

# О непереполюненном базисе скалярных и смешанных произведений сигма-матриц

Олег Лычковский, Филипп Усков

16 октября 2020 г.

## Аннотация

Исследуется вопрос о полном вращательно-инвариантном операторном базисе для спиновых систем. Получен полный непереполюненный базис, и исследованы его простейшие свойства.

## 1 Введение

В физике важную роль играют системы спинов  $1/2$  с изотропным Гейзенберговским взаимодействием. Общий вид гамильтониана имеет вид:

$$H = - \sum_{i \neq j} J_{ij} \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_j \quad (1)$$

где  $\vec{\sigma}_i = \{\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z\}$  - вектор матриц Паули,  $J_{ij}$  - константы связи,  $i, j$  - нумеруют спины.

Состояние такой системы описывается матрицей плотности  $\rho$ . Поскольку гамильтониан изотропен, то матрица плотности тоже изотропна, и может быть разложена в базис:

$$A_i = \{1, (\vec{\sigma}_j \vec{\sigma}_k), (\vec{\sigma}_j \vec{\sigma}_k)(\vec{\sigma}_l \vec{\sigma}_m), \dots\} \quad (2)$$

Он конструируется из единичной матрицы и всевозможных скалярных и смешанных произведений сигма-матриц. Если мы требуем инвариантности матрицы плотности относительно обращений по времени, то в этом базисе будут только скалярные произведения (и единица), а если не требуем, то благодаря тождеству

$$(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3)(\vec{\sigma}_4, \vec{\sigma}_5, \vec{\sigma}_6) = \begin{vmatrix} (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_4) & (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_5) & (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_6) \\ (\vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_4) & (\vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_5) & (\vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_6) \\ (\vec{\sigma}_3, \vec{\sigma}_4) & (\vec{\sigma}_3, \vec{\sigma}_5) & (\vec{\sigma}_3, \vec{\sigma}_6) \end{vmatrix} \quad (3)$$

в каждом слагаемом можно оставить не более одного смешанного произведения.

Матрица плотности, разложенная по такому базису, используется в частности при квадратичной параметризации [2], для нахождения вариационного ограничения снизу энергии основного состояния [4], а также для решения уравнения Шредингера в виде  $H\rho = E\rho$  [3]. Также такой базис используется для нахождения интегралов движения гейзенберговской спиновой цепочки [6].

Недостатком такого базиса является его переполненность. В настоящей статье опираясь на результаты работы [1] мы построим полный но непереполенный базис изотропной системы.

## 2 Построение непереполенного базиса [1]

Элементы базиса будем называть табличками. Эти таблички заполняются номерами спинов.

Столбец высоты 3 мы интерпретируем как смешанное произведение.

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3) \quad (4)$$

Пару столбцов мы интерпретируем как определитель скалярных произведений (или, что то же самое, обобщенный символ Кронекера [7], свёрнутый со всеми векторами сигма-матриц).

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline \end{array} = \sigma_1^{\alpha_1} \sigma_2^{\alpha_2} (\delta_{\alpha_1 \alpha_2}^{\alpha_4 \alpha_5}) \sigma_4^{\alpha_4} \sigma_5^{\alpha_5} = \begin{vmatrix} (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_4) & (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_5) \\ (\vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_4) & (\vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_5) \end{vmatrix} \quad (5)$$

например

пара столбцов длины 1 это просто скалярное произведение

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2) \quad (6)$$

пара столбцов длины 3 равна произведению двух смешанных произведений (каждое соответствует своему столбцу)

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline \end{array} = \begin{vmatrix} (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_4) & (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_5) & (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_6) \\ (\vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_4) & (\vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_5) & (\vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_6) \\ (\vec{\sigma}_3, \vec{\sigma}_4) & (\vec{\sigma}_3, \vec{\sigma}_5) & (\vec{\sigma}_3, \vec{\sigma}_6) \end{vmatrix} = (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3)(\vec{\sigma}_4, \vec{\sigma}_5, \vec{\sigma}_6) \quad (7)$$

В базис войдут элементы, удовлетворяющие следующим критериям:

- каждая строка в табличке содержит число ячеек не больше чем в предыдущей строке
- строк не больше 3
- Для четного числа спинов:

- столбцы разбиваются на пары, высоты столбцов в каждой паре совпадают
- Для нечетного числа спинов:
  - в начале таблички добавляется столбец высоты 3
  - оставшиеся  $N-3$  ячейки делаем как для четного числа

Примеры форм табличек:

количество спинов	Примеры форм табличек
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

- после чего заполняем эти таблички различающимися номерами спинов так, чтобы каждая строка и каждый столбец был отсортирован по возрастанию номера спина (при необходимости спины можно перенумеровать в любой последовательности)

Примеры заполнения одной таблички:

1	2
3	4
5	6

1	2
3	5
4	6

1	3
2	4
5	6

1	3
2	5
4	6

1	4
2	5
3	6

(8)

Пример всего базиса для 4 спинов:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \quad (9)$$

Была написана функция [5], которая генерирует все возможные элементы базиса, и их число совпало с формулой из статьи[1]

$$Q_n = \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!(3r-n+1)}{(n-2r)!r!(r+1)!}. \quad (10)$$

Ранее нами была обнаружена гипотеза, что пара столбцов длины 4 равна 0, и что этим объясняются все линейные зависимости в базисе с четным числом спинов.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 5 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & 7 \\ \hline 4 & 8 \\ \hline \end{array} = \begin{vmatrix} (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_5) & (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_6) & (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_7) & (\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_8) \\ (\vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_5) & (\vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_6) & (\vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_7) & (\vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_8) \\ (\vec{\sigma}_3, \vec{\sigma}_5) & (\vec{\sigma}_3, \vec{\sigma}_6) & (\vec{\sigma}_3, \vec{\sigma}_7) & (\vec{\sigma}_3, \vec{\sigma}_8) \\ (\vec{\sigma}_4, \vec{\sigma}_5) & (\vec{\sigma}_4, \vec{\sigma}_6) & (\vec{\sigma}_4, \vec{\sigma}_7) & (\vec{\sigma}_4, \vec{\sigma}_8) \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Был замечен факт, что если для четного числа спинов сгенерировать все возможные таблички без ограничения числа строк, то их общее число оказалось равно количеству элементов нашего исходного переполненного базиса

$$N_n = \begin{cases} \frac{n!}{2^{n/2}(n/2)!} & (n = 2k) \\ \frac{n!}{32^{(n-1)/2}((n-3)/2)!} & (n = 2k+1) \end{cases} \quad (12)$$

откуда можно сформулировать гипотезу, что скорее всего все таблички, у которых число строк больше 4 (они =0), дают все линейные зависимости в исходном базисе. Для нечетного количества спинов аналогичный факт нами пока не придуман.

Можно сравнить размеры базисов переполненного и непереполенного:

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
$N_n$	1	1	3	10	15	105	105	1260	945	4.7E6	6.5E8
$Q_n$	1	1	3	6	15	36	91	232	603	83097	1.3E7

$n$	10	20	30	40	50	60	70	80
$N_n$	945	6.5E8	6.2E15	3.2E23	5.8E31	2.9E40	3.4E49	8.0E58
$Q_n$	603	1.3E7	4.4E11	1.7E16	7.2E20	3.3E25	1.5E30	7.4E34

### 3 Заключительное замечание

Количество элементов в полученном базисе меньше, однако чтобы использовать в уравнении Шрёдингера  $H\rho = E\rho$ , нужно еще научиться умножать элементы нашего базиса (из  $\rho$ ) на скалярные произведения (из  $H$ ), и полученный результат вновь раскладывать по базису. Для переполненного базиса это было реализовано ранее (и описано в предыдущих статьях [4]. Для нового непереполенного базиса это сделать пока не удалось (так чтобы при этом не переходить к старому переполненному базису, что сводит на нет преимущества нового непереполенного базиса).

## Список литературы

- [1] D. L. Andrews and T. Thirunamachandran, On three-dimensional rotational averages, *J. Chem. Phys.*, **67** (1977), 5026-5033. [https://oeis.org/A005043/a005043\\_1.pdf](https://oeis.org/A005043/a005043_1.pdf)
- [2] N. Il'in, E. Shpagina, F. Uskov, O. Lychkovskiy, Squaring parametrization of constrained and unconstrained sets of quantum states, *J. Phys. A: Math. Theor.* **51**, **085301** (2018) <https://arxiv.org/abs/1704.03861>
- [3] E. Shpagina, F. Uskov, N. Il'in, O. Lychkovskiy. Merits of using density matrices instead of wave functions in the stationary Schrödinger equation for systems with symmetries // *J. Phys. A: Math. Theor.* **53**, **075301** (2020). <https://arxiv.org/abs/1812.03056>
- [4] F. Uskov, O. Lychkovskiy. A variational lower bound on the ground state of a many-body system and the squaring parametrization of density matrices // *J. Phys.: Conf. Ser.* **1163**, **012057** (2019). <https://arxiv.org/abs/1902.09246>
- [5] <https://github.com/FeelUsM/ScalarMixedSpins/blob/master/tables.nb>
- [6] P. Grabowski and Pierre Mathieu, Quantum Integrals of Motion for the Heisenberg Spin Chain, *Modern Physics Letters A* **9.24** (1994): **2197-2206**. <https://arxiv.org/abs/hep-th/9403149>
- [7] [https://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker\\_delta#Generalizations](https://en.wikipedia.org/wiki/Kronecker_delta#Generalizations)