3.6. ЗАДАНИЕ 1
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ С ФИКСИРОВАННОЙ И ПЛАВАЮЩЕЙ ЗАПЯТОЙ В РАЗЛИЧНЫХ ФОРМАТАХ

1. Заданное число ***A*** представить в виде двоично-кодированного десятичного числа:

а) в упакованном формате (BCD);

б) в неупакованном формате (ASCII).

2. Заданное число ***A*** и ***–A*** представить в форме с фиксированной запятой.

3. Заданные числа ***A*** и ***B*** представить в форме с плавающей запятой в формате *Ф1*.

4. Заданные числа ***A*** и ***B*** представить в форме с плавающей запятой в формате *Ф2*.

5. Заданные числа ***A*** и ***B*** представить в форме с плавающей запятой в формате *Ф3*.

6. Найти значения чисел ***Y*** и ***Z*** по их заданным шестнадцатеричным представлениям ***R*** и ***S*** в форме с плавающей запятой в формате *Ф1*.

7. Найти значения чисел ***V*** и ***W*** по их заданным шестнадцатеричным представлениям ***R*** и ***S*** в форме с плавающей запятой в формате *Ф2*.

8. Найти значения чисел ***T*** и ***Q*** по их заданным шестнадцатеричным представлениям ***R*** и ***S*** в форме с плавающей запятой в формате *Ф3*.

Замечание. При выполнении п.п. 3–5 задания для дробного числа ***B*** в целях увеличения точности его представления произвести симметричное округление мантиссы.

Варианты задания приведены в табл. 1 (десятичные числа ***A*** и ***B***) и в табл. 2 (шестнадцатеричные числа ***R*** и ***S***) Приложения 1.

1. Представление чисел в виде двоично-кодированного десятичного числа

Десятичные числа представляются в ЭВМ в двоично-кодированной форме, при этом каждая десятичная цифра (или буква – для шестнадцатеричной системы) кодируется с помощью четверки двоичных разрядов (двоичной тетрады).

десятичная цифра	двоичная тетрада
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100

десятичная цифра	двоичная тетрада
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Десятичные числа представляются в форме с использованием либо упакованного (PACK), либо неупакованной (UNPACK) формата.

В упакованном формате в каждом байте числа кодируются две цифры, в неупакованном – одна.

Для кодирования десятичных цифр используется в основном естественный двоичный код, обычно называемый 8421.

В этом коде:

0 – 0000

1 – 0001

…

9 – 1001

Частным случаем неупакованного формата является код ASCII (American Standart Code for Interchange Information), используемый в PC. В этом коде десятичная цифра представляется в младшей тетраде байта, а старшая тетрада принимает стандартное значение 0011.

Упакованный формат обычно называют BCD-форматом (или BCD-числом – Binary Coded Decimal).

В упакованном формате в каждом байте кодируется две десятичные цифры, в неупакованном – одна.

Пример: $\boldsymbol{A}$=395.

а) в упакованном формате

0000.0011	1001.0101
3	9 5

б) В ASCII-формате код цифры помещается в младшую тетраду байта (в младший полубайт). Старшая тетрада байта имеет стандартное значение 0011.

0011.0011	0011.1001	0011.0101
3	9	5

2. Представление чисел с фиксированной запятой

Особенностью представления целых чисел со знаком в форме с фиксированной запятой в ЭВМ является использование прямого кода для положительных чисел и дополнительного кода – для отрицательных чисел.

Пример. $\boldsymbol{A}$ = 250.

2.1. Заданное десятичное число $\boldsymbol{A}$ переводится в двоичную систему счисления:

$(250)_{10} = (11111010)_2$.

Полученное двоичное число размещается в формате таким образом, чтобы его младший разряд совпадал с крайним правым (15-ым) разрядом формата. Старшие разряды формата, включая знаковый (нулевой разряд), заполняются нулями.

0	0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0 1 0
15	1 0

В шестнадцатеричной системе счисления: (250)10 = (FA)16.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 000\quad 0000\quad \overbrace{1111}^{F}\quad \overbrace{1010}^{A} \\ \hline \end{array}$$
$$\begin{array}{ll} 15 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1\ \ 0 \end{array}$$

2.2. Для представления отрицательного числа в дополнительном коде производится инвертирование цифровых разрядов прямого кода (получение обратного кода числа) с добавлением единицы в младший разряд. В знаковый разряд числа заносится единица (знак “–”).

$[–A]_{пр}$ = 1.000 0000 1111 1010 – прямой код,
$[–A]_{об}$ = 1.111 1111 0000 0101 – обратный код,
\+ 1
$[–A]_{доп}$ = 1.111 1111 0000 0110 – дополнительный код.

Для преобразования отрицательных чисел из прямого кода в дополнительный может использоваться следующее правило. Младшие нули прямого кода, включая младшую (крайнюю правую) единицу, сохраняются и в дополнительном коде, а остальные разряды прямого кода заменяются на противоположные (инвертируются) в дополнительном коде. Преобразование применяется только к цифровым разрядам числа, знаковый разряд не меняется. С использованием этого правила:

$$[–A]_{доп} = 1.\underbrace{111\ 1111\ 0000\ 01}_{\text{разряды, изменяемые инвертированием}}\underbrace{10}_{\text{сохраняемые разряды}}$$

Полученное представление числа в дополниительном коде записывается в формате:

1	1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 1 0
15	14 … 1 0

3. Представление чисел с плавающей запятой в формате *Ф1*

Для представления числа в формате с плавающей запятой определяется его мантисса и порядок. В связи с тем, что в формате *Ф1* используется шестнадцатеричное представление порядка, для этой цели удобнее использовать число, представленное в шестнадцатеричной системе счисления. Для определения мантиссы и порядка производится перемещение запятой в шестнадцатеричном числе влево или вправо таким образом, чтобы она установилась перед старшей значащей цифрой. Полученное дробное число представляет мантиссу числа с плавающей запятой. Модуль порядка определяется количеством шестнадцатеричных цифр, на которое была перенесена запятая. Знак порядка определяется направлением, в котором переносилась запятая. При перенесении запятой влево порядок положителен, вправо – отрицателен.

Такой способ получения мантиссы и порядка дает нормализованное число, у которого старшая цифра мантиссы значащая.

Если в исходном числе запятая находится перед старшей значащей цифрой, то порядок этого числа равен нулю.

По значению порядка определяется характеристика (смещенный порядок) числа путем сложения порядка со смещением (для формата *Ф1* величина смещения равна 64), после чего двоичные значения знака, характеристики и мантиссы числа записываются в формат.

3.1. Для определения мантиссы и порядка числа ***A*** запятая переносится влево на две шестнадцатеричные цифры:

$$\boldsymbol{A}=250 \qquad A = (\mathrm{FA})_{16} = \underbrace{(0,\mathrm{FA})_{16}}_{\text{мантисса}} \times 16^{\underset{\text{порядок}}{2}}$$

Характеристика числа ***A***:

$X_A = P_A + 64 = (66)_{10} = (1000010)_2.$

Для получения двоичного значения характеристики, соответствующей положительному или нулевому порядку, в ее старший разряд записывается единица (вес этого разряда характеристики равен величине смещения – 64), а в младших разрядах характеристики представляется величина порядка

$$x_A = (1\,0\,0\,0\,0\,\underbrace{1\,0}).$$

$$\underbrace{64}_{\text{смещение}} + \underbrace{2}_{\text{порядок}} = \underbrace{66}_{\text{характеристика}}$$

При записи числа в формате *Ф*1 шестнадцатеричная мантисса представляется в двоичной системе счисления. Младшие разряды мантиссы заполняются нулями. Представление числа ***A*** в формате *Ф1* имеет вид

		F	A	0	0	0	0
0	100 0010	1111	1010	0000	0000	0000	0000
0	1 … 7	8					31
знак “+”	характеристика	мантисса					

Старшая тетрада мантиссы нормализованного числа может содержать от одного до трех старших нулей. Например, число

$(1E8,5)_{16} = (0,1E85)_{16} \times 16^3$ представляется в виде

	64 … 3	1	E	8	5	0	0
0	100 0011	0001	1110	1000	0101	0000	0000
0	1 … 7	8					31

и содержит в старшей тетраде мантиссы три нуля.

3.2. Число $\boldsymbol{B}$ = 0,0025 переводится в шестнадцатеричную систему счисления. При переводе необходимо получить шесть цифр, не считая старших нулей.

В целях повышения точности представления числа рекомендуется получить еще одну (дополнительную) цифру, по значению которой производится симметричное округление этого числа.

$\boldsymbol{B} = (0,0025)_{10} = (0,00A3D70A3)_{16}$.

Дополнительная цифра числа, равная $(3)_{16} = (0011)_2$, содержит в старшем двоичном разряде ноль и поэтому не изменяет значения предыдущей цифры, равной $(A)_{16}$, при округлении числа.

При наличии старшей единицы в двоичном представлении дополнительной цифры, что соответствует значению, большему или равному $(8)_{16}$, при симметричном округлении предыдущая младшая цифра числа увеличивается на единицу.

Для определения мантиссы и порядка числа $\boldsymbol{B}$ запятая в его шестнадцатеричном представлении переносится вправо на две цифры, что определяет порядок числа, равный (–2):

$\boldsymbol{B} = (0,00A3D70A)_{16} = (0,A3D70A)_{16} \times 16^{-2}$.

Характеристика числа $\boldsymbol{B}$:

$X_B = P_B + 64 = -2 + 64 = 62 = (0111110)_2$.

Для получения двоичного значения характеристики, соответствующей отрицательному порядку, можно использовать следующее правило: в старший разряд характеристики записывается ноль, а в шести ее младших разрядах представляется дополнительный код порядка (дополнение до 64)

000010 – прямой код порядка,
111110 – дополнительный код порядка,
0111110 – характеристика.

Представление числа $\boldsymbol{B}$ в формате *Ф1* имеет вид

		A	3	D	7	0	A
0	011 1110	1010	0011	1101	0111	0000	1010
0	1 7	8					31

4. Представление чисел с плавающей запятой в формате *Ф2*

Для представления чисел в форме с плавающей запятой в формате *Ф2* используется их двоичная запись, так как в этом формате основание порядка $\boldsymbol{S}$=2. Для определения мантиссы и порядка запятая переносится влево или вправо в двоичном числе до установления перед старшей единицей. Модуль порядка определяется количеством двоичных цифр (разрядов), на которое переносится запятая.

Характеристика (смещенный порядок) определяется путем сложения порядка со смещением, величина которого в формате *Ф2* равна 128 (в отличие от формата *Ф1* в формате *Ф2* под характеристику отводится 8 двоичных разрядов формата).

При записи числа необходимо учитывать, что во формате *Ф2* используются **только** нормализованные числа и, так как нормализация осуществляется с точностью до двоичной цифры, старший разряд мантиссы всегда равен единице, в связи с чем он в разрядной сетке не представляется (так называемый скрытый разряд). Кроме того, в формате *Ф2* принята нумерация разрядов в сетке справа налево (от младшего разряда к старшему).

4.1. Определение мантиссы и порядка числа $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = (250)_{10} = (FA)_{16} = (11111010)_2 = (0,\underbrace{1111101}_{\text{мантисса}})_2 \times 2^{\underset{\uparrow\ \text{порядок}}{8}}.$$

Характеристика числа $\boldsymbol{A}$:

$$X_A = P_A + 128 = 136 = (\underset{\uparrow}{1}000\underbrace{1000}_{})_2.$$

$$\underbrace{128}_{\text{смещение}} + \underbrace{8}_{\text{порядок}} = \underbrace{136}_{\text{характеристик}}$$

Число $\boldsymbol{A}$ представляется в формате *Ф2* в виде

0	10001000	11110100000000000000000
31	30 … 23	22 … 0
знак	характеристика	мантисса

4.2. Для определения мантиссы и порядка числа ***B*** запятая в его двоичном представлении переносится вправо на 8 двоичных разрядов, что определяет порядок числа, равный (–8).

$$\boldsymbol{B} = (0,0025)_{10} = (0,00A3D70A)_{16} =$$

$$= (0,\underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{0011}_{3}\ \underbrace{1101}_{D}\ \underbrace{0111}_{7}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{1010}_{A})_2 =$$

$$= \underbrace{(0,10100011110101110000101)_2}_{\text{мантисса}} \times 2^{\overset{\uparrow}{-8}}.$$

порядок

Характеристика числа ***B***:

$$X_B = P_B + 128 = 120 = (\underbrace{01111000}_{\text{дополнительный код порядка}})_2.$$

Представление числа ***B*** в формате *Ф2* имеет вид

0	01111000	01000111101011100001010
31	**30** … **23**	**22** … **0**
знак	характеристика	мантисса

Для данного примера дробное число *B* представлено в форматах *Ф1* и *Ф2* с одинаковой точностью. Это объясняется наличием единицы в старшем разряде мантиссы формата *Ф1*. Если же в старших разрядах мантиссы содержится хотя бы один ноль, то точность представления числа в формате *Ф2* будет больше за счет использования большего числа значащих цифр в мантиссе.

Например, шестнадцатеричная мантисса $(0,1A90BC7)_{16}$ будет представлена в формате *Ф1* в виде

1	A	9	0	B	C	
0001	1010	1001	0000	1011	1100	0
8					31	

разряд, по которому производится округление

а в формате *Ф2* - в виде

1	10101001000010111100100	1
22		0
скрытый разряд		разряд, по которому производится округление

В данном случае в формате *Ф2* в представлении мантиссы используется на три разряда больше, чем в *Ф1*. Кроме того, за счет дополнительного разряда мантиссы, равного единице, производится добавление единицы к младшему разряду, в результате чего получается представление числа с избытком, в то время как в формате *Ф1* оно представлено с недостатком.

5. Представление чисел с плавающей запятой в формате *Ф3*

Представление чисел в формате *Ф3* во многом аналогично их представлению в формате *Ф2*. Основными отличиями являются:

1) величина смещения равна 127 (в формате *Ф2* – 128);

2) старшая единица мантиссы нормализованного числа является единицей целой части мантиссы, т.е. запятая в мантиссе фиксируется после старшей единицы (в формате *Ф2* запятая в мантиссе фиксируется перед старшей единицей).

5.1. Определение мантиссы и порядка числа ***A***:

$$\boldsymbol{A} = (250)_{10} = (FA)_{16} = (11111010)_2 = \underbrace{(1,111101)_2}_{\text{мантисса}} \times 2^{\overset{\text{порядок}}{7}}.$$

Смещенный порядок числа ***A***:

$$X_A = P_A + 127 = 134 = (10000110)_2.$$

Число ***A*** представляется в формате *Ф3* в виде

0	10000110	11110100000000000000000
31	**30** **23**	**22** **0**
знак	смещенный порядок	мантисса

Следует отметить, что:

а) в отличие от представления чисел в форматах *Ф1* и *Ф2* в *Ф3* не принято называть смещенный порядок характеристикой;

б) по аналогии с представлением чисел в формате *Ф2* в *Ф3* используется скрытый разряд (единица целой части мантиссы в формате не представляется);

в) представление числа в формате *Ф3* отличается от представления в *Ф2* только значением смещенного порядка (его величина уменьшается на 2).

5.2. Определение мантиссы и порядка числа ***B***:

$$\boldsymbol{B} = (0{,}0025)_{10} = (0{,}00A3D70A)_{16} =$$

$$= (0{,}\underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{0011}_{3}\ \underbrace{1101}_{D}\ \underbrace{0111}_{7}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{1010}_{A})_2 =$$

$$= \underbrace{(1{,}01000111101011100000101)_2}_{\text{мантисса}} \times 2^{\overset{\text{порядок}}{-9}}.$$

Смещенный порядок числа $\boldsymbol{B}$:

$$X_B = P_B + 127 = 118 = (01110110)_2.$$

Для чисел с отрицательным порядком значение смещенного порядка может быть получено по следующему правилу: старший разряд смещенного порядка равен нулю, а в остальных разрядах представляется обратный код порядка:

0001001 – прямой код порядка,
1110110 – обратный код порядка,
01110110 – смещенный порядок.

Представление числа $\boldsymbol{B}$ в формате *Ф3* имеет вид

0	0 1 1 1 0 1 1 0	0 1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0
31	30 23	22 0

6. Определение значения числа с плавающей запятой по его представлению в формате *Ф1*

$\boldsymbol{R}$ = C318FC00, $\boldsymbol{S}$ = 3E600000.

6.1. Для определения значения числа $\boldsymbol{Y}$ производится наложение его шестнадцатеричного представления $\boldsymbol{R}$ на разрядную сетку формата *Ф1*:

C	3	1	8	F	C	0	0

знак	характеристика	мантисса
1	1 0 0 0 0 1 1	0 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0	1 7	8 31

Из этого представления видно, что число $\boldsymbol{Y}$ – отрицательное (в знаковом разряде числа – единица).

Определим порядок числа $\boldsymbol{Y}$ по его характеристике:

$$X_Y = 67 = \underbrace{64}_{\text{смещение}} + \underbrace{3}_{\text{порядок}},$$

$$P_Y = X_Y - 64 = 3.$$

Представим число $\boldsymbol{Y}$ с помощью мантиссы и порядка:

$$\boldsymbol{Y} = -\,(0{,}18FC)_{16} \times 16^3.$$

Получили представление числа $\boldsymbol{Y}$ в нормальной (полулогарифмической) форме. Для приведения числа $\boldsymbol{Y}$ к естественной форме необходимо перенести запятую в мантиссе на количество шестнадцатеричных цифр, равное модулю порядка, вправо – при положительном или влево – при отрицательном порядке. В данном случае запятая переносится вправо:

$$\boldsymbol{Y} = -\,(18F{,}C)_{16}.$$

Переведем число $\boldsymbol{Y}$ из шестнадцатеричной в десятичную систему счисления с использованием весов разрядов:

$$\boldsymbol{Y} = -\,(1 \times 16^2 + 8 \times 16^1 + 15 \times 16^0 + 12 \times 16^{-1}) =$$

$$= -\,(256 + 128 + 15 + 0{,}75) = -399{,}75.$$

6.2. Для определения значения числа $\boldsymbol{Z}$ производится наложение его шестнадцатеричного представления $\boldsymbol{S}$ на разрядную сетку:

	3	E	6	0	0	0	0	0
0	0 1 1	1 1 1 0	0 1 1 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0	**1**	**7**	**8**					**31**

Порядок числа $\boldsymbol{Z}$:

$$P_Z = X_Z - 64 = 62 - 64 = -2.$$

Значение числа $\boldsymbol{Z}$:

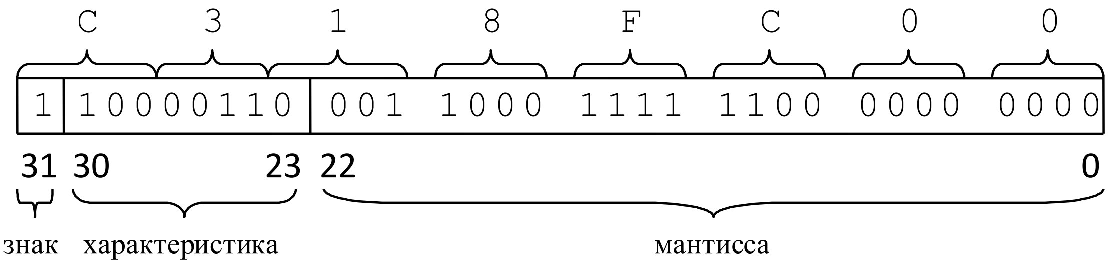
$$\boldsymbol{Z} = (0{,}6)_{16} \times 16^{-2} = (0{,}006)_{16} = 6/16^3 = 6/2^{12} = 3/2^{11} =$$

$$= (3/2) \times (1/2^{10}) = (3/2) \times (1/1024) \approx 1{,}5 \times 10^{-3}.$$

При переводе дробных чисел из двоичной системы счисления в десятичную можно считать: $2^{10} \approx 10^3$.

7. Определение значения числа с плавающей запятой по его представлению в формате *Ф2*

7.1. Представление числа $\boldsymbol{V}$ в формате *Ф2* имеет вид



Порядок числа ***V***:

$P_V = X_V - 128 = 134 - 128 = 6.$

Значение числа ***V*** в нормальной форме:

$$\boldsymbol{V} = -(\underbrace{0,10011000111111}_{\text{мантисса}})_2 \times 2^6.$$

скрытый разряд мантисса порядок

При определении двоичного значения мантиссы производится восстановление ее скрытого старшего разряда, равного 1.

Для приведения числа ***V*** к естественной форме запятая в его мантиссе переносятся вправо на 6 двоичных разрядов:

$\boldsymbol{V} = -(100110{,}00111111)_2.$

Перевод числа ***V*** из двоичной системы в десятичную:

а) целая часть:
$(100110)_2 = 2^5 + 2^2 + 2^1 = 32 + 4 + 2 = 38;$

б) дробная часть:
первый способ перевода:

$(0{,}00111111)_2 = 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} + 2^{-7} + 2^{-8} =$

$= 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + 1/128 + 1/256 = 63/256 \approx 0{,}246;$

второй способ перевода:

$(0{,}00111111)_2 = (111111)_2 \times 2^{-8} = 63 \times (1/256) \approx 0{,}246;$

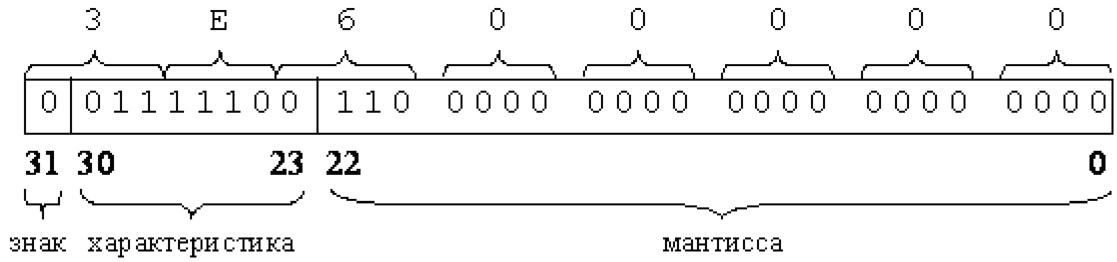
третий способ перевода:

$(0{,}0011111)_2 = (0{,}01)_2 - (0{,}00000001)_2 = 1/4 - 1/256 \approx$

$\approx 0{,}25 - 0{,}004 = 0{,}246.$

Значение числа ***V***:
$\boldsymbol{V} \approx -38{,}246.$

7.2. Представление числа ***W*** в формате:



Порядок числа ***W***:

$P_W = X_W - 128 = 124 - 128 = -4.$

Число ***W*** в нормальной форме:

$\boldsymbol{W} = (0{,}111)_2 \times 2^{-4}.$

Число ***W*** в естественной форме получается переносом запятой в мантиссе влево на четыре двоичных разряда:

$\boldsymbol{W} = (0{,}0000111)_2.$

Значение числа ***W***:

$\boldsymbol{W} = (0{,}0000111)_2 = (111)_2 \times 2^{-7} = 7 / 128 \approx 0{,}0547.$

8. Определение значения числа с плавающей запятой по его представлению в формате *Ф3*

8.1. Представление числа ***T*** в формате *Ф3* имеет тот же вид, что и для числа ***V*** в формате *Ф2* (п.7.1).

Порядок числа ***T***:

$\boldsymbol{P_T = X_T} - 127 = 134 - 127 = 7.$

Значение числа ***T*** в двоичной системе счисления:

$$T = -\,(\underbrace{\overset{\uparrow}{1}_{\text{скрытый разряд}},0011000111111}_{\text{мантисса}})_2 \times 2^{\overset{7}{\uparrow}_{\text{порядок}}}.$$

Перевод числа ***T*** из двоичной системы счисления в десятичную:

целая часть:

$(10011000)_2 = 2^7 + 2^4 + 2^3 = 128 + 16 + 8 = 152.$

дробная часть:

$(0{,}111111)_2 = 1 - (0{,}000001)_2 = 1 - 1 / 64 \approx 0{,}984.$

Значение числа ***T***:

$\boldsymbol{T} \approx -152{,}984.$

*По сравнению со значением числа **V**, имеющего то же самое представление в формате Ф2, число **T** в формате Ф3 в четыре раза больше за счет* *большего на единицу значения порядка и за счет использования целой единицы в мантиссе.*

8.2. Представление числа $\boldsymbol{Q}$ в формате *Ф3* имеет тот же вид, что и для числа в *Ф2* (п.7.2.).

Порядок числа $\boldsymbol{Q}$:

$\boldsymbol{P_Q} = \boldsymbol{X_Q} - 127 = 124 - 127 = -3.$

Значение числа $\boldsymbol{Q}$:

$\boldsymbol{Q} = (1{,}11)_2 \times 2^{-3} = (0{,}00111)_2 = (111)_2 \times 2^{-5} = 7 / 32 \approx 0{,}219.$