Участник: FeelUs/КТП

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Содержание

- 1 символы, обозначения и соглашения
 - 1.1 символы
 - 1.2 соглашения
- 2 основная логика:
- 3 1++. Кинематика и сечения
 - 3.1 Нормировки ВФ
 - 3.2 сечение (Пескин, раздел 4.5.)
- 4 1+. Кванты и представления
 - 4.1 1+.1. Шрёдингер:
 - 4.2 1+.2. Гайзенберг:
 - 4.3 1+.3. Дирак (представление взаимодействия):
 - 4.3.1 1+.3.1. из Шрёдингера
 - 4.3.2 1+.3.2. из Гайзенберга
 - 4.3.3 1+.3.3. новое вакуумное состояние
- 5 1. Лагранжев Формализм
 - 5.1 1.0. Действие 1d, 4d, Вариация = 0
 - 5.2 1.1. Уравнения Лагранжа (из 1.0.)
 - 5.3 1.2. Тензор энергии-импульса (из 1.0. и 1.1. или из 1.3)
 - 5.4 1.3. Теорема Нётер (из 1.0 и 1.1)
 - 5.5 1.5. Гамильтониан, уравнения Гамильтона, Плотность Гамильтониана (из ...)
- 6 2. Свободные поля с пропагаторами и теоремами Вика
 - 6.1 2.1. Скалярное действительное
 - 6.1.1 2.1.1. Классическое
 - 6.1.1.1 2.1.1.0. уравнение К-Г Клейна-Гордона(-Фока)
 - 6.1.1.2 2.1.1.1. Функции Грина
 - 6.1.2 2.1.2 Квантовое
 - 6.1.2.1 2.1.2.1. Состояния
 - 6.1.2.2 2.1.2.2. Эволюция:
 - 6.1.2.3 2.1.2.3. Пропагатор амплитуда распространения частицы
 - 6.1.2.4 2.1.2.4. Теорема Вика
 - 6.2 2.2. Скалярное комплексное
 - 6.2.1 2.2.1. Классическое
 - 6.2.1.1 2.1.1.0. уравнение К-Г Клейна-Гордона(-Фока)
 - 6.2.1.2 2.2.1.1. Функции Грина
 - 6.2.2 2.2.2. Квантовое
 - 6.2.2.1 2.2.2.1. Состояния
 - 6.2.2.2 2.2.2.2. Эволюция:
 - 6.2.2.3 2.2.2.3. Пропагатор амплитуда распространения частицы
 - 6.2.2.4 2.2.2.4. Теорема Вика
 - 6.3 2.3. Спинорное
 - 6.3.1 2.3.1. Арифметика
 γ матриц
 - 6.3.2 2.3.2. Преобразования Лоренца
 - 6.3.3 2.3.3. Классическое
 - 6.3.4 2.3.4. Уравнение Дирака
 - 6.3.5 2.3.5. функция Грина
 - 6.3.6 2.3.6. Квантуем
 - 6.3.6.1 2.3.6.1. Состояния
 - 6.3.6.2 2.3.6.2. Пропагатор
 - 6.3.6.3 2.3.6.3. теорема Вика
 - 6.4 2.4. Электромагнитное
 - 6.5 2.5. Векторное массивное
- 7 4. Взаимодействия и правила Фейнмана
 - 7.1 4.1. K- $\Gamma \frac{\lambda}{4!} \phi^4$

- 7.1.1 Корреляционная функция (Пескин 4.4)
- 7.1.2 Матричный элемент (Пескин 4.6)
- 7.2 4.2. теория Юкавы: Дирак + К-Г − g\(\bar{\psi}\psi\psi\psi\psi\)
- 7.3 4.3. КЭД: Дирак + Максвелл $-e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}$
- 7.4 4.4. скалярная электродинамика: К- $\Gamma + \frac{1}{2}e^2A^2|\phi|^2$

символы, обозначения и соглашения

символы

$$\mathcal{L}$$
 \mathcal{H} \mathcal{P} \mathcal{M} \vec{x} \hat{x} \hat{x} \hat{x} \hat{x} \hat{x} \hat{x} \hat{y} ϕ ϕ φ ϵ ϵ θ ϑ \pm \mp \times \otimes \cdot \Rightarrow \rightarrow ∞ ...

$$A_0\langle |
angle ~~ [~] ~~ \{\} ~~ \int \sum \sin \cos \dim \operatorname{Tr} \operatorname{Tr} \left\{ egin{array}{ccc} 1, & 2 \ 3, & 4 \end{array}
ight. \left. egin{array}{ccc} 1, & 2 \ 3, & 4 \end{array}
ight.
ight.$$

соглашения

у Пескина:
$$p_i = -p^i = \vec{p}$$
 я привык: $p^i = -p_i = \vec{p}$

основная логика:

- В кинематике и сечении понимаем, что для вычисления сечения нужно посчитать матричный элемент
- В квантах и представлениях мы понимаем, что для вычисления матричного элемента в возмущенной теории достаточно посчитать Т упорядочение в невозмущенной.
- В каждом поле имеется теорема Вика, которая говорит, что Т упорядочение можно вычислить через нормальное упорядочение и свертки
- И в конце мы из этих сверток конструируем диаграммы

1++. Кинематика и сечения

Нормировки ВФ

Распределение (f(x) = f(x')dx'/dx) на массовой поверхности:

$$rac{dp'^z}{dp^z} = eta + eta \gamma rac{dE}{dp^z} = eta + eta \gamma rac{d\sqrt{p^2 + m^2}}{dp^z} = eta + eta \gamma rac{p^z}{\sqrt{p^2 + m^2}} = rac{eta E + eta \gamma p^z}{E} = rac{E'}{E} \quad \Rightarrow \; ext{если}$$
 $f(p) = |\phi(p)|^2$, то $\sqrt{2E_p}\phi(p) = \sqrt{2E_{p'}}\phi(p')$.

2 - удобен из-за похожего множителя в квантовом решении, а может из-за знаменателя в пропагаторе.

$$\langle ec{p} | ec{k}
angle = 2 E_p (2\pi)^3 \delta^3 (ec{p} - ec{k})$$
 - лоренц-инвариантно

$$\langle \vec{x} | \vec{y}
angle = (2\pi)^3 \delta^3 (\vec{x} - \vec{y})$$
 - кажется уже нет $(?)$

$$|\psi
angle = \int rac{d^3ec p}{(2\pi)^3} rac{\psi_p(ec p)}{\sqrt{2E_p}} |ec p
angle = \int d^3ec x \psi_x(ec x) |ec x
angle$$

HKM:
$$\langle \vec{x} | \vec{\hat{p}} | \vec{p} \rangle = \vec{p} \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = -i \vec{\nabla} \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle \implies \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = e^{+i \vec{p} \vec{x}}$$

KTH: $\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = \sqrt{2E_p} e^{+i \vec{p} \vec{x}}$

$$\psi_p(ec q) = \int d^3ec x e^{-iec q ec x} \psi_x(ec x); \qquad \psi_x(ec y) = \int rac{d^3ec p}{(2\pi)^3} e^{+iec p ec y} \psi_p(ec p)$$

$$|ec{q}
angle = \sqrt{2E_q} \int d^3ec{x} e^{+iec{q}\,ec{x}} |ec{x}
angle; \qquad |ec{y}
angle = \int rac{d^3ec{p}}{(2\pi)^3} rac{e^{-iec{p}\,ec{y}}}{\sqrt{2E_p}} |ec{p}
angle$$

сечение (Пескин, раздел 4.5.)

$$\langle f|S|i \rangle = \langle f|1+iT|i \rangle$$
 - отбрасываем то, что не взаимодействует $\langle \vec{p}_1\vec{p}_2\dots|iT|\vec{p}_A\vec{p}_B \rangle = (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+\dots-p_A-p_B)i\mathcal{M}(p_1,p_2,\dots,p_A,p_B)$ - закон сохранения импульсов выполнится в любом случае

начальное состояние зависит от прицельного параметра b: $|\phi_A\phi_B
angle = \int rac{d^3ec{k}_A}{(2\pi)^3} rac{\phi_A(ec{k}_A)}{\sqrt{2E_{kA}}} rac{d^3ec{k}_B}{(2\pi)^3} rac{\phi_B(ec{k}_B)}{\sqrt{2E_{kB}}} e^{-iec{k}_Bec{b}} |ec{k}_Aec{k}_B
angle$

где
$$|\phi_A(ec{k}_A)|^2=(2\pi)^3\delta^3(ec{k}_A-ec{p}_A); \quad |\phi_B(ec{k}_B)|^2=(2\pi)^3\delta^3(ec{k}_B-ec{p}_B)$$

$$d\sigma = \int d^2 ec{b} P(ec{b}); \quad P(ec{b}) = rac{d^3 ec{p}_1 d^3 ec{p}_2 \dots}{(2\pi)^3 2 E_{p_1} (2\pi)^3 2 E_{p_2} \dots} |\langle ec{p}_1 ec{p}_2 \dots | iT | \phi_A \phi_B
angle|^2$$
 $d\sigma = rac{|\mathcal{M}(p_1, p_2, \dots, p_A, p_B)|^2}{2 E_A 2 E_B |v_A - v_B|} rac{d^3 ec{p}_1 d^3 ec{p}_2 \dots}{(2\pi)^3 2 E_{p_1} (2\pi)^3 2 E_{p_2} \dots} (2\pi)^4 \delta^4 (p_1 + p_2 + \dots - p_A - p_B)$ В системе центра масс для двух конечных частиц:

$$rac{d\sigma}{d\Omega} = rac{\left|\mathcal{M}(p_1,p_2,p_A,p_B)
ight|^2}{2E_A 2E_B |v_A-v_B|} rac{\left|ec{p}_1
ight|}{16\pi^2 E_{CM}}$$

Для полного сечения: если есть п тождественных частиц (каждого сорта), то его надо будет разделить на п! (каждого сорта).

Ширины вычисляются по аналогии, но будут доказаны в Пескине 7.3.

1+. Кванты и представления

1+.1. Шрёдингер:

$$irac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}=H\psi(x,t)$$
 - Ландавшиц выводил из ур-я Гамильтона-Якоби $H\psi_n(x)=E_n\psi_n(x)$ - разделение переменных, все дела... $\psi(x,t)=\sum_n a_n\psi_n(x)e^{-iE_nt}$ $\psi(x,t)=e^{-i\hat{H}t}\psi(x,0)$ $\langle\psi|\psi\rangle=1$ вероятность, что ψ есть ϕ равна $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$ вероятность, что ψ перейдет в ϕ за t равна $|\langle\phi|e^{-i\hat{H}t}|\psi\rangle|^2$

подробнее про измерения - Нильсен-Чанг, Квантовые вычисления, раздел 2.2.

1+.2. Гайзенберг:

$$egin{aligned} \langle O(t)
angle &= \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t)
angle &= \langle \psi(0) | e^{i\hat{H}t} \hat{O} e^{-i\hat{H}t} | \psi(0)
angle &= \langle \psi(0) | \hat{O}(t) | \psi(0)
angle \ i rac{\partial \hat{O}(t)}{\partial t} &= [\hat{O}(t), \hat{H}] \ ext{- подставляем, проверяем.} \end{aligned}$$

В частности выр-я для $\hat{\boldsymbol{q}}$ и $\hat{\boldsymbol{p}}$ соответствуют ур-ям Гамильтона.

по прежнему

вероятность, что
$$\psi$$
 есть ϕ равна $|\langle \phi | \psi \rangle|^2$ вероятность, что ψ перейдет в ϕ за t равна $|\langle \phi | e^{-i\hat{H}t} | \psi \rangle|^2$

1+.3. Дирак (представление взаимодействия):

$$H=H_0+V$$
. Для H_0 решать умеем, т.е. знаем e^{-iH_0t} . V - возмущение.

1+.3.1. из Шрёдингера

$$irac{\partial \psi_S}{\partial t} = H\psi_S$$
 будем искать ввиде $\psi_S = e_{-iH_0t}\psi_I$ тогда (*) $irac{\partial \psi_I}{\partial t} = e^{iH_0t}Ve^{-iH_0t}\psi_I = V(t)\psi_I$ $\psi_I(t) = U(t,t_0)\psi_I(t_0)$ $U(t,t_0) = T\{exp(-i\int_{t_0}^t dt_1V(t_1))\}$ - в ряд Тейлора и упорядочение по времени - в каждом учебнике имеется картиночка $U^+U = I; \quad U^{-1}(t,t_0) = U^+(t,t_0) = U(t_0,t); \quad U(t_2,t_1)U(t_1,t_0) = U(t_2,t_0)$

S-матрица:
$$S = \lim_{t_0 \to -\inf t \to +\inf} U(t,t_0); \quad \langle fin|S|ini
angle$$
 - матричный элемент

1+.3.2. из Гайзенберга

далее по Пескину - раздел 4.2.

хотим:
$$\hat{\phi}(t) = e^{+i(H_0+V)t} \hat{\phi}(0) e^{-i(H_0+V)t}$$
 знаем: $\hat{\phi}_I(t) = e^{+iH_0t} \hat{\phi}(0) e^{-iH_0t}$ $\hat{\phi}(t) = U^+(t,0) \hat{\phi}_I(t) U(t,0) = U(0,t) \hat{\phi}_I(t) U(t,0)$ $U(t,t_0) = e^{iH_0(t-t_0)} e^{-iH(t-t_0)}$ $i\frac{\partial U}{\partial t} = e^{iH_0t} V e^{-iH_0t} U = V(t) U$, а это тоже самое, что и (*)

1+.3.3. новое вакуумное состояние

Было:
$$H_0|0\rangle=0|0\rangle$$
. Стало: $H|\Omega\rangle=E_0|\Omega\rangle$. разложим: $e^{-iHT}|0\rangle=e^{-iE_0T}|\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle+\sum_{n\neq 0}e^{-iE_nT}|n\rangle\langle n|0\rangle$ ненормированное $\Rightarrow |\Omega\rangle_{nn}=\lim_{T\to\infty(1+i\epsilon)}e^{-iHT}|0\rangle=U(0,-T)|0\rangle$ для произвольных $\hat{\phi}_1(t_1),\hat{\phi}_2(t_2),\hat{\phi}_3(t_3)$ $\langle\Omega|\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3|\Omega\rangle=\frac{\langle\Omega|\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3|\Omega\rangle_{nn}}{\langle\Omega|\Omega\rangle_{nn}}=\lim_{T\to\infty(1+i\epsilon)}\frac{\langle 0|T\{\hat{\phi}_{I1}\hat{\phi}_{I2}\hat{\phi}_{I3}exp(-i\int_{t_0}^Tdt_1V(t_1))\}|0\rangle}{\langle 0|T\{exp(-i\int_{t_0}^Tdt_1V(t_1))\}|0\rangle}$

1. Лагранжев Формализм

1.0. Действие **1d**, **4d**, Вариация = **0**

$$S = \int L dt; \quad \delta S = 0$$
 $S = \int \mathcal{L} d^4 x; \quad \delta S = 0$

1.1. Уравнения Лагранжа (из 1.0.)

$$rac{\partial L}{\partial q}=rac{d}{dt}rac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$
 - для каждого q $rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}=\partial_{\mu}rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{u}\phi}$ - для каждого фи

1.2. Тензор энергии-импульса (из 1.0. и 1.1. или из 1.3)

$$egin{align} E &= \sum_q p v - L(q,\dot{q}); \quad p = rac{\partial L}{\partial \dot{q}}; \quad v = \dot{q} \ T^{\mu
u} &= \sum_\phi rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial^
u \phi - g^{\mu
u} \mathcal{L} \ \end{array}$$

1.3. Теорема Нётер (из 1.0 и 1.1)

Если при
$$\delta\phi: \quad L \to L + \frac{df}{dt};$$
 или $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \partial_\mu J^\mu,$ то $\delta S = 0$ (если ϕ удовлетворяет ур-ям Лагранжа)
$$\Rightarrow j^\mu = \sum_\phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta\phi - J^\mu = const(x)$$

1.5. Гамильтониан, уравнения Гамильтона, Плотность Гамильтониана (из ...)

$$H(q,p) = \sum_{q} pv(q,p) - L(q,p)$$
 - преобразование Лежандра

$$egin{aligned} \dot{p} &= -rac{\partial H}{q}; \quad \dot{q} &= rac{\partial H}{p} \ \mathcal{H} &= T^{00} &= \sum_{\phi} rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi} \partial^0 \phi - \mathcal{L} &= \sum_{\phi} \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}; \quad H &= \int d^3 ec{x} \mathcal{H} \ ec{\mathcal{P}} &= T^{0i} &= \sum_{\phi} \pi ec{
abla} \phi; \quad ec{P} &= \int d^3 ec{x} ec{\mathcal{P}}; \quad \pi &= rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi} \end{aligned}$$

2. Свободные поля с пропагаторами и теоремами Вика

2.1. Скалярное действительное

2.1.1. Классическое

$$egin{aligned} \mathcal{L} &= rac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - rac{m^2}{2} \phi^2 \ rac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \phi} &= \partial^{\mu} \phi \ \mathcal{H} &= rac{1}{2} ((rac{\partial \phi}{dt})^2 + (
abla \phi)^2 + m^2 \phi^2) \ ec{\mathcal{P}} &= \partial_0 \phi ec{
abla} \phi \end{aligned}$$

Глобальные калибровочные преобразования: $\phi o e^{i\delta\alpha} \phi \Rightarrow \delta\phi = i\delta\alpha\phi \Rightarrow J^\mu = 0 \Rightarrow$

$$j^\mu=i\partial^\mu\phi\phi=irac{1}{2}\partial^\mu(\phi^2)$$
 - ток чисто мнимый

2.1.1.0. уравнение К-Г - Клейна-Гордона(-Фока)

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0$$

ищем решение в виде: $\phi(ec{x},t)=\int rac{d^3ec{p}}{(2\pi)^3}e^{+iec{p}\cdotec{x}}\phi(ec{p},t)$

$$(*)$$
 получаем $(rac{\partial^2}{\partial t^2}+E_p^2)\phi(ec p,t)=0$ $\phi(ec p,t)=a(ec p)e^{-iE_pt}+a^*(ec p)e^{+iE_pt}$, $\phi(x)=\intrac{d^3ec p}{(2\pi)^3}(a(ec p)e^{-ipx}+a^*(-ec p)e^{+ipx})$

нормировка абсолютно не имеет значения, но чтобы всё было лоренц-инвариантно (?: почему мы делим а не умножаем на $\sqrt{2E_p}$? - может чтобы $\langle 0|\phi(\vec{x})|\vec{p}\rangle=e^{i\vec{p}\vec{x}}$):

$$\phi(x) = \int rac{d^3 ec{p}}{(2\pi)^3} rac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(ec{p}) e^{-ipx} + a^* (-ec{p}) e^{+ipx})$$

2.1.1.1. Функции Грина

$$egin{aligned} (\partial^2+m^2)\phi_0(x) &= 0 \ (\partial^2+m^2)G(x) &= -i\delta^4(x) \ (\partial^2+m^2)\phi(x) &= j(x) \ \phi(x) &= \phi_0(x) + i\int d^4y G(x-y)j(y) \ G(p) &= rac{i}{p^2-m^2} \ G(x) &= \int rac{d^4p}{(2\pi)^4}rac{i}{p^2-m^2}e^{-ipx} &= rac{i}{2\pi}\int rac{d^3ec p}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty}rac{dp_0}{p_0^2-E_p^2}e^{-ipx} \end{aligned}$$

при комплексном p_0 экспонента становится действительной, и мы замыкаем контур с той стороны, где она убывает (а не возрастает), т.е. при $x_0 < 0$ - сверху, а при $x_0 > 0$ - снизу

запаздывающая (retarded) (знаем источник, хотим найти поле) - оба полюса обходим сверху

$$G_R(x) = \left\{ egin{array}{ll} 0, & x_0 < 0 \ rac{i}{2\pi} \int rac{d^3ec{p}}{\left(2\pi
ight)^3} (-2\pi i) (rac{e^{-ipx}}{2E_p} - rac{e^{+ipx}}{2E_p}), & x_0 > 0 \end{array}
ight.$$

опережающая (advanced) (знаем поле, хотим найти источник (?)) - оба полюса обходим снизу

$$G_A(x) = \left\{ egin{array}{l} rac{i}{2\pi} \int rac{d^3ec{p}}{(2\pi)^3} (2\pi i) (rac{e^{-ipx}}{2E_p} - rac{e^{+ipx}}{2E_p}), & x_0 < 0 \ 0, & x_0 > 0 \end{array}
ight.$$

фейнмановская (для частиц - запаздывающая, для античастиц - опережающая (fixme)) - отрицательный полюс обходим снизу, а положительный - сверху

$$D_F(x) = G_F(x) = \int rac{d^4p}{(2\pi)^4} rac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ipx} = egin{cases} rac{i}{2\pi} \int rac{d^3ec{p}}{(2\pi)^3} (2\pi i) rac{e^{-ipx}}{2E_p}, & x_0 < 0 \ rac{i}{2\pi} \int rac{d^3ec{p}}{(2\pi)^3} (2\pi i) rac{e^{+ipx}}{2E_p}, & x_0 > 0 \end{cases} \ D_F(p) = rac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}; & D_F(x) = D_F(-x) \end{cases}$$

2.1.2 Квантовое

в квантовом случае: ϕ - оператор "координаты поля"

в одноточечном случае для (*)

$$egin{aligned} \hat{\mathcal{H}}(ec{p}) &= rac{1}{2}(\hat{\pi}^2(ec{p}) + E_p^2\hat{\phi}^2(ec{p})) = E_p(a_{ec{p}}^+ a_{ec{p}}^+ + rac{1}{2}) \ [\hat{\phi}(ec{p}), \hat{\pi}(ec{p})] &= i; \quad [\hat{a}(ec{p}), \hat{a}^+(ec{p})] = 1 \ \hat{\phi}(ec{p}) &= rac{\hat{a}(ec{p}) + \hat{a}^+(ec{p})}{\sqrt{2E_p}}; \quad \hat{\pi}(ec{p}) = -i\sqrt{rac{E_p}{2}}(\hat{a}(ec{p}) - \hat{a}^+(ec{p})) \end{aligned}$$

(далее операторы без шляпок)

но мы хотим $[\phi(\vec{x}),\pi(\vec{x}')]=i\delta(\vec{x}-\vec{x}'); \quad [a(\vec{p}),a^+(\vec{p}')]=(2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{p}')$ + нормировка фи

остальные коммугаторы =0

и тогда
$$\phi(ec{p})=rac{a(ec{p})+a^+(-ec{p})}{\sqrt{2E_p}}; \quad \pi(ec{p})=-i\sqrt{rac{E_p}{2}}(a(ec{p})-a^+(-ec{p}))$$

механизм возникновения двойки в $\sqrt{2E_p}$: записываем коммутационные соотношения для а \to записываем фи \to находим пи \to проверяем коммутационные соотношения для [фи,пи]

$$egin{align} \phi(ec{x}) &= \int rac{d^3ec{p}}{(2\pi)^3} rac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{ec{p}} e^{+iec{p}ec{x}} + a_{ec{p}}^+ e^{-iec{p}ec{x}}) \ \pi(ec{x}) &= \int rac{d^3ec{p}}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{rac{E_p}{2}} (a_{ec{p}} e^{+iec{p}ec{x}} - a_{ec{p}}^+ e^{-iec{p}ec{x}}) \ rac{d^+ - d}{2} &= 0 \end{array}$$

Н можно находить двумя способами: подставить фи в гамильтониан поля или подставить фи и пи в гамильтониан гарм. осциллятора

$$H = \int d^3 ec{x} \mathcal{H} = \int rac{d^3 ec{p}}{(2\pi)^3} E_p rac{a_{ec{p}}^+ a_{ec{p}}^+ + a_{ec{p}}^+ a_{ec{p}}^+}{2} = \int rac{d^3 ec{p}}{(2\pi)^3} E_p (a_{ec{p}}^+ a_{ec{p}}^+ + rac{1}{2} [a_{ec{p}}^+ a_{ec{p}}^+]) = \int rac{d^3 ec{p}}{(2\pi)^3} E_p a_{ec{p}}^+ + const$$
 $[H, a_{ec{p}}^+] = E_p a_{ec{p}}^+; \quad [H, a_{ec{p}}^-] = -E_p a_{ec{p}}^ ec{P} = \int d^3 ec{x} ec{P} = \int rac{d^3 ec{p}}{(2\pi)^3} ec{p} a_{ec{p}}^+ a_{ec{p}}^+$
 $Q = ?$

2.1.2.1. Состояния

2 - удобен из-за похожего множителя в квантовом решении, а может из-за знаменателя в пропагаторе.

$$|\vec{p}
angle = \sqrt{2E_p}a_{\vec{p}}^+|0
angle; \quad \langle \vec{p}|\vec{q}
angle = 2E_p(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})$$
 $\phi(\vec{x})|0
angle = \int rac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}rac{1}{2E_p}e^{-i\vec{p}\vec{x}}|\vec{p}
angle; \quad \langle 0|\phi(\vec{x})|\vec{p}
angle = e^{i\vec{p}\vec{x}}$ $|\vec{x}
angle = \int rac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}rac{1}{\sqrt{2E_p}}e^{-i\vec{p}\vec{x}}|\vec{p}
angle;$ - (по словам Наумова) его нельзя выразить через $\phi \Rightarrow$ (а может \Leftarrow) решением ур-я КГ не

2.1.2.2. Эволюция:

$$\begin{split} i\frac{\partial\phi}{\partial t} &= [\phi,H] = i\pi; \quad i\frac{\partial\pi}{\partial t} = [\pi,H] = -i(-\nabla^2 + m^2)\phi; \\ Ha_{\vec{p}} &= a_{\vec{p}}(H-E_p) \ \Rightarrow \ H^na_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}(H-E_p)^n \\ &\Rightarrow \ e^{iHt}a_{\vec{p}}e^{-iHt} = a_{\vec{p}}e^{-iE_pt}; \quad e^{iHt}a_{\vec{p}}^+e^{-iHt} = a_{\vec{p}}^+e^{+iE_pt} \\ \phi(x) &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\vec{p}}e^{-ipx} + a_{\vec{p}}^+e^{+ipx})|_{p^0=E_p}; \quad \pi(x) = \frac{\partial\phi}{\partial t} \\ e^{-i\vec{P}\vec{x}}a_{\vec{p}}e^{+i\vec{P}\vec{x}} = a_{\vec{p}}e^{+i\vec{p}\vec{x}}; \quad e^{-i\vec{P}\vec{x}}a_{\vec{p}}^+e^{+i\vec{P}\vec{x}} = a_{\vec{p}}^+e^{-i\vec{p}\vec{x}} \\ P &= (H,\vec{P}) \ \Rightarrow \ \phi(x) = e^{iPx}\phi(0)e^{-iPx} \end{split}$$

2.1.2.3. Пропагатор - амплитуда распространения частицы

$$D(y-x):=\langle 0|\phi(y)\phi(x)|0
angle =\intrac{d^3ec p}{(2\pi)^3}rac{1}{2E_p}e^{-ip(y-x)}$$
 Если $A(x)=\sum_n a_n\phi^{2n}(x)$ и $B(y)=\sum_n a_n\phi^{2n}(y)$ - операторы измерений в соотв. точках, и х и у - разнесены пространственно-подобно, то $B(y)A(x)|\psi
angle =A(x)B(y)|\psi
angle \Leftrightarrow [A(x),B(y)]=0 \Leftrightarrow [\phi(x),\phi(y)]=0 \ or \ \{\phi(x),\phi(y)\}=0$

$$[\phi(y),\phi(x)] = \langle 0 | [\phi(y),\phi(x)] | 0
angle = \int rac{d^3ec p}{(2\pi)^3} rac{e^{-ip(y-x)} - e^{+ip(y-x)}}{2E_p} = egin{cases} \int rac{d^3ec p}{(2\pi)^3} rac{e^{-iec pec r} - e^{+iec pec r}}{2E_p} = 0, & x^0 = y^0 \ \int rac{d^3ec p}{(2\pi)^3} rac{e^{-iec pec r} - e^{+iE_pt}}{2E_p}, & ec x = ec y \end{cases}$$

 $D(y-x) \neq 0$ при пространственно-подобном интервале, т.е. квантовая телепортация остается возможной. если $y^0>x^0$ то $[\phi(y),\phi(x)]=G_R(y-x)=D(y-x)-D(x-y)$ $\langle 0|T\{\phi(y)\phi(x)\}|0
angle=D_F(y-x)=egin{cases} \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0
angle=D(y-x),&y^0>x^0\ \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0
angle=D(x-y),&x^0>y^0 \end{cases}$

2.1.2.4. Теорема Вика

Т упорядочение: слева новые, справа старые

N упорядочение: слева
$$a^+$$
, справа a , при перестановке знак не меняется.
$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x); \quad \phi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}}^{} e^{-ipx}; \quad \phi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}}^{} e^{+ipx}$$
 свертка $\phi(x)\phi(y) := \left\{ \begin{bmatrix} \phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y) \end{bmatrix} = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle, \quad x^0 > y^0 \\ . \ [\phi^{(+)}(y), \phi^{(-)}(x)] = \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle, \quad y^0 > x^0 \end{bmatrix} \right\}$ свертка $\phi(x)\phi(y) = D_F(x-y) = D_F(y-x)$ теорема: $T\{\phi_1 \dots \phi_n\} = N\{\sum_{all\ convs} \phi_1 \dots \phi_n\}$

2.2. Скалярное комплексное

2.2.1. Классическое

$$egin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi^* - m^2\phi\phi^* \ rac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\phi} &= \partial^{\mu}\phi^*; & rac{\partial \mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\phi^*} &= \partial^{\mu}\phi; \ \mathcal{H} &= |rac{\partial\phi}{dt}|^2 + |
abla\phi|^2 + m^2|\phi|^2 \ ec{\mathcal{P}} &= \partial_{0}\phi^*ec{
abla}\phi + \partial_{0}\phiec{
abla}\phi^* \end{aligned}$$

Глобальные калибровочные преобразования: $\phi o e^{i\delta lpha} \phi \ \Rightarrow \ \delta \phi = i\delta lpha \phi \ \Rightarrow \ J^\mu = 0 \ \Rightarrow$

$$j^{\mu}=i(\partial^{\mu}\phi^{*}\phi-\partial^{\mu}\phi\phi^{*})$$

2.1.1.0. уравнение К-Г - Клейна-Гордона(-Фока)

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0$$

ищем решение в виде: $\phi(ec{x},t)=\int rac{d^3ec{p}}{(2\pi)^3}e^{+iec{p}ec{x}}\phi(ec{p},t)$

$$(*)$$
 получаем $(rac{\partial^2}{\partial t^2}+E_p^2)\phi(ec p,t)=0$ $\phi(ec p,t)=a(ec p)e^{-iE_pt}+b^*(ec p)e^{+iE_pt},$ $\phi(x)=\intrac{d^3ec p}{(2\pi)^3}(a(ec p)e^{-ipx}+b^*(-ec p)e^{+ipx})$

2.2.1.1. Функции Грина

по моему здесь всё так же как и для скалярного действительного

2.2.2. Квантовое

в квантовом случае: ϕ - оператор "координаты поля"

 $egin{aligned} \hat{\mathcal{H}}(ec{p}) &= rac{1}{2}(\hat{\pi}^2(ec{p}) + E_p^2\hat{\phi}^2(ec{p})) = E_p(b_{ec{p}}^+ a_{ec{p}} + rac{1}{2}) \ [\hat{\phi}(ec{p}), \hat{\pi}(ec{p})] &= i; \quad [\hat{a}(ec{p}), \hat{b}^+(ec{p})] = 1 \ \hat{\phi}(ec{p}) &= rac{\hat{a}(ec{p}) + \hat{b}^+(ec{p})}{\sqrt{2E_p}}; \quad \hat{\pi}(ec{p}) = -i\sqrt{rac{E_p}{2}}(\hat{a}(ec{p}) - \hat{b}^+(ec{p})) \end{aligned}$

(далее операторы без шляпок)

но мы хотим $[\phi(\vec{x}),\pi(\vec{x}')]=i\delta(\vec{x}-\vec{x}'); \quad [a(\vec{p}),a^+(\vec{p}')]=(2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{p}') \quad [b(\vec{p}),b^+(\vec{p}')]=(2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{p}')$

в одноточечном случае для (*)

остальные коммутаторы =0

и тогда
$$\phi(ec{p})=rac{a(ec{p})+b^+(-ec{p})}{\sqrt{2E_p}}; \quad \pi(ec{p})=-i\sqrt{rac{E_p}{2}}(b(ec{p})-a^+(-ec{p}))$$

$$\phi(\vec{x}) = \int rac{d^3 ec{p}}{(2\pi)^3} rac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{ec{p}} e^{+i ec{p} \cdot ec{x}} + b_{ec{p}}^+ e^{-i ec{p} \cdot ec{x}})$$

$$\pi(ec{x}) = \int rac{d^3ec{p}}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{rac{E_p}{2}} (b_{ec{p}} e^{+iec{p}ec{x}} - a_{ec{p}}^+ e^{-iec{p}ec{x}})$$

$$\begin{split} H &= \int d^3\vec{x} \mathcal{H} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_p(b_{\vec{p}}^+ b_{\vec{p}}^- + a_{\vec{p}}^- a_{\vec{p}}^+) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_p(b_{\vec{p}}^+ b_{\vec{p}}^- + a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^+ + [a_{\vec{p}}^- a_{\vec{p}}^+]) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_p(a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^+ + b_{\vec{p}}^+ b_{\vec{p}}^-) + const \\ [H, a_{\vec{p}}^+] &= E_p a_{\vec{p}}^+; \quad [H, b_{\vec{p}}^+] = E_p b_{\vec{p}}^+; \quad [H, b_{\vec{p}}^-] = -E_p b_{\vec{p}}^- \\ \vec{P} &= \int d^3\vec{x} \vec{P} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} (a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^- + b_{\vec{p}}^+ b_{\vec{p}}^-) \\ Q &= \int d^3\vec{x} j^0 = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^- - b_{\vec{p}}^+ b_{\vec{p}}^-) \end{split}$$

2.2.2.1. Состояния

вроде всё то же самое, только 2 типа частиц

$$ertec{p} ert = \sqrt{2E_p} a_{ec{p}}^+ ert 0 ert; \quad \langle ec{p} ert ec{q}
angle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3 (ec{p} - ec{q})$$

[показать]

$$\phi(\vec{x})|0
angle = \int rac{d^3ec{p}}{(2\pi)^3} rac{1}{2E_p} e^{-iec{p}ec{x}}|ec{p}
angle; \quad \langle 0|\phi(ec{x})|ec{p}
angle = e^{iec{p}ec{x}}$$
 $|ec{x}
angle = \int rac{d^3ec{p}}{(2\pi)^3} rac{1}{\sqrt{2E_p}} e^{-iec{p}ec{x}}|ec{p}
angle;$ - (по словам Наумова) его нельзя выразить через $\phi \Rightarrow$ (а может \Leftarrow) решением ур-я КГ не является

2.2.2.2. Эволюция:

 $irac{\partial\phi}{\partial t}=[\phi,H]=i\pi^+; \quad irac{\partial\pi^+}{\partial t}=[\pi^+,H]=-i(abla^2+m^2)\phi;$ $\begin{array}{l} Ha_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}(H - E_p) \ \Rightarrow \ H^n a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}(H - E_p)^n \\ \Rightarrow \ e^{iHt} a_{\vec{p}} e^{-iHt} = a_{\vec{p}} e^{-iE_p t}; \ e^{iHt} a_{\vec{p}}^+ e^{-iHt} = a_{\vec{p}}^+ e^{+iE_p t} \end{array}$ $\phi(x) = \int rac{d^3ec p}{(2\pi)^3} rac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{ec p} e^{-ipx} + b_{ec p}^+ e^{+ipx})|_{p^0 = E_p}; \quad \pi(x) = rac{\partial \phi^+}{\partial t}$ $e^{-i\vec{P}\vec{x}}a_{\vec{p}}e^{+i\vec{P}\vec{x}} = a_{\vec{p}}e^{+i\vec{p}\vec{x}}; \quad e^{-i\vec{P}\vec{x}}a_{\vec{p}}^{+}e^{+i\vec{P}\vec{x}} = a_{\vec{p}}^{+}e^{-i\vec{p}\vec{x}}$

2.2.2.3. Пропагатор - амплитуда распространения частицы

 $P = (H, \vec{P}) \Rightarrow \phi(x) = e^{iPx}\phi(0)e^{-iPx}$

$$D(y-x) := \langle 0|\phi^+(y)\phi(x)|0\rangle = \langle 0|\phi(y)\phi^+(x)|0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-ip(y-x)}$$
 Если $A(x) = \sum_n (a_n\phi^{2n}(x) + b_n\phi^{+2n}(x))$ и $B(y) = \sum_n (a_n\phi^{2n}(y) + b_n\phi^{+2n}(y))$ - операторы измерений в соотв. точках, и х и у - разнесены пространственно-подобно, то $B(y)A(x)|\psi\rangle = A(x)B(y)|\psi\rangle \Leftrightarrow [A(x),B(y)] = 0 \Leftrightarrow [\phi^{[+]}(x),\phi^{[+]}(y)] = 0$ or $\{\phi^{[+]}(x),\phi^{[+]}(y)\} = 0$ $[\phi(y),\phi(x)] = [\phi^+(y),\phi^+(x)] = 0$
$$[\phi^+(y),\phi(x)] = \langle 0|[\phi^+(y),\phi(x)]|0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ip(y-x)} - e^{+ip(y-x)}}{2E_p} = \begin{cases} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{p}\vec{r}} - e^{+i\vec{p}\vec{r}}}{2E_p} = 0, \quad x^0 = y^0 \\ \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{-iE_pt} - e^{+iE_pt}}{2E_p}, \quad \vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$
 $D(y-x) \neq 0$ при пространственно-подобном интервале, т.е. квантовая телепортация остается возможной.

если $y^0>x^0$ то $[\phi^+(y),\phi(x)]=G_R(y-x)=D(y-x)-D(x-y)$ $\langle 0|T\{\phi^+(y)\phi(x)\}|0\rangle=D_F(y-x)=\left\{egin{array}{ll} \langle 0|\phi^+(y)\phi(x)|0\rangle=D(y-x), & y^0>x^0 \ \langle 0|\phi^+(x)\phi(y)|0\rangle=D(x-y), & x^0>y^0 \end{array}
ight.$

2.2.2.4. Теорема Вика

Т упорядочение: слева новые, справа старые

N упорядочение: слева
$$a^+, b^+$$
, справа a, b , при перестановке знак не меняется.
$$\phi(x) = \phi^a(x) + \phi^{b+}(x); \quad \phi^a(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}}^+ e^{-ipx}; \quad \phi^{a+}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} a_{\vec{p}}^+ e^{+ipx}$$

$$\phi^+(x) = \phi^{a+}(x) + \phi^b(x); \quad \phi^b(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} b_{\vec{p}}^+ e^{-ipx}; \quad \phi^{b+}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} b_{\vec{p}}^+ e^{+ipx}$$
 свертка $\phi(x)\phi^+(y) := \begin{cases} [\phi^a(x), \phi^{a+}(y)] = \langle 0|\phi(x)\phi^+(y)|0\rangle, & x^0 > y^0 \\ . [\phi^b(y), \phi^{b+}(x)] = \langle 0|\phi(y)\phi^+(x)|0\rangle, & y^0 > x^0 \end{cases}$ свертка $\phi^+(x)\phi(y) := \begin{cases} [\phi^b(x), \phi^{b+}(y)] = \langle 0|\phi^+(x)\phi(y)|0\rangle, & x^0 > y^0 \\ . [\phi^a(y), \phi^{a+}(x)] = \langle 0|\phi^+(y)\phi(x)|0\rangle, & y^0 > x^0 \end{cases}$ свёрток $\phi\phi$ или $\phi^+\phi^+$ не бывает свертка $\phi^+(x)\phi(y) = \phi(x)\phi^+(y) = D_F(x-y) = D_F(y-x)$ теорема: $T\{\phi_1 \dots \phi_n\} = N\{\sum_{all\ conve} \phi_1 \dots \phi_n\}$

2.3. Спинорное

2.3.1. Арифметика γ матриц

$$1 = egin{pmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad i = egin{pmatrix} 0 & -1 \ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \cos arphi + i \sin arphi = egin{pmatrix} \cos arphi & -\sin arphi \ \sin arphi & \cos arphi \end{pmatrix}$$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Tr} \sigma_i = 0$$

$$\sigma^1 = ? \qquad \sigma^2 = ? \qquad \sigma^3 = ?$$

$$\sigma_i \sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k - \delta_{ij}; \qquad [\sigma_i\sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k; \qquad \{\sigma_i\sigma_j\} = (?-)2\delta_{ij}; \qquad \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1$$

$$(\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{b}) + i(\vec{\sigma}[\vec{a} \times \vec{b}])$$

$$e^{i\vec{a}\vec{\sigma}} = \cos|\vec{a}| + i\frac{\vec{a}\vec{\sigma}}{|\vec{a}|}\sin|\vec{a}| \Rightarrow \operatorname{Tr} e^{i\vec{a}\vec{\sigma}} = 2\cos|\vec{a}|$$

$$e^{\vec{a}\vec{\sigma}} = \operatorname{ch} |\vec{a}| + i\frac{\vec{a}\vec{\sigma}}{|\vec{a}|}\sin|\vec{a}| \Rightarrow \operatorname{Tr} e^{\vec{a}\vec{\sigma}} = 2\operatorname{ch} |\vec{a}|$$

Представление Дирака:

$$\begin{split} \gamma^0 &= \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \vec{\gamma} &= \beta \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} & \gamma^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \beta^2 &= 1; & \vec{\alpha}\beta = -\beta \vec{\alpha}; & \alpha^k \alpha^n &= \delta^{kn} \end{split}$$

Другие представления:

$$ilde{\psi} = V \psi; \quad ilde{\gamma}^{\mu} = V \gamma^{\mu} V^{+}; \quad V V^{+} = V^{+} V = 1; \qquad \sigma_{\pm}^{\mu} = (1, \pm \vec{\sigma})$$
 Вейля(у Пескина): $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} / \sqrt{2} \quad \Rightarrow \ \gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{+}^{\mu} \\ \sigma_{-}^{\mu} & 0 \end{pmatrix}$ Спинорное: $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} / \sqrt{2} \quad \Rightarrow \ \gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{-}^{\mu} \\ \sigma_{+}^{\mu} & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{split} \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} &= 2g^{\mu\nu}; \qquad \mathrm{Tr}\,\gamma^{\mu} = 0 \\ \gamma^{5} &= \gamma_{5} = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\sigma}\gamma^{\rho} = i\varepsilon_{0123}\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3}; \quad \varepsilon_{0123} = +1 \\ \\ \gamma^{5}\gamma^{\mu} &= -\gamma^{\mu}\gamma^{5}; \qquad \gamma^{5}{}^{2} &= 1; \qquad \mathrm{Tr}\,\gamma_{\mu_{1}}\ldots\gamma_{\mu_{2n+1}} = 0 \\ \\ \mathrm{Tr}\,\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} &= 4g^{\mu\nu}; \qquad \mathrm{Tr}\,\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{5} &= 0 \\ \\ \mathrm{Tr}\,\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} &= \mathrm{Tr}\,\gamma_{\nu}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\gamma_{\mu} = \mathrm{Tr}(2g_{\nu\alpha} - \gamma_{\alpha}\gamma_{\nu})\gamma_{\beta}\gamma_{\mu} = \ldots = 8g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - 8g_{\beta\nu}g_{\alpha\mu} + 8g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - \mathrm{Tr}\,\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} \\ \Rightarrow \mathrm{Tr}\,\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu} &= 4(+g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + g_{\beta\mu}g_{\nu\alpha} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}); \qquad \mathrm{Tr}\,\gamma_{\mu_{1}}\ldots\gamma_{\mu_{2n}} - \mathrm{aha}$$
логично
$$\mathrm{Tr}\,\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\gamma_{5} &= -i4\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \end{split}$$

- скаляр: 1
- вектор: γ_{μ}
- тензор (6 шт.): $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]$
- псевдовектор: $\gamma_{\mu}\gamma_{5}$
- псевдоскаляр: γ₅

$$\begin{split} &\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}=g^{\mu\nu}-i\sigma^{\mu\nu}; \qquad \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{5}=g^{\mu\nu}\gamma^{5}-\frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta}\\ &\gamma^{\mu}\gamma_{\mu}=4; \qquad \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}R\gamma_{\mu}+\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}R\gamma_{\mu}=2R\gamma^{\mu}; \qquad \gamma^{\mu}A\!\!\!/R\gamma_{\mu}+A\!\!\!/\gamma^{\mu}R\gamma_{\mu}=2RA\!\!\!/;\\ &\gamma^{\mu}A\!\!\!/\gamma_{\mu}=-2A\!\!\!/; \qquad \gamma^{\mu}A\!\!\!/B\!\!\!/\gamma_{\mu}=+4A^{\mu}B_{\mu}; \qquad \gamma^{\mu}A\!\!\!/B\!\!\!/C\!\!\!/\gamma_{\mu}=-2C\!\!\!/B\!\!\!/A\!\!\!/;\\ &(\gamma^{\alpha})^{+}=\gamma^{0}\gamma^{\alpha}\gamma^{0}; \qquad (\gamma^{0}\gamma^{\alpha})^{+}=\gamma^{0}\gamma^{\alpha}; \qquad (\gamma^{\alpha}\gamma^{0})^{+}=\gamma^{\alpha}\gamma^{0}\\ &\gamma^{0}\gamma^{2}\gamma^{\mu}\gamma^{0}\gamma^{2}=-(\gamma^{\mu})^{T}; \qquad \mathrm{Tr}(\gamma^{\alpha}\gamma^{\beta}\gamma^{\mu}\ldots)=\mathrm{Tr}(\ldots\gamma^{\mu}\gamma^{\beta}\gamma^{\alpha}) \end{split}$$

2.3.2. Преобразования Лоренца

$$\psi
ightarrow L\psi; \hspace{0.5cm} ar{\psi}=\psi^+\gamma^0
ightarrow\psi^+L^+\gamma^0=\psi^+\gamma^0L^{-1}=ar{\psi}L^{-1}; \hspace{0.5cm} L^{-1}\gamma^\mu L=\Lambda^\mu_
u\gamma^
u; \ L=exp(-rac{i}{2}\omega_{\mu
u}S^{\mu
u}); \hspace{0.5cm} S^{\mu
u}=rac{i}{4}[\gamma^\mu,\gamma^
u]$$

где $\omega_{\mu\nu}$ - антисимметричный тензор, задающий бесконечно малые(?) углы.

Например при $\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta$ будет поворот, а при $\omega_{01} = -\omega_{10} = \eta$ будет буст.

Пескин в разделе 3.1. и 3.2 подробнее рассказывает как с этим связаны алгебры Ли.

2.3.3. Классическое

$$\begin{split} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \psi} &= \bar{\psi} i \gamma^{\mu}; \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \bar{\psi}} = 0; \qquad \pi = \bar{\psi} i \gamma^{0} = i \psi^{+} \\ \mathcal{H} &= \bar{\psi}(i\vec{\gamma}\vec{\nabla} + m)\psi, \text{ но у Пескина в 3.5 } \mathcal{H} = \bar{\psi}(-i\vec{\gamma}\vec{\nabla} + m)\psi \\ \vec{\mathcal{P}} &= i \psi^{+} \vec{\nabla} \psi, \text{ но у Пескина в 3.5 } \vec{\mathcal{P}} = -i \psi^{+} \vec{\nabla} \psi \\ \psi &\to e^{i\alpha} \psi \ \Rightarrow \ j^{\mu} = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \psi; \qquad j^{0} = \psi^{+} \psi; \qquad \vec{j} = \psi^{+} \vec{\alpha} \psi \\ \mathcal{L} &= \bar{\psi} i \partial \!\!\!/ \psi : \qquad \psi \to e^{i\alpha\gamma^{5}} \psi \ \Rightarrow \ j^{\mu} = \bar{\psi} \gamma^{\mu} \gamma^{5} \psi; \end{split}$$

2.3.4. Уравнение Дирака

$$egin{aligned} (i\partial\!\!\!/-m)\psi &= 0 \ \psi(x) &= e^{-ipx}u(p); \qquad p^2 &= m^2 \end{aligned}$$

дальше ищем собственные векторы алгебраического уравнения

$$(\not p-m)u=0, \qquad E_p>0$$
 $u_r(\vec p)=igg(rac{\sqrt{E_p+m}}{r\sqrt{E_p-m}}igg)\otimes\chi_r$ - в представлении Дирака $u_r^+u_s=2E_p\delta_{rs}; \qquad ar u_ru_s=2m\delta_{rs}; \qquad \sum_r u_r\otimesar u_r=\not p+m$ $(\not p+m)v=0, \qquad E_p<0 \Rightarrow p o -p$ $v_r(\vec p)=igg(rac{r\sqrt{E_p-m}}{\sqrt{E_p+m}}igg)\otimes\eta_r$ - в представлении Дирака $v_r^+v_s=2E_p\delta_{rs}; \qquad ar v_rv_s=-2m\delta_{rs}; \qquad \sum_r v_r\otimesar v_r=\not p-m$ $rac{ec pec p}{|ec p|}\chi_r=r\chi_r; \qquad rac{ec pec p}{|ec p|}\eta_r=r\eta_r; \qquad \sum_s\chi_s\otimes\chi_s^+=1$

r=+1 - вдоль импульса, r=-1 - против - спиральность

но можно(?) выбрать и другой базис поляризаций, если решать в представлении Вейля

итого:

$$\psi(x) = \int rac{d^3ec{p}}{(2\pi)^3} rac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_r (a_r(ec{p}) u_r(ec{p}) e^{-ipx} + b_r^*(ec{p}) v_r(ec{p}) e^{+ipx})$$

2.3.5. функция Грина

$$\begin{split} (i\partial \!\!\!/ - m)\psi_0(x) &= 0 \\ (i\partial \!\!\!/ - m)G(x) &= + i\delta^4(x) \\ (i\partial \!\!\!/ - m)\psi(x) &= j(x) \\ \psi(x) &= \psi_0(x) - i \int d^4y G(x-y)j(y) \\ G(p) &= \frac{i}{\not p-1} = \frac{i(\not p+m)}{p^2-m^2} \\ G(x) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not p+m)}{p^2-m^2} e^{-ipx} = (i\partial \!\!\!/ + m) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2-m^2} e^{-ipx} \\ G_R(x) &= \begin{cases} 0, & x_0 < 0 \\ (i\partial \!\!\!/ - m)(D(x) - D(-x)), & x_0 > 0 \end{cases} \\ G_A(x) &= \begin{cases} (i\partial \!\!\!/ - m)(D(x) - D(-x)), & x_0 < 0 \\ 0, & x_0 > 0 \end{cases} \\ S_F(x) &= G_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not p+m)}{p^2-m^2+i\epsilon} e^{-ipx} = (i\partial \!\!\!/ - m)D_F(x) = (i\partial \!\!\!/ - m) \begin{cases} D(x), & x_0 < 0 \\ D(-x), & x_0 > 0 \end{cases} \\ S_F(p) &= \frac{i(\not p+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}; & S_F(x) = S_F(-x) \end{split}$$

2.3.6. Квантуем

под произведением операторов ψ понимаем тензорное произведение

$$\{\psi(ec{x}),\pi(ec{y})\} = i\delta^3(ec{x}-ec{y}) \; \Rightarrow \; \{\psi(ec{x}),\psi^+(ec{y})\} = \delta^3(ec{x}-ec{y})$$

$$\{a^r_{ec{p}},a^{s+}_{ec{q}}\}=\{b^r_{ec{p}},b^{s+}_{ec{q}}\}=(2\pi)^3\delta^3(ec{p}-ec{q})\delta^{rs}$$
 остальные АНТИкоммутаторы =0
$$\psi(x)=\int \frac{d^3ec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_r(a^r_{ec{p}}u^r(ec{p})e^{-ipx}+b^{r+}_{ec{p}}v^r(ec{p})e^{+ipx})$$
 $ar{\psi}(x)=\int \frac{d^3ec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_r(b^r_{ec{p}}ec{v}^r(ec{p})e^{-ipx}+a^{r+}_{ec{p}}ec{u}^r(ec{p})e^{+ipx})$ $H=\int \frac{d^3ec{p}}{(2\pi)^3}E_p\sum_s(a^{s+}_{ec{p}}a^s_{ec{p}}+b^{s+}_{ec{p}}b^s_{ec{p}})$ $ec{P}=\int \frac{d^3ec{p}}{(2\pi)^3}ec{p}\sum_s(a^{s+}_{ec{p}}a^s_{ec{p}}+b^{s+}_{ec{p}}b^s_{ec{p}})$ $Q=\int \frac{d^3ec{p}}{(2\pi)^3}\sum_s(a^{s+}_{ec{p}}a^s_{ec{p}}-b^{s+}_{ec{p}}b^s_{ec{p}})$

2.3.6.1. Состояния

$$ertec{p},s
angle = \sqrt{2E_p}a_{ec{p}}^{s+}ert0
angle; \quad \langle ec{p},rertec{q},s
angle = 2E_p(2\pi)^3\delta^3(ec{p}-ec{q})\delta^{rs}$$

2.3.6.2. Пропагатор

$$\begin{split} &\langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = \langle 0|\bar{\psi}(x)\psi(y)|0\rangle = (i\partial_{x}\!\!+m)D(x-y) \\ &\langle 0|\bar{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle = \langle 0|\psi(y)\bar{\psi}(x)|0\rangle = -(i\partial_{x}\!\!+m)D(y-x) \\ &\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\} = \langle 0|\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}|0\rangle = (i\partial_{x}\!\!+m)\int \frac{d^{3}\vec{p}}{(2\pi)^{3}}\frac{e^{-ip(y-x)}-e^{+ip(y-x)}}{2E_{p}} = \\ &= (i\partial_{x}\!\!+m)\begin{cases} \int \frac{d^{3}\vec{p}}{(2\pi)^{3}}\frac{e^{-i\vec{p}\vec{r}}-e^{+i\vec{p}\vec{r}}}{2E_{p}} = 0, & x^{0} = y^{0} \\ \int \frac{d^{3}\vec{p}}{(2\pi)^{3}}\frac{e^{-iE_{p}t}-e^{+iE_{p}t}}{2E_{p}}, & \vec{x} = \vec{y} \end{cases} \\ &\langle 0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}|0\rangle = S_{F}(x-y) = (i\partial_{x}\!\!+m)D_{F}(x-y) = \begin{cases} \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle, & x^{0} > y^{0} \\ -\langle 0|\bar{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle, & y^{0} > x^{0} \end{cases} \end{split}$$

2.3.6.3. теорема Вика

Т упорядочение: слева новые, справа старые, при перестановке знак меняется.

N упорядочение: слева a^+, b^+ , справа a, b, при перестановке знак меняется.

$$\psi(x) = \psi^a(x) + \psi^{b+}(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x); \quad ar{\psi}(x) = \psi^{a+}(x) + \psi^b(x) = ar{\psi}^{(-)}(x) + ar{\psi}^{(+)}(x)$$

$$\psi^a(x) = \psi^{(+)}(x) = \int rac{d^3ec p}{(2\pi)^3} rac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_r a_{ec p} u^r(ec p) e^{-ipx}; \quad \psi^{a+}(x) = ar\psi^{(-)}(x) = \int rac{d^3ec p}{(2\pi)^3} rac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_r a_{ec p}^{r+} ar u^r(ec p) e^{+ipx}
onumber \ \psi^b(x) = ar\psi^{(+)}(x) = \int rac{d^3ec p}{(2\pi)^3} rac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_r b_{ec p}^{r} ar v^r(ec p) e^{-ipx}; \quad \psi^{b+}(x) = \psi^{(-)}(x) = \int rac{d^3ec p}{(2\pi)^3} rac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_r b_{ec p}^{r+} v^r(ec p) e^{+ipx}
onumber \ \psi^{b}(x) = ar\psi^{(-)}(x) = \int rac{d^3ec p}{(2\pi)^3} rac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_r b_{ec p}^{r+} v^r(ec p) e^{+ipx}
onumber \ \psi^{b}(x) = \psi^{(-)}(x) = \int rac{d^3ec p}{(2\pi)^3} rac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_r b_{ec p}^{r+} v^r(ec p) e^{+ipx}
onumber \ \psi^{b}(x) = \psi^{(-)}(x) = \int rac{d^3ec p}{(2\pi)^3} rac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_r b_{ec p}^{r+} v^r(ec p) e^{+ipx}
onumber \ \psi^{b}(x) = \psi^{(-)}(x) = \int rac{d^3ec p}{(2\pi)^3} rac{1}{\sqrt{2E_p}} \sum_r b_{ec p}^{r+} v^r(ec p) e^{+ipx}
onumber \ \psi^{b}(x) = \psi$$

свертка
$$\psi(x)ar{\psi}(y) := \begin{cases} \{\psi^a(x),\psi^{a+}(y)\} = \langle 0|\psi(x)ar{\psi}(y)|0\rangle, & x^0 > y^0 \\ -\{\psi^b(y),\psi^{b+}(x)\} = -\langle 0|\psi(y)ar{\psi}(x)|0\rangle, & y^0 > x^0 \end{cases}$$
 свертка $ar{\psi}(x)\psi(y) := \begin{cases} \{\psi^b(x),\psi^{b+}(y)\} = \langle 0|ar{\psi}(x)\psi(y)|0\rangle, & x^0 > y^0 \\ -\{\psi^a(y),\psi^{a+}(x)\} = \langle 0|ar{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle, & y^0 > x^0 \end{cases}$

свёрток $\psi\psi$ или $ar{\psi}ar{\psi}$ не бывает

свертка
$$ar{\psi}(x)\psi(y)=\psi(x)ar{\psi}(y)=S_F(x-y)=S_F(y-x)$$
 теорема: $T\{\psi_1\dots\psi_n\}=N\{\sum_{all\ convs}\psi_1\dots\psi_n\}$

теорема:
$$T\{\psi_1\ldots\psi_n\}=N\{$$
 \sum $\psi_1\ldots\psi_n\}$

причем свертка 13
$$N(\psi_1\psi_2ar{\psi}_3ar{\psi}_4) = -S_F(x_1-x_3)N(\psi_2ar{\psi}_4)$$

2.4. Электромагнитное

2.5. Векторное массивное

4. Взаимодействия и правила Фейнмана

4.1. K-
$$\Gamma - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

$$(\partial^2 + m^2)\phi = \frac{\lambda}{3!}\phi^3$$

$$H=H_0+V=H_0+rac{\lambda}{4!}\int d^3ec{x}\phi(ec{x})\phi(ec{x})\phi(ec{x})\phi(ec{x})$$

Корреляционная функция (Пескин 4.4)

$$\langle 0|N\{\sum_{all\ convs}\phi(x)\phi(y)exp(-irac{\lambda}{4!}\int d^4z\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z))\}|0
angle=$$

	координатное	импульсное
вершины	$(-i\lambda)\int d^4x$	(- <i>iλ</i>) + 3CИ
внешние точки	1	e^{-ipx}
свертки	$D_F(x-y)$	$D_F(p)$
		$\int rac{d^4p}{(2\pi)^4}$ по каждому импульсу

и разделить на порядок симметрии диаграммы

все вакуумные поддиаграммы из всех вкладов можно вынести как один фазовый множитель

Матричный элемент (Пескин 4.6)

$$\langle ec{p}_1 \dots ec{p}_n | iT | ec{p}_A ec{p}_B
angle = i\mathcal{M}(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n - p_A - p_B) =$$
 $= A_0 \langle ec{p}_1 \dots ec{p}_n | N \{ \sum_{all\ convs} exp(-irac{\lambda}{4!} \int d^4z \phi(z) \phi(z) \phi(z) \phi(z)) \} | ec{p}_A ec{p}_B
angle_0$ - связный, ампутированный

А=1, если нет петель

все вакуумные поддиаграммы из всех вкладов можно вынести как один фазовый множитель ампутированные части - эволюция внешних состояний

несвязные - вклад в 1 в S - когда начальное и конечное состояния тождественны (? - а частично несвязные)

свертка $\phi(x)|ec{p}
angle=e^{-ipx}$

свертка $\langle ec{p} | \phi(x) = e^{+ipx}$

	координатное $ ightarrow \langle . iT . angle$	импульсное $ ightarrow i\mathcal{M}$
вершины	$(-i\lambda)\int d^4x$	$(-i\lambda)$ + 3СИ
внешние линии	e^{-ipx}	1
свертки	$D_F(x-y)$	$D_F(p)$
		$\int rac{d^4p}{(2\pi)^4}$ по каждому незафиксированному импульсу

и разделить на порядок симметрии диаграммы

Пескин обещает строго вывести через корреляционную функцию в 7.3. - оптическая теорема

4.2. теория Юкавы: Дирак + К-Г $-gar{\psi}\psi\phi$

$$\mathcal{L}=ar{\psi}(i\partial\!\!\!/-m)\psi+rac{1}{2}(\partial_{\mu}\phi)^2-rac{1}{2}m^2\phi^2-gar{\psi}\psi\phi$$

т.к. гамильтониан взаимодействия всегда содержит чётное число спиноров, то знак минус в определении Т упорядочения для фермионов не нарушает корректность вычислений

4.3. КЭД: Дирак + Максвелл $-ear{\psi}\gamma^{\mu}\psi A_{\mu}$

$$\mathcal{L}=ar{\psi}(i\partial\!\!\!/-m)\psi-rac{1}{4}(F_{\mu
u})^2-ear{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu=ar{\psi}(iD\!\!\!/-m)\psi-rac{1}{4}(F_{\mu
u})^2 \ D_\mu:=\partial_\mu+ieA_\mu(x)$$

Глобальные калибровочные преобразования, сохраняющие лагранжиан:

$$egin{align} \psi(x)
ightarrow e^{ilpha(x)} \psi(x); & A_{\mu}
ightarrow A_{\mu} - rac{1}{e} \partial_{\mu} lpha(x) \ (i\hat{D} - m) \psi = 0 \ \partial_{\mu} F^{\mu\nu} = e ar{\psi} \gamma^{
u} \psi = e j^{
u} \ \end{aligned}$$

4.4. скалярная электродинамика: К- $\Gamma + rac{1}{2} e^2 A^2 |\phi|^2$

$$\mathcal{L} = rac{1}{2} |D_{\mu} \phi|^2 - rac{1}{2} m^2 |\phi|^2 = rac{1}{2} |\partial_{\mu} \phi|^2 - rac{1}{2} m^2 |\phi|^2 + rac{1}{2} e^2 A^2 |\phi|^2$$

Источник — «https://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=Участник:FeelUs/KTП&oldid=83528533»

- Последнее изменение этой страницы: 14:28, 7 февраля 2017.
- Текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution-ShareAlike; в отдельных случаях могут действовать дополнительные условия.

Wikipedia® — зарегистрированный товарный знак некоммерческой организации Wikimedia Foundation, Inc.