L1507：值日 ✰

题目描述

小杨和小红是值日生，负责打扫教室。小杨每 m 天值日一次，小红每 n 天值日一次。今天他们两个一起值日，请问至少多少天后，他们会再次同一天值日？

输入输出格式

输入： 第一行，一个正整数 m，表示小杨的值日周期；
第二行，一个正整数 n，表示小红的值日周期。

输出： 一行，一个整数，表示至少多少天后他们会再次同一天值日。

输入示例	输出示例
2 3	6

样例解释

小杨的值日周期 $m = 2$，小红的值日周期 $n = 3$。
从第0天开始，他们各自的值日安排如下表所示：

天数	0	1	2	3	4	5	6
小杨	是	否	是	否	是	否	是
小红	是	否	否	是	否	否	是

从表中可以看出，他们下一次同时值日是第6天，输出结果为6。

背景知识

- **最小公倍数（LCM）**：两个或多个整数公有的倍数中最小的一个。例如，2和3的最小公倍数是6（$\mathrm{LCM}(2,3) = 6$），4和8的最小公倍数是8（$\mathrm{LCM}(4,8) = 8$）。
- **最大公约数（GCD）**：两个或多个整数共有约数中最大的一个。例如，2和3的最大公约数是1（$\mathrm{GCD}(2,3) = 1$），12和18的最大公约数是6（$\mathrm{GCD}(12,18) = 6$）。
- **重要关系**：两个整数的最小公倍数与最大公约数满足：

$$\mathrm{GCD}(m,n) \times \mathrm{LCM}(m,n) = m \times n$$

算法分析

1. 问题转化
   小杨值日的日期是 $0, m, 2m, 3m, \ldots$，小红值日的日期是 $0, n, 2n, 3n, \ldots$。因此，小杨和小红再次同一天值日的天数必须既是 m 的倍数，又是 n 的倍数，从而得出最早的一天就是m 和 n 的最小公倍数（$\mathrm{LCM}(m,n)$）。

2. **计算LCM(m,n)**

（1） 使用 __gcd() 计算 GCD(m,n)

（2） 通过最小公倍数和最大公约数关系（$\text{GCD}\times\text{LCM}=m\times n$）计算 LCM$(m,n)$

```
int GCD = __gcd(n, m);
int LCM = m * n / GCD;
```

3. **欧几里得算法计算GCD(m,n)**

证明：GCD$(m,n)=$ **GCD**$(n,m\%n)$

（1） 基本情况

假设 $m>n$，如果 m 能被 n 整除，那么 $\text{GCD}(m,n)=n$。

（2） **递推关系**

如果 m 不能被 n 整除，我们可以得到关系式：$m=n\times k+r\quad(0<r<n)$

其中：k 是 $m\div n$ 的商，r 是余数。

例如：$m=16,n=6$ 时，$16=6\times2+4$，所以 $k=2,r=4$。

（3） **关键证明**

设 $d=\text{GCD}(m,n)$，则： d 能整除 m 和 n，因此 d 也能整除 $m-n\times k=r$，所以 d 是 n 和 r 的公约数。

因此我们得到：$d=\text{GCD}(m,n)=\text{GCD}(n,r)=\text{GCD}(n,m\%n)$

算法步骤：

（1） 计算 GCD(m,n)，当 $n\neq0$ 时，重复以下步骤：

i 计算余数 $r=m\%n$，令 $m=n$，$n=r$

ii 当 $n=0$ 时，m 即为最大公约数

代码实现：

```
while (n != 0) {
    int r = m % n;
    m = n;
    n = r;
}
return m;
```

示例：计算 GCD$(48,18)$

第一步：$48\div18=2\cdots\cdots12$，所以 $\text{GCD}(48,18)=\text{GCD}(18,12)$

第二步：$18\div12=1\cdots\cdots6$，所以 $\text{GCD}(18,12)=\text{GCD}(12,6)$

第三步：$12\div6=2\cdots\cdots0$，余数出现0，程序终止，所以 $\text{GCD}(12,6)=6$

最终结果：$\text{GCD}(48,18)=6$

拓展思考

- **整数溢出问题**：如果 n 和 m 很大，直接计算 $m\times n$ 可能会导致整数溢出。
- **多人情况**：如果是3个人、4个人，甚至是10000个人求下次同时值日的天数。