目录

一、 [CSP-J 2025] 拼数 / number

题目描述

小 R 正在学习字符串处理。小 X 给了小 R 一个字符串 s，其中 s 仅包含小写英文字母及数字，且包含至少一个 $1 \sim 9$ 中的数字。小 X 希望小 R 使用 s 中的任意多个数字，按任意顺序拼成一个正整数。注意：小 R 可以选择 s 中相同的数字，但每个数字只能使用一次。例如，若 s 为 `1a01b`，则小 R 可以同时选择第 $1, 3, 4$ 个字符，分别为 $1, 0, 1$，拼成正整数 101 或 110；但小 R 不能拼成正整数 111，因为 s 仅包含两个数字 1。小 R 想知道，在他所有能拼成的正整数中，最大的是多少。你需要帮助小 R 求出他能拼成的正整数的最大值。

输入输出格式

输入： 第一行，一个字符串 s，表示小 X 给小 R 的字符串。

输出： 一行，一个正整数，表示小 R 能拼成的正整数的最大值。

输入示例	输出示例
5	5
290es1q0	92100

样例解释

样例1： 字符串 $s =$ "5"，只有一个数字5，所以最大正整数就是5。

样例2： 字符串 $s =$ "290es1q0"，包含数字 $2, 9, 0, 1, 0$。将这些数字从大到小排列得到 $9, 2, 1, 0, 0$，拼成的最大正整数为92100。

算法分析

1. 问题转化

   从字符串中提取所有数字字符，然后将这些数字按照从大到小的顺序排列，这样拼接起来的数字就是最大的正整数。

2. 关键步骤

   （1） 遍历字符串，统计每个数字出现的次数

```
for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
    if (s[i] >= '0' && s[i] <= '9') a[s[i] - '0']++;
}
```

   （2） 从数字9到数字0，依次将每个数字拼接到结果字符串中

```
for (int i = 9; i >= 0; i--) {
    while (a[i]-- > 0) res += i + '0';
}
```

   （3） 输出结果字符串

3. 算法正确性证明

（1） 贪心策略的正确性

要得到最大的正整数，首先就是位数要尽可能多，意味着每一个数字都要用到，其次应该让高位数字尽可能大。因此，将数字从大到小排列是最优策略。

参考实现

```cpp
#include "bits/stdc++.h"
using namespace std;

using u64 = unsigned long long;
using i64 = long long;

// std::mt19937_64 rng {std::chrono::steady_clock::now().
    time_since_epoch().count()};
#define int long long
#define endl "\n"
constexpr i64 inf = 1e18;

void slu() {
    string s;
    cin >> s;
    vector<int> a(10, 0);
    for (int i = 0; i < s.size(); i++) {
        if (s[i] >= '0' && s[i] <= '9') a[s[i] - '0']++;
    }
    string res = "";
    for (int i = 9; i >= 0; i--) {
        while (a[i]-- > 0) res += i + '0';
    }
    cout << res << endl;
}

signed main() {
    ios_base::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
    cout.tie(nullptr);

    int t = 1;
    // cin >> t;

    while (t--) slu();
    return 0;
}
```

拓展思考

- 如果题目修改为输出最小正整数，该如何实现？

二、 [CSP-J 2025] 座位 / seat

题目描述

CSP-J 2025 第二轮正在进行。小 R 所在的考场共有 $n \times m$ 名考生，其中所有考生的 CSP-J 2025 第一轮成绩互不相同。所有 $n \times m$ 名考生将按照 CSP-J 2025 第一轮的成绩，由高到低蛇形分配座位，排列成 n **行** m **列**。具体地，设小 R 所在的考场的所有考生的成绩从高到低分别为 $s_1 > s_2 > \cdots > s_{n\times m}$，则成绩为 s_1 的考生的座位为第 1 **列**第 1 **行**，成绩为 s_2 的考生的座位为第 1 **列**第 2 **行**，...，成绩为 s_n 的考生的座位为第 1 **列**第 n **行**，成绩为 s_{n+1} 的考生的座位为第 2 **列**第 n **行**，...，成绩为 s_{2n} 的考生的座位为第 2 **列**第 1 **行**，成绩为 s_{2n+1} 的考生的座位为第 3 **列**第 1 **行**，以此类推。

例如，若 $n = 4, m = 5$，则所有 $4 \times 5 = 20$ 名考生将按照 CSP-J 2025 第一轮成绩从高到低的顺序，根据下图中的箭头顺序分配座位。

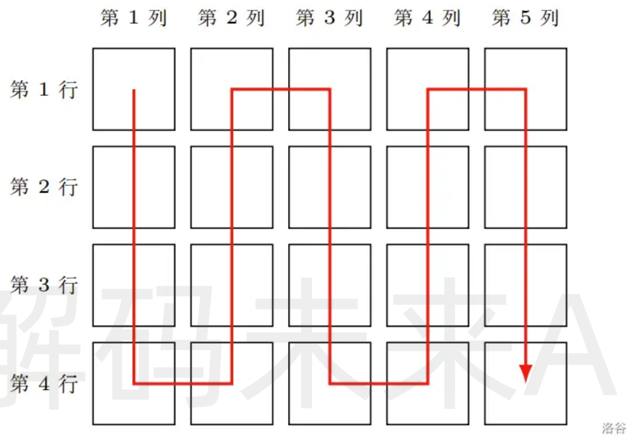


图 1: 蛇形排列示意图（$n = 4, m = 5$）

输入输出格式

输入：第一行，两个正整数 n, m，分别表示考场座位的**行数**与**列数**。

第二行，$n \times m$ 个正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_{n\times m}$，表示所有考生 CSP-J 2025 第一轮的成绩，其中 a_1 为小 R 的成绩。

输出：一行两个正整数 c, r，表示小 R 的座位为第 c **列**第 r **行**。

输入示例	输出示例
2 2 99 100 97 98	1 2
2 2 98 99 100 97	2 2
3 3 94 95 96 97 98 99 100 93 92	3 1

样例解释

样例1：成绩从高到低排序为：100, 99, 98, 97。
座位分配过程如下图所示：

100	97
99	98

图 2: 样例1座位分配图（n=2, m=2）

小 R 的成绩为99，位于第1列第2行。
样例2：成绩从高到低排序为：100, 99, 98, 97。
座位分配与样例1相同，分配图如下：

100	97
99	98

图 3: 样例2座位分配图（n=2, m=2）

但小 R 的成绩为98，因此座位为第2列第2行。

算法分析

1. 问题转化
   本题的核心在于按照蛇形顺序填充矩阵，并找到目标成绩的坐标。首先，我们需要将所有考生的成绩从大到小排序。

2. 规律观察
   观察题目给出的蛇形排列方式，我们可以发现**列的奇偶性**决定了行的填充方向：

   （1） **奇数列（第1，3，5...列）**：成绩从上到下（行号 $1 \to n$）依次排列。

   （2） **偶数列（第2，4，6...列）**：成绩从下到上（行号 $n \to 1$）依次排列。

3. 算法步骤

   （1） 记录小 R 的原始成绩（输入数组的第一个数）。

   （2） 对成绩数组进行降序排序。

   （3） 使用一个全局指针 'idx' 指向排序后的成绩数组。

   （4） 外层循环枚举列号 c 从 1 到 m：

   - 若 c 为奇数，内层循环行号 r 从 1 到 n；

- 若 c 为偶数，内层循环行号 r 从 n 到 1。

（5） 在填充过程中，比较当前填入的成绩是否等于小 R 的成绩。若相等，立即输出当前的 (c, r) 并结束程序。

参考代码

```cpp
#include "bits/stdc++.h"
using namespace std;
using u32 = unsigned;
using i32 = int;
using u64 = unsigned long long;
using i64 = long long;
using u128 = unsigned __int128;
using i128 = __int128;

#define int long long
#define endl "\n"

constexpr i64 inf = 1e18;

void slu() {
    int n, m;
    cin >> n >> m;
    vector<int> a(n * m);
    for (auto& x : a) cin >> x;
    int aim = a[0];
    sort(a.begin(), a.end(), greater());
    vector<vector<int>> M(n, vector<int>(m, 0));

    int x = 0, y = 0;
    int T = 0;
    int cur = 0;
    while (x < n && y < m) {
        M[x][y] = a[cur++];
        if (M[x][y] == aim) {
            cout << y + 1 << " " << x + 1;
            return;
        }
        if (T < n - 1) x++;
        else if (T == n - 1) y++;
        else if (T != 2 * n - 1) x--;
        else y++;

        T = (T + 1) % (2 * n);
    }
}

signed main() {
    ios_base::sync_with_stdio(false);
```

```
    cin.tie(nullptr);
    cout.tie(nullptr);

    int t = 1;
    // cin >> t;

    while (t--) slu();
    return 0;
}
```

拓展思考

- 数学推导（$O(1)$ 解法）：假设小 R 的成绩在排序后排在第 k 名（下标从 0 开始）。
  1. 所在的列号：$c = k/n + 1$。
  2. 所在的行号：
     - 若 c 为奇数，行号 $r = (k\%n) + 1$；
     - 若 c 为偶数，行号 $r = n - (k\%n)$。

  这种方法无需模拟整个矩阵，效率更高。

```
int n, m;
cin >> n >> m;
vector<int> a(n *m);
for (auto &x : a) cin >> x;

int target = a[0];
sort(a.begin(), a.end(), greater<int>());

int idx = -1;
for (int i = 0; i < n * m; i++) {
    if (a[i] == target) {
        idx = i;
        break;
    }
}

int c = idx / n + 1;
int r;
if (c % 2 != 0) {
    r = (idx % n) + 1;
} else {
    r = n - (idx % n);
}

cout << c << " " << r << endl;
```

三、 [CSP-J 2025] 异或和 / xor

题目描述

小 R 有一个长度为 n 的非负整数序列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$。定义一个区间 $[l, r]$ $(1 \le l \le r \le n)$ 的权值为 $a_l, a_{l+1}, \ldots, a_r$ 的二进制按位异或和，即 $a_l \oplus a_{l+1} \oplus \cdots \oplus a_r$，其中 $\oplus$ 表示二进制按位异或。

小 X 给了小 R 一个非负整数 k。小 X 希望小 R 选择序列中尽可能多的不相交的区间，使得每个区间的权值均为 k。两个区间 $[l_1, r_1], [l_2, r_2]$ 相交当且仅当两个区间同时包含至少一个相同的下标，即存在 $1 \le i \le n$ 使得 $l_1 \le i \le r_1$ 且 $l_2 \le i \le r_2$。

例如，对于序列 $[2, 1, 0, 3]$，若 $k = 2$，则小 R 可以选择区间 $[1, 1]$ 和区间 $[2, 4]$，权值分别为 2 和 $1 \oplus 0 \oplus 3 = 2$；若 $k = 3$，则小 R 可以选择区间 $[1, 2]$ 和区间 $[4, 4]$，权值分别为 $1 \oplus 2 = 3$ 和 3。

输入输出格式

输入： 第一行，两个非负整数 n, k，分别表示序列长度和给定的非负整数。

第二行，n 个非负整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，表示小 R 的序列。

输出： 一行一个非负整数，表示能选出的不相交区间数量的最大值。

输入示例	输出示例
4 2 2 1 0 3	2
4 3 2 1 0 3	2
4 0 2 1 0 3	1

样例解释

样例1： 可以选择区间 $[1, 1]$ 和区间 $[2, 4]$，异或和分别为 2 和 $1 \oplus 0 \oplus 3 = 2$，且两个区间不相交。

样例2： 可以选择区间 $[1, 2]$ 和区间 $[4, 4]$，异或和分别为 $1 \oplus 2 = 3$ 和 3，且两个区间不相交。

样例3： 可以选择区间 $[3, 3]$，异或和为 0。不能同时选择区间 $[3, 3]$ 和区间 $[1, 4]$，因为这两个区间相交。

算法分析

1. 前缀异或性质

   定义 $pre[i]$ 为序列前 i 个元素的异或和（即 $a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_i$），规定 $pre[0] = 0$。根据异或的性质，任意区间 $[l, r]$ 的异或和可以表示为：

$$a_l \oplus \cdots \oplus a_r = pre[r] \oplus pre[l-1]$$

题目要求区间异或和为 k，即 $pre[r] \oplus pre[l-1] = k$，移项得：

$$pre[l-1] = pre[r] \oplus k$$

2. 动态规划状态定义
设 $dp[i]$ 表示在序列的前 i 个数中，能够选出的满足条件的不相交区间的**最大数量**。
3. 状态转移方程
对于当前位置 i，我们有两种选择策略：

（1） **不以 i 作为区间的结尾**：此时最大数量继承自前一个位置，即 $dp[i] = dp[i-1]$。

（2） **寻找一个区间以 i 结尾**：我们需要找到一个下标 j $(0 \le j < i)$，使得区间 $[j+1, i]$ 的异或和为 k。

- 由前缀异或性质可知，需要满足 $pre[j] = pre[i] \oplus k$。
- 如果存在这样的 j，则可以转移：$dp[i] = \max(dp[i], dp[j]+1)$。

综上，状态转移方程为：

$$dp[i] = \max(dp[i-1], \max_{j \text{ satisfying condition}} (dp[j]+1))$$

4. 哈希表优化
为了快速找到满足 $pre[j] = pre[i] \oplus k$ 的最佳下标 j，我们使用哈希表 map<int, int>

- **键 (Key)**：前缀异或值 val。
- **值 (Value)**：该前缀异或值对应的下标 j。
- **贪心更新策略**：为了保证 $dp[i]$ 最大，我们在哈希表中记录该前缀异或值出现时对应的**最大 dp 值**的下标。即：当计算出新的 $dp[i]$ 后，如果它比之前记录的同前缀异或值的 dp 结果更优，才更新哈希表。

参考代码

```
#include "bits/stdc++.h"
using namespace std;

using u32 = unsigned;
using i32 = int;
using u64 = unsigned long long;
using i64 = long long;
using u128 = unsigned __int128;
using i128 = __int128;

#define int long long
#define endl "\n"

constexpr i64 inf = 1e18;
```

```cpp
void slu() {
    int n, k;
    cin >> n >> k;
    vector<int> a(n);
    for (auto &x : a) cin >> x;
    vector<int> pre(n + 1, 0);
    map<int, int> mp;
    vector<int> dp(n + 1, 0);
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        pre[i] = pre[i - 1] ^ a[i - 1];
    }

    mp[0] = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        int l = pre[i] ^ k;
        dp[i] = dp[i - 1];
        if (mp.contains(l)) {
            dp[i] = max(dp[i], dp[mp[l]] + 1);
        }
        if (dp[i] > dp[mp[pre[i]]]) {
            mp[pre[i]] = i;
        }
    }
    cout << dp[n];
}

signed main() {
    ios_base::sync_with_stdio(false);
    cin.tie(nullptr);
    cout.tie(nullptr);

    int t = 1;
    // cin >> t;

    while (t--) slu();
    return 0;
}
```

拓展思考

- 优化空间：可以使用 unordered_map 替代 map，将单次查找的时间复杂度从 $O(\log n)$ 优化到期望 $O(1)$，从而将总时间复杂度优化到 $O(n)$。

四、 [CSP-J 2025] 多边形 / polygon

题目描述

小 R 有 n 根小木棍，第 i $(1 \le i \le n)$ 根小木棍的长度为 a_i。小 X 希望小 R 从这 n 根小木棍中选出若干根小木棍，将它们按任意顺序首尾相连拼成一个多边形。拼成多边形的条件：对于长度分别为 $l_1, l_2, \ldots, l_m$ 的 m 根小木棍，能拼成一个多边形当且仅当 $m \ge 3$ 且所有小木棍的长度之和大于所有小木棍的长度最大值的两倍，即 $\sum_{i=1}^{m} l_i > 2 \times \max_{i=1}^{m} l_i$。

小 X 提出的问题是：有多少种选择小木棍的方案，使得选出的小木棍能够拼成一个多边形？两种方案不同当且仅当选择的小木棍的下标集合不同。由于答案可能较大，你只需要求出答案对 $998,244,353$ 取模后的结果。

输入输出格式

输入：第一行，一个正整数 n，表示小木棍的数量。

第二行，n 个正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，表示小木棍的长度。

输出：一行一个非负整数，表示能拼成多边形的方案数对 $998,244,353$ 取模后的结果。

输入示例	输出示例
5 1 2 3 4 5	9
5 2 2 3 8 10	6

样例解释

样例1：共有9种选择方案能使选出的小木棍拼成多边形，具体方案如下：

1. 选择第 2,3,4 根小木棍，长度之和为 $2+3+4=9$，满足 $9 > 2 \times 4 = 8$；
2. 选择第 2,4,5 根小木棍，长度之和为 $2+4+5=11$，满足 $11 > 2 \times 5 = 10$；
3. 选择第 3,4,5 根小木棍，长度之和为 $3+4+5=12$，满足 $12 > 2 \times 5 = 10$；
4. 选择第 1,2,3,4 根小木棍，长度之和为 $1+2+3+4=10$，满足 $10 > 2 \times 4 = 8$；
5. 选择第 1,2,3,4,5 根小木棍，长度之和为 $1+2+3+4+5=15$，满足 $15 > 2 \times 5 = 10$。
6. ...

算法分析

1. 问题转化与补集思想
   直接计算合法方案较为困难，我们采用正难则反的策略。

- **总方案数推导**：对于 n 根木棍，每一根木棍都有"选"或"不选"两种状态。根据数学中的乘法原理，总的组合数为 $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ 种。由于题目要求选出木棍（空集没有意义），我们扣除掉"一根都不选"的情况，因此总方案数：

$$Total = 2^n - 1$$

- **合法条件**：集合总和 $Sum > 2 \times Max$。
- **非法条件**：集合总和 $Sum \le 2 \times Max$。
- 设集合中除最大值以外的元素和为 S_{rest}，则非法条件等价于：

$$S_{rest} + Max \le 2 \times Max \implies S_{rest} \le Max$$

- **结论**：若除最大边外的其余边之和不超过最大边，则该集合无法构成多边形。

2. 排序与枚举

（1） 首先将数组 a 从小到大排序。

（2） 枚举每一个 a_i 作为当前子集的**最大值**。

（3） 此时，我们只能从下标 $[0, i-1]$ 的木棍中选择若干根，使得它们的和 $\le a_i$。这些组合即为以 a_i 为最大值的**非法方案**。

3. 动态规划（01背包）

- **定义**：$dp[j]$ 表示从之前的木棍中选出若干根，长度之和为 j 的方案数。
- **非法统计**：对于当前的 a_i，所有满足 $j \le a_i$ 的 $dp[j]$ 之和，即为以 a_i 为最大值的非法方案数。

```
for (int j = 0; j <= a[i]; j++) {
    illegal = (illegal + dp[j]) % MOD;
}
```

- **转移**：统计完成后，将 a_i 加入背包供后续使用（01背包倒序更新）：$dp[j] = dp[j] + dp[j - a_i]$。

```
for (int j = Max; j >= a[i]; j--) {
    dp[j] = (dp[j] + dp[j - a[i]]) % MOD;
}
```

- **最终答案**： $Total - Illegal = (2^n - 1) - \sum(\text{针对每个 } a_i \text{ 的非法方案})$。

算法复杂度分析

- 时间复杂度：$O(n \times V)$，其中 $V = \max(a_i)$。我们需要遍历 n 个元素，对于每个元素，都需要更新大小为 V 的背包数组。
- 空间复杂度：$O(V)$，其中 $V = \max(a_i)$，用于存储动态规划数组 dp。

代码实现

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
using i64 = long long;
#define int long long
constexpr i64 inf = 1e18;
constexpr i64 MOD = 998244353;

int qpow(int a, int b, int m) {
    a %= m;
    int res = 1;
    while (b > 0) {
        if (b & 1) res = res * a % m;
        a = a * a % m;
        b >>= 1;
    }
    return res % m;
}

void slu() {
    int n;
    cin >> n;
    vector<int> a(n);
    for (int i = 0; i < n; i++) cin >> a[i];
    sort(a.begin(), a.end());

    int Max = a.back(),illegal = 0;
    int res = qpow(2, n, MOD) - 1;
    vector<int> dp(Max + 1, 0);
    dp[0] = 1;

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = 0; j <= a[i]; j++) {
            illegal = (illegal + dp[j]) % MOD;
        }
        for (int j = Max; j >= a[i]; j--) {
            dp[j] = (dp[j] + dp[j - a[i]]) % MOD;
        }
    }
    res = (res - illegal + MOD) % MOD;
    cout << res << endl;
}

signed main() {
    ios_base::sync_with_stdio(false);cin.tie(nullptr);
    slu();
    return 0;
}
```

五、 L1585 画正方形 ✮

题目描述

输入一个正整数 n，要求输出一个 n 行 n 列的正方形图案（参考样例输入输出）。图案由大写字母组成。其中，第 1 行以大写字母 A 开头，第 2 行以大写字母 B 开头，以此类推；在每行中，第 2 列为第 1 列的下一个字母，第 3 列为第 2 列的下一个字母，以此类推；特别的，规定大写字母 Z 的下一个字母为大写字母 A。

输入输出格式

输入：输入一行，包含一个正整数 n。约定 $2 \le n \le 40$。
输出：输出符合要求的正方形图案。

输入示例	输出示例
3	ABC BCD CDE

样例解释

输入 $n = 3$，需要输出 3×3 的矩阵。

行号	起始字母	该行内容
第 1 行	A (第0个字母)	$\text{A} \to \text{B} \to \text{C}$
第 2 行	B (第1个字母)	$\text{B} \to \text{C} \to \text{D}$
第 3 行	C (第2个字母)	$\text{C} \to \text{D} \to \text{E}$

算法分析

1. **问题分析**
   我们需要打印一个二维矩阵。对于矩阵中的每一个位置 (i, j)，最核心的难点在于如何处理 **“Z 的下一个是 A”** 这一规则。

   - 我们可以将 A ~ Z 映射为数字 $0 \sim 25$。
   - 这是一个典型的循环队列模型：当数字到达 25 (代表 Z) 时，再 +1 应该回到 0 (代表 A)。
   - **取模运算** (%) 完美解决了这个问题。$x = (x + 1)\%26$。

2. **算法选择**

   （1） **解法 - 模拟：** 使用双重循环遍历行 i 和列 j。对于第 i 行，起始数值为 i。后续每往后一列，数值加 1。在输出时，通过模运算计算出对应的字母偏移量。

3. **实现思路**

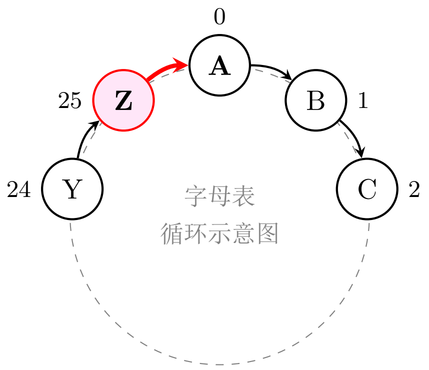
- **核心逻辑**

（1） **循环结构**：外层循环控制行（0 到 $n-1$），内层循环控制列（0 到 $n-1$）。

```
for (int i = 0; i < n; i++) { ... }
```

（2） **字符计算与取模原理**：假设当前我们应该输出第 cur 个字母（0对应A, 1对应B...）：

- 核心公式：$(cur\%26)$
- 如下图所示，当 cur 增加到 26 时，取模结果自动变回 0（A）。



最后加上字符 A 即可还原为大写字母。

```
int cur = i; // 当前行从第 i 个字母开始
for (int j = 0; j < n; j++) {
    // 先对26取余，确保数值限制在0-25之间，再转换为字母
    std::cout << (char)((cur++ % 26) + 'A');
}
std::cout << '\n'; // 每行结束后换行
```

拓展思考

- 如何只输出正方形的外框（即第一行、最后一行、第一列、最后一列）？
- 如果规则改为：Z → Y → ··· → B → A → Z （逆序）。该做哪些修改？

六、 L1483 A-B 数对 ☆☆

题目描述

给出一串正整数数列以及一个正整数 C，要求计算出所有满足 $A - B = C$ 的数对 (A, B) 的个数。

注意：不同位置的数字如果数值相同，算作不同的数对。

输入输出格式

输入：第一行包含两个正整数 N 和 C（$1 \le N \le 2 \times 10^5, 1 \le C < 2^{30}$）。第二行包含 N 个正整数，表示数列中的元素（数值 $< 2^{30}$）。

输出：输出一个整数，表示满足条件的数对个数。

输入示例	输出示例
4 1 1 1 2 3	3

样例解释

输入的数列为 $\{1, 1, 2, 3\}$，目标差值 $C = 1$。我们需要寻找满足 $A - B = 1$ 的数对。满足条件的数对共有以下 3 对：

序号	数对 (A, B)	详细说明
1	$(2, 1)$	数组中**第3个**元素和**第1个**元素
2	$(2, 1)$	数组中**第3个**元素和**第2个**元素
3	$(3, 2)$	数组中**第4个**元素和**第3个**元素

*注：虽然第1和第2组数对的数值看起来一样，但因为 B 分别对应了数组中**不同下标位置**的元素，所以算作两个不同的答案。

算法分析

1. **问题分析**
题目要求统计满足 $A - B = C$ 的数对。这个等式可以变换为 $B = A - C$。这意味着，对于数列中的每一个数，如果我们把它当作 A，那么我们只需要去查找数列中有多少个数值等于 $A - C$ 的数即可。

2. **算法选择**

（1） **解法一 - 暴力枚举 (TLE)**：使用双重循环枚举所有的 A 和 B，判断差值是否为 C。复杂度为 $O(N^2)$。由于 N 最大可达 2×10^5，计算量高达 4×10^{10}，显然会超时。

（2） **解法二 - Map 统计**： 利用 `std::map` 记录每个数字出现的次数。然后遍历每个 A，使用map获取 B = A C 在数组中的数量。时间复杂度 $O(N \log N)$。

（3） **解法三 - 排序 + 二分查找**： 先将数组排序，然后对于每个 A，使用二分查找快速定位 $B = A - C$ 在数组中的数量。时间复杂度同样为 $O(N \log N)$，但不需要 Map 的额外空间开销，常数更小。

3. **实现思路**

- **思路一：Map 统计**

  （1） 遍历数组，用 `map` 统计每个数出现的频率。

```
mp[a[i]]++;
```

  （2） 再次遍历，累加 ‘mp[a[i] - c]‘ 即为答案。

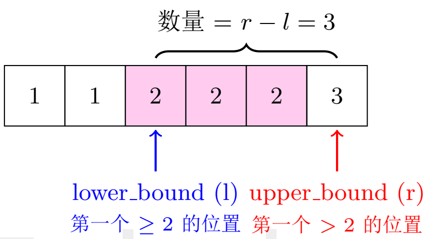
```
cnt += mp[a[i] - c];
```

- **思路二：排序 + 二分查找**

  （1） **排序：**首先对数组进行升序排序，这是二分查找的前提。

```
std::sort(a.begin(), a.end()); // 先对数组进行排序
```

  （2） **二分查找（图解）：**假设排序后的数组为 `{1, 1, 2, 2, 2, 3}`，我们要查找目标值 **2** 的数量。



  – `lower_bound`：指向第一个 **大于等于** 目标值的位置（开始位置）。
  – `upper_bound`：指向第一个 **大于** 目标值的位置（结束位置的下一个）。
  – **目标数量** = `upper_bound` 的下标 - `lower_bound` 的下标。

```
auto l = std::lower_bound(a.begin(), a.end(), a[i] - c);
auto r = std::upper_bound(a.begin(), a.end(), a[i] - c);
cnt += r - l;
```

拓展思考

1. **优化 - 双指针法** ($O(N)$)
   在解法三中，我们先排序再二分，总复杂度是 $O(N \log N)$。

   - 思考一下：既然数组已经有序了，当我们枚举的 A 增大时，对应的 B $(= A - C)$ 肯定也是单调递增的。
   - 是否可以使用两个指针（或三个指针，考虑到重复元素），只需遍历一遍数组就能统计出答案？这样可以将排序后的搜索过程降低到 $O(N)$。

2. **经典变式 - 两数之和** $(A + B = C)$ 如果题目改为计算 $A + B = C$ 的数对个数,该做哪些修改

七、 L1438 最小翻转次数 ✫✫✫

题目描述

给定一个长度为 n 的二进制字符串 s（仅包含字符 0 和 1）和一个整数 k。

你可以执行一种操作：选择字符串中的任意一个长度为 k 的连续子串，并将该子串中的每一个字符进行翻转（即 0 变成 1，1 变成 0）。

你的目标是通过最少的操作次数，将整个字符串 s 变成全 0 字符串。如果无法实现，输出 -1。

输入输出格式

输入：第一行包含两个整数 n 和 k（$1 \le k \le n \le 10^5$），分别表示字符串长度和操作长度。第二行包含一个长度为 n 的字符串 s。

输出：输出一个整数，表示最少操作次数。如果无法实现，输出 -1。

输入示例	输出示例
5 3 10101	3

样例解释

初始字符串为 `10101`，目标是全 `0`，每次翻转长度 $k = 3$。

步骤	翻转区间	翻转后状态
1	[0, 2]	01001
2	[1, 3]	00111
3	[2, 4]	00000

算法分析

1. **贪心策略证明**

   本题目具有以下两个关键性质：

   - **顺序无关性**：操作的顺序不影响最终结果。先翻转区间 A 再翻转区间 B，和先翻转 B 再翻转 A，得到的结果是一样的。
   - **操作的唯一性**：假设我们要处理当前最左边的一个位置 i，且下标 $0 \dots i-1$ 的部分已经全部变成 0 了。此时：

     （1） 如果 $s[i]$ 是 1，为了让它变成 0，我们必须翻转一个包含 i 的区间。虽然包含 i 的区间有很多（例如 $[i-1, i+k-2]$ 等），但只要区间的起点**小于** i，它就一定会覆盖到 i 左侧那些已经处理好变为 0 的位置。 **翻转这些位置会破坏我们之前的成果**（将 0 变回 1）。

     （2） **结论**：为了修复 $s[i]$ 且**绝对不破坏** i 左边已完成的全 0 前缀，唯一的选择就是翻转以 i 为起点的区间 $[i, i+k-1]$。

因此，每一个位置的操作决策是唯一确定的：遇到 1 必须翻转，且必须翻转以当前位置为开头的区间。

2. 算法选择

（1） **解法一 - 暴力模拟 (TLE)**：从左到右遍历，遇到 1 就翻转接下来的 k 个字符。单次翻转复杂度 $O(k)$，总复杂度 $O(nk)$。当 $n = 10^5$ 时会超时。

（2） **解法二 - 计数器优化**： 我们不需要真的去改变数组里的每一个值，只需要记录当前位置受到了多少次翻转操作的影响。我们可以引入一个“计数器”和“过期标记”的概念，将复杂度降为 $O(n)$。

3. 实现思路 (计数器 + 标记)

- **核心逻辑** 想象一个滑动窗口，所有针对当前位置 i 生效的翻转操作，都在这个窗口内。如果 $[i\ ,\ i+k-1]$ 区间需要翻转,我们的操作就是:

  （1） **计数器自加 (cur++)**：当前位置 i 的翻转次数 $+1$。

  （2） **区间结束标记**：在 $i+k-1$ 处打一个标记，表示翻转区间在此处结束。

- **遍历字符串**：当我们走到位置 i 时，首先检查有没有操作在这里失效：

```
cur += pre[i]; // 加上那些在当前位置结束影响的操作
```

- **判断是否需要翻转**：如果当前是‘1’ 且翻转次数是偶数，或当前是‘0’ 且翻转次数是奇数，则需要翻转。反之不需要翻转。

```
int ch = s[i] - '0';
if ((ch ^ cur) & 1) { 使用位运算简化判断逻辑
    cnt++;       // 记录操作次数
    cur++;       // 新增一个操作，当前位置的翻转次数+1
    if (i + m > n) return -1; // 长度不够，无法翻转，直接返回-1
    pre[i + m]--; // 并在 i+m 处打个标记：这个操作到时候要失效
}
```

拓展思考

- 如果题目要求将字符串变成全 1，代码需要做哪些微调？