数值分析期末试题（试题+解析+知识点归纳总结）

前言

大家好，这是我制作的数值分析期末试卷的复习资料。知识点部分只包含了对应题目所用的知识点，我罗列了题目中用到的知识点对应的大章节和小章节，便于大家复习。如果大家做出的答案和我有出入，可以加我微信18328432956进行交流，备注申明你的班级和姓名

本笔记的功能：如果答案看不懂，可以点击跳转

我把该笔记已经放到了github中，进行了开源，大家可以fork我的项目，欢迎star，进行更新。让我们期末不挂科！

注：全是我手打的，所以难免会有错误，见谅。

知识点

第一章 数值分析的基本概念

1.1 误差和有效数字（）

（1）不同的近似值所取得位数（字长）各不相同，但它们的绝对误差限都不超过末位数的半个单位。

如果2.14是三位有效数字的近似数，则2.14的绝对误差限为0.005

（2）定义1.1：设实数x^*为某一数据的准确值， 它的近似值为x,称$e(x)=x-x^*$为x的绝对误差，简称误差。

（3）定义1.3：设x可表示为规格化浮点数形式

$$x=\pm 0.a_1a_2...a_n\times 10^m,$$

其中，$a_1,a_2,...,a_n$都是0~9中的任一整数，且$a_1\neq 0.$若x的绝对误差满足：

$$|x-x^*|\leq \frac{1}{2}\times 10^{m-n},$$

则称近似数x具有n位有效数字

1.2 数值运算的误差估计

（1）设两个近似数x_1与x_2的误差限分别为$\epsilon(x_1)$和$\epsilon(x_2)$，则对这两个数的加，减，乘，除运算，可以利用多元函数的误差估计，得：

$$\begin{cases}\epsilon(x_1\pm x_2)=\epsilon(x_1)+\epsilon(x_2),\\ \epsilon(x_1\cdot x_2)\approx |x_1|\epsilon(x_2)+|x_2|\epsilon(x_1),\\ \epsilon(\frac{x_1}{x_2})\approx \frac{|x_1|\epsilon(x_2)+|x_2|\epsilon(x_1)}{|x_2|^2}.\end{cases}$$

第二章 非线性方程求根方法

2.3 牛顿迭代法

（1）$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

第三章 解线性方程组的直接法

3.4向量和矩阵范数

（1）设$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \epsilon R^n$,则

$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, ||x||_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}, ||x||_\infty = \underset{1 \le i \le n}{max} |x_i|$

（2）矩阵范数：

$$||A||_1 = \underset{1 \le j \le n}{max} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|，\text{算每一列元素绝对值相加最大值}$$

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda(A^T A)}, \text{其中}\lambda(A^T A)\text{为矩阵}A^T A\text{的最大特征值}$$

$$||A||_\infty = \underset{1 \le i \le n}{max} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|, \text{算每一行绝对值元素相加谁最大}$$

3.5 方程组直接方法的误差估计

（1）数$Cond(A) = ||A^{-1}|| \cdot ||A||$称为线性方程组Ax=b的条件数

矩阵的条件数与范数有关，最常用的条件数有

$Cond(A)_\infty = ||A^{-1}||_\infty \cdot ||A||_\infty,$

$Cond(A)_2 = ||A^{-1}||_2 \cdot ||A||_2 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}},$

其中，λ_1和λ_2分别为矩阵$A^T A$的最大特征值和最小特征值，所以$Cond(A)_2$又称为谱条件数

第四章 线性方程组的迭代解法

4.1 雅可比迭代和高斯—赛德尔迭代

（1）雅可比迭代格式不需要更新，高斯—赛德尔迭代格式需要更新

第五章 数据插值方法

5.1 拉格朗日插值

（1）拉格朗日插值多项式

表达式:$l_j(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1}\ldots(x_j-x_n))}$

通俗一点就是说，分子x要减去所有的点，但是不减去x_j这个点；分母要减去除它外所有的点

5.2 均差与牛顿插值

（1）一阶均差：$f[x_i,x_j]=\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}$

5.5 样条插值

（1）面对自然样条插值得处理，用二阶导数构造三次样条方法

首先我们直接来看S(x)怎么求：

$$6h_iS_i(x)=M_{i-1}(x_i-x)^3+M_i(x-x_{i-1})^3+(y_{i-1}-\frac{M_{i-1}}{6}h_i^2)(x_i-x)+(y_i-\frac{M_i}{6}h_i^2)(x-x_{i-1})$$

注意，这里得i是从1开始算的，并非从0开始

而$h_i=x_i-x_{i-1}$

$$h_iM_{i-1}+2(h_i+h_i+1)M_i+h_{i+1}M_{i+1}=6(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i})$$

根据上面两个式子就可以解出M，然后回代即可。

第六章 数据拟合与函数逼近

6.1 曲线拟合的最小二乘法

根据老师PPT,解法一般为$G^TGX=GF$，题目的拟合函数需要注意

例1. 已知实验数据如下，求线性拟合函数。

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	4.5	6	8	9

解: 设拟合曲线方程为 $\varphi(x)=a+bx$

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\\1 & 3\\1 & 4\\1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4.5\\6\\8\\9\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$GX=F\rightarrow G^TGX=G^TF$$

$$5a+15b=31.5$$

$$15a+55b=108$$

$$a=2.25,\quad b=1.35$$

第七章 数值积分与数值微分

7.2 复合求积公式 及算法

（1）复合梯形公式：

$$T_n=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_j)]$$

（2）复合辛普森公式

$$S_{2n}=\frac{h}{3}[f(a)+f(b)+4\sum_{j=1}^{n}f(x_{2j-1})+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_{2j})]$$

第八章 常微分方程的数值解法

8.1 简单的数值方法

（1）改进的欧拉方法

$$\begin{cases}\text{预测}\overline{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)\\ \text{校正}y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\overline{y}_{n+1})]\end{cases}$$

注意，这里的$f(x,y)=\frac{dy}{dx}$，比如该题中的$f(x,y)=\frac{x-y}{2}$,这里比较繁琐的就是需要不停的迭代求解，仔细一点

试题

1.已知a=2.61, b=9.30, c=240.19都是三位有效数字得近似数，令x=ac-bc，则x具有位有效数字。

2.已知向量x=(2, -9, -3, 1, 15), 则$||X||_1$=?, $A=\begin{bmatrix}2&3\\5&8\end{bmatrix}$, Cond$(\sqrt{2}A)_\infty$=?

3.已知$\begin{cases}x-5y-z=-8\\4x+y-z=13\\2x-y-6z=-2\end{cases}$,用高斯-赛德尔迭代法以适当的初值开始迭代，则迭代公式为

$$\begin{cases}x^{k+1}=\\y^{k+1}=\\z^{k+1}=\end{cases}$$

4.已知f(-2)=56, f(-1)=-16, 则f[-2, -1]=

5.用牛顿迭代法计算$\sqrt[3]{7}$的近似值。（提示：$x_0=2,\text{精度为}0.0001$，即为两次相邻迭代之差的绝对值小于0.0001）

6.对矩阵A作Doolittle分解$\begin{bmatrix}2&4&4&2\\3&3&12&6\\2&4&-1&2\\4&2&1&1\end{bmatrix}$

7.已知y = f(x)满足如下得数据点:

x	-1	1	2	5
f(x)	-7	7	-4	35

求满足此条件得Lagrange插值多项式及三次自然样条插值多项式。

解:

三次自然样条插值多项式：

由于是自然样条插值，故$M_0=M_3=0$

$h_1=2,h_2=1,h_3=3$

$h_1M_0+2(h_1+h_2)M_1+h_2M_2=6(\frac{y_2-y_1}{h_2}-\frac{y_1-y_0}{h_1})=-108=6M_1+M_2$

$h_2M_1+2(h_2+h_3)M_2+h_3M_3=6(\frac{y_3-y_2}{h_3}-\frac{y_2-y_1}{h_2})=144=M_1+8M_2$

解得$M_1=\frac{-1008}{47},M_2=\frac{972}{47}$

又因为：

$6h_iS_i(x)=M_{i-1}(x_i-x)^3+M_i(x-x_{i-1})^3+(y_{i-1}-\dfrac{M_{i-1}}{6}h_i^2)(x_i-x)+(y_i-\dfrac{M_i}{6}h_i^2)(x-x_{i-1})$

故得到

$$S_1(x)=\frac{-84}{47}(x+1)^3-\frac{7}{12}(1-x)+\frac{1001}{564}(x+1),x\epsilon[-1,1)$$
$$S_2(x)=\frac{-168}{47}(2-x)^3+\frac{162}{47}(x-1)^3+\frac{175}{6}(2-x)-\frac{175}{141}(x-1),x\epsilon[1,2)$$
$$S_3(x)=\frac{54}{47}(5-x)^3-\frac{823}{423}(5-x)+\frac{35}{18}(x-2),x\epsilon[2,5]$$

8.根据下表给出的数据点，求其最小二乘拟合曲线（提示：双曲线$\frac{1}{y}=a+b\frac{1}{x}$拟合）

x	2	3	4	5	7	8	10
y	106.42	108.26	109.58	109.50	110.00	109.93	110.49

解：

$$G=\begin{bmatrix}1&0.5\\1&0.33\\1&0.25\\1&0.2\\1&0.14\\1&0.125\\1&0.1\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}0.009397\\0.009237\\0.009126\\0.009132\\0.009091\\0.009097\\0.009051\end{bmatrix}$$
$$G^TF=\begin{bmatrix}0.064131\\0.015170\end{bmatrix},G^TG=\begin{bmatrix}7&1.645\\1.645&0.506625\end{bmatrix}$$
$$b=0.0007,a=0.009$$
$$\frac{1}{y}=0.009+\frac{0.0007}{x}$$

9.对函数$f(x)=2+sin(2\sqrt{x})$在区间[1, 5]上采9个样点

x	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5
f(x)	2.9092	2.6382	2.3081	1.9193	1.6831	1.4353	1.2432	1.1083	1.0287

分别用复合梯形公式和复合辛普森公式计算积分$\int_1^5 2+sin(2\sqrt{x})dx$

10.用欧拉改进法求解初值问题

$$\begin{cases}\frac{dy}{dt}=\frac{t-y}{2}\\ y(0)=1\end{cases}$$

在区间[0, 1]上，步长h=0.1得数值解

答案:

1.点击查看知识点

解:

由题可知$\varepsilon(a)=0.005,\varepsilon(b)=0.005,\varepsilon(c)=0.5$

$\varepsilon(x)\approx|a|\varepsilon(c)+|c|\varepsilon(a)+|b|\varepsilon(c)+|c|\varepsilon(b)$=8.3569

而x=-1,606.8711=-0.16068711*10^4

设x具有n位有效数字，故|e(x)|≤8.3569≤ $\frac{1}{2}\times10^{4-n}$

故当n取2时满足题意，则X具有2位有效数字

2.点击查看知识点

解:

$||X||_1$=2+9+3+1+15=30

Cond($\sqrt{2}A)_\infty$=$||\sqrt{2}A^{-1}||_\infty\cdot||\sqrt{2}A||_\infty$

$||\sqrt{2}A||_\infty=13\sqrt{2}$

$$A^{-1}=\begin{Bmatrix}8&-3\\-5&2\end{Bmatrix}$$

则$||\sqrt{2}A^{-1}||_\infty=11\sqrt{2}$

故Cond($\sqrt{2}A)_\infty$=286

3.点击查看知识点

$$\begin{cases}x=5y+z-8\\ y=-4x+z+13\\ z=\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}y+\frac{1}{3}\end{cases}$$

由此建立高斯—赛德尔迭代格式

$$\begin{cases} x^{k+1} = 5y^k + z^k - 8 \\ y^{k+1} = -4x^{k+1} + z^k + 13 \\ z^{k+1} = \frac{1}{3}x^{k+1} - \frac{1}{6}y^{k+1} + \frac{1}{3} \end{cases}$$

4.点击查看知识点

解：$f[-2,-1] = \frac{f(-1)-f(-2)}{-1-(-2)} = -72$

5.点击查看知识点

解：设$x^3 = 7$,则x=$\sqrt[3]{7}$

令f(x)=$x^3 - 7$,则$f'(x)$=$3x^2$,$x - \frac{f(x)}{f'(x)}$=$\frac{2x^3+7}{3x^2}$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$=1.9167

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$=1.9129

$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$=1.9129

故近似值为1.9129

6.书上p58页有详细流程，很简单，自己动手模拟一遍就会了。答案在这里给出

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{3}{2} & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ 2 & 2 & \frac{19}{5} & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 2 \\ & -3 & 6 & 3 \\ & & -5 & 0 \\ & & & -9 \end{bmatrix}$$

7.解：点击查看知识点

拉格朗日插值多项式：

$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(-1-1)(-1-2)(-1-5)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{-36}$

同理依次可得$l_1(x) = \frac{(x+1)(x-2)(x-5)}{8}, l_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-5)}{-9}, l_3(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{72}$

$L_3(X) = -7l_0(x) + 7l_1(x) - 4l_2(x) + 35l_3(x) = 2x^3 - 10x^2 + 5x + 10$

牛顿插值多项式：（答案和拉格朗日插值多项式答案一样）

由题知：f(-1) = -7, f(1) = 7, f(2) = -4, f(5) = 35

有f[-1, 1] = 7, f[1, 2] = -11, f[2, 5] = 13, f[-1, 1, 2] = -6, f[1, 2, 5] = 6, f[-1, 1, 2, 5] = 2

故牛顿插值多项式为N_3(x) = -7+7(x+1)-6(x+1)(x-1)+2(x+1)(x-1)(x-2)

三次自然样条插值多项式：

由于是自然样条插值，故$M_0 = M_3 = 0$

$h_1 = 2, h_2 = 1, h_3 = 3$

$h_1M_0 + 2(h_1 + h_2)M_1 + h_2M_2 = 6(\frac{y_2-y_1}{h_2} - \frac{y_1-y_0}{h_1}) = -108 = 6M_1 + M_2$

$h_2M_1+2(h_2+h_3)M_2+h_3M_3=6(\frac{y_3-y_2}{h_3}-\frac{y_2-y_1}{h_2})=144=M_1+8M_2$

解得$M_1=\frac{-1008}{47},M_2=\frac{972}{47}$

又因为:

$6h_iS_i(x)=M_{i-1}(x_i-x)^3+M_i(x-x_{i-1})^3+(y_{i-1}-\dfrac{M_{i-1}}{6}h_i^2)(x_i-x)+(y_i-\dfrac{M_i}{6}h_i^2)(x-x_{i-1})$

故得到

$$S_1(x)=\frac{-84}{47}(x+1)^3-\frac{7}{12}(1-x)+\frac{1001}{564}(x+1),x\epsilon[-1,1)$$
$$S_2(x)=\frac{-168}{47}(2-x)^3+\frac{162}{47}(x-1)^3+\frac{175}{6}(2-x)-\frac{175}{141}(x-1),x\epsilon[1,2)$$
$$S_3(x)=\frac{54}{47}(5-x)^3-\frac{823}{423}(5-x)+\frac{35}{18}(x-2),x\epsilon[2,5]$$

8.注意：这道题比较难算，掌握解题步骤即可，[点击查看知识点]

解:

$$G=\begin{bmatrix}1 & 0.5\\1 & 0.33\\1 & 0.25\\1 & 0.2\\1 & 0.14\\1 & 0.125\\1 & 0.1\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}0.009397\\0.009237\\0.009126\\0.009132\\0.009091\\0.009097\\0.009051\end{bmatrix}$$
$$G^TF=\begin{bmatrix}0.064131\\0.015170\end{bmatrix},G^TG=\begin{bmatrix}7 & 1.645\\1.645 & 0.506625\end{bmatrix}$$
$$b=0.0007,a=0.009$$
$$\frac{1}{y}=0.009+\frac{0.0007}{x}$$

9.[点击查看知识点]

解:

$x_0=1,x_1=\frac{3}{2},x_2=2,x_3=\frac{5}{2}$

$x_4=3,x_5=\frac{7}{2},x_6=4,x_7=\frac{9}{2},x_8=5$

$f(x_0)=2.9092,f(x_1)=2.6382,f(x_2)=2.3081,f(x_3)=1.9193,f(x_4)=1.6831,f(x_5)=1.4353$

$f(x_6)=1.2432,f(x_7)=1.1083,f(x_8)=1.0287$

利用复合梯形公式可得:

$T_8=\frac{h}{2}[f(1)+f(5)+2\sum_{j=1}^{7}f(x_j)]$

$S_8=\frac{h}{3}[f(1)+f(5)+4\sum_{j=1}^{4}f(x_{2j-1})+2\sum_{j=1}^{3}f(x_2j)]$

$h=\frac{b-a}{n}=\frac{5-1}{8}=\frac{1}{2}$

联立上式，解得

$T_8=7.152225,S_8=7.135183$

10.点击查看知识点

解:

由于改进得欧拉方法得具体计算公式为:

$$\overline{y}_{n+1} = y_n + \frac{1}{20}(t_n - y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{20}[(\frac{t_n - y_n}{2}) + (\frac{t_{n+1} - \overline{y}_{n+1}}{2})]$$

t_n	$\overline{y}_n$(欧拉)	y_n(改进)
0	1	1
0.1	0.95	0.95375
0.2	0.911063	0.914630
0.3	0.878899	0.882292
0.4	0.853177	0.856405
0.5	0.833585	0.836655
0.6	0.819822	0.822743
0.7	0.811619	0.814384
0.8	0.808665	0.811308
0.9	0.810743	0.813257
1.0	0.817594	0.819979