Strumenti di calcolo

Derivate

Derivata di frazione

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Integrali

Integrazione per sostituzione

Si ha un integrale $\int_a^b f(x)dx$.

Una maniera per eseguire la sostituzione è comportarsi come segue:

1. Si sceglie il nuovo valore e si pone $u = g(x)$, con u nuova variabile qualsiasi
2. Si calcola $g'(x)$ e si sostituisce dx con $\frac{du}{g'(x)}$
3. Si calcolano $g(a)$ e $g(b)$ e si sostituiscono agli estremi

Il risultato sarà: $\int_{g(a)}^{g(b)} f(g(x))\frac{du}{g'(x)}$.

Un'alternativa è: (riguardare)

1. Porre $x = g(u)$, con u nuova variabile
2. Calcolare $g'(u)$ e sostituire $dx = g'(u)du$
3. Calcolare gli estremi come $g^{-1}(a)$ e $g^{-1}(b)$

Integrazione per parti

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \quad = f(x)G(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx$$

Sommatorie

Riconduzione a sommatorie notevoli

Si abbia una sommatoria che va da α a β e riconducibile ad una sommatoria notevole che va ad a a β di risultato k, facendo variare il valore n e si voglia fare il passaggio

$$\sum_{n=\alpha}^{\beta} f(n) \overset{\sim}{\rightarrow} \sum_{n=a}^{\beta} f(n) \approx k$$

Si potrà ricondurre la sommatoria nella seguente maniera:

$$\sum_{n=\alpha}^{\beta} f(n) = \left(\sum_{n=a}^{\beta} f(n)\right) - \sum_{n=\alpha}^{a-1} f(n) = k - \sum_{n=\alpha}^{a-1} f(n)$$

Algebra

Determinante di una matrice

Formula

Scelta una riga i, vale la formula

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i}\, a_{ij} \det(A_{ij})$$

dove a_{ij} è il valore della matrice alla riga i e alla colonna j e A_{ij} è la matrice senza la riga e colonna selezionate.

Determinante della matrice inversa

Il determinante della matrice inversa è il reciproco della matrice di base; se ad esempio $\det(A) = 3$ si avrà che $\det(A^{-1}) = \frac{1}{3}$.

Inversione di matrici moltiplicate

L'inversa di $A \cdot B$ è $B^{-1} \cdot A^{-1}$. Si evidenzia che anche parlando di più matrici, basta calcolare l'inversa di ciascuna e poi moltiplicarle in ordine inversa.

Inversione di una matrice 2×2

L'inversa di una matrice 2×2 $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è data da $M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Divergenza ($\vec{\nabla} \cdot (X, Y, Z)$)

La divergenza di un vettore (X, Y, Z) è data da $X_x + Y_y + Z_z$, dove il pedice indica derivazione rispetto a quell'asse.

Per la divergenza vale l'identità:

- $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0$ per qualsiasi campo $\vec{E}$

Rotore ($\vec{\nabla} \times (X, Y, Z)$)

Il rotore di un vettore (X, Y, Z) è dato da $\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{1}{\partial x} & \frac{1}{\partial y} & \frac{1}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$, che è uguale a $\begin{pmatrix} Z_y - Y_z \\ X_z - Z_x \\ Y_x - X_y \end{pmatrix}$, dove il pedice indica derivazione rispetto a quell'asse.

Prodotto misto

Per il prodotto misto $a \times b \cdot c$ valgono le proprietà:

- $a \times b \cdot c = c \times a \cdot b$ (sostanzialmente si è fatto uno shift verso destra)

Diseguaglianze

Diseguaglianza integrale

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Complessi

Argomento di un numero complesso

Si abbia un numero complesso $z = a + ib$. Il suo argomento (ossia il θ in $z = \rho e^{i\theta}$) è dato da $\theta = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$.

Decomposizione in frazioni parziali (PFD)

Cover up method+residui

Un metodo applicabile **solo nel caso in cui tutte le varie componenti hanno una potenza di 1**.
Il procedimento è il seguente:

1. Si porta il problema originale $\frac{N(x)}{f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x)}$ ad una forma $\frac{I_1}{f_1(x)} + \frac{I_2}{f_2(x)} + \dots + \frac{I_n}{f_n(x)}$
2. Si setta $i = 1$
3. Si trova un valore x_i di x tale che $f_i(x_i) = 0$ e lo si sostituisce nella forma iniziale del problema, togliendo $f_i(x)$; si avrà $I_i = \dfrac{N(x_i)}{f_1(x_i) f_2(x_i) \dots \color{red}{f_{i-1}(x_i) f_{i+1}(x_i)} \dots f_n(x_i)}$
4. Si aggiunge 1 a i e si ripete dal passaggio 3, a meno che non si abbia che $i > n$

Nota: se si ha invece f_k con potenza $p > 1$, allora si usa il metodo dei residui (ammettendo di poter lavorare su $\mathbb{C}$):

1. La parte di scomposizione che riguarda f_k viene scomposta come $\frac{I_{k1}}{f_k(x)^1} + \cdots + \frac{I_{kj}}{f_k(x)^j} + \cdots + \frac{I_{kp}}{f_k(x)^p}$
2. Si setta $j = 1$
3. Si trova un valore x_i tale che $f_k(x_i) = 0$ e si modifica la forma iniziale del problema togliendo l'originale $f_k(x)^p$ (passando ad una forma che chiamo P').
   Si deriva inoltre la nuova forma del problema per una derivata di ordine $p - j$ andando infine a sostituire x con x_i: $\left.\frac{d^{(p-j)}P'}{dx^{(p-j)}}\right|_{x=x_i}$.
   Si imposta I_{kj} (quindi quello di denominatore di ordine j) al valore appena trovato e si moltiplica il tutto per $\frac{1}{(p-j)!}$:
   $$I_{kj} = \frac{1}{(p-j)!}\left[\left.\frac{d^{(p-j)}P'}{dx^{(p-j)}}\right|_{x=x_i}\right]$$
   .
4. Si aggiunge 1 a j e si ripete dal passaggio 3, a meno che non si abbia che $j > p$

Esempio di residui:
$f(x) = \frac{1}{x^2(x+6)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+6}$

C si ricava in maniera facile usando il cover-up method: $x + 6 = 0 \to x = -6$, $\left.\frac{1}{x^2}\right|_{x=-6} = \frac{1}{36}$

A, B vanno ricavati usando i residui. Per entrambi vale $x^2, x = 0 \to x = 0$.
A si ricava con $\frac{1}{0!} \cdot \left.\frac{1}{x+6}\right|_{x=0} = \frac{1}{6}$
B si ricava con $\frac{1}{1!} \cdot \left.\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+6}\right)\right|_{x=0} = -\left.\frac{1}{(x+6)^2}\right|_{x=0} = -\frac{1}{36}$

Quindi: $f(x) = \frac{1}{6x^2} - \frac{1}{36x} + \frac{1}{36(x+6)}$.

Notabilia

Funzioni notevoli

Arcotangente

L'arcotangente tende a:

x	y
$x \to -\infty$	$-\frac{\pi}{2}$
$x \to +\infty$	$\frac{\pi}{2}$

Funzioni iperboliche

Inverse

Arcsinh

$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

Formule trigonometriche

Tipiche

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$

$1 + \cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2}$

$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$
$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha + \beta)$

Da segnali e sistemi

Per $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(-kt) = (-1)^k$

Approssimazioni notevoli

$\sin(x) \overset{x=0}{\approx} x$

Sommatorie notevoli

- $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$
  - Immagino valga anche $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i = a^{n+1} - 1$ e credo sia solo per $a : |a| > 1$.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ se $|a| < 1$
  - $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} na^{n-1} = \frac{1}{(1-a)^2}$ se $|a| < 1$
  - $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a^{n-2} = \frac{2}{(1-a)^3}$ se $|a| < 1$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

- $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Integrali notevoli

Integrale di Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Integrale di frazione di radice

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2+d^2}}\, dx \overset{\alpha}{=} \int_{a/d}^{b/d} \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} = [\operatorname{arcsinh}(u)]_{a/d}^{b/d}$$

α: $u = \frac{x}{d}$

Geometria

Cerchi

Area di una sfera: πr^2

Corona di cerchio

Si voglia prendere un pezzo di una corona di cerchio di ampiezza θ e di raggi delimitatori r_1, r_2; si avrà:
Area: $\frac{\theta}{2}(r_2^2 - r_1^2)$

Sfere

Superficie di una sfera: $4\pi r^2$
Volume di una sfera: $\frac{4\pi r^3}{3}$

Sviluppi di Taylor con $x \to 0$

Funzione	Sviluppo
e^x	$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

Glossario

C

Coerenti

Onde la cui differenza di fase è costante nel tempo (`452 fisica2`) per qualsiasi punto P nello spazio (`529 fisica2`)

Correnti amperiane

Sono correnti formate a causa della presenza di un campo magnetico attraverso un materiale

D

Discreto

A valori non continui. Noto che questo non significa con valori $\in \mathbb{N}$!!
Alcuni esempi di sequenze discrete sono: $[1,2,3,4]$ ma anche, per un certo n, $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots]$

F

Fronte d'onda

E' per una certa onda un luogo dello spazio nel quale le propagazioni di quell'onda nello spazio hanno tutte la stessa fase ϕ.

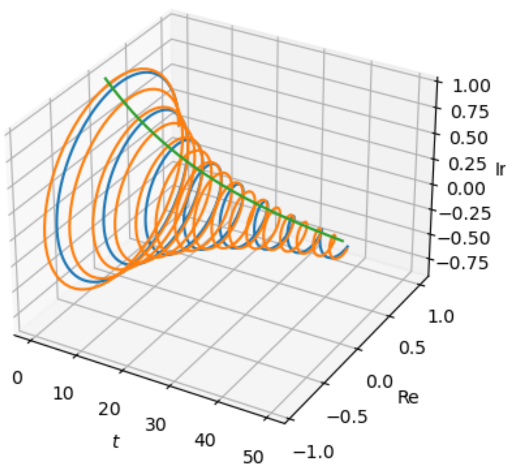
I

Identicamente null*

Di coefficienti: due coefficienti sono identicamente nulli quando sono entrambi 0 allo stesso tempo. Ad esempio, a, b NON sono identicamente nulli se $a = 0, b \neq 0$.

Inviluppo

Curva tangente ad una famiglia di curve in ogni punto; ad esempio nell'immagine si hanno $e^{(\sigma+j\omega)t}$ per diversi ω; la parabola in verde è un inviluppo della famiglia di curve $e^{(\sigma+j\omega)t}$ con σ fissato!



O

Omogeneo

Di un campo: ha una densità costante nel mezzo; da fisica 2 ci si aggiunge il fatto che anche la permeabilità magnetica relativa è costante.

S

Sincrone

Due onde di differenza di fase nulla, tali che $\Delta\phi = 0$

Solenoidale

Un campo tale che il suo flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa contenuta per intero nel campo è nullo. Una condizione necessaria e sufficiente perché un campo $\vec{E}$ sia solenoidale è che $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$, grazie al teorema della divergenza.
Per un campo solenoidale, il flusso dipende non dalla superficie scelta ma dal contorno di questa.
Si ha inoltre che il flusso attraverso una superficie chiusa di un campo solenoidale sarà sempre 0.

Stazionario

Sinonimo di invariante nel tempo; una funzione f stazionaria è tale che $\frac{df}{dt} = 0$.

Supporto

In ambito di Fourier e segnali: il supporto è un intervallo del dominio nel quale un segnale ha un valore non nullo

Sviluppo in serie arrestato al primo termine

Si abbia una funzione dello spazio in due punti infinitesimalmente vicini, $f(x)$ e $f(x + dx)$; la loro differenza si potrà esprimere come $f(x + dx) - f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} dx$.