Условие задачи

Найдите критическое множество. Укажите какая статистика при этом была использована.

Одна из гипотез H_0 – основная, и вместе с ней рассматривается конкурирующая гипотеза, или альтернатива H_1

Если H_0: выборка из известного закона распределения с параметром $\theta = \theta_0$

Альтернатива H_1 может быть следующих типов:

$\theta = \theta_1 \neq \theta_0$- простая

$\theta \neq \theta_0$ – двусторонняя

$\left.\begin{matrix} \theta < \theta_0 \\ \theta > \theta_0 \end{matrix}\right\}$ - односторонние

Определение. Критерием называется правило, по которому принимается решение, о принятии гипотезы H_0, или отклонении H_0 в пользу альтернативы H_1, на основе анализа выборки.

Критерий задается с помощью критического множества S и статистики

$$z = z\left(X_1, X_2, \ldots . X_n\right)$$

Если $z \in S$**,** то гипотеза H_0 **отклоняется,**

Если $z \notin S$**,** то гипотеза H_0 **принимается**

Определения.

$P\left(z \in S \middle| H_0\right) = \alpha$ – ошибка первого рода – вероятность отклонения верной гипотезы (уровень значимости)

$P\left(z \notin S \middle| H_1\right) = \beta$ – ошибка второго рода –вероятность принятия неверной гипотезы {{H}_{0}} в случае простой альтернативы

$W\left(S, \theta\right) = P_\theta\left(z \in S\right)$ - функция мощности критерия

При этом

$\alpha = W\left(S, \theta_0\right)$ – вероятность отклонения верной гипотезы

$1 - \beta = P\left(z \in S \middle| H_1\right) = W\left(S, \theta_1\right)$ – вероятность отвергнуть неверную гипотезу

Ошибка первого рода состоит в том, что основываясь на результатах эксперимента гипотеза отклоняется, хотя на самом деле она верна. Ошибка второго рода состоит в том, что основываясь на результатах эксперимента, гипотеза принимается, хотя на самом деле она неверна.

Вероятность ошибки первого рода, т.е.вероятность отклонить гипотезу, когда на самом деле она верна, называется уровень значимости и обозначается как α. (термин уровень значимости нам уже знаком.) Здесь записана условная вероятность, которая вычисляется при условии что основная гипотеза H_0 верна. Статистика $z = z\left(X_1, X_2, \ldots X_n\right)$ строится так, чтобы закон её распределения был известен при справедливости основной гипотезы H_0.
Вероятность не совершить ошибку первого рода, т.е. принять гипотезу H0, когда она и на самом деле верна, равна $1-\alpha$ и называется надежность.
Вероятность не совершить ошибку второго рода, т.е. отклонить гипотезу, которая и на самом деле не верна, равна $1-\beta$ называется мощность критерия. При проверке гипотез желательно иметь критерий, для которого была бы и наибольшая надежность и наибольшая мощность, т.е. чтобы свести к минимуму ошибки первого и второго рода. Но практика показывает, что такого критерия построить нельзя. Приходится чем –то жертвовать. В одних случаях важно иметь наибольшую надежность, а в других – наибольшую мощность

Пусть $H_0 : \theta = \theta_0$ - простая гипотеза, то вид критического множества для двусторонней альтернативы $H_1 : \theta \neq \theta_0$

$$S = \left\{ z \leq C_{\alpha/2} \right\} \cup \left\{ z \geq C_{1-\alpha/2} \right\}$$

Для правосторонней альтернативы $H_1 : \theta > \theta_0$, критическое множество имеет вид

$$S = \left\{ z \geq C_{1-\alpha} \right\}$$

Пример 1

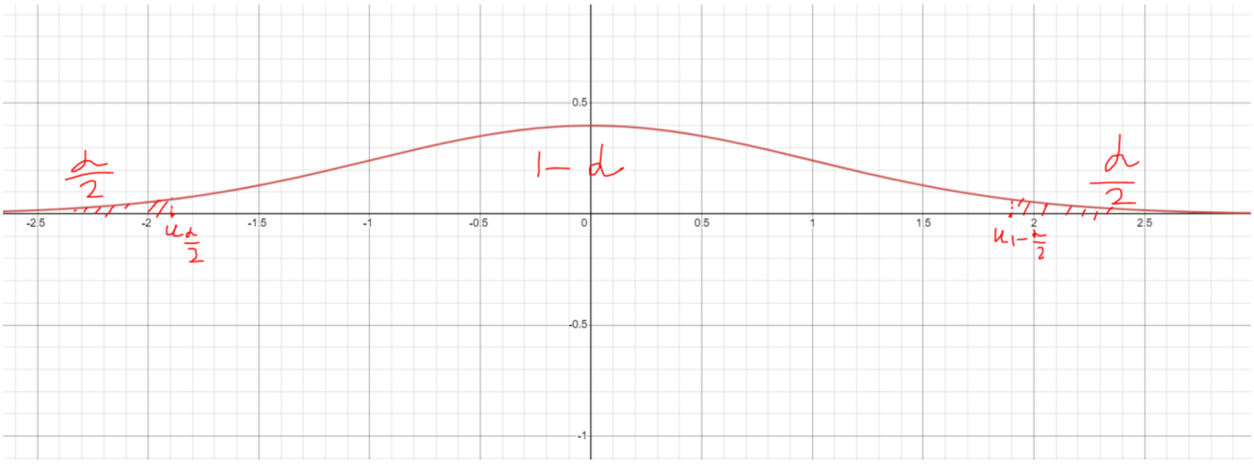
Проверьте на уровне значимости $\alpha = 0,05$ гипотезу $H_0 : a = 43 = a_0$ против двусторонней альтернативы $H_1 : a \neq 43$, если выборка подчинена нормальному закону, $\sigma^2 = 0,01, n = 50,\ \bar{X} = 42,95$.

Как известно, статистика $\dfrac{\bar{X} - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n}$ имеет стандартное нормальное распределение, то решающее правило будет: если $\left| \dfrac{\bar{X} - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \right| < \delta_{kp}$, то нулевую гипотезу принимаем.

Выбираем уровень значимости α - вероятность совершить ошибку первого рода, и надежность $1-\alpha$ - вероятность не совершить ошибку первого рода, и записываем

$$P\left(\left| \frac{\bar{X} - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \right| < \delta_{kp} \middle| H_0 \right) = 1 - \alpha$$

Так как статистика распределена по нормальному закону $N(0;1)$, то графически это можно представить следующим образом.



Преобразуем это выражение и найдем критическую область для $\bar{X}$

$$P\left(\left| \frac{\bar{X} - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \right| \geq u_{1-\alpha/2} \right) = \alpha .$$

То есть критическое множество в этом случае имеет вид $\left(u_{0,975} = 1,96\right)$

$$S = \left\{ \left| \frac{\bar{X} - a}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \right| \geq u_{1-\alpha/2} \right\} = \left\{ \left| \frac{\bar{X} - 43}{0.1} \cdot \sqrt{50} \right| \geq u_{0,975} \right\}$$

$$S = \left\{ \bar{X} \geq 43.028 \right\} \cup \left\{ \bar{X} \leq 42,972 \right\}$$

Поскольку $\bar{X} = 42.95 \in S$, то гипотеза H_0 : $a = 43$ отвергается.

Пример 2

Постройте на уровне значимости $\alpha = 0,05$ критерий для проверки гипотезы H_0 : $a = -3 = a_0$ против простой альтернативы H_1 : $a = -2 = a_1$, если выборка подчинена нормальному закону, $S = 3,882, n = 100$. Проверьте гипотезу если $\bar{X} = -2.5$

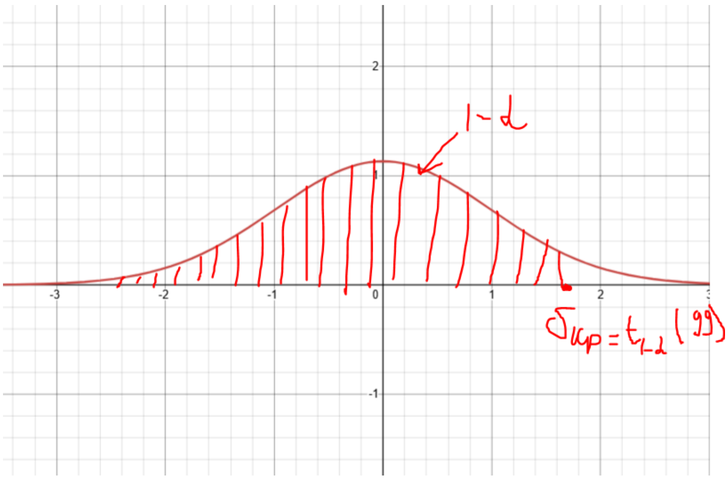
Критическое множество в данном случае будет иметь вид $\bar{X} > \delta_{кр}$, так как альтернатива $a_1 > a_0$, поэтому если выборочное среднее будет больше некоторой критической точки (то есть ближе к a_1) то основную гипотезу отклоняем.

В этом случае (так как истинная σ неизвестна) используем статистику $Z = \frac{\bar{X} - a}{S}\sqrt{n}$, распределенную по закону Стьюдента с 99 степенями свободы (такую же как в доверительных интервалах). Тогда

$$\alpha = P\left(\underbrace{\frac{\bar{X} - a}{S}\sqrt{n} \geq \delta_{кр}}_{Z \in S} \middle| H_0 \right)$$

$$1 - \alpha = P\left(\underbrace{\frac{\bar{X} - a}{S}\sqrt{n} < \delta_{кр}}_{Z \notin S} \middle| H_0 \right)$$

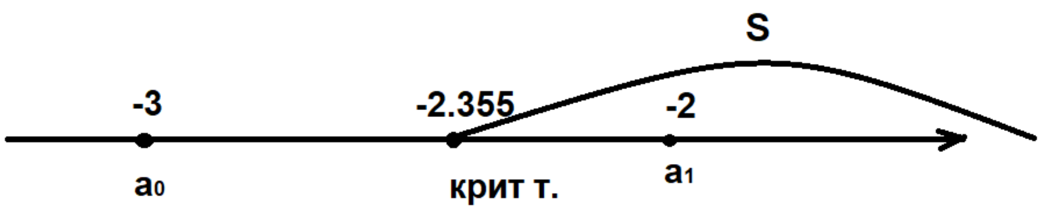
$$1 - \alpha = P\left(\underbrace{\frac{\bar{X} - a_0}{S}\sqrt{n}}_{Z \notin S} < \delta_{кр} \right)$$



$$S=\left\{\frac{\bar{X}-a_0}{S}\sqrt{n}\ge t_{1-\alpha}(n-1)\right\}=\left\{\frac{\bar{X}+3}{3,882}\cdot\sqrt{100}\ge t_{1-\alpha}(n-1)\right\}=$$

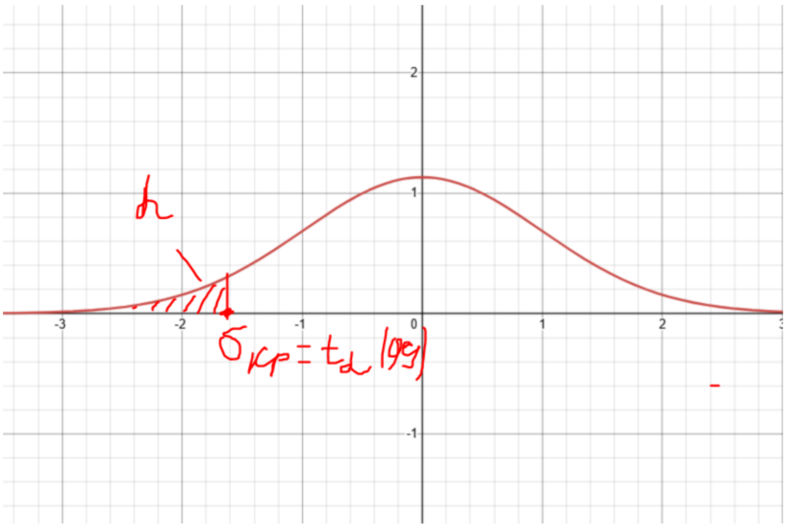
$$\left\{\bar{X}\ge t_{1-\alpha}(n-1)\frac{3,882}{10}-3\right\}=\left\{\bar{X}\ge -2.355\right\}$$

Так как $\bar{X}=-2.5$ то гипотеза принимается.

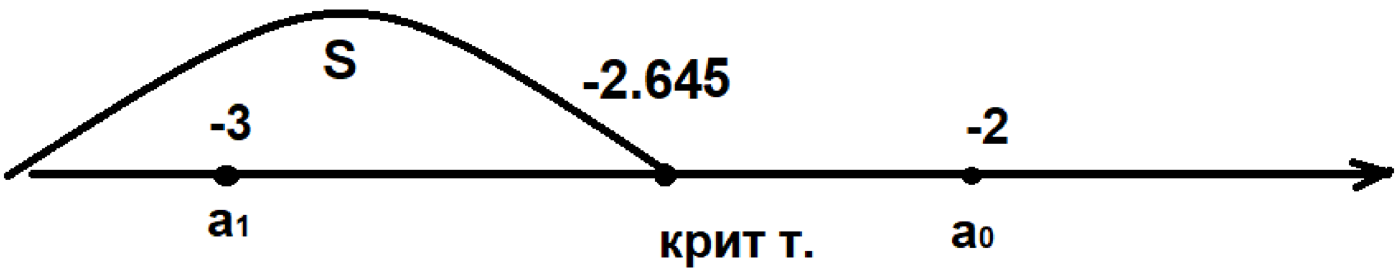


Если поменять местами H_0: $a=-2=a_0$ против простой альтернативы H_1: $a=-3=a_1$, Критическое множество в данном случае будет иметь вид $\bar{X}<\delta_{кр}$, так как альтернатива $a_1<a_0$, поэтому если выборочное среднее будет меньше некоторой критической точки (то есть ближе к a_1) то основную гипотезу отклоняем.

$$\alpha=P\left(\underbrace{\frac{\bar{X}-a}{S}\sqrt{n}<\delta_{кр}}_{Z\in S}\middle|H_0\right)$$



$$S=\left\{\frac{\overline{X}-a_0}{S}\sqrt{n}<t_\alpha(99)\right\}=\left\{\overline{X}<\frac{t_\alpha(99)S}{\sqrt{n}}+a_0\right\}=\left\{\overline{X}<\frac{t_\alpha(99)S}{\sqrt{n}}+a_0\right\}=$$
$$=\left\{\overline{X}<-2.645\right\}$$



Так как $\overline{X}=-2.5$ то гипотеза принимается.

Пример 3

До наладки станка была проверена точность изготовления 10 деталей и найдена оценка дисперсии $S_1^2=9,6$. После наладки проверено еще 15 изделий и получена оценка $S_2^2=5,7$. Можно ли считать, что после наладки точность повысилась? Принять $\alpha=0,05$. Контролируемый признак имеет нормальное распределение.

В качестве основной гипотезы примем $\sigma_1^2=\sigma_2^2$, так как используемая статистика в этом случае будет иметь известное распределение

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2\Rightarrow\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}=1$$

$$H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$$

Рассмотрим следующую статистику:

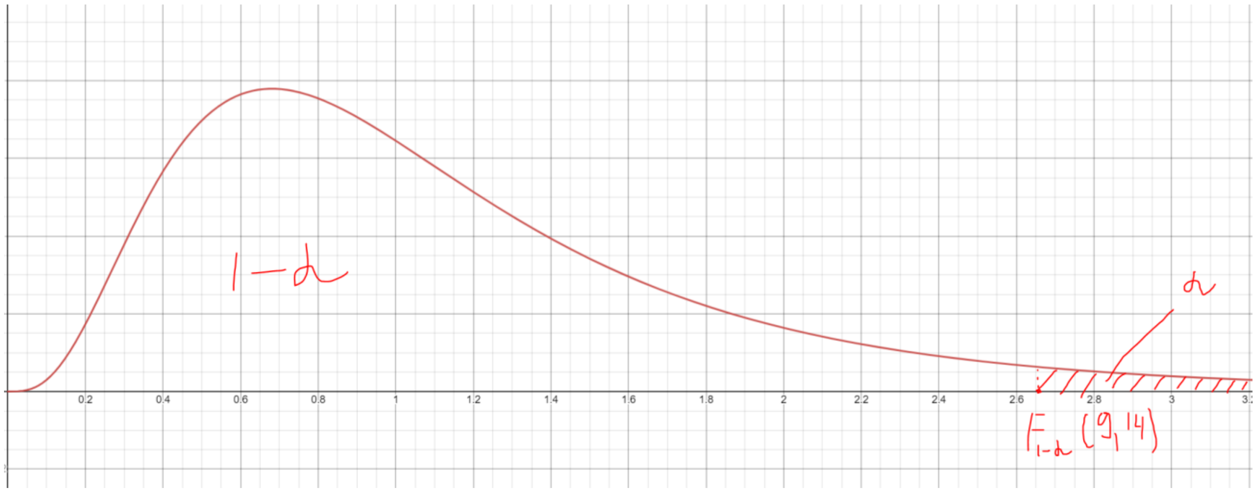
$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}=\frac{\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2}}{\dfrac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2}}\cdot\frac{m-1}{n-1}\sim F(n-1,m-1)$$

Таким образом статистика $F=\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$, распределена по закону Фишера с параметрами 9 и 14.

В данном случае имеется левосторонняя альтернатива, Идея здесь такая: если приближенное значение отношения дисперсий сильно больше
предполагаемого значения, то это говорит против основной гипотезы и за альтернативу. Это означает, что если наблюдаемое значение статистики сильно больше некоторого критического значения, то нулевую гипотезу отклоняем в пользу альтернативной. Учтём, что при справедливости гипотезы H_0 выполнятся равенство $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}=1$, поэтому гипотезы были выбраны именно таким образом.

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}<\delta_{kp}\middle|H_0\right)=1-\alpha\Rightarrow P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}<F_{0,95}(9,14)\right)=1-\alpha$$

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\geq F_{0,95}(9,14)\right)=\alpha$$



Тогда критическое множество при гипотезе {{H}_{0}}: \sigma _{1}^{2}=\sigma _{2}^{2} имеет вид:

$$S=\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\geq F_{0,95}(9,14)\right)=\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\geq 2,646\right)$$

Поскольку $\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{9,6}{5,7}=1,684$, то $\frac{S_1^2}{S_2^2}\notin S$, и основная гипотеза принимается, то есть точность не повысилась.

Для того, чтобы говорить об увеличении точности после наладки нужно провести больше испытаний, например, если бы такие же значения выборочных дисперсий получились при 50 испытаниях, то $F_{0.95}(49,49)=1.607$, в этом случае отношение выборочных дисперсий попадает в критическую область и гипотеза $H_0:\ \sigma_1^2=\sigma_2^2$ отклоняется в пользу альтернативы.

Пример 4

Ведутся наблюдения за состоянием технологического процесса. Разладка оборудования приводит к изменению контролируемого признака, имеющего нормальное распределение с дисперсией $\sigma^2=0,069^2$. По результатам двух выборок объема $n=50$. Найдены $\overline{X_1}=3,038$ м и $\overline{X_2}=2,981$ м. Проверьте стабильность технологического процесса на уровне $\alpha=0,05$.

В качестве основной гипотезы примем стабильность процесса, то есть равенство математических ожиданий. $H_0: a_1=a_2$, тогда альтернатива $H_1: a_1\neq a_2$

Составим статистику, которая будет распределена по известному закону распределения, так как в задаче спрашивается про разность математических ожиданий, то за основу возьмём разницу выборочных средних двух выборок $\overline{X_1}-\overline{X_2}$. Эти статистики распределены по нормальному закону

$$\overline{X_1}\sim N\left(a_1,\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\overline{X_2}\sim N\left(a_2,\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}\right)$$

Тогда их разность также распределена по нормальному закону

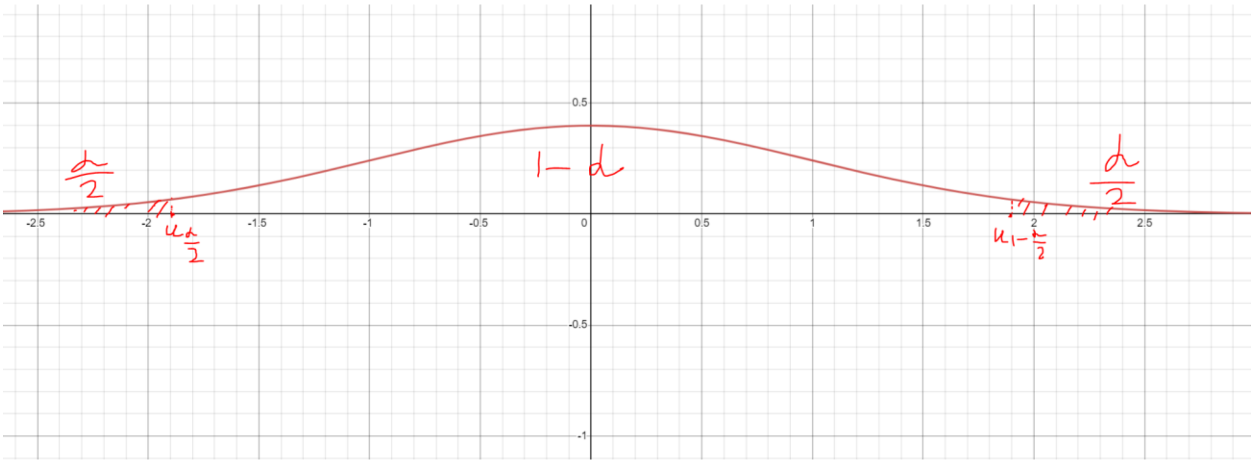
$$\overline{X_1}-\overline{X_2}\sim N\left(a_1-a_2,\sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}\right)^2}\right)$$

Приведём эту статистику к стандартному нормальному закону

$$\frac{\overline{X_1}-\overline{X_2}-(a_1-a_2)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}\right)^2}}\sim N(0,1)$$

H_1 это двусторонняя гипотеза, тогда по определению ошибки первого рода

$$P\left(\left|\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2-(a_1-a_2)}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}\right)^2}}\right|\geq u_{1-\alpha/2}\,\middle|\,H_0\right)=\alpha$$



При справедливости гипотезы H_0 разность математических ожиданий равна 0. Тогда критическое множество имеет вид

$$S=\left\{\left|\frac{\overline{X}_1-\overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\right|\geq u_{1-\alpha/2}\right\}=\left\{\frac{\left|\overline{X}_1-\overline{X}_2\right|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\geq u_{0,975}\right\}$$

По условию задачи дисперсии равны и известны их истинные значения $\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2=0{,}069^2$, и объём выборки в обоих случаях равняется 50, тогда предыдущее выражение примет вид

$$S=\left\{\frac{\left|\overline{X}_1-\overline{X}_2\right|}{\sqrt{\frac{0.138}{50}}}\geq u_{0,975}\right\}=\left\{\left|\overline{X}_1-\overline{X}_2\right|\geq u_{0,995}\cdot 0.053\right\}=\left\{\left|\overline{X}_1-\overline{X}_2\right|\geq 0.103\right\}$$

Процесс стабилен, так как гипотеза о равенстве средних принимается.

$$\left|\overline{X}_1-\overline{X}_2\right|=0.057\notin S$$

Пример 5

Банк запустил масштабную рекламную кампанию для своего нового премиального пакета услуг "Золотой". Кампания длилась 3 месяца. До её запуска исторические данные показывали, что средний ежемесячный доход от клиента премиального сегмента составлял 50 000 рублей.

Маркетинговый директор утверждает, что кампания была успешной и повысила средний доход с клиента. Финансовый отдел должен проверить это утверждение, чтобы оценить рентабельность инвестиций в рекламу.

Здесь нас интересует не просто "изменился" ли доход, а именно "увеличился" ли он. Это определяет тип гипотезы.

Нулевая гипотеза (H_0): Рекламная кампания не принесла эффекта или был негативный эффект. Средний доход остался прежним или уменьшился.

H_0: a ≤ 50 000 руб.

Альтернативная гипотеза (H_1): Рекламная кампания была успешной и увеличила средний доход. Это то, что хочет доказать маркетинг.

H_1: a > 50 000 руб.

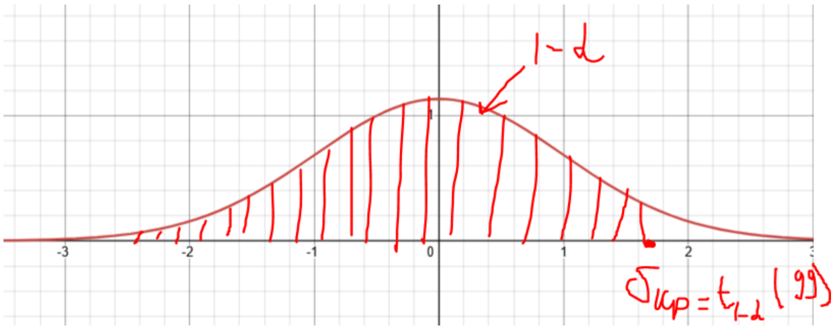
Это правосторонняя (односторонняя) гипотеза. Мы ищем отклонение именно в сторону увеличения. Здесь a — это истинный средний ежемесячный доход от клиента премиального сегмента после рекламной кампании.

Уровень значимости (α): Риск признать кампанию успешной, когда она таковой не является (ошибка первого рода), может привести к неоправданным будущим инвестициям. Банк выбирает консервативный уровень значимости $\alpha = 0.05$.

Статистика критерия: Мы проверяем среднее значение. Предположим, что стандартное отклонение дохода по клиентам известно из данных (например, σ = 15 000 руб.). Объем выборки будет небольшим, но мы все равно можем воспользоваться центральной предельной теоремой.

По ЦПТ статистика $\bar{X} \sim N\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X}-a}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \sim N(0,1)$ имеет нормальное распределение, и решающее правило будет: если $\frac{\bar{X}-a}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \geq \delta_{кр}$, то нулевую гипотезу отклоняем. Так как гипотеза правосторонняя, всё критическое множество будет сосредоточено в правом хвосте распределения. Тогда ошибка первого рода (вероятность отвергнуть гипотезу, при условии что она верна)

$$\alpha = P\left(\underbrace{\frac{\bar{X}-a}{\sigma}\sqrt{n} \ge \delta_{кр}}_{Z\in S}\middle| H_0\right) \Rightarrow 1-\alpha = P\left(\underbrace{\frac{\bar{X}-a}{\sigma}\sqrt{n} < \delta_{кр}}_{Z\notin S}\middle| H_0\right) \Rightarrow 1-\alpha = P\left(\underbrace{\frac{\bar{X}-a_0}{\sigma}\sqrt{n}}_{Z\notin S} < \delta_{кр}\right)$$



$$S = \left\{\frac{\bar{X}-a_0}{\sigma}\sqrt{n} \ge u_{1-\alpha}\right\} = \left\{\frac{\bar{X}-50000}{15000}\cdot\sqrt{n} \ge u_{1-\alpha}\right\} = \left\{\bar{X} \ge \frac{u_{1-\alpha}\cdot 15000}{\sqrt{n}} + 50000\right\}$$

1. Весь уровень значимости α = 0.05 мы помещаем в правый хвост.

2. Находим такое критическое значение Z, чтобы площадь справа от него была равна 0.05.

Сбор данных: Финансовый отдел случайным образом отбирает `n = 40` клиентов, которые подключили пакет "Золотой" во время рекламной кампании, и анализирует их средний доход за последний месяц. Допустим, выборочное среднее составило $\bar{X}$ = 54 000 руб.`.

Расчет критического множества для данного значения n

$$S = \left\{\bar{X} \ge \frac{u_{1-\alpha}\cdot 15000}{\sqrt{40}} + 50000\right\} \Rightarrow \left\{\bar{X} \ge 53901\right\}$$

В нашем случае выборочное среднее попадает в критическое множество, следовательно гипотезу надо отклонить.

Результаты теста позволяют с 95% уверенностью утверждать, что рекламная кампания действительно привела к статистически значимому увеличению среднего ежемесячного дохода с клиента премиального сегмента.

Возможные управленческие решения и экономический анализ:

1. Окупаемость инвестиций (ROI): Финансовый отдел может теперь рассчитать ROI рекламной кампании. Они сопоставят дополнительные 4000 руб. (54 000 - 50 000) с дохода с клиента с затратами на саму кампанию.

2. Бюджетирование: Руководство может принять обоснованное решение о выделении дополнительного бюджета на похожие рекламные активности в будущем.

3. Стратегия: Успех кампании подтверждает гипотезу о том, что целевая аудитория реагирует на такой тип рекламы. Это знание можно использовать для разработки долгосрочной маркетинговой стратегии.

4. Риск: При этом руководство понимает, что с вероятностью 5% это решение может быть ошибочным (ошибка первого рода), и они зря потратят деньги в будущем. Этот риск был изначально заложен в уровень значимости.

Пример 6

Страховая компания разработала новую систему онлайн-регистрации страховых случаев. Они утверждают, что это ускорило процесс подачи заявлений клиентами. Ранее (при старой системе) среднее время между поступлениями новых страховых случаев составляло 4 часа, и процесс подчинялся показательному закону распределения.

Показательное распределение характеризуется параметром λ (интенсивность). Среднее значение $MX_i = a = \frac{1}{\lambda}$.

Старая система: $a = 4$ часа $\Rightarrow \lambda_0 = \frac{1}{4} = 0.25$ случаев в час

Нулевая гипотеза (H_0): Новая система не улучшила ситуацию

$H_0 : a = 4$ часа $\Rightarrow \lambda = 0.25$

Альтернативная гипотеза (H_1): Новая система ускорила процесс
$H_1 : a < 4 \;\Rightarrow\; \lambda > 0.25$

Статистика критерия: Если $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim Exp(\lambda)$, то при условии верности H_0:

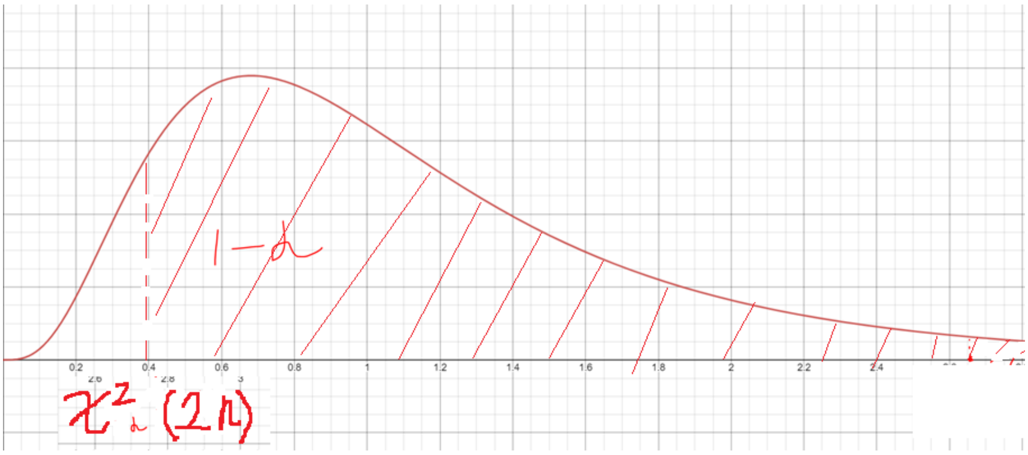
$$Y = 2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$$

где χ^2_{2n} - распределение хи-квадрат с 2n степенями свободы.

Для левосторонней проверки ($H_1 : a < 4$) критическое множество:

$$P\left(2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i < \chi^2_\alpha(2n) \middle| H_0\right) = \alpha \Rightarrow \underbrace{P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{\chi^2_\alpha(2n)}{2\lambda_0}\right)}_{\text{вероятность отвергнуть гипотезу}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \underbrace{\left\{\sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{\chi^2_\alpha(2n)}{2\lambda_0}\right\}}_{\text{в этом случае не принимается}} \Rightarrow \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{\chi^2_\alpha(2n)}{2n\lambda_0}\right\}$$



Данные: $n = 30$, $\sum X_i = 90$ часов, $\bar{X} = \frac{90}{30} = 3$ часа

Для данного значения n критическое множество имеет вид

$$S = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i < \frac{\chi_\alpha^2(2n)}{2n\lambda_0} \right\} = \left\{ \overline{X} < 2.879 \right\}$$

И выборочное среднее не попадает в это множество, следовательно, гипотеза принимается

На уровне значимости 5% статистически значимых доказательств уменьшения среднего времени между страховыми случаями не обнаружено.

Экономические последствия:

- Приостановка дальнейших инвестиций в систему до сбора дополнительных данных

- Необходимость анализа мощности теста: возможно, объем выборки был недостаточен

- Продолжение мониторинга для выявления долгосрочных эффектов

Оптимальный критерий Неймана-Пирсона

Рассмотрим множество критериев уровня α для проверки гипотезы $H_0:\ \theta=\theta_0$ против простой альтернативы $H_1:\ \theta=\theta_1$,
$\theta_1\neq\theta_0$. Тогда для любого $0<\alpha<1$ существуют такие числа $c\geq 0$ и $\varepsilon\in[0,1]$, что критерий с функцией

$$\varphi^*\left(\vec{X}_n\right)=\begin{cases}1 & \dfrac{L\left(\vec{X}_n,\theta_1\right)}{L\left(\vec{X}_n,\theta_0\right)}>c\\ \varepsilon & \dfrac{L\left(\vec{X}_n,\theta_1\right)}{L\left(\vec{X}_n,\theta_0\right)}=c\\ 0 & \dfrac{L\left(\vec{X}_n,\theta_1\right)}{L\left(\vec{X}_n,\theta_0\right)}<c\end{cases}$$

является оптимальным (наиболее мощным) во множестве критериев уровня α.

Лемма Неймана-Пирсона утверждает:
Среди всех критериев с заданным уровнем значимости α, критерий, основанный на отношении правдоподобия, является наиболее мощным для проверки простой нулевой гипотезы против простой альтернативной гипотезы.
Мы отвергаем нулевую гипотезу, если отношение правдоподобия $\Lambda(x)$ превышает некоторую константу C. Мы не отвергаем H_0, если $\Lambda(x) < C$.
Константа C и, в некоторых случаях, вероятность γ выбираются не произвольно, а специальным образом, чтобы гарантировать, что уровень значимости критерия в точности равен заранее заданному α.
Вот пошаговый алгоритм, показывающий, как это учитывается:
Шаг 1: Задаем уровень значимости
Мы фиксируем допустимую вероятность ошибки 1-го рода, например, $\alpha = 0.05$.
Шаг 2: Находим распределение отношения правдоподобия при H_0
Чтобы найти порог C, нам нужно понять, как ведет себя статистика $\Lambda(X)$ при условии, что верна нулевая гипотеза.
Шаг 3: Определяем критическую область через C
Критическая область — это множество всех значений выборки x, для которых мы отвергаем H_0. Согласно лемме, эта область имеет вид `{ x: Λ(x) > C }`.
Шаг 4: Связываем C и α через уравнение размера критерия
Уровень значимости α — это вероятность попасть в критическую область при верной H_0:

$$P(\Lambda(X)>C|\ H_0)=\alpha$$

Это уравнение — ключ ко всему! Мы решаем его относительно C. Константа C определяется как (1-α)-квантиль распределения статистики $\Lambda(X)$ при условии H_0.
Шаг 5: Учет случая "равенства" ($\Lambda(x) = C$) — дискретные распределения

Этот шаг необходим, если распределение статистики Λ(X) дискретно. В непрерывном случае вероятность `P(Λ(X) = C | H₀) = 0`, и этим можно пренебречь.

Однако в дискретном случае эта вероятность может быть ненулевой. Если мы просто добавим все точки, где Λ(x) = C, к критической области, мы можем превысить заданный уровень значимости α. Если не добавим ни одной — можем не "выбрать" весь доступный уровень значимости, и наш критерий не будет самым мощным.
Решение — рандомизация:
Мы вводим вероятность γ (между 0 и 1), с которой мы отвергаем H₀, когда наблюдаем значение, в точности равное порогу.
Тогда уравнение для нахождения C и γ выглядит так:

$$P(\Lambda(X) > C \mid H_0) + \gamma \cdot P(\Lambda(X) = C \mid H_0) = \alpha$$

Сначала мы находим такое наибольшее значение C, при котором $P(\Lambda(X) > C \mid H_0)$.
Затем, если это вероятность строго меньше α, мы "добираем" недостающий уровень значимости до α с помощью рандомизации в точке равенства.
Вероятность γ вычисляется по формуле:

$$\gamma = \frac{\alpha - P(\Lambda(X) > C \mid H_0)}{P(\Lambda(X) = C \mid H_0)}$$

Пример 7

Пусть выборка объема $n = 100$ подчинена показательному закону с параметром λ. Установим вид оптимального критического множества для проверки гипотезы H_0: $\lambda = \lambda_0$ против простой альтернативы H_1: $\lambda = \lambda_1$

Согласно теореме критическое оптимальное критическое множество имеет вид

$$\frac{L\left(\vec{X}_n, \lambda_1\right)}{L\left(\vec{X}_n, \lambda_0\right)} > c \Rightarrow \frac{L\left(\vec{X}_n, \lambda_1\right)}{L\left(\vec{X}_n, \lambda_0\right)} = \frac{\prod_{k=1}^n \lambda_1 e^{-\lambda_1 X_k}}{\prod_{k=1}^n \lambda_0 e^{-\lambda_0 X_k}} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^n e^{-(\lambda_1 - \lambda_0)\sum_{k=1}^n X_k} \geq c,$$

разрешаем относительно $\sum_{k=1}^n X_k$ (достаточная статистика!)

$$e^{-(\lambda_1 - \lambda_0)\sum_{k=1}^n X_k} \geq c\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n$$

$$-(\lambda_1 - \lambda_0)\sum_{k=1}^n X_k \geq \ln\left(c\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n\right)$$

Тогда если $\lambda_1 > \lambda_0$, то при делении неравенства на $-(\lambda_1 - \lambda_0)$ знак поменяется и получим

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \le \frac{\ln c + n \ln \frac{\lambda_0}{\lambda_1}}{\lambda_0 - \lambda_1}$$

Выражение $\frac{\ln c + n \ln \frac{\lambda_0}{\lambda_1}}{\lambda_0 - \lambda_1}$ является константой, и для нахождения критического множества можно использовать другую константу $c_1 = \frac{\ln c + n \ln \frac{\lambda_0}{\lambda_1}}{\lambda_0 - \lambda_1}$, при этом необязательно знать как связанны c и c_1. Таким образом критическое множество имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \le c_1$$

Если же гипотезы построены так, что $\lambda_1 < \lambda_0$, то критическое множество имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \ge c_1$$

Пример 8

Пусть выборка объема $n = 100$ подчинена нормальному закону, с известным параметром $\sigma = 1$ и неизвестным параметром a Установим вид оптимального критического множества для проверки гипотезы $H_0: \ a = a_0$ против простой альтернативы $H_1: \ a = a_1$

Согласно теореме критическое оптимальное критическое множество имеет вид

$$\frac{L\left(\vec{X}_n, \lambda_1\right)}{L\left(\vec{X}_n, \lambda_0\right)} > c \Rightarrow \frac{L\left(\vec{X}_n, \lambda_1\right)}{L\left(\vec{X}_n, \lambda_0\right)} = \frac{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(X_k - a_1\right)^2}{2\sigma^2}}}{\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(X_k - a_0\right)^2}{2\sigma^2}}} = \frac{e^{-\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(X_k - a_1\right)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(X_k - a_0\right)^2}{2\sigma^2}}} \ge c,$$

$$e^{-\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(X_k - a_1\right)^2}{2\sigma^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(X_k - a_0\right)^2}{2\sigma^2}} \ge c$$

$$e^{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\left(X_k - a_0\right)^2}{2\sigma^2} - \frac{\left(X_k - a_1\right)^2}{2\sigma^2} \right)} = e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(2 X_k a_1 - 2 X_k a_0 + a_1^2 + a_0^2\right)}{2\sigma^2}}$$

разрешаем относительно $\sum_{k=1}^{n} X_k$ (достаточная статистика!)

$$e^{-(\lambda_1-\lambda_0)\sum_{k=1}^{n}X_k} \geq c\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n$$

$$-(\lambda_1-\lambda_0)\sum_{k=1}^{n}X_k \geq \ln\left(c\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n\right)$$

Тогда если $\lambda_1 > \lambda_0$, то при делении неравенства на $-(\lambda_1-\lambda_0)$ знак поменяется и получим

$$\sum_{k=1}^{n}X_k \leq \frac{\ln c + n\ln\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}{\lambda_0-\lambda_1}$$

Выражение $\frac{\ln c + n\ln\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}{\lambda_0-\lambda_1}$ является константой, и для нахождения критического множества можно использовать другую константу $c_1 = \frac{\ln c + n\ln\frac{\lambda_0}{\lambda_1}}{\lambda_0-\lambda_1}$, при этом необязательно знать как связанны c и c_1. Таким образом критическое множество имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n}X_k \leq c_1$$

Если же гипотезы построены так, что $\lambda_1 < \lambda_0$, то критическое множество имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n}X_k \geq c_1$$

Пример 9

Выборка объема n получена из показательного закона распределения. Укажите вид оптимального критического множества для проверки гипотезы $H_0 : \lambda = \lambda_0$ против односторонней альтернативы $H_1 : \lambda = \lambda_1$, если $\lambda_1 < \lambda_0$. Для случая

$n = 100, \lambda_0 = 1,$

$\alpha = 0.05$ найдите такие значения $\lambda_1 < 1$, чтобы построенный критерий обеспечивал ошибку 2-го рода $\beta \leq 0.1$.

Согласно критерию Неймана-Пирсона, так как $\lambda_1 < \lambda_0$, то критическое множество имеет вид $S = \left(\bar{X} \geq C \right)$. Тогда используем статистику $2\lambda_0 n\bar{X}$, которая распределена по закону хи-квадрат с двумя степенями свободы

$$2\lambda_0 n\bar{X} \sim \chi^2\left(2n\right)$$

Тогда по определению ошибок первого и второго рода можно записать

$$\alpha = P\left(\bar{X} \in S \middle| H_0 \right) = P\left(\bar{X} \geq C \middle| H_0 \right) = P\left(2\lambda_0 n\bar{X} \geq 2\lambda_0 nC\right) = 1 - F_{\chi^2(2n)}\left(2\lambda_0 nC\right) \Rightarrow$$

$$F_{\chi^2(2n)}\left(2\lambda_0 nC\right) = 1 - \alpha$$

$$\beta \leq P\left(\bar{X} \notin S \middle| H_1 \right) = P\left(\bar{X} < C \middle| H_1 \right) = P\left(2\lambda_1 n\bar{X} < 2\lambda_1 nC\right) = F_{\chi^2(2n)}\left(2\lambda_1 nC\right)$$

Находим квантили уровней $1-\alpha$ и β для распределения $\chi^2\left(2n\right)$ и решаем систему:

$$\begin{cases} 2\lambda_0 nC = \chi^2_{1-\alpha}\left(2n\right) \\ 2\lambda_1 nC \leq \chi^2_{\beta}\left(2n\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 200C = 233{,}94 \\ 200\lambda_1 C \leq 174.835 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 1.17 \\ \lambda_1 \leq 0.747 \end{cases}$$

Пример 10

Найдем объем выборки, обеспечивающий при решении задачи о различении гипотез о параметре показательного закона ошибки $\alpha = 0.05$ и $\beta = 0.05$.

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 = \frac{1}{3}$$

$$H_1 : \lambda = \lambda_1 = \frac{5}{11}$$

Согласно критерию Неймана-Пирсона, так как $\lambda_1 > \lambda_0$ $S = \left(\bar{X} \leq C \right)$. Использовать статистику $2\lambda_0 n\bar{X} \sim \chi^2\left(2n\right)$ из прошлого примера здесь не целесообразно так как получится трансцендентное уравнение (неизвестная n будет являться параметром распределения), Поэтому воспользуемся центральной предельной теоремой. Числовые характеристики показательного распределения имеют вид

$$MX_i = \frac{1}{\lambda} \qquad DX_i = \frac{1}{\lambda^2}$$

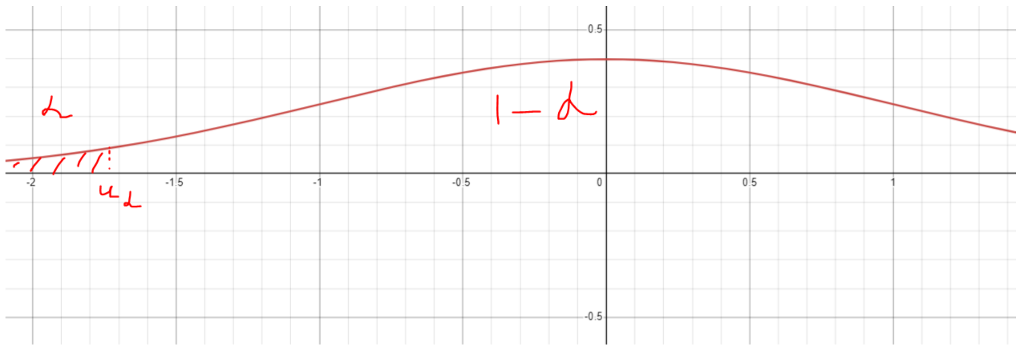
Тогда по центральной предельной теореме

$$\bar{X} \sim N\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda\sqrt{n}} \right)$$

$$\frac{\bar{X}-\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}}\sqrt{n} \sim N(0,1)\ \bar{X} \sim N\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda\sqrt{n}}\right)$$

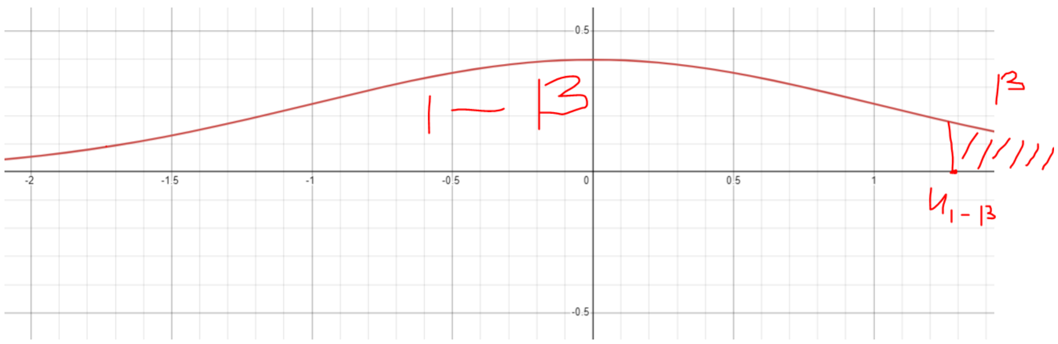
Тогда по определению ошибок первого и второго рода можно записать

$$\alpha = P\left(\bar{X} \in S \middle| H_0\right) = P\left(\bar{X} \le C \middle| H_0\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\frac{1}{\lambda_0}}{\frac{1}{\lambda_0}}\sqrt{n} \le \frac{C-\frac{1}{\lambda_0}}{\frac{1}{\lambda_0}}\right) \approx \Phi\left(\left(C\lambda_0 - 1\right)\sqrt{n}\right)$$



$$\beta = P\left(\bar{X} \notin S \middle| H_1\right) = P\left(\bar{X} > C \middle| H_1\right) = P\left(\frac{\bar{X}-\frac{1}{\lambda_1}}{\frac{1}{\lambda_1}} > \frac{C-\frac{1}{\lambda_1}}{\frac{1}{\lambda_1}}\right) \approx 1-\Phi\left(\left(C\lambda_1 - 1\right)\sqrt{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\left(C\lambda_1 - 1\right)\sqrt{n}\right) = 1-\beta$$



Находим квантили нормального распределения уровня $1-\beta$ и α и решаем систему:

$$\begin{cases} C\lambda_0\sqrt{n}-\sqrt{n}=u_\alpha \\ C\lambda_1\sqrt{n}-\sqrt{n}=u_{1-\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{n}=\dfrac{u_{1-\beta}\lambda_0-u_\alpha\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_0} \\ C=\dfrac{\sqrt{n}+u_\alpha}{\lambda_0\sqrt{n}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n\approx 115 \\ C=2.538 \end{cases}$$

Таким образом критическое множество имеет вид $S=\left(\bar{X}\le 2.538\right)$ и при $n\approx 115$ достигаются заданные ошибки первого и второго рода

Пример 11

Найти критическое множество и объём выборки, обеспечивающий при решении задачи о различении гипотез о параметре распределения Бернулли ошибки $\alpha=0.01$ и $\beta=0.05$, если гипотезы имеют вид

$$H_0: p=0.1=p_0$$
$$H_1: p=0.2=p_1$$

Согласно критерию Неймана-Пирсона, если $p_1>p_0$, то критическое множество имеет вид $S=\left(\bar{X}\ge C\right)$. При больших n можем воспользоваться центральной предельной теоремой. Числовые характеристики распределения Бернулли имеют вид

$$MX_i=p \qquad DX_i=p\left(1-p\right)$$

Тогда по центральной предельной теореме

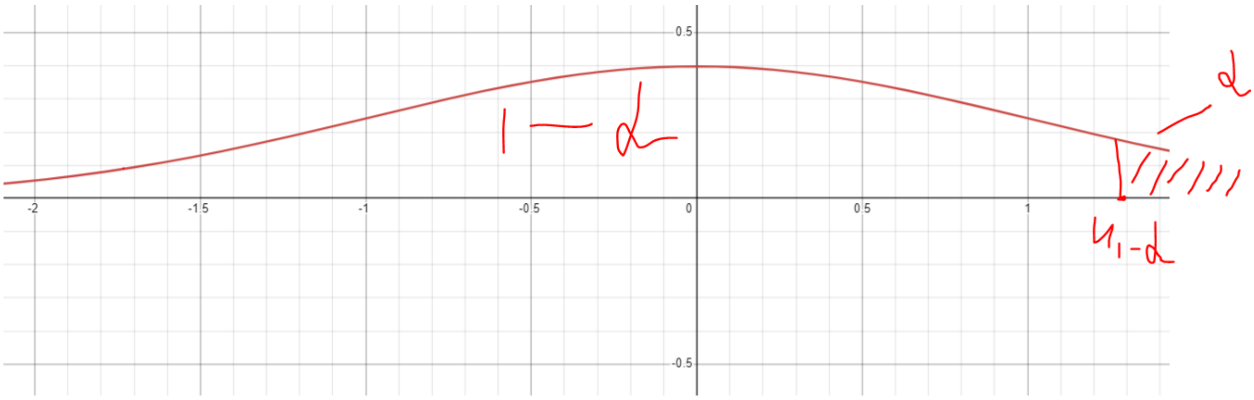
$$\bar{X}\sim N\left(p,\frac{\sqrt{p\left(1-p\right)}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{p\left(1-p\right)}}\sqrt{n}\sim N\left(0,1\right)$$

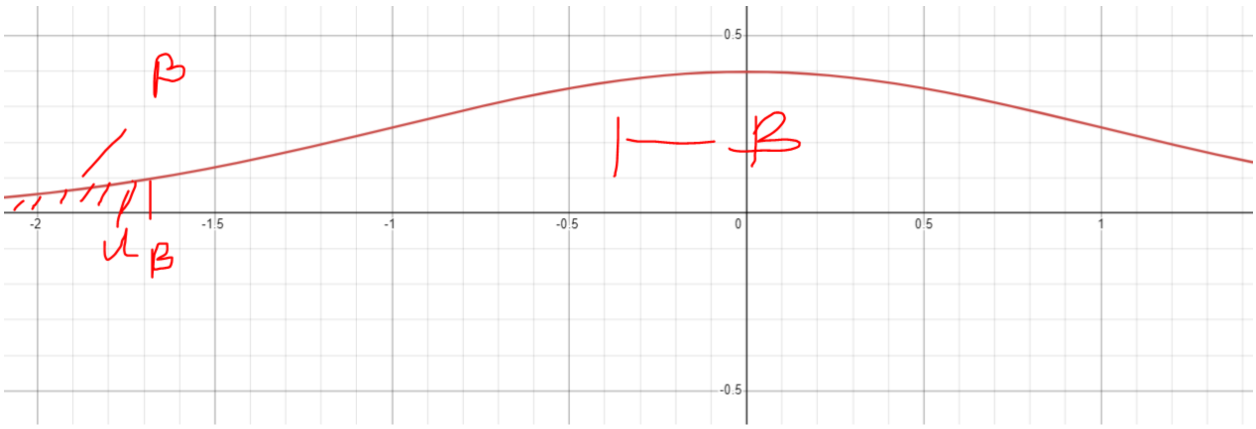
Тогда по определению ошибок первого и второго рода можно записать

$$\alpha=P\left(\bar{X}\ge C\middle|H_0\right)=P\left(\frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{p_0\left(1-p_0\right)}}\sqrt{n}\ge\frac{C-p_0}{\sqrt{p_0\left(1-p_0\right)}}\sqrt{n}\right)\approx 1-\Phi\left(\frac{C-p_0}{\sqrt{p_0\left(1-p_0\right)}}\sqrt{n}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Phi\left(\frac{C-p_0}{\sqrt{p_0\left(1-p_0\right)}}\sqrt{n}\right)=1-\alpha$$



$$\beta = P\left(\bar{X} < C \middle| H_1\right) = P\left(\frac{\bar{X} - p_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\sqrt{n} < \frac{C - p_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\sqrt{n}\right) \approx \Phi\left(\frac{C - p_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\sqrt{n}\right)$$



Находим квантили нормального распределения уровня $1-\alpha$ и β и решаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{C - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} = u_{1-\alpha} \\ \dfrac{C - p_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\sqrt{n} = u_\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C\sqrt{n} = p_0\sqrt{n} + u_{1-\alpha}\sqrt{p_0(1-p_0)} \\ C\sqrt{n} = p_1\sqrt{n} + u_\beta\sqrt{p_1(1-p_1)} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \sqrt{n} = \dfrac{u_{1-\alpha}\sqrt{p_0(1-p_0)} - u_\beta\sqrt{p_1(1-p_1)}}{p_1 - p_0} \\ C = p_0 + u_{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \approx 184 \\ C = 0.151 \end{cases}$$

Таким образом критическое множество имеет вид $S = \left(\bar{X} \geq 0.151\right)$ и при $n \approx 184$ достигаются заданные ошибки первого и второго рода

Пример 12

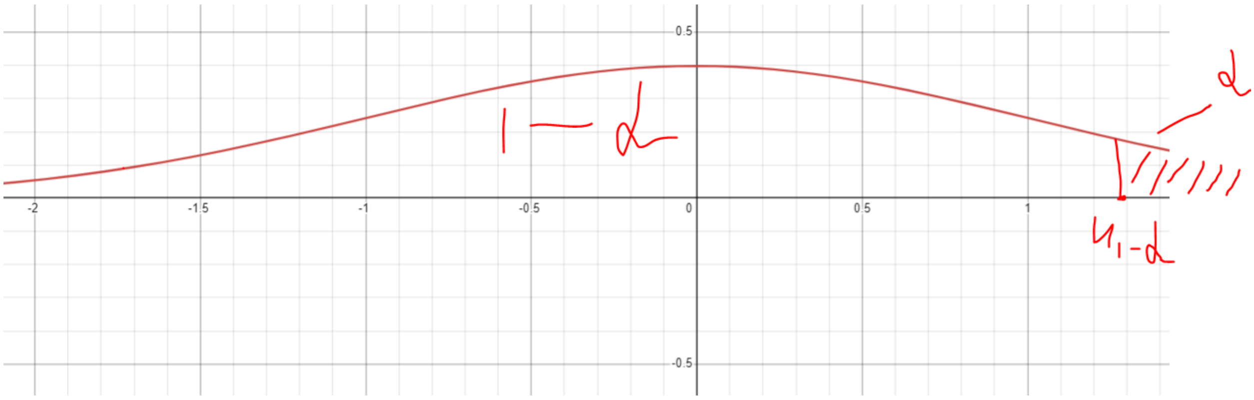
Найти критическое множество и объём выборки, обеспечивающий при решении задачи о различении гипотез о параметре нормального, значения ошибок $\alpha = 0.02$, если $\sigma = 0.5$ известно. Гипотезы имеют вид

$H_0 : a = a_0 = 1$

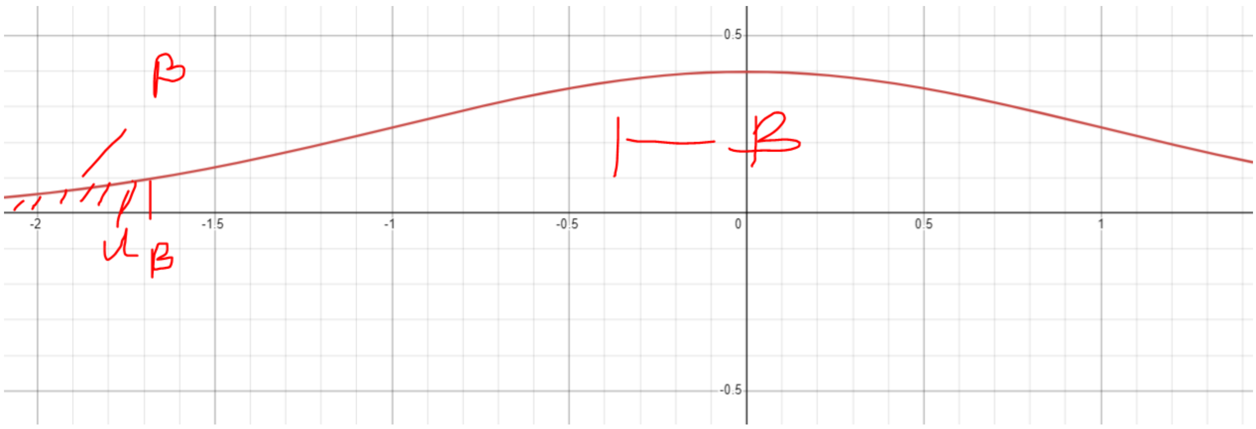
$H_1 : a = a_1 = 1.2$ Согласно критерию Неймана-Пирсона критическое множество имеет вид $S = \left(\bar{X} \geq C \right)$. Тогда по определению ошибок первого и второго рода можно записать

$$\alpha = P\left(\bar{X} \geq C \middle| H_0 \right) = P\left(\frac{\bar{X} - a_0}{\sigma}\sqrt{n} \geq \frac{C - a_0}{\sigma}\sqrt{n} \right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{C - a_0}{\sigma}\sqrt{n} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{C - a_0}{\sigma}\sqrt{n} \right) = 1 - \alpha$$



$$\beta = P\left(\bar{X} < C \middle| H_1 \right) = P\left(\frac{\bar{X} - a_1}{\sigma}\sqrt{n} < \frac{C - a_1}{\sigma}\sqrt{n} \right) \approx \Phi\left(\frac{C - a_1}{\sigma}\sqrt{n} \right)$$



Находим квантили нормального распределения уровня $1 - \alpha$ и β и решаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{C-a_0}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha} \\ \dfrac{C-a_1}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = a_0 + \dfrac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}\sigma \\ C = a_1 + \dfrac{u_{\beta}}{\sqrt{n}}\sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{n} = \dfrac{\left(u_{1-\alpha} - u_{\beta}\right)\sigma}{a_1 - a} \\ C = a_0 + \dfrac{u_{1-\alpha}}{u_{1-\alpha} - u_{\beta}}\left(a_1 - a\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \approx 86 \\ C = 1.111 \end{cases}.$$

Таким образом критическое множество имеет вид $S = \left(\bar{X} \geq 1.111\right)$ и при $n \approx 86$ достигаются заданные ошибки первого и второго рода