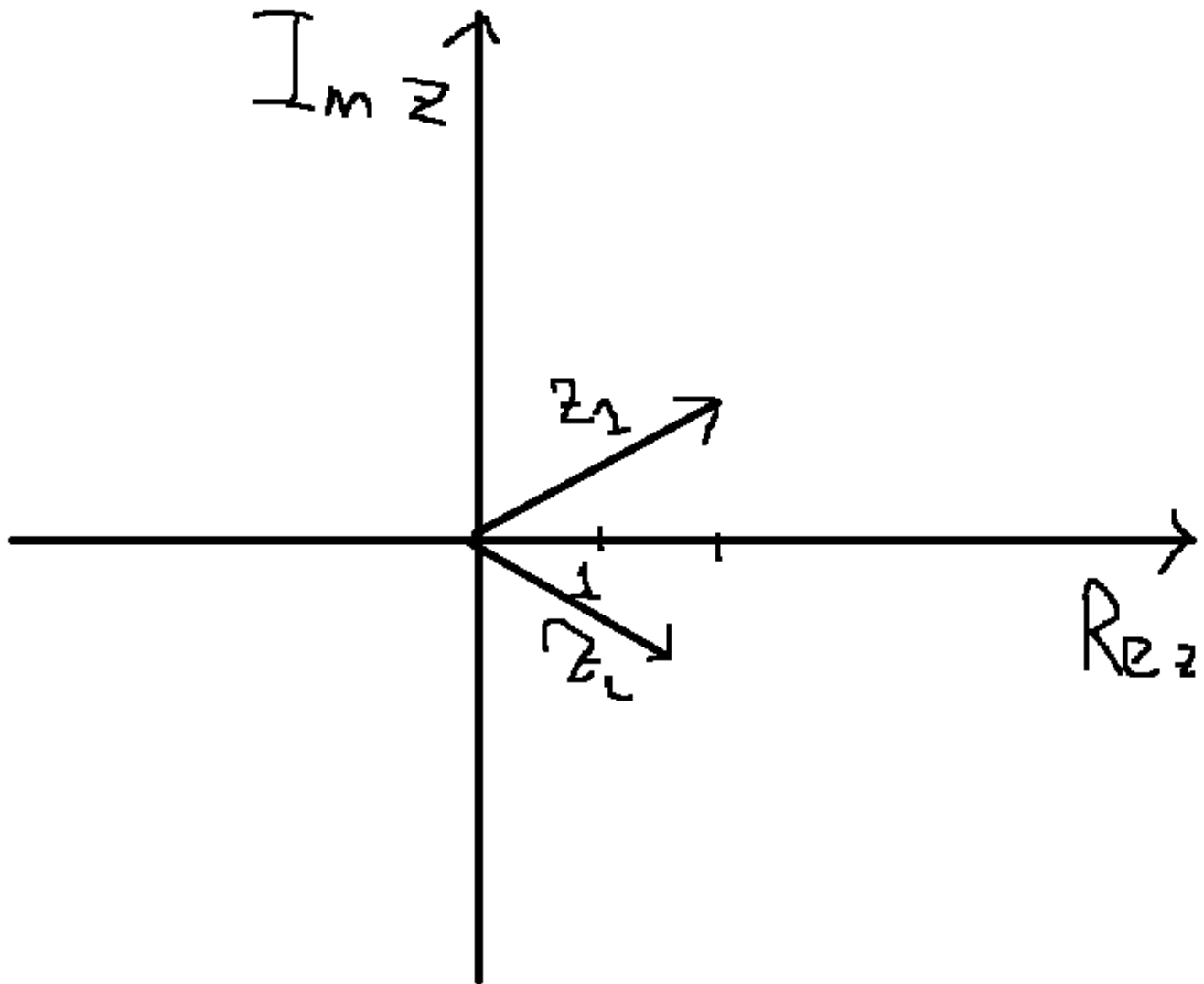


13/02/2025



$$z_1 = \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_2 = 2 + 2i = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (\sqrt{3} - i)(2 + 2i) = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}i - 2i + 2 = 2\sqrt{3} + 2 + i(2\sqrt{3} - 2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2e^{-i\pi/8} \cdot \sqrt{8}e^{i\pi/4} = 2\sqrt{8}e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$4\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{3} + 2 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2\sqrt{3} + 2}{4\sqrt{2}}$$

$$\frac{z_1^2}{\bar{z}_2} = \frac{(\sqrt{3} - i)^2}{2 + 2i} = \frac{3 - 2\sqrt{3}i - 1}{2 - 2i} = \frac{(2 - 2\sqrt{3}i)(2 + 2i)}{(2 - 2i)(2 + 2i)} = \frac{4 + 4i + 4\sqrt{3}i + 4\sqrt{3}}{4 + 4} =$$

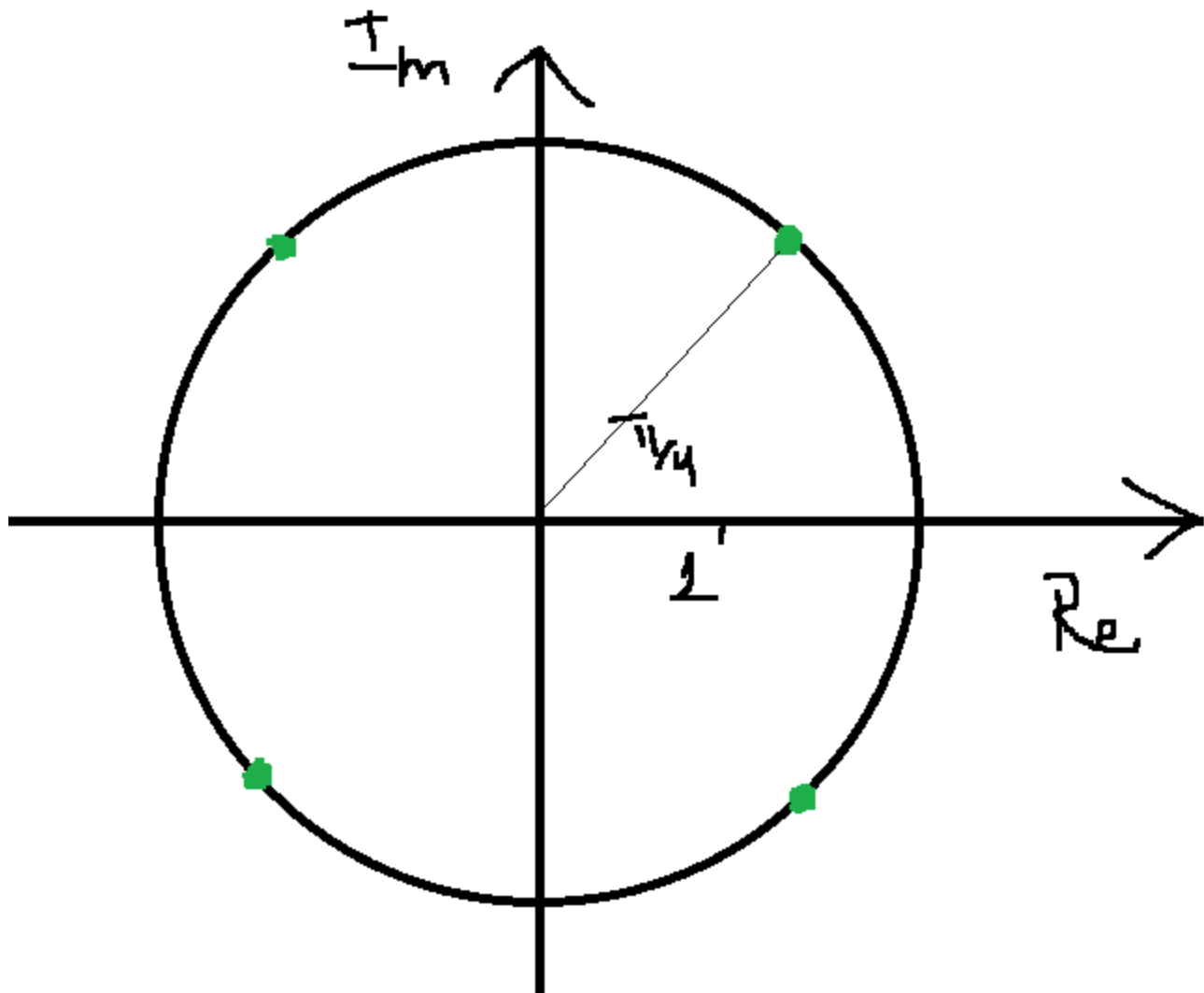
$$= \frac{1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})}{2}$$

$$\frac{z_1^2}{\bar{z}_2} = \frac{4e^{-i\pi/3}}{\sqrt{8}e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$z = -16 = 16e^{\pi i}$$

$$\sqrt[4]{z} = 2e^{\frac{1}{4}i(\pi/4 + 2\pi k)} = 2e^{\frac{1}{4}i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2})}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$x + iy = \pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$$

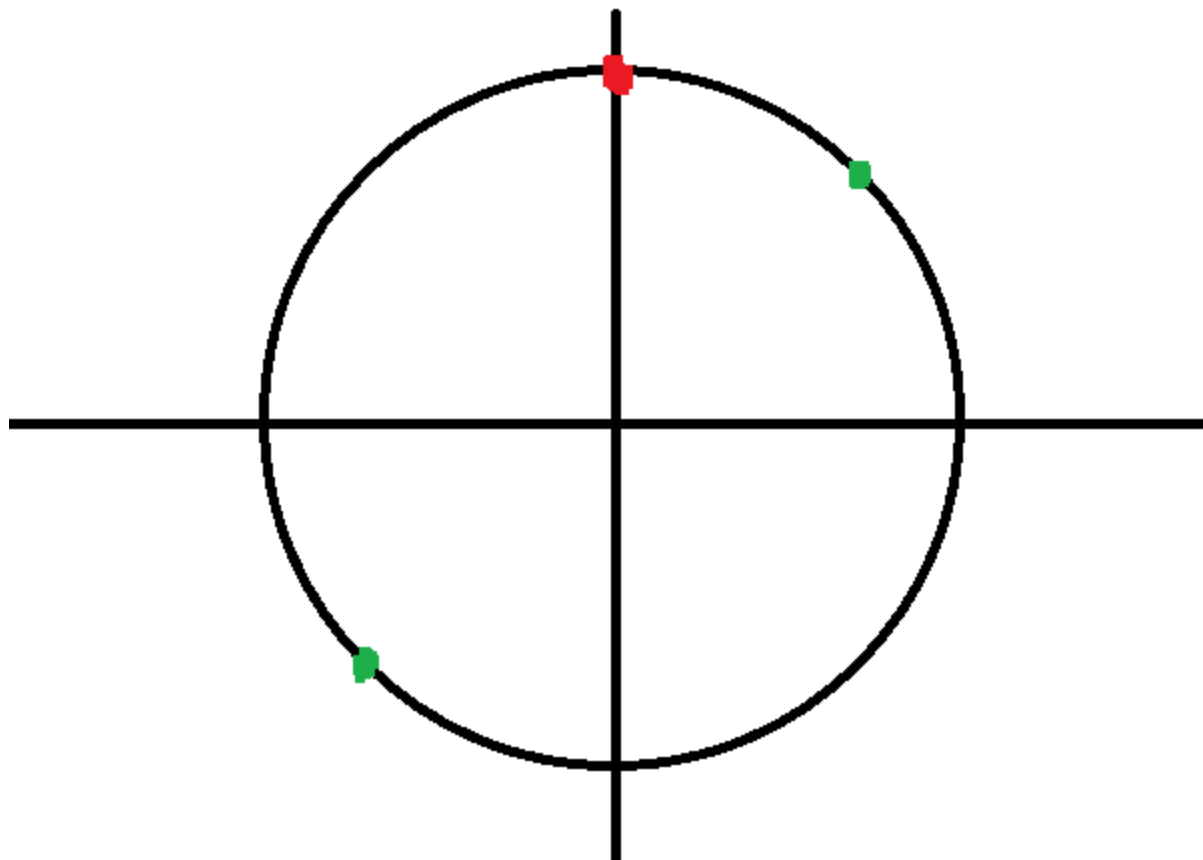


Корень  $n$ -ой степени -  $n$  значений

$$\sqrt{-1} = \pm 1$$

$$\sqrt{1} = \sqrt{e^{2\pi ni}} = e^{\pi ni} = \begin{cases} e^0 = 1 \\ e^{\pi i} = -1 \end{cases}$$

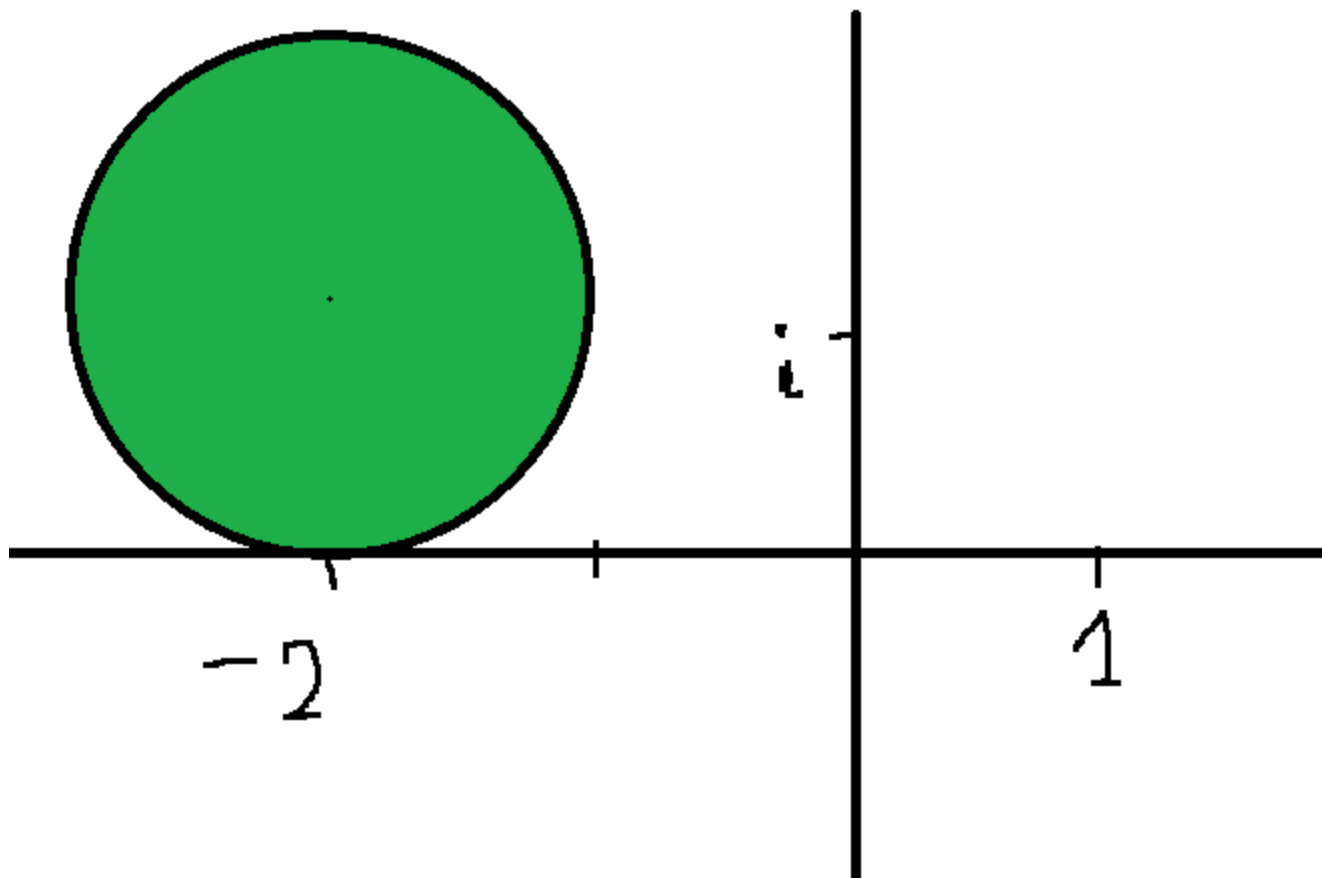
$$\sqrt{i} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi n)} = e^{i(\frac{\pi}{4} + \pi n)} = \begin{cases} e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \\ e^{\frac{5\pi i}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$$|z + 2 - i| \leq 1$$

Можно свести задачу к школьной, перейдя к декартовым координатам,  
но иногда можно решить проще

$$|z - (-2 + i)| \leq 1 \quad - \quad \text{Окружность с центром в } (-2+i)$$



$$\begin{cases} |z+3| + |z+3i| \leq 6 & - \text{Эллипс} \\ |z + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i| > \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

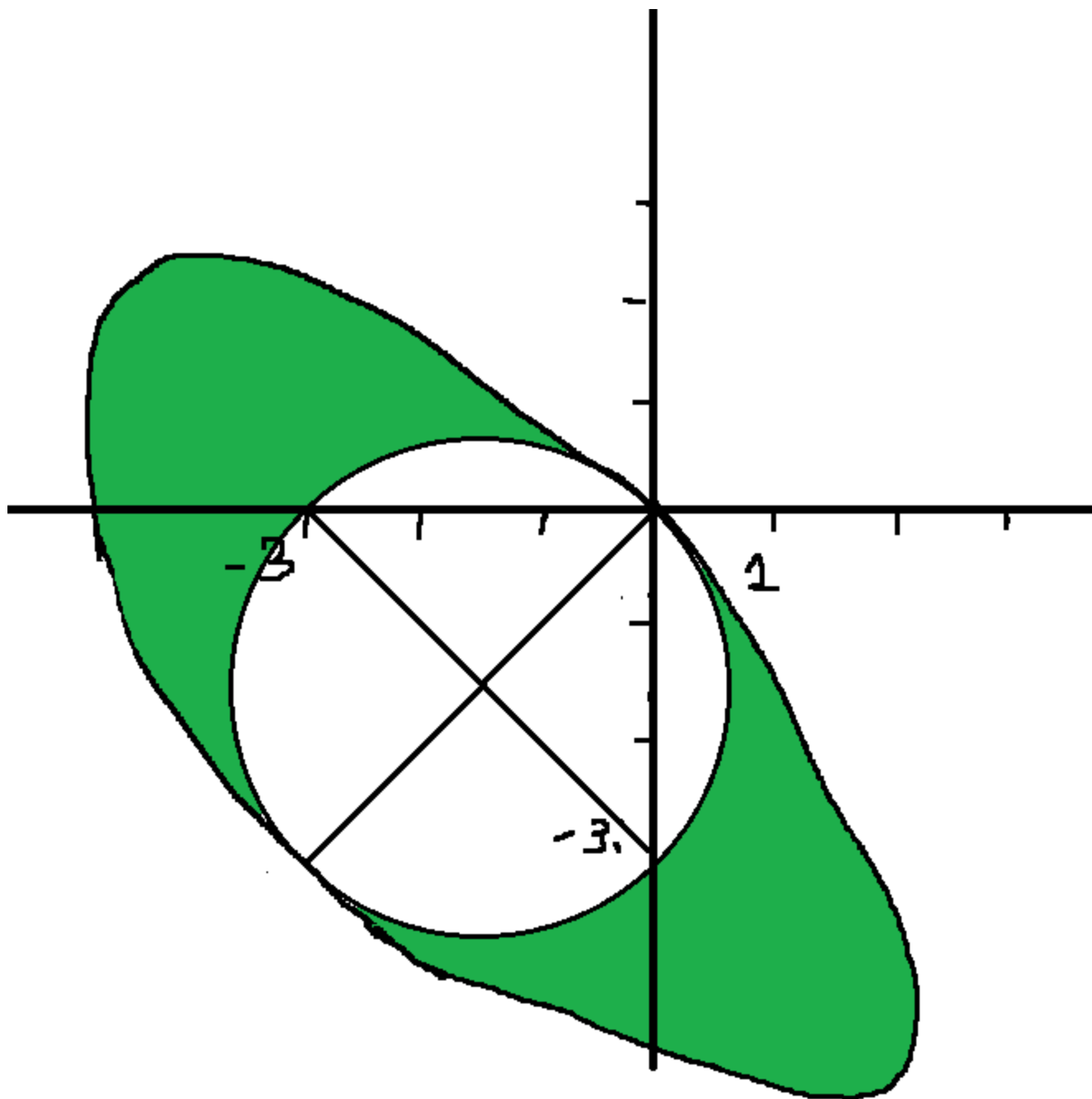
$$z_1 = -3$$

$$z_2 = -3i$$

$$a = \frac{6}{2} = 3$$

$$c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$$

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a \quad - \text{гипербола}$$

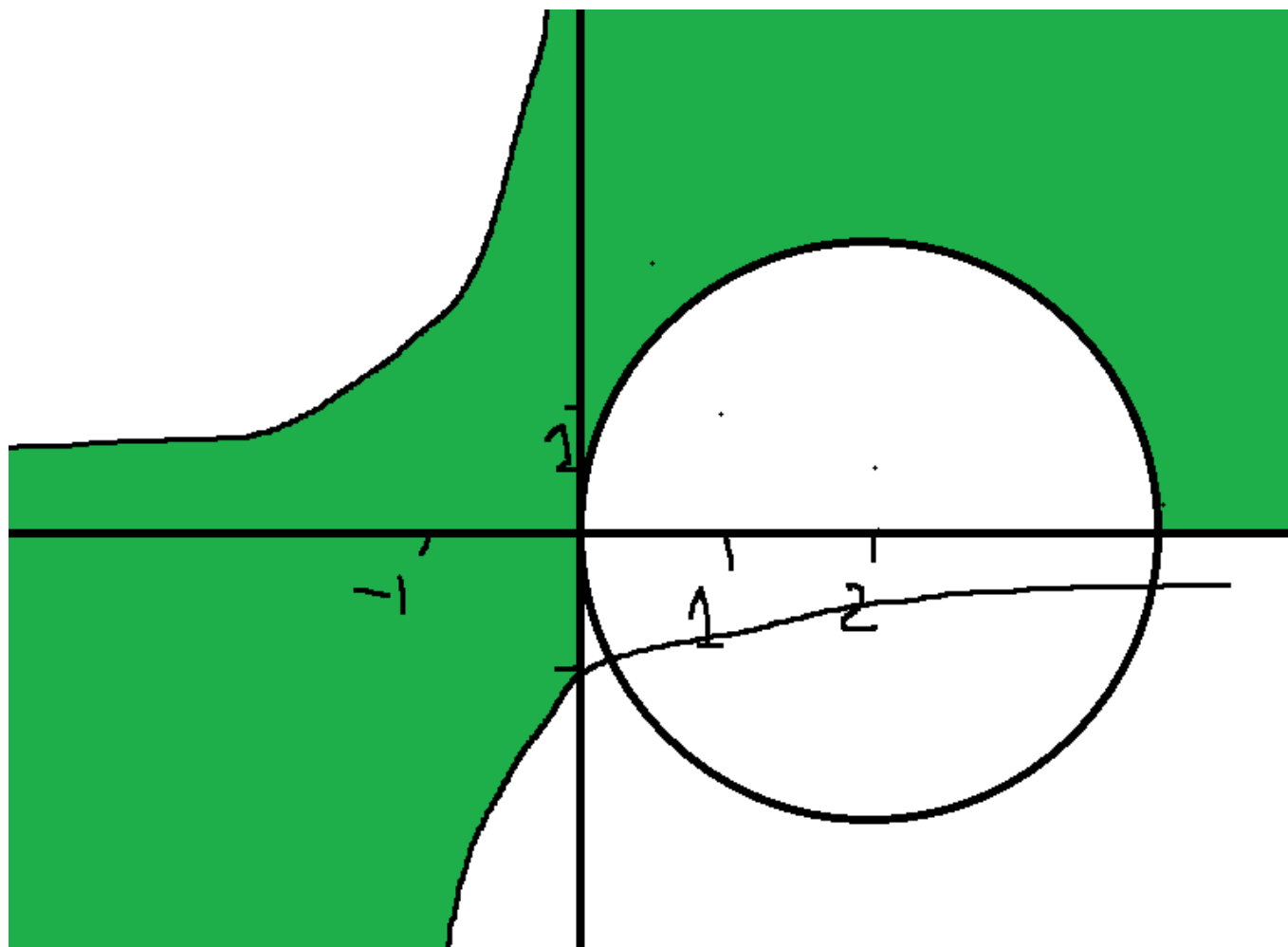
$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{4} \\ \operatorname{Im}(z^2 - \bar{z}) \leq 2 + \operatorname{Im}(z) \end{cases}$$

$$z = x + iy$$

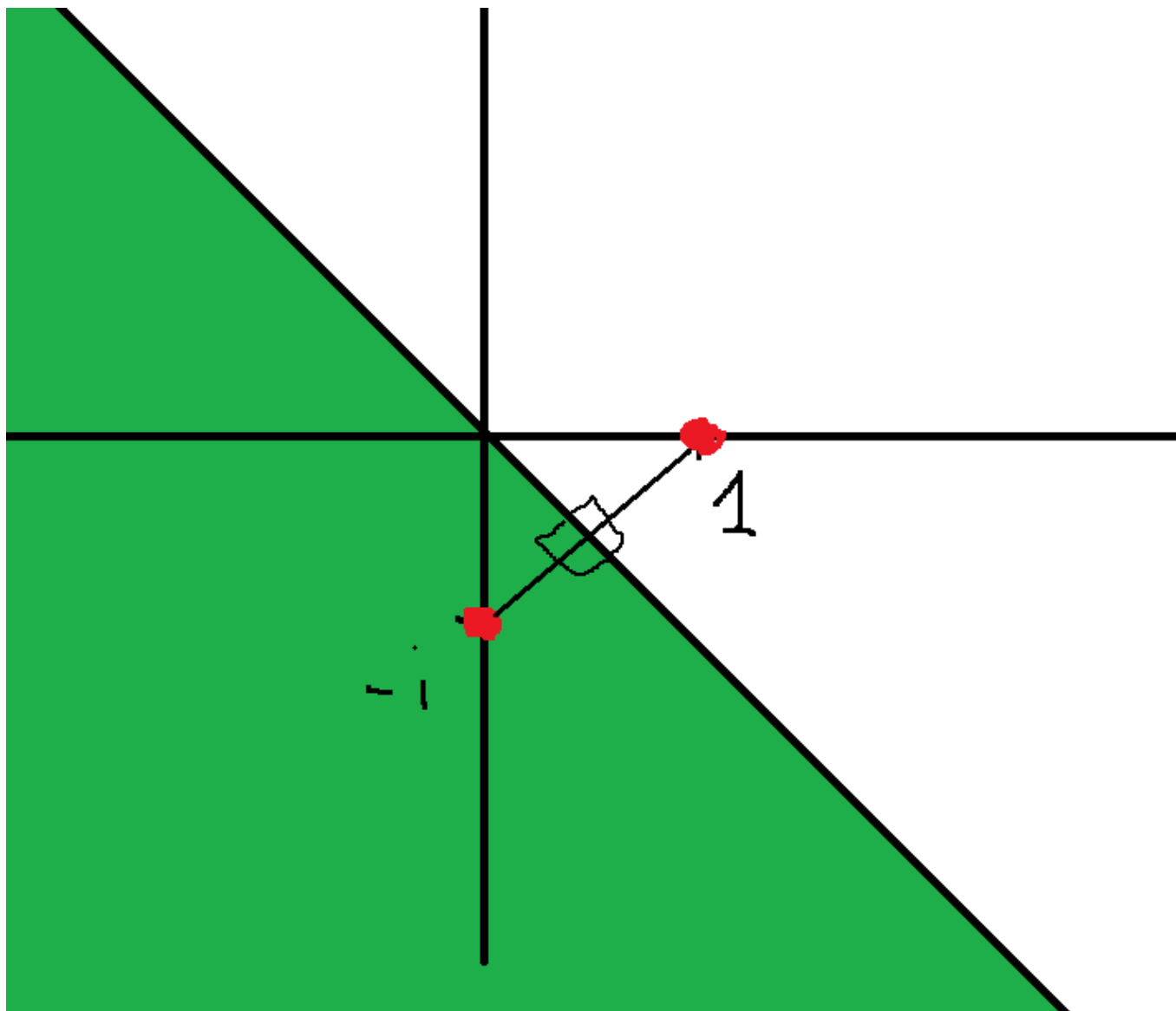
$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{x + iy}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Im}((x + iy)^2 - \overline{x + iy}) = \operatorname{Im}(x^2 - y^2 + 2xyi - (x - iy)) = -2xy - y \leq 2 + y$$

$$\begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{4} \\ (x + 1)y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \leq x^2 + y^2 \\ (x + 1)y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 \geq 4 \\ (x + 1)y \geq -1 \end{cases}$$



$$|z + i| < |z - 1|$$



$$\begin{aligned}
 |x + iy + i| &< |x + iy - 1| \\
 \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} &< \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \\
 x^2 + y^2 + 2y + 1 &< x^2 - 2x + 1 + y^2 \\
 2x + 2y &< 0 \\
 x + y &< 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |z^2 + 4| \leq 4 & \text{Из номотеха: Лемниската} \\ \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$$

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

$$z^2 = r^2(\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)) \quad \text{— Формула Муавра}$$

$$|z^2 + 4| \leq 4$$

$$|r^2(\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)) + 4| \leq 4$$

$$\sqrt{(r^2 \cos(2\varphi) + 4)^2 + r^2 \sin^2(2\varphi)} \leq 4$$

$$r^4 \cos^2(2\varphi) + 16 + 8r^2 \cos(2\varphi) + r^4 \sin^2(2\varphi) \leq 16$$

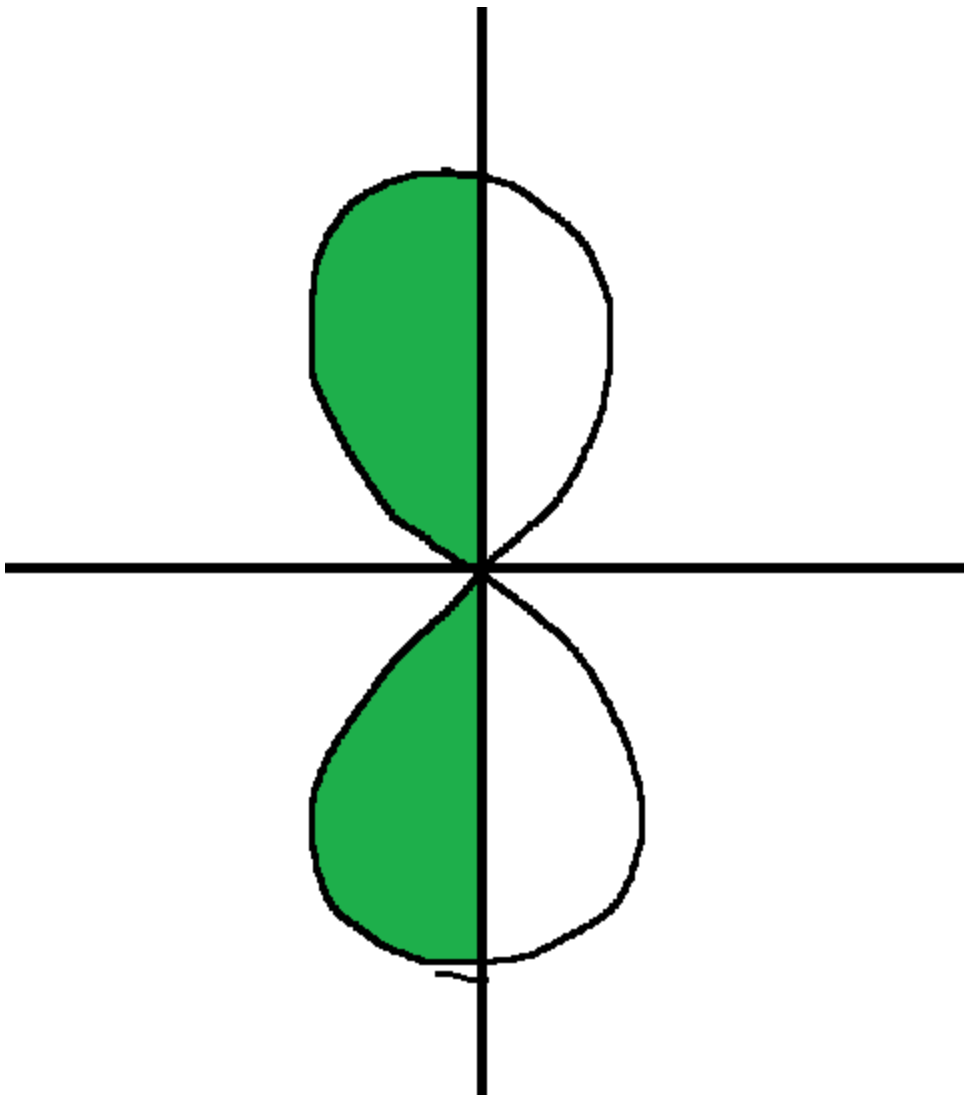
$$r^4 \cos^2(2\varphi) + 8r^2 \cos(2\varphi) + r^4 \sin^2(2\varphi) \leq 0$$

$$r^4 + 8r^2 \cos(2\varphi) \leq 0$$

$$r^2 + 8 \cos(2\varphi) \leq 0$$

$$r^2 \leq -8 \cos(2\varphi)$$

$$r < 2\sqrt{2}\sqrt{-\cos(2\varphi)}$$



20/02/2025

Пропустил

$$\sum_{n=1}^N \frac{\left(\frac{x}{|e-i|}\right)^n}{n!}$$



27/02/2025

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y + i(-\sin x \operatorname{sh} y)$$

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z$$

$$\operatorname{ch} iz = \cos z$$

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z$$

$$\cos iz = \operatorname{ch} z$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \left( \ln 3 + \frac{i\pi}{4} \right) &= \operatorname{sh}(\ln 3) \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{ch}(\ln 3) \cdot i \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (e^{\ln 3} - e^{-\ln 3} + ie^{\ln 3} + ie^{-\ln 3}) \end{aligned}$$

Убедиться, что если подставить в  $\alpha^z = e^{z \operatorname{Ln} \alpha}$   $\alpha = e$ , то полученные функции будут однозначными

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k i)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}, k \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x, y) = f(z, \bar{z})$$

$$\text{C.R.} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

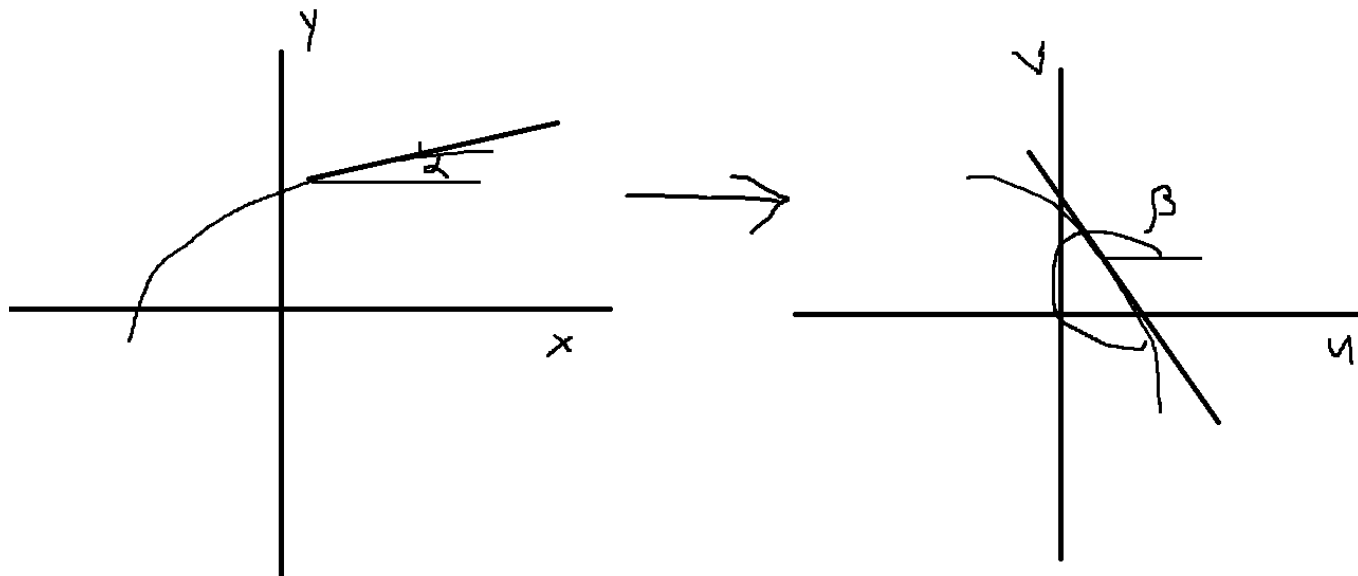
$$\begin{cases} x = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases}$$

$$f = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \psi(z, \bar{z}) \Rightarrow \text{не дифференцируема}$$

$$z^2 = (x + iy)(x + iy) = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix} = 2(x + iy) = 2z$$

Аргумент говорит о том, как поворачиваются касательные



$$\beta - \alpha = \arg f'(z)$$

$$|\Delta w| = |f'(z)| |\Delta z| + o(|\Delta z|)$$

$$\begin{cases} u_{yx} = v_{yy} \\ u_{xy} = -v_{xx} \end{cases} \Rightarrow v_{yy} + v_{xx} = 0$$

$u$  и  $v$  гармонические

$$v(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$v_{xx} = \left( \frac{2x(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)(2(x^2 + y^2)2x)}{(x^2 + y^2)^4} \right)_x = \left( \frac{-2x^3 + 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3} \right)_x =$$

$$= \frac{2((3y^2 - 3x^2)(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2)^2 2x(3xy^2 - x^3))}{(x^2 + y^2)^6} = \frac{2(-3x^4 + 3y^4 - 6(3x^2y^2 - x^4))}{(x^2 + y^2)^4} =$$

$$= \frac{6(x^4 + y^4 - 6x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$f(x, y) = -f(y, x)$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$$

$$f'(z) = \frac{2y^3 - 6yx^2}{(x^2 + y^2)^3} + i \frac{-2x^3 + 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3} =$$

$$= \frac{2(y^3 - 3yx^2 - ix^3 + 3ixy^2)}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2(y + ix)^2}{(z\bar{z})^3} = 2 \frac{i\cancel{z}}{(z\cancel{z})^3} = \frac{2i}{z^3} \Rightarrow$$

$$f(z) = -\frac{i}{z^2} + C$$

$u = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$  - Очевидно, что не может быть действительной частью

Гармоническое векторное поле - это соленоидальное и потенциальное векторное поле

Соленоидальное векторное поле:  $\operatorname{div} \vec{f} = 0$

Потенциальное векторное поле:  $\operatorname{rot} \vec{f} = 0$

**06/03/2025**

Конформные отображения.

Отображение, осуществляемое линейной функцией.

$$w = (1 + i)z + (3 - 2i)$$

$$\text{б) } y = x + 2$$

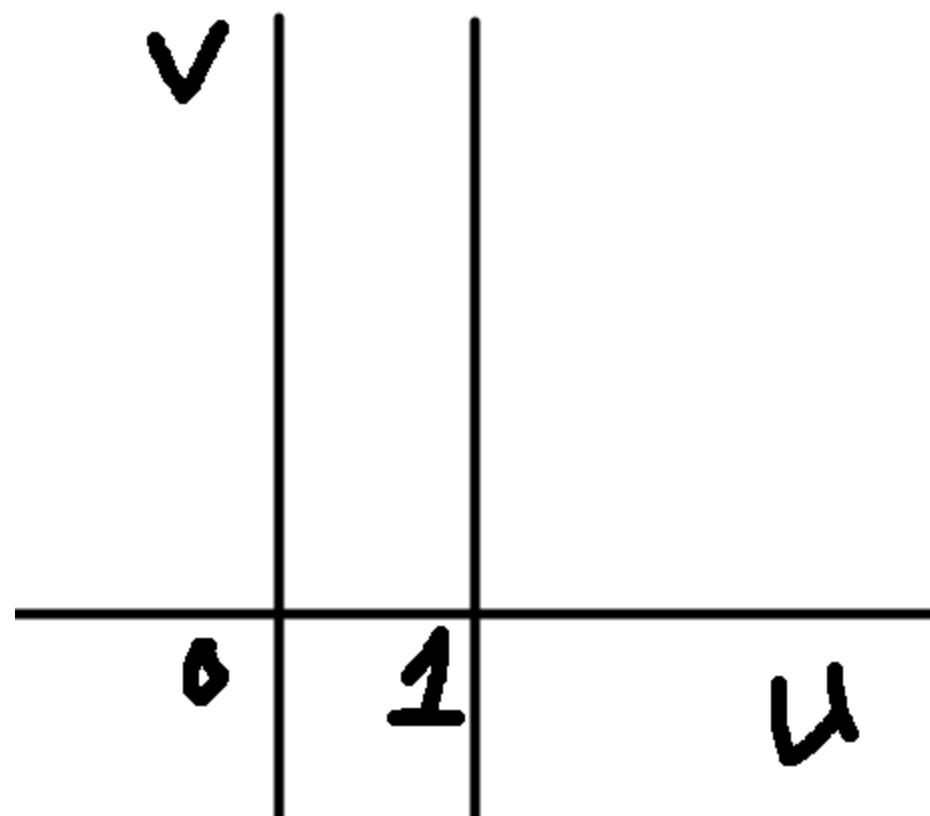
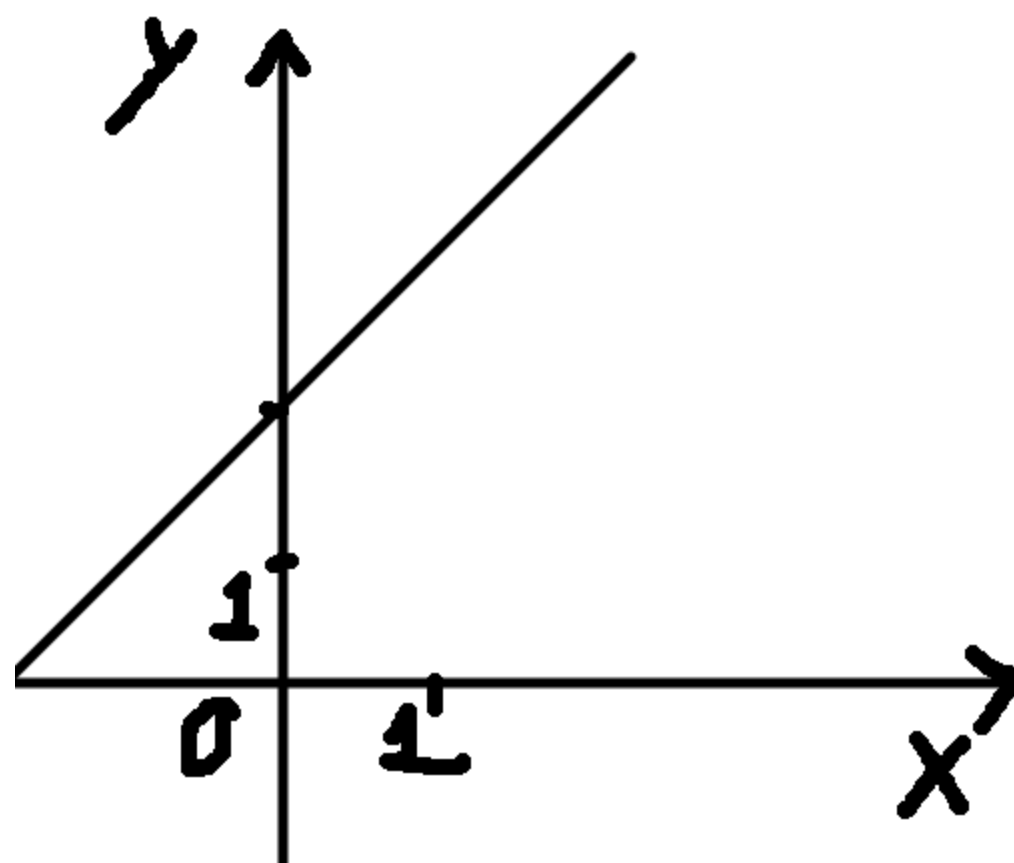
$$w = (1 + i)(x + iy) + (3 - 2i) = (x - y + 3) + i(x + y - 2) = u + iv$$

$$\begin{cases} u = x - y + 3 \\ v = x + y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 2x + 1 \\ v - u = 2y - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{u+v-1}{2} \\ y = \frac{v-u+5}{2} \end{cases}$$

$$\frac{v-u+5}{2} = \frac{u+v-1}{2} + 2$$

$$u = 1$$



$$y = \frac{3}{2}x$$

$$v - u + 5 = 3 \frac{u + v - 1}{2}$$

$$2v - 2u + 10 = 3u + 3v - 3$$

$$13 = 5u + v$$

$$v = 13 - 5u$$

Дробно-линейные функции

Сдвиг

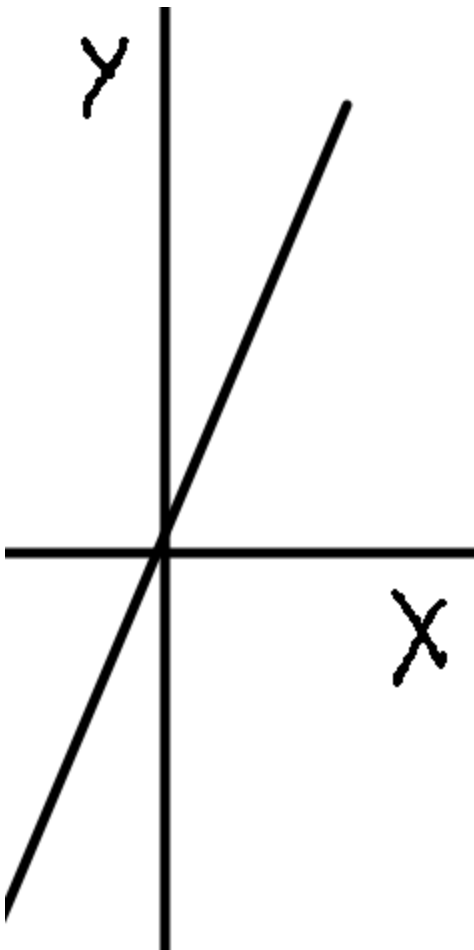
Инверсия

Растяжение/сжатие, поворот

Круговое свойство: отображает окружности в окружности

$$w = \frac{1}{z}$$

$$a) y = 3x$$



$$w = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

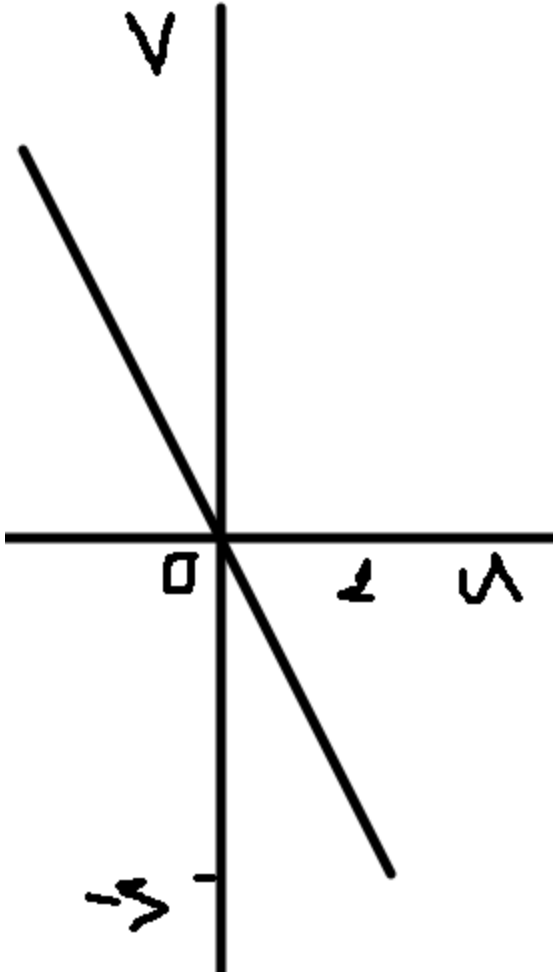
$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$u^2+v^2 = \frac{1}{x^2+y^2} \Rightarrow$$

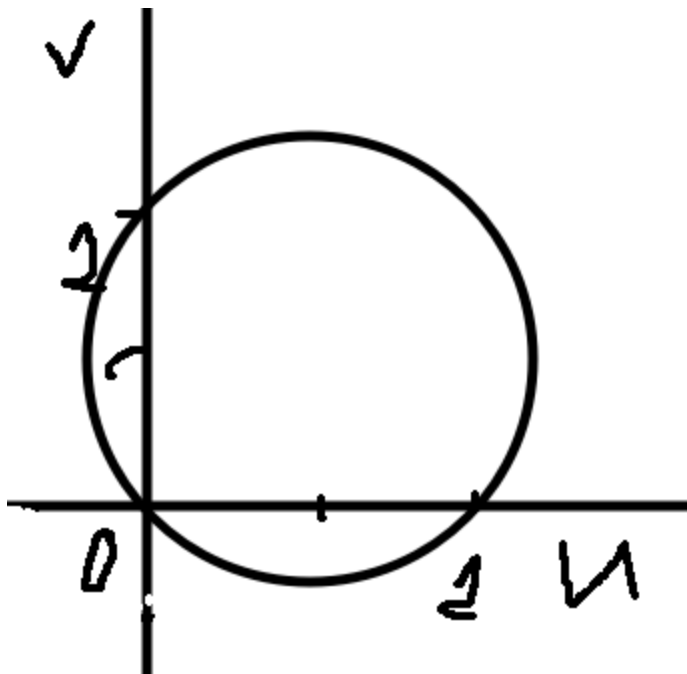
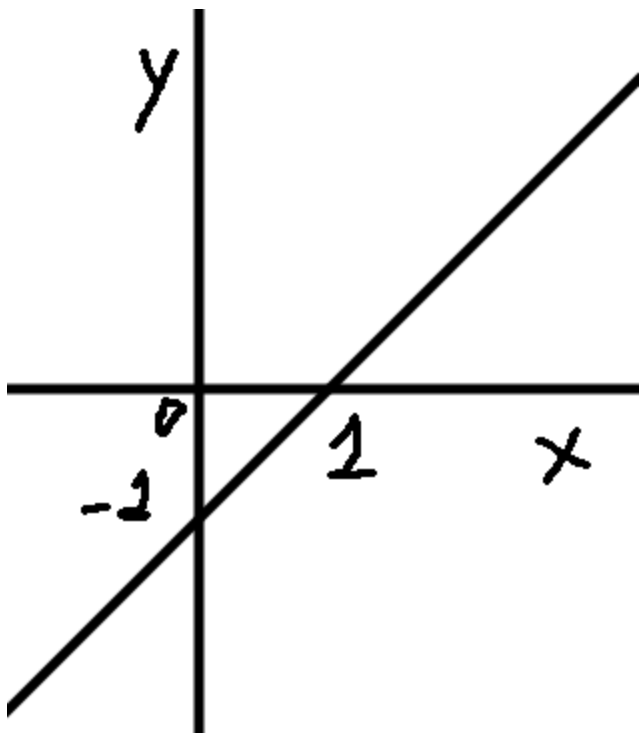
$$\begin{cases} x = \frac{u}{u^2+v^2} \\ y = -\frac{v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

$$-\frac{v}{\cancel{u^2+v^2}} = 3 \frac{u}{\cancel{u^2+v^2}}$$

$$v = -3u$$



$$\begin{aligned} 6) \quad y &= x - 1 \\ -\frac{v}{u^2+v^2} &= \frac{u}{u^2+v^2} - 1 \\ 0 &= v + u - u^2 - v^2 \\ \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{aligned}$$



$$\text{B) } |z - i - 1| = \sqrt{2}$$

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

$$\frac{(u - u^2 - v^2)^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{(-v - u^2 - v^2)^2}{(u^2 + v^2)^2} = 2$$

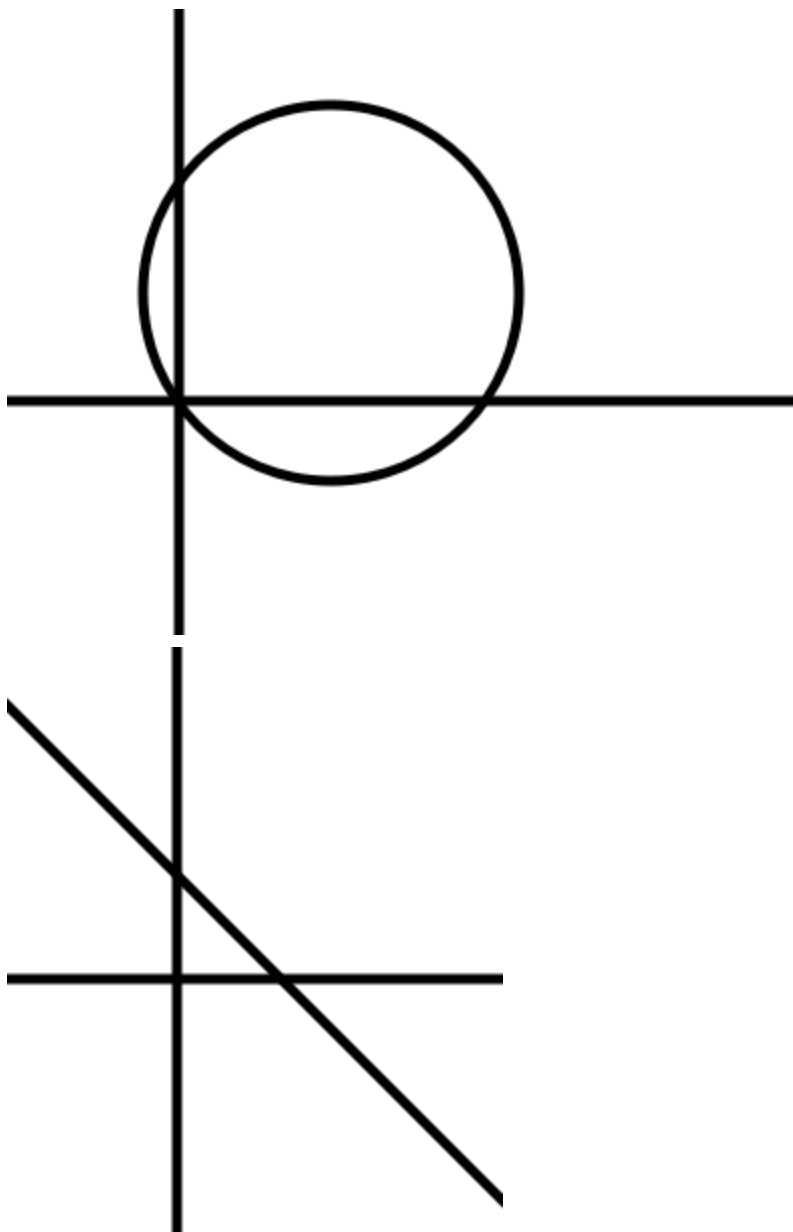
$$\frac{u^2 + \cancel{u^4 + v^4} - 2u^3 - 2uv^2 + \cancel{2u^2v^2}}{u^2 + \cancel{u^4 + v^4} + 2v^3 + 2vu^2 + \cancel{2u^2v^2}} + = \frac{\cancel{2u^4} + \cancel{2v^4} + 4u^2v^2}{u^2 + \cancel{u^4 + v^4} + 2v^3 + 2vu^2 + \cancel{2u^2v^2}}$$

$$u^2 - 2u^3 - 2uv^2 + 2vu^2 + 2v^3 + v^2 = 0$$

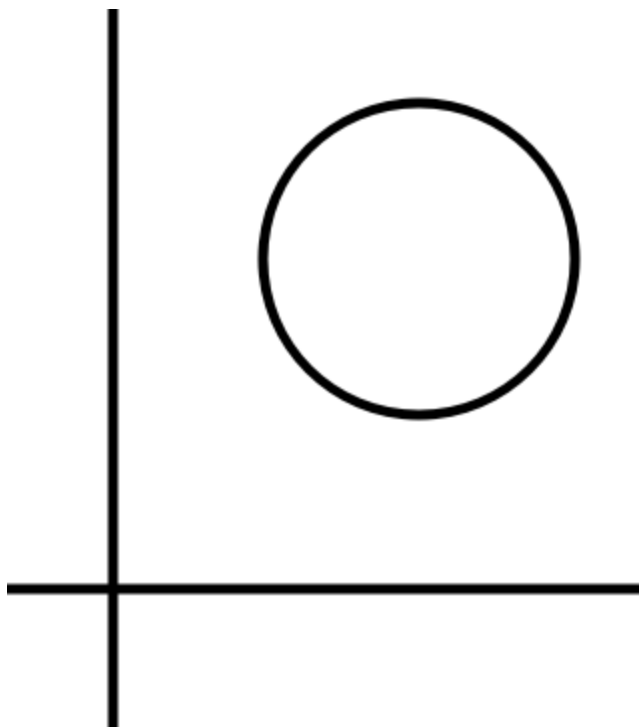
$$(u^2 + v^2) - 2u(u^2 + v^2) + 2v(u^2 + v^2) = 0$$

$$1 - 2u + 2v = 0$$

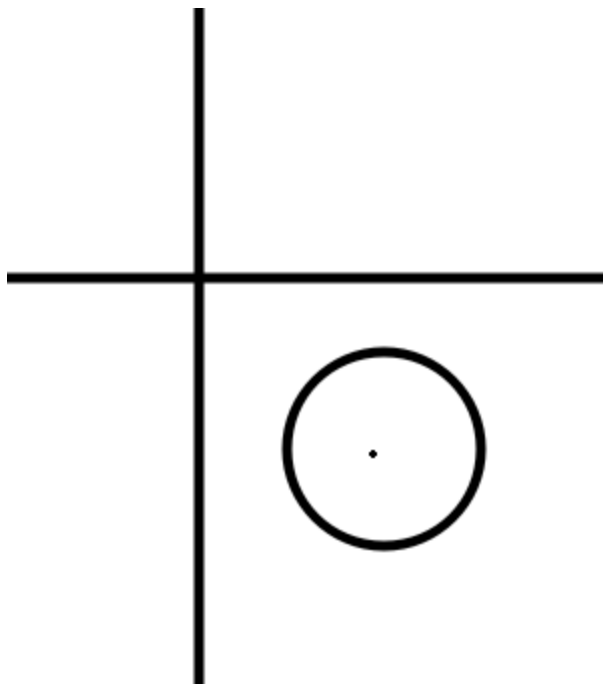
$$v = u - \frac{1}{2}$$



B)  $|z - 2 - 2i| = 1$



$$\begin{aligned}
 (x-2)^2 + (y-2)^2 &= 1 \\
 \left(\frac{u}{u^2+v^2} - 2\right)^2 + \left(-\frac{v}{u^2+v^2} - 2\right)^2 &= 1 \\
 \frac{u^2}{(u^2+v^2)^2} + 4 - \frac{4u}{u^2+v^2} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2} + 4 + \frac{4v}{u^2+v^2} &= 1 \\
 \frac{1-4u+4v}{u^2+v^2} &= -7 \\
 \frac{1}{7} - \frac{4}{7}u + \frac{4}{7}v + u^2 + v^2 &= 0 \\
 \left(u - \frac{2}{7}\right)^2 + \left(v + \frac{2}{7}\right)^2 &= \frac{1}{7^2}
 \end{aligned}$$





$$f(z) = \frac{z - 2i}{z + 2}$$

$$\text{a) } y = x + 2$$

$$\frac{x + iy - 2i}{x + iy + 2} = \frac{(x + iy - 2i)(x + 2 - iy)}{(x + 2)^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 + \dots}{(x + 2)^2 + y^2} - \text{сложно}$$

$$w = \frac{z - 2i}{z + 2}$$

$$(z + 2)w = z - 2i$$

$$z(w - 1) = -2i - 2w$$

$$z = -2 \frac{w + i}{w - 1}$$

$$x + iy = -2 \frac{u + vi + i}{u + vi - 1} = -2 \frac{(u + (v + 1)i)((u - 1) - vi)}{(u - 1)^2 + v^2} =$$

$$= -2 \frac{u^2 - u + v^2 + v + i(-uv + uv + u - v - 1)}{(u - 1)^2 + v^2} =$$

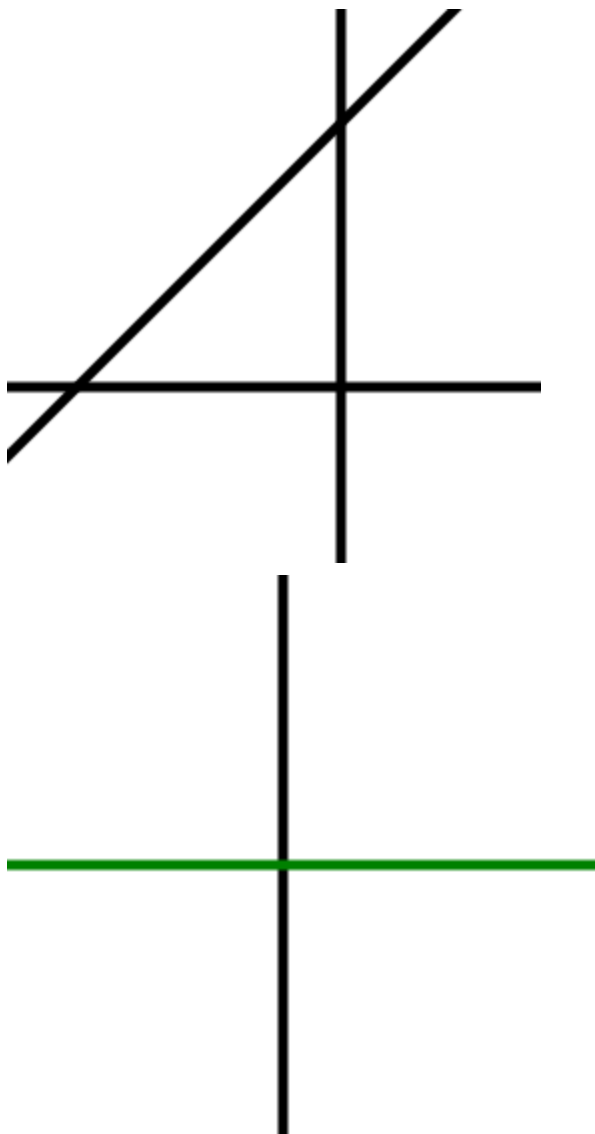
$$= -2 \left( \frac{u^2 - u + v^2 + v}{(u - 1)^2 + v^2} + i \frac{u - v - 1}{(u - 1)^2 + v^2} \right)$$

$$\begin{cases} x = -2 \frac{u^2 - u + v^2 + v}{(u - 1)^2 + v^2} \\ y = -2 \frac{u - v - 1}{(u - 1)^2 + v^2} \end{cases}$$

$$-\cancel{2}(u - v - 1) = -\cancel{2}(u^2 - u + v^2 + v) + \cancel{2}((u - 1)^2 + v^2)$$

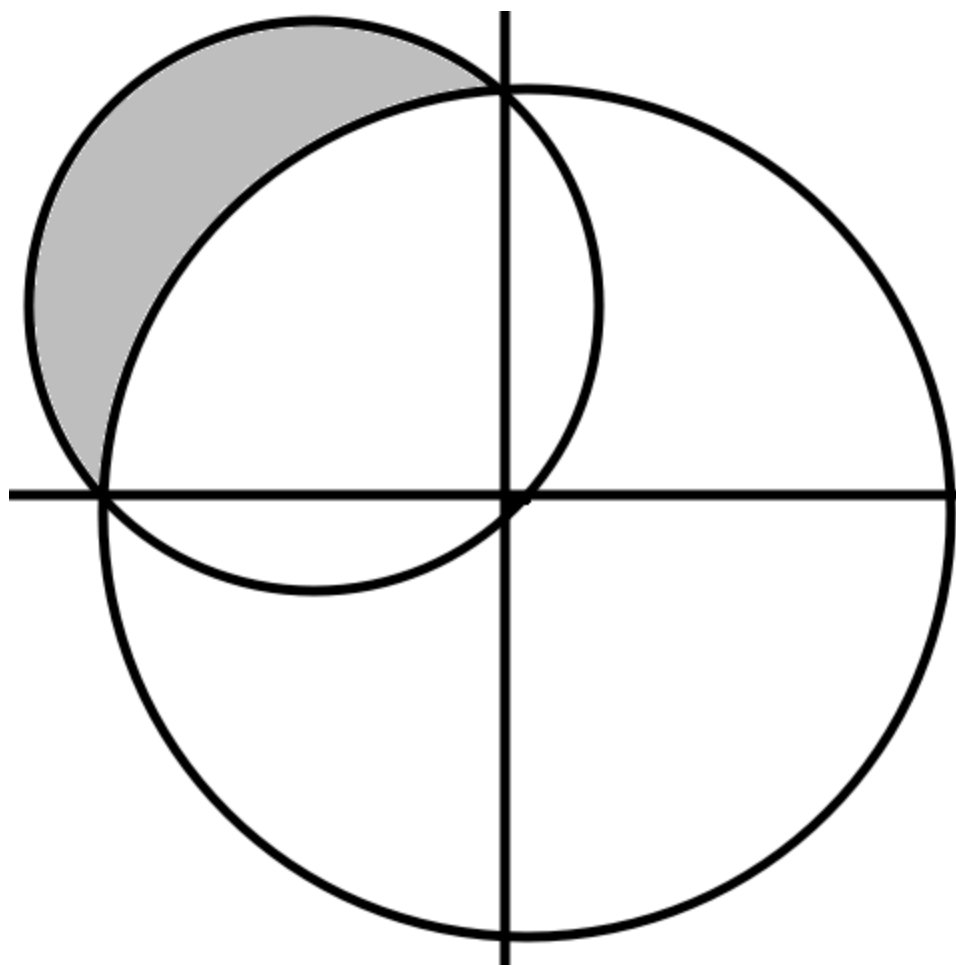
$$\cancel{u} + v + \cancel{1} = \cancel{u^2} + \cancel{u} - \cancel{v^2} - v + \cancel{u^2} - \cancel{2}\cancel{u} + \cancel{1} + \cancel{v^2}$$

$$v = 0$$



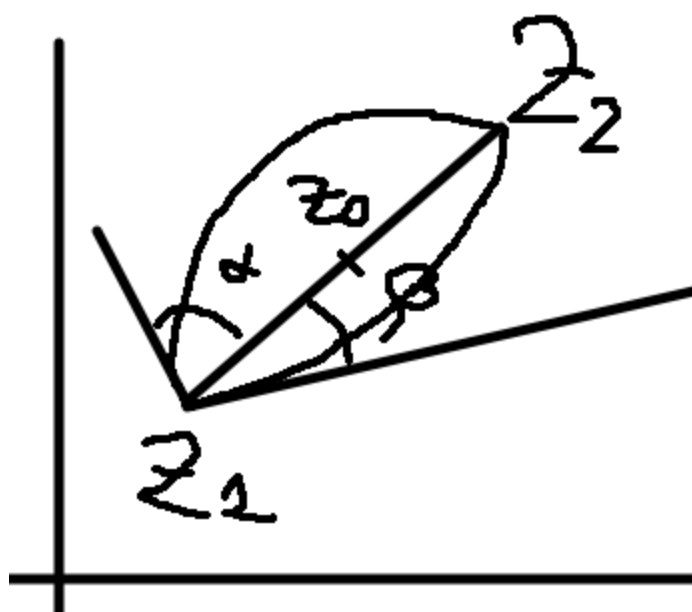
Лунка - область, ограниченная двумя окружностями

$$б) \begin{cases} |z| > 2 \\ |z + 1 - i| < \sqrt{2} \end{cases}$$



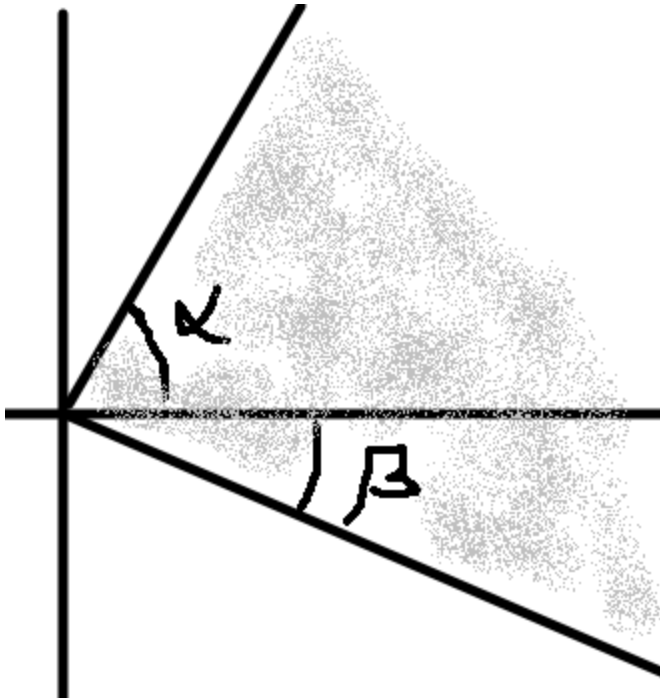
Следующие соображения

$$f(z) = -\frac{z - z_1}{z - z_2}$$



$$\begin{aligned}
 w_1 &= f(z_1) = 0 \\
 w_2 &= f(z_2) = \infty \\
 z_0 &= \frac{z_1 + z_2}{2} \\
 f(z_0) &= -\frac{\frac{z_1 + z_2}{2} - z_1}{\frac{z_1 + z_2}{2} - z_2} = -\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_2} = 1
 \end{aligned}$$

Границы отображаются в прямые



ДОДЕЛАТЬ ЗАДАЧУ!!!

**03/04/2025**

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right) + \cos z}{(z^2 + 4)^3} = 2\pi i \cdot \text{Res}_0 f(z) = 0 \text{ (подынтегральная функция чётная)}$$

$$\oint \frac{dz}{z^4 + 16}, C: |z + \sqrt{2}| = 2\pi i (\text{res}_{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i} + \text{res}_{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i})$$

$$z^4 = -16$$

$$z^2 = \pm 4i$$

$$z = \pm \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i :$$

$-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$  — особые точки, полюса порядка 1

$$\text{Формула для полюсов } n = 1 : \text{res}_{z=z_0} f = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}, \varphi(z) : \varphi(z_0) \neq 0$$

$$\psi(z) : \psi(z_0) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 13x^2 + 36} = \oint \frac{dz}{z^4 + 13z^2 + 36} = 2\pi i (\text{res}_{2i} f + \text{res}_{3i} f) =$$

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 13z^2 + 36} = \frac{1}{(z^2 + 4)(z^2 + 9)} = \frac{1}{(z + 2i)(z - 2i)(z + 3i)(z - 3i)}$$

Если функция убывает достаточно быстро  $|f(x)| < \frac{M}{R^{1+\delta}}, \delta > 0$

То интеграл на бесконечности 0

$$= 2\pi i \left( \frac{1}{4z^3 + 26z} \Big|_{2i, 3i} \right) = 2\pi i \left( \frac{1}{-32i + 52i} + \frac{1}{-108i + 78i} \right) = 2\pi \left( \frac{1}{20} - \frac{1}{30} \right) = 2\pi \cdot \frac{1}{60} = \frac{\pi}{30}$$

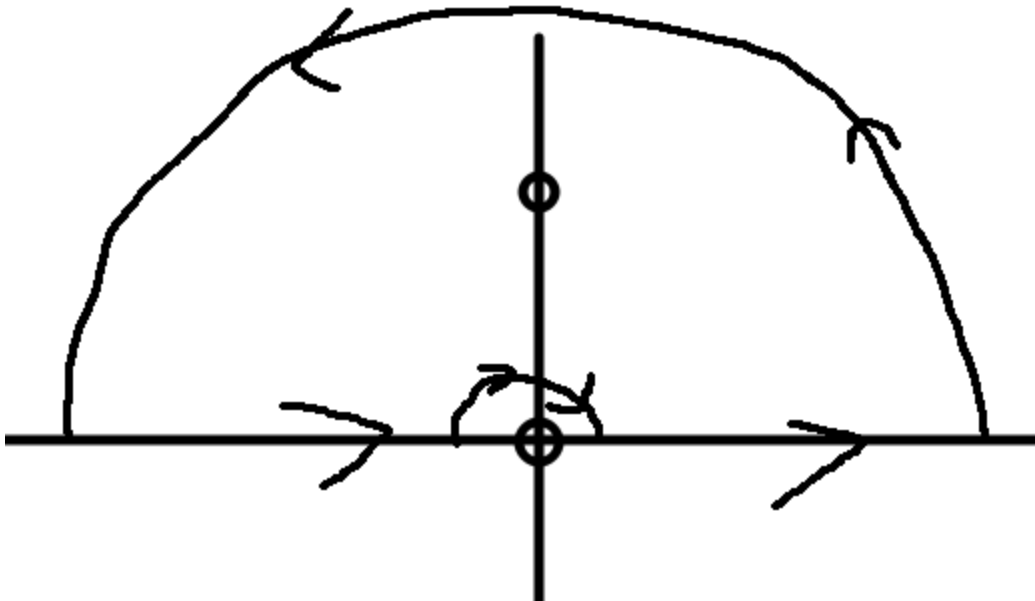
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx = \pi i \left( \frac{x^2 + 1}{4x^3} \Big|_{\exp(\frac{\pi}{4}i), \exp(\frac{3\pi}{4}i)} \right) = \frac{\pi i}{4} \left( \frac{i + 1}{e^{3\pi i/4}} + \frac{-i + 1}{e^{\pi i/4}} \right) =$$

$$= \frac{\pi i}{4} \left( (i + 1)e^{5\pi i/4} + (-i + 1)e^{7\pi i/4} \right) = \frac{\pi i}{8} ((i + 1)(-\sqrt{2} - \sqrt{2}i) + (1 - i)(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)) =$$

$$= \frac{\pi i}{8} (-\sqrt{2} + \sqrt{2} + i(-\sqrt{2} - \sqrt{2}) + \sqrt{2} - \sqrt{2} + i(-\sqrt{2} - \sqrt{2})) = \frac{\pi i}{8} (-4\sqrt{2}i) = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

Лемма Жордана:

Если функция  $f$  стремится равномерно к 0 независимо от угла, то интеграл по добавленной дуге тоже стремится к 0



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + x + 1} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{x^2 + x + 1} dx = \operatorname{Im} \oint \frac{z e^{iz}}{z^2 + z + 1} dz =$$

$$z^2 + z + 1 = 0$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$z_0 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} - \text{поллюс порядка 1}$$

$$= \operatorname{Im} \left( 2\pi i \operatorname{Res}_{z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{z e^{iz}}{z^2 + z + 1} \right) = \operatorname{Im} \left( 2\pi i \frac{z \exp(iz)}{2z + 1} \Big|_{z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} \right) = \operatorname{Im} \left( 2\pi i \frac{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2} e^{-i/2} e^{-\sqrt{3}/2}}{\sqrt{3}i} \right) =$$

$$= \operatorname{Im} \left( \frac{\pi(-1 + \sqrt{3}i) e^{-\sqrt{3}/2} (\cos(\frac{1}{2}) - i \sin(\frac{1}{2}))}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi e^{-\sqrt{3}/2}}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{3} \cos\left(\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\right) \right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 4)} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2 + 4)} dx =$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 4)}$$

$$z = 0, \pm 2i$$

0 расположен на действительной оси

$$\oint \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 4)} dz = \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 4)} dz + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 4)} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 4)} dz + \int_r^R \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 4)} dz =$$

$$2\pi i \operatorname{Res}_{z=2i} f = 2\pi i \frac{\left(\frac{e^{iz}}{z}\right)}{2z} \Big|_{z=2i} = \pi i \cdot \frac{e^{i \cdot 2i}}{(2i)^2} = -\frac{\pi i}{4e^2}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 4)} dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{e^{ire^{i\varphi}}}{re^{i\varphi}(r^2 e^{2i\varphi} + 4)} rie^{i\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_{\pi}^0 \frac{id\varphi}{4} = -\frac{\pi i}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( -\frac{\pi i}{4e^2} - \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z(z^2 + 4)} dz \right) = \frac{\pi}{8} \left( 1 - \frac{1}{e^2} \right)$$

10/04/2025

Действительный определённый интеграл через вычеты Коши

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{3} \sin t + 4} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\sqrt{3} \left( \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} + 4 \right) iz} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{3}(z^2 - 1) + 4iz} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-\frac{i}{\sqrt{3}}} f = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

Замена  $z = \exp(it)$ ,  $t \in [0, 2\pi] \rightarrow z$  находится на единичной окружности

$$dz = ie^{it} dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}$$

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

$$\sqrt{3}z^2 - \sqrt{3} + 4iz = 0$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( -2i \pm \sqrt{-4 + (\sqrt{3})^2} \right) = -\frac{i}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}i$$

$$\operatorname{Res}_{z=-\frac{i}{\sqrt{3}}} f = \frac{1}{2\sqrt{3}z + 4i} \Big|_{z=-\frac{i}{\sqrt{3}}}$$

До РК допускаются только прикрепившие решение

$$f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)^2}$$

$$z = 0 - \text{устранимый разрыв} \Rightarrow \operatorname{Res}_{z=0} f = 0$$

Особые точки:  $z = 1$  - полюс 2 порядка

$$z = \infty$$

$$\operatorname{Res} f = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1!} \left( \frac{\sin z}{z(z-1)^2} (z-1)^2 \right)' = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\cos z \cdot z - \sin z}{z^2} = \cos 1 - \sin 1$$

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f = \sin 1 - \cos 1 \text{ т.к. сумма всех вычетов } = 0$$

$$f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)^2} = w = \frac{1}{z} = \frac{w \sin\left(\frac{1}{w}\right)}{\left(\frac{1}{w} - 1\right)^2} = \frac{w^3 \sin\left(\frac{1}{w}\right)}{(1-w)^2} =$$

$$\sin\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w} - \frac{1}{3!w^3} + \frac{1}{5!w^5} + \dots$$

$$\frac{1}{(1-w)^2} = \left( \frac{1}{1-w} \right)' = \left( \sum_{n=0}^{\infty} w^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n w^{n-1}$$

$$= w^3 \left( \frac{1}{w} - \frac{1}{3!w^3} + \frac{1}{5!w^5} - \frac{1}{7!w^7} + \frac{1}{9!w^9} - \frac{1}{11!w^{11}} + \dots \right) (1 + 2w + 3w^2 + 4w^3 + \dots) =$$

Смотрим только на слагаемые при степени 1

$$= w \left( -\frac{2}{3!} + \frac{4}{5!} - \frac{6}{7!} + \frac{8}{9!} + \dots \right) + \dots$$

Вычет в бесконечности:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n}{(2n+1)!}$$

$$\sin 1 - \cos 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots - \left( 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} + \dots \right) =$$

$$\left( \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) = \frac{2}{3!}$$

$$\left( \frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!} \right) = \frac{2n}{(2n+1)!}$$

Легко видеть, что ответы совпали

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$$

Начинаем такие задачи в начале на абсолютную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \text{сходится абсолютно}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1-i)^{2n}}{4^n \cdot n^4}$$

$$z_1 = z + 1 - i$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_1^{2n}}{4^n n^4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_1^2}{4\sqrt[n]{n^4}} = \frac{z_1^2}{4} < 1$$

$$|z_1| < 2$$

Проверяем границу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{4^n n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \text{сходится}$$

Ответ: сходится на  $|z + 1 - i| \leq 2$

$$w = e^z$$
$$\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{4}$$

Окружность вводим в комплексной форме

$$e^{x+\pi/4 \cdot i} = e^x e^{\pi/4 \cdot i}$$

$$\arg \left( w - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} t dt = 2\pi^2 = \oint_{|z|=1} \frac{\ln z}{i} \frac{dz}{iz} = - \oint_{|z|=1} \frac{\ln z}{z} dz$$

$$z = e^{it}, t \in [0, 2\pi] \Rightarrow |z| = 1$$

$$dz = ie^{it} dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz} t = \frac{\ln z}{i}$$

РК будет 17.04.2025 аудитория 225а РК1

$$\int_C (2\bar{z} + 3 - i) dz$$

$$2\bar{z} + 3 - i = (2x + 3) + i(-2y - 1)$$

$$\int_C f(z, \bar{z}) dz = \int_C (2x + 3) dx - (-2y - 1) dy + i \int_C (-2y - 1) dx + (2x + 3) dy$$

$$C : y = x^2 \Rightarrow dy = 2x dx$$

$$\int_0^1 (2x + 3) dx + (2x^2 + 1) 2x dx + i \int_0^1 (-2x^2 - 1) dx + (2x + 3) 2x dx =$$

$$= 1 + 3 + 1 + 1 + i \left( -\frac{2}{3} - 1 + \frac{4}{3} + 3 \right) = 6 + i \frac{8}{3}$$

$$\int_C \cos \bar{z} dz$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$z = t + i(1 - t) = (1 - i)t + i$$

$$\bar{z} = (1 + i)t - i$$

$$dz = (1 - i) dt$$

$$\int_0^1 \cos((1 + i)t - i) (1 - i) dt = \dots$$

**24/04/2025**

29 мая 918 РК3



$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

$$1. \text{ Теорема подобия: } f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$$

$$2. \text{ Теорема сдвига: } e^{\alpha t} f(t) \rightarrow F(p - \alpha)$$

$$3. \text{ Теорема запаздывания: } f(t - \alpha) \rightarrow e^{-\alpha p} F(p)$$

$$4. \text{ Интегрирование оригинала: } \int_0^t f(\tau) d\tau \rightarrow \frac{1}{p} F(p)$$

$$5. \text{ Дифференцирование оригинала: } f'(t) \rightarrow pF(p) - f(0)$$

$$f^{(n)}(t) \rightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$6. \text{ Интегрирование изображения: } t f(t) \rightarrow \int_p^{\infty} F(q) dq$$

$$7. \text{ Дифференцирование изображения: } -t f(t) \rightarrow F'(p)$$

$$8. \text{ Изображение свёртки: } f * g \rightarrow F(p)G(p)$$

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

На самом деле слева все формулы домножены на функцию Хевисайда

Таблица элементарных изображений

Оригинал тождественно равен 0 при отрицательных t

$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\text{sh}(\omega t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$\text{ch}(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$

отсебятина:

$$y_{\varepsilon}(\omega t) \rightarrow \frac{\omega}{p^2}$$

$$x_{\varepsilon}(\omega t) \rightarrow \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

$$x_{\varepsilon} = \frac{e^{\varepsilon t} + e^{-\varepsilon t}}{2} = 1$$

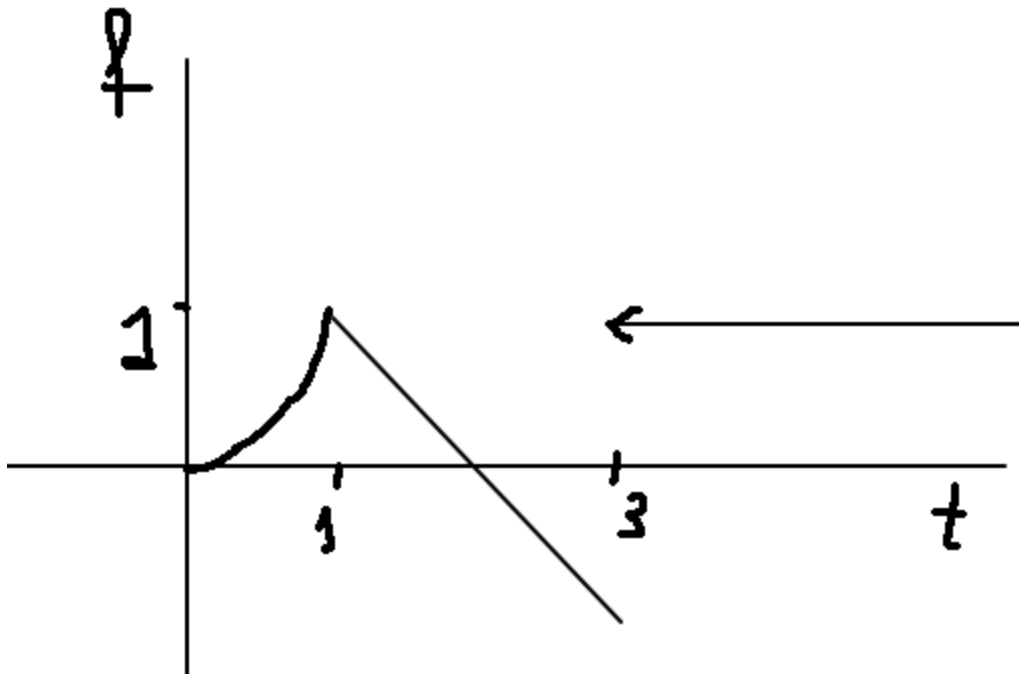
$$y_{\varepsilon} = \frac{e^{\varepsilon t} - e^{-\varepsilon t}}{2\varepsilon} = x$$

$$x_{\varepsilon}^2 - y_{\varepsilon}^2 = 1$$

Изображение импульсных (составных) оригиналов

(кусочно-заданная функция)

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t, & 1 < t \leq 3 \\ 1, & t > 3 \end{cases}$$



$$g(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [a, b] \\ 1, & t \in [a, b] \end{cases} = H(t-a) - H(t-b)$$

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2(H(t) - H(t-1)) + (2-t)(H(t-1) - H(t-3)) + H(t-3) = \\ &= t^2H(t) - (t^2 + t - 2)H(t-1) + (t-1)H(t-3) = \\ &= t^2H(t) - ((t-1)^2 + 3(t-1))H(t-1) + ((t-3) + 2)H(t-3) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{2}{p^3} + e^{-p} \left( \frac{2}{p^3} + \frac{3}{p^2} \right) + e^{-3p} \left( \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p} \right) \end{aligned}$$

$$f(t) = \begin{cases} 3-t, & 0 \leq t \leq 2 \\ 2, & 2 < t \leq 4 \\ 0, & 4 < t \leq 7 \\ 7-t, & 7 < t \leq 8 \\ 0, & t > 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= (3-t)(H(t-2) - H(t)) + 2(H(t-4) - H(t-2)) + (7-t)(H(t-8) - H(t-7)) = \\ &= (3-t)H(t) + (3-t-2)H(t-2) + 2H(t-4) + (t-7)H(t-7) + (7-t)H(t-8) \\ &= (3-t)H(t) + (-(t-2)-1)H(t-2) + 2H(t-4) + (t-7)H(t-7) + (-(t-8)-1)H(t-8) \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{3}{p} - \frac{1}{p^2} + e^{-2p} \left( -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \right) + e^{-4p} \cdot \frac{2}{p} + e^{-7p} \cdot \frac{1}{p^2} + e^{-8p} \left( -\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \right) \end{aligned}$$

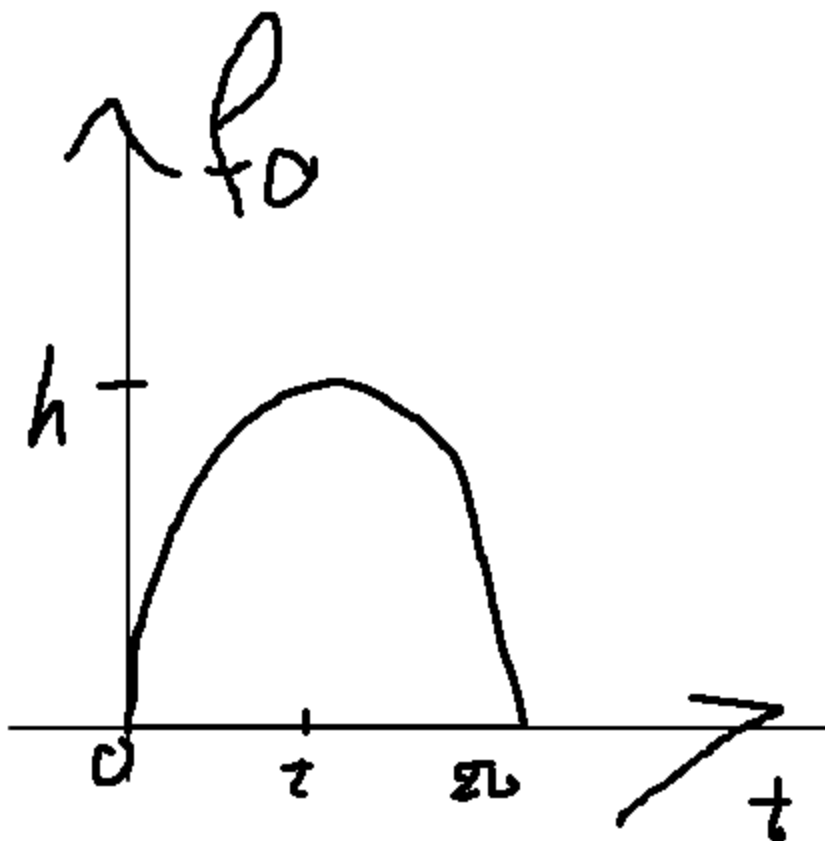
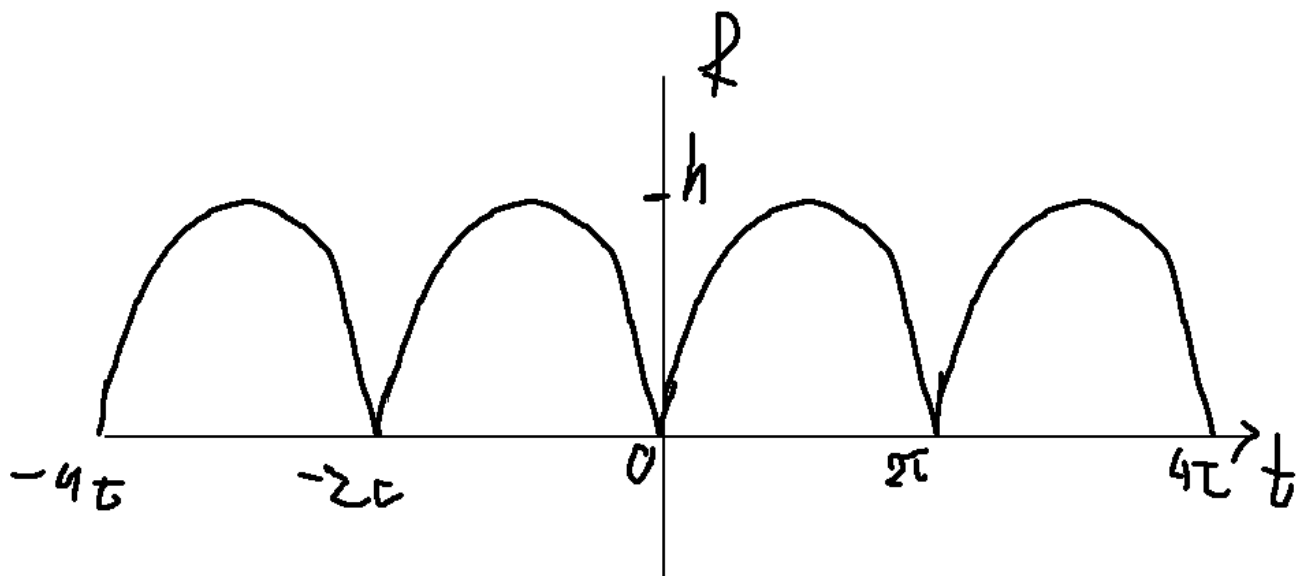
Выше, кстати, неправильно

порядок роста

$f(t) = e^{t^2}$  не имеет оригинала

$F(p)$  - периодическая

$$F(p) = F_0(p)(1 + e^{-Tp} + e^{-2Tp} + \dots + e^{-nTp} + \dots) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-Tp}}$$



$$f_0(t) = \left(h - \frac{h}{\tau^2}(t - \tau)^2\right)(H(t - 2\tau) - H(t)) = \left(-\frac{h}{\tau^2}t^2 + \frac{2h}{\tau}t\right)(H(t - 2\tau) - H(t))$$

$$f_0(t) = H(t - 2\tau) \left(-\frac{h}{\tau^2}(t - 2\tau)^2 - \frac{2h}{\tau}(t - 2\tau)\right) + H(t) \left(-\frac{h}{\tau^2}t^2 + \frac{2ht}{\tau}\right)$$

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-2\tau p}} F_0(p) = \frac{1}{1 - e^{-2\tau p}} \left( e^{-2\tau p} \left( -\frac{h}{\tau^2} \frac{2}{p^3} - \frac{2h}{\tau} \frac{1}{p^2} \right) - \frac{h}{\tau^2} \frac{2}{p^3} + \frac{2h}{\tau} \frac{1}{p^2} \right) = \frac{2h}{\tau p^2} \left( \text{cth}(2\tau p) - \frac{1}{\tau p} \right)$$

$$\begin{aligned}
f_0(t) &= h \sin\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right)(H(t-2\tau) - H(t)) = h \left( \sin\left(\frac{\pi(t-2\tau)}{2\tau} + \pi\right) H(t-2\tau) + \left(-\sin\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right)\right) H(t) \right) = \\
&= -h \left( \sin\left(\frac{\pi(t-2\tau)}{2\tau}\right) H(t-2\tau) + \sin\left(\frac{\pi t}{2\tau}\right) H(t) \right) \\
F(p) &= \frac{1}{1 - e^{-2\tau p}} \cdot -h \left( e^{-2\tau p} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2\tau}} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} + \frac{1}{\frac{\pi}{2\tau}} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \right) \\
&= \frac{2\pi h z}{(2\tau p)^2 + \pi^2} \text{cth}(2\tau p)
\end{aligned}$$

По расписанию семинаров РК