Пример 1

Постройте по методу моментов оценку неизвестного параметра θ по выборке $X_1, X_2, \dots. X_n$ из распределения с плотностью

$$p(x,\theta)=\begin{cases}\frac{2}{\lambda\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{\theta^2}} & x>1\\ 0 & x\le 1\end{cases}.$$

$$p(x,\lambda)=\frac{2}{\lambda\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{\lambda^2}},\quad x>1$$

$$M\xi=\int_1^{+\infty}\frac{x\cdot 2}{\lambda\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{\lambda^2}}dx=\left|\begin{matrix}\frac{(x-1)^2}{\lambda^2}=t\\ \frac{2(x-1)}{\lambda^2}dx=dt\end{matrix}\right|=$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{2x-2}{\lambda\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{\lambda^2}}dx+\int_1^{\infty}\frac{2}{\lambda\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{\lambda^2}}dx=\int_0^{\infty}\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}e^{-t}dt+$$

$$+\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-t}dt=\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}+1$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}+1=\overline{X}\ \Rightarrow\ \hat{\lambda}=\left(\left(\frac{1}{n}\sum x_k\right)-1\right)\cdot\sqrt{\pi}$$

Несмещённость.

$$M\left(\left(\frac{1}{\lambda}\sum x_k\right)-1\right)\cdot\sqrt{\pi}=\sqrt{\pi}\left(M\left(\frac{1}{n}\sum x_k\right)-1\right)=$$

$$=\sqrt{\pi}\cdot\left(\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}+1\right)-1\right)=\lambda$$

Ответ. $\hat{\lambda}=\sqrt{\pi}(\overline{X}-1)$.

Метод максимального правдоподобия

Пример 2

Методом максимального правдоподобия найдите оценку неизвестного параметра θ, если плотность распределения с.в. X имеет вид

$$p(x,\theta)=\begin{cases}0, x\le 0\\ 8\theta x^3 e^{-2\theta x^4}, x>0\end{cases}$$

и по наблюдениям получены следующие данные: 2,4; 3,5; 3,2; 3,4; 2,5; 2,4; 3,1; 3,4; 3,8; 2,6.

Составим функцию максимального правдоподобия

$$L(X_1,X_2,\ldots.X_{10},\theta)=\prod_{k=1}^{10}p(X_k,\theta)=8^{10}\theta(2,4)^3\cdot(3,5)^3\cdot\ldots\cdot(2,6)^3 e^{-2\theta\left[(2,4)^4+(3,5)^4+\ldots(2,6)^4\right]}$$

$$L=8^{10}\cdot\theta^{10}\prod_{k=1}^{10}X_k^3\cdot e^{-2\theta\sum_{k=1}^{10}X_k^4}$$

Прологарифмируем функцию.

$$\ln L=10\cdot\ln 8+10\ln\theta+\sum_{k=1}^{10}X_k^3+\left(-2\theta\sum_{k=1}^{10}X_k^4\right)$$

Найдём производную и приравняем её к нулю

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\theta}=\frac{10}{\theta}+\left(-2\sum_{k=1}^{10}X_k^4\right)$$

$$\frac{10}{\theta}+\left(-2\sum_{k=1}^{10}X_k^4\right)=0\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{10}{2\sum_{k=1}^{10}X_k^4}\approx 0,0051$$

Нетрудно заметить, что вторая производная при этом значении $\hat{\theta}$ будет отрицательной , следовательно это максимум функции, и $\hat{\theta}\approx 0,0051$ - оценка максимального правдоподобия.

Пример 3

Постройте ОМП и ОММ для параметра p по выборке $X_1, X_2, \ldots . X_n$ из биномиального закона распределения:

$$P(\xi = j) = C_k^j p^j (1-p)^{k-j}, \; j = \overline{0,k}$$

Составим функцию максимального правдоподобия

$$L(X_1, X_2, \ldots . X_k, \theta) = \prod_{k=1}^{n} p(X_k, p) = \prod_{k=1}^{n} C_n^{X_k} p^{X_k} (1-p)^{k-X_k}$$

Прологарифмируем функцию.

$$\ln L = \ln \prod_{k=1}^{n} C_n^{X_k} + \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right) \ln p + \left[kn - \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right) \right] \ln(1-p)$$

Найдём производную и приравняем её к нулю

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right)}{p} - \frac{\left[kn - \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right) \right]}{1-p}$$

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right)}{p} - \frac{\left[kn - \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right) \right]}{1-p} = 0 \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right)(1-p) = p \left[kn - \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right) \right] \Rightarrow \hat{p} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right)}{kn}$$

$\hat{p} = \dfrac{\overline{X}}{k}$ - оценка максимального правдоподобия.

Оценка по методу моментов будет такой же

$$MX_i = kp = \overline{X} \Rightarrow \hat{p} = \frac{\overline{X}}{k}$$

Эффективная оценка

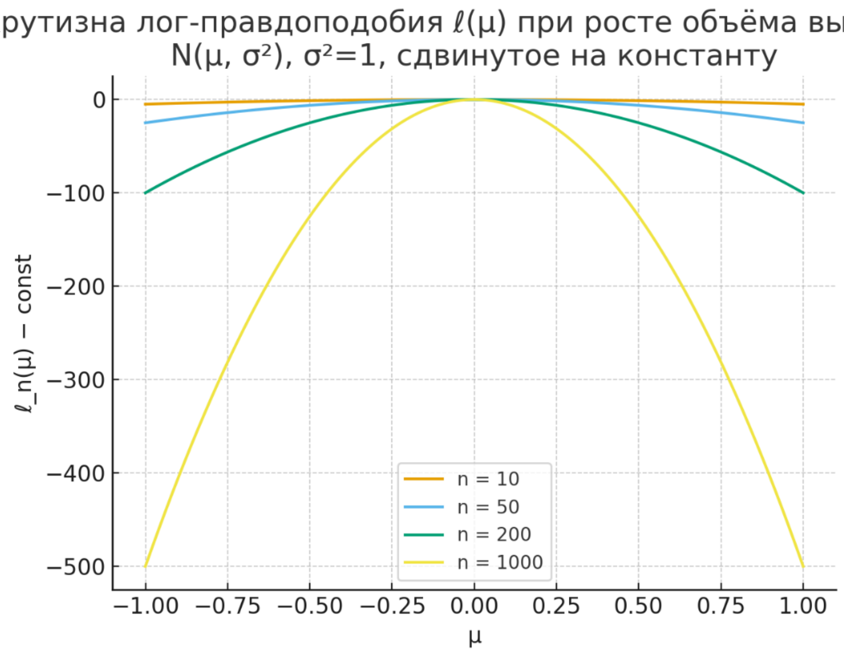
Теорема (неравенство Рао-Крамера)

Пусть $X_1, X_2, \ldots X_n$ – выборка из параметрической модели с плотностью $p(x,\theta)$, пусть $\int p(\bar{x},\theta)d\bar{x}$ допускает дифференцирование по параметру. Тогда каждая несмещенная оценка $\hat{\theta}_{\boldsymbol{n}} = \varphi(X_1, X_2, \ldots X_n)$ параметра θ удовлетворяет неравенству:

$D\hat{\theta}_n \geq \dfrac{1}{nI_1(\theta)}$, где $I_1(\theta) = M\left(\dfrac{\partial \ln p(X_k,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\dfrac{\partial \ln p(x,\theta)}{\partial\theta}\right)^2 p(x,\theta)dx$ – информация Фишера относительно семейства $p(x,\theta)$, содержащаяся в одном наблюдении.

Это мера «чувствительности» правдоподобия к параметру.
Если при сдвиге параметра лог-правдоподобие сильно меняется, данные «много говорят» о параметре → информация большая. Если почти не меняется → информация маленькая. информация Фишера — это «крутизна» лог-правдоподобия вокруг истинного параметра, а ММП — точка максимума этого лог-правдоподобия. Чем больше информация, тем уже и выше «пик», тем точнее ММП-оценка.
Чем больше информация, тем меньше минимально достижимая дисперсия любой несмещённой оценки.

- Большая информация = «крутая» вершина лог-правдоподобия около истинного параметра → ММП-оценка концентрируется точнее.
- Она аддитивна и задаёт масштаб неопределённости.



На графике видно: по мере роста n парабола становится более «узкой и острой». Это и есть рост кривизны/крутизны лог-правдоподобия, который пропорционален n. Следствие: дисперсия ММП-оценки падает как 1/n, а стандартная ошибка — как $\frac{1}{\sqrt{n}}.$

Замечание. Для дискретной модели вместо $p(x,\theta)$ используем $P(X = x_k)$.

Определение. Оценка $\hat{\theta}_n$ называется эффективной, если для нее неравенство Рао-Крамера превращается в равенство, то есть ее эффективность

$$e(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{nI_1(\theta) D\hat{\theta}_n} = 1.$$

граница Рао–Крамера — это наилучшая возможная (наименьшая) дисперсия среди всех несмещённых оценок при данных условиях. Если оценка достигает этой границы, она «выжала из данных максимум точности», т.е. эффективна.

Пример 4

Покажите, что оценка максимального правдоподобия параметра λ, полученная по выборке из пуассоновского закона, является эффективной.

Решение. Поскольку $P_\lambda(\xi_k = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, то функция правдоподобия имеет вид:

$$\boldsymbol{L}(X_1, X_2, \ldots. X_n, \lambda) = \prod_{k=1}^{n} P_\lambda(\xi_k = X_k) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda^{X_k}}{X_k!} e^{-\lambda}$$

$$\ln \boldsymbol{L}(X_1, X_2, \ldots. X_n, \lambda) = \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} \ln\left(\frac{\lambda^{X_k}}{X_k!} e^{-\lambda}\right) = \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{\boldsymbol{n}} (X_k \ln \lambda - \ln X_k! - \lambda)$$

$$\frac{\partial \ln \boldsymbol{L}(X_1, X_2, \ldots. X_n, \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{X_k}{\lambda} - 1\right) = \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - n\right) \to \hat{\lambda}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k,$$

то есть оценка максимального правдоподобия совпадает с оценкой по методу моментов.

$$D\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} DX_k = \frac{\lambda}{n}$$

Вычислим информацию Фишера:

$$\ln P_\lambda\left(\xi = X_k\right) = \ln\frac{\lambda^{X_k}}{X_k!}e^{-\lambda} = X_k\ln\lambda - \ln X_k! - \lambda\,,\quad \frac{\partial \ln P_\lambda\left(\xi = X_k\right)}{\partial\lambda} = \frac{X_k}{\lambda} - 1,$$

$$I_1(\lambda) = M\left(\frac{\partial \ln P_\lambda\left(\xi = X_k\right)}{\partial\lambda}\right)^2 = M\left(\frac{X_k}{\lambda} - 1\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}M\left(X_k - \lambda\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}DX_k = \frac{1}{\lambda}.$$

Следовательно, $e\left(\hat{\lambda}_n\right) = \dfrac{1}{D\hat{\lambda}_n \cdot n \cdot I_1(\lambda)} = \dfrac{1}{\frac{\lambda}{n}\cdot n\cdot\frac{1}{\lambda}} = 1.$

Пример 5

Постройте ОМП для параметра α по выборке $X_1, X_2, \ldots. X_n$ из распределения с плотностью

$$p(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

Параметр λ считать известным. Покажите, что полученная оценка $\hat{\alpha}$ смещенная. Постройте несмещенную оценку $\tilde{\alpha}$ параметра α. Вычислите информацию Фишера и покажите, что $\tilde{\alpha}$ асимптотически эффективна.

Составим функцию правдоподобия

$$L\left(X_1, X_2, \ldots. X_n, \alpha\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}X_k^{\lambda-1}e^{-\alpha X_k}$$

Прологарифмируем функцию правдоподобия, чтобы было удобнее искать максимум.

$$\ln L = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}X_k^{\alpha-1}e^{-\alpha X_k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\lambda\ln\alpha - \ln\Gamma(\lambda) + (\lambda-1)\ln X_k - \alpha X_k\right)$$

Функция правдоподобия зависит от одной переменной - α (по условию λ считается известным). Найдём максимум функции, для этого возьмём производную по α

$$\frac{\partial \ln L\left(X_1, X_2, \ldots. X_n, \lambda\right)}{\partial\alpha} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda}{\alpha} - X_k$$

Приравняем производную к нулю и найдем максимум

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda}{\alpha}-X_k=0\Rightarrow\frac{n\lambda}{\alpha}=\sum_{k=1}^{n}X_k\Rightarrow\hat{\alpha}=\frac{\lambda}{\overline{X}}$$

Покажем, что полученная оценка является смещённой, для этого найдём её математическое ожидание.

$$M\hat{\alpha}=M\left(\frac{\lambda}{\overline{X}}\right)=\lambda nM\left(\frac{1}{X_1+X_2+\ldots X_n}\right)$$

Для того, чтобы найти математическое ожидание, нужно знать как распределена статистика $X_1+X_2+\ldots X_n$. В этой задаче было доказано, что сумма независимых случайных величин, распределенных по закону $\gamma_{\alpha,\lambda}$ и $\gamma_{\alpha,\nu}$ соответственно, распределена по закону $\gamma_{\alpha,\,\lambda+\nu}$.

Так как каждый элемент выборки распределён по закону $\gamma_{\alpha,\lambda}$, то получаем

$$\underbrace{\gamma_{\alpha,\lambda}+\gamma_{\alpha,\lambda}+\ldots\gamma_{\alpha,\lambda}}_{n}=\gamma_{\alpha,n\lambda}$$

Плотность такого распределения имеет вид

$$p_{\gamma_{\alpha,n\lambda}}(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^{n\lambda}}{\Gamma(n\lambda)}x^{n\lambda-1}e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

Теперь найдём математическое ожидание полученной оценки

$$M\hat{\alpha}=\lambda nM\left(\frac{1}{X_1+X_2+\ldots X_n}\right)=\lambda n\int_0^\infty\frac{1}{x}\frac{\alpha^{n\lambda}}{\Gamma(n\lambda)}x^{n\lambda-1}e^{-\alpha x}dx=\frac{\lambda n\alpha^2}{\Gamma(n\lambda)}\int_0^\infty\alpha^{n\lambda-2}x^{n\lambda-2}e^{-\alpha x}dx=$$

$$=\left\{\begin{aligned}\alpha x&=t\\ dx&=\frac{1}{\alpha}dt\end{aligned}\right\}=\frac{\lambda n\alpha^2}{\Gamma(n\lambda)}\int_0^\infty t^{n\lambda-2}e^{-t}\frac{1}{\alpha}dt=\frac{\lambda n\alpha}{\Gamma(n\lambda)}\Gamma(n\lambda-1)=\frac{\lambda n\alpha}{\Gamma(n\lambda-1+1)}\Gamma(n\lambda-1)=$$

$$=\frac{\lambda n\alpha}{(n\lambda-1)\Gamma(n\lambda-1)}\Gamma(n\lambda-1)=\frac{\lambda n}{(n\lambda-1)}\alpha=\frac{n}{\left(n-\dfrac{1}{\lambda}\right)}\alpha$$

Таким образом полученная оценка является смещённой, но будет асимптотически несмещённой (при $n\to\infty$). Построим несмещённую оценку параметра, используя полученную оценку по методу максимального правдоподобия. Для этого умножим $\hat{\alpha}=\dfrac{\lambda}{\overline{X}}$ на коэффициент

$$\frac{(n\lambda-1)}{\lambda n}$$

$$\tilde{\alpha}=\frac{(n\lambda-1)}{\lambda n}\hat{\alpha}=\frac{(n\lambda-1)}{\lambda n}\frac{\lambda}{\bar{X}}=\frac{(n\lambda-1)}{n\bar{X}}$$

Математическое ожидание такое оценки будет равно α

Докажем эффективность этой оценки, для этого вычислим дисперсию оценки

$$D\tilde{\alpha}=D\left(\frac{(n\lambda-1)}{n\bar{X}}\right)=(n\lambda-1)^2 D\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}X_k}\right)$$

Как было показано ранее, статистика $\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}X_k}$, распределена по закону $\gamma_{\alpha,n\lambda}$

, математическое ожидание $M\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}X_k}\right)=\frac{\alpha}{(n\lambda-1)}$ было вычислено ранее,

найдём $M\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}X_k}\right)^2$

$$M\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}X_k}\right)^2=\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2}\frac{\alpha^{n\lambda}}{\Gamma(n\lambda)}x^{n\lambda-1}e^{-\alpha x}dx=\frac{\alpha^3}{\Gamma(n\lambda)}\int_0^{\infty}\alpha^{n\lambda-3}x^{n\lambda-3}e^{-\alpha x}dx=$$

$$=\left\{\begin{gathered}\alpha x=t\\ dx=\frac{1}{\alpha}dt\end{gathered}\right\}=\frac{\alpha^3}{\Gamma(n\lambda)}\int_0^{\infty}t^{n\lambda-3}e^{-t}\,\frac{1}{\alpha}\,dt=\frac{\alpha^2}{\Gamma(n\lambda)}\Gamma(n\lambda-2)=\frac{\alpha^2}{\Gamma(n\lambda-2+2)}\Gamma(n\lambda-2)=$$

$$=\frac{\alpha^2}{(n\lambda-2+1)(n\lambda-2)\Gamma(n\lambda-2)}\Gamma(n\lambda-2)=\frac{\alpha^2}{(n\lambda-1)(n\lambda-2)}$$

Теперь найдём дисперсию $D\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} X_k}\right)$

$$D\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} X_k}\right)=\frac{\alpha^2}{(n\lambda-1)(n\lambda-2)}-\left(\frac{\alpha}{(n\lambda-1)}\right)^2=\frac{\alpha^2}{(n\lambda-1)^2(n\lambda-2)}$$

Тогда окончательно дисперсия оценки $\tilde{\alpha}$

$$D\tilde{\alpha}=(n\lambda-1)^2 D\left(\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} X_k}\right)=\frac{\alpha^2}{(n\lambda-2)}$$

При $n\to\infty$, дисперсия оценки будет стремиться у нулю, следовательно полученная оценка является состоятельной

Проверим эффективность полученной оценки. Вычислим информацию Фишера, для начала возьмём логарифм от плотности распределения

$$\ln p(x,\alpha)=\ln\left(\frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-\alpha x}\right)=\lambda\ln\alpha-\ln\Gamma(\lambda)-(\lambda-1)\ln x-\alpha x,$$

Продифференцируем полученное выражение по α

$$\frac{\partial\ln p(x,\alpha)}{\partial\alpha}=\frac{\lambda}{\alpha}-x$$

Найдём информацию Фишера

$$I_1(\lambda)=M\left(\frac{\partial\ln p(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right)^2=M\left(x-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2$$

Ранее здесь были вычислены характеристики гама распределения. Заметим, что математическое ожидание гамма распределения $M\xi=\frac{\lambda}{\alpha}$. Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания равняется дисперсии, то есть

$$M\left(x-\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 = D\xi = \frac{\lambda}{\alpha^2}$$

$$I_1(\alpha) = \frac{\lambda}{\alpha^2}$$

Теперь найдём эффективность

$$e(\tilde{\alpha}) = \frac{1}{D\tilde{\alpha}_n \cdot n \cdot I_1(\alpha)} = \frac{1}{\frac{\alpha^2}{(n\lambda-2)} \cdot n \cdot \frac{\lambda}{\alpha^2}} = \frac{(n\lambda-2)}{n\lambda}$$

Так как $n \to \infty$ эффективность стремится к 1, то полученная оценка является асимптотически эффективной.

Пример 5

Постройте ОМП для параметра λ по выборке $X_1, X_2, \ldots. X_n$ из логнормального распределения с плотностью

$$p(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi} x\sigma} e^{-\frac{(\ln x-\lambda)^2}{2\sigma^2}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}.$$

Параметр σ считать известным. Вычислите информацию Фишера и покажите, что полученная оценка эффективна.

Составим функцию правдоподобия

$$L(X_1, X_2, \ldots. X_n, \lambda) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi} X_k \sigma} e^{-\frac{(\ln X_k - \lambda)^2}{2\sigma^2}}$$

Прологарифмируем функцию правдоподобия, чтобы было удобнее искать максимум.

$$\ln L(X_1, X_2, \ldots. X_n, \lambda) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} X_k \sigma} e^{-\frac{(\ln X_k - \lambda)^2}{2\sigma^2}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\ln 2\pi - \ln X_k\sigma - \frac{(\ln X_k - \lambda)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Функция правдоподобия зависит от одной переменной - λ (по условию σ

считается известным). Найдём максимум функции, для этого возьмём производную по λ.

$$\frac{\partial \ln L\left(X_1, X_2, \ldots . X_n, \lambda\right)}{\partial \lambda} = \sum_{k=1}^{n} -\frac{2\left(\ln X_k - \lambda\right)}{2\sigma^2}$$

Приравняем производную к нулю и найдем максимум

$$\sum_{k=1}^{n} -\frac{2\left(\ln X_k - \lambda\right)}{2\sigma^2} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(\ln X_k - \lambda\right) = 0 \Rightarrow n\lambda = \sum_{k=1}^{n}\left(\ln X_k\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln X_k\right)$$

Докажем эффективность оценки, для этого вычислим дисперсию оценки

$$D\hat{\lambda} = D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln X_k\right)\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\left(\ln X_k\right)$$

Отдельно вычислим $D\left(\ln X_i\right)$

$$M\left(\ln X_i\right) = \int_0^{\infty} \ln x \frac{1}{\sqrt{2\pi} x\sigma} e^{-\frac{(\ln x - \lambda)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_0^{\infty} \ln x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln x - \lambda)^2}{2\sigma^2}} d\ln x = \lambda$$

При вычислении этого интеграла внесли $\frac{1}{x}$ под знак дифференциала и получили интеграл равный интегралу при вычислении математического ожидания нормального закона.

$$M\left(\ln^2 X_i\right) = \int_0^{\infty} \ln^2(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi} x\sigma} e^{-\frac{(\ln x - \lambda)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma^2 + \lambda^2$$

При вычислении этого интеграла также внесли $\frac{1}{x}$ под знак дифференциала и получили интеграл равный интегралу при вычислении математического ожидания от квадрата нормальной величины. Найдём дисперсию

$$D\left(\ln X_i\right) = \sigma^2 + \lambda^2 - \lambda^2 = \sigma^2$$

Теперь можем найти дисперсию оценки $\hat{\lambda}$

$$D\hat{\lambda}_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\left(\ln X_k\right) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Вычислим информацию Фишера, возьмём логарифм от плотности распределения.

$$\ln p(x,\lambda)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma}e^{-\frac{(\ln x-\lambda)^2}{2\sigma^2}}\right)=-\frac{1}{2}\ln 2\pi-\ln x-\ln\sigma-\frac{(\ln x-\lambda)^2}{2\sigma^2},$$

Продифференцируем полученное выражение по λ

$$\frac{\partial\ln p(x,\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{2(\ln x-\lambda)}{2\sigma^2}$$

Найдём информацию Фишера

$$I_1(\lambda)=M\left(\frac{\partial\ln p(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right)^2=M\left(\frac{2(\ln x-\lambda)}{2\sigma^2}\right)^2=$$

$$=\int_0^\infty\frac{(\ln x-\lambda)^2}{\sigma^4}\frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma}e^{-\frac{(\ln x-\lambda)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$\frac{1}{\sigma^4}\int_0^\infty\ln^2 x\frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma}e^{-\frac{(\ln x-\lambda)^2}{2\sigma^2}}dx-\frac{2\lambda}{\sigma^4}\int_0^\infty\ln x\frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma}e^{-\frac{(\ln x-\lambda)^2}{2\sigma^2}}dx+$$

$$+\frac{\lambda^2}{\sigma^4}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma}e^{-\frac{(\ln x-\lambda)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Здесь первый и второй интеграл уже был вычислен ранее, когда мы находили $D(\ln X_i)$ а третий, после вынесения констант, это интеграл от плотности логнормального распределения, то есть равен 1, таким образом

$$I_1(\lambda)=\frac{\sigma^2+\lambda^2}{\sigma^4}-\frac{2\lambda^2}{\sigma^4}+\frac{\lambda^2}{\sigma^4}=\frac{1}{\sigma^2}$$

Теперь найдём эффективность

$$e\left(\hat{\lambda}_n\right)=\frac{1}{D\hat{\lambda}_n\cdot n\cdot I_1(\lambda)}=\frac{1}{\frac{\sigma^2}{n}\cdot n\cdot\frac{1}{\sigma^2}}=1.$$

Следовательно, полученная оценка является эффективной.