$$\alpha, \beta \neq 0, \alpha \neq \beta$$

$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = 0,\ 0 < x < 1, \\ y(0) \pm (-\alpha y'(0) + \beta y'(1))\alpha = 0, \\ y(1) \pm (-\alpha y'(0) + \beta y'(1))\beta = 0 \end{cases}$$

Нелокальные граничные условия

$$-\Delta u - \lambda u = 0,\ \ \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Полноценный набор собственных функций нам постовляют граничные условия.
Многомерная задача:

$$u|_{\partial\Omega} \pm r^2 \left(\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \varphi dS \right) \varphi = 0$$

$$\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} -\Delta h = 0 \\ h|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

$$\|\nabla h\|^2 = \ \min \|\nabla u\|^2$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi$$

Возьмём линейное пространство D_0.

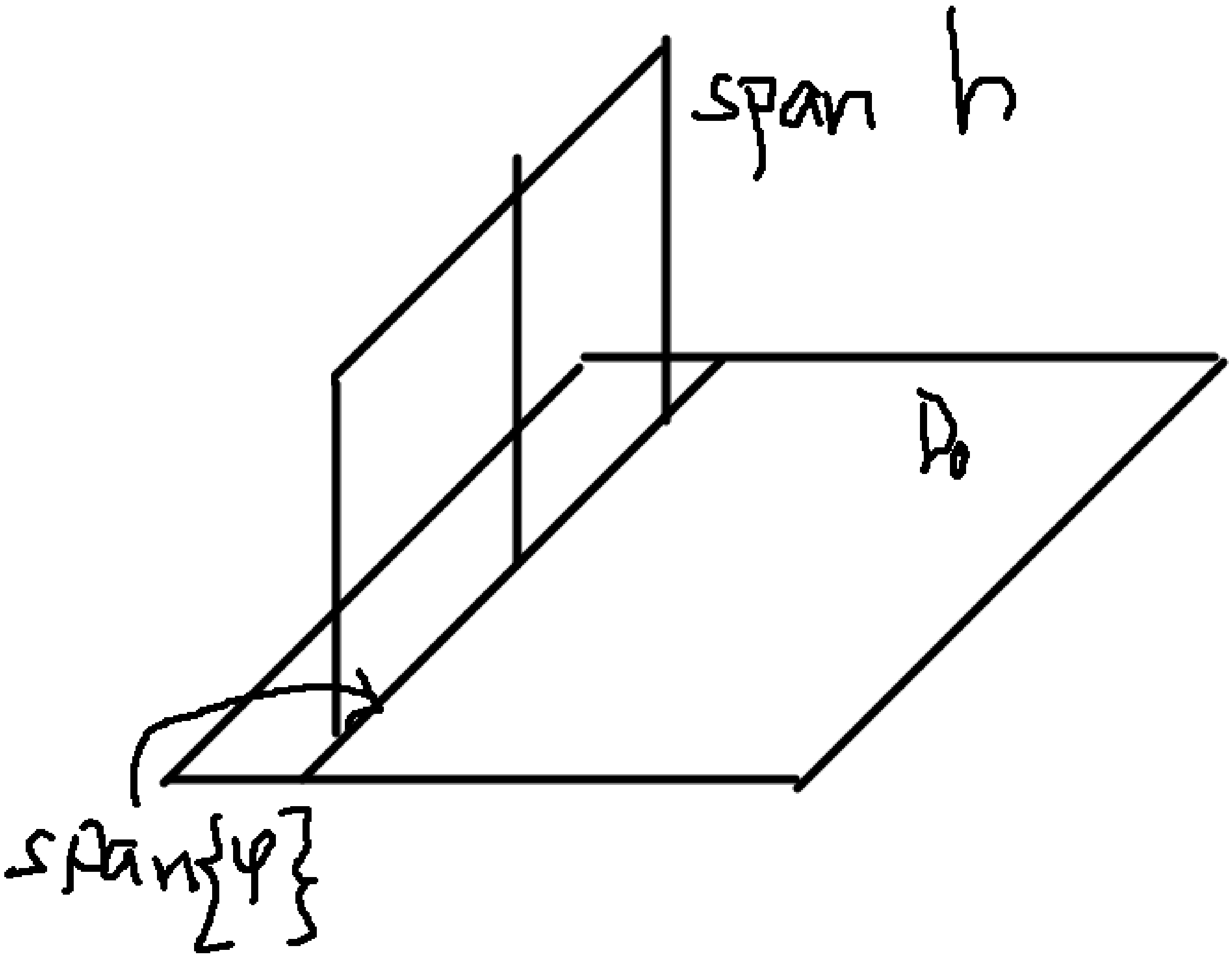
$$D_0 :\ u|_{\partial\Omega} = 0 \text{ - дважды непрерывно дифференцируемые}$$

$$V_0 : \begin{cases} u|_{\partial\Omega} = 0 \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \nabla} \varphi dS = 0 \end{cases}$$

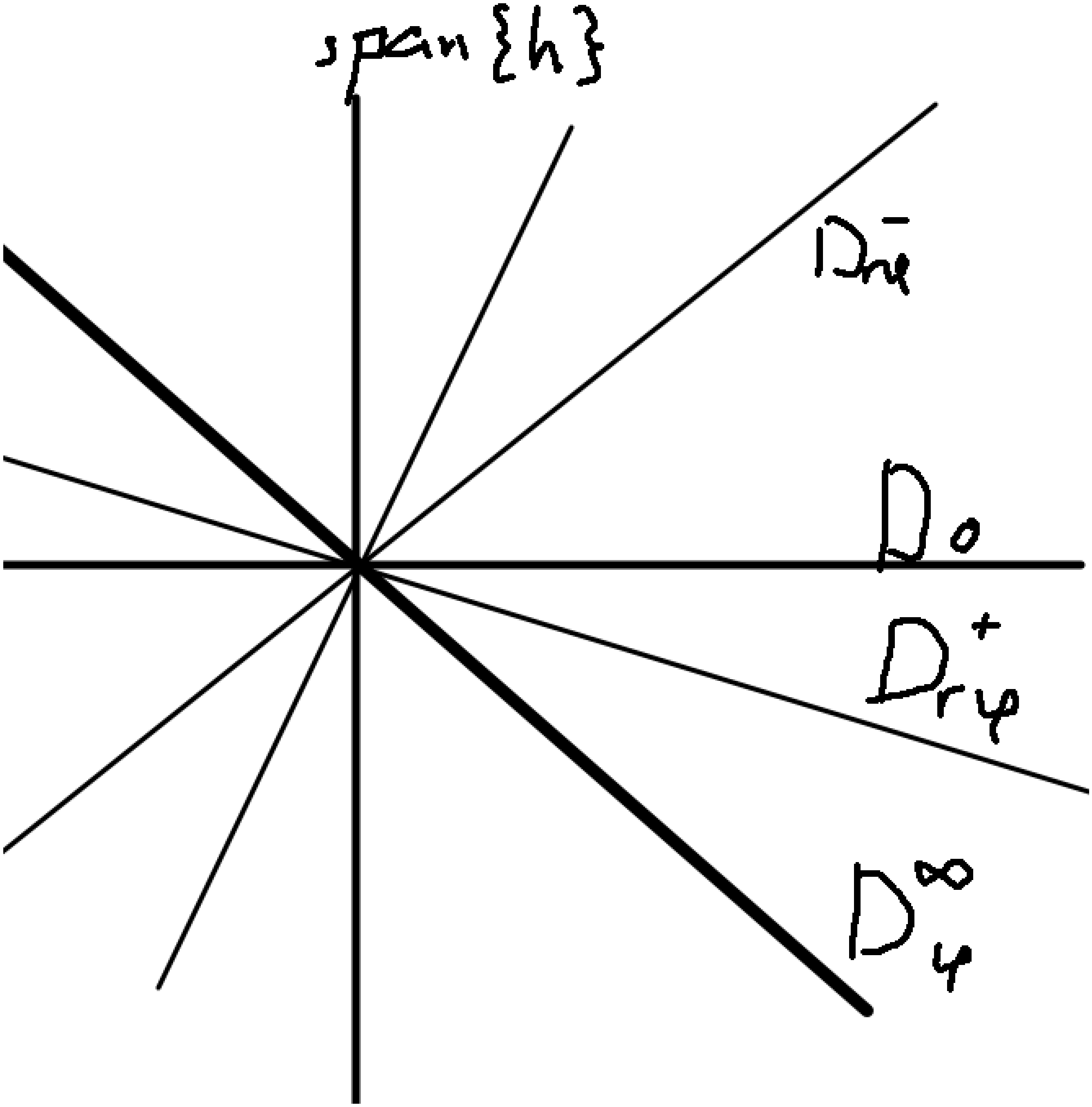
$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

$$u = w - -th, t \in \mathbb{R}$$

$$w|_{\partial\Omega} = 0$$



$$D_{\varphi}^{\infty} : \begin{cases} u|_{\partial\Omega} \in \text{ span } \{\varphi\} \\ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial\nabla} \varphi dS = 0 \end{cases}$$


span{h}
$D_{r\varphi}^{-}$
D_0
$D_{r\varphi}^{+}$
D_{φ}^{∞}

$$\begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = 0,\ 0 < x < 1, \\ y(0) + (-\alpha y'(0) + \beta y'(1))\alpha = 0, \\ y(1) + (-\alpha y'(0) + \beta y'(1))\beta = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^1 (-y'' - \lambda y) y dx = 0$$

$$-yy'|_0^1 + \int_0^1 y'^2 dx - \lambda \int_0^1 y^2 dx = 0$$

$$-yy'|_0^1 = y(0)y'(0) - y(1)y'(1) =$$

$$= -(-\alpha y'(0) + \beta y'(1))\alpha y'(0) + (-\alpha y'(0) + \beta y'(1))\beta y'(1) =$$

$$= \alpha^2 (y'(0))^2 - 2\alpha\beta y'(0)y'(1) + \beta^2 (y'(1))^2 = (-\alpha y'(0) + \beta y'(1))^2$$

$$\underbrace{(-\alpha y'(0) + \beta y'(1))^2}_{\geq 0} + \underbrace{\int_0^1 y'^2 dx}_{\geq 0} - \underbrace{\lambda}_{>0} \underbrace{\int_0^1 y^2 dx}_{\geq 0} = 0$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow y = C$$

Ряд Фурье тесно связан с граничными задачами: граничные задачи определяют систему собственных функций, которые образуют ряд Фурье.

$$\text{Если б было}$$

$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = 0,\ 0 < x < 1, \\ y(0) - (-\alpha y'(0) + \beta y'(1))\alpha = 0,, \\ y(1) - (-\alpha y'(0) + \beta y'(1))\beta = 0 \end{cases} \text{ то получилось бы}$$

$$-(-\alpha y'(0) + \beta y'(1))^2 + \int_0^1 y'^2 dx - \lambda \int_0^1 y^2 dx = 0$$

Раз $\lambda > 0$, можем написать следующее

$$y = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$
$$y' = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$
$$[a,b] = [0,1]$$
$$\cos\sqrt{\lambda}a = C_a$$
$$\cos\sqrt{\lambda}b = C_b$$
$$\sin\sqrt{\lambda}a = S_a$$
$$\sin\sqrt{\lambda}b = S_b$$
$$\sqrt{\lambda} = \mu$$
$$y(a) = AC_a + BS_a$$
$$y'(a) = -A\mu S_a + B\mu C_a$$

$$\begin{cases} AC_a + BS_b + (-\alpha\mu(-AS_a + BC_a) + \beta\mu(-AS_b + BC_b))\alpha = 0 \\ AC_b + BS_b + (-\alpha\mu(-AS_a + BC_a) + \beta\mu(-AS_b + BC_b)))\beta = 0 \end{cases}$$
$$A(C_a + \alpha^2\mu S_a - \alpha\beta\mu S_b) + B(S_a - \alpha^2\mu C_a + \alpha\beta\mu C_b) = 0$$
$$A(C_b + \alpha\beta\mu S_a - \beta^2\mu S_b) + B(S_b - \alpha\beta\mu C_a + \beta^2\mu C_b) = 0$$
$$\det \neq 0$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} C_a + \alpha^2\mu S_a - \alpha\beta\mu S_b & S_a - \alpha^2\mu C_a + \alpha\beta\mu C_b \\ C_b + \alpha\beta\mu S_a - \beta^2\mu S_b & S_b - \alpha\beta\mu C_a + \beta^2\mu C_b \end{vmatrix} = \dots$$

Получить уравнение для нахождения собственных значений и проиллюстрировать его графически (так чтобы можно было выжать информацию).

$$-\sin(2y)\ \mathrm{ch}\ (2x) + i\cos(2y)\ \mathrm{sh}\ (2x) + C$$
$$y = 0 \Rightarrow$$
$$i\ \mathrm{sh}\ (2z) + C$$

10/03/2025

Результаты "исследований".

Защита у доски. Слушает комиссия.

Консультации:

Получить задачу на 1

Прийти на n с решением

Проконсультироваться

исправиться на n+1 консультации

Постановка задачи

Оформить

Подписать

ВТ СР СБ