Elektromechanische Analogiebeziehungen

1 Einleitung

Ziel der elektromechanischen Analogie ist die Darstellung eines mechanischen Netzwerkes durch ein äquivalentes elektrisches Netzwerk. Da der dazu verwendete Algorithmus reziproken ist, kann somit auch ein elektrisches Netzwerk durch ein äquivalentes mechanisches Netzwerk abgebildet werden. Die benötigten mathematischen Grundlagen liefert uns die Theorie linearer Zweitore.

1.1 Fluss- und Potentialgrößen (Leistungsvariablen)

Die Ein- und Ausgangsvariablen eines linearen Zweitors werden zweckmäßig so gewählt, dass das Produkt eines jeden Variablenpaares jeweils eine Leistung ergibt.

Leistungsvariable

elektrisch	mechanisch
$P_{el} = U \cdot I$	$P_{mech} = v \cdot F$

Somit sind praktisch nur zwei Analogiebeziehungen möglich. Die Proportionalität zwischen jeweils zwei Flussgrößen und zwei Potentialgrößen (FU-Analogie) oder die wechselseitige Proportionalität zwischen Fluss- und Potentialgrößen (FI-Analogie).

Analogie	Proportionalität	
FU-Analogie	$F \sim U$ $I \sim v$	$I_{X2} \sim Y_1$ $I_{X1} \sim Y_2$
FI-Analogie	$F \sim I$ $v \sim U$	$I_{X2} \sim I_{X1}$ $Y_2 \sim Y_1$

1.2 Lineare Zweitore

Die beiden möglichen Analogiebeziehungen können jeweils über ein geeignetes lineares Zweitor abgebildet werden. Wählt man die Proportionalität zwischen jeweils zwei Fluss- und Potentialgrößen (FI-Analogie), so bietet sich das transformatorische Wandlerprinzip für eine Zweitordarstellung an. Für die wechselseitige Kopplung von Fluss- und Potentialgrößen ist das gyratorische Wandlerprinzip geeignet (FU-Analogie). Als mathematisches Hilfsmittel zur Berechnung linearer

Zweitore hat sich die Matrizenrechnung etabliert. Unter Verwendung der Leistungsvariablen (Fluss- und Potentialgrößen) existieren genau sechs Matrixformen zur Abbildung linearer Zweitore.

Bezeichnung	Symbol
Impedanzmatrix	$Z = Y^{-1}$
Admittanzmatrix	$Y = Z^{-1}$
Hybridmatrix	$H = P^{-1}$
inverse Hybridmatrix	$P = H^{-1}$
Kettenmatrix	$A = B^{-1}$
inverse Kettenmatrix	$B = A^{-1}$

Da eine Umwandlung[1] der Matrixformen untereinander nicht immer möglich ist, wählt man zweckmäßigerweise die, für die jeweilige Analogie passende Matrixform, aus.

Wandlerprinzip	Matrixform
transformatorischer Wandler (FI-Analogie)	**H, P, A, B**
gyratorischer Wandler (FU-Analogie)	**Z, Y, A, B**

Dabei wird deutlich, dass sowohl die Kettenmatrix **A** als auch die inverse Kettenmatrix **B** zur Berechnung beider Wandlerprinzipien prinzipiell geeignet ist.

1.2.1 FI-Analogie

Bei der FI-Analogie besteht eine Proportionalität jeweils zwischen den Fluss- und Potentialgrößen.

$$\begin{aligned} F &\sim I \\ v &\sim U \end{aligned} \tag{1.1}$$

Da für beide Wandlerprinzipien die Kettenmatrix **A** geeignet ist, soll diese zunächst Verwendung finden.

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ I_{X1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_2 \\ -I_{X2} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Das negative Vorzeichen vor I_{X2} kennzeichnet das Kettenpfeilsystem. Neben der FI- bzw. vU-Proportionalität (Transformator) setzen wir zusätzlich gleiche Ein- und Ausgangsleistungen am linearen Zweitor voraus ($P_1 = P_2$).

[1] Eine Umrechnung ist im Allgemeinen immer dann nicht möglich, wenn die Matrix nicht voll besetzt ist.

Damit werden die beiden Kettenparameter A_{12} und A_{21} null.

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ I_{X1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}}_{A(T)} \cdot \begin{bmatrix} Y_2 \\ -I_{X2} \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Im Sinne der ursprünglichen Aufgabenstellung (Abbildung eines mechanischen Netzwerkes als elektrisches Netzwerk) wollen wir die FI-Analogie auf die ursprüngliche Aufgabenstellung anwenden.

Aufgaben

1.1 Gegeben sei ein schwingungsfähiges mechanisches System, bestehend aus den konzentrierten Ersatzelementen m, c und k, welches über eine Erregerkraft im Massenschwerpunkt ausgelenkt wird (Abb. 1).

Wie sieht das äquivalente elektrische Netzwerk für dieses mechanische System aus? Verwenden Sie dazu die FI-Analogie.

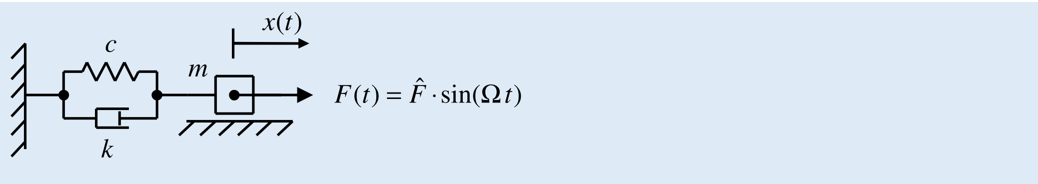

Abb. 1: schwingungsfähiges mechanisches System

Lösung

Im ersten Schritt wird die Topologie des mechanischen Systems in eine allgemeine Topologie umgeformt (mechatronisches Netzwerk). Dabei muss speziell der zweite Bezugspunkt der trägen Masse berücksichtigt werden. Dieser liegt wie die Feder und der Dämpfer einseitig am Fundament. Auch die Erregerkraft F(t) bezieht sich auf diesen Bezugspunkt (Abb. 2).

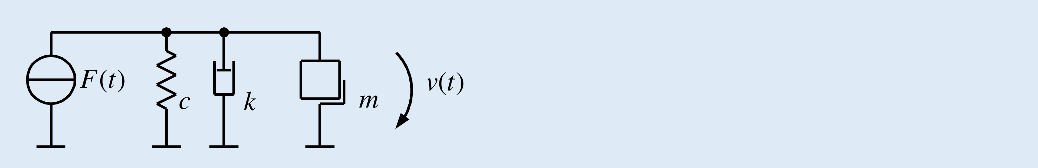

Abb. 2: mechatronisches Netzwerk

Betrachten wir zunächst die passiven Bauelemente m, c und k. Jedes Einzelbauelement kann durch seine komplexe Impedanz Z ausgedrückt werden (Abb.3). Alle drei komplexen Impedanzen Z bilden eine Parallelschaltung.

$$Y_2 = Y_c + Y_k + Y_m \tag{1.4}$$

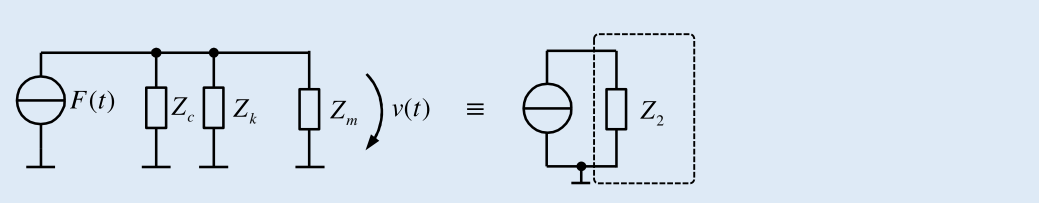

Abb. 3: reduziertes mechatronisches Netzwerk

Das reduzierte mechatronische Netzwerk (ohne Erregerkraft) wird an Tor 2 eines linearen Zweitors in Kettenpfeildarstellung (A-Matrix) angeschlossen.

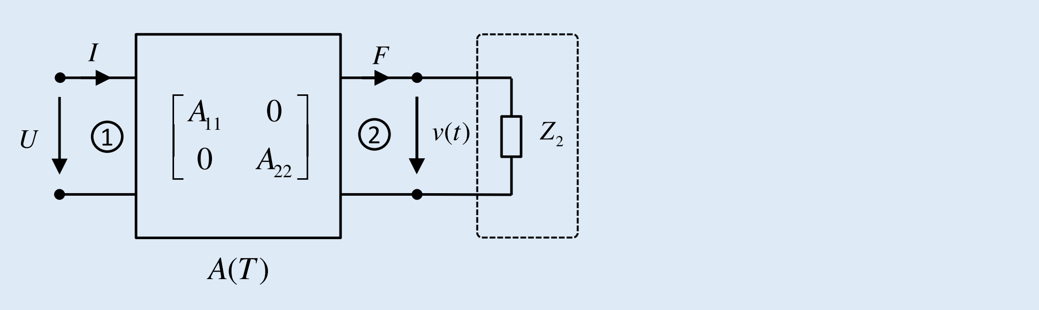

Abb. 4: reduziertes mechatronisches Netzwerk mit Kettenmatrix

Eine Impedanzmessung auf der elektrischen Seite (Tor 1) würde eine virtuelle Impedanz Z_1 ergeben, welche aus der Zusammenschaltung des Transformators A(T) und Z_2 gebildet wird (Abb. 5).

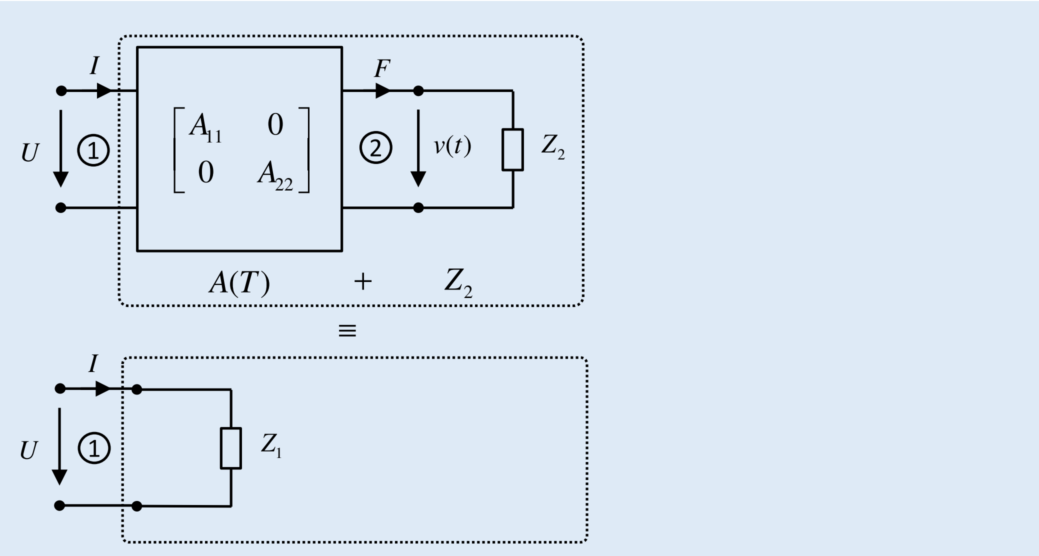

Abb. 5: Bildung einer virtuellen Impedanz Z_1

Übertragungseigenschaften eines Transformators A(T)

Literatur

Grabow, J.: Verallgemeinerte Netzwerke in der Mechatronik, Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH 2013, ISBN 978-3-486-71261-2

Grabow, J.: Mechatronische Netzwerke, Praxis und Anwendungen, DE GRUYTER OLDENBOURG; Auflage: 1 (23. April 2018), ISBN-10: 9783110470840, ISBN-13: 978-3110470840

Ergänzende Materialien

Nr.	Beschreibung	Type	Datei
1	Eigenschaften eines Transformators	Mathcad 5.0	Transformator.mcdx
2	Eigenschaften eines Transformators	PDF	Transformator.pdf
3	Beispielaufgabe Transformator	Mathcad 5.0	Bsp_Trans.mcdx
4	Beispielaufgabe Transformator	PDF	Bsp_Trans.pdf
5	mechanisches System	LTSpice	Isomorph_1.asc
6	mechatronisches System	LTSpice	Isomorph_2.asc

Lizenzbedingungen

Autor
Prof. Dr.-Ing. habil Jörg Grabow
Ernst-Abbe-Hochschule Jena
Fachgebiet Mechatronik
www.amesys.de