Прошлый семестр:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_0 & \vec{p}_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_0 & \vec{p}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_0' & \vec{p}_0' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_0 & \vec{p}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} ()$$

Стихно

11/02/2025

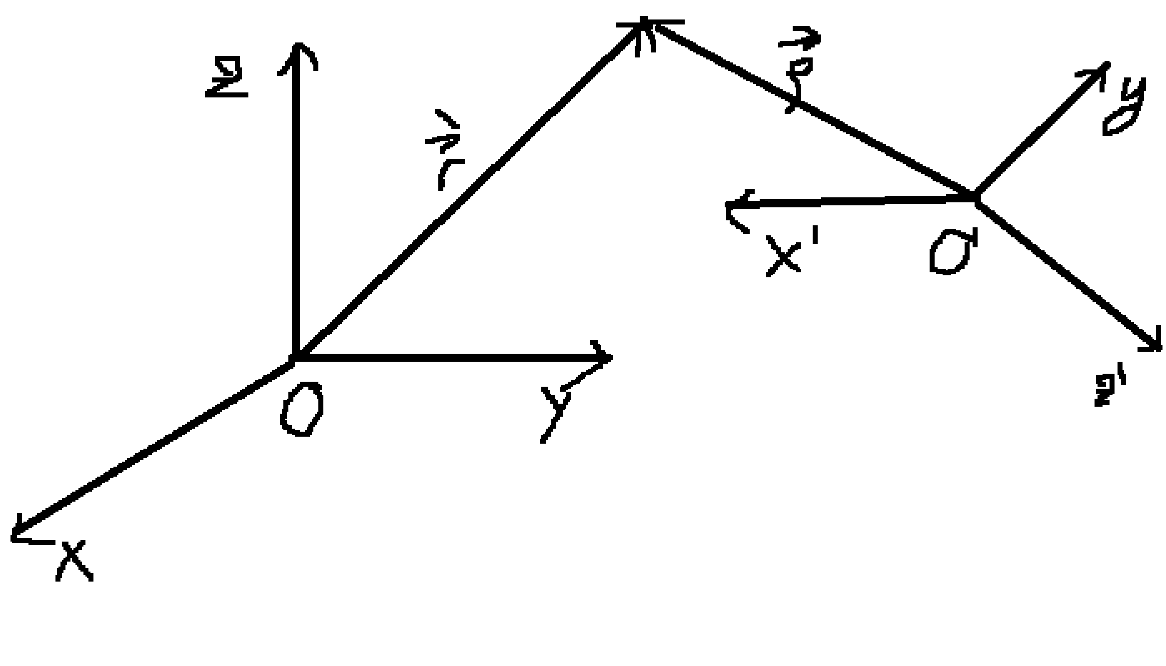
Переписать из тетради

18/02/2025

В инерциальной СО: $m\vec{a} = \sum \vec{F}$

Движение точки в неинерциальной системе отсчёта.

Неинерциальной системой отсчёта называют систему отсчёта, в которой не выполняется закон инерции



$$\vec{a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_K}$$
$$\vec{a_e} = \vec{a_{O'}} + \vec{\varepsilon_e} \times \vec{\rho} + \vec{\omega_e} \times (\vec{\omega_e} \times \vec{\rho})$$
$$\vec{a_K} = 2(\vec{\omega_e} \times \vec{V_r})$$
$$m(\vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_K}) = \Sigma F$$
$$m\vec{a_r} = \Sigma F - m\vec{a_e} - m\vec{a_K}$$
$$\vec{\Phi_e} = -m\vec{a_e} \text{ - переносная сила инерции}$$
$$\vec{\Phi_K} = -m\vec{a_K} \text{ - сила инерции Кориолиса}$$
$$m\vec{a_r} = \Sigma F + \vec{\Phi_e} + \vec{\Phi_K}$$

$\vec{\Phi_K} = 0$? $\rightarrow \vec{\omega_e} = 0$

$\vec{\omega_e} = 0$

$\vec{\Phi_e} = 0$? $\rightarrow$ $\vec{\varepsilon_e} = 0$

$\vec{a_{O'}} = 0$

Критерий неинерциальности системы отсчёта:

Если система отсчёта движется с ускорением или вращается относительно любой инерцианльой системы отсчёта, то такая система будет неинерциальной.

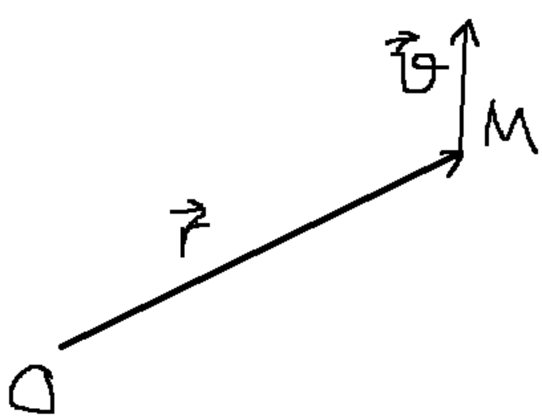
Относительный покой материальной точки в неинерциальной системе отсчёта.

Условие покоя:

$$\vec{V_r} \equiv 0$$
$$\vec{a_r} \equiv 0$$
$$0 = \sum \vec{F} + \vec{\Phi_e}$$

Движение материальной точки под действием центральной силы

$$\vec{F} \text{ - центральная, если она коллинеарна радиус-вектору}$$
$$\vec{F} = f(\vec{r})\vec{r}$$

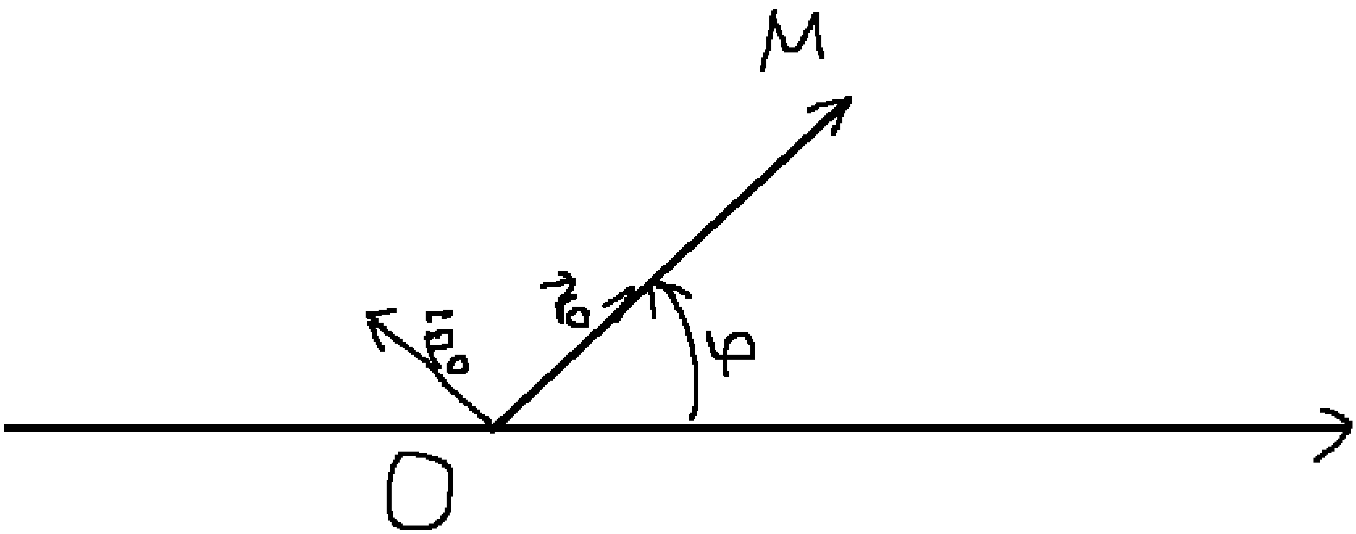


$$m\vec{a} = \vec{F}$$

1. Траектория точки, которая движется только под действием центральной силы - плоская кривая

\begin{gather} \pi \{ \vec{r} ,\vec{V}\}, \ \ \vec{r}\cancel{ \parallel } \vec{V} \\ \vec{n}=\frac{\vec{r}\ti

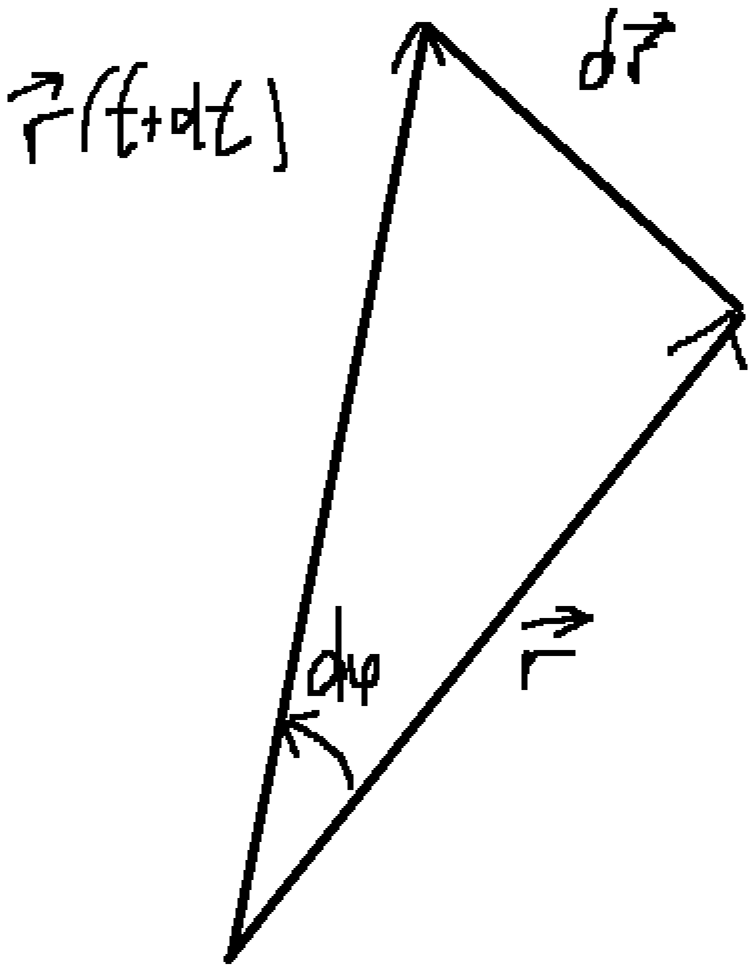
\end{gather}$$
Введём полярную ось



$$
\begin{gathered}
a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\
a_p = r\dot{r} + r\ddot{\varphi}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\vec{r_0}:\ m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f(\vec{r})\vec{r} \\
\vec{p_0}:\ m(r\dot{r} + \ddot{\varphi}) = 0
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0 \\
\ddot{\varphi} = \tfrac{d\dot{\varphi}}{dt} \qquad \to 2dr\cdot\dot{\varphi} + 2d\dot{\varphi} = 0 \\
\dot{r} = \tfrac{dr}{dt} \\
\frac{2dr}{r} = -\frac{d\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \\
2\ln r = -\ln|\dot{\varphi}| + C \\
r^2 = \frac{C_1}{|\dot{\varphi}|} \\
|\dot{\varphi}|r^2 = C_1
\end{gathered}
$$



$$dS = \frac{1}{2}|d\vec{r}|h$$
$$h \approx r$$
$$|d\vec{r}| \approx r d\varphi$$
$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi \implies$$
$$\dot{S} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = C \text{ - интеграл площадей. Закон Кеплера}$$

Движение несвободной материальной точки

Движение точки называется несвободным когда на параметры её движения наложены некоторые ограничения. Такие ограничения, связывающие координаты и скорости точки, называются связи. Это ограничение в общем виде можно представить в виде уравнения или неравенства.

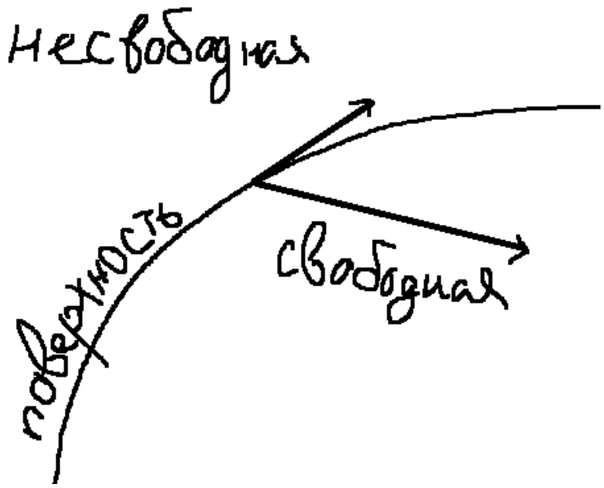
$f(x,y,z)=0$ - точка находится в поверхности

$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ - точка находится на кривой

$$m\vec{a}=\Sigma\vec{F}$$

$$\begin{cases} m\vec{a}=\Sigma\vec{F} \\ f(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Решается через множитель Лагранжа.



Связь называется идеальной, если прибавка к ускорению будет направлена по нормали к поверхности в данной точке.

$$\vec{n}=\frac{\vec{grad}(f)}{|\vec{grad}(f)|}$$

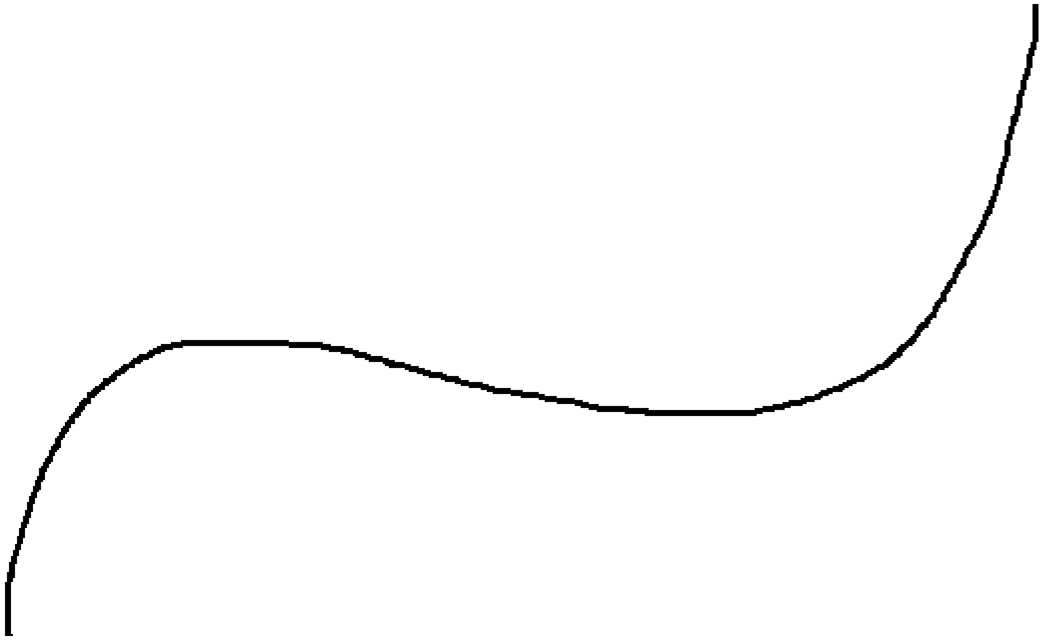
$$\begin{cases} m\vec{a}=\Sigma\vec{F}+\lambda'\vec{n} \\ f(x,y,z)=0 \end{cases}$$

$$\vec{N}=\lambda'\vec{n}=\lambda\vec{grad}(f)$$

$$\vec{grad}(f)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}=\Sigma F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y}=\Sigma F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y} \\ m\ddot{z}=\Sigma F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z} \\ f(x,y,z)=0 \end{cases}$$

$$x,y,z,\lambda$$



$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \end{cases}$$

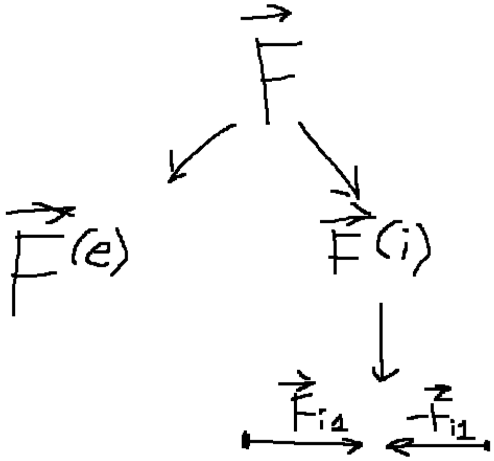
$$\begin{cases} m\ddot{x} = \Sigma F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ m\ddot{y} = \Sigma F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ m\ddot{z} = \Sigma F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

На экзамене не будет: 2 важных постулата ОТО:

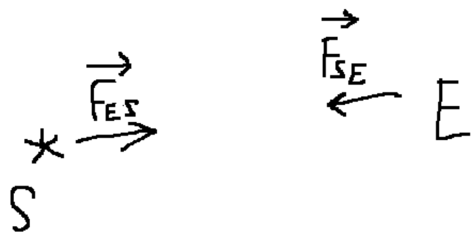
1. Гравитация - инерционная сила
2. Чем быстрее движется точка, тем она "менее свободна"
   Сила инерции ~ массе тела (инерционной)
   Сила притяжения ~ массе тела (гравитационной)
   Мб сила притяжения - сила инерции???
   Геометрия пространства эквивалентна силе

25/02/2025

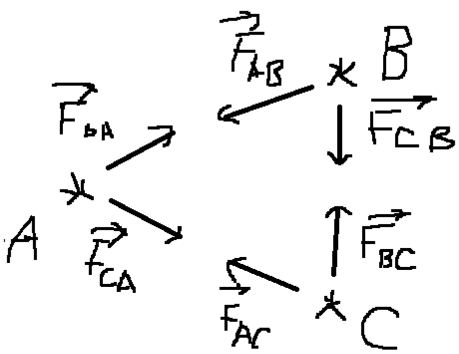
Механическая*система - совокупнось материальных точек, чьё движение рассматривается совместно.*
*Внешние*силы - силы, которые действуют на точки системы со стороны тел, внешних по отношению системе объектов.
Внутренние*силы - силы взаимодействия между точками механической системы.*



$$\vec{R}^{(i)}=\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{j}^{(i)}=\vec{0}$$



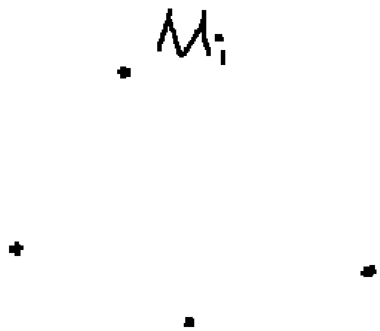
$$\begin{cases} m_S\vec{a}_S = \vec{F}_{ES} \\ m_E\vec{a}_E = \vec{F}_{SE} \end{cases}$$



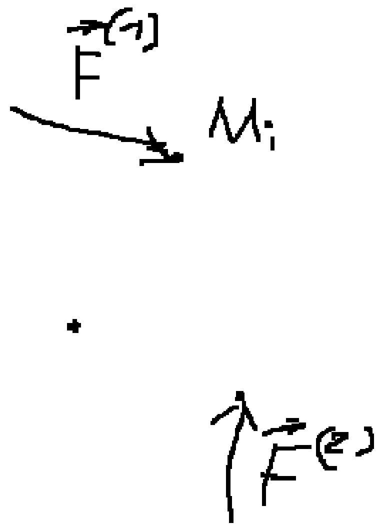
Алгебраического решения для задачи 3х тел не существует.
Поиск общих теорем динамики.

Общие теоремы динамики

1. $i = 1 \ldots n$



2. Инерциальная система отсчёта



$m_i\vec{a}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} = \vec{F}_i^{(\text{в})} + \vec{F}_i^{(\text{i})}$

\begin{gather} \sum _{i}m_{i}\vec{a}_{i}=\sum _{i,j}\vec{F}_{ij}=\sum _{i}\vec{F}_{i}^{(\text{в})}+

\end{gather}

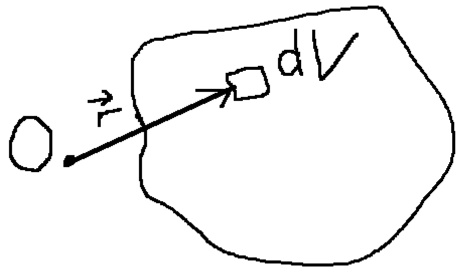
Определение : *Центрмассмеханическойсистемы* − *материальнаяточка*, *срадиус* − *вектором*, *который*

\vec{r}*{C}*= *frac*{*sum*{i} m*{i}**vec*{*r*}{i}}{\sum m_{i}}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} : \vec{a}_C = \frac{\sum_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i}$$
$$M\vec{a}_C = \vec{R}^{(\text{в})},\ \text{где}\ M = \sum_i m_i$$

Теорема о движении центра масс механической системы.
Центр масс механической системы движется так же, как двигалась бы материальная точка, с массой, равной суммарной массе системы, под действием только внешних сил,

приложенных к системе.

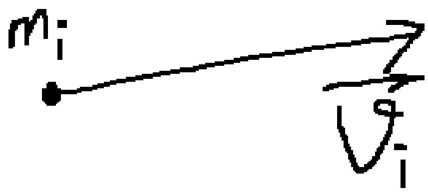


$$\vec{r}_C = \frac{\iiint_V \vec{r} \cdot \rho dV}{\iiint_V \rho dV} = \frac{\iiint_V \vec{r} \rho dV}{M}$$

Векторный момент первого порядка.
Частный случай: Пусть $\vec{R}^{(\text{в})} = 0$

$$M\vec{a}_C = 0 \Rightarrow \vec{V}_C = co\vec{n}st$$
$$\vec{V}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{\sum_i m_i} = co\vec{n}st$$

Определение.
Пусть есть точка массой m, которая движется со скоростью $\vec{V}$.



Количество движения материальной точки - произведение её массы на её скорость.

$$\vec{q} = m_i \vec{V}_i$$

Разница с импульсом - импульс определен и для неньютоновской механики.
Количество движения механической системы - сумма количеств движения точек системы.
Для счётного случая:

$$\vec{Q} = \sum_i \vec{q}_i$$

Для несчётного:

$$\vec{Q} = \iiint_V \vec{v} \rho dV$$

$$M\vec{v}_C = \sum_i m_i\vec{v}_i = \vec{Q}$$
$$M\vec{a} = \vec{R}^{(\text{e})}$$
$$M\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{v_C})$$
$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(\text{в})}$$

Теорема об изменении количества движения механической системы
Изменение со временем количества движения механической системы соответствует главному вектору системы внешних сил.
Пусть главный вектор системы внешних сил = 0. $\vec{R}^{(\text{в})} = 0$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{Q} = co\vec{n}st$$

Теорема об изменении количества движения механической ссистемы в интегральной форме

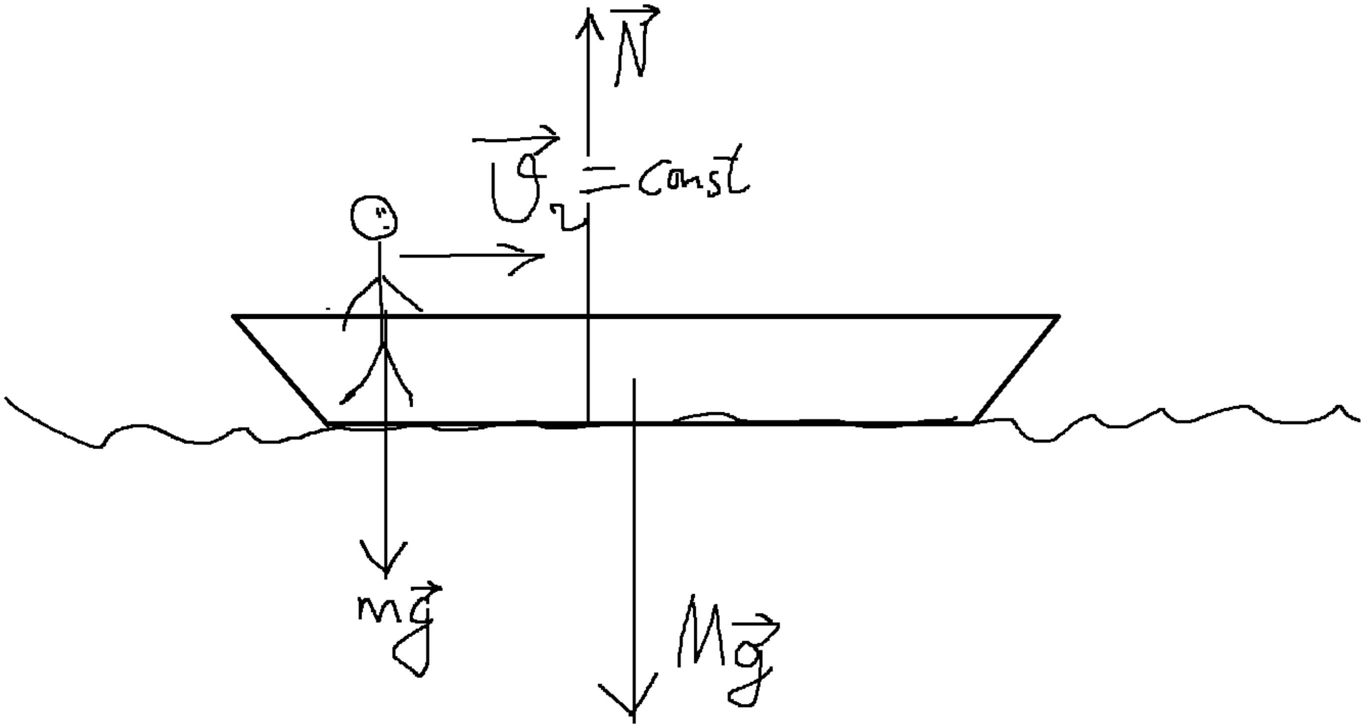
$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_i \vec{F}^{(\text{в})}$$
$$d\vec{Q} = \sum_i \vec{F}^{(\text{в})}dt$$
$$d\vec{s} = \vec{F}dt$$

Элементарным импульсом силы $\vec{s}$ будем называть векторную величину на дифференциал времени
Полный импульс силы - интеграл от элементарного импульса силы на определённом промежутке времени

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t}\vec{F}(\tau)d\tau$$

$$\vec{Q}_\text{к} - \vec{Q}_\text{н} = \sum_i \vec{S}^{(\text{в})}$$

Теорема об изменении количества движения в импульсной форме



$$M_C\vec{a}_C = m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{N}$$
$$x : M_C a_C^x = 0 \Rightarrow$$
$$M_C V_C^x = const$$
$$\text{Пусть } V_C|_{t=0} = 0 \ \Rightarrow$$
$$v_{\text{цм}}^x = 0$$
$$Q^x = 0 \implies$$
$$Q^x = Q_{\text{л}}^x + Q_{\text{ч}}^x$$
$$\vec{v}_ч = \vec{v}_л + \vec{v}_r, \text{ где } \vec{v}_{\text{л}} = \vec{v}_e$$
$$Q^x = M(-V_{\text{л}}) + m(-V_{\text{л}} + V_{\text{ч}})$$
$$mV_{\text{ч}} - (m+M)V_{\text{л}} = 0$$
$$V_{\text{л}} = \frac{m}{m+M}V_{\text{ч}}$$

04/03/2025

$$m_i\vec{a}_i = \sum \vec{F}_{ij}$$

Рассмотрим инерциальную систему отсчёта и точку O, неподвижную в этой истеме отсчёта

Для каждой точки введём радиус-вектор $\vec{r}_i$.

$$\vec{r}_i \times m_i\vec{a}_i = \sum_j \vec{r}_i \times \vec{F}_{iO} = \sum_j \vec{M}_O(\vec{F}_{ij})$$

Кинетический момент (момент количества движения) относительно некоторого полюса - векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора этой точки M_i

относительно исходного полюса, умноженного на количество движения этой точки

$$\vec{K}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \vec{r}_i \times \vec{q}_i$$

$$\frac{d\vec{K}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i) = \cancelto{0}{(\vec{v}_i \times m\vec{v}_i)} + (\vec{r}_i \times m_i\vec{a}_i)$$

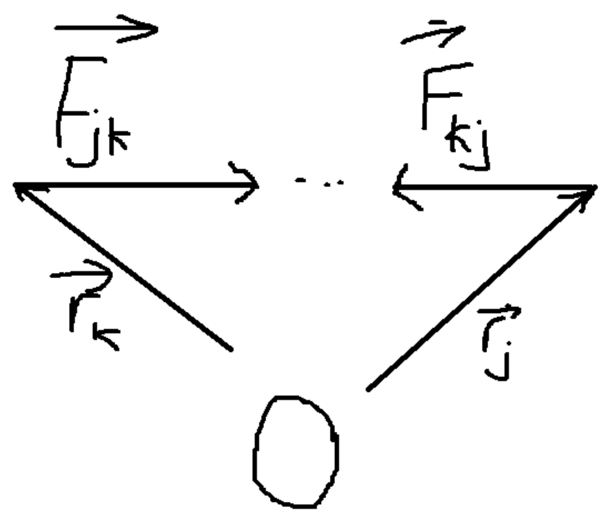
$$\frac{d\vec{K}_i}{dt} = \sum_j \vec{M}_O(\vec{F}_{ij})$$

Кинетический момент системы относительно полюса O

$$\vec{K}^O = \sum_i \vec{K}_i^O = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{q}_i = \sum_i \vec{M}^O(\vec{F}_i)$$

$$\frac{d\vec{K}^O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{r}_{i \times m_i\vec{v}_i}\right) = \sum_i [\cancelto{0}{(\vec{v}_i \times m_i\vec{v}_i)} + (\vec{r}_i \times m_i\vec{a}_i)]$$

$$\frac{d\vec{K}^O}{dt} = \sum_{ij} \vec{M}^O(\vec{F}_{iO}) = \sum \vec{M}_O\vec{F}^{\text{внеш}} + \sum \vec{M}_O\vec{F}^{\text{внутр}}$$



$$\vec{L}_O(\vec{F}_{jk}^{(i)}, \vec{F}_{kj}^{(i)}) = \vec{r}_k \times \vec{F}_{jk}^{(i)} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{kj}^{(i)} \Rightarrow$$

$$\vec{r}_j = \vec{r}_k + \overrightarrow{M_k M_j}$$

$$\vec{L}_O(\vec{F}_{jk}^{(i)}\vec{F}_{kj}^{(i)}) = 0$$

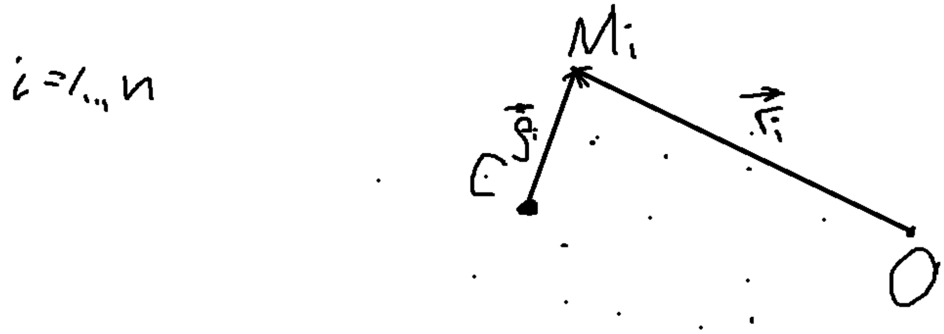
$$\frac{d\vec{K}^O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}^{\text{внеш}})$$

Уравнение описывает вращение системы относительно O.

Законы сохранения вектора кинетической энергии.

Кинетический момент механической системы в её относительном движении относительно центра масс механической системы

$\vec{K}$ относительного движения

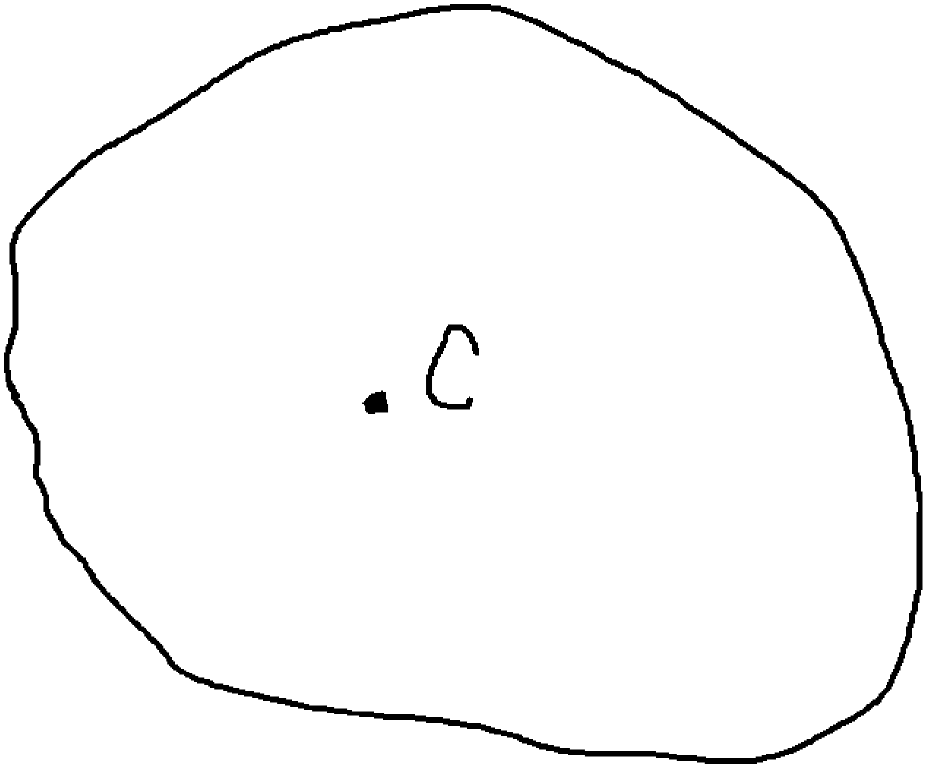


Кёнигова система отсчёта - подвижная система отсчёта, с осями координат параллельными инерациальной системе отсчёта и с центром, связанным с центром масс механической системы.

$$\vec{K}^O = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i =$$
$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$$
$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_i^{(r)}$$
$$= \sum (\vec{r}_C + \vec{\rho}_i) \times m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_i^{(r)}) =$$
$$= \sum \vec{r}_C \times m_i \vec{v}_C + \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_C + \sum \vec{r}_C \times m_i \vec{v}_i^{(r)} + \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i^{(r)} =$$
$$= \vec{r}_C \times M \vec{v}_C + \cancelto{0}{\left[\sum m_i \vec{\rho}_i\right]} \times \vec{v}_C + \vec{r}_C \times \cancelto{0}{\sum m_i \vec{v}_i^{(r)}} + \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i^{(r)} =$$
$$= \vec{M}_O(\vec{Q}) + 0 + 0 + \vec{K}_C^{(r)}$$
$$\vec{K}^O = \vec{K}_C^{(r)} + \vec{M}_O(\vec{Q})$$

Применение теоремы об изменении кинетического момента в случае, если в системе несчётное число точек.

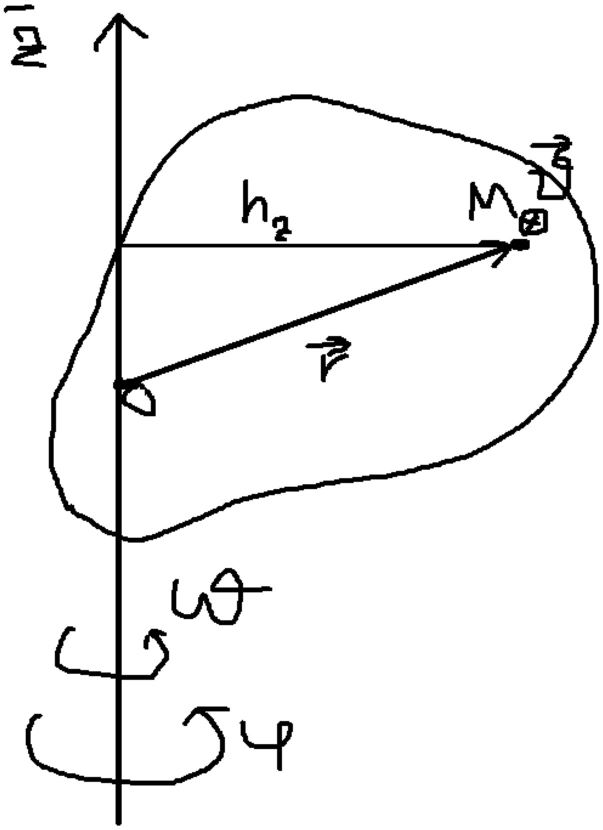
Уравнение поступательного движения абсолютно твёрдого тела



$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = M\vec{a}_C = \sum \vec{F}^{(e)}$$

$$\begin{cases} M\ddot{x} = \sum F_x^{(e)} \\ M\ddot{y} = \sum F_y^{(e)} \\ M\ddot{z} = \sum F_z^{(e)} \end{cases}$$

Вращательное движение



$$\vec{K}_O = \int_V \vec{r} \times dm\vec{v} = \int_V \vec{r} \times \vec{v}\rho dV$$

$$K_{Oz} = \int_V h_z \cdot \omega_z h_z dm$$

$$K_{Oz} = \omega_z \int_V h_z^2 dm$$

Момент инерции твёрдого тела относительно оси z называется следующий интеграл:

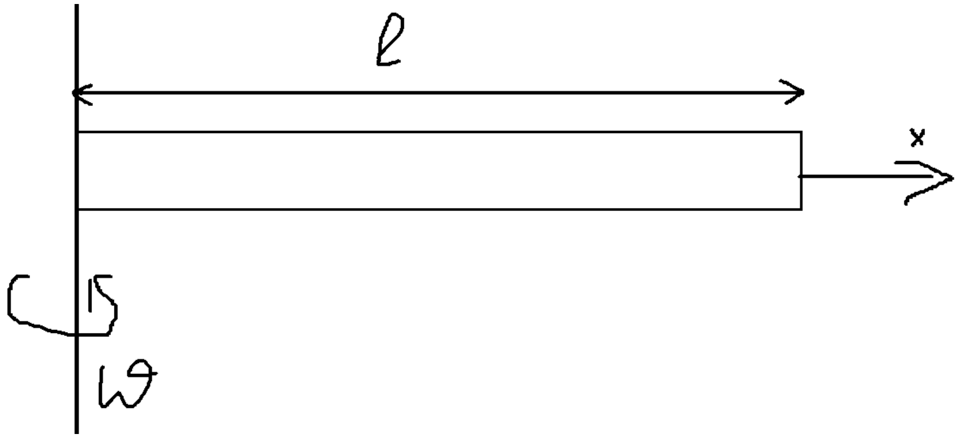
$$I_Z = \int_V h_z^2 dm$$

$$K_{Oz} = I_z \omega_z$$

$$\frac{dK_{Oz}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \dot{\varphi}) = I_z \ddot{\varphi} = \sum M_{Oz}(\vec{F}^{(e)})$$

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum M_{Oz}(\vec{F}^{(e)})$$

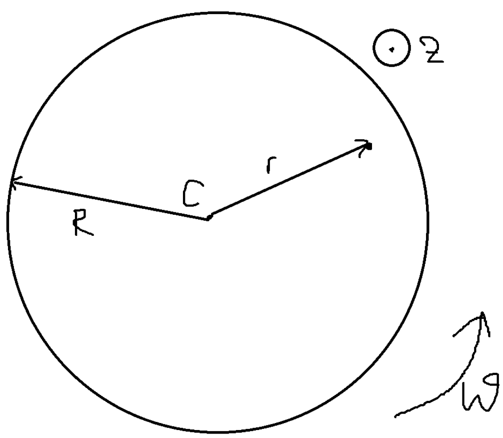
Примеры подсчёта моментов инерции:



$$\rho_l = \frac{dm}{dl}, \text{здесь } \rho_l = \text{const}$$

$$I_z = \int_0^l x^2 \rho_l dx = \frac{\rho_l l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

Дома: момент инерции стержня относительно своей середины



$$\rho_S = \frac{dm}{dS} = \text{const}$$

$$I_z = \int_S r^2 \rho_S dS = \begin{bmatrix} S(r) = \pi r^2 \\ dS = 2\pi r \end{bmatrix} = \int_0^l r^2 \rho_S \cdot 2\pi r dr =$$

$$= 2\pi\rho_S \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

для колечка $I_z = mR^2$

11/03/2025

$$K_{OZ} = I_{OZ}\omega_Z$$

$$I_{OZ} = \int_V \rho_Z^2 dm$$

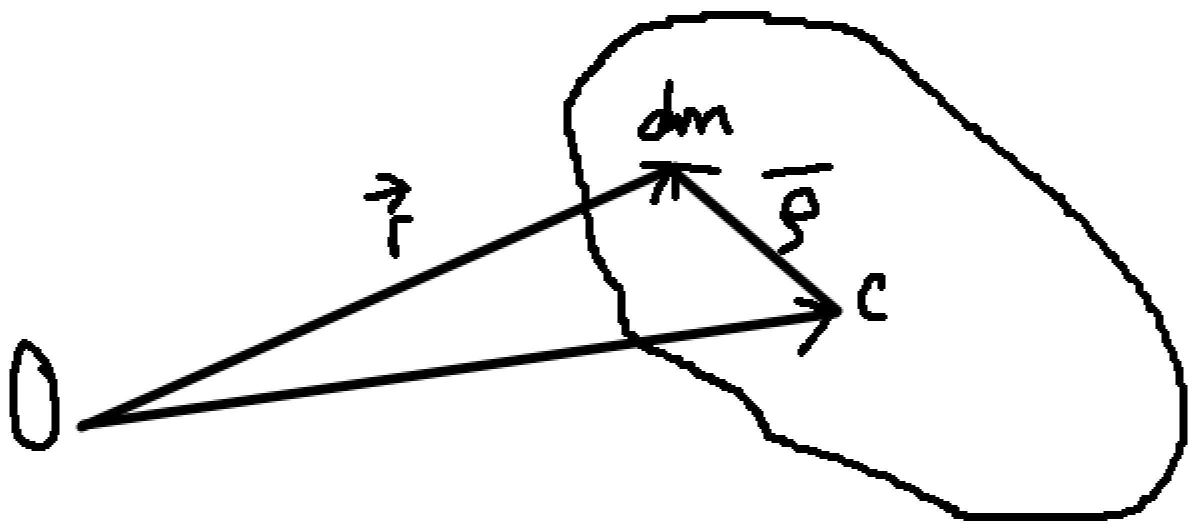
Рассмотрим некоторую декартовую СО.
Момент инерции относительно центра координат:

$$I_O = \int_V (x^2 + y^2 + z^2)\rho dV$$

$$I_{OX} = \int_V (y^2 + z^2)\rho dV$$

$$I_{OX} + I_{OY} + I_{OZ} = 2I_O$$

Теорема Гюйгенса-Штейнера:
Момент инерции относительно некоторой точки пространство параллельно оси z можно вычислить как момент инерции относительно оси z, проходящей через центрм масс системы, сложенный с произведением квадрата длины радиус-вектора, соединяющего точки, на массу.



$$I_{OZ} = I_{iZ} + mOC^2$$

$$I_{OZ} = \int_V r^2 dm = \int_V (\overline{OC} + \overline{\rho})^2 dm = \int_V (OC^2 + 2\overline{OC}\overline{\rho} + \rho^2) dm =$$

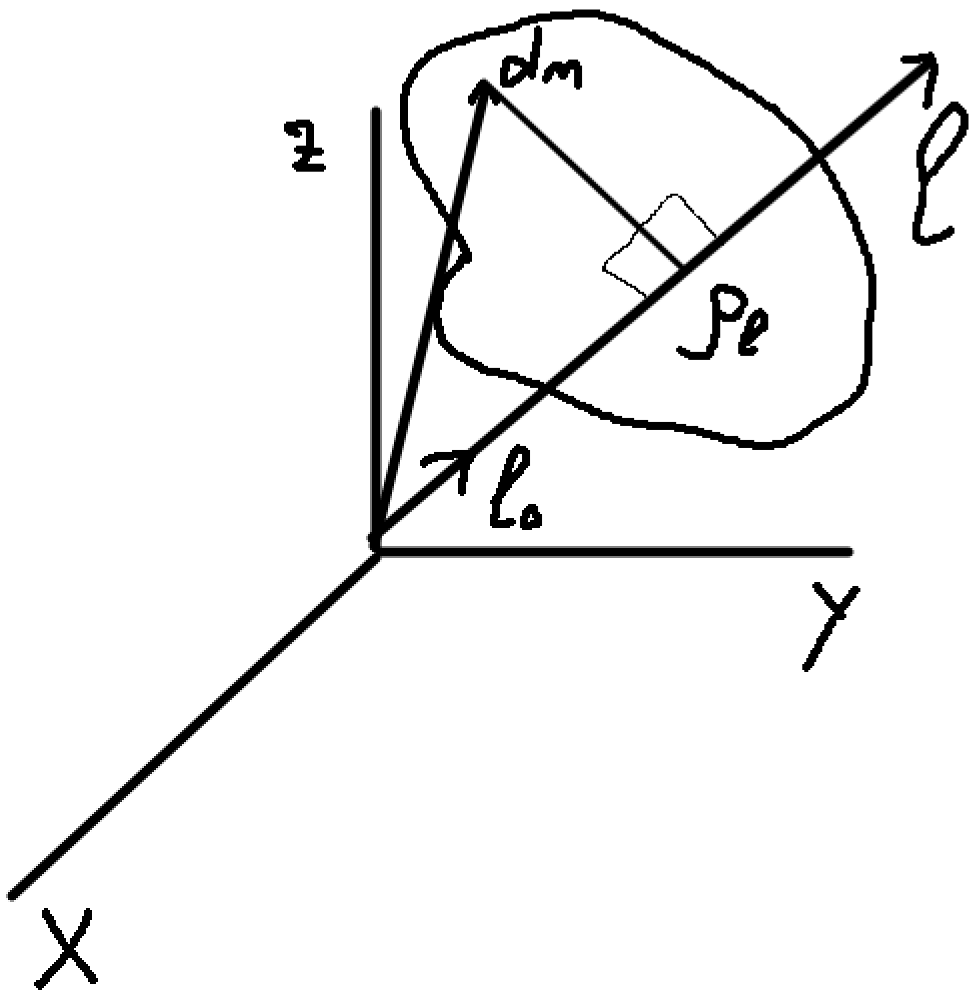
$$= OC^2 m + 2\overline{OC} \cancelto{m\overline{\rho_C}=0}{\int_V \overline{\rho} dm} + I_{CZ}$$

Центробежные моменты инерции I_{OXY} следующие интегралы

$$I_{OXY} = \int_V xydm$$

Момент инерции твёрдого тела при вращении вокруг произвольной оси:

$$|\vec{l}_0| = 1$$
$$\cos\alpha = \vec{l}_0 \cdot \vec{i}$$
$$\cos\beta = \vec{l}_0 \cdot \vec{j}$$
$$\cos\gamma = \vec{l}_0 \cdot \vec{k}$$



$$I_{Ol} = \int_V \rho_l^2 dm$$
$$OM_l = \vec{r} \cdot \vec{l} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$
$$\rho_l^2 = r^2 - OM_l^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$$
$$I_{Ol} = \int_V [x^2 - x^2\cos^2\alpha + y^2 - y^2\cos^2\beta + z^2 - z^2\cos^2\gamma -$$
$$-2xy\cos\alpha\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma]dm$$
$$l_0^2 = 1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$
$$I_{Ol} = \int_V x^2[\cos^2\beta + \cos^2\gamma] + y^2[\cos^2\alpha + \cos^2\gamma] + z^2[\cos^2\alpha + \cos^2\beta]dm -$$
$$-2I_{Oxy}\cos\alpha\cos\beta - 2I_{Oxz}\cos\alpha\cos\gamma - 2I_{Oyz}\cos\beta\cos\gamma$$
$$I_{Ol} = I_{Ox}\cos^2\alpha + I_{Oy}\cos^2\beta + I_{Oz}\cos^2\gamma - 2I_{Oxy}\cos\alpha\cos\beta - 2I_{Oxz}\cos\alpha\cos\gamma - 2I_{Oyz}\cos\beta\cos\gamma$$
$$I_{Ol} = \vec{l}_O^T \hat{I}_O \vec{l}_O$$
$\hat{I}_O$ - тензор инерции
$$\hat{I_O} = \begin{pmatrix} I_{OX} & -I_{Oxy} & -I_{Oxz} \\ -I_{Oxy} & I_{OY} & -I_{Oyz} \\ -I_{Oxz} & -I_{Oyz} & I_{OZ} \end{pmatrix}$$

Т.к. форма положительно определена существует СК, в которой она имеет диагональный вид
Момент инерции относительно произвольной оси нам необходима информация о моментах инерции этого тела относительно 3 осей,
Главные оси инерции - оси системы отсчёта с центром в точке O, относительно которых матрица тензора инерции принимает диагональный вид
Если главные центральные оси имеют центр масс, они называются главными
Для определения любого момента инерции, проходящего через некоторую точку
Нам нужно знать осевые моменты инерции относительно 3 главных осей инерции.

Кинетический момент абсолютно твёрдого тела при сферическом движении

$$\vec{K}_O = \int_V \vec{r} \times \vec{v} dm = \int_V \vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}] dm =$$
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$
$$= \int_V \vec{\omega} r^2 - \vec{r}(\vec{r}\vec{\omega}) dm$$
$$K_{OX} = \int_V \omega_x(x^2 + y^2 + z^2) - x(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) dm =$$
$$= \int_V \omega_x x^2 + \omega_x y^2 + \omega_x z^2 - \omega_x x^2 - xy\omega_y - xz\omega_z dm =$$
$$= \omega_x \int_V (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int_V xy dm - \omega_z \int_V xz dm$$
$$K_{OX} = I_{OX}\omega_x - I_{Oxy}\omega_y - I_{Oxz}\omega_z$$
$$\vec{K}_O = \hat{I_O}\vec{\omega}$$

Уравнение движения абсолютно твёрдого тела в частных и в общем случае движения
Поступательное:

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{F}^{(e)}$$

Вращательное:

$$I_{Oz}\ddot{\varphi} = \sum M_{Oz}(\vec{F}^{(e)})$$

Плоское:

$$n = 3$$
$$x_C, y_C, \varphi$$
$$\begin{cases} Mx_c = \sum F_x^{(e)} \\ My_c = \sum F_y^{(e)} \\ I_{cz}\ddot{\varphi} = \sum M_{cz}(\vec{F}^{(e)}) \end{cases}$$

Сферическое:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}^{(e)})$$

Выберем подвижную систему координат, связанную с телом.

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{K}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_O$$
$$\frac{\tilde{d}\vec{K}_O}{dt} = \hat{I}_O\vec{r}$$

Выделяем главные оси инерции. В такой системе отсчёта матрица тензора инерции будет диагональной.

$$\vec{K}_O(A\omega_x, B\omega_y, C\omega_z)$$
$$\hat{I}_O\vec{r} = (A\dot{\omega}_x, B\dot{\omega}_y, C\dot{\omega}_z)$$
$$\omega \times K_{\vec{o}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ A\omega_x & B\omega_y & C\omega_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (C-B)\omega_y\omega_z \\ (A-C)\omega_x\omega_z \\ (B-A)\omega_x\omega_y \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} A\frac{d\omega_x}{dt} + (C-B)\omega_y\omega_z = \sum M_{Ox}(\vec{F}^{(e)}) \\ B\frac{d\omega_y}{dt} + (A-C)\omega_x\omega_z = \sum M_{Oy}(\vec{F}^{(e)}) \\ C\frac{d\omega_z}{dt} + (B-A)\omega_x\omega_y = \sum M_{Oy}(\vec{F}^{(e)}) \end{cases}$$

Это были динамические уравнение Эйлера
Случаи:
Волчок (Эйлер)
Тяжёлый волчок (момент силы тяжести) (Лагранж)

некоторое соотношение между моментами (Ковалевская)

Общий случай движения:

n=6

Теорема об изменении движения

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}^{(e)} = M\vec{a}_C$$

Теорема об изменении кинетического момента относительно центра масс

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \sum \vec{M}_C(\vec{F}^{(e)})$$

Вычисление моментов инерции для основных симметричных моментов тел

1. Стержень

$$\rho_l = \text{const}, m, l$$
$$I_{Cx} = 0$$
$$I_{cy} = I_{cz} = I_{Oz} - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12}$$

2. Диск

$$I_{Cz} = \frac{mr^2}{2}$$
$$I_{Cx} + I_{Cy} + I_{cz} = 2I_C$$
$$I_C = \int_V \rho_C^2 dm = \int_V \rho_{Cz}^2 dm = I_{Cz}$$
$$I_{cx} = I_{cy} \Rightarrow 2I_{cx} = 2I_{cz} - I_{cz} = I_{cz}$$
$$I_{cx} = I_{cy} = \frac{mr^2}{4}$$

   Это главные оси инерции 100%

3. Шар

$$R, m, \rho = \rho_V = \text{const}$$
$$I_{cx} = I_{cy} = I_{cz} = \frac{2}{3}I_C$$
$$I_C = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV = \int_0^R r^2 \rho 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho \int_0^R r^4 dr = \frac{4}{5}\pi\rho R^5 = \frac{3}{5}mR^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow dV = 4\pi R^2 dR = SdR$$
$$I_{cx} = I_{cy} = I_{cz} = \frac{2}{5}mR^2$$