Домашняя работа №1-4

Итерационный метод Якоби для полного решения задачи вычисления собственных значений и собственных векторов квадратной симметричной матрицы

Далее $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ и $\boldsymbol{A} = (a_j^i)_n^n = \langle {}^{>}\boldsymbol{a}_1, \ldots, {}^{>}\boldsymbol{a}_n] = [{}^{<}\boldsymbol{a}^1, \ldots, {}^{<}\boldsymbol{a}^n\rangle \in \mathrm{L}(\mathbb{R}; n)$ - заданная симметричная матрица, т.е. ${}^{T}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ ($a_j^i = a_i^j$ для любых $i, j = \overline{1, n}$), где ${}^{>}a_j$ $\left({}^{<}a^i\right)$ - j-ый (i-ая) столбец (строка) матрицы $\boldsymbol{A}$, если $j = \overline{1, n}$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$. Кроме того, если $\boldsymbol{Q} \in \mathrm{OL}(\mathbb{R}; n)$ - ортогональная матрица, то, в силу свойств ортогональных преобразований стандартного арифметического евклидова пространства ${}^{>}\mathbb{E}^n$, для любого $i = \overline{1, n}$ справедливы равенства:

$$ {}^{<}\boldsymbol{a}_i \cdot {}^{T}\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot {}^{>}\boldsymbol{a}_i = {}^{<}\boldsymbol{a}_i \cdot {}^{>}\boldsymbol{a}_i . \tag{1} $$

Следовательно, сумма квадратов компонент матрицы $\boldsymbol{A}$ совпадает с суммой квадратов компонент матриц $\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{A} =< \boldsymbol{Q} \cdot {}^{>}\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{Q} \cdot {}^{>}\boldsymbol{a}_n]$ и $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{Q} = [{}^{<}\boldsymbol{a}^1 \cdot \boldsymbol{Q}, \ldots, {}^{<}\boldsymbol{a}^n \cdot \boldsymbol{Q} >$.

Метод Якоби

Приведём итерационный метод вращений Якоби для вычисления собственных значений и векторов матрицы $\boldsymbol{A}$, полагая, что $\boldsymbol{A}[0] = \boldsymbol{A}$ - начальная матрица рассматриваемого метода вращений.

Пусть номера $\alpha, \beta \in \overline{1, n}$, где $\alpha < \beta$, таковы, что компонента a_α^β матрицы $\boldsymbol{A}$ является ненулевой и максимальнойпо модулю среди всех внедиагональных компонент матрицы $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}[0]$.

В пространстве ${}^{>}\mathbb{E}^n$ рассмотрим ортогональное табличное преобразование $\hat{\boldsymbol{Q}}(\alpha, \beta; \varphi)$ - поворота на угол $\varphi \in [0; 2\pi)$ в подпространстве $[{}^{>}\boldsymbol{e}_\alpha, {}^{>}\boldsymbol{e}_\beta] \underset{a\ M}{\subseteq} {}^{>}\mathbb{E}^n$, натянутом на стандартные векторы ${}^{>}\boldsymbol{e}_\alpha$ и ${}^{>}\boldsymbol{e}_\beta$ пространства ${}^{>}\mathbb{E}^n$ ($\langle {}^{>}\boldsymbol{e}_1, \ldots, {}^{>}\boldsymbol{e}_n \rangle$ - стандартный базис пространства ${}^{>}\mathbb{E}^n$). Матрица $\boldsymbol{Q}(\alpha, \beta; \varphi)$ такого преобразования имеет вид:

$$ \boldsymbol{Q}(\alpha, \beta; \varphi) = \langle {}^{>}\boldsymbol{e}_1, \ldots, {}^{>}\boldsymbol{e}_{\alpha-1}, {}^{>}\boldsymbol{s}(\alpha, \beta; \varphi), {}^{>}\boldsymbol{e}_{\alpha+1}, \ldots, {}^{>}\boldsymbol{e}_{\beta-1}, {}^{>}\boldsymbol{t}(\alpha, \beta; \varphi), {}^{>}\boldsymbol{e}_{\beta+1}, \ldots, {}^{>}\boldsymbol{e}_n], \tag{2} $$

где

$$ \begin{cases} {}^{>}\boldsymbol{s}(\alpha, \beta; \varphi) = {}^{>}\boldsymbol{e}_\alpha \cos\varphi + {}^{>}\boldsymbol{e}_\beta \sin\varphi; \\ {}^{>}\boldsymbol{t}(\alpha, \beta; \varphi) = -{}^{>}\boldsymbol{e}_\alpha \sin\varphi + {}^{>}\boldsymbol{e}_\beta \cos\varphi. \end{cases} \tag{3} $$

В частности, если $\alpha = 1$ и $\beta = 3$, то $\boldsymbol{Q}(1, 3; \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Угол $\varphi \in [0; 2\pi)$ выберем таким образом, чтобы компонента b_β^α матрицы $\boldsymbol{B} = \left(b_j^i\right)_n^n = {}^{T}\boldsymbol{Q}(\alpha, \beta; \varphi) \cdot \boldsymbol{A}[0] \cdot \boldsymbol{Q}(\alpha, \beta; \varphi) = \boldsymbol{A}[1]$ была нулевой. Тогда получим:

$$
\begin{array}{ll}
1) & \begin{array}{l} b_\alpha^\alpha = a_\alpha^\alpha \cos^2\varphi + a_\beta^\beta \sin^2\varphi + 2a_\beta^\alpha \sin\varphi\cdot\cos\varphi; \\ b_\beta^\beta = a_\alpha^\alpha \sin^2\varphi + a_\beta^\beta \cos^2\varphi - 2a_\beta^\alpha \sin\varphi\cdot\cos\varphi; \end{array} \\
2) & 0 = b_\beta^\alpha = b_\alpha^\beta = -\left(a_\alpha^\alpha - a_\beta^\beta\right)\sin\varphi\cdot\cos\varphi + a_\beta^\alpha\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right); \\
3) & b_k^\alpha = b_\alpha^k = a_k^\alpha \cos\varphi + a_k^\beta \sin\varphi \text{ для } k\in\overline{1,n},\ k\neq\alpha \text{ и } k\neq\beta; \\
4) & b_\beta^k = b_k^\beta = -a_\alpha^k \sin\varphi + a_\beta^k \cos\varphi \text{ для } k\in\overline{1,n},\ k\neq\alpha \text{ и } k\neq\beta; \\
5) & b_m^k = b_k^m = a_m^k \text{ для } k,m\in\overline{1,n},\ k\neq\alpha,\ k\neq\beta,\ m\neq\alpha \text{ и } m\neq\beta.
\end{array}
\tag{4}
$$

Кроме того, сумма квадратов компонент матрицы $\boldsymbol{A}[1]=\boldsymbol{B}$ равна сумме квадратов компонент матрицы $\boldsymbol{A}$. Более того, из пунктов $1)-3)$ формул (4) получаем:

$$
(b_\alpha^\alpha)^2 + (b_\beta^\beta)^2 = (a_\alpha^\alpha)^2 + (a_\beta^\beta)^2 + 2(a_\beta^\alpha)^2
$$

Поскольку $b_i^i = a_i^i$, если $i\in\overline{1,n}$, $i\neq\alpha$ и $i\neq\beta$, то, используя инвариантность суммы квадратов компонент матрицы $\boldsymbol{A}$, отсюда получаем, что сумма квадратов диагональных компонент матрицы $\boldsymbol{A}[1]=\boldsymbol{B}$ больше аналогичной суммы квадратов диагональных компонент матрицы $\boldsymbol{A}[0]=\boldsymbol{A}$ на ту же величину, на которую уменьшается сумма квадратов внедиагональных компонент матрицы $\boldsymbol{A}[0]$.

Аналогично строятся матрицы $\boldsymbol{A}[2]$, $\boldsymbol{A}[3],\ldots,\boldsymbol{A}[k],\ldots$ рассматриваемого процесса Якоби, где

$$
\lim_{k\to+\infty}\boldsymbol{A}[k] = \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},\ \mathrm{Spr}(\boldsymbol{A}) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\},
\tag{5}
$$

т.к. при каждом шаге этого процесса сумма всех квадратов диагональных (внедиагональных) компонент текущей матрицы $\boldsymbol{A}[k]$ увеличивается (уменьшается до «нуля»). В силу этого, с ростом $k\in\mathbb{N}$, текущая матрица $\boldsymbol{A}[k]$ «превращается» в диагональную матрицу, где на диагонали стоят все собственные значения матрицы $\boldsymbol{A}$. Кроме того, при достаточно большом $k\in\mathbb{N}$ в столбцах матрицы $\boldsymbol{Q}[k]\in\mathbf{OL}(\mathbb{R};n)$ ($\boldsymbol{A}[k] = {}^T\boldsymbol{Q}[k]\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}[k]$ ($\boldsymbol{Q}[k]=\boldsymbol{Q}_1\cdot\ldots\cdot\boldsymbol{Q}_k$, где $\boldsymbol{Q}_i$ - матрица вида (2) для $i\in\overline{1,k}$) «появляются» стоящие в соответствующем порядке нормированные собственные векторы матрицы $\boldsymbol{A}$, образующие базис пространства ${}^{>}\mathbb{E}^n$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to+\infty}\boldsymbol{Q}[k] = \boldsymbol{Q} = \langle {}^{>}\boldsymbol{q}_1,\ldots,{}^{>}\boldsymbol{q}_n]\in\mathrm{OL}(\mathbb{R};n)$, где

$$
\boldsymbol{A}\cdot{}^{>}\boldsymbol{q}_i = \lambda_i\cdot{}^{>}\boldsymbol{q}_i \text{ для любого } i\in\overline{1,n} \text{ и } {}^T\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ где } \mathrm{Spr}(\boldsymbol{A}) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}.
$$

Из пункта 2) формул (4) получения из текущей матрицы $\boldsymbol{A}[k]$ $(k\in\mathbb{N})$ итерационного процесса вращений (Якоби) последующей матрицы $\boldsymbol{A}[k+1]$ получаем, что угол $\varphi\in[0;2\pi)$, удовлетворяющий пункту 2) формул (4) вычисляется из условия:

$$
\operatorname{ctg}2\varphi = \frac{a_\alpha^\alpha[k]-a_\beta^\beta[k]}{2a_\beta^\alpha[k]},\quad \varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{a_\alpha^\alpha[k]-a_\beta^\beta[k]}{2a_\beta^\alpha[k]}.
$$

ЗАДАНИЕ (N *– номер фамилии студента в журнале,* $\beta = 1 + 0{,}1(52 - n)$, n *– номер группы*)

Используя метод Якоби, найти приближённое полное решение спектральной задачи для матрицы $\boldsymbol{A}$, приведённой в таблицах ниже. Останов выбрать на том шаге итерации, когда максимальная по модулю внедиагональная компонента преобразованной матрицы станет меньше $\varepsilon = 0.01$. Проверить найденные приближённые собственные векторы и отвечающие им собственные значения матрицы $\boldsymbol{A}$, проверив соответствующие приближённые равенства $\boldsymbol{A} \cdot {}^{>}\tilde{\boldsymbol{q}}_i \approx \tilde{\lambda}_i \cdot {}^{>}\tilde{\boldsymbol{q}}_i$ для любого $i \in \overline{1,4}$ с указанием погрешности (отдельно показать вектор $\boldsymbol{A} \cdot {}^{>}\tilde{\boldsymbol{q}}_i$, отдельно вектор $\tilde{\lambda}_i \cdot {}^{>}\tilde{\boldsymbol{q}}_i$ и, затем, вектор $\boldsymbol{A} \cdot {}^{>}\tilde{\boldsymbol{q}}_i - \tilde{\lambda}_i \cdot {}^{>}\tilde{\boldsymbol{q}}_i$).

N	$\boldsymbol{A}$	N	$\boldsymbol{A}$
1	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**2**	$\begin{pmatrix} 10\beta & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 10\beta & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**4**	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**6**	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**8**	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 10\beta & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 10\beta \end{pmatrix}$

N	$\boldsymbol{A}$	N	$\boldsymbol{A}$
9	$\begin{pmatrix} 10\beta & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 10\beta & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**10**	$\begin{pmatrix} 10\beta & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 10\beta & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 10\beta & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**12**	$\begin{pmatrix} 10\beta & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 10\beta & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$

13	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 10\beta & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**14**	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 10\beta & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 10\beta \end{pmatrix}$	**16**	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & -4 \\ 3 & 2 & -4 & 10\beta \end{pmatrix}$	**18**	$\begin{pmatrix} 10\beta & -2 & 2 & 3 \\ -2 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 10\beta \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**20**	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -4 & 2 \\ 2 & -4 & 10\beta & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 10\beta \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 10\beta & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**22**	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 10\beta & 5 \\ 3 & 0 & 5 & 10\beta \end{pmatrix}$