# 中南大学考试试卷

学年 2 学期　时间 100 分钟　　　　年 6 月 日

算法分析与设计　课程 48 学时 3 学分 考试形式：闭 卷

专业年级：计算机、信安、物联、大数据 总分 100 分，占总评成绩 60 %

注：此页不作答题纸，请将答案写在答题纸上

## 一． 填空题：（每空 1 分，共 15 分，意思正确的也给分）

1. 算法的复杂性是（算法效率）的度量，是评价算法优劣的重要依据。
2. $f(n)=6\times2^n+n^2$，f(n)的渐进性态 f(n)= O( $2^n$ )
3. 在忽略常数因子的情况下，O、Ω 和 Θ 三个符号中，（ O ）提供了算法运行时间的一个上界。
4. 回溯法在解空间树上的搜索方式是（深度优先）。
5. 所谓最优子结构性质是指（问题的最优解包含了其子问题的最优解）。
6. 分治算法的时间复杂性常常满足如下形式的递归方程：

$$\begin{cases} f(n)=d & , n=n_0 \\ f(n)=af(n/c)+g(n) & , n>n_0 \end{cases}$$

其中，g(n)表示（将规模为 n 的问题分解为子问题以及组合相应的子问题的解所需的时间）。

7. PQ 式的分支限界法中，对于活结点表中的结点，其下界函数值越小，优先级越（ 高 ）。
8. 选择排序、插入排序和归并排序算法中，（归并排序）算法是分治算法。
9. 解决竞标赛日程表问题的算法策略是（分治法）。
10. P 类问题是指（多项式时间可解问题）。
11. 应用分治法的三步骤：（ 分） （ 治） （合）
12. 假设算法 A 的计算时间为 $T(n)=2^n$ ，现在一慢一快的两台计算机上测试算法 A，为解决规模 n 的问题慢机运行算法 A 花费 t 秒，而另一台快机速度是慢机的 256 倍，则在快机上算法 A 同样运行 t 秒能解决 n1 规模，则 n1 和 n 的关系为：n1=（ n+8 ）；若算法 B 的计算时间为 $T(n)=n^2$ ，其余条件不变，则 n1=（ 16n ）。

## 二． 简答题（每小题 7 分，共 21 分）

**1. 请简述符号 t(n)∈θ(g(n)), t(n)∈Ω(g(n)),t(n)∈O(g(n))的含义。**

答：t(n)∈O(g(n))成立的条件是：对于所有足够大的 n, t(n)的上界由 g(n)的常数倍所确定，也就是说，存在大于 0 的常数 c 和非负的整数 $n_0$，使得：对于所有的 n>=n0 来说, t(n)<=cg(n)；
t(n)∈Ω(g(n))成立的条件是：对于所有足够大的 n, t(n)的下界由 g(n)的常数倍所确定，也就是说，存在大于 0 的常数 c 和非负的整数 $n_0$，使得：对于所有的 $n>=n_0$ 来说, t(n)>=cg(n)；
t(n)∈θ(g(n)) 成立的条件是：对于所有足够大的 n, t(n)的上界和下界都由 g(n)的常数倍所确定，也就是说，存在大于 0 的常数 c1 和 C2 和非负的整数 n0，使得：对于所有的 n>=n0 来说，$c_2g(n)<=t(n)<=c_1g(n)$。

2. 答：相同点：二者都是一种在问题的解空间树上搜索问题解的算法。

不同点：(1).在一般情况下，分支界限法与回溯法的求解目标不同。回溯法的求解目标是找出 T 中满足约束条件的所有解，而分支界限法的求解目标则是找出满足约束条件的一个解，或是在满足约束条件的解中找出使某一目标函数值达到极大或极小的解，即在某种意义下的最优解。

(2)回溯法与分支界限法对解空间的搜索方式不同，回溯法通常采用尝试优先搜索，而分支界限法则采用广度优先搜索。

(3)对节点存储的常用数据结构及节点存储特性也各不相同，除由搜索方式决定的不同的存储结构外，分支界限法通常需要存储一些额外的信息以利于进一步展开搜索。

**3. 简述 NP, NP-难, NP-完全等术语。如何证明给定问题是 NP-难的？**

答：NP：有一个图灵机 M，如果某个字符串 x 在 S 里面，那么存在一个验证字符串 u（注意这个 u 是针对这个 x 的，而且长度必须是 x 长度的多项式关系），M 以 x 和 u 作为输入，能够验证 x 真的是在 S 里面。

NP-hard：如果某个问题 S 是 NP-hard，那么对于任意一个 NP 问题，我们都可以把这个 NP 问题在多项式时间之内转化为 S，并且原问题的答案和转化后 S 的答案是相同的。也就是说只要我们解决了 S，那么就解决了所有的 NP 问题。

NP-complete：一个问题既是 NP-hard，又在 NP 里面；也就是说 1. 解决了这个问题我们就解决了所有 NP 问题 2. 这个问题本身也是个 NP 问题

用来证明一个问题 L2 具有 NP-难度的策略如下:

(1) 挑选一个已知其具有 NP-难度的问题 L1 。

(2) 证明如何从 L1 的任一实例 I (在多项式确定时间内) 获得 L2 的一个实例 I′，使得从 I′ 的解能( 在多项式确定时间内) 确定 L1 实例 I 的解。

(3 ) 从( 2) 得出结论 L1 $\propto$L2 。

(4)由( 1) , ( 3) 及$\propto$的传递性得出结论 L2 是 NP-难度的。

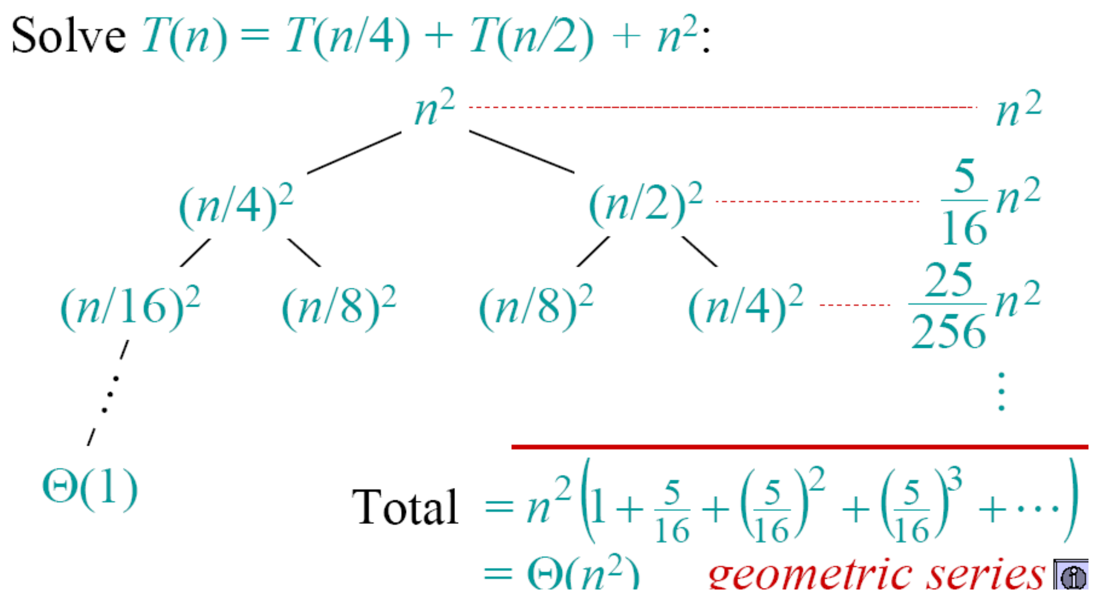
## 三. 解答题（每小题 10 分，共 40 分）

**1. 下面是一个递归算法，其中，过程 pro1 和 pro2 的运算时间分别是 1 和 $n^2$。给出该算法的时间复杂性 T(n)满足的递归方程，并求解该递归方程，估计 T(n)的阶（用 $\Theta$ 表示）。**

```
算法 EX1
输入：正整数 n，n=2^k。
输出：      ex1(n)
过程 ex1(n)
   if  n≤1  then
      pro1(n)
   else
       pro2(n)
       ex1(n/2)
       ex1(n/4)
   end if
   return
end ex1
```

解：该递归算法的时间复杂性 T(n)满足下列递归方程：

$$\begin{cases} T(n) = 1 & ,n = 1 \\ T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2 & n > 1 \end{cases}$$




2. 定义 dilg(v)表示从 s 到 v 的最长路径。

dilg(1)=0; dilg(2)=9;dilg(3)=7; dilg(4)=3; dilg(5)=2; dilg(6)=dilg(2)+1=10;

dilg(7)=max{dilg(2)+2, dilg(3)+7, dilg(5)+11}=14;

dilg(8)= max{dilg(2)+2, dilg(4)+11, dilg(5)+11}=14;

dilg(9)=max{dilg(6)+6, dilg(7)+4}=18;

dilg(10)=max{dilg(6)+5, dilg(7)+3, dilg(8)+5}=19;

dilg(11)=dilg(8)+6=20;

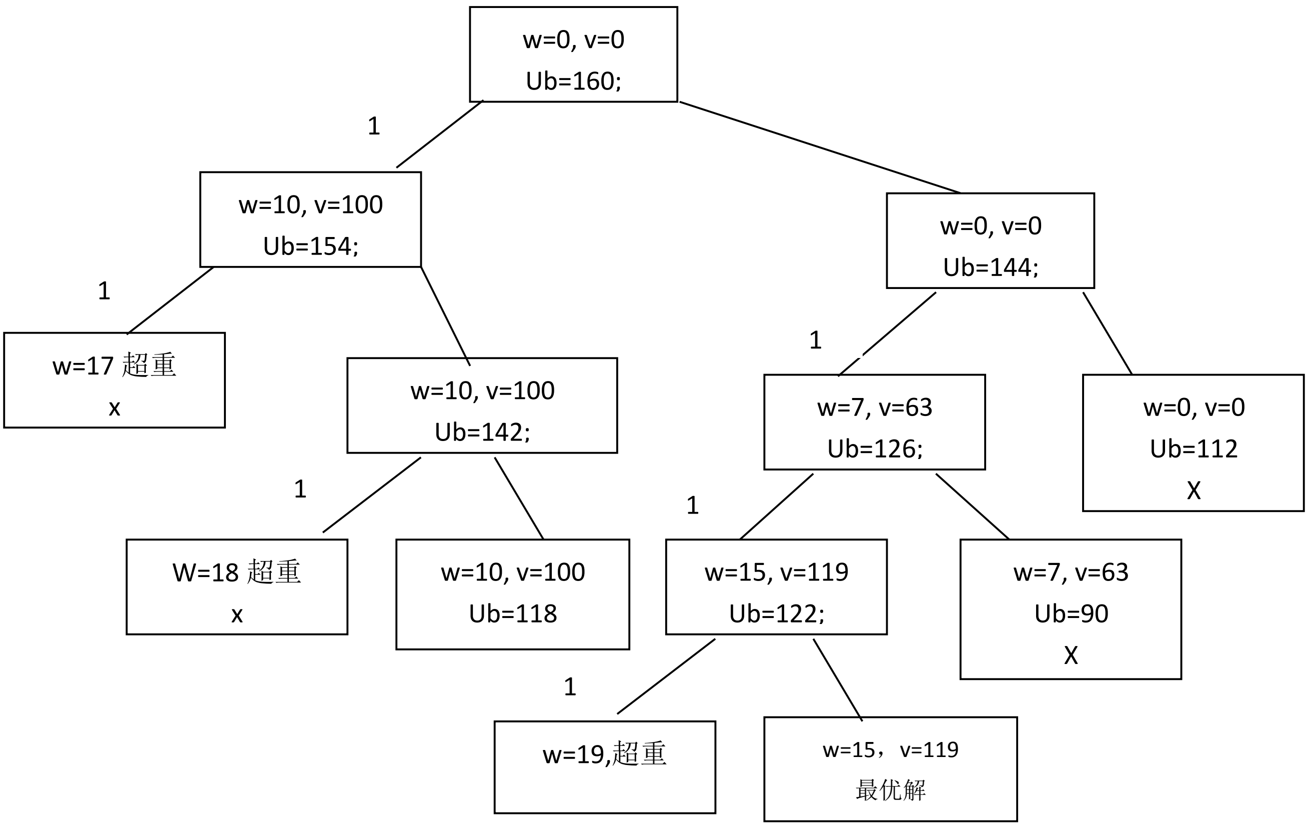
dilg(12)=max{dilg(9)+4, dilg(10)+2, dilg(11)+5}=25.

**3. 假设给你一个 n 个整数的未排序数组 A，其中一些可能是重复的。说明如何在 0（n）的预期时间内“唯一化”数组（即输出另一个数组包含 A 的每个唯一元素恰好一次）。**

解：创建一个 hash 表，对于 A 中每个元素计算其 Hash 值，如果已经存在（O(1)），取下一个元素，否则将元素放入 Hash 表，并插入到另一个数组 A’中。

**4. 已知有 4 个物品： W={10,7,8,4}，V={100,63,56,12}, 背包的容积 M=16，试利用分支限界方法求出最优解。**

**解：**




放入 2，3，不放 1，4（0110）

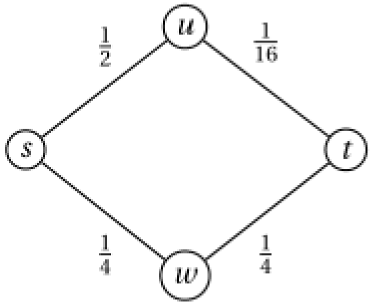
## 四. 算法设计题（每题 12 分，共 24 分）

**1. 给定无向图 G=(V, E)，设计算法判断图 G 中是否有圈，并分析算法的时间复杂度。**

```
Graphcycle(G)
1. for v=1 to n do
       v.colour=white;
2. for v=1 to n do
       if v.colour=white
       then DFS(v)
DFS(v)
   1.    v.color=grey
   2.    for each edge[v,w] do
             if w.color==white    then
                 dad[w]=v
                     DFS(w)
             else
                     if dad[w]≠v
                      stop('cycle')
   3.    color[v]=black
```

时间复杂度为 O(|V|+|E|).

**2.** 用图 **G = (V,E)** 表示 **Internet** 网络，其中 **|V |= n** ，**|E|= m**。对于每条边 **e ∈E,** 都有一个概率 $p_e$ （**0 ≤** $p_e$ **≤ 1**）表示它传输包或者是不出故障的概率，并且概率相互独立，即对于 **e1,...,eℓ** 整个路径上不出故障的概率是$\prod_{i=1}^{l} p_{e_i}$。请设计一个 **O(m logn)** 时间的算法，对于两个不同点 **s ≠t ∈ V**，输出从 **s** 到 **t** 不出故障概率最大的路径。 **(这条路径对于路由很重要)**，假定每个 $p_e$ 是 $\frac{1}{2}$ 的幂，如下图所示。




**(提示：将问题进行转换从而应用大家熟悉的算法，注意 log(*ab*) = log*a* +log*b* ，log(*a*/*b*) = log*a* –log*b*。)**

**解：.** 算法如下:

(a) 构造一个新的带权图 $G' = (V', E')$ ， $V' = V$ ， $E' = E$，*对于每条边* $e \in E'$ 定义 $\ell_e = \log(1/p_e)$.

(b) *在* $G'$ 上运行 Dijkstra 算法，返回最短的 $s - t$ 路径作为图 $G$ *中出故障概率最小的路径。*

**时间性能分析：** 假定所有概率是常量，所以对于每条边 $e \in E'$ 可以在 $O(1)$时间得到 $\ell_e$ 。这也就是说，可以在 $O(m + n)$时间构造图 $G'$，即步骤 a 的时间. 而步骤 b 需要 $O(m \log n)$ 时间, 所以满足题目要求的界。