Прошлый семестр:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_0 & \vec{p}_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_0 & \vec{p}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}'_0 & \vec{p}'_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_0 & \vec{p}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} ()$$

Стихно

11/02/2025

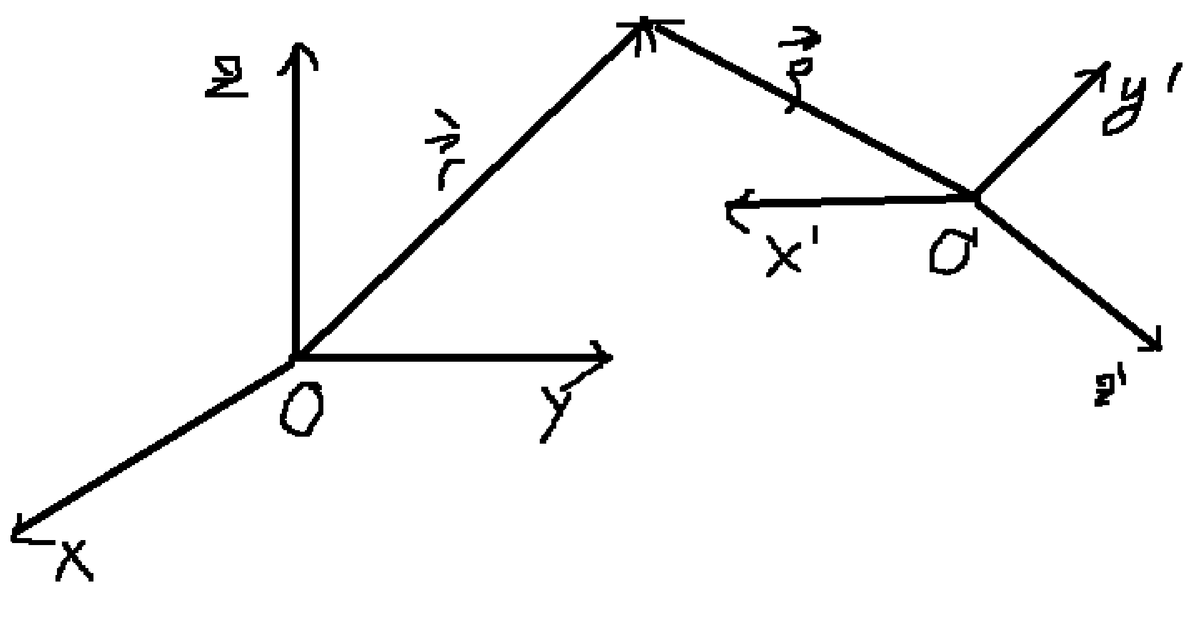
Переписать из тетради

18/02/2025

В инерциальной СО: $m\vec{a} = \sum \vec{F}$

Движение точки в неинерциальной системе отсчёта.

Неинерциальной системой отсчёта называют систему отсчёта, в которой не выполняется закон инерции



$$\vec{a} = \vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_K}$$
$$\vec{a_e} = \vec{a_{O'}} + \vec{\varepsilon_e} \times \vec{\rho} + \vec{\omega_e} \times (\vec{\omega_e} \times \vec{\rho})$$
$$\vec{a_K} = 2(\vec{\omega_e} \times \vec{V_r})$$
$$m(\vec{a_r} + \vec{a_e} + \vec{a_K}) = \Sigma F$$
$$m\vec{a_r} = \Sigma F - m\vec{a_e} - m\vec{a_K}$$
$$\vec{\varPhi_e} = -m\vec{a_e} \text{ - переносная сила инерции}$$
$$\vec{\varPhi_K} = -m\vec{a_K} \text{ - сила инерции Кориолиса}$$
$$m\vec{a_r} = \Sigma F + \vec{\varPhi_e} + \vec{\varPhi_K}$$

$\vec{\varPhi_K} = 0$? $\rightarrow \vec{\omega_e} = 0$

$\vec{\omega_e} = 0$

$\vec{\varPhi_e} = 0$? $\rightarrow$ $\vec{\varepsilon_e} = 0$

$\vec{a_{O'}} = 0$

Критерий неинерциальности системы отсчёта:

Если система отсчёта движется с ускорением или вращается относительно любой инерцианльой системы отсчёта, то такая система будет неинерциальной.

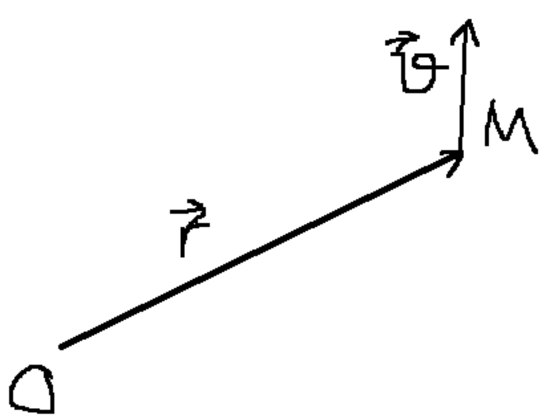
Относительный покой материальной точки в неинерциальной системе отсчёта.

Условие покоя:

$$\vec{V_r} \equiv 0$$
$$\vec{a_r} \equiv 0$$
$$0 = \sum \vec{F} + \vec{\varPhi_e}$$

Движение материальной точки под действием центральной силы

$$\vec{F} \text{ - центральная, если она коллинеарна радиус-вектору}$$
$$\vec{F} = f(\vec{r})\vec{r}$$

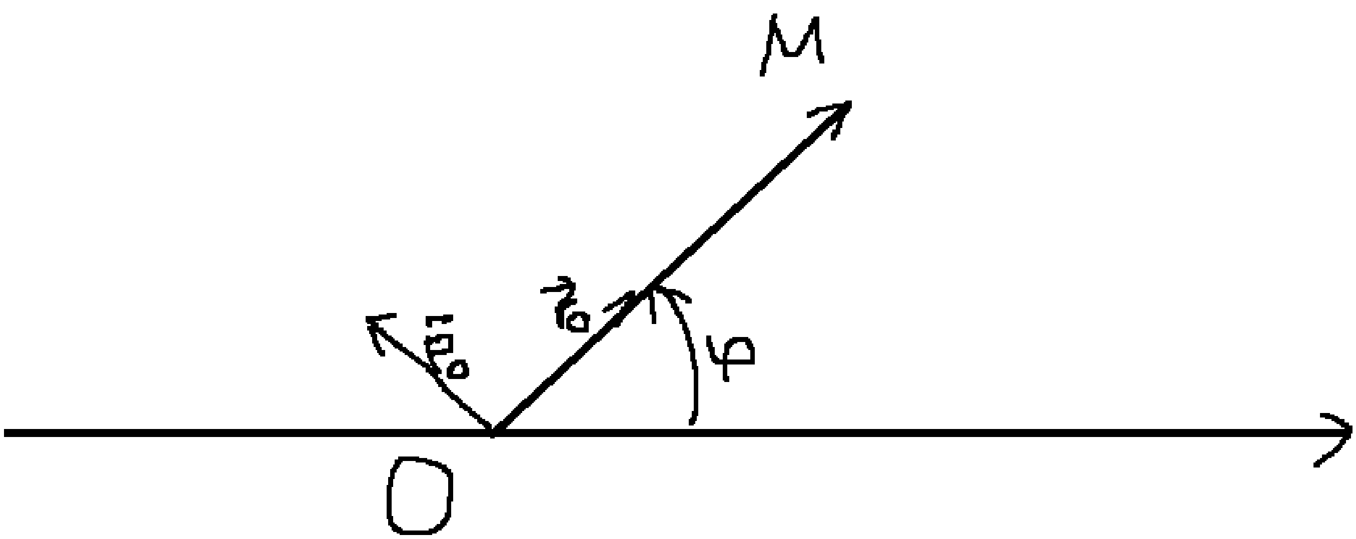


$$m\vec{a} = \vec{F}$$

1. Траектория точки, которая движется только под действием центральной силы - плоская кривая

   \begin{gather} \pi \{ \vec{r} ,\vec{V}\}, \ \ \vec{r}\cancel{ \parallel } \vec{V} \\ \vec{n}=\frac{\vec{r}\ti

\end{gather}$$
Введём полярную ось



$$\begin{gathered} a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ a_p = r\dot{r} + r\ddot{\varphi} \end{gathered}$$

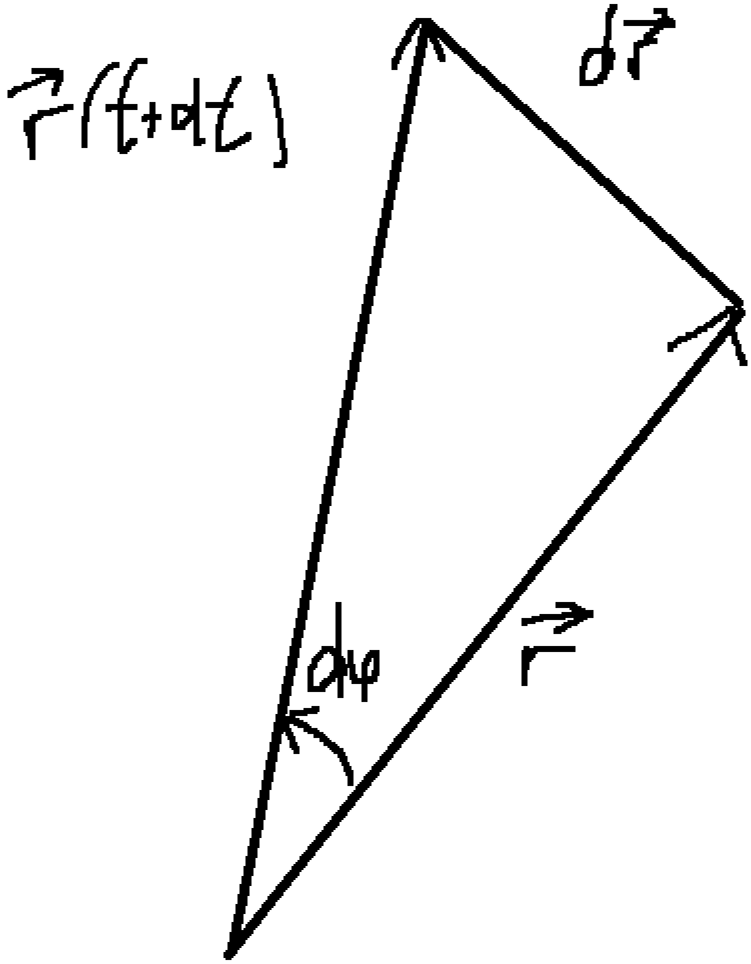
$$\begin{gathered} \vec{r_0}: \ m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f(\vec{r})\vec{r} \\ \vec{p_0}: \ m(r\dot{r} + \ddot{\varphi}) = 0 \end{gathered}$$

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \qquad \rightarrow 2dr \cdot \dot{\varphi} + 2d\dot{\varphi} = 0$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}$$

$$\begin{gathered} \frac{2dr}{r} = -\frac{d\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \\ 2\ln r = -\ln|\dot{\varphi}| + C \\ r^2 = \frac{C_1}{|\dot{\varphi}|} \\ |\dot{\varphi}|r^2 = C_1 \end{gathered}$$



$$dS = \frac{1}{2}|d\vec{r}|h$$
$$h \approx r$$
$$|d\vec{r}| \approx rd\varphi$$
$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi \implies$$
$$\dot{S} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = C \text{ - интеграл площадей. Закон Кеплера}$$

Движение несвободной материальной точки

Движение точки называется несвободным когда на параметры её движения наложены некоторые ограничения. Такие ограничения, связывающие координаты и скорости точки, называются связи. Это ограничение в общем виде можно представить в виде уравнения или неравенства.

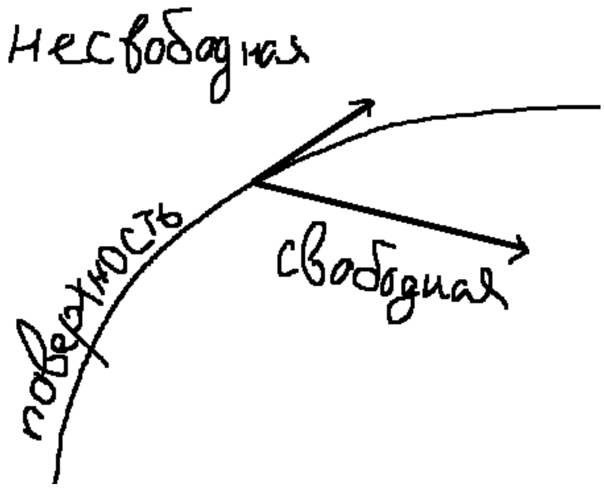
$f(x,y,z)=0$ - точка находится в поверхности

$\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ - точка находится на кривой

$$m\vec{a}=\Sigma\vec{F}$$

$$\begin{cases} m\vec{a}=\Sigma\vec{F} \\ f(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Решается через множитель Лагранжа.



Связь называется идеальной, если прибавка к ускорению будет направлена по нормали к поверхности в данной точке.

$$\vec{n}=\frac{gr\vec{a}d(f)}{|gr\vec{a}d(f)|}$$

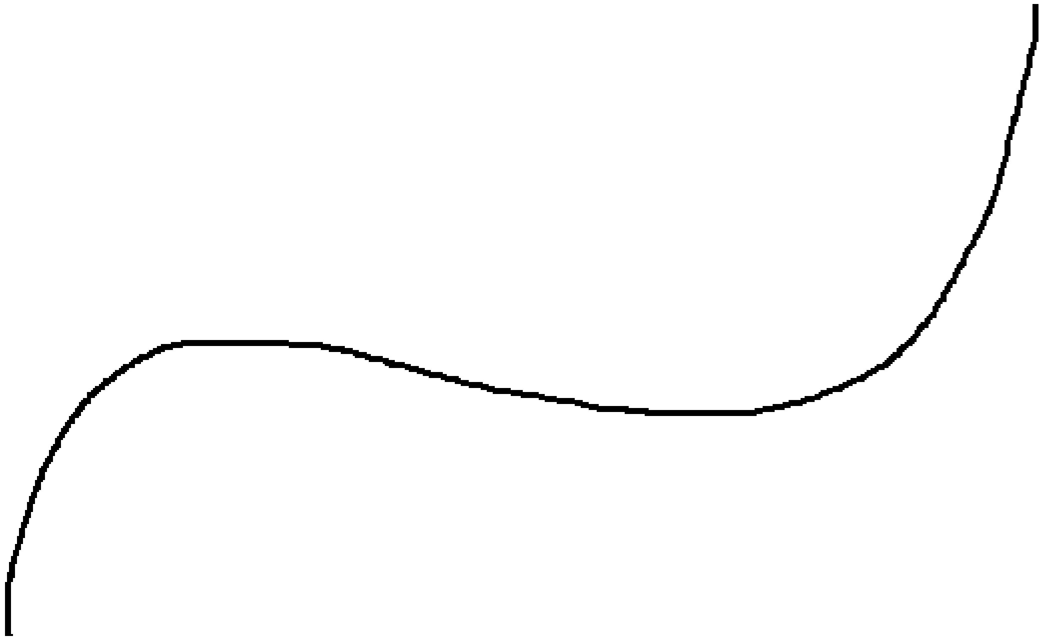
$$\begin{cases} m\vec{a}=\Sigma\vec{F}+\lambda'\vec{n} \\ f(x,y,z)=0 \end{cases}$$

$$\vec{N}=\lambda'\vec{n}=\lambda gr\vec{a}d(f)$$

$$gr\vec{a}d(f)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}=\Sigma F_x+\lambda\frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y}=\Sigma F_y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y} \\ m\ddot{z}=\Sigma F_z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z} \\ f(x,y,z)=0 \end{cases}$$

$$x,y,z,\lambda$$



$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \end{cases}$$

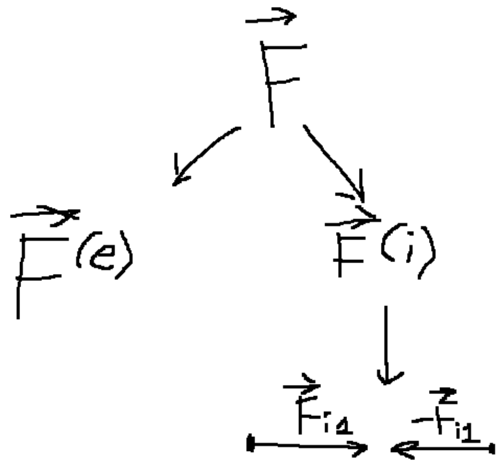
$$\begin{cases} m\ddot{x} = \Sigma F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ m\ddot{y} = \Sigma F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ m\ddot{z} = \Sigma F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

На экзамене не будет: 2 важных постулата ОТО:

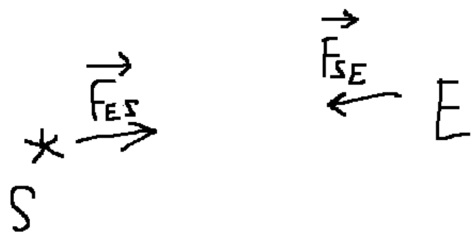
1. Гравитация - инерционная сила
2. Чем быстрее движется точка, тем она "менее свободна"
   Сила инерции ~ массе тела (инерционной)
   Сила притяжения ~ массе тела (гравитационной)
   Мб сила притяжения - сила инерции???
   Геометрия пространства эквивалентна силе

25/02/2025

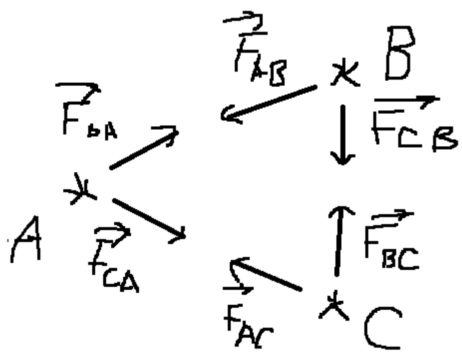
Механическая*система - совокупнось материальных точек, чьё движение рассматривается совместно.*
*Внешние*силы - силы, которые действуют на точки системы со стороны тел, внешних по отношению системе объектов.
Внутренние*силы - силы взаимодействия между точками механической системы.*



$$\vec{R}^{(i)}=\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{j}^{(i)}=\vec{0}$$



$$\begin{cases} m_S\vec{a}_S=\vec{F}_{ES} \\ m_E\vec{a}_E=\vec{F}_{SE} \end{cases}$$

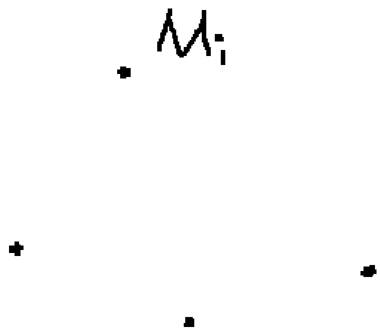


Алгебраического решения для задачи 3х тел не существует.

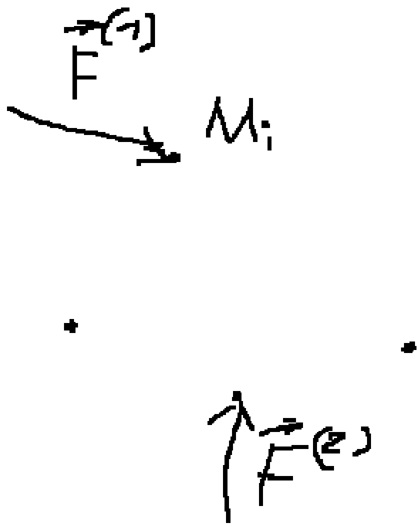
Поиск общих теорем динамики.

Общие теоремы динамики

1. $i = 1 \ldots n$



2. Инерциальная система отсчёта



$m_i\vec{a}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} = \vec{F}_i^{(\text{в})} + \vec{F}_i^{(\text{i})}$

\begin{gather} \sum _{i}m_{i}\vec{a}_{i}=\sum _{i,j}\vec{F}_{ij}=\sum _{i}\vec{F}_{i}^{(\text{в})}+

\end{gather}

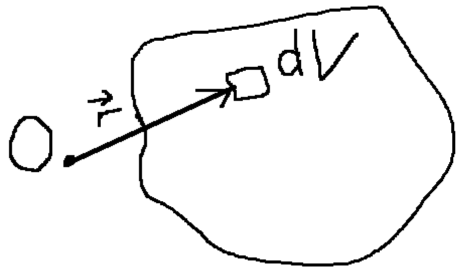
Определение : Центрмассмеханическойсистемы − материальнаяточка, срадиус − вектором, который

\vec{r}*{C}*= *frac*{*sum*{i} m*{i}**vec*{*r*}{i}}{\sum m_{i}}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} : \vec{a}_C = \frac{\sum_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i}$$
$$M\vec{a}_C = \vec{R}^{(\text{в})}, \text{ где } M = \sum_i m_i$$

Теорема о движении центра масс механической системы.
Центр масс механической системы движется так же, как двигалась бы материальная точка, с массой, равной суммарной массе системы, под действием только внешних сил,

приложенных к системе.



$$\vec{r}_C = \frac{\iiint_V \vec{r} \cdot \rho dV}{\iiint_V \rho dV} = \frac{\iiint_V \vec{r} \rho dV}{M}$$

Векторный момент первого порядка.

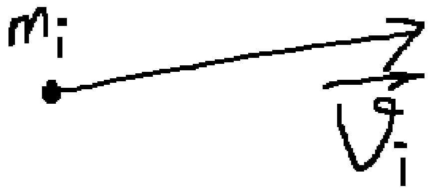
Частный случай: Пусть $\vec{R}^{(\text{в})} = 0$

$$M\vec{a}_C = 0 \Rightarrow \vec{V}_C = co\vec{n}st$$

$$\vec{V}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{\sum_i m_i} = co\vec{n}st$$

Определение.

Пусть есть точка массой m, которая движется со скоростью $\vec{V}$.



Количество движения материальной точки - произведение её массы на её скорость.

$$\vec{q} = m_i \vec{V}_i$$

Разница с импульсом - импульс определен и для неньютоновской механики.

Количество движения механической системы - сумма количеств движения точек системы.

Для счётного случая:

$$\vec{Q} = \sum_i \vec{q}_i$$

Для несчётного:

$$\vec{Q} = \iiint_V \vec{v} \rho dV$$

$$M\vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{Q}$$

$$M\vec{a} = \vec{R}^{(\text{е})}$$

$$M\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{v_C})$$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(\text{в})}$$

Теорема об изменении количества движения механической системы

Изменение со временем количества движения механической системы соответствует главному вектору системы внешних сил.

Пусть главный вектор системы внешних сил = 0. $\vec{R}^{(\text{в})} = 0$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{Q} = c\vec{on}st$$

Теорема об изменении количества движения механической ссиtемы в интегральной форме

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_i \vec{F}^{(\text{в})}$$

$$d\vec{Q} = \sum_i \vec{F}^{(\text{в})} dt$$

$$d\vec{s} = \vec{F} dt$$

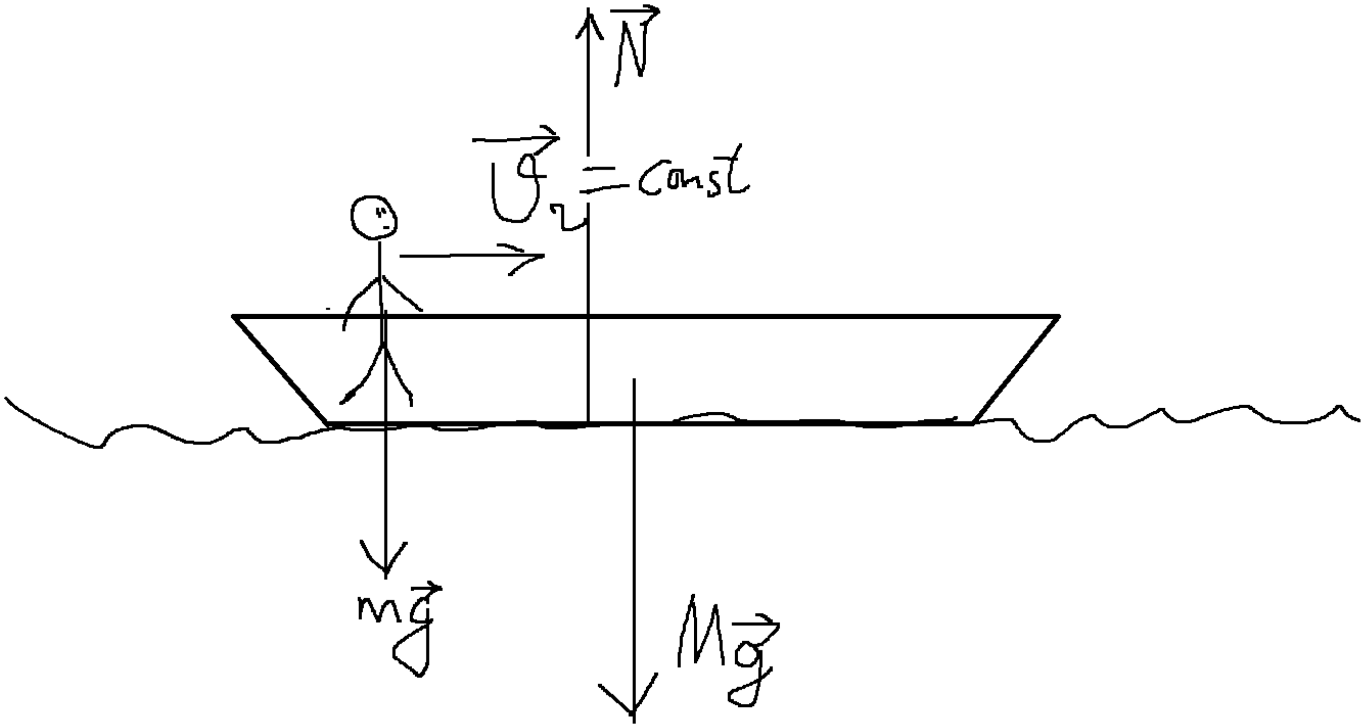
Элементарным импульсом силы $\vec{s}$ будем называть векторную величину на дифференциал времени

Полный импульс силы - интеграл от элементарного импульса силы на определённом промежутке времени

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(\tau) d\tau$$

$$\vec{Q}_\text{к} - \vec{Q}_\text{н} = \sum_i \vec{S}^{(\text{в})}$$

Теорема об изменении количества движения в импульсной форме



$$M_C\vec{a}_C = m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{N}$$
$$x: M_C a_C^x = 0 \Rightarrow$$
$$M_C V_C^x = const$$
$$\text{Пусть } V_C|_{t=0} = 0 \ \Rightarrow$$
$$v_{\text{цм}}^x = 0$$
$$Q^x = 0 \implies$$
$$Q^x = Q_{\text{л}}^x + Q_{\text{ч}}^x$$
$$\vec{v}_ч = \vec{v}_л + \vec{v}_r, \text{ где } \vec{v}_{\text{л}} = \vec{v}_e$$
$$Q^x = M(-V_{\text{л}}) + m(-V_{\text{л}} + V_{\text{ч}})$$
$$mV_{\text{ч}} - (m+M)V_{\text{л}} = 0$$
$$V_{\text{л}} = \frac{m}{m+M}V_{\text{ч}}$$

04/03/2025

$$m_i\vec{a}_i = \sum \vec{F}_{ij}$$

Рассмотрим инерциальную систему отсчёта и точку O, неподвижную в этой истеме отсчёта

Для каждой точки введём радиус-вектор $\vec{r}_i$.

$$\vec{r}_i \times m_i\vec{a}_i = \sum_j \vec{r}_i \times \vec{F}_{iO} = \sum_j \vec{M}_O(\vec{F}_{ij})$$

Кинетический момент (момент количества движения) относительно некоторого полюса - векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора этой точки M_i

относительно исходного полюса, умноженного на количество движения этой точки

$$\vec{K}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{r}_i \times \vec{q}_i$$

$$\frac{d\vec{K}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \cancelto{0}{(\vec{v}_i \times m\vec{v}_i)} + (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i)$$

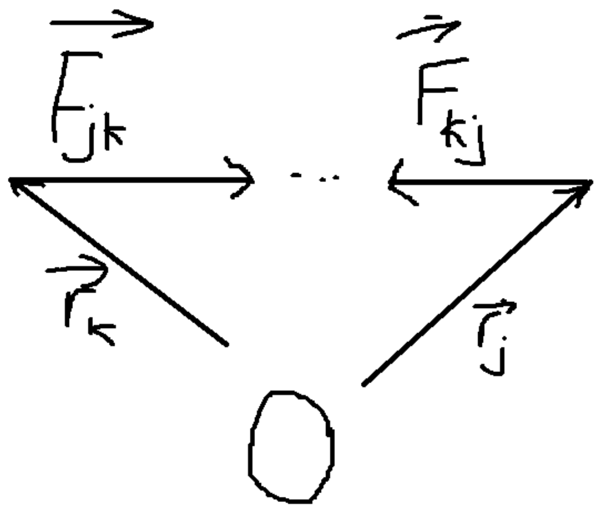
$$\frac{d\vec{K}_i}{dt} = \sum_j \vec{M}_O(\vec{F}_{ij})$$

Кинетический момент системы относительно полюса O

$$\vec{K}^O = \sum_i \vec{K}_i^O = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{q}_i = \sum_i \vec{M}^O(\vec{F}_i)$$

$$\frac{d\vec{K}^O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{r}_{i \times m_i \vec{v}_i}\right) = \sum_i [\cancelto{0}{(\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i)} + (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i)]$$

$$\frac{d\vec{K}^O}{dt} = \sum_{ij} \vec{M}^O(\vec{F}_{iO}) = \sum \vec{M}_O \vec{F}^{\text{внеш}} + \sum \vec{M}_O \vec{F}^{\text{внутр}}$$



$$\vec{L}_O(\vec{F}_{jk}^{(i)}, \vec{F}_{kj}^{(i)}) = \vec{r}_k \times \vec{F}_{jk}^{(i)} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{kj}^{(i)} \Rightarrow$$

$$\vec{r}_j = \vec{r}_k + \overrightarrow{M_k M_j}$$

$$\vec{L}_O(\vec{F}_{jk}^{(i)} \vec{F}_{kj}^{(i)}) = 0$$

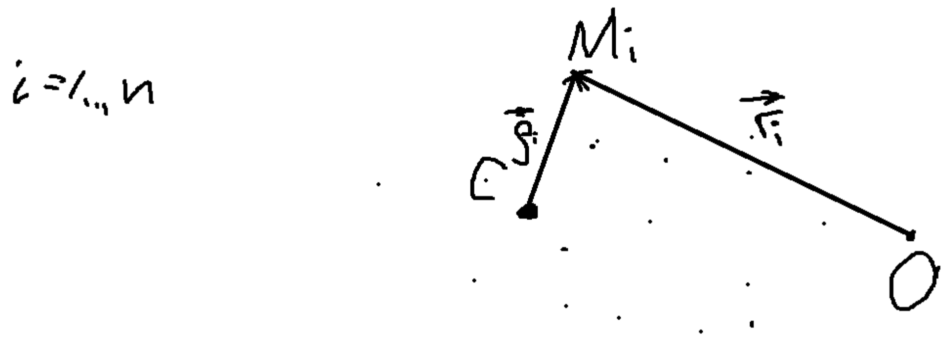
$$\frac{d\vec{K}^O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}^{\text{внеш}})$$

Уравнение описывает вращение системы относительно O.

Законы сохранения вектора кинетической энергии.

Кинетический момент механической системы в её относительном движении относительно центра масс механической системы

$\vec{K}$ относительного движения

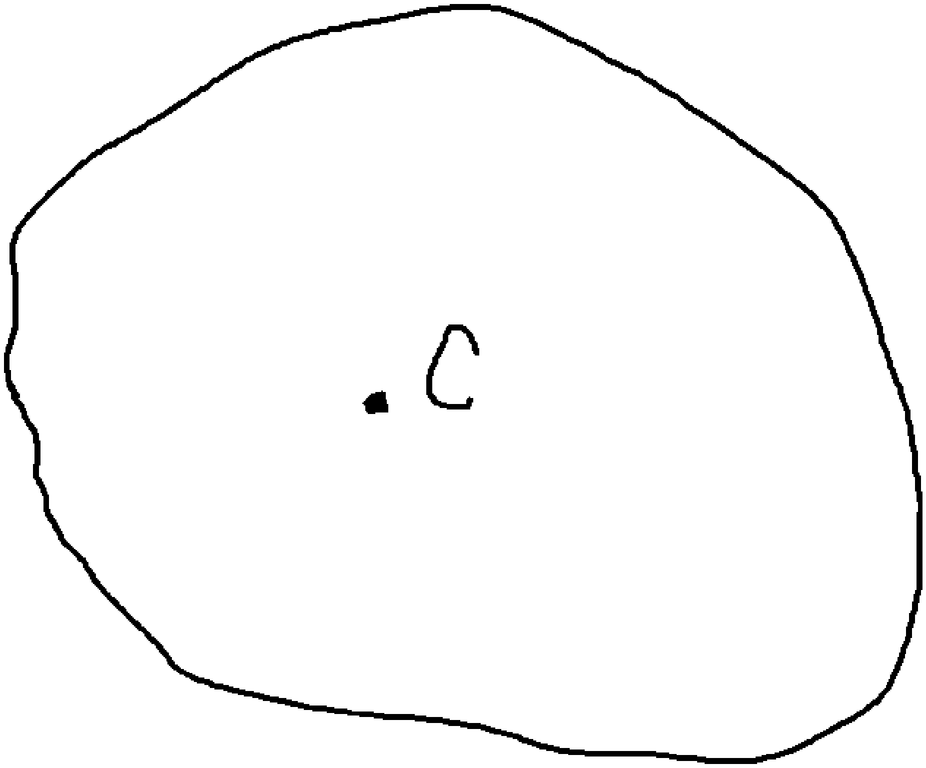


Кёнигова система отсчёта - подвижная система отсчёта, с осями координат параллельными инерациальной системе отсчёта и с центром, связанным с центром масс механической системы.

$$\vec{K}^O = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i =$$
$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$$
$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_i^{(r)}$$
$$= \sum (\vec{r}_C + \vec{\rho}_i) \times m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_i^{(r)}) =$$
$$= \sum \vec{r}_C \times m_i \vec{v}_C + \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_C + \sum \vec{r}_C \times m_i \vec{v}_i^{(r)} + \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i^{(r)} =$$
$$= \vec{r}_C \times M \vec{v}_C + \cancelto{0}{\left[\sum m_i \vec{\rho}_i\right]} \times \vec{v}_C + \vec{r}_C \times \cancelto{0}{\sum m_i \vec{v}_i^{(r)}} + \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i^{(r)} =$$
$$= \vec{M}_O(\vec{Q}) + 0 + 0 + \vec{K}_C^{(r)}$$
$$\vec{K}^O = \vec{K}_C^{(r)} + \vec{M}_O(\vec{Q})$$

Применение теоремы об изменении кинетического момента в случае, если в системе несчётное число точек.

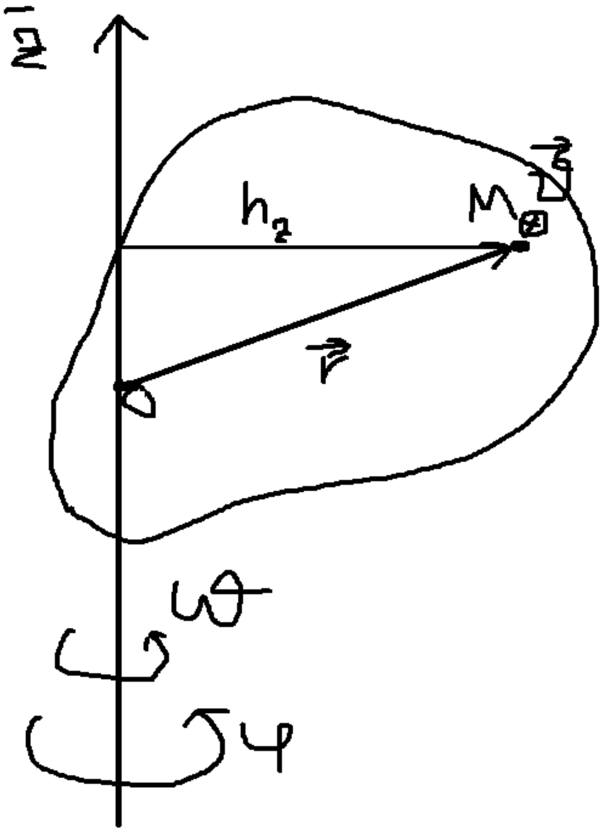
Уравнение поступательного движения абсолютно твёрдого тела



$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = M\vec{a}_C = \sum \vec{F}^{(e)}$$

$$\begin{cases} M\ddot{x} = \sum F_x^{(e)} \\ M\ddot{y} = \sum F_y^{(e)} \\ M\ddot{z} = \sum F_z^{(e)} \end{cases}$$

Вращательное движение



$$\vec{K}_O = \int_V \vec{r} \times dm\vec{v} = \int_V \vec{r} \times \vec{v}\rho dV$$

$$K_{Oz} = \int_V h_z \cdot \omega_z h_z dm$$
$$K_{Oz} = \omega_z \int_V h_z^2 dm$$

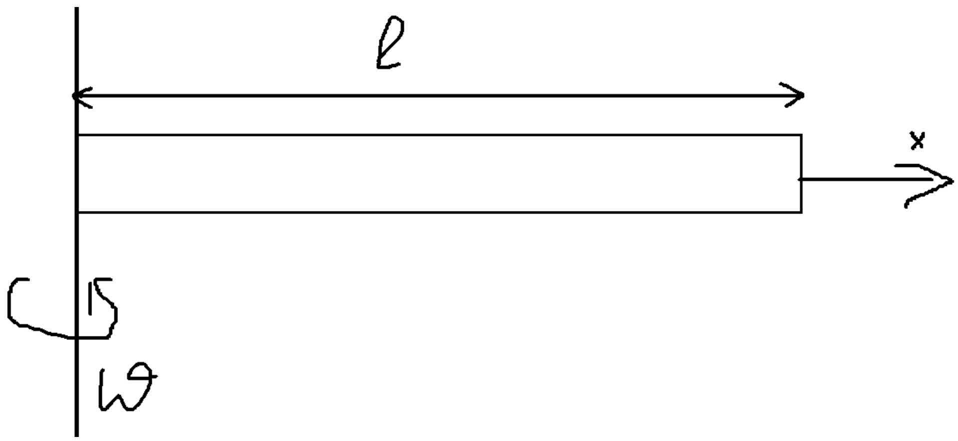
Момент инерции твёрдого тела относительно оси z называется следующий интеграл:

$$I_Z = \int_V h_z^2 dm$$

$$K_{Oz} = I_z \omega_z$$

$$\frac{dK_{Oz}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \dot{\varphi}) = I_z \ddot{\varphi} = \sum M_{Oz}(\vec{F}^{(e)})$$
$$I_z \ddot{\varphi} = \sum M_{Oz}(\vec{F}^{(e)})$$

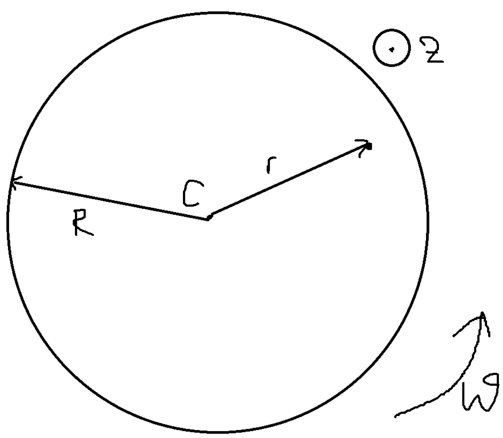
Примеры подсчёта моментов инерции:



$$\rho_l = \frac{dm}{dl}, \text{здесь } \rho_l = \text{const}$$

$$I_z = \int_0^l x^2 \rho_l dx = \frac{\rho_l l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

Дома: момент инерции стержня относительно своей середины



$$\rho_S = \frac{dm}{dS} = \text{const}$$

$$I_z = \int_S r^2 \rho_S dS = \begin{bmatrix} S(r) = \pi r^2 \\ dS = 2\pi r \end{bmatrix} = \int_0^l r^2 \rho_S \cdot 2\pi r dr =$$

$$= 2\pi \rho_S \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

для колечка $I_z = mR^2$