Участник:FeelUs/КТП

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Содержание

символы, обозначения и соглашения

символы

$$\mathcal{L} \quad \mathcal{H} \quad \mathcal{P} \quad \mathcal{M} \quad \vec{x} \quad \dot{x} \quad \hat{x} \quad \bar{x} \quad \tilde{x} \quad \sqrt{x} \quad \frac{x}{x} \quad \partial\!\!\!/ \quad \phi \quad \varphi \quad \epsilon \quad \varepsilon \quad \theta \quad \vartheta \quad \pm \quad \mp \quad \times \quad \otimes \quad \cdot \quad \Rightarrow \quad \to \quad \infty \quad \dots$$

$$A_0\langle|\rangle \quad [\;] \quad \{\} \quad \int\sum \sin\cos\dim\mathrm{Tr}\,\mathbf{Tr}\begin{cases}1, & 2\\ 3, & 4\end{cases}\begin{pmatrix}1, & 2\\ 3, & 4\end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix}1, & 2\\ 3, & 4\end{bmatrix}$$

соглашения

у Пескина: $p_i = -p^i = \vec{p}$
я привык: $p^i = -p_i = \vec{p}$

основная логика:

- В кинематике и сечении понимаем, что для вычисления сечения нужно посчитать матричный элемент
- В квантах и представлениях мы понимаем, что для вычисления матричного элемента в возмущенной теории достаточно посчитать Т упорядочение в невозмущенной.
- В каждом поле имеется теорема Вика, которая говорит, что Т упорядочение можно вычислить через нормальное упорядочение и свертки
- И в конце мы из этих сверток конструируем диаграммы

1++. Кинематика и сечения

Нормировки ВФ

Распределение ($f(x) = f(x')dx'/dx$) на массовой поверхности:

$$\frac{dp'^z}{dp^z} = \beta + \beta\gamma\frac{dE}{dp^z} = \beta + \beta\gamma\frac{d\sqrt{p^2+m^2}}{dp^z} = \beta + \beta\gamma\frac{p^z}{\sqrt{p^2+m^2}} = \frac{\beta E + \beta\gamma p^z}{E} = \frac{E'}{E} \quad \Rightarrow \text{ если}$$
$f(p) = |\phi(p)|^2$, то $\sqrt{2E_p}\phi(p) = \sqrt{2E_{p'}}\phi(p')$.
2 - удобен из-за похожего множителя в квантовом решении, а может из-за знаменателя в пропагаторе.
$\langle\vec{p}|\vec{k}\rangle = 2E_p(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{k})$ - лоренц-инвариантно
$\langle\vec{x}|\vec{y}\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$ - кажется уже нет (?)
$$|\psi\rangle = \int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{\psi_p(\vec{p})}{\sqrt{2E_p}}|\vec{p}\rangle = \int d^3\vec{x}\psi_x(\vec{x})|\vec{x}\rangle$$

НКМ: $\langle\vec{x}|\vec{\hat{p}}|\vec{p}\rangle = \vec{p}\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = -i\vec{\nabla}\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle \;\Rightarrow\; \langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = e^{+i\vec{p}\vec{x}}$
КТП: $\langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_p}e^{+i\vec{p}\vec{x}}$
$$\psi_p(\vec{q}) = \int d^3\vec{x}e^{-i\vec{q}\vec{x}}\psi_x(\vec{x}); \qquad \psi_x(\vec{y}) = \int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}e^{+i\vec{p}\vec{y}}\psi_p(\vec{p})$$
$$|\vec{q}\rangle = \sqrt{2E_q}\int d^3\vec{x}e^{+i\vec{q}\vec{x}}|\vec{x}\rangle; \qquad |\vec{y}\rangle = \int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\vec{p}\vec{y}}}{\sqrt{2E_p}}|\vec{p}\rangle$$

сечение (Пескин, раздел 4.5.)

$\langle f|S|i\rangle = \langle f|1+iT|i\rangle$ - отбрасываем то, что не взаимодействует
$\langle\vec{p}_1\vec{p}_2\dots|iT|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle = (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+\dots-p_A-p_B)i\mathcal{M}(p_1,p_2,\dots,p_A,p_B)$ - закон сохранения импульсов выполнится в любом случае

начальное состояние зависит от прицельного параметра b: $|\phi_A\phi_B\rangle = \int \frac{d^3\vec{k}_A}{(2\pi)^3}\frac{\phi_A(\vec{k}_A)}{\sqrt{2E_{k_A}}}\frac{d^3\vec{k}_B}{(2\pi)^3}\frac{\phi_B(\vec{k}_B)}{\sqrt{2E_{k_B}}}e^{-i\vec{k}_B\vec{b}}|\vec{k}_A\vec{k}_B\rangle$

где $|\phi_A(\vec{k}_A)|^2 = (2\pi)^3\delta^3(\vec{k}_A - \vec{p}_A); \quad |\phi_B(\vec{k}_B)|^2 = (2\pi)^3\delta^3(\vec{k}_B - \vec{p}_B)$

$$d\sigma = \int d^2\vec{b}P(\vec{b}); \quad P(\vec{b}) = \frac{d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2\ldots}{(2\pi)^3 2E_{p_1}(2\pi)^3 2E_{p_2}\ldots}|\langle\vec{p}_1\vec{p}_2\ldots|iT|\phi_A\phi_B\rangle|^2$$

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}(p_1,p_2,\ldots,p_A,p_B)|^2}{2E_A 2E_B|v_A - v_B|}\frac{d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2\ldots}{(2\pi)^3 2E_{p_1}(2\pi)^3 2E_{p_2}\ldots}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2+\ldots-p_A-p_B)$$

В системе центра масс для двух конечных частиц:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\mathcal{M}(p_1,p_2,p_A,p_B)|^2}{2E_A 2E_B|v_A - v_B|}\frac{|\vec{p}_1|}{16\pi^2 E_{CM}}$$

Для полного сечения: если есть n тождественных частиц (каждого сорта), то его надо будет разделить на n! (каждого сорта).

Ширины вычисляются по аналогии, но будут доказаны в Пескине 7.3.

1+. Кванты и представления

1+.1. Шрёдингер:

$i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = H\psi(x,t)$ - Ландавшиц выводил из ур-я Гамильтона-Якоби

$H\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$ - разделение переменных, все дела...

$\psi(x,t) = \sum_n a_n\psi_n(x)e^{-iE_nt}$

$\psi(x,t) = e^{-i\hat{H}t}\psi(x,0)$

$\langle\psi|\psi\rangle = 1$

вероятность, что ψ есть ϕ равна $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$

вероятность, что ψ перейдет в ϕ за t равна $|\langle\phi|e^{-i\hat{H}t}|\psi\rangle|^2$

$\langle M\rangle = \langle\psi|\hat{M}|\psi\rangle$

подробнее про измерения - Нильсен-Чанг, Квантовые вычисления, раздел 2.2.

1+.2. Гайзенберг:

$\langle O(t)\rangle = \langle\psi(t)|\hat{O}|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|e^{i\hat{H}t}\hat{O}e^{-i\hat{H}t}|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|\hat{O}(t)|\psi(0)\rangle$

$i\frac{\partial\hat{O}(t)}{\partial t} = [\hat{O}(t),\hat{H}]$ - подставляем, проверяем.

В частности выр-я для $\hat{q}$ и $\hat{p}$ соответствуют ур-ям Гамильтона.

по прежнему

вероятность, что ψ есть ϕ равна $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$

вероятность, что ψ перейдет в ϕ за t равна $|\langle\phi|e^{-i\hat{H}t}|\psi\rangle|^2$

1+.3. Дирак (представление взаимодействия):

$H = H_0 + V$. Для H_0 решать умеем, т.е. знаем e^{-iH_0t}. V - возмущение.

1+.3.1. из Шрёдингера

$i\frac{\partial\psi_S}{\partial t} = H\psi_S$

будем искать ввиде $\psi_S = e_{-iH_0t}\psi_I$

тогда (*) $i\frac{\partial\psi_I}{\partial t} = e^{iH_0t}Ve^{-iH_0t}\psi_I = V(t)\psi_I$

$\psi_I(t) = U(t,t_0)\psi_I(t_0)$

$U(t,t_0) = T\{exp(-i\int_{t_0}^t dt_1V(t_1))\}$ - в ряд Тейлора и упорядочение по времени - в каждом учебнике имеется картиночка

$U^+U = I; \quad U^{-1}(t,t_0) = U^+(t,t_0) = U(t_0,t); \quad U(t_2,t_1)U(t_1,t_0) = U(t_2,t_0)$

S-матрица: $S = \lim_{t_0\to-\inf;\ t\to+\inf} U(t,t_0);\quad \langle fin|S|ini\rangle$ - матричный элемент

1+.3.2. из Гайзенберга

далее по Пескину - раздел 4.2.

хотим: $\hat\phi(t) = e^{+i(H_0+V)t}\hat\phi(0)e^{-i(H_0+V)t}$
знаем: $\hat\phi_I(t) = e^{+iH_0t}\hat\phi(0)e^{-iH_0t}$
$\hat\phi(t) = U^+(t,0)\hat\phi_I(t)U(t,0) = U(0,t)\hat\phi_I(t)U(t,0)$
$U(t,t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}$
$i\frac{\partial U}{\partial t} = e^{iH_0t}Ve^{-iH_0t}U = V(t)U$, а это тоже самое, что и (*)

1+.3.3. новое вакуумное состояние

Было: $H_0|0\rangle = 0|0\rangle$. Стало: $H|\Omega\rangle = E_0|\Omega\rangle$.
разложим: $e^{-iHT}|0\rangle = e^{-iE_0T}|\Omega\rangle\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n\neq0} e^{-iE_nT}|n\rangle\langle n|0\rangle$
ненормированное $\Rightarrow |\Omega\rangle_{nn} = \lim_{T\to\infty(1+i\epsilon)} e^{-iHT}|0\rangle = U(0,-T)|0\rangle$
для произвольных $\hat\phi_1(t_1), \hat\phi_2(t_2), \hat\phi_3(t_3)$
$\langle\Omega|\hat\phi_1\hat\phi_2\hat\phi_3|\Omega\rangle = \frac{\langle\Omega|\hat\phi_1\hat\phi_2\hat\phi_3|\Omega\rangle_{nn}}{\langle\Omega|\Omega\rangle_{nn}} = \lim_{T\to\infty(1+i\epsilon)} \frac{\langle 0|T\{\hat\phi_{I1}\hat\phi_{I2}\hat\phi_{I3}exp(-i\int_{t_0}^T dt_1 V(t_1))\}|0\rangle}{\langle 0|T\{exp(-i\int_{t_0}^T dt_1 V(t_1))\}|0\rangle}$

1. Лагранжев Формализм

1.0. Действие 1d, 4d, Вариация = 0

$$S = \int L dt;\quad \delta S = 0$$
$$S = \int \mathcal{L} d^4x;\quad \delta S = 0$$

1.1. Уравнения Лагранжа (из 1.0.)

$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}$ - для каждого q
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}$ - для каждого фи

1.2. Тензор энергии-импульса (из 1.0. и 1.1. или из 1.3)

$$E = \sum_q pv - L(q,\dot q);\quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot q};\quad v = \dot q$$
$$T^{\mu\nu} = \sum_\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\partial^\nu\phi - g^{\mu\nu}\mathcal{L}$$

1.3. Теорема Нётер (из 1.0 и 1.1)

Если при $\delta\phi:\quad L \to L + \frac{df}{dt}$; или $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \partial_\mu J^\mu$, то $\delta S = 0$ (если ϕ удовлетворяет ур-ям Лагранжа)
$\Rightarrow j^\mu = \sum_\phi \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta\phi - J^\mu = const(x)$

1.5. Гамильтониан, уравнения Гамильтона, Плотность Гамильтониана (из ...)

$H(q,p) = \sum_q pv(q,p) - L(q,p)$ - преобразование Лежандра

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{q}; \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{p}$$
$$\mathcal{H} = T^{00} = \sum_\phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi} \partial^0 \phi - \mathcal{L} = \sum_\phi \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}; \quad H = \int d^3 \vec{x} \mathcal{H}$$
$$\vec{\mathcal{P}} = T^{0i} = \sum_\phi \pi \vec{\nabla} \phi; \quad \vec{P} = \int d^3 \vec{x} \vec{\mathcal{P}}; \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi}$$

2. Свободные поля с пропагаторами и теоремами Вика

2.1. Скалярное действительное

2.1.1. Классическое

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = \partial^\mu \phi$$
$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}((\frac{\partial \phi}{dt})^2 + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2)$$
$$\vec{\mathcal{P}} = \partial_0 \phi \vec{\nabla} \phi$$

Глобальные калибровочные преобразования:$\phi \to e^{i\delta\alpha} \phi \ \Rightarrow \ \delta\phi = i\delta\alpha\phi \ \Rightarrow \ J^\mu = 0 \ \Rightarrow$

$j^\mu = i\partial^\mu \phi \phi = i\frac{1}{2}\partial^\mu(\phi^2)$ - ток чисто мнимый

2.1.1.0. уравнение К-Г - Клейна-Гордона(-Фока)

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0$$

ищем решение в виде: $\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{p}\vec{x}} \phi(\vec{p}, t)$

(*) получаем $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + E_p^2)\phi(\vec{p}, t) = 0$

$$\phi(\vec{p}, t) = a(\vec{p}) e^{-iE_p t} + a^*(\vec{p}) e^{+iE_p t},$$
$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^*(-\vec{p}) e^{+ipx})$$

нормировка абсолютно не имеет значения, но чтобы всё было лоренц-инвариантно (?: почему мы делим а не умножаем на $\sqrt{2E_p}$? - может чтобы $\langle 0|\phi(\vec{x})|\vec{p}\rangle = e^{i\vec{p}\vec{x}}$):

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a(\vec{p}) e^{-ipx} + a^*(-\vec{p}) e^{+ipx})$$

2.1.1.1. Функции Грина

$$(\partial^2 + m^2)\phi_0(x) = 0$$
$$(\partial^2 + m^2)G(x) = -i\delta^4(x)$$
$$(\partial^2 + m^2)\phi(x) = j(x)$$
$$\phi(x) = \phi_0(x) + i \int d^4 y G(x - y) j(y)$$
$$G(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}$$
$$G(x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ipx} = \frac{i}{2\pi} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{p_0^2 - E_p^2} e^{-ipx}$$

при комплексном p_0 экспонента становится действительной, и мы замыкаем контур с той стороны, где она убывает (а не возрастает), т.е. при $x_0 < 0$ - сверху, а при $x_0 > 0$ - снизу

запаздывающая (retarded) (знаем источник, хотим найти поле) - оба полюса обходим сверху

$$G_R(x) = \begin{cases} 0, & x_0 < 0 \\ \frac{i}{2\pi} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (-2\pi i) (\frac{e^{-ipx}}{2E_p} - \frac{e^{+ipx}}{2E_p}), & x_0 > 0 \end{cases}$$

опережающая (advanced) (знаем поле, хотим найти источник (?)) - оба полюса обходим снизу

$$G_A(x) = \begin{cases} \frac{i}{2\pi} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (2\pi i) (\frac{e^{-ipx}}{2E_p} - \frac{e^{+ipx}}{2E_p}), & x_0 < 0 \\ 0, & x_0 > 0 \end{cases}$$

фейнмановская (для частиц - запаздывающая, для античастиц - опережающая (fixme)) - отрицательный полюс обходим снизу, а положительный - сверху

$$D_F(x) = G_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ipx} = \begin{cases} \frac{i}{2\pi} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (2\pi i) \frac{e^{-ipx}}{2E_p}, & x_0 < 0 \\ \frac{i}{2\pi} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (2\pi i) \frac{e^{+ipx}}{2E_p}, & x_0 > 0 \end{cases}$$

$$D_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}; \qquad D_F(x) = D_F(-x)$$

2.1.2 Квантовое

в квантовом случае: ϕ - оператор "координаты поля"

в одноточечном случае для (*) [показать]

$$\hat{\mathcal{H}}(\vec{p}) = \frac{1}{2}(\hat{\pi}^2(\vec{p}) + E_p^2 \hat{\phi}^2(\vec{p})) = E_p(a^+_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + \frac{1}{2})$$
$$[\hat{\phi}(\vec{p}), \hat{\pi}(\vec{p})] = i; \quad [\hat{a}(\vec{p}), \hat{a}^+(\vec{p})] = 1$$
$$\hat{\phi}(\vec{p}) = \frac{\hat{a}(\vec{p}) + \hat{a}^+(\vec{p})}{\sqrt{2E_p}}; \quad \hat{\pi}(\vec{p}) = -i\sqrt{\frac{E_p}{2}}(\hat{a}(\vec{p}) - \hat{a}^+(\vec{p}))$$

(далее операторы без шляпок)

но мы хотим $[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] = i\delta(\vec{x} - \vec{x}'); \quad [a(\vec{p}), a^+(\vec{p}')] = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}')$ + нормировка фи

остальные коммутаторы =0

и тогда $\phi(\vec{p}) = \dfrac{a(\vec{p}) + a^+(-\vec{p})}{\sqrt{2E_p}}; \quad \pi(\vec{p}) = -i\sqrt{\dfrac{E_p}{2}}(a(\vec{p}) - a^+(-\vec{p}))$

механизм возникновения двойки в $\sqrt{2E_p}$: записываем коммутационные соотношения для a → записываем фи → находим пи → проверяем коммутационные соотношения для [фи,пи]

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_{\vec{p}} e^{+i\vec{p}\vec{x}} + a^+_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\vec{x}})$$
$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} (-i)\sqrt{\frac{E_p}{2}} (a_{\vec{p}} e^{+i\vec{p}\vec{x}} - a^+_{\vec{p}} e^{-i\vec{p}\vec{x}})$$

$\phi^+ = \phi$ - поле действительное

H можно находить двумя способами: подставить фи в гамильтониан поля или подставить фи и пи в гамильтониан гарм. осциллятора

$$H = \int d^3\vec{x}\mathcal{H} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_p \frac{a^+_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + a_{\vec{p}} a^+_{\vec{p}}}{2} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_p (a^+_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + \frac{1}{2}[a_{\vec{p}} a^+_{\vec{p}}]) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_p a^+_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + const$$
$$[H, a^+_{\vec{p}}] = E_p a^+_{\vec{p}}; \quad [H, a_{\vec{p}}] = -E_p a_{\vec{p}}$$
$$\vec{P} = \int d^3\vec{x}\vec{\mathcal{P}} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} a^+_{\vec{p}} a_{\vec{p}}$$
$$Q = ?$$

2.1.2.1. Состояния

2 - удобен из-за похожего множителя в квантовом решении, а может из-за знаменателя в пропагаторе.

$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_p}a^+_{\vec{p}}|0\rangle; \quad \langle\vec{p}|\vec{q}\rangle = 2E_p(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})$

$\phi(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{-i\vec{p}\vec{x}}|\vec{p}\rangle; \quad \langle 0|\phi(\vec{x})|\vec{p}\rangle = e^{i\vec{p}\vec{x}}$

$|\vec{x}\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}e^{-i\vec{p}\vec{x}}|\vec{p}\rangle$; - (по словам Наумова) его нельзя выразить через ϕ $\Rightarrow$ (а может $\Leftarrow$) решением ур-я КГ не является

2.1.2.2. Эволюция:

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = [\phi, H] = i\pi; \quad i\frac{\partial\pi}{\partial t} = [\pi, H] = -i(-\nabla^2 + m^2)\phi;$$
$$Ha_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}(H - E_p) \ \Rightarrow \ H^n a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}(H-E_p)^n$$
$$\Rightarrow \ e^{iHt}a_{\vec{p}}e^{-iHt} = a_{\vec{p}}e^{-iE_pt}; \quad e^{iHt}a^+_{\vec{p}}e^{-iHt} = a^+_{\vec{p}}e^{+iE_pt}$$
$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}(a_{\vec{p}}e^{-ipx} + a^+_{\vec{p}}e^{+ipx})|_{p^0=E_p}; \quad \pi(x) = \frac{\partial\phi}{\partial t}$$
$$e^{-i\vec{P}\vec{x}}a_{\vec{p}}e^{+i\vec{P}\vec{x}} = a_{\vec{p}}e^{+i\vec{p}\vec{x}}; \quad e^{-i\vec{P}\vec{x}}a^+_{\vec{p}}e^{+i\vec{P}\vec{x}} = a^+_{\vec{p}}e^{-i\vec{p}\vec{x}}$$
$$P = (H, \vec{P}) \ \Rightarrow \ \phi(x) = e^{iPx}\phi(0)e^{-iPx}$$

2.1.2.3. Пропагатор - амплитуда распространения частицы

$$D(y-x) := \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{-ip(y-x)}$$

Если $A(x) = \sum_n a_n\phi^{2n}(x)$ и $B(y) = \sum_n a_n\phi^{2n}(y)$ - операторы измерений в соотв. точках, и x и y - разнесены пространственно-подобно,
то $B(y)A(x)|\psi\rangle = A(x)B(y)|\psi\rangle \ \Leftrightarrow [A(x), B(y)] = 0 \ \Leftarrow [\phi(x), \phi(y)] = 0 \ or \ \{\phi(x), \phi(y)\} = 0$

$$[\phi(y), \phi(x)] = \langle 0|[\phi(y), \phi(x)]|0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ip(y-x)} - e^{+ip(y-x)}}{2E_p} = \begin{cases} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\vec{p}\vec{r}} - e^{+i\vec{p}\vec{r}}}{2E_p} = 0, & x^0 = y^0 \\ \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-iE_pt} - e^{+iE_pt}}{2E_p}, & \vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$

$D(y-x) \neq 0$ при пространственно-подобном интервале, т.е. квантовая телепортация остается возможной.
если $y^0 > x^0$ то $[\phi(y), \phi(x)] = G_R(y-x) = D(y-x) - D(x-y)$

$$\langle 0|T\{\phi(y)\phi(x)\}|0\rangle = D_F(y-x) = \begin{cases} \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle = D(y-x), & y^0 > x^0 \\ \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = D(x-y), & x^0 > y^0 \end{cases}$$

2.1.2.4. Теорема Вика

T упорядочение: слева новые, справа старые
N упорядочение: слева a^+, справа a, при перестановке знак не меняется.

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x); \quad \phi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}a_{\vec{p}}e^{-ipx}; \quad \phi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}a^+_{\vec{p}}e^{+ipx}$$

свертка $\phi(x)\phi(y) := \begin{cases} [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle, & x^0 > y^0 \\ . \, [\phi^{(+)}(y), \phi^{(-)}(x)] = \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle, & y^0 > x^0 \end{cases}$
свертка $\phi(x)\phi(y) = D_F(x-y) = D_F(y-x)$
теорема: $T\{\phi_1 \ldots \phi_n\} = N\{\sum_{all\ convs} \phi_1 \ldots \phi_n\}$

2.2. Скалярное комплексное

2.2.1. Классическое

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^* - m^2\phi\phi^*$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} = \partial^\mu\phi^*; \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*} = \partial^\mu\phi;$$
$$\mathcal{H} = |\frac{\partial\phi}{dt}|^2 + |\nabla\phi|^2 + m^2|\phi|^2$$
$$\vec{\mathcal{P}} = \partial_0\phi^*\vec{\nabla}\phi + \partial_0\phi\vec{\nabla}\phi^*$$

Глобальные калибровочные преобразования:$\phi \to e^{i\delta\alpha}\phi \;\Rightarrow\; \delta\phi = i\delta\alpha\phi \;\Rightarrow\; J^\mu = 0 \;\Rightarrow$

$$j^\mu = i(\partial^\mu\phi^*\phi - \partial^\mu\phi\phi^*)$$

2.1.1.0. уравнение К-Г - Клейна-Гордона(-Фока)

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0$$

ищем решение в виде: $\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{p}\vec{x}}\phi(\vec{p},t)$

(*) получаем $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + E_p^2)\phi(\vec{p},t) = 0$

$\phi(\vec{p},t) = a(\vec{p})e^{-iE_pt} + b^*(\vec{p})e^{+iE_pt}$,

$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}(a(\vec{p})e^{-ipx} + b^*(-\vec{p})e^{+ipx})$

2.2.1.1. Функции Грина

по моему здесь всё так же как и для скалярного действительного

2.2.2. Квантовое

в квантовом случае: ϕ - оператор "координаты поля"

в одноточечном случае для (*) [показать]

$$\hat{\mathcal{H}}(\vec{p}) = \frac{1}{2}(\hat{\pi}^2(\vec{p}) + E_p^2\hat{\phi}^2(\vec{p})) = E_p(b_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}} + \frac{1}{2})$$
$$[\hat{\phi}(\vec{p}), \hat{\pi}(\vec{p})] = i; \quad [\hat{a}(\vec{p}), \hat{b}^+(\vec{p})] = 1$$
$$\hat{\phi}(\vec{p}) = \frac{\hat{a}(\vec{p}) + \hat{b}^+(\vec{p})}{\sqrt{2E_p}}; \quad \hat{\pi}(\vec{p}) = -i\sqrt{\frac{E_p}{2}}(\hat{a}(\vec{p}) - \hat{b}^+(\vec{p}))$$

(далее операторы без шляпок)

но мы хотим $[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] = i\delta(\vec{x}-\vec{x}'); \quad [a(\vec{p}), a^+(\vec{p}')] = (2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{p}') \quad [b(\vec{p}), b^+(\vec{p}')] = (2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{p}')$

остальные коммутаторы =0

и тогда $\phi(\vec{p}) = \frac{a(\vec{p}) + b^+(-\vec{p})}{\sqrt{2E_p}}; \quad \pi(\vec{p}) = -i\sqrt{\frac{E_p}{2}}(b(\vec{p}) - a^+(-\vec{p}))$

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}(a_{\vec{p}}e^{+i\vec{p}\vec{x}} + b_{\vec{p}}^+ e^{-i\vec{p}\vec{x}})$$

$$\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}(-i)\sqrt{\frac{E_p}{2}}(b_{\vec{p}}e^{+i\vec{p}\vec{x}} - a_{\vec{p}}^+ e^{-i\vec{p}\vec{x}})$$

$$H = \int d^3\vec{x}\mathcal{H} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}E_p(b_{\vec{p}}^+b_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}a_{\vec{p}}^+) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}E_p(b_{\vec{p}}^+b_{\vec{p}} + a_{\vec{p}}^+a_{\vec{p}} + [a_{\vec{p}}a_{\vec{p}}^+]) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}E_p(a_{\vec{p}}^+a_{\vec{p}} + b_{\vec{p}}^+b_{\vec{p}}) + const$$
$$[H, a_{\vec{p}}^+] = E_p a_{\vec{p}}^+; \quad [H, a_{\vec{p}}] = -E_p a_{\vec{p}} \qquad [H, b_{\vec{p}}^+] = E_p b_{\vec{p}}^+; \quad [H, b_{\vec{p}}] = -E_p b_{\vec{p}}$$
$$\vec{P} = \int d^3\vec{x}\vec{\mathcal{P}} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\vec{p}(a_{\vec{p}}^+a_{\vec{p}} + b_{\vec{p}}^+b_{\vec{p}})$$
$$Q = \int d^3\vec{x}j^0 = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}(a_{\vec{p}}^+a_{\vec{p}} - b_{\vec{p}}^+b_{\vec{p}})$$

2.2.2.1. Состояния

вроде всё то же самое, только 2 типа частиц

$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_p}a_{\vec{p}}^+|0\rangle; \quad \langle\vec{p}|\vec{q}\rangle = 2E_p(2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})$

$\phi(\vec{x})|0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{-i\vec{p}\vec{x}}|\vec{p}\rangle;\quad \langle 0|\phi(\vec{x})|\vec{p}\rangle = e^{i\vec{p}\vec{x}}$

$|\vec{x}\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}e^{-i\vec{p}\vec{x}}|\vec{p}\rangle$; - (по словам Наумова) его нельзя выразить через ϕ $\Rightarrow$ (а может $\Leftarrow$) решением ур-я КГ не является

2.2.2.2. Эволюция:

вроде всё то же самое, только 2 типа частиц

$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = [\phi, H] = i\pi^+;\quad i\frac{\partial\pi^+}{\partial t} = [\pi^+, H] = -i(-\nabla^2 + m^2)\phi;$

$Ha_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}(H - E_p) \ \Rightarrow\ H^n a_{\vec{p}} = a_{\vec{p}}(H-E_p)^n$

$\Rightarrow\ e^{iHt}a_{\vec{p}}e^{-iHt} = a_{\vec{p}}e^{-iE_pt};\quad e^{iHt}a^+_{\vec{p}}e^{-iHt} = a^+_{\vec{p}}e^{+iE_pt}$

$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}(a_{\vec{p}}e^{-ipx} + b^+_{\vec{p}}e^{+ipx})|_{p^0=E_p};\quad \pi(x) = \frac{\partial\phi^+}{\partial t}$

$e^{-i\vec{P}\vec{x}}a_{\vec{p}}e^{+i\vec{P}\vec{x}} = a_{\vec{p}}e^{+i\vec{p}\vec{x}};\quad e^{-i\vec{P}\vec{x}}a^+_{\vec{p}}e^{+i\vec{P}\vec{x}} = a^+_{\vec{p}}e^{-i\vec{p}\vec{x}}$

$P = (H, \vec{P}) \ \Rightarrow\ \phi(x) = e^{iPx}\phi(0)e^{-iPx}$

2.2.2.3. Пропагатор - амплитуда распространения частицы

$D(y-x) := \langle 0|\phi^+(y)\phi(x)|0\rangle = \langle 0|\phi(y)\phi^+(x)|0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_p}e^{-ip(y-x)}$

Если $A(x) = \sum_n (a_n\phi^{2n}(x) + b_n\phi^{+2n}(x))$ и $B(y) = \sum_n (a_n\phi^{2n}(y) + b_n\phi^{+2n}(y))$ - операторы измерений в соотв. точках, и x и y - разнесены пространственно-подобно,

то $B(y)A(x)|\psi\rangle = A(x)B(y)|\psi\rangle \ \Leftrightarrow [A(x), B(y)] = 0 \ \Leftarrow [\phi^{[+]}(x), \phi^{[+]}(y)] = 0 \ or\ \{\phi^{[+]}(x), \phi^{[+]}(y)\} = 0$

$[\phi(y), \phi(x)] = [\phi^+(y), \phi^+(x)] = 0$

$[\phi^+(y), \phi(x)] = \langle 0|[\phi^+(y), \phi(x)]|0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ip(y-x)} - e^{+ip(y-x)}}{2E_p} = \begin{cases} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\vec{p}\vec{r}} - e^{+i\vec{p}\vec{r}}}{2E_p} = 0, & x^0 = y^0 \\ \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-iE_pt} - e^{+iE_pt}}{2E_p}, & \vec{x} = \vec{y} \end{cases}$

$D(y-x) \neq 0$ при пространственно-подобном интервале, т.е. квантовая телепортация остается возможной.

если $y^0 > x^0$ то $[\phi^+(y), \phi(x)] = G_R(y-x) = D(y-x) - D(x-y)$

$\langle 0|T\{\phi^+(y)\phi(x)\}|0\rangle = D_F(y-x) = \begin{cases} \langle 0|\phi^+(y)\phi(x)|0\rangle = D(y-x), & y^0 > x^0 \\ \langle 0|\phi^+(x)\phi(y)|0\rangle = D(x-y), & x^0 > y^0 \end{cases}$

2.2.2.4. Теорема Вика

T упорядочение: слева новые, справа старые

N упорядочение: слева a^+, b^+, справа a, b, при перестановке знак не меняется.

$\phi(x) = \phi^a(x) + \phi^{b+}(x);\quad \phi^a(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}a_{\vec{p}}e^{-ipx};\quad \phi^{a+}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}a^+_{\vec{p}}e^{+ipx}$

$\phi^+(x) = \phi^{a+}(x) + \phi^b(x);\quad \phi^b(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}b_{\vec{p}}e^{-ipx};\quad \phi^{b+}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}b^+_{\vec{p}}e^{+ipx}$

свертка $\phi(x)\phi^+(y) := \begin{cases} [\phi^a(x), \phi^{a+}(y)] = \langle 0|\phi(x)\phi^+(y)|0\rangle, & x^0 > y^0 \\ .[\phi^b(y), \phi^{b+}(x)] = \langle 0|\phi(y)\phi^+(x)|0\rangle, & y^0 > x^0 \end{cases}$

свертка $\phi^+(x)\phi(y) := \begin{cases} [\phi^b(x), \phi^{b+}(y)] = \langle 0|\phi^+(x)\phi(y)|0\rangle, & x^0 > y^0 \\ .[\phi^a(y), \phi^{a+}(x)] = \langle 0|\phi^+(y)\phi(x)|0\rangle, & y^0 > x^0 \end{cases}$

свёрток $\phi\phi$ или $\phi^+\phi^+$ не бывает

свертка $\phi^+(x)\phi(y) = \phi(x)\phi^+(y) = D_F(x-y) = D_F(y-x)$

теорема: $T\{\phi_1 \dots \phi_n\} = N\{\sum_{all\ convs} \phi_1 \dots \phi_n\}$

2.3. Спинорное

2.3.1. Арифметика γ матриц

$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\qquad i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\qquad \cos\varphi + i\sin\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Tr}\,\sigma_i = 0$$
$$\sigma^1 = ? \qquad \sigma^2 = ? \qquad \sigma^3 = ?$$
$$\sigma_i\sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k - \delta_{ij}; \quad [\sigma_i\sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k; \quad \{\sigma_i\sigma_j\} = (?-)2\delta_{ij}; \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = 1$$
$$(\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b}) = (\vec{a}\vec{b}) + i(\vec{\sigma}[\vec{a}\times\vec{b}])$$
$$e^{i\vec{a}\vec{\sigma}} = \cos|\vec{a}| + i\frac{\vec{a}\vec{\sigma}}{|\vec{a}|}\sin|\vec{a}| \;\Rightarrow\; \mathbf{Tr}\,e^{i\vec{a}\vec{\sigma}} = 2\cos|\vec{a}|$$
$$e^{\vec{a}\vec{\sigma}} = \mathrm{ch}\,|\vec{a}| + i\frac{\vec{a}\vec{\sigma}}{|\vec{a}|}\,\mathrm{sh}\,|\vec{a}| \;\Rightarrow\; \mathbf{Tr}\,e^{\vec{a}\vec{\sigma}} = 2\,\mathrm{ch}\,|\vec{a}|$$

Представление Дирака:

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \beta\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\beta^2 = 1; \quad \vec{\alpha}\beta = -\beta\vec{\alpha}; \quad \alpha^k\alpha^n = \delta^{kn}$$

Другие представления:

$$\tilde{\psi} = V\psi; \quad \tilde{\gamma}^\mu = V\gamma^\mu V^+; \quad VV^+ = V^+V = 1; \qquad \sigma^\mu_\pm = (1, \pm\vec{\sigma})$$

Вейля(у Пескина): $V = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}/\sqrt{2} \quad \Rightarrow \; \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_+ \\ \sigma^\mu_- & 0 \end{pmatrix}$

Спинорное: $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}/\sqrt{2} \quad \Rightarrow \; \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_- \\ \sigma^\mu_+ & 0 \end{pmatrix}$

.

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}; \qquad \mathbf{Tr}\,\gamma^\mu = 0$$
$$\gamma^5 = \gamma_5 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho = i\varepsilon_{0123}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3; \quad \varepsilon_{0123} = +1$$

$$\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5; \qquad {\gamma^5}^2 = 1; \qquad \mathbf{Tr}\,\gamma_{\mu_1}\ldots\gamma_{\mu_{2n+1}} = 0$$
$$\mathbf{Tr}\,\gamma^\mu\gamma^\nu = 4g^{\mu\nu}; \qquad \mathbf{Tr}\,\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5 = 0$$
$$\mathbf{Tr}\,\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu = \mathbf{Tr}\,\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu = \mathbf{Tr}(2g_{\nu\alpha} - \gamma_\alpha\gamma_\nu)\gamma_\beta\gamma_\mu = \ldots = 8g_{\alpha\nu}g_{\beta\mu} - 8g_{\beta\nu}g_{\alpha\mu} + 8g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - \mathbf{Tr}\,\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu$$

$\Rightarrow \mathbf{Tr}\,\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu = 4(+g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + g_{\beta\mu}g_{\nu\alpha} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}); \qquad \mathbf{Tr}\,\gamma_{\mu_1}\ldots\gamma_{\mu_{2n}}$ - аналогично

$$\mathbf{Tr}\,\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_5 = -i4\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$$

- скаляр: $\mathbf{1}$
- вектор: γ_μ
- тензор (6 шт.): $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$
- псевдовектор: $\gamma_\mu\gamma_5$
- псевдоскаляр: γ_5

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}; \qquad \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^5 = g^{\mu\nu}\gamma^5 - \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\gamma_\alpha\gamma_\beta$$
$$\gamma^\mu\gamma_\mu = 4; \qquad \gamma^\mu\gamma^\nu R\gamma_\mu + \gamma^\nu\gamma^\mu R\gamma_\mu = 2R\gamma^\mu; \qquad \gamma^\mu \not{A} R\gamma_\mu + \not{A}\gamma^\mu R\gamma_\mu = 2R\not{A};$$
$$\gamma^\mu\not{A}\gamma_\mu = -2\not{A}; \qquad \gamma^\mu\not{A}\not{B}\gamma_\mu = +4A^\mu B_\mu; \qquad \gamma^\mu\not{A}\not{B}\not{C}\gamma_\mu = -2\not{C}\not{B}\not{A}$$
$$(\gamma^\alpha)^+ = \gamma^0\gamma^\alpha\gamma^0; \qquad (\gamma^0\gamma^\alpha)^+ = \gamma^0\gamma^\alpha; \qquad (\gamma^\alpha\gamma^0)^+ = \gamma^\alpha\gamma^0$$
$$\gamma^0\gamma^2\gamma^\mu\gamma^0\gamma^2 = -(\gamma^\mu)^T; \qquad \mathbf{Tr}(\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\ldots) = \mathbf{Tr}(\ldots\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\alpha)$$

2.3.2. Преобразования Лоренца

$$\psi \to L\psi; \qquad \bar{\psi} = \psi^+\gamma^0 \to \psi^+L^+\gamma^0 = \psi^+\gamma^0L^{-1} = \bar{\psi}L^{-1}; \qquad L^{-1}\gamma^\mu L = \Lambda^\mu_\nu\gamma^\nu;$$
$$L = exp(-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}); \qquad S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

где $\omega_{\mu\nu}$ - антисимметричный тензор, задающий бесконечно малые(?) углы.

Например при $\omega_{12} = -\omega_{21} = \theta$ будет поворот, а при $\omega_{01} = -\omega_{10} = \eta$ будет буст.

Пескин в разделе 3.1. и 3.2 подробнее рассказывает как с этим связаны алгебры Ли.

2.3.3. Классическое

$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\psi} = \bar{\psi}i\gamma^\mu; \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\bar{\psi}} = 0; \qquad \pi = \bar{\psi}i\gamma^0 = i\psi^+$

$\mathcal{H} = \bar{\psi}(i\vec{\gamma}\vec{\nabla} + m)\psi$, но у Пескина в 3.5 $\mathcal{H} = \bar{\psi}(-i\vec{\gamma}\vec{\nabla} + m)\psi$

$\vec{\mathcal{P}} = i\psi^+\vec{\nabla}\psi$, но у Пескина в 3.5 $\vec{\mathcal{P}} = -i\psi^+\vec{\nabla}\psi$

$\psi \to e^{i\alpha}\psi \ \Rightarrow\ j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi; \qquad j^0 = \psi^+\psi; \qquad \vec{j} = \psi^+\vec{\alpha}\psi$

$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\partial\!\!\!/\psi : \qquad \psi \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi \ \Rightarrow\ j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi;$

2.3.4. Уравнение Дирака

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0$$
$$\psi(x) = e^{-ipx}u(p); \qquad p^2 = m^2$$

дальше ищем собственные векторы алгебраического уравнения

$(p\!\!\!/ - m)u = 0, \qquad E_p > 0$

$u_r(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \sqrt{E_p + m} \\ r\sqrt{E_p - m} \end{pmatrix} \otimes \chi_r$ - в представлении Дирака

$u_r^+u_s = 2E_p\delta_{rs}; \qquad \bar{u}_r u_s = 2m\delta_{rs}; \qquad \sum_r u_r \otimes \bar{u}_r = p\!\!\!/ + m$

$(p\!\!\!/ + m)v = 0, \qquad E_p < 0 \ \Rightarrow\ p \to -p$

$v_r(\vec{p}) = \begin{pmatrix} r\sqrt{E_p - m} \\ \sqrt{E_p + m} \end{pmatrix} \otimes \eta_r$ - в представлении Дирака

$v_r^+v_s = 2E_p\delta_{rs}; \qquad \bar{v}_r v_s = -2m\delta_{rs}; \qquad \sum_r v_r \otimes \bar{v}_r = p\!\!\!/ - m$

$\frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}\chi_r = r\chi_r; \qquad \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{|\vec{p}|}\eta_r = r\eta_r; \qquad \sum_s \chi_s \otimes \chi_s^+ = 1$

r=+1 - вдоль импульса, r=-1 - против - спиральность

но можно(?) выбрать и другой базис поляризаций, если решать в представлении Вейля

итого:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_r(a_r(\vec{p})u_r(\vec{p})e^{-ipx} + b_r^*(\vec{p})v_r(\vec{p})e^{+ipx})$$

2.3.5. функция Грина

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi_0(x) = 0$$
$$(i\partial\!\!\!/ - m)G(x) = +i\delta^4(x)$$
$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) = j(x)$$
$$\psi(x) = \psi_0(x) - i\int d^4yG(x-y)j(y)$$
$$G(p) = \frac{i}{p\!\!\!/ - 1} = \frac{i(p\!\!\!/ + m)}{p^2 - m^2}$$
$$G(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i(p\!\!\!/ + m)}{p^2 - m^2}e^{-ipx} = (i\partial\!\!\!/ + m)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2 - m^2}e^{-ipx}$$
$$G_R(x) = \begin{cases} 0, & x_0 < 0 \\ (i\partial\!\!\!/ - m)(D(x) - D(-x)), & x_0 > 0 \end{cases}$$
$$G_A(x) = \begin{cases} (i\partial\!\!\!/ - m)(D(x) - D(-x)), & x_0 < 0 \\ 0, & x_0 > 0 \end{cases}$$
$$S_F(x) = G_F(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i(p\!\!\!/ + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}e^{-ipx} = (i\partial\!\!\!/ - m)D_F(x) = (i\partial\!\!\!/ - m)\begin{cases} D(x), & x_0 < 0 \\ D(-x), & x_0 > 0 \end{cases}$$
$$S_F(p) = \frac{i(p\!\!\!/ + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}; \qquad S_F(x) = S_F(-x)$$

2.3.6. Квантуем

под произведением операторов ψ понимаем тензорное произведение

$\{\psi(\vec{x}), \pi(\vec{y})\} = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \ \Rightarrow\ \{\psi(\vec{x}), \psi^+(\vec{y})\} = \delta^3(\vec{x} - \vec{y})$

$\{a^r_{\vec{p}}, a^{s+}_{\vec{q}}\} = \{b^r_{\vec{p}}, b^{s+}_{\vec{q}}\} = (2\pi)^3\delta^3(\vec{p}-\vec{q})\delta^{rs}$

остальные АНТИкоммутаторы =0

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_r (a^r_{\vec{p}} u^r(\vec{p}) e^{-ipx} + b^{r+}_{\vec{p}} v^r(\vec{p}) e^{+ipx})$$

$$\bar\psi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_r (b^r_{\vec{p}} \bar v^r(\vec{p}) e^{-ipx} + a^{r+}_{\vec{p}} \bar u^r(\vec{p}) e^{+ipx})$$

$$H = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} E_p \sum_s (a^{s+}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} + b^{s+}_{\vec{p}} b^s_{\vec{p}})$$

$$\vec{P} = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} \sum_s (a^{s+}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} + b^{s+}_{\vec{p}} b^s_{\vec{p}})$$

$$Q = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \sum_s (a^{s+}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} - b^{s+}_{\vec{p}} b^s_{\vec{p}})$$

2.3.6.1. Состояния

$$|\vec{p}, s\rangle = \sqrt{2E_p} a^{s+}_{\vec{p}} |0\rangle; \quad \langle\vec{p}, r|\vec{q}, s\rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}-\vec{q})\delta^{rs}$$

2.3.6.2. Пропагатор

$$\langle 0|\psi(x)\bar\psi(y)|0\rangle = \langle 0|\bar\psi(x)\psi(y)|0\rangle = (i\partial\!\!\!/_x + m)D(x-y)$$
$$\langle 0|\bar\psi(y)\psi(x)|0\rangle = \langle 0|\psi(y)\bar\psi(x)|0\rangle = -(i\partial\!\!\!/_x + m)D(y-x)$$
$$\{\psi(x)\bar\psi(y)\} = \langle 0|\{\psi(x)\bar\psi(y)\}|0\rangle = (i\partial\!\!\!/_x + m)\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ip(y-x)} - e^{+ip(y-x)}}{2E_p} =$$
$$= (i\partial\!\!\!/_x + m)\begin{cases} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-i\vec{p}\vec{r}} - e^{+i\vec{p}\vec{r}}}{2E_p} = 0, & x^0 = y^0 \\ \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{e^{-iE_pt} - e^{+iE_pt}}{2E_p}, & \vec{x} = \vec{y} \end{cases}$$
$$\langle 0|T\{\psi(x)\bar\psi(y)\}|0\rangle = S_F(x-y) = (i\partial\!\!\!/_x + m)D_F(x-y) = \begin{cases} \langle 0|\psi(x)\bar\psi(y)|0\rangle, & x^0 > y^0 \\ -\langle 0|\bar\psi(y)\psi(x)|0\rangle, & y^0 > x^0 \end{cases}$$

2.3.6.3. теорема Вика

T упорядочение: слева новые, справа старые, при перестановке знак меняется.

N упорядочение: слева a^+, b^+, справа a, b, при перестановке знак меняется.

$$\psi(x) = \psi^a(x) + \psi^{b+}(x) = \psi^{(+)}(x) + \psi^{(-)}(x); \quad \bar\psi(x) = \psi^{a+}(x) + \psi^b(x) = \bar\psi^{(-)}(x) + \bar\psi^{(+)}(x)$$

$$\psi^a(x) = \psi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_r a_{\vec{p}} u^r(\vec{p}) e^{-ipx}; \quad \psi^{a+}(x) = \bar\psi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_r a^{r+}_{\vec{p}} \bar u^r(\vec{p}) e^{+ipx}$$
$$\psi^b(x) = \bar\psi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_r b^r_{\vec{p}} \bar v^r(\vec{p}) e^{-ipx}; \quad \psi^{b+}(x) = \psi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_r b^{r+}_{\vec{p}} v^r(\vec{p}) e^{+ipx}$$

свертка $\psi(x)\bar\psi(y) := \begin{cases} \{\psi^a(x), \psi^{a+}(y)\} = \langle 0|\psi(x)\bar\psi(y)|0\rangle, & x^0 > y^0 \\ -\{\psi^b(y), \psi^{b+}(x)\} = -\langle 0|\psi(y)\bar\psi(x)|0\rangle, & y^0 > x^0 \end{cases}$

свертка $\bar\psi(x)\psi(y) := \begin{cases} \{\psi^b(x), \psi^{b+}(y)\} = \langle 0|\bar\psi(x)\psi(y)|0\rangle, & x^0 > y^0 \\ -\{\psi^a(y), \psi^{a+}(x)\} = \langle 0|\bar\psi(y)\psi(x)|0\rangle, & y^0 > x^0 \end{cases}$

свёрток $\psi\psi$ или $\bar\psi\bar\psi$ не бывает

свертка $\bar\psi(x)\psi(y) = \psi(x)\bar\psi(y) = S_F(x-y) = S_F(y-x)$

теорема: $T\{\psi_1 \dots \psi_n\} = N\{\sum_{all\ convs} \psi_1 \dots \psi_n\}$

причем свертка 13 $N(\psi_1\psi_2\bar\psi_3\bar\psi_4) = -S_F(x_1-x_3)N(\psi_2\bar\psi_4)$

2.4. Электромагнитное

2.5. Векторное массивное

4. Взаимодействия и правила Фейнмана

4.1. К-Г $-\frac{\lambda}{4!}\phi^4$

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{1}{2}m^2\phi^2-\frac{\lambda}{4!}\phi^4$$
$$(\partial^2+m^2)\phi=\frac{\lambda}{3!}\phi^3$$
$$H=H_0+V=H_0+\frac{\lambda}{4!}\int d^3\vec{x}\phi(\vec{x})\phi(\vec{x})\phi(\vec{x})\phi(\vec{x})$$

Корреляционная функция (Пескин 4.4)

$$\langle 0|N\{\sum_{all\ convs}\phi(x)\phi(y)exp(-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z))\}|0\rangle=$$

	координатное	**импульсное**
вершины	$(-i\lambda)\int d^4x$	$(-i\lambda)$ + ЗСИ
внешние точки	1	e^{-ipx}
свертки	$D_F(x-y)$	$D_F(p)$
		$\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}$ по каждому импульсу

и разделить на порядок симметрии диаграммы

все вакуумные поддиаграммы из всех вкладов можно вынести как один фазовый множитель

Матричный элемент (Пескин 4.6)

$$\langle\vec{p}_1\ldots\vec{p}_n|iT|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle=i\mathcal{M}(2\pi)^4\delta^4(p_1+\ldots+p_n-p_A-p_B)=$$
$=A_0\langle\vec{p}_1\ldots\vec{p}_n|N\{\sum_{all\ convs}exp(-i\frac{\lambda}{4!}\int d^4z\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z))\}|\vec{p}_A\vec{p}_B\rangle_0$ - связный, ампутированный

A=1, если нет петель

все вакуумные поддиаграммы из всех вкладов можно вынести как один фазовый множитель

ампутированные части - эволюция внешних состояний

несвязные - вклад в 1 в S - когда начальное и конечное состояния тождественны (? - а частично несвязные)

свертка $\phi(x)|\vec{p}\rangle=e^{-ipx}$

свертка $\langle\vec{p}|\phi(x)=e^{+ipx}$

	координатное $\rightarrow\langle.|iT|.\rangle$	**импульсное** $\rightarrow i\mathcal{M}$
вершины	$(-i\lambda)\int d^4x$	$(-i\lambda)$ + ЗСИ
внешние линии	e^{-ipx}	1
свертки	$D_F(x-y)$	$D_F(p)$
		$\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}$ по каждому незафиксированному импульсу

и разделить на порядок симметрии диаграммы

Пескин обещает строго вывести через корреляционную функцию в 7.3. - оптическая теорема

4.2. теория Юкавы: Дирак + К-Г $-g\bar{\psi}\psi\phi$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - g\bar{\psi}\psi\phi$$

т.к. гамильтониан взаимодействия всегда содержит чётное число спиноров, то знак минус в определении T упорядочения для фермионов не нарушает корректность вычислений

4.3. КЭД: Дирак + Максвелл $-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = \bar{\psi}(iD\!\!\!\!/ - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2$$
$$D_\mu := \partial_\mu + ieA_\mu(x)$$

Глобальные калибровочные преобразования, сохраняющие лагранжиан:

$$\psi(x) \to e^{i\alpha(x)}\psi(x); \qquad A_\mu \to A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)$$
$$(i\hat{D} - m)\psi = 0$$
$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi = ej^\nu$$

4.4. скалярная электродинамика: К-Г + $\frac{1}{2}e^2A^2|\phi|^2$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}|D_\mu\phi|^2 - \frac{1}{2}m^2|\phi|^2 = \frac{1}{2}|\partial_\mu\phi|^2 - \frac{1}{2}m^2|\phi|^2 + \frac{1}{2}e^2A^2|\phi|^2$$