**EXERCICE 1 : (4 Pts)**

On considère $D_1$, $D_2$, …, $D_k$ des sous-ensembles primitifs récursifs de N tels que :

$$D_i = \{y \mid y \text{ est divisible par } i\}$$

1. Quelleest la fonction caractéristique de chaque ensemble $D_i$.

   **Réponse : car$_{D_i}(x) = sg(r(i,y))$** ($y \in D_i$ si $r(i,y) = 0$)

2. En déduire la fonction caractéristique de l'ensemble D des nombres entiers divisibles à la fois par *1*, 2,.., et *k*.

   **Réponse : car$_D(x) = sg\Sigma(r(i,y))$ pour *i* allant de 1 à *k***

3. Sachant que le langage L : $\{w \mid w$ est un multiple de $2\}$ et le langage L' : $\{w \mid w$ est un multiple de $3\}$ sont primitif récursifs, **déduire** de la question 2 que le langage L" : $\{w \mid w$ est un multiple de $6\}$ est aussi primitif récursif.

   **Réponse : car$_{L''}(w) = sg(r(2,w) + r(3,w))$**

**EXERCICE 2 : (2 Pts)**

Ecrire la machine de Turing qui calcule la fonction $f(x)$ telle que (Ne pas dépasser 10 instructions) :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x = 0 \\ x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

## Correction

$q_0I0q_0$
$q_00Dq_1$
$q_10Iq_2$
$q_2IGq_2$
$q_20Iq_3$

**EXERCICE 3 : (6 Pts)**

Donner les grammaires engendrant les trois langages suivants, (Ne pas justifier):

**1.** $L_1 = \{a^n b^m / m = 0 \text{ si n est pair et } m = 1 \text{ si n est impair}\}$

**Réponse (1pt)**

$S \to a\, S_1 \;/\; \varepsilon$ $\qquad$ $S_1 \to a\, S_0 \;/\; b$

**2.** $L_2 = \{a^i\, b^j\, c^k \text{ avec } k = (i+j)/2\}$

**Réponse (2.5pts)**

$S \to a\, S_1 \;/\; S_2 \;/\; \varepsilon$
$S_1 \to a\, S\, c \;/\; b\, S_2\, c \;/\; \varepsilon$
$S_2 \to bb\, S_2\, c \;/\; \varepsilon$

**3.** $L_3 = \{ww^Rw, w \in \{a, b\}^*\}$

**Réponse (2.5pts)**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $S \rightarrow S_1 F$ | $A' A \rightarrow A A'$ | $A' a \rightarrow a A'$ | $M b \rightarrow b M$ |
| $S_1 \rightarrow aS_1 A A' / bS_1 B B' / M$ | $M B \rightarrow b M$ | $B' a \rightarrow a B'$ | $MF \rightarrow \varepsilon$ |
| $B' B \rightarrow B B'$ | $M A \rightarrow a M$ | $A' b \rightarrow b A'$ | |
| $A' B \rightarrow B A'$ | $A' F \rightarrow a F$ | $B' b \rightarrow b B'$ | |
| $B' A \rightarrow A B'$ | $B' F \rightarrow b F$ | $M a \rightarrow a M$ | |

**EXERCICE 4 : (8 pts)**
Soit L le langage suivant

$L = \{0^i\ 1^j\ 0^k / \ i, k \geq 0 \text{ et } j > 0\}$

1. Donner la grammaire G <X, S, V, P>du langage L.De quel type est-elle ?
   $S \rightarrow 0S / S_1 \quad S_1 \rightarrow 1\ S_1 / 1\ S_2 \quad S_2 \rightarrow 0\ S_2 / \varepsilon$ **(1pt)** G est de type 3 **(0.5)**
2. Montrer que L(G) = L. $L(G) \subseteq L$ **(1 pt)** et $L \subseteq L(G)$ **(1 pt)** *(Démonstration comme faite en TD)*
3. Dans ce cas FGP( L) = L **(1pt)**.
4. Construire à partir de G, la grammaire G' <X, S', V', P'>engendrant les facteurs gauches propres de L. De quel type est cette grammaire ? C'est la même grammaire **(1pt)** et elle est de type 3 **(0.5pt)**
5. On considère G <X, S, V, P> une grammaire du même type que celui de la grammaire de la question1. Montrer qu'en utilisant les étapes de construction de la question 4, on obtient une grammaire G' <X, S', V', P'> qui engendre les facteurs gauches propres du langage L(G) (Justifier). Que peut-on en conclure ?

**Réponse (1.5)**
Nous prenons une grammaire régulière droite quelconque G<X, V, P, S>. Toutes les productions de P sont de la forme $A \rightarrow w_i\ B / w_i$ avec $w_i \in X$ et $A, B \in V$.

Indications :

Pour construire l'ensemble P' de G', nous allons vérifier toutes les règles de production de P :

- Si une règle de production de P est de la forme $A \rightarrow w_i\ B / w_i$, celle-ci est rajouté à P' (cas de la variable $S_2$ dans la grammaire de la question 1)

- Si une règle de production de P est de la forme $A \rightarrow w_i\ B$ celle-ci est rajouté à P' (cas de la variable $S_1$ dans la grammaire de la question 1)

- Si une règle de production de P est de la forme $A \rightarrow w_i$ seulement celle-ci n'est pas rajouté à P' et on élimine cette variable des autres productions.

La classe des langages réguliers est fermée par rapport à l'opération FGP.