13/02/2025

Уравнение второго порядка от 2 переменных

Уравнение, линейное относительно старих производных:

Линейное уравнение второго порядка:

b_1	u_x
b_2	u_y
a_{11}	u_{xx}
$2a_{12}$	u_{xy}
a_{22}	u_{yy}

Убедиться, что результат будет линейным

$$A_{11}u_{\xi\xi} + 2A_{12}u_{\xi\eta} + A_{22}u_{\eta\eta} + B_1u_\xi + B_2u_\eta = F$$

$$A_{11} = 0 \Leftrightarrow a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0$$
$$\xi(x,y) \text{ -- частное решение } \implies \dots$$

Утверждение 1

$$\xi(x,y) \text{ -- частное решение} \Leftrightarrow \xi(x,y) = C \text{ -- Общий интеграл следующего ОДУ:}$$
$$\text{ОДУ: } a_{11}dy^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}dx^2 = 0$$

Доказательство:

$$\Rightarrow)\ a_{11}\left(-\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\xi_x}{\xi_y}\right) + a_{22} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y}|_{y=y(x,C)} \text{ -- Производная неявной функции}$$
$$\Leftarrow)\ \xi(x,y) = C \text{ -- Общий интеграл}$$
$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} =$$
$$= a_{11}\left(-\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 - 2a_{12}\cdot -\frac{\xi_x}{\xi_y} + a_{22} = 0$$

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0 \text{ -- Характеристическое уравнение}$$
$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$
Решение интегральных уравнений будем называть характеристиками
$$\xi(x,y) = C \text{ и } \eta(x,y) = C \text{ -- независимые } \implies$$
$$\Delta > 0 \text{ -- гиперболическое}$$
$$\Delta = 0 \text{ -- параболическое}$$
$$\Delta < 0 \text{ -- эллиптическое}$$

Задача: Доказать, что

$$A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})$$
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

1. Гиперболические уравнения

$$a_{11}u_{xx} + F(x,u,\dots) = 0$$
$$a) u_{\xi\xi} + \tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0, \tilde{F} = -\frac{F}{2A_{12}}$$
$$б) \begin{cases} \xi = \alpha + \beta \\ \eta = \alpha - \beta \end{cases}, \begin{cases} \alpha = \frac{\xi+\eta}{2} \\ \beta = \frac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$$
$$u_\xi = u_\alpha \alpha_\xi + u_\beta \beta_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta)$$
$$u_\eta = \dots = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta)$$
$$u_{\xi\eta} = \dots = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$$
$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + G(\alpha, \boldsymbol{\beta}, \dots) = 0$$

Доказать, что $A_{22} = 0$

2. Параболические уравнения

$$\begin{cases} \xi(x,y) = C \\ \eta(x,y) = C \text{ -- независима от } \xi \end{cases}$$
$$\text{Доказать: } A_{11} = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0$$
$$A_{12} = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0$$
$$A_{22} = \dots$$
$$u_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0, \tilde{F} = -\frac{F}{A_{22}}$$

3. Эллиптические уравнения

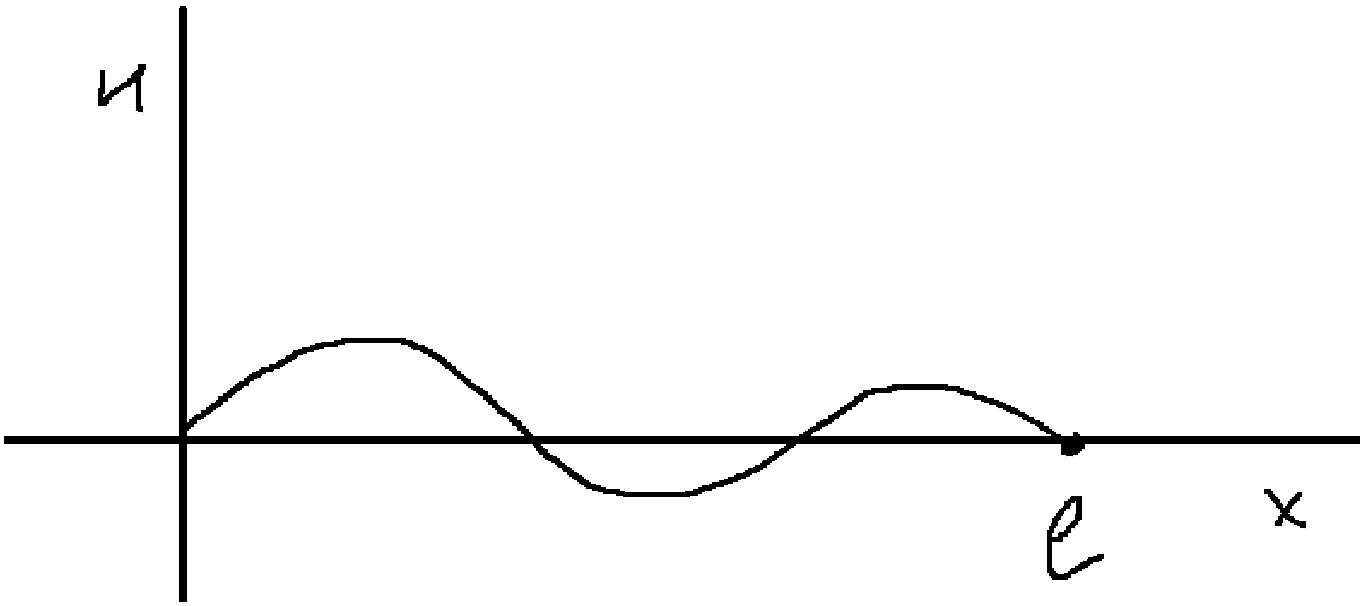
$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0$$

20/02/2025

Уравнение колебаний на отрезке. Метод разделения переменных

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < l, t > 0, \\ \text{Граничные условия} \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$f(x,t)$ - плотность мощности воздействия на струну



Перейдём к вспомогательной задаче. Будет искать её решение в виде $z(x,t) = T(t)X(x)$

$$\begin{cases} z_{tt} = a^2 z_{xx}, \quad 0 < x < l, t > 0 \\ z|_{x=0} = z|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$T''X = a^2 T X''$$

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad T(t)X(0) = T(t)X(l) = 0$$

$$\begin{cases} -X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

X - нетривиальное решение

$$-\frac{d^2}{dt^2} : X \to -X''$$

1) Априорная оценка знака λ

$$\mathcal{A} : L \to L$$

$$\mathcal{A} \subseteq L$$

$-\dfrac{d^2}{dx^2}$ - дважды непрерывно дифференцируемый оператор

$$-X'' - \lambda X = 0$$

$$\int_0^l (-X''X - \lambda X^2) dx = 0$$

$$\cancelto{0}{-X'X|_0^l} + \int_0^l (X')^2 dx - \lambda \int_0^l X^2 dx = 0$$

$$\int_0^l (X')^2 dx - \lambda \int_0^l X^2 dx = 0,$$

Теорема о сохранении знака непрерывной функции:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : 0 < |x - x_0)| < \delta \Rightarrow |x^2(r) - x_0^2| < \varepsilon$$

$$\implies \int_0^l X^2 dx > 0 \implies \lambda \geq 0$$

Пусть $\lambda = 0 \implies$

$\displaystyle\int_0^l (x')^2 dx = 0 \implies X'(x) = 0 \Rightarrow X = C \Rightarrow X = 0$ - тривиальное решение

Где-то в решении использовалась теорема Гильберта-Шмидта

$$\lambda > 0 :$$

$$X(x) = A \cos\sqrt{\lambda}x + B \sin\sqrt{\lambda}x, \ A^2 + B^2 \neq 0$$

$$X(0) = A = 0 \Rightarrow B \neq 0$$

$$X(l) = B \sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}l = 0 \implies$$

$$\lambda = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$X(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \ n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x),$$

Проверить систему на ортогональность:

$$\int_0^l \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) = C \cdot \delta_m^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'' X_n = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n X_n'' + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

$$\scriptstyle n=1 \qquad\qquad\qquad\qquad n=1 \qquad\qquad\qquad n=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) \sim \varphi(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x) \sim \psi(x)$$

$$\begin{cases} T_n'' + a^2 \lambda_n T_n = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \\ T_n'(0) = \psi_n \end{cases}$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx$$

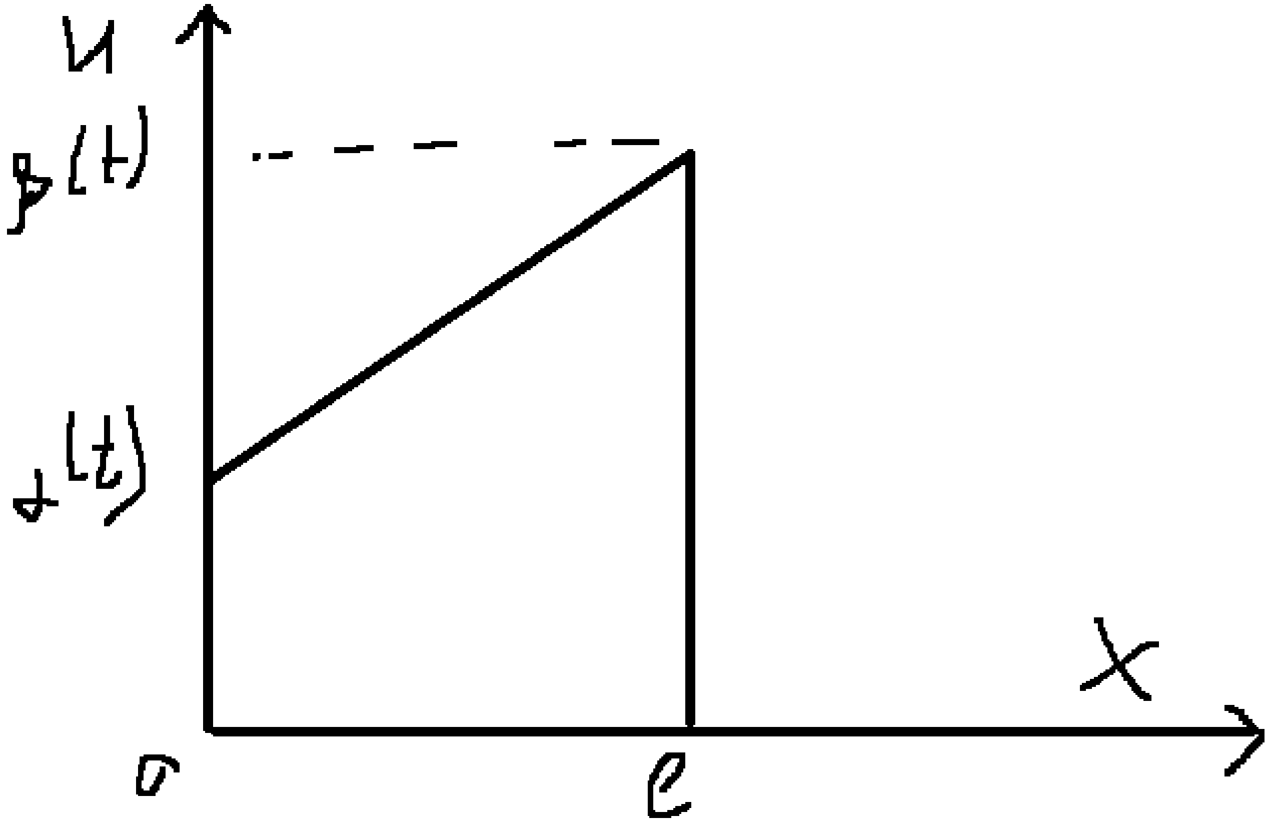
$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx$$

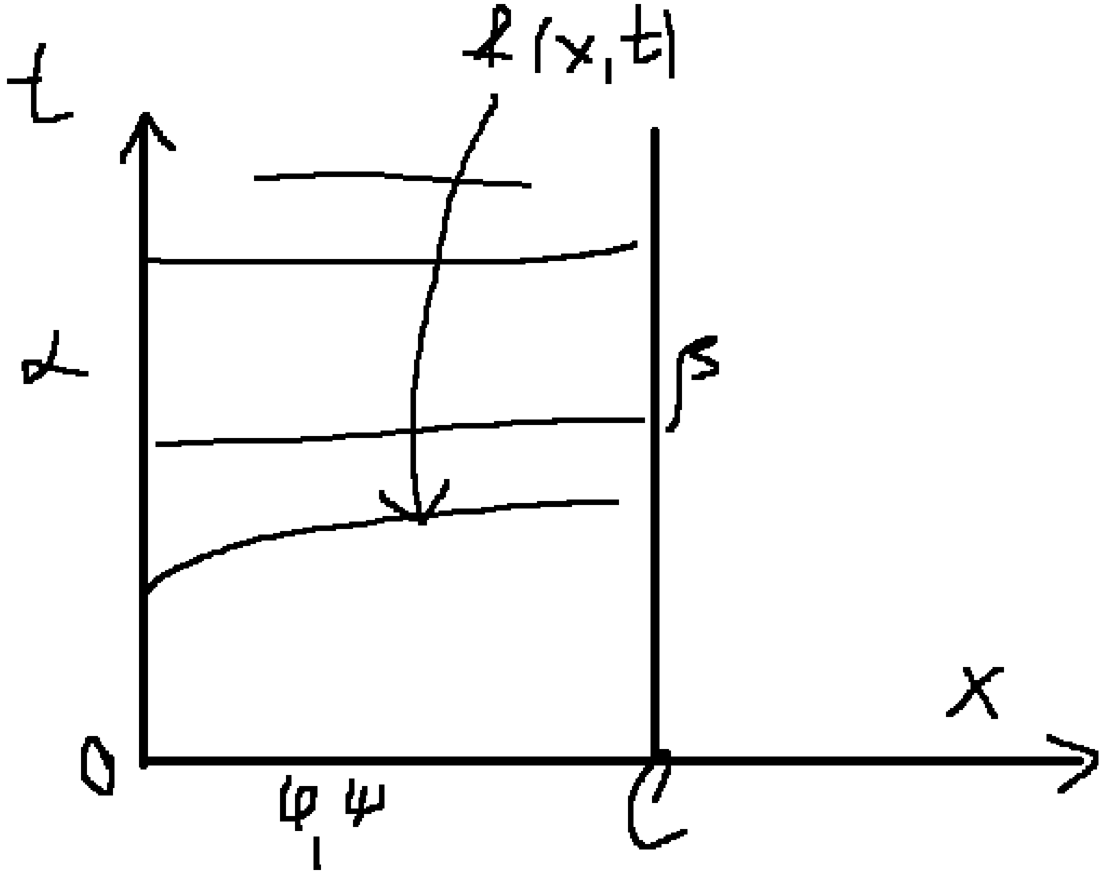
$$\psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) dx$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u|_{x=0} = \alpha(t) \\ u|_{x=l} = \beta(t) \\ u|_{t=0} = \varphi(t) \\ u_t|_{t=0} = \psi(t) \end{cases}$$

$$u = v + A(t)x + B(t)$$

$$\mathcal{B}u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \mathcal{B}v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$


u
β(t)
α(t)
x
0
l


f(x,t)
t
α
β
x
0
φ, ψ
l

$$\begin{cases} A(t)\cdot 0 + B(t) = \alpha(t) \\ A(t)\cdot l + B(t) = \beta(t) \end{cases}$$

$$A(t)x + B(t) = \alpha(t) + \frac{x}{l}(\beta(t) - \alpha(t))$$

$$u_t = v_t + A'(t)x + B'(t)$$

$$u_{tt} = v_{tt} + A''(t)x + B''(t)$$

$$u_x = v_x + A(t)$$

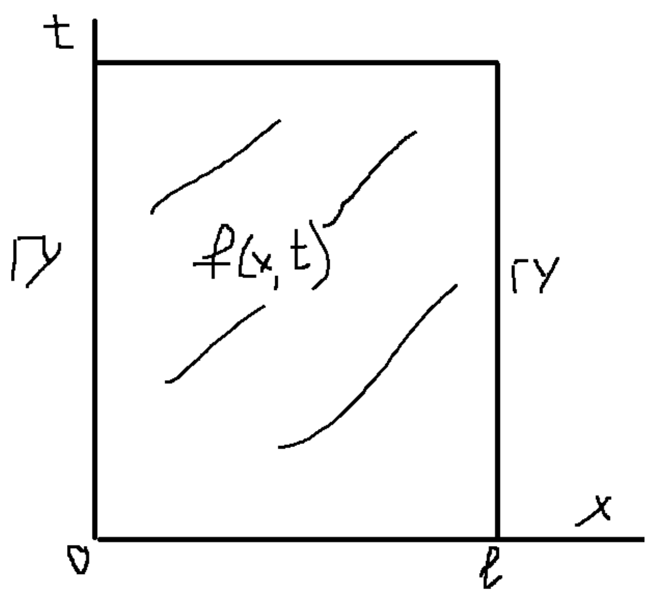
$$u_{xx} = v_{xx}$$

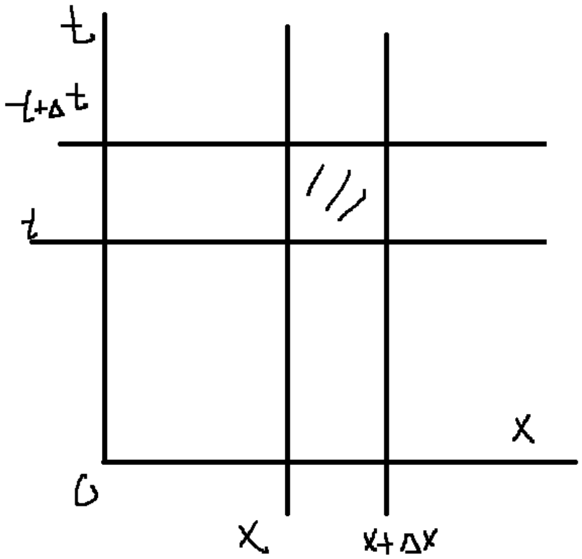
$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t) = -A''x - B'' \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0 \\ v|_{t=0} = \varphi' - A(0)x - B(0) \\ v_t|_{t=0} = \psi - A'(0)x - B'(0) \end{cases}$$

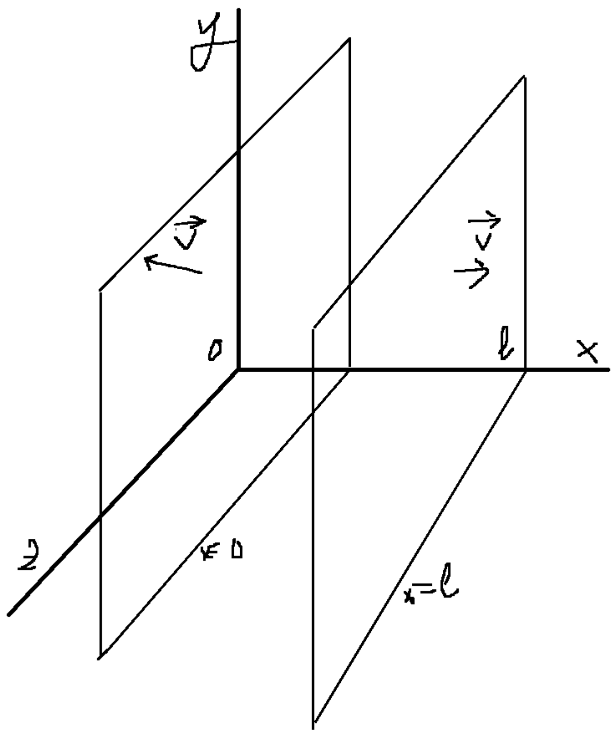
27/02/2025

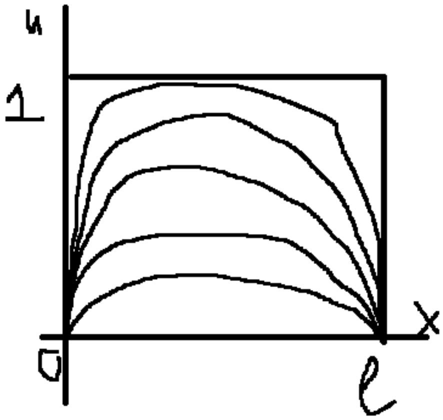
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \text{ - уравнение теплопроводности} \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

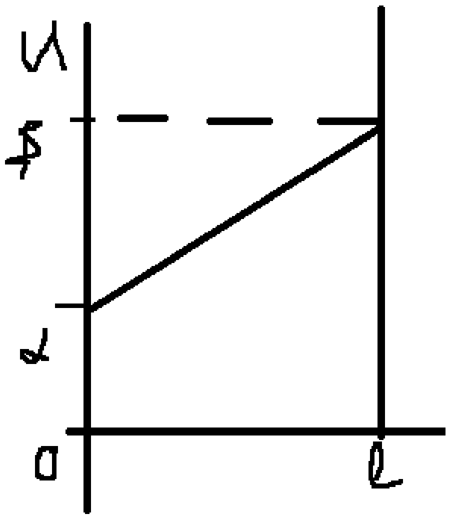
Вспомогательная задача




t
t+Δt
t
x
0
x
x+Δx


y
0
l
x
z
x=0
x=l





$$\begin{cases} C = \frac{\beta - \alpha}{l} \\ D = \alpha \end{cases}$$

$$u_{xx} = 0$$

$$u = Cx + D$$

Вспомогательная задача

$$\begin{cases} z_t = a^2 z_{xx}, 0 < x < l, t > 0 \\ z_x|_{x=0} = z_x|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$z(x,t) = T(t)X(x)$$
$$T'X = a^2TX''$$
$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$
$z_x(0,t) = T(t)0 \equiv 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow X(l) = 0$ - противоречие
$$\begin{cases} -X'' - \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$
Что-то про априорную оценку
$$\int_0^l (-X''X - \lambda X^2) dX = 0$$
$$\underbrace{-X'X|_0^l}_{>0} + \underbrace{\int_0^l X'^2 dx}_{\geq 0} - \lambda \underbrace{\int_0^l X^2 dX}_{\geq 0} = 0$$
$$X \not\equiv 0$$
$$1)\lambda = 0 \Rightarrow X \equiv 1 \Rightarrow$$
$$-X'' = 0$$
$$X = Ax + B$$
$$X' = A = 0 \Rightarrow B \neq 0$$
$$1)\lambda > 0$$
$$2)y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$
$$y'(x) = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$
$$y(0) = B\sqrt{\lambda} = 0, \lambda \neq 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow A \neq 0$$
$$y'(l) = \underbrace{A\sqrt{\lambda}}_{\neq 0}\underbrace{\sin\sqrt{\lambda}l}_{=0} = 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{\lambda}l = \pi k, \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, k \in \mathbb{Z}_{>0}$$
$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\pi(n-1)}{l}\right)^2 \\ X_n = \cos\left(\frac{\pi(n-1)x}{l}\right), n \in \mathbb{Z}_{>0} \end{cases}$$
$$n - \frac{1}{2}?$$
$$\alpha X'(l) + \beta X(l) = 0$$

Ищем решение вида $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n' X_n = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(-\lambda_n X_n) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n$$

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x)$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n$$

$$C_n = \frac{(f, X_n)}{(X_n, X_n)}$$

$$\begin{cases} T_n' + a^2 \lambda_n T_n = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n, n \in \mathbb{Z}_{>0} \end{cases}$$

Задать вопрос, что делать, если f_n ЛНЗ с общим решением?

$$\begin{cases} -X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases}$$

Дома: доказать, что λ больше 0, и что

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$X'(x) = -A\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x + B\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x$$

$$X(0) = A = 0 \Rightarrow B \neq 0$$

$$X'(l) = B\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} l = \pi \left(n - \frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi \left(n - \frac{1}{2}\right)}{l}\right)$$

$$X_n = \sin \left(\frac{\pi \left(n - \frac{1}{2}\right) x}{l}\right)$$

$$X(x) = \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$\begin{cases} -X'' - \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$

$$X(x) = \sin \sqrt{\lambda} (l - x)$$

$$\begin{cases} -X'' - \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(2\pi) X'(0) = X'(2\pi) \end{cases}$$

$$X(x + 2\pi k) = X(x)$$

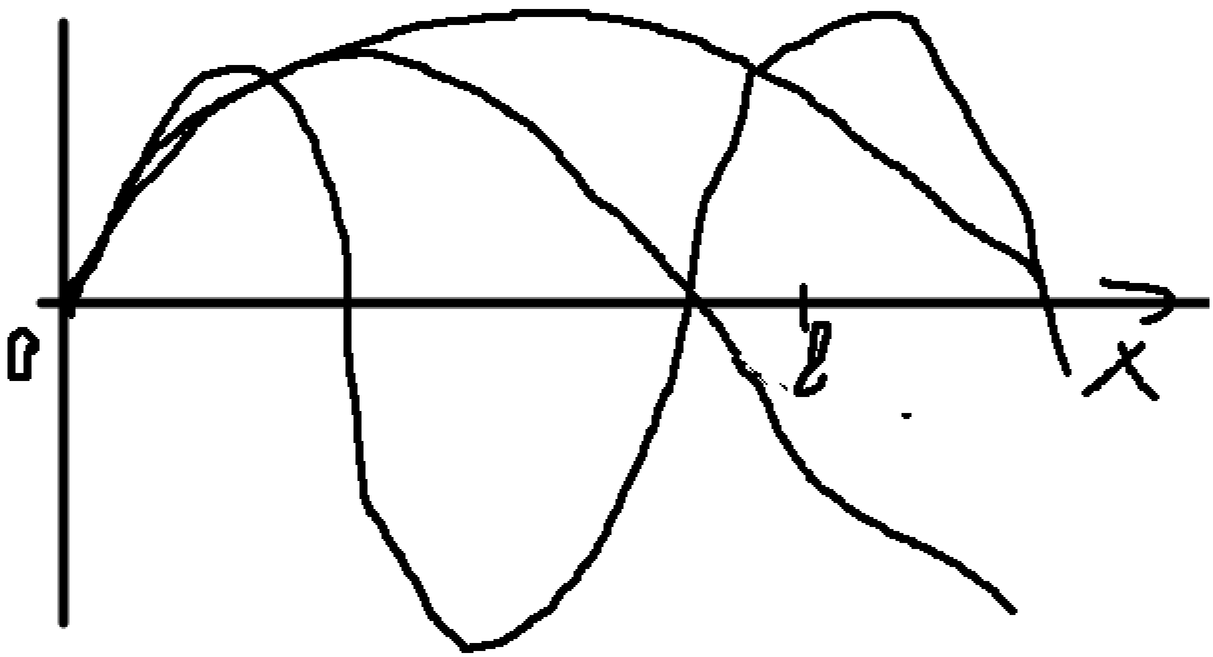
Очевидно, что решение периодическое

Автономное уравнение - уравнение, которое не зависит от x.

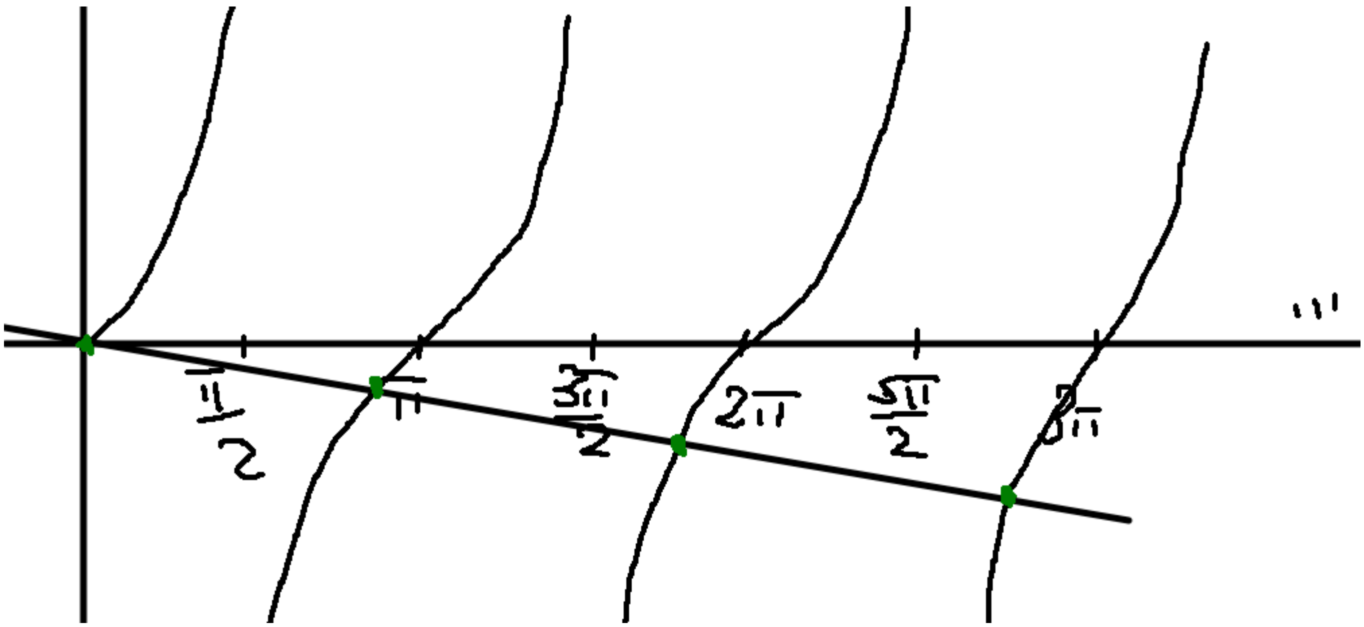
06/03/2025

$$-y'' - \lambda y = 0$$
$$\lambda > 0:$$
$$y = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$
$$y = \sin\sqrt{\lambda}x$$

Теорема Штурма

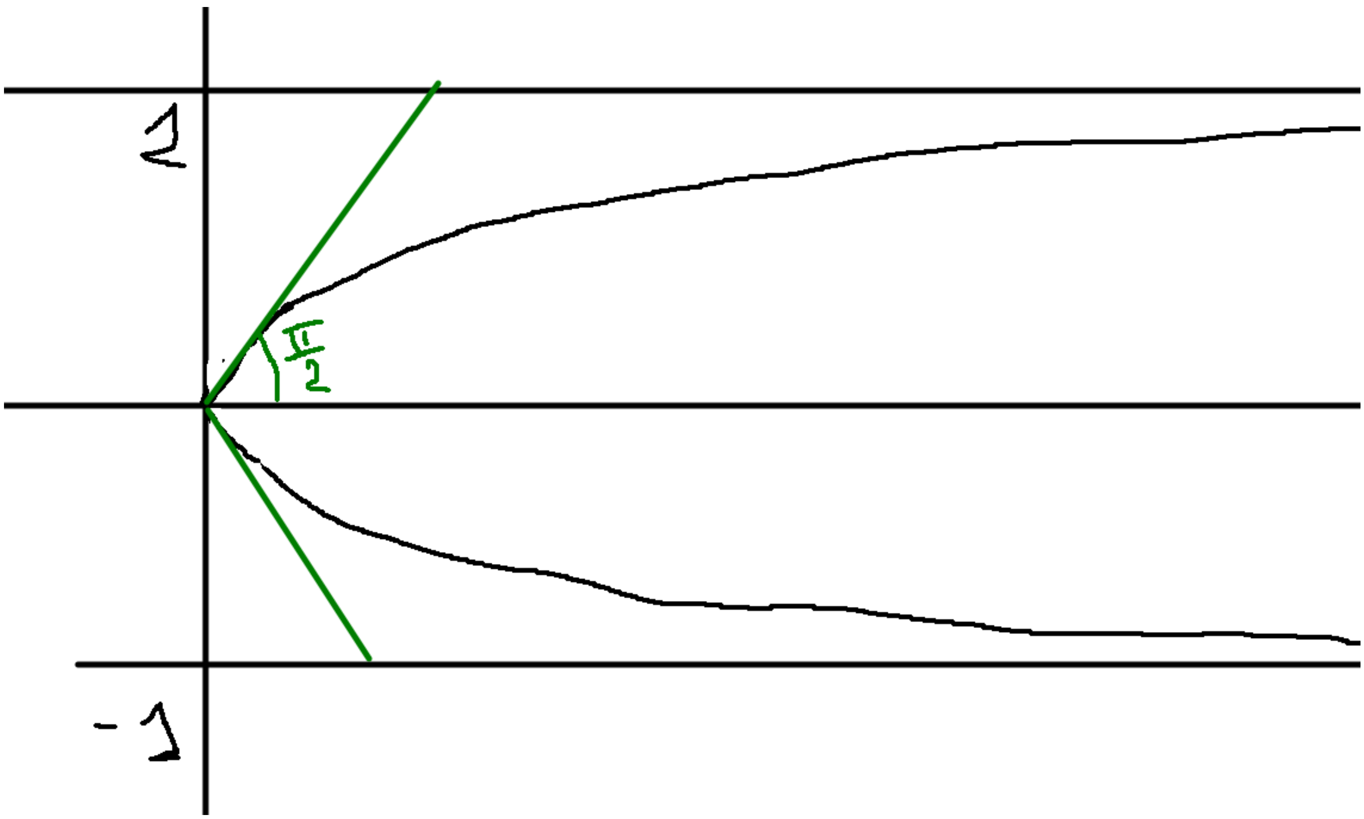


$$D:\ y(0) = y(l) = 0$$
$$N:\ y'(0) = y'(l) = 0$$
$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(l) + \sigma y(l) = 0 \end{cases}$$
$$\int_0^l (-y'' - \lambda y)dy = -y'y|_0^l + \int_0^l y'^2 dx - \lambda \int_0^l y^2 dx = 0$$
$$\underbrace{\sigma y^2(l)}_{\geq 0} + \underbrace{\int_0^l y'^2 dx}_{\geq 0} - \lambda \underbrace{\int_0^l y^2 dx}_{>0} = 0 \Rightarrow \lambda > 0 \text{ (если } \lambda \neq 0)$$
$$y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$
$$y'(x) = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$
$$A = 0$$
$$B \neq 0, \text{ пусть } B = 1$$
$$y = \sin\sqrt{\lambda}x$$
$$\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + \sigma\sin\sqrt{\lambda}l = 0$$
$$\sqrt{\lambda} = \mu$$
$$\mu = -\sigma tg\, \mu l$$
$$t = \mu l$$
$$tg\, t = -\frac{t}{\sigma l}$$



$$\pi\left(n-\frac{1}{2}\right) < t_n < \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda < 0: \ y = A\,\mathrm{ch}\,\sqrt{-\lambda}x + B\,\mathrm{sh}\,\sqrt{-\lambda}x$$
$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0, B \neq 0, B = 1$$
$$y = \ \mathrm{sh}\,\sqrt{-\lambda}x$$
$$y' = \sqrt{-\lambda}\,\mathrm{ch}\,\sqrt{-\lambda}x$$
$$\sqrt{-\lambda}x = z$$
$$z\,\mathrm{ch}\,z + \sigma l\,\mathrm{sh}\,z = 0$$
$$\mathrm{th}\,z = -\frac{z}{\sigma l}$$



27/03/2025

Ненужное про курсовую:

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = 0, x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} \pm r^2 \left(\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} \varphi ds\right) \varphi = 0 \end{cases}$$

$$u \in H^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega), \ldots$$

$$\text{Вместо 2 строки :}$$

$$u|_{\partial\Omega} + t\left(\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} \varphi ds\right)\varphi = 0$$

$$t > 0 \Rightarrow \lambda_j > 0$$

$$t < 0 \Rightarrow ?$$

$$t = t_{\text{критическое}} : \lambda = 0$$

$$-y'' - \lambda y = 0$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow \cos\sqrt{\lambda}x, \sin\sqrt{\lambda}x$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow 1, x$$

$$\lambda > 0 \Rightarrow \text{ sh}\sqrt{\lambda}x, \text{ sh}\sqrt{\lambda}x$$

Про ряды Фурье:

$$-y'' - \lambda y = 0, \quad 0 < x < l$$
$$y(0) = y(l) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \sin\frac{\pi n x}{l}, n = 1, 2, \ldots$$
$$y'(0) = y'(l) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi(n-1)}{l}\right)^2, \cos\frac{\pi(n-1)x}{l}, n = 1, 2, \ldots$$
$$y'(0) = y(l) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{l}\right)^2, \lambda_1 = 0, y_1(x) \equiv 1, \cos\left(\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{l}\right), n = 1, 2, \ldots$$
$$\begin{cases} -y'(0) + \sigma_1 y(0) = 0 \\ y'(l) + \sigma_2 y(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow (-u'', v) = \int_0^l (-u'')v dx = \ldots = \int_0^l u(-v'')dx$$

Задача Феодосьева не может при свое мрешении использовать теорему Гильберта-Шмидта

$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2\pi) \\ y'(0) = y'(2\pi) \end{cases} \Rightarrow \lambda_n = n^2 (\text{на самом деле } \lambda_n = n^2 - 1)$$
$$y_0^{(C)}(x) = 1$$
$$y_n^{(a)} = \cos nx$$
$$y_n^{(b)} = \sin nx$$
$$\text{Проверить ортогональность всех указанных систем}$$

Собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны
Пусть у нас собственные значения λ_m и λ_n

$$(Ae_m, e_n) = (e_m, Ae_n)$$
$$\lambda_m(e_m, e_n) = \lambda_n(e_m, e_n) \Rightarrow \left[\begin{matrix} \lambda_m = \lambda_n \\ e_m \perp e_n \end{matrix}\right.$$

Система

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$$
$$\text{Полностью определены на отрезке}$$
$$\varphi_j[a, b] \to \mathbb{R}$$
$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0, i \neq j$$
$$(\varphi_i, \varphi_i) = \|\varphi_i\|^2$$

Доказать, что нормы $\|y_n\|^2 = \frac{l}{2}$
Пример 1)...
Пример 2) Полиндромы Лежандра на $[-1, 1]$
Родрига?

$$P_0(x) \equiv 1$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n), n = 1, 2, \ldots; \text{ (Формула Родрига)}$$

$$\text{Они ортогональны. Проверяем}$$

$$(P_m, P_n) \sim \int_{-1}^{1} \frac{d^m}{dx^m}((x^2-1)^m) \cdot \frac{d}{dx^n}((x^2-1)^n)dx$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)x^m dx, m < n$$

$$\text{Интегрируем по частям}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)x^m dx = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((x^2-1)^n)x^m|_{-1}^{1} -$$

$$-m\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((x^2-1)^n)x^{m-1}dx = \ldots = \ldots$$

На дом: показать, что выражение до интеграла = 0.

$$= C\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n \cdot 1dx = C_2 \cdot \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^2-1)^n|_{-1}^{1} = 0$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n\right)^2 dx =$$

$$\int_{-1}^{1} u^{(n)}u^{(n)}dx = u^{(n)}\,\cancel{u^{(n-1)}}^{\,0} - \int_{-1}^{1} u^{(n-1)}u^{(n+1)}dx = \ldots =$$

$$= (-1)^n\int_{-1}^{1} u \cdot u^{(2n)}dx = (-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}(1-x)^n(1+x)^n dx =$$

$$u^{(2n)} = (2n)!$$

$$= \frac{(-1)^n(2n)!}{n+1}\left(\cancel{(1-x)^n(1+x)^{n+1}|_{-1}^{1}}^{\,0} + n\int_{-1}^{1}(1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1}dx\right) = \ldots =$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{(2n)!n!}{\frac{(2n)!}{n!}}\int_{-1}^{1}(1+x)^{2n}dx = (-1)^n(n!)^2 \cdot \frac{2^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

#конец