Пример 1

Найдем объем выборки, обеспечивающий при решении задачи о различении гипотез о параметре показательного закона ошибки $\alpha = 0.05$ и $\beta = 0.05$.

$H_0 : \lambda = \lambda_0 = \frac{1}{3}$

$H_1 : \lambda = \lambda_1 = \frac{5}{11}$

Согласно критерию Неймана-Пирсона, так как $\lambda_1 > \lambda_0$ $S = \left(\bar{X} \le C\right)$. Использовать статистику $2\lambda_0 n\bar{X} \sim \chi^2(2n)$ из прошлого примера здесь не целесообразно так как получится трансцендентное уравнение (неизвестная n будет являться параметром распределения), Поэтому воспользуемся центральной предельной теоремой.

Числовые характеристики показательного распределения имеют вид

$$MX_i = \frac{1}{\lambda} \qquad DX_i = \frac{1}{\lambda^2}$$

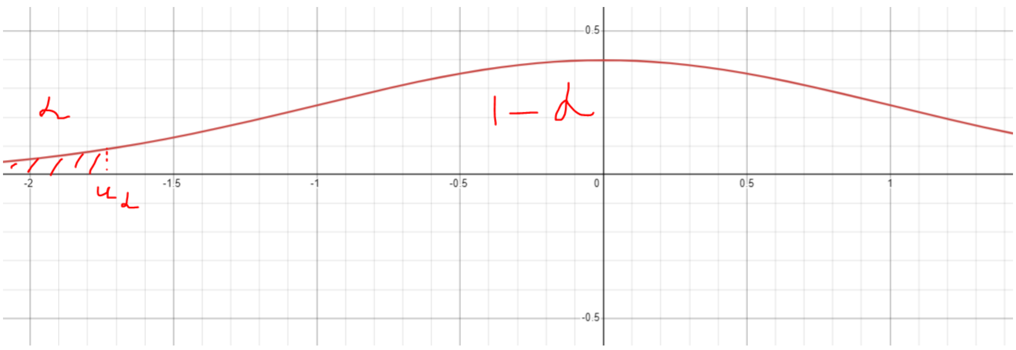
Тогда по центральной предельной теореме

$$\bar{X} \sim N\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda\sqrt{n}}\right)$$

$$\frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}}\sqrt{n} \sim N(0,1)\, \bar{X} \sim N\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda\sqrt{n}}\right)$$

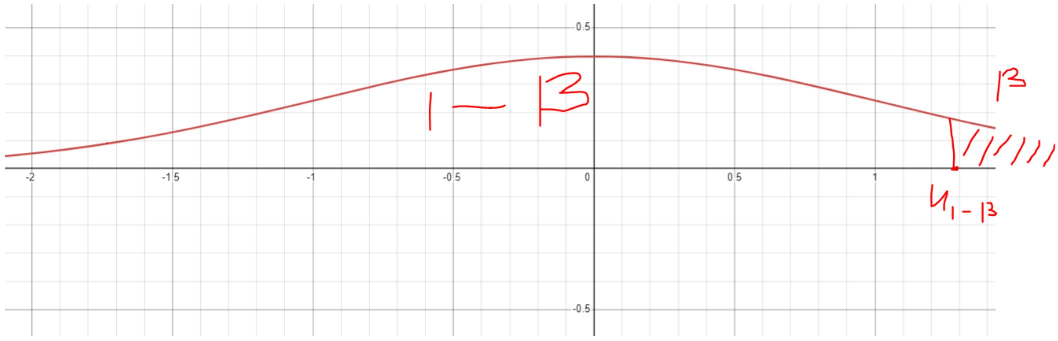
Тогда по определению ошибок первого и второго рода можно записать

$$\alpha = P\left(\bar{X} \in S \middle| H_0\right) = P\left(\bar{X} \le C \middle| H_0\right) = P\left(\frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda_0}}{\frac{1}{\lambda_0}}\sqrt{n} \le \frac{C - \frac{1}{\lambda_0}}{\frac{1}{\lambda_0}}\right) \approx \Phi\left(\left(C\lambda_0 - 1\right)\sqrt{n}\right)$$



$$\beta = P\left(\bar{X} \notin S \middle| H_1\right) = P\left(\bar{X} > C \middle| H_1\right) = P\left(\frac{\bar{X} - \frac{1}{\lambda_1}}{\frac{1}{\lambda_1}} > \frac{C - \frac{1}{\lambda_1}}{\frac{1}{\lambda_1}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\left(C\lambda_1 - 1\right)\sqrt{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\left(C\lambda_1 - 1\right)\sqrt{n}\right) = 1 - \beta$$



Находим квантили нормального распределения уровня $1-\beta$ и α и решаем систему:

$$\begin{cases} C\lambda_0\sqrt{n} - \sqrt{n} = u_\alpha \\ C\lambda_1\sqrt{n} - \sqrt{n} = u_{1-\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{n} = \dfrac{u_{1-\beta}\lambda_0 - u_\alpha\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_0} \\ C = \dfrac{\sqrt{n} + u_\alpha}{\lambda_0\sqrt{n}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \approx 115 \\ C = 2.538 \end{cases}$$

Таким образом критическое множество имеет вид $S = \left(\bar{X} \le 2.538\right)$ и при $n \approx 115$ достигаются заданные ошибки первого и второго рода

Пример 2

Найти критическое множество и объём выборки, обеспечивающий при решении задачи о различении гипотез о параметре распределения Бернулли ошибки $\alpha = 0.01$ и $\beta = 0.05$, если гипотезы имеют вид

$$H_0 : p = 0.1 = p_0$$
$$H_1 : p = 0.2 = p_1$$

Согласно критерию Неймана-Пирсона, если $p_1 > p_0$, то критическое множество имеет вид $S = \left(\bar{X} \ge C\right)$. При больших n можем воспользоваться центральной предельной теоремой. Числовые характеристики распределения Бернулли имеют вид

$$MX_i = p \qquad DX_i = p(1-p)$$

Тогда по центральной предельной теореме

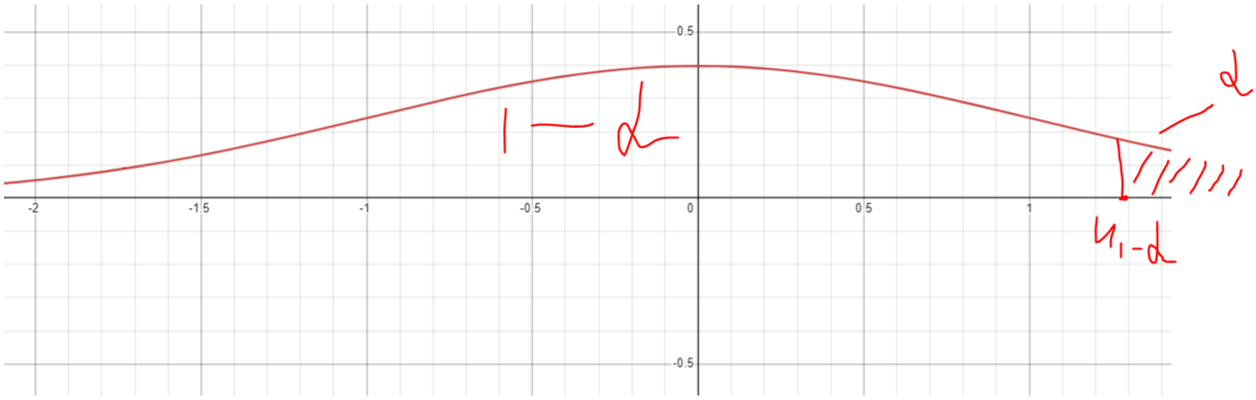
$$\bar{X} \sim N\left(p, \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\frac{\bar{X}-p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$$

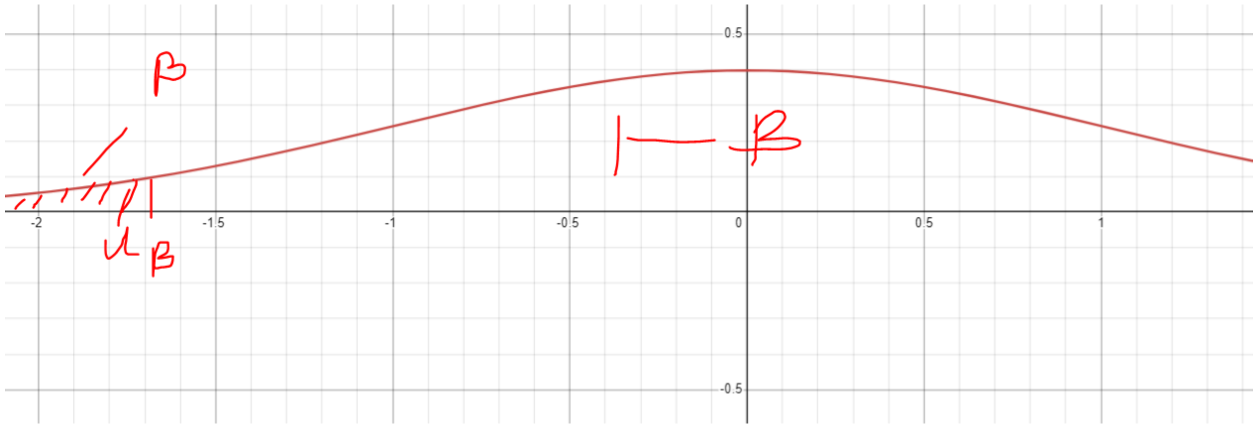
Тогда по определению ошибок первого и второго рода можно записать

$$\alpha = P\left(\bar{X} \geq C \middle| H_0\right) = P\left(\frac{\bar{X}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} \geq \frac{C-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}\right) \approx 1-\Phi\left(\frac{C-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{C-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}\right) = 1-\alpha$$



$$\beta = P\left(\bar{X} < C \middle| H_1\right) = P\left(\frac{\bar{X}-p_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\sqrt{n} < \frac{C-p_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\sqrt{n}\right) \approx \Phi\left(\frac{C-p_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\sqrt{n}\right)$$



Находим квантили нормального распределения уровня $1-\alpha$ и β и решаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{C-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}=u_{1-\alpha} \\ \dfrac{C-p_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)}}\sqrt{n}=u_{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C\sqrt{n}=p_0\sqrt{n}+u_{1-\alpha}\sqrt{p_0(1-p_0)} \\ C\sqrt{n}=p_1\sqrt{n}+u_{\beta}\sqrt{p_1(1-p_1)} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \sqrt{n}=\dfrac{u_{1-\alpha}\sqrt{p_0(1-p_0)}-u_{\beta}\sqrt{p_1(1-p_1)}}{p_1-p_0} \\ C=p_0+u_{1-\alpha}\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n\approx 184 \\ C=0.151 \end{cases}$$

Таким образом критическое множество имеет вид $S=(\bar{X}\geq 0.151)$ и при $n\approx 184$

достигаются заданные ошибки первого и второго рода

Пример 3

Найти критическое множество и объём выборки, обеспечивающий при решении задачи о различении гипотез о параметре нормального, значения ошибок $\alpha=0.02$, если $\sigma=0.5$ известно. Гипотезы имеют вид

$H_0: a=a_0=1$

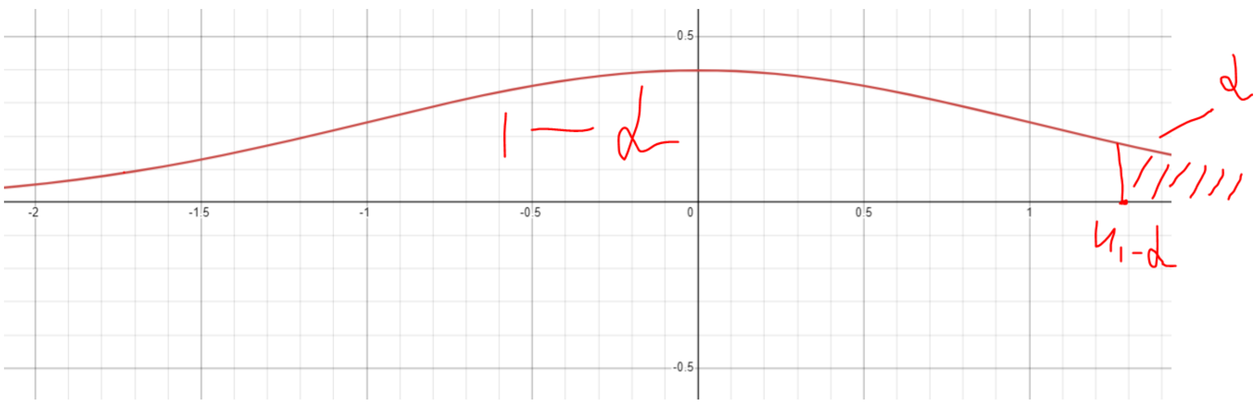
$H_1: a=a_1=1.2$ Согласно критерию Неймана-Пирсона критическое множество имеет

вид $S=(\bar{X}\geq C)$. Тогда по определению ошибок первого и второго рода можно

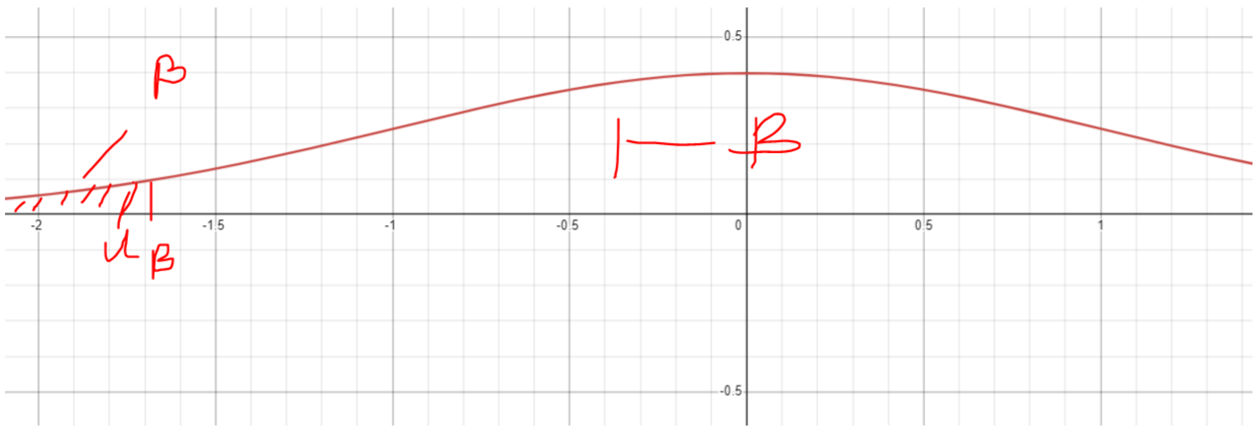
записать

$$\alpha=P(\bar{X}\geq C|H_0)=P\left(\frac{\bar{X}-a_0}{\sigma}\sqrt{n}\geq\frac{C-a_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\approx 1-\Phi\left(\frac{C-a_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{C-a_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)=1-\alpha$$



$$\beta = P\left(\bar{X} < C \middle| H_1\right) = P\left(\frac{\bar{X} - a_1}{\sigma}\sqrt{n} < \frac{C - a_1}{\sigma}\sqrt{n}\right) \approx \Phi\left(\frac{C - a_1}{\sigma}\sqrt{n}\right)$$



Находим квантили нормального распределения уровня $1-\alpha$ и β и решаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{C - a_0}{\sigma}\sqrt{n} = u_{1-\alpha} \\ \dfrac{C - a_1}{\sigma}\sqrt{n} = u_{\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = a_0 + \dfrac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}\sigma \\ C = a_1 + \dfrac{u_{\beta}}{\sqrt{n}}\sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{n} = \dfrac{\left(u_{1-\alpha} - u_{\beta}\right)\sigma}{a_1 - a} \\ C = a_0 + \dfrac{u_{1-\alpha}}{u_{1-\alpha} - u_{\beta}}\left(a_1 - a\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \approx 86 \\ C = 1.111 \end{cases}.$$

Таким образом критическое множество имеет вид $S = \left(\bar{X} \geq 1.111\right)$ и при $n \approx 86$ достигаются заданные ошибки первого и второго рода

Критерий Вальда

Используя критерий Вальда найдите средний объём числа испытаний для принятия решения

Алгоритм решения

Рассмотрим задачу проверки гипотезы
H_0 : выборка из известного закона распределения с параметром $\theta = \theta_0$
H_1 : $\theta = \theta_1 \neq \theta_0$ - простая альтернатива

Идея: найти такие границы A и B, чтобы $B < z\left(\vec{X}_n\right) = \dfrac{L\left(\vec{X}_n, \theta_1\right)}{L\left(\vec{X}_n, \theta_0\right)} < A$

Положим $\nu = \min\left\{n : z\left(\vec{X}_n\right) \notin (B, A)\right\}$. , то есть статистикой критерия будет

последовательность $(\nu, X_1, \ldots X_\nu)$

Критерий: если $z\left(\vec{X}_\nu\right) \geq A$, то принимается H_1

Если $z\left(\vec{X}_\nu\right) \leq B$, то принимается H_0

Тогда ошибки первого и второго рода будут иметь вид

$$\alpha = P\left(z\left(\vec{X}_\nu\right) \geq A \mid H_0\right)$$

$$\beta = P\left(z\left(\vec{X}_\nu\right) \leq B \mid H_1\right)$$

Значения A и B для заданных ошибок первого и второго рода будем вычислять по формулам

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha}; B = \frac{\beta}{1-\alpha}.$$

Найдем математическое ожидание $M\nu$, имеющее смысл среднего числа испытаний до принятия решения.

Рассмотрим функцию $Y(x) = \ln \dfrac{p(x, \theta_1)}{p(x, \theta_0)}$ и статистики $Y_k = Y(X_k) = \ln \dfrac{p(X_k, \theta_1)}{p(X_k, \theta_0)}$

$$Z_n = \ln z\left(\vec{X}_n\right) = \ln \frac{L\left(\vec{X}_n, \theta_1\right)}{L\left(\vec{X}_n, \theta_0\right)} = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{p(X_k, \theta_1)}{p(X_k, \theta_0)} = \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

Тогда имеет место равенство

$$MZ_\nu = M\nu \cdot MY_k \qquad M\nu = \frac{MZ_\nu}{MY_k}$$

Найдем среднее число испытаний для принятия основной гипотезы $M_{\theta_0}\nu$ и альтернативной $M_{\theta_1}\nu$.

Так как при любой гипотезе момент ν является конечным, то отношение правдоподобия с вероятностью 1 пересечёт либо А либо В, тогда приближенно случайная величина Z_ν принимает значения $\ln A$ и $\ln B$

Если истинна H_0, то для статистики Z_ν вероятность принять значение $\ln A$ (принимается альтернатива, хотя верна основная гипотеза) равняется вероятности ошибки первого рода α, и вероятность принять значение $\ln B$ (принимается основная гипотеза, которая верна) равняется $1-\alpha$, тогда математическое ожидание имеет вид

$$M_{\theta_0}Z_\nu = \ln A\cdot\alpha + \ln B\cdot(1-\alpha) = \alpha\ln\frac{1-\beta}{\alpha} + (1-\alpha)\ln\frac{\beta}{1-\alpha}$$

Если истинна H_1, то для статистики Z_ν вероятность принять значение $\ln B$ (принимается основная гипотеза, хотя верна альтернатива) равняется вероятности ошибки второго рода β, и вероятность принять значение $\ln A$ (принимается альтернатива, которая верна) равняется $1-\beta$, тогда математическое ожидание имеет вид

$$M_{\theta_1}Z_\nu = \ln A\cdot(1-\beta) + \ln B\cdot\beta = (1-\beta)\ln\frac{1-\beta}{\alpha} + \beta\ln\frac{\beta}{1-\alpha}$$

Тогда средний объём числа испытаний для принятия решения имеет вид

$$M_{\theta_0}\nu = \frac{M_{\theta_0}Z_\nu}{M_{\theta_0}Y_k} = \frac{\alpha\ln\frac{1-\beta}{\alpha} + (1-\alpha)\ln\frac{\beta}{1-\alpha}}{M_{\theta_0}\ln\frac{p(X_k,\theta_1)}{p(X_k,\theta_0)}},$$

$$M_{\theta_1}\nu = \frac{M_{\theta_1}Z_\nu}{M_{\theta_1}Y_k} = \frac{(1-\beta)\ln\frac{1-\beta}{\alpha} + \beta\ln\frac{\beta}{1-\alpha}}{M_{\theta_1}\ln\frac{p(X_k,\theta_1)}{p(X_k,\theta_0)}}.$$

Критерий Вальда (SPRT) незаменим в ситуациях, когда важны скорость и экономия ресурсов:

Контроль качества на производстве.

Классический пример: Проверка партии товара на брак. Вместо проверки всей партии можно последовательно проверять отдельные единицы. Если первые же несколько изделий оказались бракованными, партию можно забраковать сразу. Если первые много изделий качественные, партию можно принять, не проверяя до конца. Это экономит время и деньги.

A/B тестирование в интернет-маркетинге и IT.

Позволяет обнаружить явного победителя (или проигравшего) между двумя версиями сайта/приложения на ранних этапах теста. Если новая версия (A) сразу показывает резкое падение конверсии, тест можно остановить, чтобы не терять деньги. И наоборот, если рост очевиден, можно быстрее внедрить успешное изменение.

Клинические испытания.

Этически важно как можно раньше остановить испытание, если становится ясно, что новое лекарство либо явно эффективно (чтобы начать лечить им контрольную группу), либо явно неэффективно или вредно (чтобы не подвергать пациентов риску).

Обнаружение сигналов и мониторинг в реальном времени.

Например, обнаружение изменения в потоке данных, мониторинг сетевого трафика на предмет аномалий или кибератак.

Пример 1

Построим критерий Вальда для различения гипотез

$H_0 : \lambda = \frac{1}{3}$

$H_1 : \lambda = \frac{5}{11}$

Для параметра λ показательного закона с ошибками $\alpha = 0.05$ и $\beta = 0.05$.

По формулам Вальда $A = \frac{1-\beta}{\alpha} = 19,\ B = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{1}{19}$

Математическое ожидание показательного распределения имеет вид $M\xi = \frac{1}{\lambda}$

Найдем математическое ожидание статистики Y_k

$$Y_k = \ln \frac{p(X_k, \theta_1)}{p(X_k, \theta_0)} = \ln \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 X_k}}{\lambda_0 e^{-\lambda_0 X_k}} = \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - (\lambda_1 - \lambda_0) X_k$$

Тогда для основной гипотезы получаем

$$M_{\lambda_0} Y_k = M_{\lambda_0} \left(\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - (\lambda_1 - \lambda_0) X_k \right) = \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} = -0.05348$$

Среднее число испытаний при условии H_0:

$$M_{\lambda_0} \nu = \frac{\alpha \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + (1-\alpha) \ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{M_{\lambda_0} \ln \frac{p(X_k, \theta_1)}{p(X_k, \theta_0)}} = \frac{-2.65}{-0.053} = 49.55$$

Аналогично находим среднее число испытаний для альтернативной гипотезы

$$M_{\lambda_1} Y_k = M_{\lambda_1} \left(\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - (\lambda_1 - \lambda_0) X_k \right) = \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_1} = 0.0435$$

$$M_{\lambda_1} \nu = \frac{(1-\beta) \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + \beta \ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{M_{\lambda_1} \ln \frac{p(X_k, \theta_1)}{p(X_k, \theta_0)}} = \frac{2.65}{0.0435} = 60.9$$

Замечание. Таким образом, среднее число испытаний в любом случае примерно в два раза меньше, чем для критерия Неймана-Пирсона.

Пример 2

Построим критерий Вальда для различения гипотез$ $H_0 : p = 0.1 = p_0$

$$H_1 : p = 0.2 = p_1$$

о значении вероятности успеха в схеме Бернулли с ошибками $\alpha = 0.01$ и $\beta = 0.05$.

По формулам Вальда

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha} = 95,\; B = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{5}{99}$$

Вероятность в распределении Бернулли можно записать в следующем виде

$$P(\xi = X_k) = p^{X_k}(1-p)^{1-X_k}$$

Математическое ожидание распределения Бернулли $M\xi = p$

Найдем математическое ожидание статистики Y_k

$$Y_k = \ln\frac{P_1(\xi = X_k)}{P_0(\xi = X_k)} = \ln\frac{p_1^{X_k}(1-p_1)^{1-X_k}}{p_0^{X_k}(1-p_0)^{1-X_k}} = X_k \ln\frac{p_1}{p_0} + (1-X_k)\ln\frac{1-p_1}{1-p_0}$$

Тогда для основной гипотезы получаем

$$M_{p_0}Y_k = p_0 \ln\frac{p_1}{p_0} + (1-p_0)\ln\frac{1-p_1}{1-p_0} = -0.0367$$

Среднее число испытаний при условии H_0:

$$M_{p_0}\nu = \frac{\alpha\ln\frac{1-\beta}{\alpha} + (1-\alpha)\ln\frac{\beta}{1-\alpha}}{M_0 Y_k} = \frac{-2.9103}{-0.0367} \approx 80$$

Аналогично находим среднее число испытаний для альтернативной гипотезы

$$M_{p_1}Y_k = p_1 \ln\frac{p_1}{p_0} + (1-p_1)\ln\frac{1-p_1}{1-p_0} = 0.0444$$

Среднее число испытаний при условии H_1:

$$M_{p_1}\nu = \frac{(1-\beta)\ln\frac{1-\beta}{\alpha} + \beta\ln\frac{\beta}{1-\alpha}}{M_{\lambda_1} Y_k} = \frac{4.1769}{0.04444} \approx 94$$

Пример 3

Построим критерий Вальда для различения гипотез

$H_0 : a = a_0 = 1$

$$H_1 : a = a_1 = 1.2$$

о значении параметра a нормального закона, если $\sigma = 0.5$ известно с ошибками $\alpha = 0.02$ и $\beta = 0.05$.

По формулам Вальда

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha} = \frac{95}{2},\ B = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{5}{98}$$

Математическое ожидание нормального распределения равно

$M\xi = a$

Найдем математическое ожидание статистики Y_k

$$Y_k = \ln \frac{p(X_k, a_1, \sigma)}{p(X_k, a_1, \sigma)} = \ln \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X_k - a_1)^2}{2\sigma^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(X_k - a_0)^2}{2\sigma^2}}} = \frac{1}{\sigma^2} X_k (a_1 - a_0) + \frac{a_0^2 - a_1^2}{2\sigma^2}$$

Тогда для основной гипотезы получаем

$$M_{a_0} Y_k = \frac{a_0}{\sigma^2}(a_1 - a_0) + \frac{a_0^2 - a_1^2}{2\sigma^2} = -\frac{(a_0 - a_1)^2}{2\sigma^2} = -0.08$$

Среднее число испытаний при условии H_0:

$$M_{a_0} \nu = \frac{\alpha \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + (1-\alpha) \ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{M_0 Y_k} = \frac{0.02 \ln \frac{95}{2} + 0.98 \ln \frac{5}{98}}{-0.08} \approx 36$$

Аналогично находим среднее число испытаний для альтернативной гипотезы

$$M_{a_1} Y_k = \frac{a_1}{\sigma^2}(a_1 - a_0) + \frac{a_0^2 - a_1^2}{2\sigma^2} = \frac{(a_0 - a_1)^2}{2\sigma^2} = 0.08$$

Среднее число испытаний при условии H_1:

$$M_{a_1} \nu = \frac{(1-\beta) \ln \frac{1-\beta}{\alpha} + \beta \ln \frac{\beta}{1-\alpha}}{M_{\lambda_1} Y_k} = \frac{4.1769}{0.08} \approx 44$$

Пример 4

Постройте критерий Вальда для различения гипотез о параметре λ **закона Эрланга** с ошибками $\alpha = 0.02$ и $\beta = 0.05$. $p(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$

$H_0 : \lambda = \lambda_0 = 1$

$H_1 : \lambda = \lambda_1 = 2$

По формулам Вальда

$$A = \frac{1-\beta}{\alpha} = \frac{95}{2},\ B = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{5}{98}$$

Найдём математическое ожидание распределения Эрланга

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\,dx = \int_0^{\infty} x\lambda^2 x e^{-\lambda x}dx = \left\{ \begin{matrix} \lambda x = t \\ dx = \frac{1}{\lambda}dt \end{matrix} \right\} = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} t^2 e^{-t}dt = \frac{1}{\lambda}\Gamma(3) = \frac{2}{\lambda}$$

Найдем математическое ожидание статистики Y_k

$$Y_k = \ln\frac{p(X_k,\lambda_1)}{p(X_k,\lambda_0)} = \ln\frac{\lambda_1^2 X_k e^{-\lambda_1 X_k}}{\lambda_0^2 X_k e^{-\lambda_0 X_k}} = 2\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0} + (\lambda_0 - \lambda_1)X_k$$

Тогда для основной гипотезы получаем

$$M_{\lambda_0}Y_k = M\left(2\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0} + (\lambda_0 - \lambda_1)X_k\right) = 2\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0} + \frac{2(\lambda_0 - \lambda_1)}{\lambda_0} = -0.614$$

Среднее число испытаний при условии H_0:

$$M_{\lambda_0}\nu = \frac{\alpha\ln\frac{1-\beta}{\alpha} + (1-\alpha)\ln\frac{\beta}{1-\alpha}}{M_{\lambda_0}Y_k} = \frac{0.02\ln\frac{95}{2} + 0.98\ln\frac{5}{98}}{-0.614} \approx 4.626$$

Аналогично находим среднее число испытаний для альтернативной гипотезы

$$M_{\lambda_1}Y_k = M\left(2\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0} + (\lambda_0 - \lambda_1)X_k\right) = 2\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_0} + \frac{2(\lambda_0 - \lambda_1)}{\lambda_1} = 0.386$$

Среднее число испытаний при условии H_1:

$$M_{\lambda_1}\nu = \frac{(1-\beta)\ln\frac{1-\beta}{\alpha} + \beta\ln\frac{\beta}{1-\alpha}}{M_{\lambda_1}Y_k} = \frac{3.519}{0.386} \approx 9.109$$