\ \mathrm{mm}$, $E = 2{,}1\ .\ 10^5\ \mathrm{MPa}$ a $\mu = 0{,}3$.



Při dodržení pravidla pravé ruky u zadaných silových dvojic $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ a $2\boldsymbol{\mathcal{M}}$ se obrázek může schematicky překreslit následovně.



Výsledky:

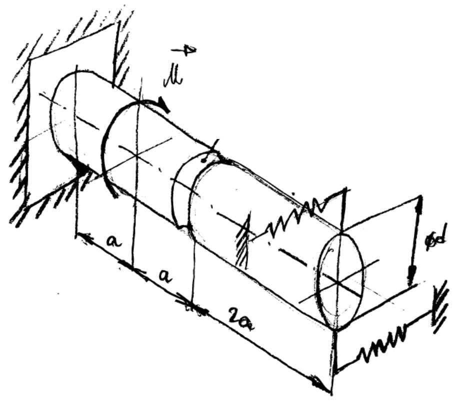
$\tau_{max} = 325\ \mathrm{MPa}$

Natočení:

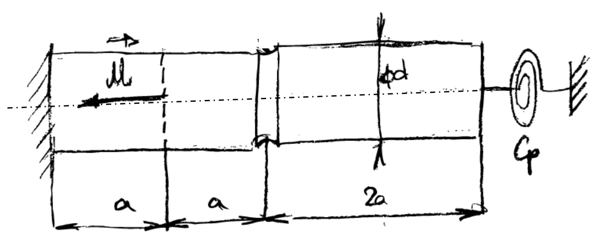
- volného konce prutu: $\varphi_{Konec} = 0{,}08\ \mathrm{rad} = 4{,}58\ °$
- $\varphi_A = 0{,}03\ \mathrm{rad} = 1{,}72\ °$
- $\varphi_B = 0{,}015\ \mathrm{rad} = 0{,}86\ °$

Neřešený příklad 2

U prutu podle obrázku stanovte bezpečnost k meznímu stavu pružnosti, jestliže je dáno $a = 100\ \mathrm{mm}$, $d = 30\ \mathrm{mm}$, součinitel koncentrace napětí v místě zápichu $\alpha = 1{,}3$, $\mathcal{M} = 0{,}4\ .\ 10^6\ \mathrm{N.mm}$, $c_p = 10^{-7}\ rad/(N.mm)$, $E = 2{,}1\ .\ 10^5\ \mathrm{MPa}$, $\mu = 0.3$ a $\sigma_k = 400\ \mathrm{MPa}$.



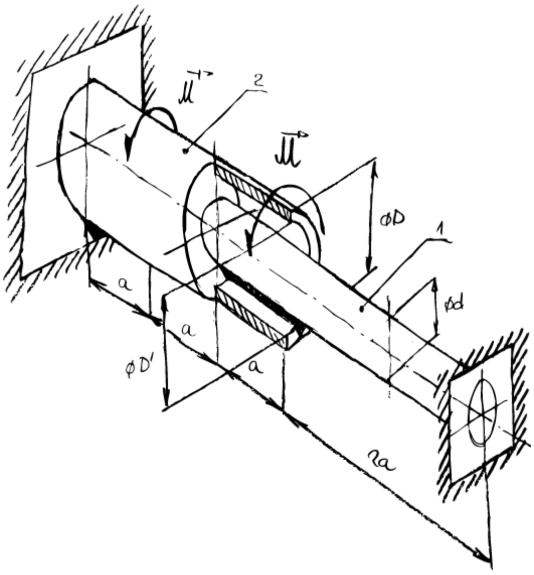
Při dodržení pravidla pravé ruky u zadané silové dvojice $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ se obrázek může schematicky překreslit následovně.



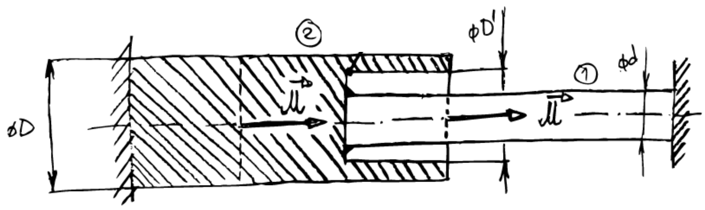
Výsledek:
$k_k = 2{,}9$

Neřešený příklad 3

Soustava prutů podle obrázku je tvořena dvěma pruty. Prut č. 1 je hřídel o průměru d a prut č. 2 je z jedné třetiny délky trubka se světlostí D' a ze zbývající části je tvořen hřídelem s vnějším průměrem D. Do trubkové části prutu č. 2 je vsazen volný konec prutu č. 1 a pevně bez vůle přichycen. Prut č. 1 je bez vnějšího zatížení a prut č. 2 je zatížen párem silových dvojic $\boldsymbol{\mathcal{M}}$. Oba pruty jsou vyrobeny ze stejného materiálu. Stanovte maximální možnou hodnotu velikosti vnějších silových dvojic $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ tak, aby bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti byla $k_k = 1{,}6$. Dále je dáno $a = 100\ \mathrm{mm}$, $d = 30\ \mathrm{mm}$, $D = 50\ \mathrm{mm}$, $D' = 40\ \mathrm{mm}$, $\sigma_k = 400\ \mathrm{MPa}$ a V kořeni vývrtu na volném konci prutu č. 2 uvažujte součinitel koncentrace napětí $\alpha = 1{,}4$.



Při dodržení pravidla pravé ruky u zadaných silových dvojic $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ se obrázek může schematicky překreslit následovně.

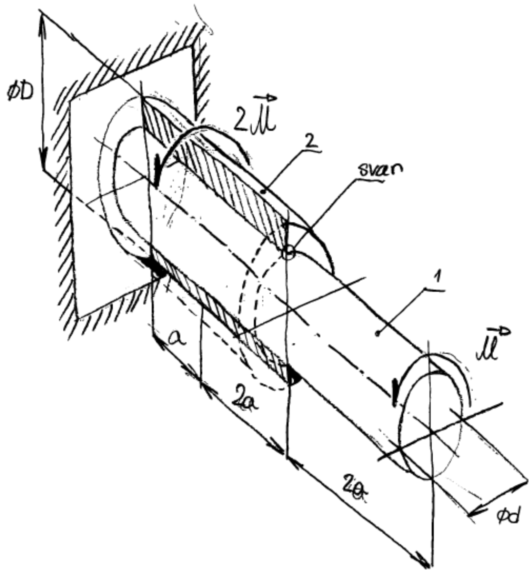


Poznámka: Je třeba upozornit na problematické umístění vnější silové dvojice $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ na volném konci prutu č. 2 tak, jak je uvedeno ve schématu výše. Vnější silová dvojice $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ působí samozřejmě podle zadání na trubkovité části hřídele č. 2, ale na základě platnosti prutových předpokladů se může přenést na střednici prutu č. 2. Naneštěstí se tímto jeví jako vnější zatížení prutu č. 1, což není samozřejmě pravda a je nutné tento fakt dodatečně zdůraznit.

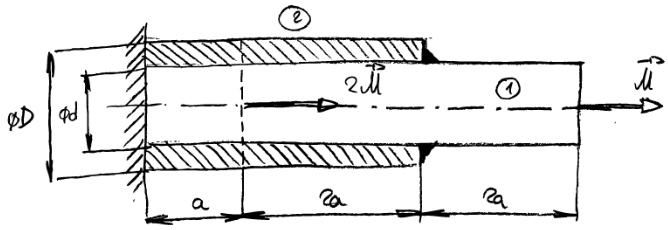
Výsledek:
$\mathcal{M} = 1623377\ \mathrm{N.mm}$

Neřešený příklad 4

Soustava prutů podle obrázku je tvořena dvěma pruty. Prut č. 1 je hřídel o průměru d a prut č. 2 je trubka světlosti d a s vnějším průměrem D. Do prutu č. 2 je vsazen prut č. 1 a pevně přichycen k volnému konci prutu č. 2. Oba pruty jsou společně vetknuty a jsou navzájem lícovány tak, že je mezi hřídelem a otvorem trubky vůle, kterou zanedbáváme. Prut č. 1 je zatížen na volném konci silovou dvojicí $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, prut č. 2 je ve vzdálenosti a od vetknutého konce zatížen silovou dvojicí $2\boldsymbol{\mathcal{M}}$. Oba pruty jsou vyrobeny ze stejného materiálu. Stanovte minimální průměr hřídele a světlost trubky d tak, aby bezpečnost vzhledem k meznímu stavu pružnosti byla $k_k = 1{,}9$, a to za předpokladu, že $D = 1{,}3 \times d$. Je dáno $a = 100\ \mathrm{mm}$, $\mathcal{M} = 1{,}5\ .\ 10^6\ \mathrm{N.mm}$ a $\sigma_k = 350\ \mathrm{MPa}$.



Při dodržení pravidla pravé ruky u zadaných silových dvojic $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ se obrázek může schematicky překreslit následovně.



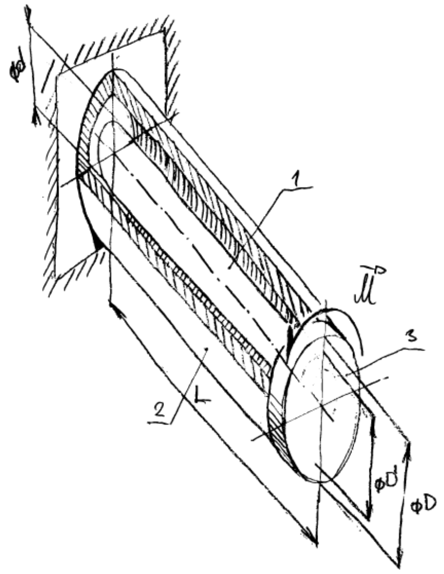
Poznámka: Umístění vnější silové dvojice $2\boldsymbol{\mathcal{M}}$ na prutu č. 2 tak, jak je uvedeno ve schématu výše, se na základě platnosti prutových předpokladů může přenést na střednici prutu č. 2. Naneštěstí se tímto jeví také jako vnější zatížení prutu č. 1, což není samozřejmě pravda a je nutné tento fakt dodatečně zdůraznit.

Výsledek:

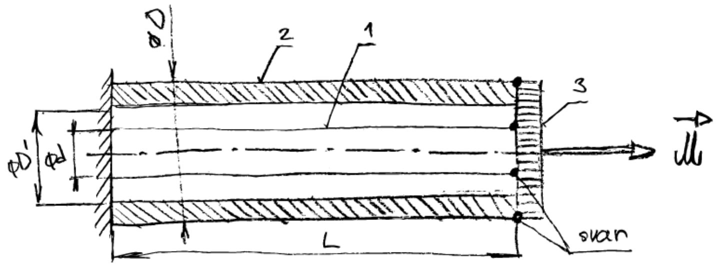
$d = 51{,}9\ \mathrm{mm}$

Neřešený příklad 5

Soustava prutů podle obrázku je tvořena dvěma pruty. Prut č. 1 je ocelový hřídel o průměru d, který je vsazen do měděné trubky (prut č. 2) světlosti D' a vnějším průměru D. Oba pruty jsou na jednom konci vetknuté a na druhém konci jsou pevně spojeny s kruhovým „víkem". Víko je zatížené silovou dvojicí $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ a uvažuje se jako neprutová část soustavy označená č. 3. Stanovte bezpečnost soustavy prutových těles (1 a 2) vzhledem k meznímu stavu pružnosti, jestliže je dáno $d = 20\ \mathrm{mm}$, $D = 50\ \mathrm{mm}$, $D' = 40\ \mathrm{mm}$, $L = 400\ \mathrm{mm}$, $\mathcal{M} = 7{,}5\ .\ 10^5\ \mathrm{N.mm}$, $\sigma_k^1 = 350\ \mathrm{MPa}$, $E_1 = 2{,}1\ .\ 10^5\ \mathrm{MPa}$, $\mu_1 = 0{,}3$, $\sigma_k^2 = 80\ \mathrm{MPa}$, $E_2 = 1{,}3\ .\ 10^5\ \mathrm{MPa}$, $\mu_2 = 0{,}35$.



Při dodržení pravidla pravé ruky u silové dvojice $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ se obrázek může schematicky překreslit následovně.



Poznámka: Těleso č. 3 se uvažuje jako neprutové, proto jsou jeho rozměry nepodstatné.

Výsledek:

$k_k = \min\{k_{k1}, k_{k2}\} = 0{,}8.$

Neřešený příklad 6

Soustava prutů podle obrázku je tvořena dvěma pruty. Prut č. 1 je hřídel o průměru d a prut č. 2 je trubka s vnějším průměrem D a světlostí d, která je v polovině své délky zatížená vnější silovou dvojicí $\boldsymbol{\mathcal{M}}$. Oba pruty jsou vyrobeny ze stejného materiálu. Průměr hřídele i otvor v trubce jsou lícovány tak, že jdou do sebe zasunout a bez tření se navzájem protáčejí. Volné konce obou prutů jsou vzájemně spojeny kolíkem a opačné konce prutů jsou vetknuté. Stanovte maximální možnou výrobní vůli φ_0 vyvrtaných příčných otvorů pro kolík v hřídeli i trubce tak, aby nebyla překročena mez kluzu materiálu obou prutů, jestliže je dáno $a = 100\ \mathrm{mm}$, $d = 30\ \mathrm{mm}$, $D = 40\ \mathrm{mm}$, $\mathcal{M} = 0{,}6\ .\ 10^6\ \mathrm{N.mm}$, $E = 2.1\ .\ 10^5\ \mathrm{MPa}$, $\mu = 0{,}3$ a $\sigma_k = 400\ \mathrm{MPa}$.