Алгазин Олег Дмитриевич

10/02/2025

Комплексные числа - обощение действительных чисел.

$$arg\ z = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, x > 0 \\ \frac{\pi}{2}, x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, x = 0, y < 0 \\ arctg\frac{y}{x} + \pi, x < 0, y > 0 \end{cases}$$

Связь между полярными и декартовыми координатами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

Алгебраическая форма, Тригонометрическая форма, Показательная форма записи комплексного числа

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Сложение комплексных чисел

$$\begin{aligned} z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \\ z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ 1)\ \textit{Коммутативность} : z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ 2)\ \textit{Ассоциативность} : (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \\ 3)\ \textit{Нейтральный элемент} : z + 0 = 0 \end{aligned}$$

Умножение:

$$\begin{aligned} 1) z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \\ 2)(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \\ 3)(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 \\ 4) z \cdot 1 = z \end{aligned}$$

$$i^2 = -1$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1iy_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = w \Rightarrow z_2 \cdot w = z_1$$

$$(x_2 + iy_2)(u + iv) = x_1 + iy_1$$

$$x_2u - y_2v + i(x_2v + y_2u) = x_1 + iy_1$$

$$\begin{cases} x_2u - y_2v = x_1 \\ x_2v + y_2u = y_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = x_2^2 + y_2^2 = |z_2|^2 \neq 0 \Rightarrow z_2 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1 & -y_2 \\ y_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix} = x_2y_1 - x_1y_2$$

$$u = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$v = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$w = u + iy = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)i$$

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \Rightarrow \overline{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1z_2} = \overline{z_1z_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)^2} = A + Bi$$

$$z_1z_2 = r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|$$

$$Arg(z_1z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = w, wz_2 = z_1 \Rightarrow |w||z_2| = |z_1| \Rightarrow |w| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \Rightarrow |\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$$

$$z^{\frac{1}{n}} = (re^{i\varphi})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}} == r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i\varphi}{n}\frac{2\pi ki}{n}}$$

$$\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, n \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$\mathbb{R}$ - упорядоченное поле

$\mathbb{C}$ - неупорядоченное поле

$i = (0,1) > (0,0) = 0 \Rightarrow (-1,0) = -1 > 0 = (0,0)$

Функции комплексного переменного

$$D \subset \mathbb{C}, \forall z \in D \to \textit{одна или несколько комплексных переменных } w$$

$$w = f(z) \textit{ однозначна или многозначна}$$

1. однозначна $w = z^2$
2. n-значна $w = \sqrt[n]{z}$
3. ∞-значна $w = Arg(z)$

$$\begin{cases} u = u(x,y) = \mathrm{Re}(w) \\ v = v(x,y) = \mathrm{Im}(w) \end{cases} \Leftrightarrow w = f(z)$$

$$w = z^2$$

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow \begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{cases}$$

Линейная функция

$$w = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

$$a = re^{i\varphi}$$

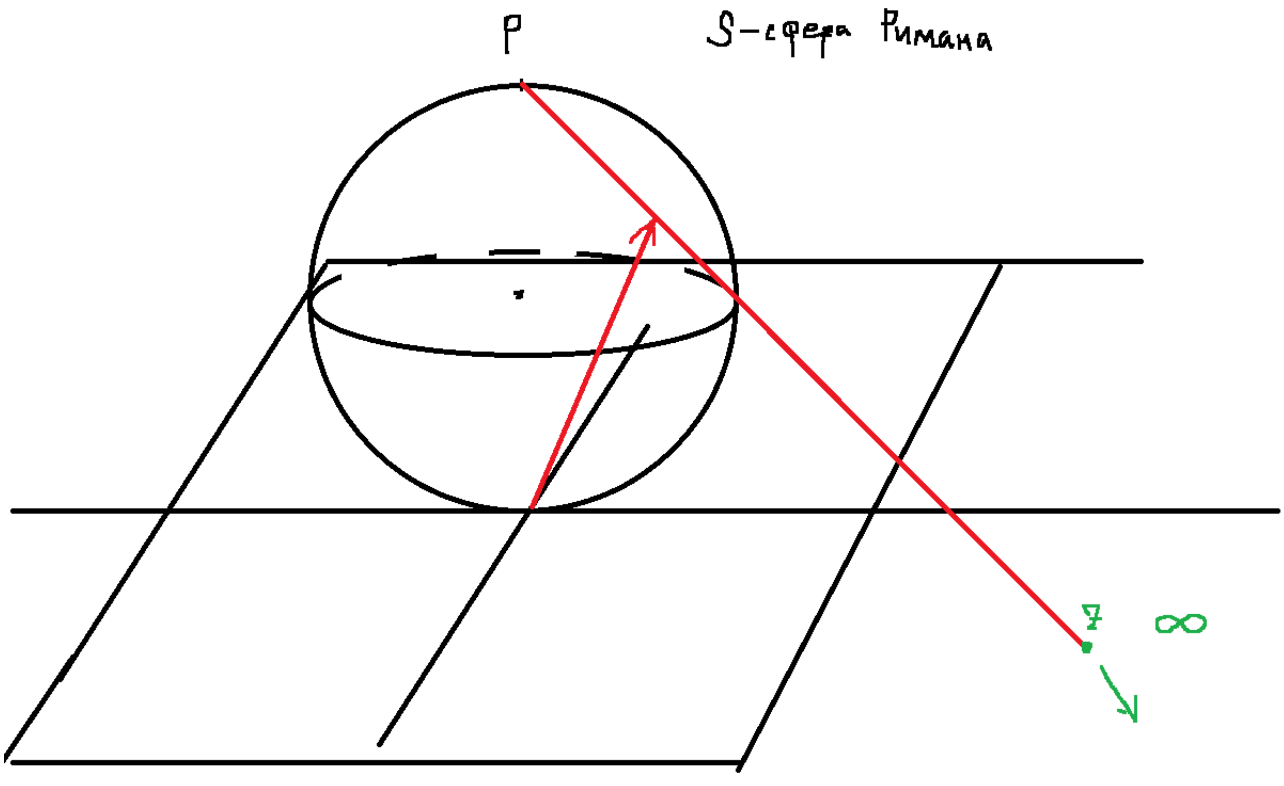
$$w = re^{i\varphi}z + b$$

Совокупность:

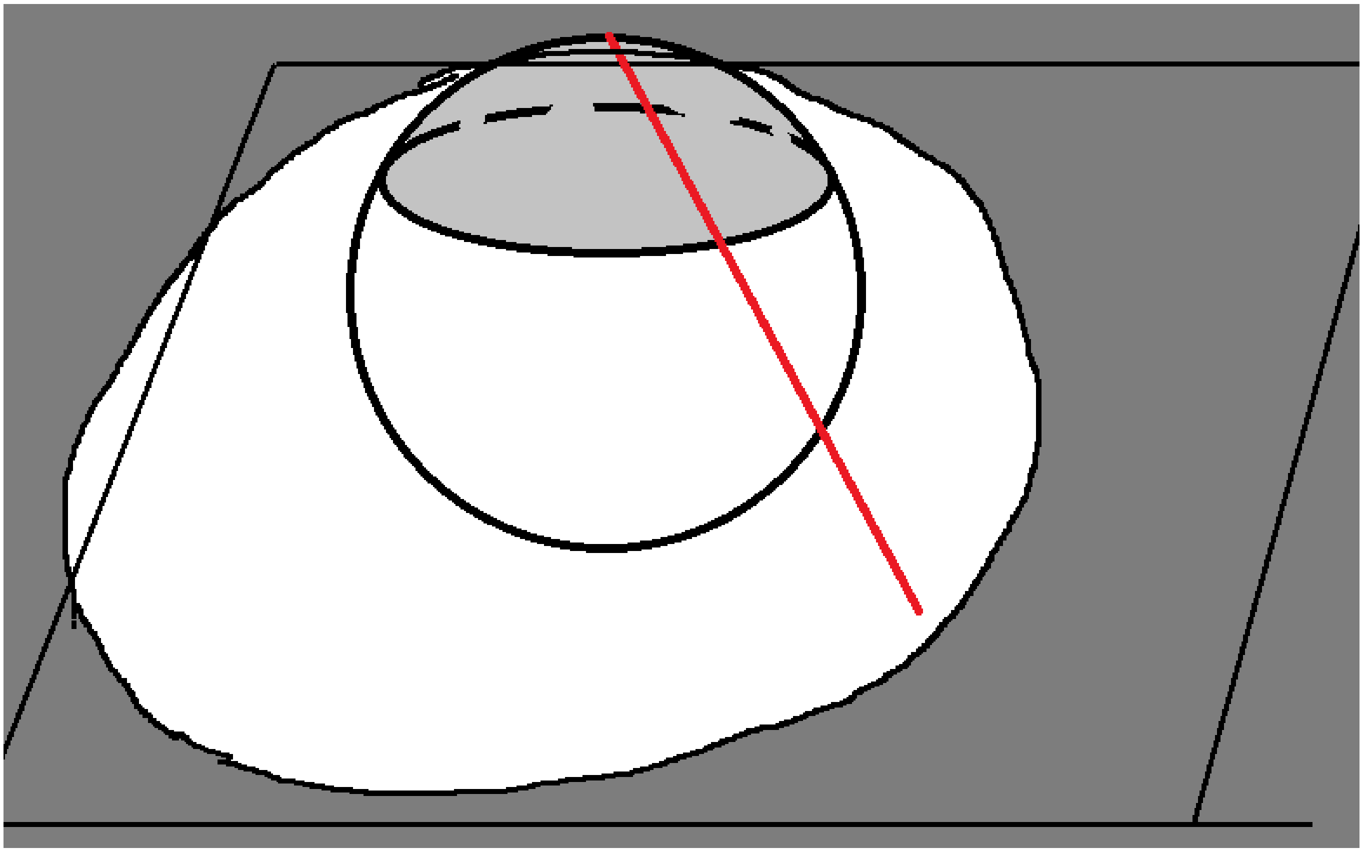
1. Растяжение/Сжатие
2. Поворот
3. Параллельный перенос

17/02/2025

Сфера Римана



$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}} \leftrightarrow S$$
$$\infty \leftrightarrow S$$
$$\text{Окр } \infty \text{ - } |z| > R$$



Предел

$$\{z_n\} \text{ - последовательность комплексных чисел}$$
$$A \text{ - предел последовательности}$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N (n > N \implies |z_n - A| < z)$$
$$A = \lim_{n \to \infty} z_n$$

Ряд

$$z_n = x_n + iy_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$
$$A = B + iC$$
$$|z_n - A| = |x_n + iy_n - B - iC| = |(x_n - B) + i(y_n - C)| = \sqrt{(x_n - B)^2 + (y_n - C)^2} \to 0$$
$$\Leftrightarrow |x_n - B| \to 0 \wedge |y_n - C| \to C$$

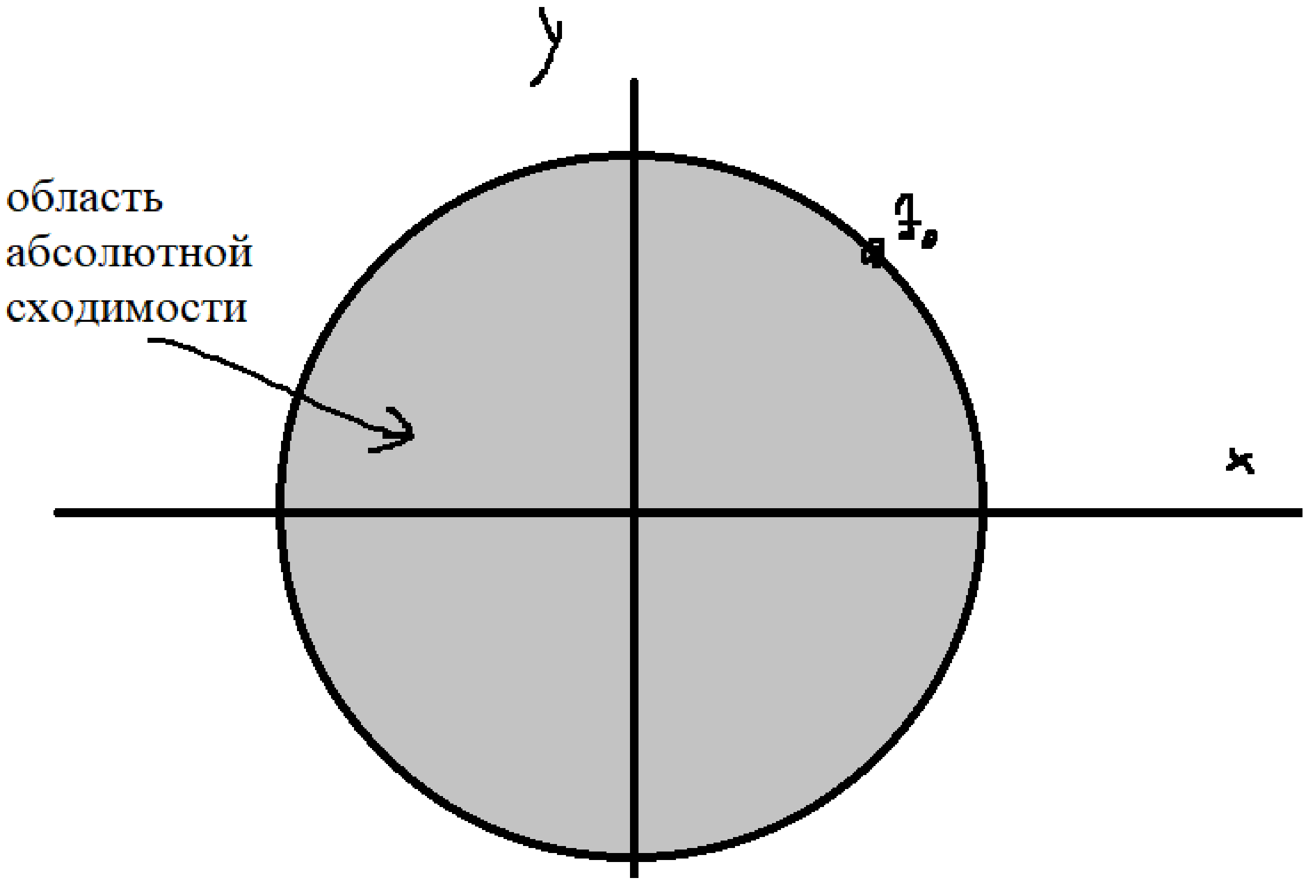
Комплексный ряд сходится тогда и только тогда когда сходятся ряды, соответствующие его действительной и мнимой части

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \text{ - функциональный ряд}$$
$$f_n(z) \text{ обл. на одном множестве } D \subset \mathbf{C}$$

Теорема Абеля

Если ряд (1) сходится в точке z_0, то он сходится в области $|z| < |z_0|$

Если расходится, то расходится для $|z| > z_0|$ тем более



Элементарные функции комплексной плоскости

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ 0! = 1$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Функция Коши-Адамара

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$$

$$\text{абсолютно сходится в круге } |z| < R$$

$$R = \frac{1}{L}, L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}$$

$$L = \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|}$$

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2+(-1)^n)^n(z+i)^n$$
$$\sqrt[n]{|C_n|}=\sqrt[n]{(2+(-1)^n)^n}=2+(-1)^n$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|C_n|}=3$$

$$\cos(-z)=\cos(z)$$
$$\sin(-z)=-\sin(z)$$
$$\cos(0)=1$$
$$\sin(0)=0$$
$$e^0=1$$
$$e^{iz}=1+iz-\frac{z^2}{2}+\frac{iz^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{iz^5}{5!}+\dots=$$
$$\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\dots\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots\right)=\cos z+i\sin z$$

Формула Эйлера

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z$$
$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}$$

$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z \implies \begin{cases} \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\ \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \text{ch}\ z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \\ \text{sh}\ z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \end{cases}$$
$$\cos iz = \frac{e^{-z}+e^{z}}{2} = \text{ch}\ z$$
$$\sin iz = \frac{e^{-z}-e^{z}}{2i} = i\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = i\text{sh}z$$
$$\cos(iz) = ch(z)$$
$$\sin(iz) = ish(z)$$
$$ch(iz) = \cos(z)$$
$$sh(iz) = i\sin z$$

Теорема сложения для экспонент

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$
$$\text{exp - гомоморфизм}$$
$$f(z_1+z_2) = f(z_1)f(z_2)$$
$$\text{Доказательство:}$$
$$e^{z_1}e^{z_2} = \left(1 + z_1 + \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_1^3}{3!} + \dots\right)\left(1 + z_2 + \frac{z_2^2}{2} + \frac{z_2^3}{3!} + \dots\right) =$$
$$= 1 + (z_1+z_2) + \left(\frac{z_2^2}{2} + z_1z_2 + \frac{z_1^2}{2}\right) + \dots = e^{z_1+z_2}$$

Сложение для синусов и косинусов:

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$
$$\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \cos z_2$$

Доказательство для косинуса (для синуса аналогичное):

$$\cos(z_1+z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}}{2} = \frac{1}{2}(e^{iz_1}e^{iz_2} + e^{-iz_1}e^{-iz_2}) =$$
$$= \frac{1}{2}((\cos z_1 + i\sin z_1)(\cos z_2 + i\sin z_2) + (\cos z_1 - i\sin z_1)(\cos z_2 - i\sin z_2)) =$$
$$= \frac{1}{2}(\cos z_1\cos z_2 + i\sin z_1\cos z_2 + i\cos z_1\sin z_2 - \sin z_1\sin z_2$$
$$+ \cos z_1\cos z_2 - i\sin z_1\cos z_2 - i\cos z_1\sin z_2 - \sin z_1\sin z_2) =$$
$$= \cos z_1\cos z_2 - \sin z_1\sin z_2$$
$$\cos(z_1-z_2) = \cos z_1\cos z_2 + \sin z_1\sin z_2$$
$$z_1 = z_2 = z \implies \cos 0 = 1 = \cos^2 z + \sin^2 z$$

$$ch(z_1+z_2) = ch\ z_1 ch\ z_2 + shz_1shz_2$$
$$sh(z_1+z_2) = shz_1chz_2 + shz_1chz_2$$

Доказательство для гиперболического косинуса (для гиперболического синуса аналогичное):

$$ch(z_1+z_2) = \cos(i(z_1+z_2)) = \cos(iz_1)\cos(iz_2) - \sin(iz_1)\sin(iz_2) =$$
$$= ch(z_1)ch(z_2) - i^2sh(z_1)sh(z_2) = chz_1chz_2 + shz_1shz_2$$
$$ch(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1 = ch^2z - sh^2z$$
$$tg(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, ctg(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}, th(z) = \frac{ch(z)}{sh(z)}, cth(z) = \frac{sh(z)}{sh(z)}$$

Логарифм

$$e^W = z, W = Ln(z)$$
$$z = re^{i\varphi}, W = u + iv$$
$$e^{u+iv} = re^{i\varphi}$$
$$e^u e^{iv} = re^{i\varphi}$$

$$e^u = z, u = \ln(z)$$
$$v = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$$
$$Lz = u + iv = \ln z + i(\varphi + 2\pi k)$$
$$Lnz = \ln|z| + i(arg(z) + 2\pi k), k \in \mathbf{Z}$$
$$(Lnz)_k = \ln|z| + i(argz + 2\pi k), k \text{ - фиксирован в разрезе плоскcти}$$

Пример:

$$Ln(-1) = \ln(|-1|) + i(arg(-1) + 2\pi k) = \ln(1) + i(\pi + 2\pi k) = i(\pi + 2\pi k), k \in \mathbf{Z}$$

Ещё про логарифм:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots$$
$$|z| < 1$$
$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n!}$$
$$a > 0,\ a^b = e^{b\ln a}$$
$$w^z = e^{z\ln w}$$
$$(-1)^i = e^{iLn(-1)} = e^{i\cdot i(\pi+2\pi k)} = e^{-\pi-2\pi k}, k \in \mathbf{Z}$$

Обратные функции:

$$w = Arccosz$$
$$\cos w = z$$
$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z$$
$$e^{iw} + e^{-iw} - 2z = 0$$
$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$
$$e^{iw} = \xi$$
$$\xi^2 - 2z\xi + 1 = 0$$
$$\xi = z \pm \sqrt{z^2 + 1}_1 = z + \sqrt{z^2 + 1}$$
$$iw = Ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$$
$$W = -iLn(z + \sqrt{z^2 + 1})$$
$$Arccosz = -iLn(z + \sqrt{z^2 + 1})$$

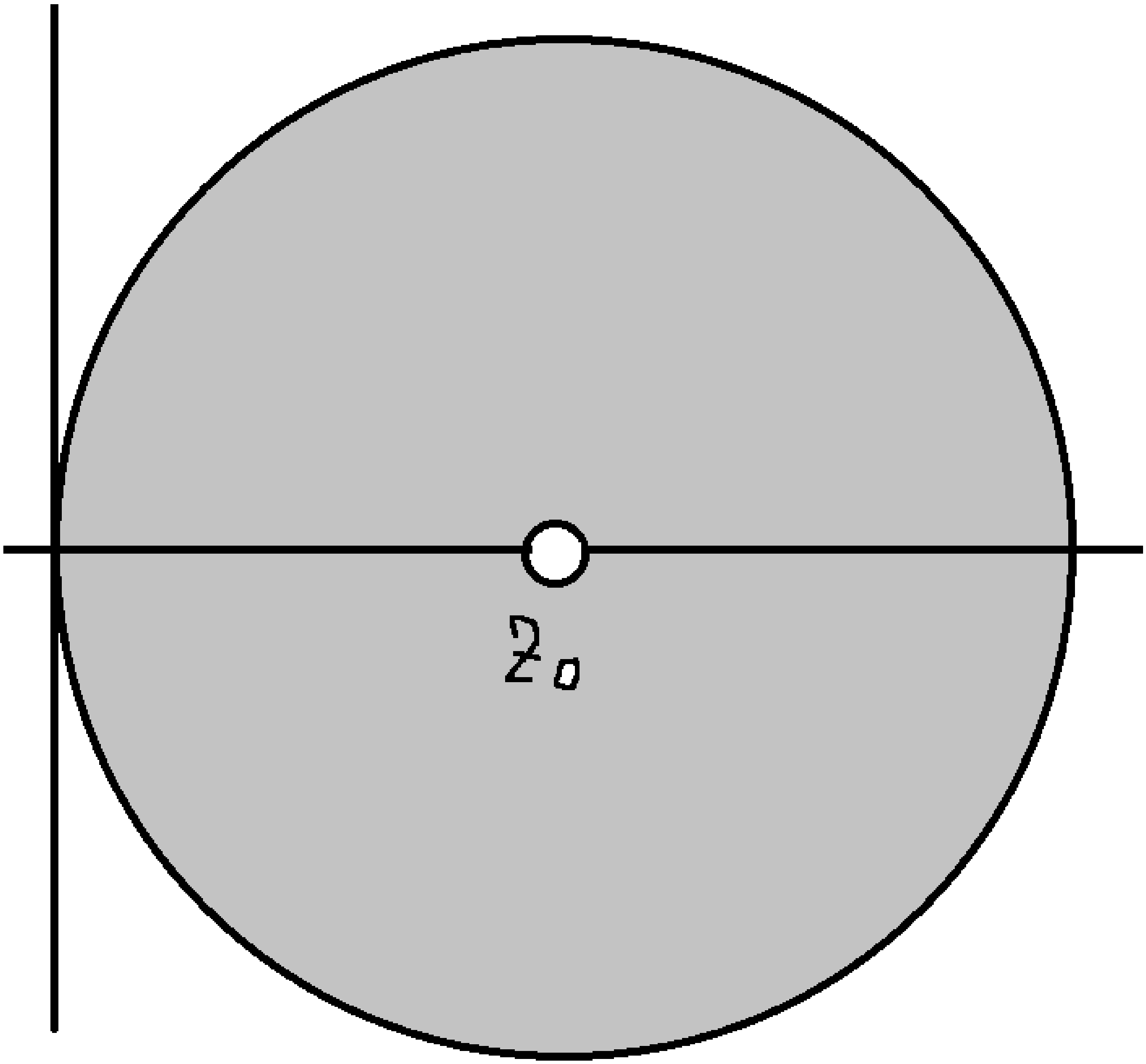
24/02/2025

Предел и непрерывность

$$E \subset \mathbb{C}, f : E \to \mathbb{C}, f(z) \text{ определена на линейном пространстве E }, z_0 \text{ - предельная точка } E$$
$$A \text{ - предел } f(z) \text{ при } z \to z_0 \text{ по множеству } E :$$
$$\lim_{z\to z_0,\ z\in E} f(z) = A := \forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall z \in E\,(\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon)$$

Проколотая окрестность:

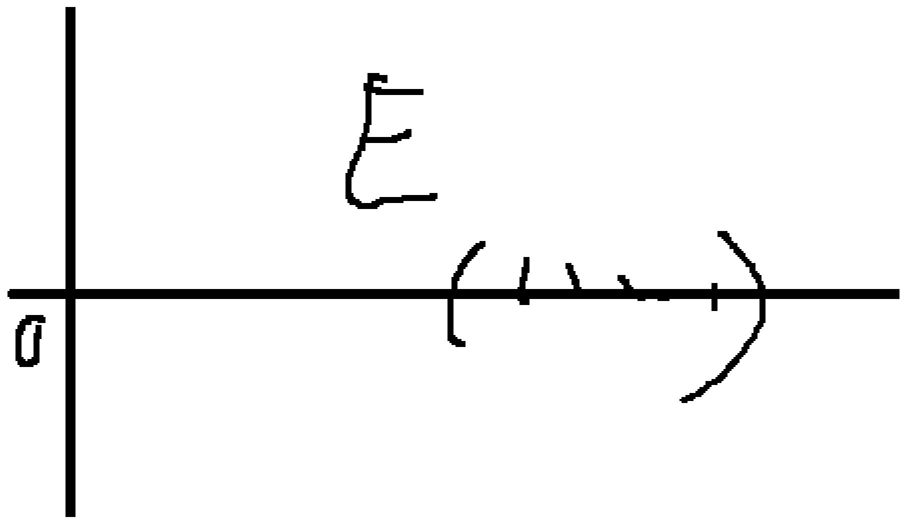
$$E = \cup_R^o(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$$



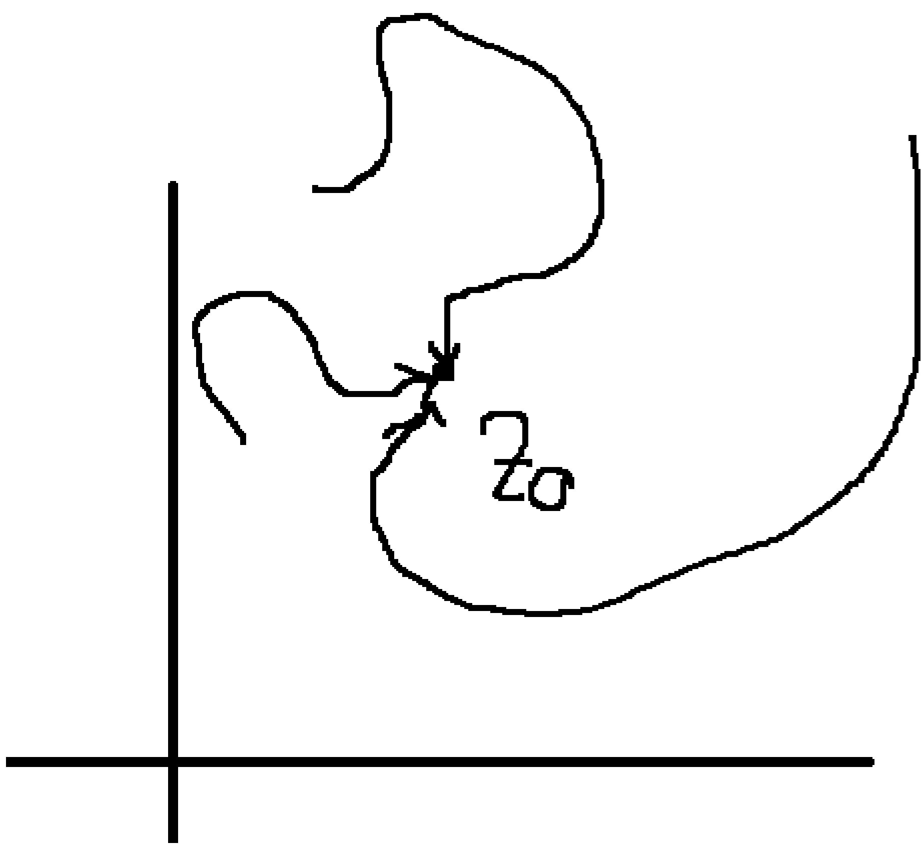
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),\ A = B + iC,\ z = x + iy,\ z_0 = x_0 + iy_0$$
$$\lim_{z \to z_0,\, z \in E} f(z) = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),\,(x,y)\in E} u = B \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0),\,(x,y)\in E} v = C \end{cases}$$

Предельная точка множества E $z_0 \in E$

$f(z)$ - непрерывна в точке z_0 по множеству $E,$ если:
$$\lim_{z \to z_0,\, z \in E} f(z) = f(z_0)$$



$$E = \cup_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < R\}$$
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$



Производная

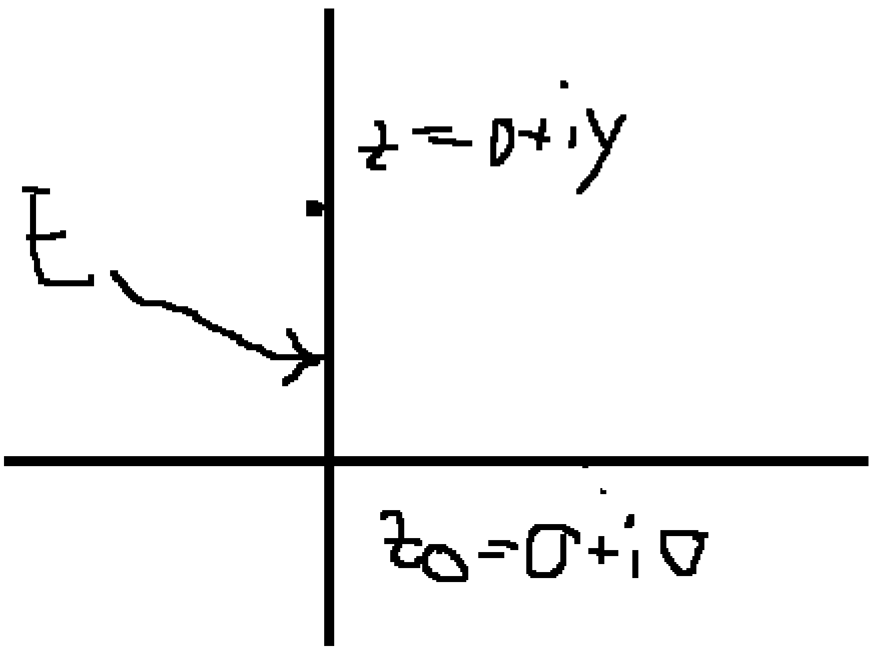
$$f : E \to \mathbb{C}, z_0 \text{ - предельная точка } E,\ z_0 \in E$$
$$f'_E(z_0) := \lim_{z \to z_0,\, z \in E} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Частный случай:

$$E = \cup_R(z_0) \qquad \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0)$$

Пример:

$$f(z) = x$$
$$u = x, v = 0, E = \mathbb{R}$$
$$f'_{\mathbb{R}}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$
$$E = i\mathbb{R}$$
$$f(z) = 0$$
$$f(z_0) = 0$$
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{y \to 0} \frac{0 - 0}{iy - 0} = 0$$
$$f'(z_0) \text{ не сущ}$$



$$n \in \mathbb{N}, z^n = f(z)$$
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^n - z_0^n}{\Delta z} =$$
$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\cancel{z_0^n} + nz_0^{n-1}\cancel{\Delta z} + \frac{n(n-1)}{2!} z_0^{n-2}\cancel{\Delta z^2}^{\,0} + 0 + \cancel{\Delta z^n}^{\,0} - \cancel{z_0^n}}{\cancel{\Delta z}} = nz_0^{n-1}$$
$$(z^n)' = z^{n-1}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, |z| < \infty$$
$$(e^z)' = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots = e^z$$
$$(e^z)' = e^z$$
$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots$$
$$(\cos z)' = -z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \ldots = -\sin z$$
$$(\cos z)' = -\sin z$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$$
$$(\sin z)' = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \cos(z)$$
$$(\sin z)' = \cos z$$
$$(\text{ch } z)' = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \text{sh } z$$
$$(\text{sh } z)' = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)' = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \text{ch } z$$
$$(\text{tg } z)' = \left(\frac{\sin z}{\cos z}\right)' = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$(\text{Ln } z)_k = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$$
$$w = \text{Ln } z$$
$$z = e^w$$
$$w'_z = \frac{1}{z'_w} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$
$$(\text{Ln } z)' = \frac{1}{z}$$

$$\exists f'(z);\ \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0)$$
$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) + \alpha(\Delta z), \text{где } \alpha \text{ - бесконечно малая}$$
$$|\Delta z| < R, |z - z_0| < R, \quad \Delta w = f'(z_0)\Delta z + \alpha f(\Delta z)\Delta z \text{ - функция дифференцируема в точке } z_0$$

$$f(z) \text{ аналитическая в точке } z_0, \text{ если она дифференцируема в некоторой окрестности точки } z_0$$

Синонимы: аналитическая, голоморфная, правильная, регулярная

$$f(z) \text{ аналитическая в области } D, \text{ если она дифференцируема в каждой точке } D$$

$$e^z, \sin z, \cos z, \text{sh } z, \text{ch } z \text{ дифференцируемы в } \mathbb{C} \Rightarrow$$
$$\text{аналитические в } \mathbb{C} \text{ - целые}$$

Аналитическую функцию можно разложить в ряд.

Функция непрерывна $\Leftrightarrow$ её действительная и мнимая часть непрерывны

$$f(z) = x + i0$$
$$u = x \qquad \text{- не аналитична}$$
$$v = 0$$

Теорема

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \text{ дифференцируема в точке } z_0=x_0+iy_0$$
$$\text{как функция комплексного переменного } \Leftrightarrow$$
$$u(x,y), v(x,y) \text{ дифференцируемы в точке } (x_0,y_0)$$
$$\text{и выполняются условия Коши-Римана :}$$
$$\text{C.-R.} = \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{matrix}$$

Необходимость:

$$\Delta w = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z$$
$$\Delta u + i\Delta v = (A+Bi)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_2(\Delta x, \Delta y))(\Delta x + i\Delta y)$$
$$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \alpha_1 \Delta x - \alpha_2 \Delta y$$
$$\Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \alpha_2 \Delta x + \alpha_1 \Delta y$$
$$\begin{matrix} A = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} \\ B = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{matrix} \implies \begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{matrix}$$

Достаточность:

$$u, v \text{ - дифференцируемы и } \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$
$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$
$$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + \alpha_3 \Delta x + \alpha_4 \Delta y$$
$$\alpha_i \text{ - бесконечно малые}$$
$$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$
$$\Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \alpha_3 \Delta x + \alpha_4 \Delta y$$
$$\Delta w = \Delta u + i\Delta w = A\Delta x - B\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y + i(B\Delta x + A\Delta y + \alpha_3 \Delta x + \alpha_4 \Delta y) =$$
$$= A(\Delta x + i\Delta y) + Bi(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\alpha_3)\Delta x + i\Delta y(\alpha_4 - i\alpha_2) =$$
$$= (A+Bi)\Delta z + (\alpha_1 + i\alpha_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}\Delta z + i\frac{\Delta y}{\Delta z}(\alpha_4 - i\alpha_2)\Delta z =$$
$$= (A+Bi)\Delta z + \alpha\Delta z, \text{ где } \alpha = (\alpha_1 + i\alpha_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + i\frac{\Delta y}{\Delta z}(\alpha_4 - i\alpha_2)$$

$$|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$$
$$|z_1| \le |z_2| + |z_1+z_2|$$
$$|z_1| - |z_2| \le |z_1+z_2|$$
$$-(|z_1| - |z_2|) \le |z_1+z_2|$$
$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1| + |z_2|$$

$$|\alpha| \le (|\alpha_1| + |\alpha_2|)\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| + (|\alpha_4| + |\alpha_2|)\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le$$
$$\le |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| + |\alpha_4| \to 0 \text{ - доказали, что } \alpha \text{ - бесконечно малая}$$

Функция $u(x,y)$ называется гармонической, если она удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Теорема

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \text{ - аналитическая в области } D \implies$$
$$u(x,y), v(x,y) \text{ - гармонические в области } D$$

Доказательство:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \begin{cases} u_{xx} = v_{xy} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases} \implies u_{xx} + v_{yy} = 0 \\ \begin{cases} u_{xy} = v_{yy} \\ u_{xy} = -v_{xx} \end{cases} \implies v_{yy} + v_{xx} = 0 \end{matrix}$$

03/03/2025

$f(x)$ - аналитическая в области D, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \Rightarrow$

$u(x,y), v(x,y)$ - гармонические, т.е. удовлетворяют уравнению Лапласа

Пусть задана $u(x,y)$ в области D. Найти аналитическую функцию $f(z), \mathrm{Re} f(z) = u(x,y)$

Пусть задана $v(x,y)$ в области D. Найти аналитическую функцию $f(z), \mathrm{Im} f(z) = v(x,y)$

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \text{ - аналитическая в } D \ \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y & u \text{ задана} \\ u_y = -v_x & v \text{ надо найти} \end{cases}$$

$$v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy = Pdx + Qdy$$

D - односвязная

P, Q непрерывные

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -u_{yy}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = u_{xx}$$

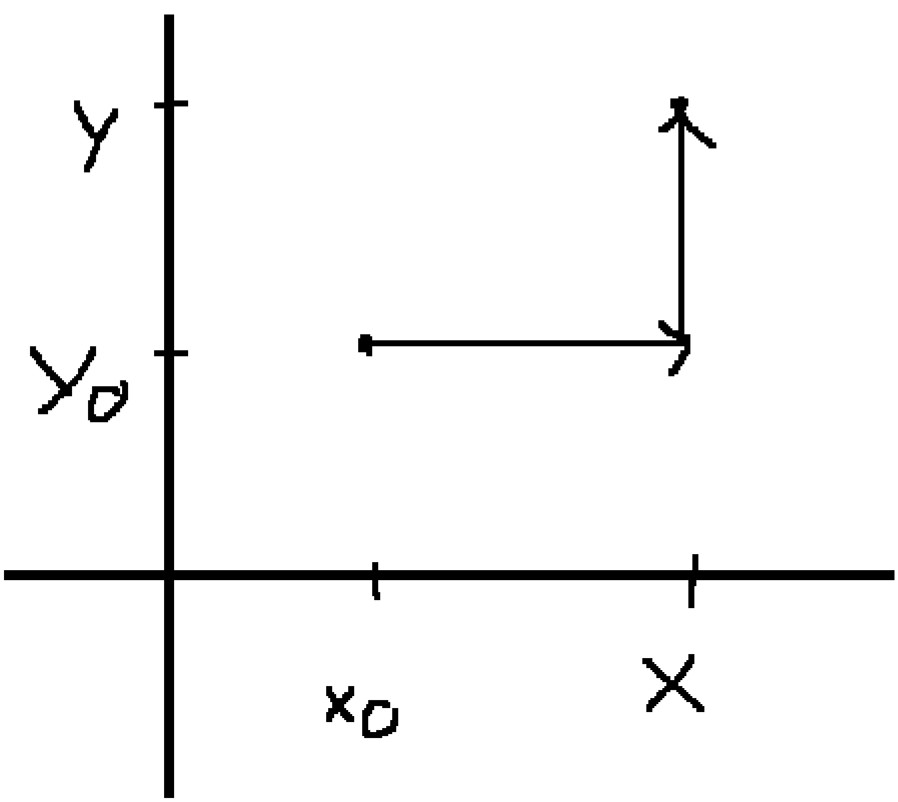
$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow \text{ Форма является точной}$$

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -u_y dx + u_x dx + C$$

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) + iC, C \in \mathbb{R}$$

не зависит от пути

$$v(x,y) = \int_{x_0}^{x} -u_y(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} u_x(x,y)dy$$



2 способ

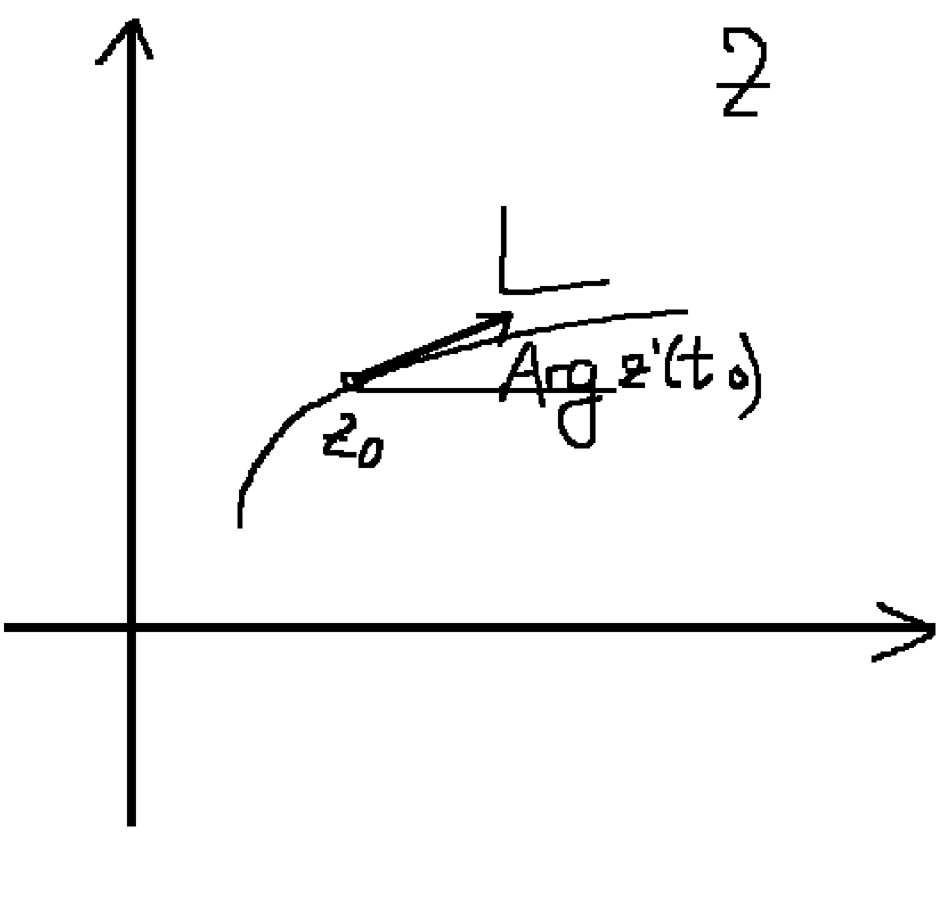
$$\text{C.R.}: \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \implies \begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases}$$
$$v = \int (-u_y) dx + \varphi(y)$$

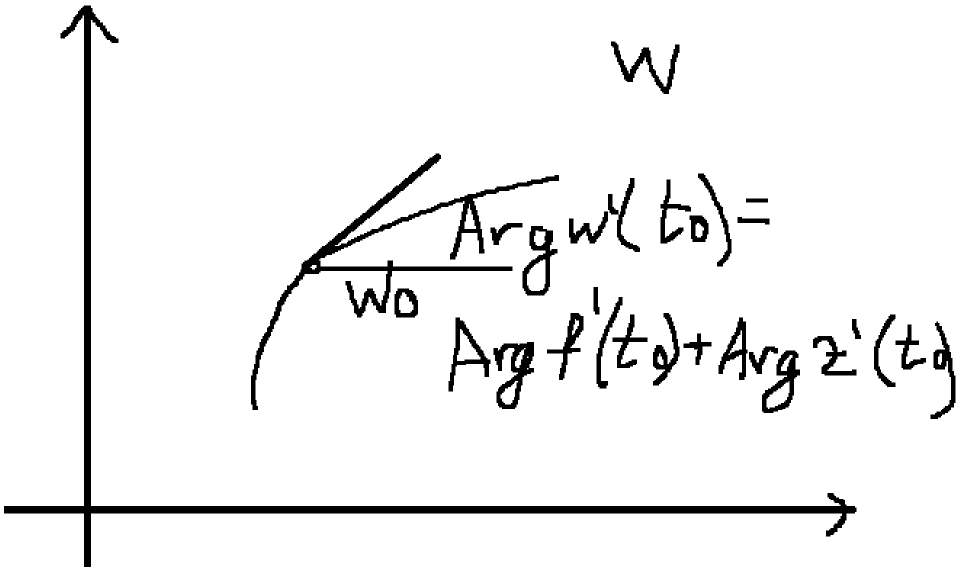
Пример

$$\begin{gathered}
u = x^2 - y^2 - x \text{ в } \mathbb{C} \\
u_x = 2x - 1, u_{xx} = 2 \\
u_y = -2y, u_{yy} = -2 \\
u_{xx} + u_{yy} = 0 \\
\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = 2y \\ v_y = 2x - 1 \end{cases} \\
v = \int 2y dx + \varphi(y) = 2xy + \varphi(y) \\
v_y = 2x + \varphi'(y) \\
\cancel{2x} + \varphi'(y) = \cancel{2x} - 1 \\
\varphi(y) = \int -1 dy = -y + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow \\
v = 2xy - y + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow \\
f(z) = x^2 - y^2 - x + i(2xy - y + C) \\
\text{Теорема о единственности} \\
y = 0 \Rightarrow x^2 - x + iC|_{x=z} = z^2 - z + iC \\
\text{Если } v(0,0) = 0 \\
v(0,0) = 0 \Rightarrow C = 0
\end{gathered}$$

Геометрический смысл аргумента и модуля производной

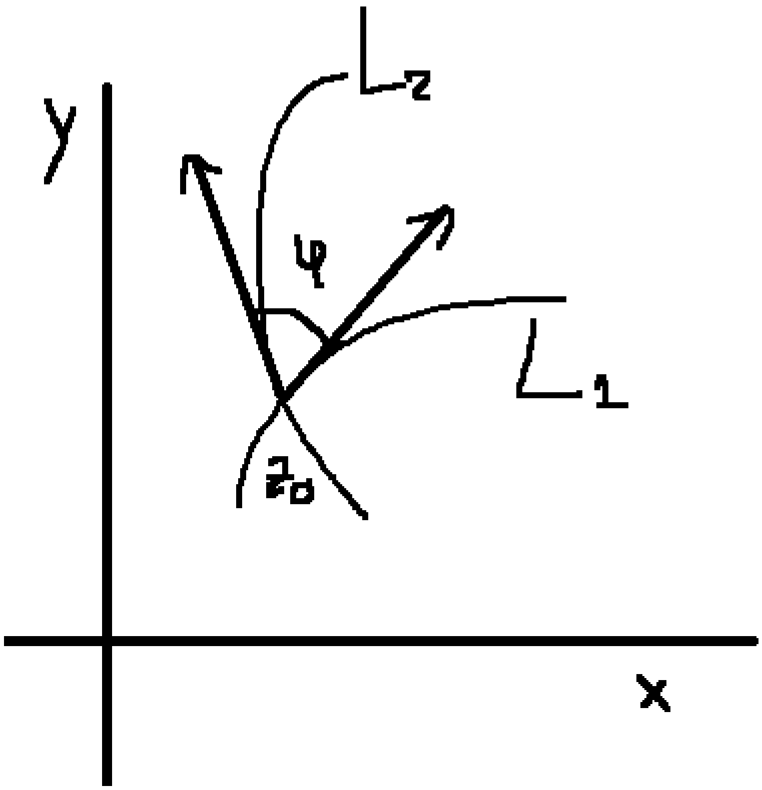
\end{gather}$$

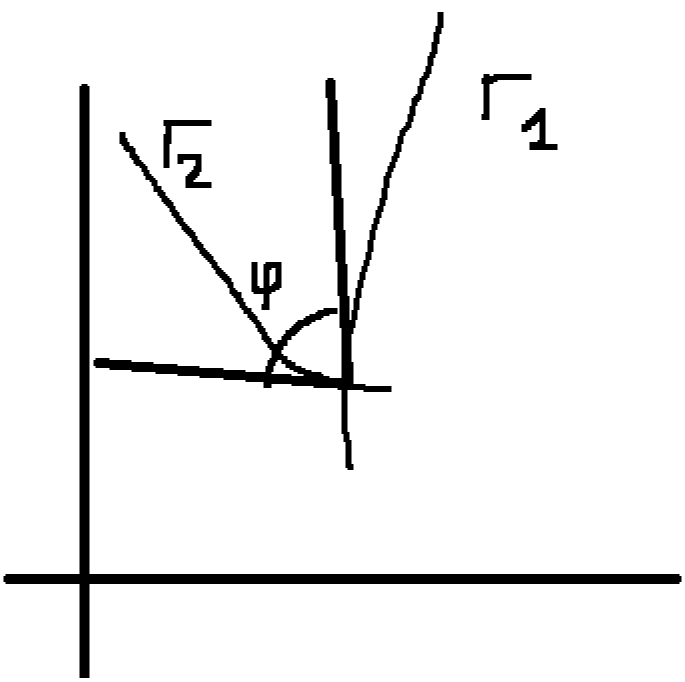




Угол между кривыми - угол между касательными (в точке пересечения)

Производная сохраняет углы между кривыми



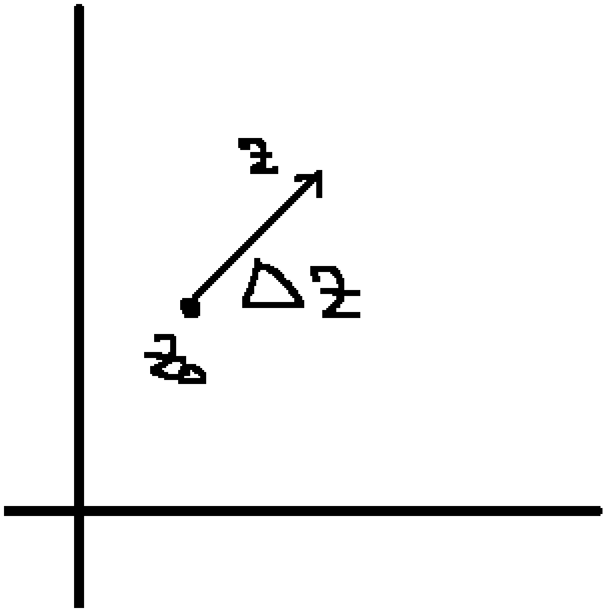


$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

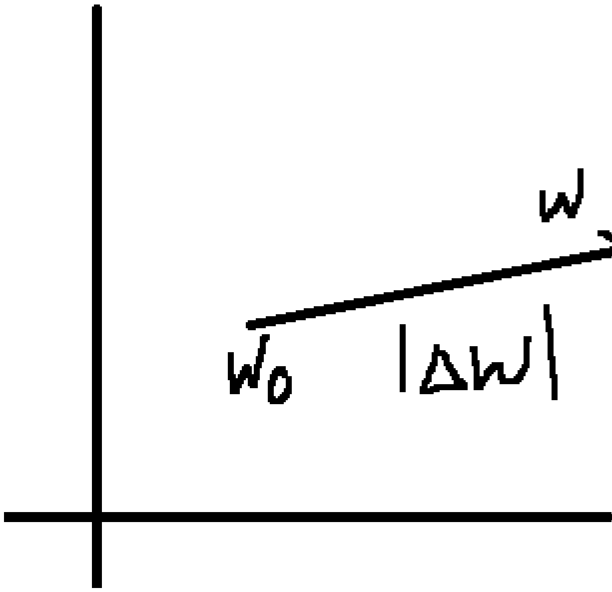
$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$

$|\Delta z|$ мал $|f'(z_0)| \approx \dfrac{|\Delta w|}{|\Delta z|}, |\Delta w| \approx |f'(z_0)||\Delta z|$

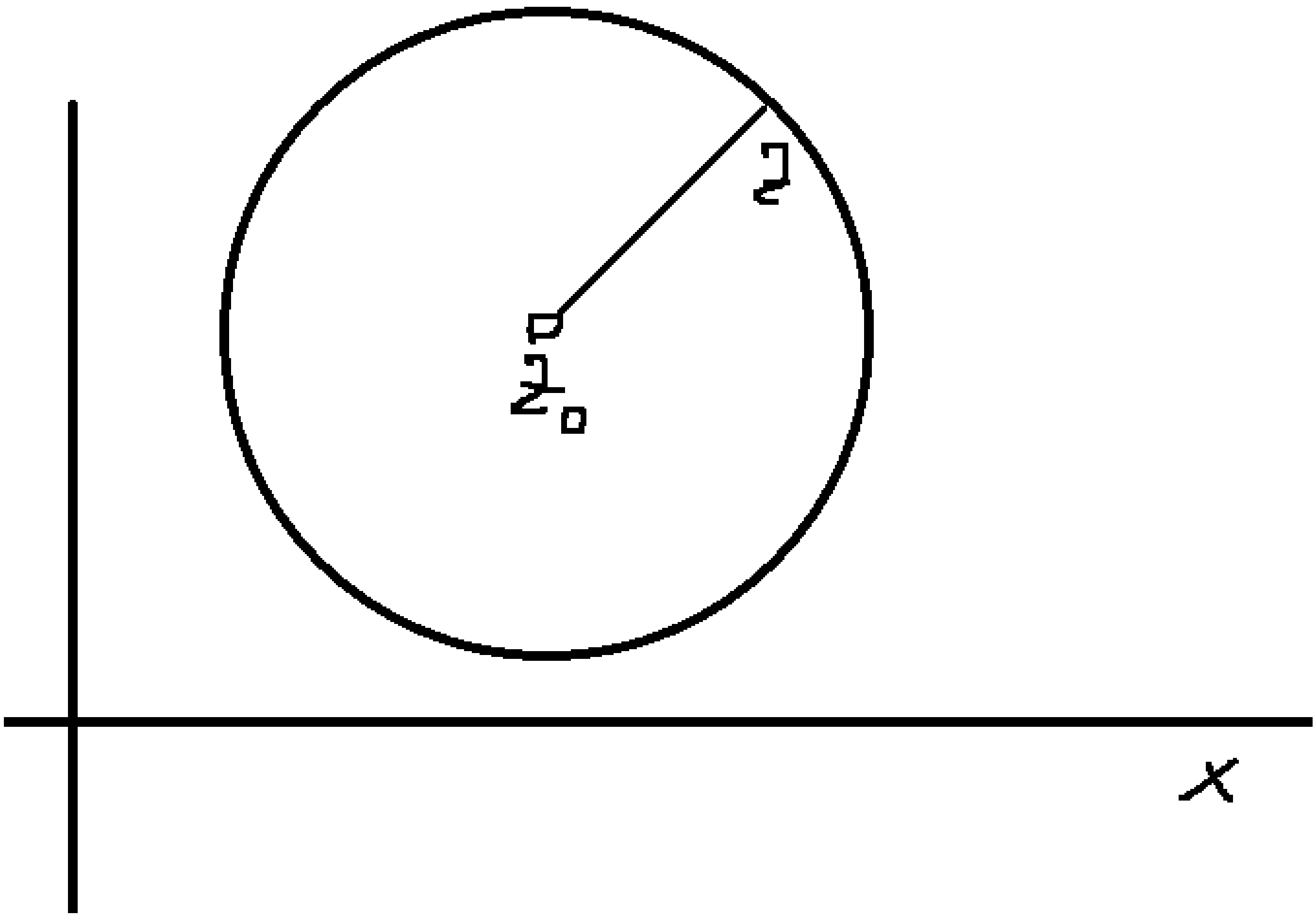
$|f'z_0|$ коэффициент растяжения

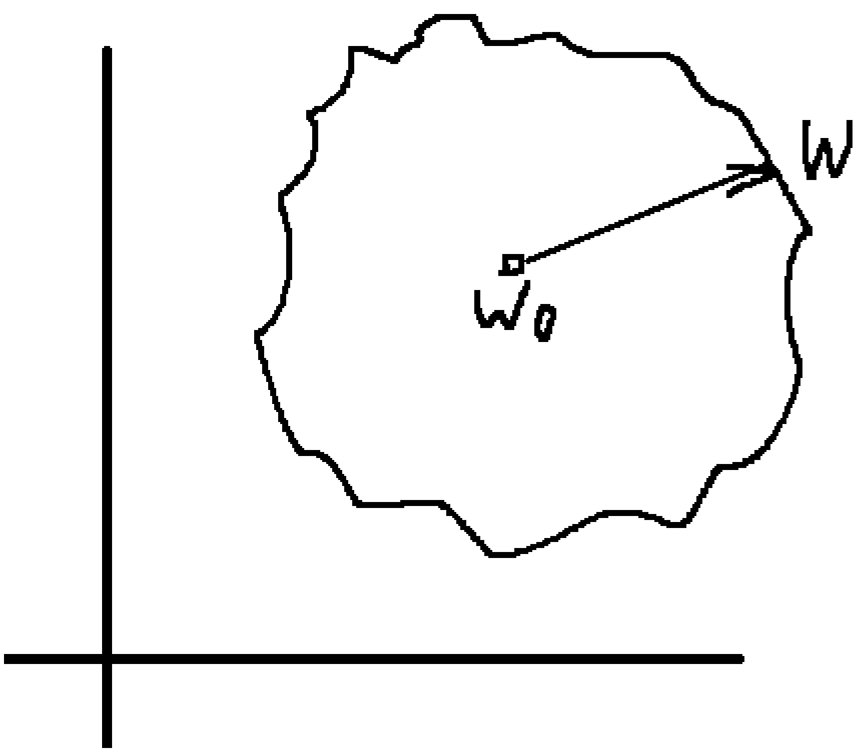


z
Δz
z0



w
w0
|Δw|





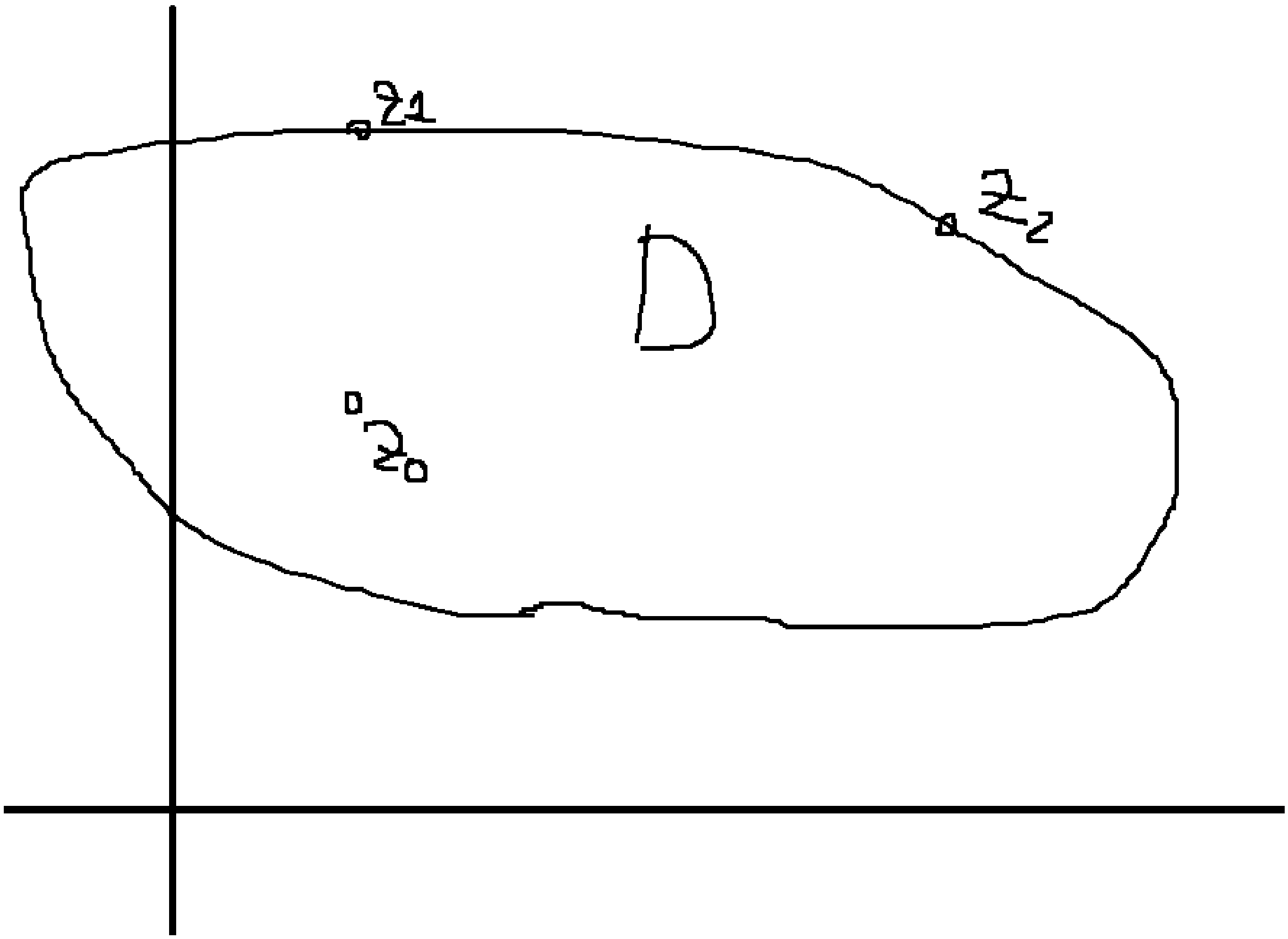
Конформные отображения

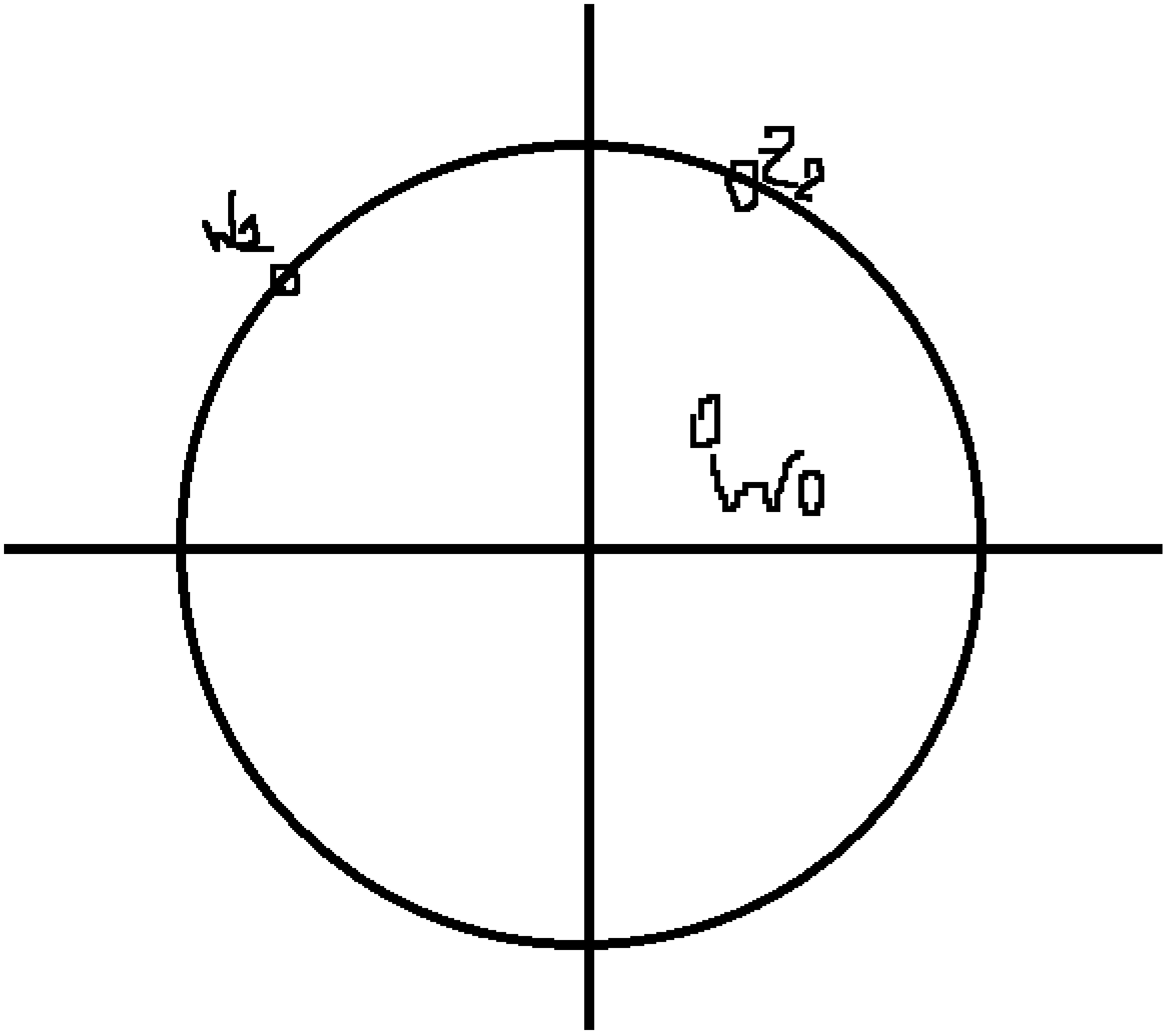
На расширенной комплексной плоскости часть плоскости, вырезаемая кругом, является односвязной. Область D односвязная относительно расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, если её граница ∂D -

связное множество (состоит из одного куска). В противном случае - многосвязная.
Примеры
$D = \mathbb{C}$, $\partial D = \{\infty\}$ - односвязная
$D = \overline{\mathbb{C}}$, $\partial D = \varnothing$ - односвязная
$D = \overline{\mathbb{C}} \backslash \{z_0\}$, $\partial D = \{z_0\}$ - односвязная
$D = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| < R\}$, $\partial D = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = R\}$ - односвязная
Положительный обход - такой обход, что область остаётся слева.
$D = \{z \in \overline{\mathbb{C}} | \ |z| > R\}$, $\partial D = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = R\}$ - односвязная

Теорема Римана
Любую односвязную относительно $\overline{\mathbb{C}}$ область, границы которой содержат не менее 2-х точек, можно конформно отобразить на $D = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| < 1\}$ бесконечно многими способами.
Односвязные области, не подходящие под условие "содержит не менее 2-х точек":
$\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}}, \overline{\mathbb{C}} \backslash \{z_0\}$

$$w = f(z)$$
$$\begin{cases} w_0 = f(z_0) \\ \arg f'(z_0) = \alpha \end{cases}$$
$$\begin{cases} w_0 = f(z_0) \\ w_1 = f(z_1) \end{cases}$$
$$\begin{cases} w_1 = f(z_1) \\ w_2 = f(z_2) \\ w_3 = f(z_3) \end{cases}$$


z1
z2
D
z0



10/03/2025

$f(z)$ конформно отоброжает D на G
$f^{-1}(z)$ конформно отображает G на D
$g(z)$ конформно отображает G на O
$\Rightarrow g(f(z))$ конформно отображает D на O
D, G - односвязные
$\partial D, \partial G$ - содержат не менее 2-х точек
По теореме Римана есть конформные функции $G \to U$ и $D \to U$.

$$F(z) = g^{-1}(f(z)) : D \to G$$

D, G - односвязные
$\partial D, \partial G$ - кусочно-гладкие
$w(z) = f(z)$ - аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D}$, отображает $\overline{D}$ на $\overline{G}$.
Если ∂D отображается взаимнооднозначно на ∂G с сохранением направления обхода, то $f(z)$ конформно отображает D на G.

1. Линейная функция
   $w = az + b$
   $z \to \infty \Rightarrow w \to \infty$
   Аналитическая в $\mathbb{C}$, $w' = a \neq 0$.

$z = \frac{w-b}{a}$ - функция однолистна

Конформно отображает $\overline{\mathbb{C}}$ на $\overline{\mathbb{C}}$. $\infty \to \infty$

$a = re^{i\varphi},\ w = re^{i\varphi}z + b$

1 Поворот на угол φ

2 Растяжение (сжатие) с коэффициентом r

3 Параллельный перенос на вектор b

2. Дробно-линейная функция

   $w = \frac{az+b}{cz+d}, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, c \neq 0$

   Если $c = 0$, $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ - линейная

   $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow c = \alpha a, d = \alpha b$

   $w = \frac{az+b}{\alpha(az+b)} = \frac{1}{\alpha} = \mathrm{const}$

   Аналитическая?

$$w(cz+d) = az+b$$
$$zcw + dw = az + b$$
$$z(a - cw) = dw - b$$
$$z = \frac{dw-b}{-cw+a}$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

   $f(\infty) = \frac{a}{c}$

   $-\frac{d}{c} \to \infty$

   Конформно отображает $\overline{C}$ на $\overline{C}$.

$$c \neq 0$$
$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{\alpha z + \beta}{z + \gamma}$$
$$z_1, z_2, z_3 \wedge w_1, w_2, w_3$$
$$w_k = \frac{\alpha z_k + \beta}{z + \gamma}, k = \overline{123}$$

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{z + \gamma} = \frac{\alpha(z+\gamma) + \beta - \alpha\gamma}{z + \gamma} = \alpha + (\beta - \alpha\gamma)\frac{1}{z+\gamma}$$

$w_1 = z + \gamma$ - линейная - переводит окружность (в том числе прямые) в окружность

$w_2 = \frac{1}{w_1}$ - пока не знаем, переводит ли окружность в окружность

$w = \alpha + (\beta - \alpha\gamma)w_2$ - линейная - окружность в окружность

$$w_2 = \frac{1}{w_1}$$

$$w = \frac{1}{z}$$

Окружность: $A(x^2 + y^2) + mx + ny + l = 0$

$$x^2 + y^2 = z\overline{z}, x = \frac{z + \overline{z}}{2}, y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

$$Az\overline{z} + m\frac{z + \overline{z}}{2} - in\frac{z - \overline{z}}{2} + l = 0$$

$$Az\overline{z} + \underbrace{\frac{m - in}{2}}_{B}z + \underbrace{\frac{m + in}{2}}_{\overline{B}}\overline{z} + l = 0$$

$$Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + l = 0$$

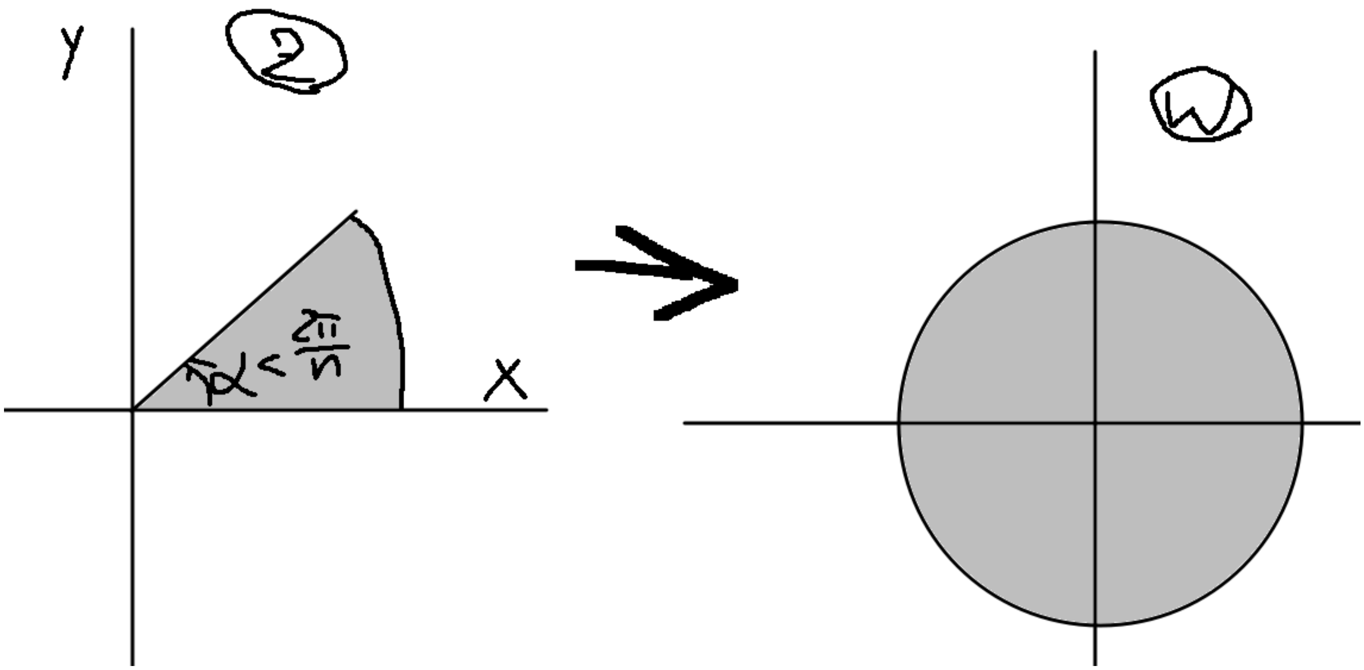
$$z = \frac{1}{w}$$

$$\frac{A}{w\overline{w}} + \frac{B}{w} + \frac{\overline{B}1}{\overline{w}} + l = 0$$

$l w\overline{w} + B\overline{w} + \overline{B}w + A = 0$ - чтд

3. Степенная функция
   $z = \sqrt[n]{w}$ - n-значная

$$0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$$



конформное отображение

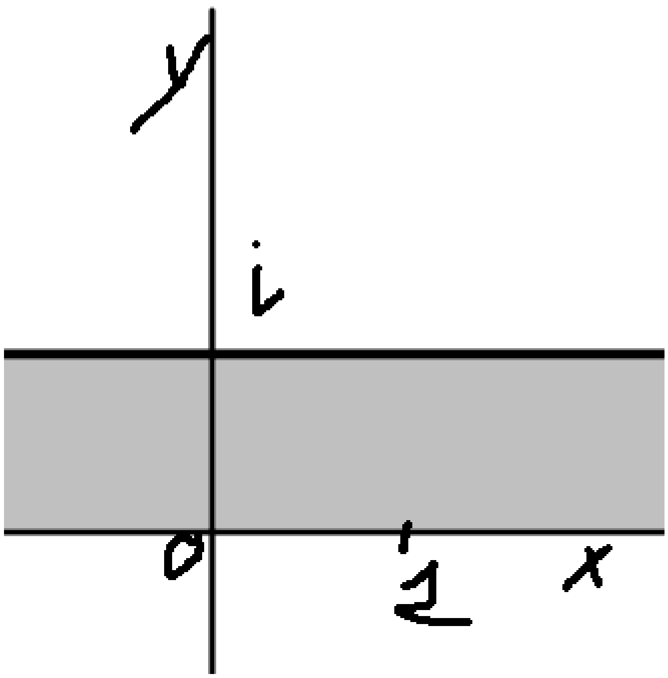
$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

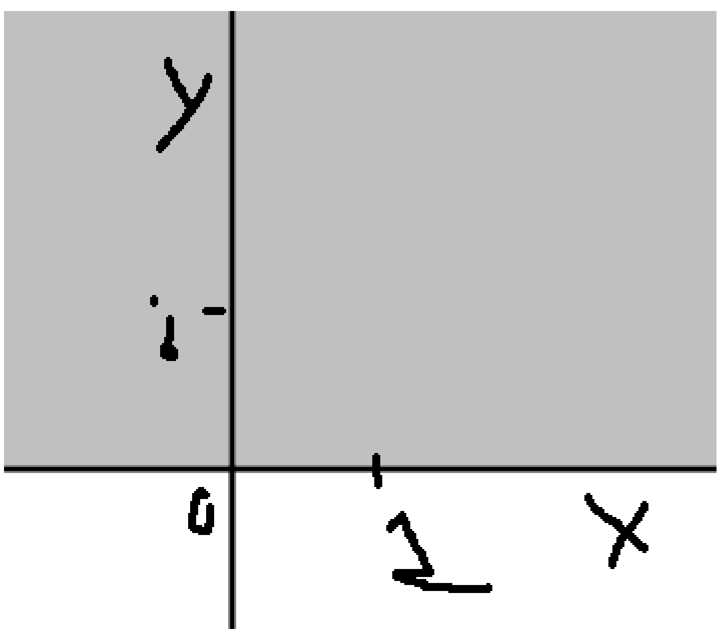
4) Показательная
$w = e^z, w' = e^z \neq 0$

$$\begin{cases} 0 < y < \pi \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$w = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \rho e^{i\varphi}$$

$$\begin{cases} 0 < \rho < \infty \\ 0 < \varphi < \pi \end{cases}$$

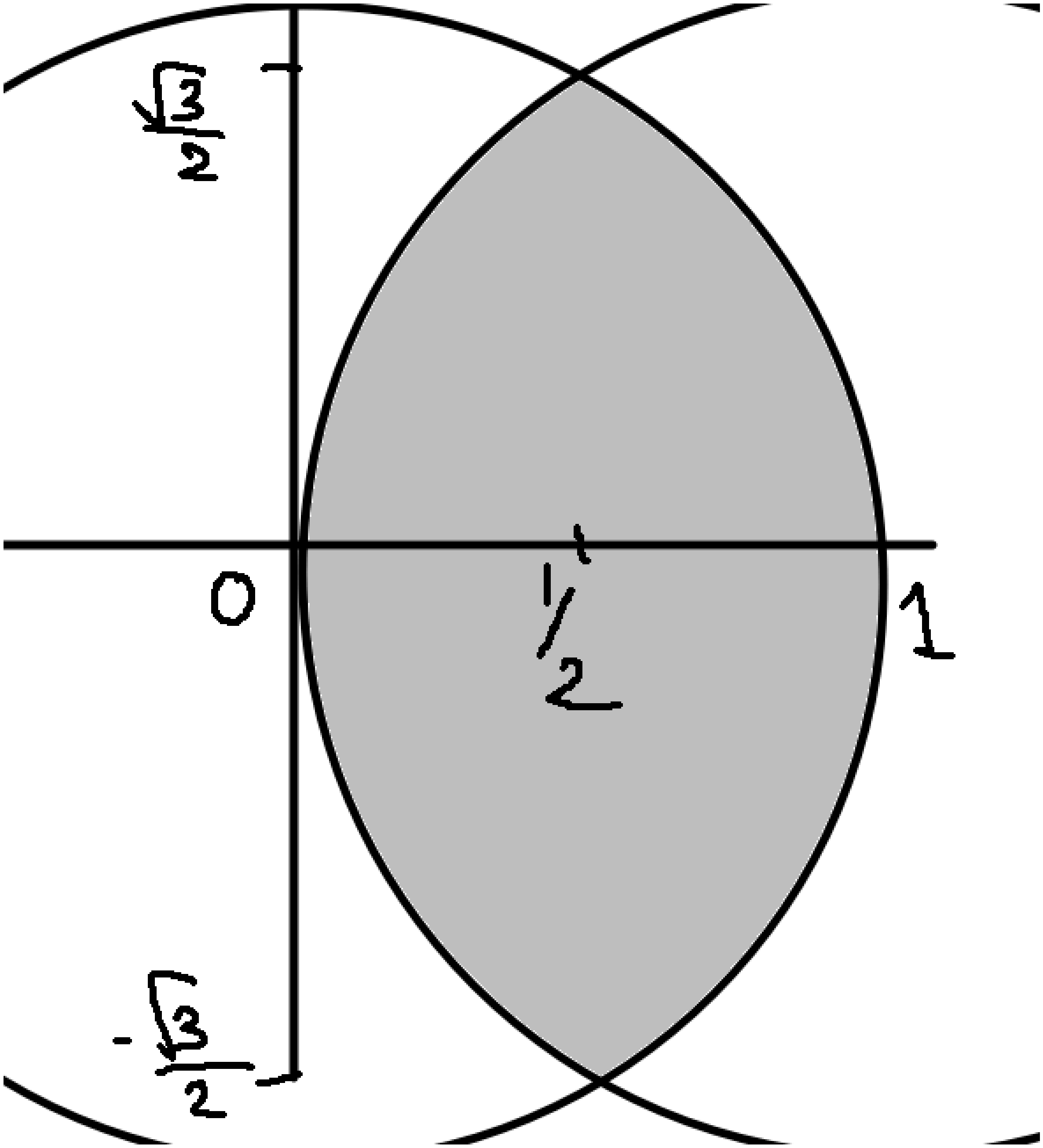




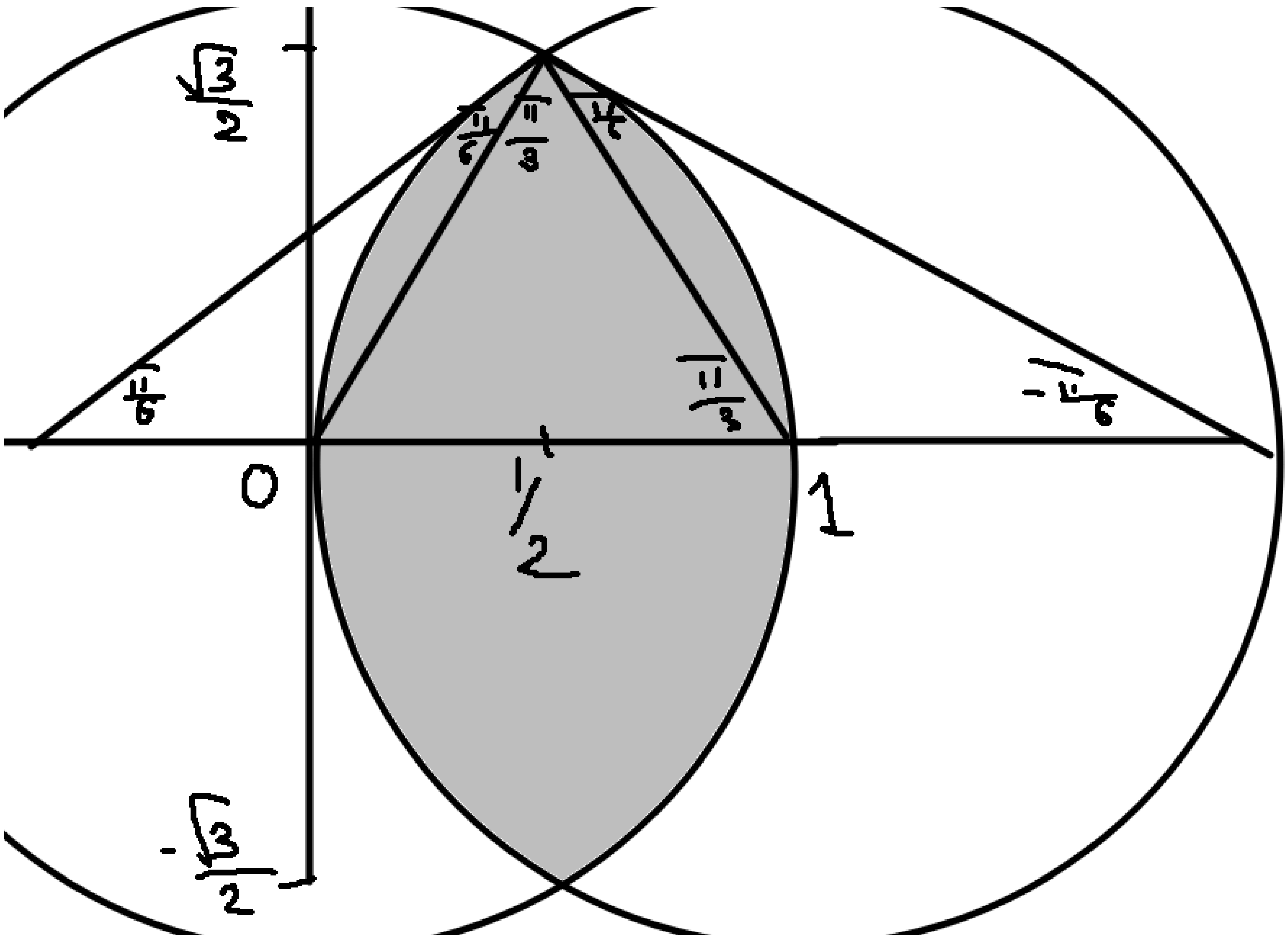
Обратная функция - логарифм

Пример

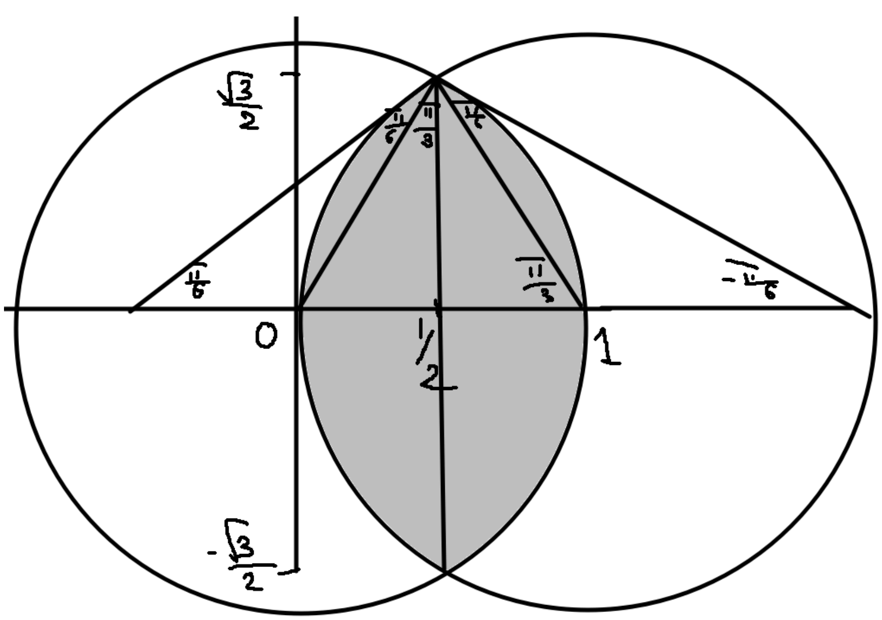
$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z-1| < 1\} \text{ конформна на } G = \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} w > 0\} \text{ (верхняя полуплоскость)}$$

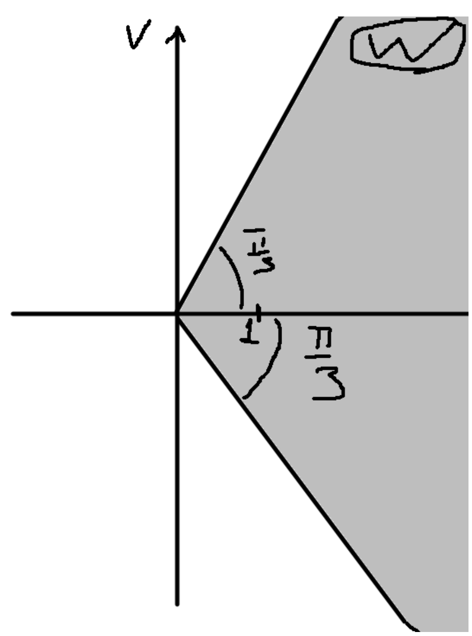


$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$



$$z_1 \to 0$$
$$z_2 \to \infty$$
$$\frac{1}{2} + 0 \cdot i \to 1$$
$$w = k\frac{z - z1}{z - z_2}$$
$$1 = k\frac{\frac{z_1+z_2}{2} - z_1}{\frac{z_1+z_2}{2} - z_2} = k\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_2} = -k$$





$$w_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot w_1$$

$$w = w_2^{\frac{3}{2}} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}} w_1\right)^{\frac{3}{2}} = i\left(-\frac{z - z_1}{z - z_2}\right)^{\frac{3}{2}} = i\left(\frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - z}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - z}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Интеграл функции комплексного переменного

$$AB \text{ - кусочно гладкая}$$
$$f(z) \text{ непрерывна на } AB$$
$$A = z_0, B = z_n$$
$$\xi_k \in \overline{z_k, z_{k+1}}$$
$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k, \quad \Delta z_k = z_{k+1} - z_k$$
$$\lim_{\max|\Delta z| \to 0} \sigma = \int_{AB} f(z)dz$$

Этот интеграл существует и сводится к криволинейному интегралу второго рода.

$$z = x + iy$$
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$
$$z_k = x_k + iy_k$$
$$\xi_k = \zeta_k + i\eta_k$$
$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} (u(\zeta_k, \eta_k), v(\zeta_k, \eta_k))(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (u(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k - v(\zeta_k, \eta_k)\Delta y_k) + i\sum_{k=0}^{n-1} v(\zeta_k, \eta_k)\Delta x_k + u(\zeta_k, \eta_k)\Delta y_k$$
$$\lim_{|\Delta z| \to 0} \sigma = \int_{AB} udx - vdy + i\int_{AB} vdx + udy = \int_{AB} f(z)dz$$
$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AB} (u + iv)(dx + idy) = \int_{AB} udx - vdy + i\int_{AB} vdx + udy$$

Свойства интеграла.

24/03/2025

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0$$

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)dw$$

$$F'(z) = f(z) \text{ в } D, f(z) - \text{ аналитическая}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \left(|\Delta z| < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \varepsilon \right)$$

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(w)dw - \int_{z_0}^{z} f(w)dw \right) = \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$$

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\zeta = \frac{1}{\Delta z} f(z) \int_{z}^{z+\Delta z} d\zeta$$

$$\frac{1}{\Delta z}$$

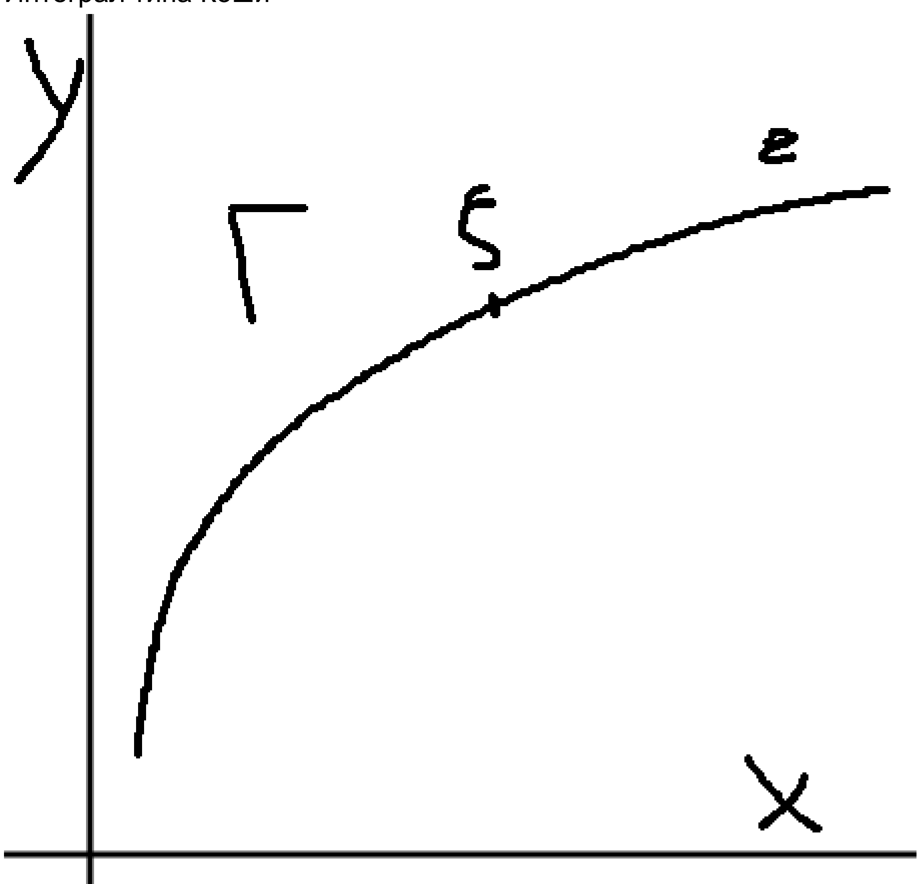
$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta) - f(z)d\zeta$$

$$| \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta) - f(z)d\zeta | \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_{z}^{z+\Delta z} |f(\zeta) - f(z)||d\zeta| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_{z}^{z+\Delta z} \varepsilon |d\zeta| = \varepsilon$$

$f(z)$ аналитическая в D и непрерывная в $\overline{D} = D \cup \partial D \Rightarrow$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Интеграл типа Коши



$$\Gamma - \text{кусочногладкая}$$
$$\varphi(\xi)\text{непрерывна на } \Gamma z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$$
$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta$$

$$n = 1:$$
$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi, \lim_{\Delta z \to 0}\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi$$
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \left(|\Delta z| < \delta \Rightarrow \left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi\right| < \varepsilon\right)$$
$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\Delta z^2}\int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z - \Delta z} - \frac{\varphi(\xi)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\Delta z^2}\int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)}d\xi$$
$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\Delta z}{(\xi - z)^2}d\xi\right| \leq \frac{|\Delta z|}{2\pi}\int_\Gamma \frac{|\varphi(\xi)|}{|\xi - z - \Delta z||\xi - z|^2}|d\xi|$$
$$\leq \frac{\delta}{2\pi}M\cdot\frac{1}{2d^2} \text{ для } \Gamma < \varepsilon$$

Следствие:

Аналитическая функция имеет производные любого порядка

Теорема

$f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$. Тогда в круге она разлагается в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$$

сходится в $|z - z_0| < R$

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Оценка коэффициентов

$$f(z) \text{ аналитична в } |z - z_0| < R \text{ и непрерывна в } |z - z_0| \leq R$$
$$M(R) = \max_{|z - z_0| < R}|f(z)|$$
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n$$
$$|C_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^n}d\xi\right| \leq \frac{M}{2\pi}\int_{|\xi - z_0| = r}\frac{|d\xi|}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^n}$$

Теорема Лиувилля

$f(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$ и ограничена $|f(z)| \leq M \Rightarrow f(z) = \text{const}$

$$|z| < R$$
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$
$$|C_n| \leq \frac{M}{R^n}$$
$$R \to \infty \Rightarrow C_n = 0 \Rightarrow f(z) = \text{const}$$

#конец