11/02/2025

$n=2$ **- плоскость**	L **- линейное пространство**
$n=3$ - пространство	E - евклидово пространство

L_2
В линейном пространстве есть линейные элементы (векторы):

$$
\begin{gathered}
+, \lambda\cdot \\
1)\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} \quad \text{- полугруппа} \\
2)\exists 0: \forall\vec{a}|\vec{a}+0=\vec{a} \\
3)\forall\vec{a}\ \exists-\vec{a}|\ \vec{a}+-\vec{a}=0 \quad \text{1,2,3 - группа} \\
4)\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}-1,2,3,4 \quad \text{1,2,3,4 - Абелева группа} \\
5)\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b} \\
6)(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a} \\
7)\lambda_1(\lambda_2\vec{a})=(\lambda_1\lambda_2)\vec{a} \\
8)1\cdot\vec{a}=\vec{a}
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
8\to 1\neq 0 \\
\forall\vec{a}=\sum_{i=1}^{3}a^i\vec{e}_i
\end{gathered}
$$

Правило Эйнштейна:

$$\sum_{i=1}^{N}a^i\vec{e}_i=a^ie_i$$

Правило Эйнштейна не распространяется на греческий алфавит
Вместо сумма говорим свёртка. Выше представлена одинарная свёртка.
Вектор не обязан быть геометрическим вектором
Например, в множестве полиномов не выше 2 степени:

$$
\begin{gathered}
\vec{a}=a^1x^2+a^2x+a^3 \\
\vec{e_1}=1 \\
\vec{e_2}=x \\
\vec{e_3}=x^2 \\
\implies \vec{a}=a^i\vec{e}_i
\end{gathered}
$$

Базис можно менять
Рассмотрим Линейное пространство, сопряжённое пространство, евклидово

пространство
Симметрия верхнего и нижнего индексов
Индекс:
i,j,k,l,m,n,p,q,r,s,t
В плоскости вместо маленьких букв используются заглавные
буква с индексом означает несколько чисел
т.е.

$$a^i - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Замена базиса

$$\vec{e}_i \to \vec{e'_i}$$

$$\vec{a} = a'^i \vec{e'_i} = a^i \vec{e}_i$$
$$\vec{e'_i} = Q^j{}_i \vec{e}_j$$

Верхний индекс ближе к букве, чем нижний

$$Q^I{}_J = \begin{pmatrix} Q^1{}_1 & Q^1{}_2 \\ Q^2{}_1 & Q^2{}_2 \end{pmatrix}$$
$$a^i = Q^j{}_i a'^i$$

$Q^j{}_i$ - матрица преобразования
Свойство: $Q = \det(Q^j{}_i) \neq 0$
Доказательство:

$$Q = 0$$
$$\exists \text{ Линейная нетривиальная комбинация столбцов с суммой } = 0$$
$$\sum_{\alpha=1}^{N} S_\alpha Q^j{}_\alpha = 0$$

Свободный индекс означает, что пробегаются все возможные значения
$\sum_{\alpha=1}^{N} S_\alpha Q^j{}_\alpha = 0 \leftrightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} S_\alpha Q^j{}_\alpha = 0, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\sum_{\alpha=1}^{3} S_\alpha \vec{e'_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{3} S_\alpha Q^j{}_i \vec{e}_j = \lambda'^j \vec{e}_j = 0 - \textit{противоречие}$$

$$Q \neq_0 \implies \exists Q^{-1} = P$$
$$P^i{}_j Q^j{}_k = \delta^i_k = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$$

δ - символ Кронекера, вводится для записи единичной матрицы
$p^i{}_j Q^j{}_k$ - то же самое, что матричное умножение
Сопряжённое линейные пространство L_n^*

$$f : L_n \to \mathbb{R}$$
$$f = f(\vec{a})$$

Линейность: $f(\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2}) = \lambda_1 f(\vec{a_1}) + \lambda_2 f(\vec{a_2})$
Сопряжённое линейное пространство.
Функционал - линейное отображение, элемент L_n^*

$$f(\vec{a}) = f(a^i \vec{e}_i) = a^i f(\vec{e}_i) = a^i f_i, \qquad f_i = f(\vec{e}_i)$$
$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i$$
$$f = a^i f_i$$

Для вектора меняются векторные координаты (компоненты), а для функционала - значение функционала над базисными векторами
Рассматриваем базисные функционалы:

$$e^1 = f(\vec{e}_1)$$
$$e^2 = f(\vec{e}_2)$$
$$e^3 = f(\vec{e}_3)$$

$$e^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j$$

$$e^i(\vec{a}) = e^i(a^j \vec{e}_k) = a^j e^i(\vec{e}_j) = a^j \delta^i_j = a^i$$
$$e_i : \ \vec{a} \to a^i$$

$f(\vec{a}) = f_i e^i(\vec{a})$ - разложение $\vec{a}$ по базисным функционалам
Наблюдается двойственность того, что меняется при смене базиса, и того, что в каком месте индесы - вверху или внизу
Определение взаимных базисов:

Базис $\vec{e}_j \in L_n$ и $e^i \in L_n^*$ взаимны $\Leftrightarrow e^i(\vec{e}_j) = \delta^i_j$

Отображение линейных отображений???
Евклидово пространство E_n
$\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$
Точки! Расстояния! Углы!

Криволинейные координаты.
Мы можем охарактеризовать положение точки в 3х мерном пространстве с помощью 3 декартовых координат.

$$\vec{x} = \vec{x}(x^i) = \vec{x}(x^j)$$

x^i - декартовы, x^j - криволинейные

$$x^i = x^i(x^j)$$

$$x^j = x^j(x^i)$$

$$\vec{x} = \vec{x}(x^1, x^2, x^3) = \begin{cases} x^1(x^1, x^2, x^3) \\ x^2(x^1, x^2, x^3) \\ x^3(x^1, x^2, x^3) \end{cases}$$

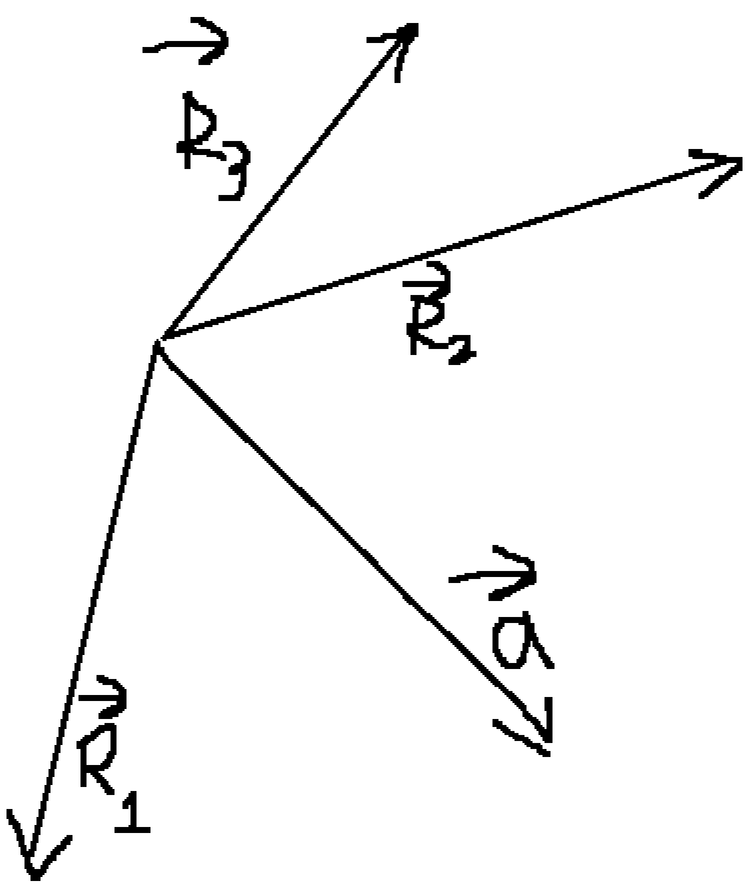
Если зафиксировать x^2, x^3, то получится функция от одной неизвестной
Криволинейные орты:

$$\vec{R}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i}$$

$$\vec{R}_i = \frac{\partial(\vec{x}^j \vec{e}_j)}{\partial x^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} e_j$$

${Q^j}_i = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}$ - матрица преобразования или матрица Якоби

$Q \neq 0$ доказывается точно так же



$\vec{a} = a^i \vec{R}_i$, a^i - контрвариантные компоненты вектора $\vec{a}$
Метрическая матрица

$$g_{ij} = \vec{R}_i \cdot \vec{R}_j$$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

$$g_{ij} = g_{ji}$$

Свойство определителя метрической матрицы:

$$g = \det(g_{ij}) > 0$$

Рассмотрим переход от декартового базиса к криволинейному $\vec{e_i} \to \vec{R}_i$
$g_{ij}^{(декартовая)} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

$$\vec{R}_i = Q_i^j \vec{e}_j$$
$$\vec{R}_k = Q_k^l \vec{e}_l$$
$$g_{ij} = \vec{R}_i \cdot \vec{R}_k = Q_i^j Q_k^l \vec{e}_j \cdot \vec{e}_l = Q_i^j Q_k^l \delta_{jk}$$

Компоненты метрического тензора ковариантны.

Верхние индексы ковариантны.

Нижние индексы - контрвариантны.

$$g_{lj} Q_i^j = X_{li}$$
$$\det(Q_i^j Q_k^l \delta_{jk}) = \det(Q_i^j) \det(Q_k^l) \det(\delta_{jk}) = QQ1 = Q \cdot Q > 0$$

Теорема Рисса.

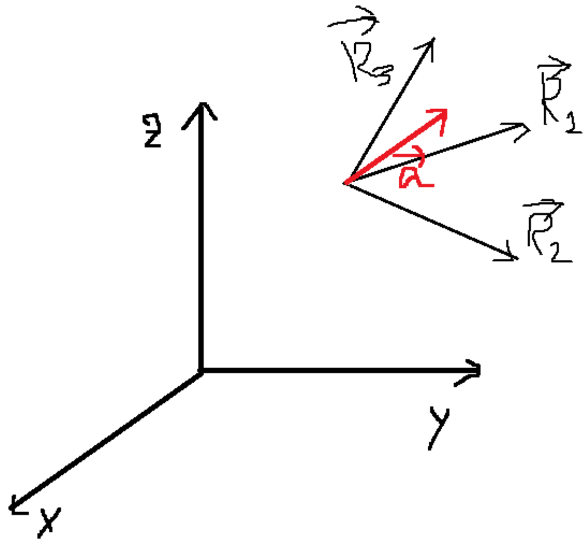
$\exists$ биекция, независящая от базисов, между элементами

$$\exists f : E_n^* \to E_n \wedge \exists f^{-1}$$

$$\exists! b \in E_n : \forall \vec{a} : f(\vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Доказательство теоремы Рисса:

$$\forall f(\vec{a}), \forall \vec{a} \in E_n$$
$$\exists! \vec{b} \in E_n : f(\vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$$



$$\vec{b} = b^i \vec{R}_i$$

$$b^i = g^{ij} f_j, \text{ где } f_j = f(\vec{R}_j)$$

f_j - базисные функционалы

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = g^{ij} f(\vec{R}_j) \vec{R}_i \cdot a^k \vec{R}_k =$$

$$\vec{R}_i \cdot \vec{R}_k = g_{ik}$$

$$= g^{ij} g_{ik} a^k f(\vec{R}_j) = \delta^j_k a^k f(\vec{R}_j) = a^j f_j = f(\vec{a})$$

$$\text{Пусть } \exists \vec{b_1} \neq \vec{b_2} : \forall a \ f(\vec{a}) = \vec{b_1} \cdot \vec{a} = \vec{b_2} \cdot \vec{a} \implies$$

$$(\vec{b_1} - \vec{b_2}) \cdot \vec{a} \equiv 0$$

Возьмём

$$\vec{a} = \vec{b_1} - \vec{b_2}$$

$$|\vec{b_1} - \vec{b_2}|^2 = 0$$

Противоречие

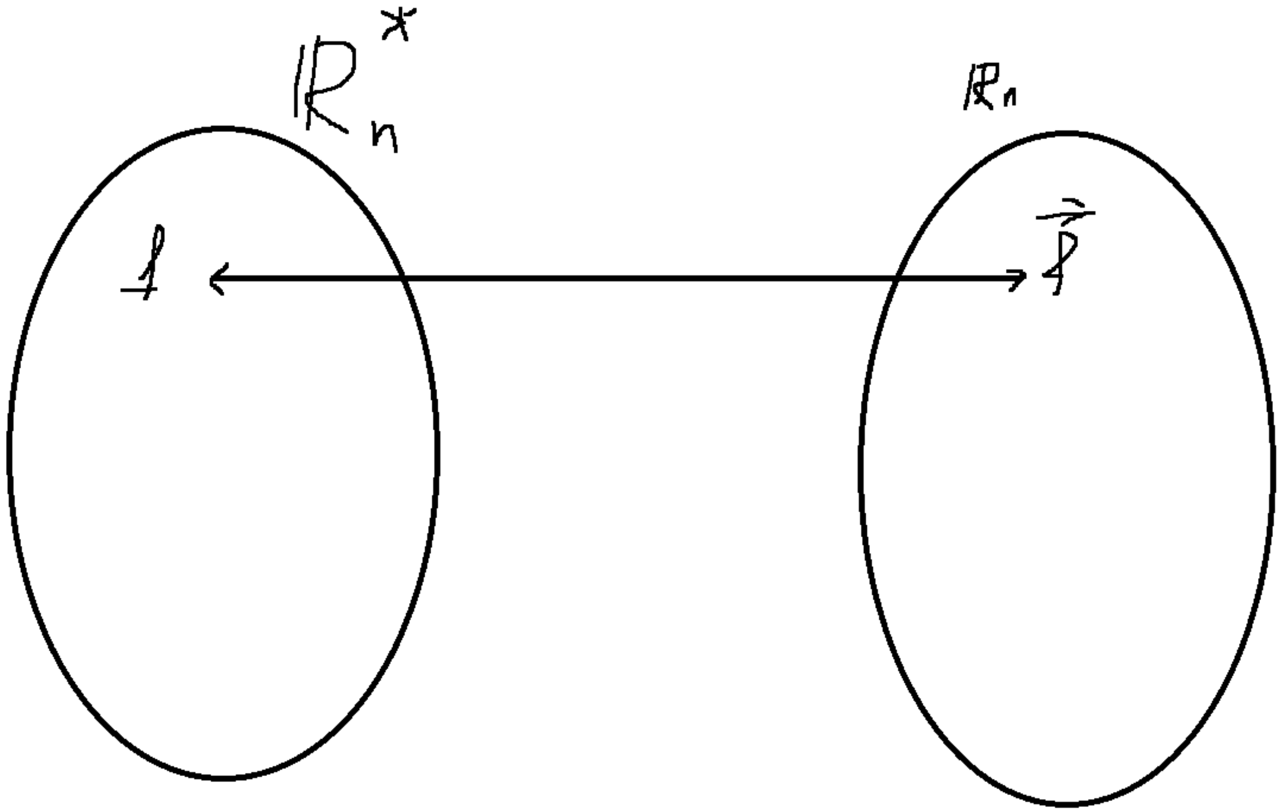
Следствие

$$f(\vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$f \leftrightarrow \vec{b}$$

$$f \in R_n^* \leftrightarrow \vec{f} \in R_n$$

Отождествление E_n^* и E_n !



$$e^i(\vec{R}_j) = \vec{e^i} \cdot \vec{R}_j = \delta^i_j$$
$$\vec{e^i} = e^{ik}\vec{R}_k$$
$$e^{ik}(\vec{R}_k \cdot \vec{R}_j) = \delta^i_j$$
$e^{ik} = g^{ik}$ - обратная метрическая матрица
$$\vec{e^i} = g^{ik}\vec{R}_k$$
$\vec{R}^i = g^{ik}\vec{R}_k$ - взаимный базис

$\vec{R}_k$ - локальный базис
$$\vec{R}_i = g_{ik}\vec{R}^k$$
Док-во: $g_{ik}\vec{R}^k = g_{ik}g^{kl}\vec{R}_l = \delta^l_i\vec{R}_l = \vec{R}_i$

$\vec{a} \in E_n$ можно разложить двояко:

$\vec{a} = a^i\vec{R}_i$ - контрвариантные компоненты

$\vec{a} = a_j\vec{R}^j$ - ковариантные компоненты

$$\begin{cases} \vec{R}_i = Q^i_j\vec{e}_i \\ a_j = Q^j_i a_j^{\text{декарт.}} \end{cases} \text{ - ковариант}$$

$a_j = Q^j_i a_j^{\text{декарт.}}$ - контр

$$\vec{R}^i \cdot \vec{R}_j = \delta^i_j$$

Из кватернионов получилось скалярное и векторное произведение

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a^i\vec{R}_i\cdot b_j\vec{R}^j=a^ib_j\vec{R}_i\cdot\vec{R}^j=a^ib_j\delta_i^j=a^ib_i$$
$$\text{Поднятие индекса: } a^i=g^{ij}a_j$$
$$\vec{a}=a^i\vec{R}_i=a_j\vec{R}^j=g^{ij}a_j\vec{R}_i$$
$$\text{Опускание индекса: } a_i=g_{ij}a^j$$

Векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$

Символы Леви-Чивиты:

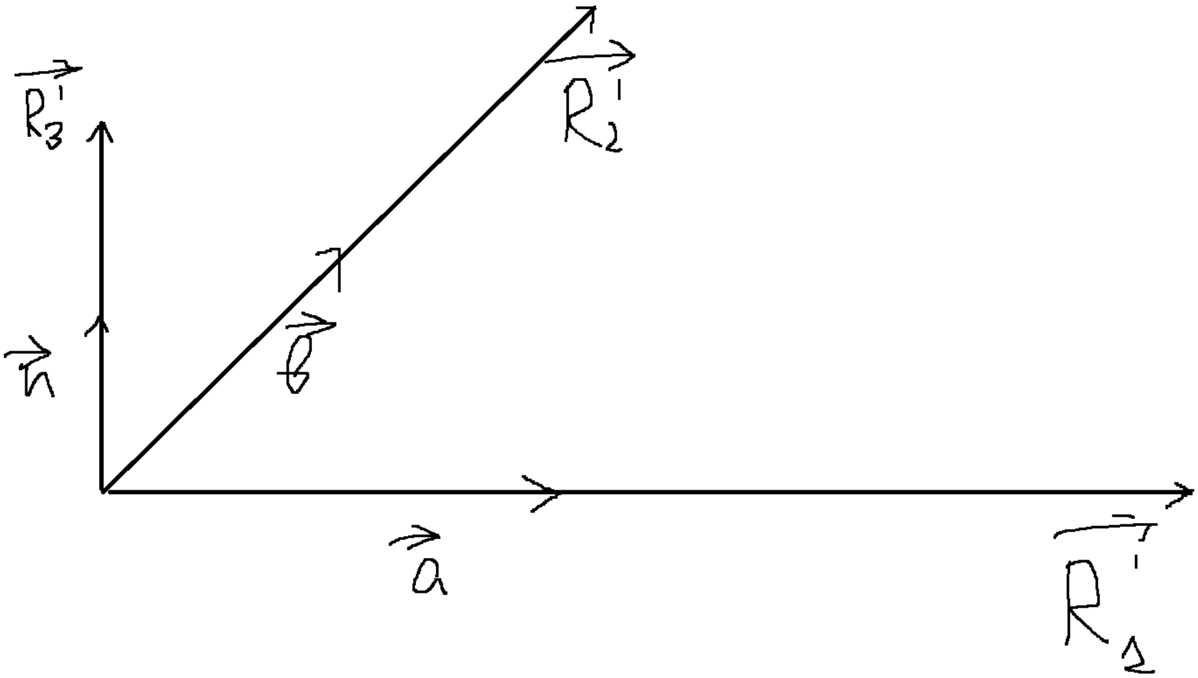
$$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon^{ijk}=\begin{cases}+1, \text{ Ориентация } (123)\\ -1, \text{ Ориентация } (213)\\ 0, \text{ Хотя бы 2 из 3 индексов совпадают}\end{cases}$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ilm}=\delta_j^l\delta_k^m-\delta_k^l\delta_j^m$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijl}=2\delta_k^l$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk}=2\delta_k^k$$
$$\text{Для 3хмерного пространства } \delta_k^k=3$$
$$\det A_\beta^\alpha\cdot\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{lmn}A_i^lA_j^mA_k^n$$
$$\text{Частный случай: } i=1,\ j=2,\ k=3:$$
$$\det A_\beta^\alpha=\varepsilon_{lmn}A_1^lA_2^mA_3^k=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$
$$g\varepsilon_{ijk}=\varepsilon^{lmn}g_{li}g_{mj}g_{nk}$$
$$\vec{a}=[a^i]\vec{R}_i$$
$$\vec{b}=[b^i]\vec{R}_j$$
$$[\vec{R}^k]$$
$$\sqrt{g}\varepsilon_{ijk}a^ib^j\vec{R}^k=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{lmn}(a^ig_{il})(b^jg_{jm})(\vec{R}^kg_{kn})$$
$$\vec{a}\times\vec{b}=\sqrt{g}\varepsilon_{ijk}a^ib^j\vec{R}^k=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{lmn}a_lb_m\vec{R}_n$$

Совпадение с обычным определением:

1. Направление

\begin{gather} \begin{cases} (\vec{a}\times \vec{b})\cdot\vec{a}=0 \\ (\vec{a}\times \vec{b})\cdot \vec{

`\end{gather}$$`



$$
\begin{gather}
S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a}\times\vec{b}| \\
|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = a^j a_j = g_{ij}a^i a^j = \\
g_{11}a^1 a^1 \\
|\vec{b}|^2 = g_{22}b^2 b^2 \\
S = \sqrt{g_{11}g_{22}}|\vec{a}^1\vec{b}^2|\sin\varphi = \\
\sqrt{g_{11}g_{22}}|\vec{a}^1\vec{b}^2|\sqrt{1-\cos^2\varphi} \implies \\
\cos\varphi = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \implies \\
\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{\frac{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}} = \sqrt{\frac{gg^{33}}{\cancel{g_{11}g_{22}}}} \\
S = |a^1 b^2|\sqrt{gg^{33}} \\
|\vec{a}\times\vec{b}| = |\sqrt{g}\varepsilon_{123}a^1 b^2\vec{R}^3| = \sqrt{g}|a^1 b^2|\sqrt{g^{33}}
\end{gather}
$$

25/02/2025

Тензоры II ранга

Отсебятина:

$$
\begin{gathered}
f: V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \to W: \\
f(\lambda_{11}v_{11} + \lambda_{12}v_{12}, \lambda_{21}v_{21} + \lambda_{22}v_{22}, \ldots, \lambda_{n_1}v_{n_1} + \lambda_{n_2}v_{n_2}) = \\
= \lambda_{11}f(v_{11}, \lambda_{21}v_{21} + \lambda_{22}v_{22}, \ldots, \lambda_{n_1}v_{n_1} + \lambda_{n_2}v_{n_2}) + \\
+\lambda_{12}f(v_{12}, \lambda_{21}v_{21} + \lambda_{22}v_{22}, \ldots, \lambda_{n_1}v_{n_1} + \lambda_{n_2}v_{n_2}) = \\
= \lambda_{21}f(\lambda_{11}v_{11} + \lambda_{12}v_{12}, v_{21}, \ldots, \lambda_{n_1}v_{n_1} + \lambda_{n_2}v_{n_2}) + \\
+\lambda_{22}f(\lambda_{11}v_{11} + \lambda_{12}v_{12}, v_{22}, \ldots, \lambda_{n_1}v_{n_1} + \lambda_{n_2}v_{n_2}) = \\
= \ldots = \\
= \lambda_{n_1}f(\lambda_{11}v_{11} + \lambda_{12}v_{12}, \lambda_{21}v_{21} + \lambda_{22}v_{22}, \ldots, v_{n_1}) + \\
+\lambda_{n_2}f(\lambda_{11}v_{11} + \lambda_{12}v_{12}, \lambda_{21}v_{21} + \lambda_{22}v_{22}, \ldots, v_{n_2})
\end{gathered}
$$

r - ранг тензора - количество индексов

r=0 - скаляр

r=1 - вектор, функционал

r=2

r=3

r=4

Все тензоры образуют специальное линейное пространство $(+, \lambda\cdot)$

специальное - обладает дополнительным операциями

$$a_j = Q^i_j a^{дек}_i$$

Нижний - с помощью Q. Верхний - с помощью P.

$$g^{ij} = P^i_k P^j_l g^{kl}$$

Отношение эквивалентности (тожд).

Аксиомы:

симметричность $A * B \Leftrightarrow B * A$

рефлексивность $A * A$

транзитивность $\begin{matrix} A * B \\ B * C \end{matrix} \Rightarrow A * C$

Класс эквивалентности:

$[a] = \{x | x \sim a\}$

1. $A \sim B \Leftrightarrow [A] = [B]$

   Доказательство:

$$
\begin{gathered}
\implies A \sim B, C \in [A] \Rightarrow C \sim A \Rightarrow \\
C \sim B \Rightarrow C \in [B] \\
[A] \subset [B] \\
\text{Аналогично, если A поменять на B выведем} \\
[B] \subset [A] \Rightarrow [A] = [B] \\
\impliedby [A] = [B] \Rightarrow \\
A \in [B] \Rightarrow A \sim B
\end{gathered}
$$

2. Множество классов эквивалентности разбивает множество на непересекающиеся части и каждый элемент входит в какую-либо часть
Пусть $\exists x$ не лежит ни в каком классе эквивалентности. Рассмотрим $[x]$. $x \in [x]$.
Противоречие
Пусть классы эквивалентности могут пересекаться.

$$\exists A, B \ \ [A] \cap [B] \neq \varnothing \Rightarrow \exists C : C \in [A] \wedge C \in [B] \Rightarrow \\ C \sim A \wedge C \sim B \Rightarrow A \sim B \Rightarrow [A] = [B]$$

$$n = 2 \text{ - плоскость}$$
$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$$
$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f} \ (n = 3)$$
$$\underbrace{E_2}_{\text{левые}} \times \underbrace{E_2}_{\text{правые}}$$

Признаки эквивалентности:
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \sim \vec{c}, \vec{d}, \vec{a}, \vec{b}$
$\lambda \neq 0 \ \ (\lambda\vec{a})\vec{b}(\lambda\vec{c})\vec{d} = \vec{a}(\lambda\vec{b})\vec{c}(\lambda\vec{d})$
Нулевая пара - пара, в которой есть хотя бы 1 нулевой вектор
$\vec{a}\vec{0} \sim \vec{0}\vec{c} \sim \vec{0}\vec{0}$

Умножение на число

$$\lambda[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}] = [(\lambda\vec{a})\ \vec{b}\ (\lambda\vec{c})\ \vec{d}] = [\vec{a}\ (\lambda\vec{b})\ \vec{c}\ (\lambda\vec{d})]$$
$$(\lambda\vec{a})\ \vec{b}\ (\lambda\vec{c})\ \vec{d} \sim \vec{a}\ (\lambda\vec{b})\ \vec{c}\ (\lambda\vec{d})$$

Частный случай класса эквивалентности

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{0}\ \vec{0}] \text{ - только 1 пара ненулевая}$$

Диада

$$\vec{a} \otimes \vec{b} \text{ - векторная диада}$$
$$(\vec{a} + \vec{a}') \otimes \vec{b} = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{a}' \otimes \vec{b}$$
$$(\vec{a} + \vec{a}') \otimes \vec{b} = [(\vec{a} + \vec{a}')\vec{b}\vec{0}\vec{0}]$$
$$(\vec{a} + \vec{a}') \otimes \vec{b} = [(\vec{a} + \vec{a}')\vec{b}\vec{0}\vec{0}] = [\vec{a}\vec{b}\vec{0}\vec{0}] + [\vec{a}'\vec{b}\vec{0}\vec{0}] = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{a}' \otimes \vec{b}$$

Все левые и правые совпадения - однотипные наборы

$$[\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}_1, \vec{d}] + [\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}_2, \vec{d}] = [(\vec{a}_1 + \vec{a}_2), \vec{b}, (\vec{c}_1 + \vec{c}_2), \vec{d}]$$
$$(\lambda + \mu)\vec{a} \otimes \vec{b} = \lambda\vec{a} \otimes \vec{b} + \mu\vec{a} \otimes \vec{b}$$
$$(\lambda + \mu)\vec{a} \otimes \vec{b} = (\lambda + \mu)[\vec{a}\vec{b}\vec{0}\vec{b}] =$$
$$= [(\lambda + \mu)\vec{a}\vec{b}\vec{0}\vec{b}] = [(\lambda\vec{a} + \mu\vec{a})\vec{b}\vec{0}\vec{b}] =$$
$$= [(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{0}\vec{0}] + [(\mu\vec{a})\vec{b}\vec{0}\vec{0}] = \lambda\vec{a} \otimes \vec{b} + \mu\vec{a} \otimes \vec{b}$$

Базисные диады

$$\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J$$

$$\forall[\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}] \text{ можно разложить как линейную комбинацию } \vec{R}_I \otimes \vec{R}_J$$
$$\text{Доказательство:}$$
$$\vec{a} \otimes \vec{b} = (a^I R_I) \otimes (b^J \otimes R_J) = a^I b^J \vec{R}_I \otimes \vec{R}_J$$
$$\vec{c} \otimes \vec{d} = c^I d^J \vec{R}_I \otimes \vec{R}_J$$
$$[\vec{a}(\vec{b}+\vec{0})\vec{c}(\vec{0}+\vec{d})] = [\vec{a}\vec{b}\vec{0}\vec{d}] + [\vec{a}\vec{0}\vec{c}\vec{d}] =$$
$$= \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{c} \otimes \vec{b} = (a^I b^J + c^I d^J)\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J$$
$$\vec{T} = [\vec{a}\vec{b}\vec{c}\vec{d}] = T^{IJ}\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J = (a^I b^J + c^I d^J)\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J$$

Независимость диад, состоящих из базисных векторов:

От противного

$$\vec{R}_2 \otimes \vec{R}_1$$
$$a^{IJ}\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J = \Theta = [\quad \underbrace{\vec{a}\vec{b}}_{\text{где-то здесь есть 0}} \quad \underbrace{\vec{c}\vec{d}}_{\text{где-то здесь есть 0}} \quad],\ a^{IJ} \not\equiv 0$$
$$\vec{R}_I \otimes (a^{IJ}\vec{R}_J) = \Theta$$
$$[\vec{R}_1(a^{1J}\vec{R}_J)\vec{R}_2(a^{2J}\vec{R}_J)] = \Theta$$
$$a^{1J}\vec{R}_J = \vec{0} \text{ , где } \vec{R}_J \text{ - базисы}$$
$$\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J \text{ - базис в пространстве } [\vec{a}\vec{b}\vec{c}\vec{d}]$$
$$2^2 = 4 \text{ - размерность}$$
$$C = T + B = \underbrace{(T^{IJ} + B^{IJ})}_{C^{IJ}}\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J$$

Аксиомы линейного пространства выполняются.

$$E_2 \otimes E_2 = \left[(E_2 \times E_2)^2\right]$$

Тензор 2 порядка - элемент тензорного пространства

$$n = 2: \ \vec{T} = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{c} \otimes \vec{d}$$
$$n = 3: \vec{T} = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{c} \otimes \vec{d} + \vec{e} \otimes \vec{f}$$
$$\vec{D} = \vec{a} \otimes \vec{b} = a^I b^J \vec{R}_I \otimes \vec{R}_J =$$
$$= a^I b^J Q_I^k \vec{e}_k \otimes Q_J^l \vec{e}_l = Q_I^K Q_J^L D^{IJ} \vec{e}_K \otimes \vec{e}_L$$
$$\vec{D} = D^{KL}_{\text{декарт}}\, \vec{e}_K \otimes \vec{e}_L$$
$$D^{KL}_{\text{декарт}} = Q_I^K Q_J^L D^{IJ}$$

03/04/2025

Свойства тензоров 2 ранга:

$E_2, (L_3)$ - n=2 - плоскость

$E_3, (L_3)$ - n=3 - пространство
$n=2$ $(I,J)\vec{T}=\vec{a}\otimes\vec{b}+\vec{c}\otimes\vec{d}=[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\vec{d}]$
$n=3$ $(i,j,k)\vec{T}=\vec{a}\otimes\vec{b}+\vec{c}\otimes\vec{d}+\vec{e}\otimes\vec{f}=[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\vec{d}\vec{e}\vec{f}]$

Свойства диад

$$T_{IJ}=g_{IK}T^K_J=g_{JK}T_I{}^K$$
$$T^K_J=g_{JK}T^{KL}$$
$$T_I{}^K=g_{IK}T^{LK}$$

Транспониированные и симметричные тензоры.

$$\exists\vec{T}\Rightarrow\vec{T}^T:\ \begin{array}{c}(T^T)^{IJ}=T^{JI}\\ \text{или } (T^T)_{IJ}=T_{JI}\end{array}$$

Симметричный тензор:

$$\vec{T}^T=\vec{T}$$

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}\Rightarrow C^{IJ}=A^{IJ}+B^{IJ}$$
$$\vec{L}=\lambda\vec{T}\Rightarrow L^{IJ}=\lambda T^{IJ}$$

Прямые и обратные тензорные признаки.

$$\begin{array}{c}A^{IJ}\sim\vec{A}\\ B^{IJ}\sim\vec{B}\end{array}\Rightarrow A^{IJ}+B^{IJ}\text{ тоже компоненты тензора}$$

Пусть неизвестно, является ли T^{IJ} компонентами тензора. Но, известно, что

$$T^{IJ}\quad\underbrace{V^K_J}_{\text{компоненты}}\quad=\quad\underbrace{C^{IK}}_{\text{компоненты}}\quad\Rightarrow$$
$$T^{IJ}\text{ - компоненты}$$

$$C^{IJ}=Q^I{}_SQ^K{}_PC'^{SP}$$
$$B^K_J=Q^K_IP^M_JB'^L_M$$
$$\times P^N_IP^T{}_K$$
$$\text{левая часть }=P^N_IP^T{}_K(Q^K{}_LP^M_J)T^{IJ}B'^L_M=P^N_IP^M_JT^{IJ}B'^T_M$$
$$\text{правая часть }=P^N_IP^T{}_KQ^I{}_SQ^K{}_PC'^{SP}=C'^{NT}$$
$$\underbrace{P^N_IP^M_JT^{IJ}}_{T'^{MN}}B'^T_M=C'^{NT}$$
$$T'^{MN}=P^N_IP^M_JT^{IJ}$$

Умножение тензора $\overset{\leftrightarrow}{T}$ на вектор $\vec{a}$

$$\vec{a}\otimes\vec{b}=a^Ib^J\vec{R}_I\otimes\vec{R}_J$$
$$\vec{a}\otimes\vec{b}:=\begin{matrix}a^1b^1 & a^1b^2\\ a^2b^1 & a^2b^2\end{matrix}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a^Ib^J\vec{R}_I\cdot\vec{R}_J=a^Ib_J$$

Вывод:

$$\otimes \underbrace{\rightarrow}_{\text{свёртка}} \cdot$$

$$(\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J) \cdot \vec{R}_K = R_I \otimes_{\backslash|/} (\vec{R}_J \cdot \vec{R}_K)$$
$$r^* = r_1 + r_2 - 2$$

$$\overset{\leftrightarrow}{T} \cdot \vec{a} \neq \vec{a} \cdot \overset{\leftrightarrow}{T}$$
$$\vec{b} = \overset{\leftrightarrow}{T} \cdot \vec{a} = T^{IJ}(\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J) \cdot a^k \vec{R}_k = T^{IJ} a^k g_{Jk} \vec{R}_I \Rightarrow$$
$$b^I = T^{IJ} a_J = T^I{}_J a^J \text{ - правило немых индексов}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \cdot \overset{\leftrightarrow}{T} = a^k \vec{R}_k \cdot T^{IJ} \vec{R}_I \otimes \vec{R}_J = a^k g_{kI} T^{IJ} \vec{R}_J$$
$$c^J = a_I T^{IJ} = T^{IJ} a_I$$

Скалярное умножение тензора на тензор

$$\overset{\leftrightarrow}{A} \cdot \overset{\leftrightarrow}{B}$$
$$(\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J) \cdot (\vec{R}_K \otimes \vec{R}_L) = g_{JK} \vec{R}_I \otimes \vec{R}_L$$