Прошлый семестр:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_0 & \vec{p}_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_0 & \vec{p}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}'_0 & \vec{p}'_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r}_0 & \vec{p}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} ()$$

Стихно

11/02/2025

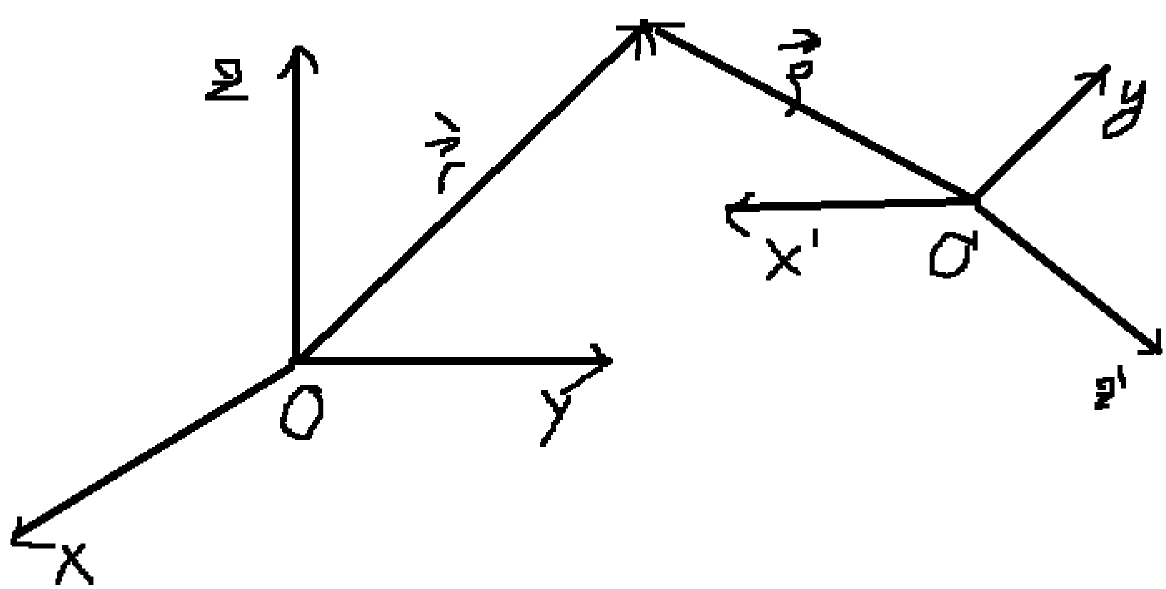
Переписать из тетради

18/02/2025

В инерциальной СО: $m\vec{a} = \sum \vec{F}$

Движение точки в неинерциальной системе отсчёта.

Неинерциальной системой отсчёта называют систему отсчёта, в которой не выполняется закон инерции



$$
\begin{gathered}
\vec{a}=\vec{a_r}+\vec{a_e}+\vec{a_K} \\
\vec{a_e}=\vec{a_{O'}}+\vec{\varepsilon_e}\times\vec{\rho}+\vec{\omega_e}\times(\vec{\omega_e}\times\vec{\rho}) \\
\vec{a_K}=2(\vec{\omega_e}\times\vec{V_r}) \\
m(\vec{a_r}+\vec{a_e}+\vec{a_K})=\Sigma F \\
m\vec{a_r}=\Sigma F-m\vec{a_e}-m\vec{a_K} \\
\vec{\Phi}_e=-m\vec{a_e}\text{ - переносная сила инерции} \\
\vec{\Phi}_K=-m\vec{a_K}\text{ - сила инерции Кориолиса} \\
m\vec{a_r}=\Sigma F+\vec{\Phi}_e+\vec{\Phi}_K
\end{gathered}
$$

$\vec{\Phi}_K=0$? $\rightarrow \vec{\omega_e}=0$

$\vec{\omega_e}=0$

$\vec{\Phi}_e=0$? $\rightarrow \vec{\varepsilon_e}=0$

$\vec{a_{O'}}=0$

Критерий неинерциальности системы отсчёта:

Если система отсчёта движется с ускорением или вращается относительно любой инерцианльой системы отсчёта, то такая система будет неинерциальной.

Относительный покой материальной точки в неинерциальной системе отсчёта.

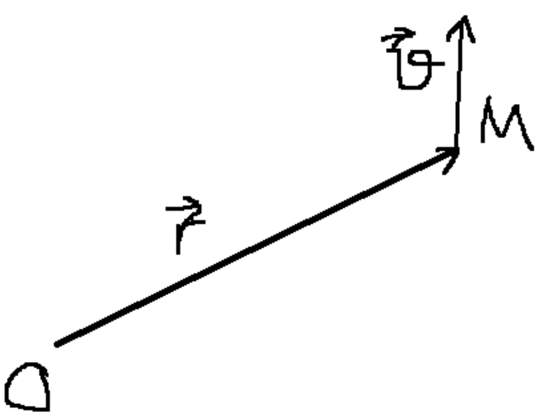
Условие покоя:

$$
\begin{gathered}
\vec{V_r}\equiv 0 \\
\vec{a_r}\equiv 0
\end{gathered}
$$

$$
0=\sum\vec{F}+\vec{\Phi}_e
$$

Движение материальной точки под действием центральной силы

$$
\begin{gathered}
\vec{F}\text{ - центральная, если она коллинеарна радиус-вектору} \\
\vec{F}=f(\vec{r})\vec{r}
\end{gathered}
$$

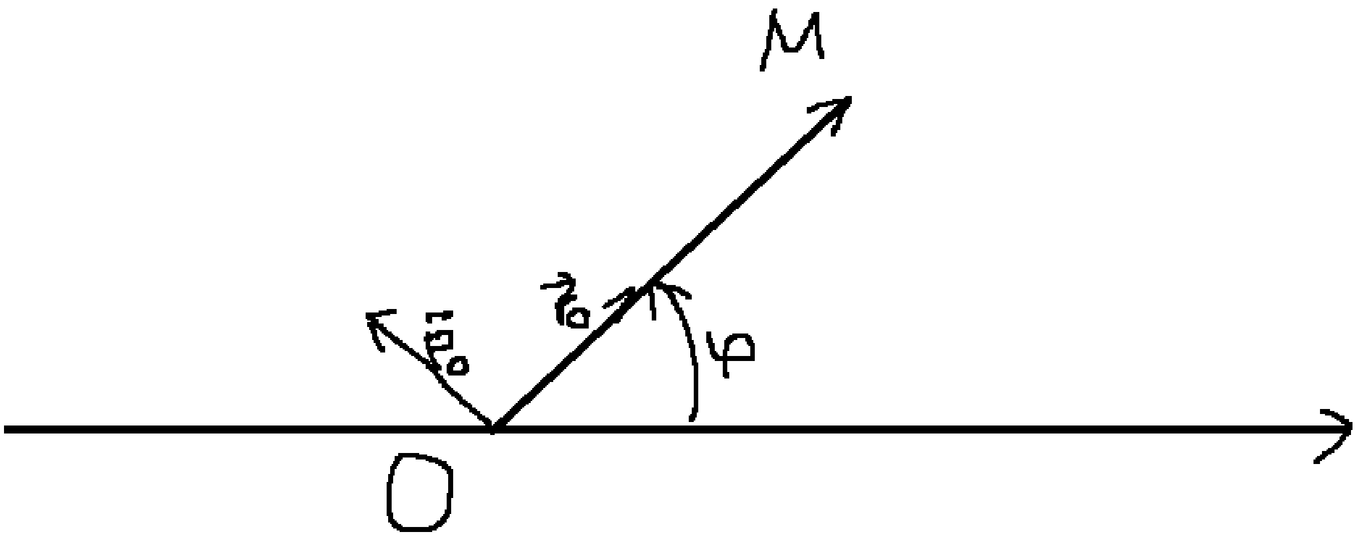


$$
m\vec{a}=\vec{F}
$$

1. Траектория точки, которая движется только под действием центральной силы - плоская кривая

\begin{gather} \pi \{ \vec{r} ,\vec{V}\}, \ \vec{r}\cancel{ \parallel } \vec{V} \\ \vec{n}=\frac{\vec{r}\times \vec{V}}{\

\end{gather}$$
Введём полярную ось



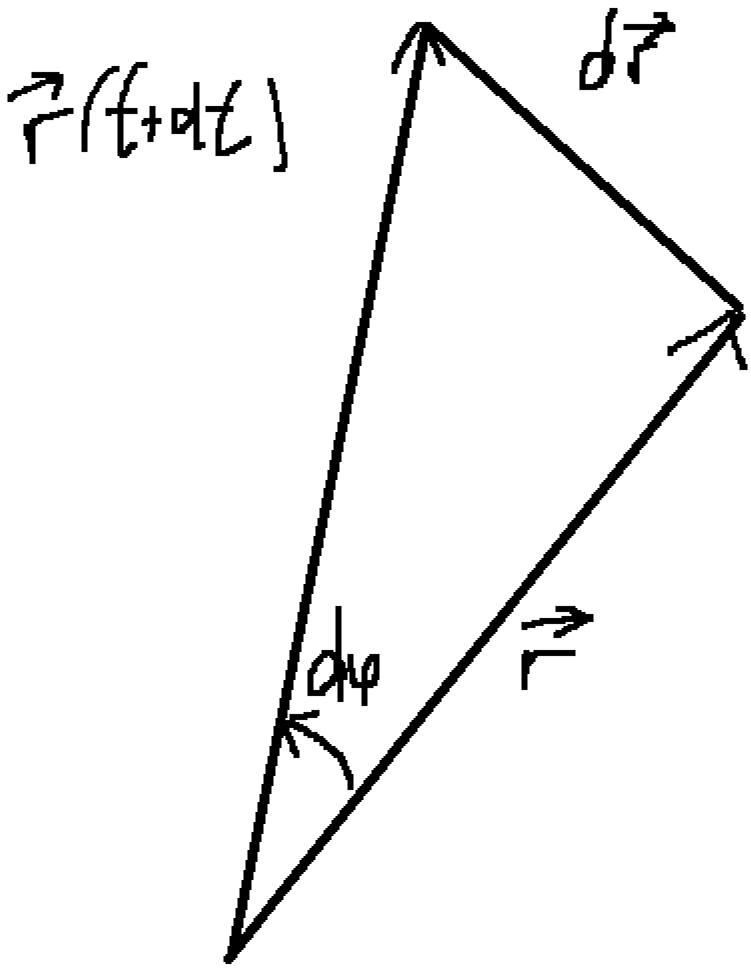
$$\begin{gather}
a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\
a_p = r\dot{r} + r\ddot{\varphi} \\
\\
\vec{r_0}:\ m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = f(\vec{r})\vec{r} \\
\vec{p_0}:\ m(r\dot{r} + \ddot{\varphi}) = 0
\end{gather}$$

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0$$

$$\ddot{\varphi} = \tfrac{d\dot{\varphi}}{dt} \qquad \to 2dr \cdot \dot{\varphi} + 2d\dot{\varphi} = 0$$

$$\dot{r} = \tfrac{dr}{dt}$$

$$\begin{gather}
\frac{2dr}{r} = -\frac{d\dot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \\
2\ln r = -\ln|\dot{\varphi}| + C \\
r^2 = \frac{C_1}{|\dot{\varphi}|} \\
|\dot{\varphi}|r^2 = C_1
\end{gather}$$



$$dS = \frac{1}{2}|d\vec{r}|h$$
$$h \approx r$$
$$|d\vec{r}| \approx r d\varphi$$
$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi \implies$$
$\dot{S} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = C$ - интеграл площадей. Закон Кеплера

Движение несвободной материальной точки

Движение точки называется несвободным когда на параметры её движения наложены некоторые ограничения. Такие ограничения, связывающие координаты и скорости точки, называются связи. Это ограничение в общем виде можно представить в виде уравнения или неравенства.

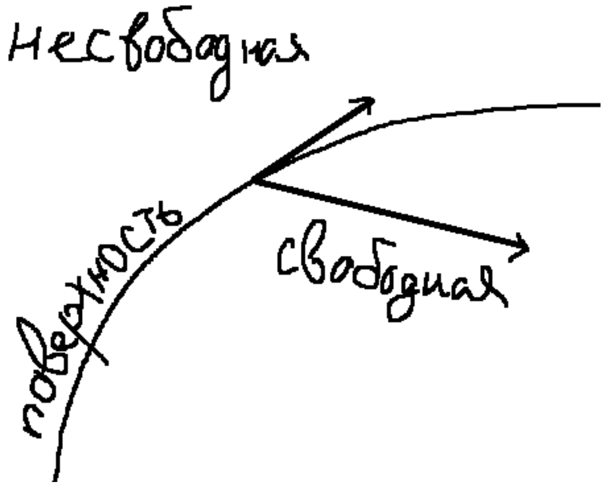
$f(x, y, z) = 0$ - точка находится в поверхности

$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ - точка находится на кривой

$$m\vec{a} = \Sigma\vec{F}$$

$$\begin{cases} m\vec{a} = \Sigma\vec{F} \\ f(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Решается через множитель Лагранжа.



Связь называется идеальной, если прибавка к ускорению будет направлена по нормали к поверхности в данной точке.

$$\vec{n} = \frac{\vec{grad}(f)}{|\vec{grad}(f)|}$$

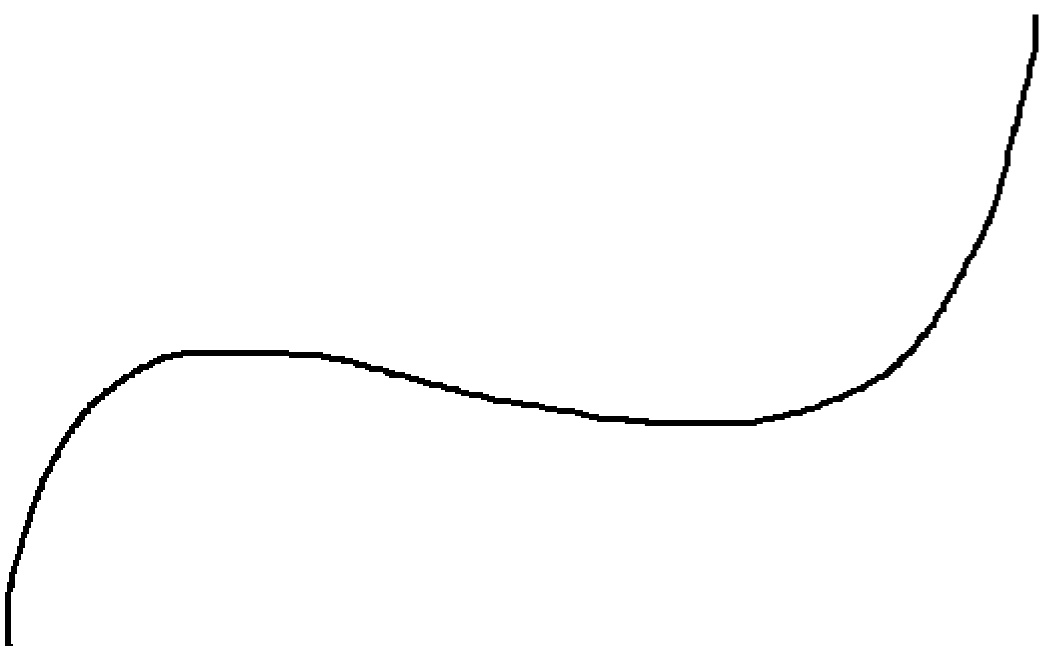
$$\begin{cases} m\vec{a} = \Sigma\vec{F} + \lambda'\vec{n} \\ f(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{N} = \lambda'\vec{n} = \lambda\vec{grad}(f)$$

$$\vec{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \Sigma F_x + \lambda\frac{\partial f}{\partial x} \\ m\ddot{y} = \Sigma F_y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y} \\ m\ddot{z} = \Sigma F_z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z} \\ f(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$$x, y, z, \lambda$$



$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \end{cases}$$

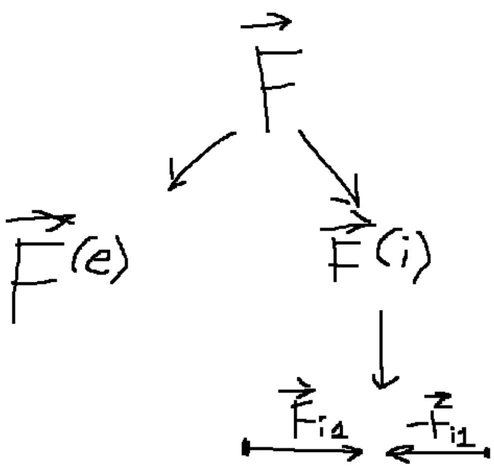
$$\begin{cases} m\ddot{x} = \Sigma F_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ m\ddot{y} = \Sigma F_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ m\ddot{z} = \Sigma F_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ f_1(x,y,z) = 0 \\ f_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

На экзамене не будет: 2 важных постулата ОТО:

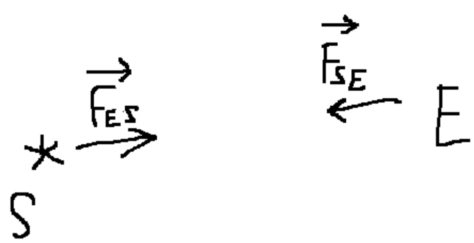
1. Гравитация - инерционная сила
2. Чем быстрее движется точка, тем она "менее свободна"
   Сила инерции ~ массе тела (инерционной)
   Сила притяжения ~ массе тела (гравитационной)
   Мб сила притяжения - сила инерции???
   Геометрия пространства эквивалентна силе

25/02/2025

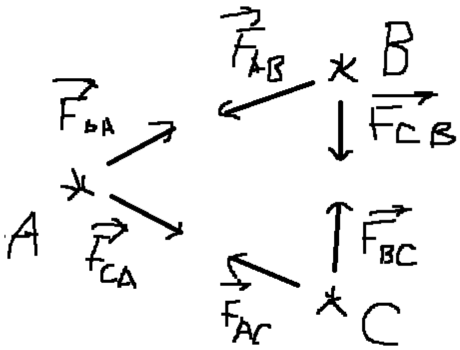
Механическая*система - совокупнось материальных точек, чьё движение рассматривается совместно.*
*Внешние*силы - силы, которые действуют на точки системы со стороны тел, внешних по отношению системе объектов.
Внутренние*силы - силы взаимодействия между точками механической системы.*



$$\vec{R}^{(i)}=\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{j}^{(i)}=\vec{0}$$



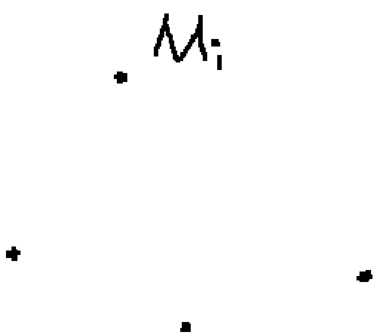
$$\begin{cases} m_S\vec{a}_S = \vec{F}_{ES} \\ m_E\vec{a}_E = \vec{F}_{SE} \end{cases}$$



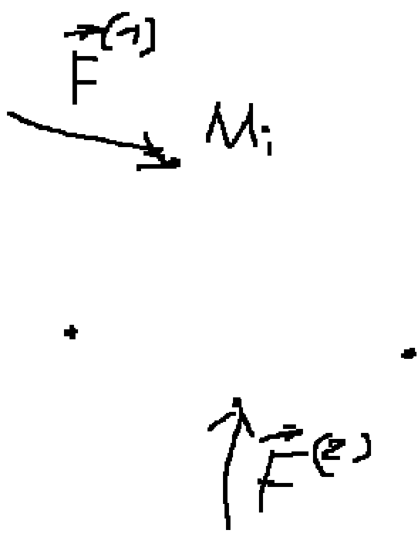
Алгебраического решения для задачи 3х тел не существует.
Поиск общих теорем динамики.

Общие теоремы динамики

1. $i = 1 \ldots n$



2. Инерциальная система отсчёта



$m_i\vec{a}_i = \sum_j \vec{F}_{ij} = \vec{F}_i^{(\text{в})} + \vec{F}_i^{(\text{i})}$

\begin{gather} \sum _{i}m_{i}\vec{a}_{i}=\sum _{i,j}\vec{F}_{ij}=\sum _{i}\vec{F}_{i}^{(\text{в})}+\cancelto{ 0 }{

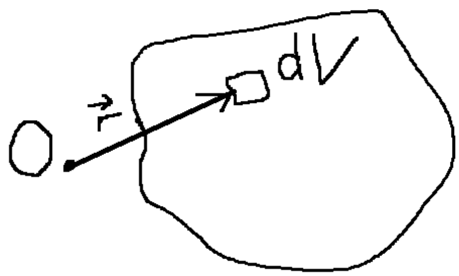
\end{gather}

Определение : *Центрмассмеханическойсистемы* − *материальнаяточка*, *срадиус* − *вектором*, *которыйопределяетсяс*

\vec{r}{C}= \frac{\sum{i} m{i}\vec{r}{i}}{\sum m_{i}}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}: \vec{a}_C = \frac{\sum_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i}$$
$$M\vec{a}_C = \vec{R}^{(\text{в})}, \text{ где } M = \sum_i m_i$$

Теорема о движении центра масс механической системы.
Центр масс механической системы движется так же, как двигалась бы материальная точка, с массой, равной суммарной массе системы, под действием только внешних сил, приложенных к системе.

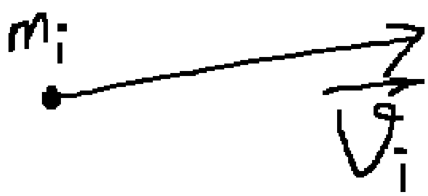


$$\vec{r}_C = \frac{\iiint_V \vec{r} \cdot \rho dV}{\iiint_V \rho dV} = \frac{\iiint_V \vec{r} \rho dV}{M}$$

Векторный момент первого порядка.
Частный случай: Пусть $\vec{R}^{(\text{в})} = 0$

$$M\vec{a}_C = 0 \Rightarrow \vec{V}_C = \vec{const}$$
$$\vec{V}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{V}_i}{\sum_i m_i} = \vec{const}$$

Определение.
Пусть есть точка массой m, которая движется со скоростью $\vec{V}$.



Количество движения материальной точки - произведение её массы на её скорость.

$$\vec{q} = m_i \vec{V}_i$$

Разница с импульсом - импульс определен и для неньютоновской механики.
Количество движения механической системы - сумма количеств движения точек системы.
Для счётного случая:

$$\vec{Q} = \sum_i \vec{q}_i$$

Для несчётного:

$$\vec{Q} = \iiint_V \vec{v}\rho dV$$

$$M\vec{v}_C = \sum_i m_i\vec{v}_i = \vec{Q}$$

$$M\vec{a} = \vec{R}^{(\text{e})}$$

$$M\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d}{dt}(M\vec{v_C})$$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{R}^{(\text{в})}$$

Теорема об изменении количества движения механической системы
Изменение со временем количества движения механической системы соответствует главному вектору системы внешних сил.
Пусть главный вектор системы внешних сил = 0. $\vec{R}^{(\text{в})} = 0$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{Q} = co\vec{n}st$$

Теорема об изменении количества движения механической сситемы в интегральной форме

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_i \vec{F}^{(\text{в})}$$

$$d\vec{Q} = \sum_i \vec{F}^{(\text{в})}dt$$

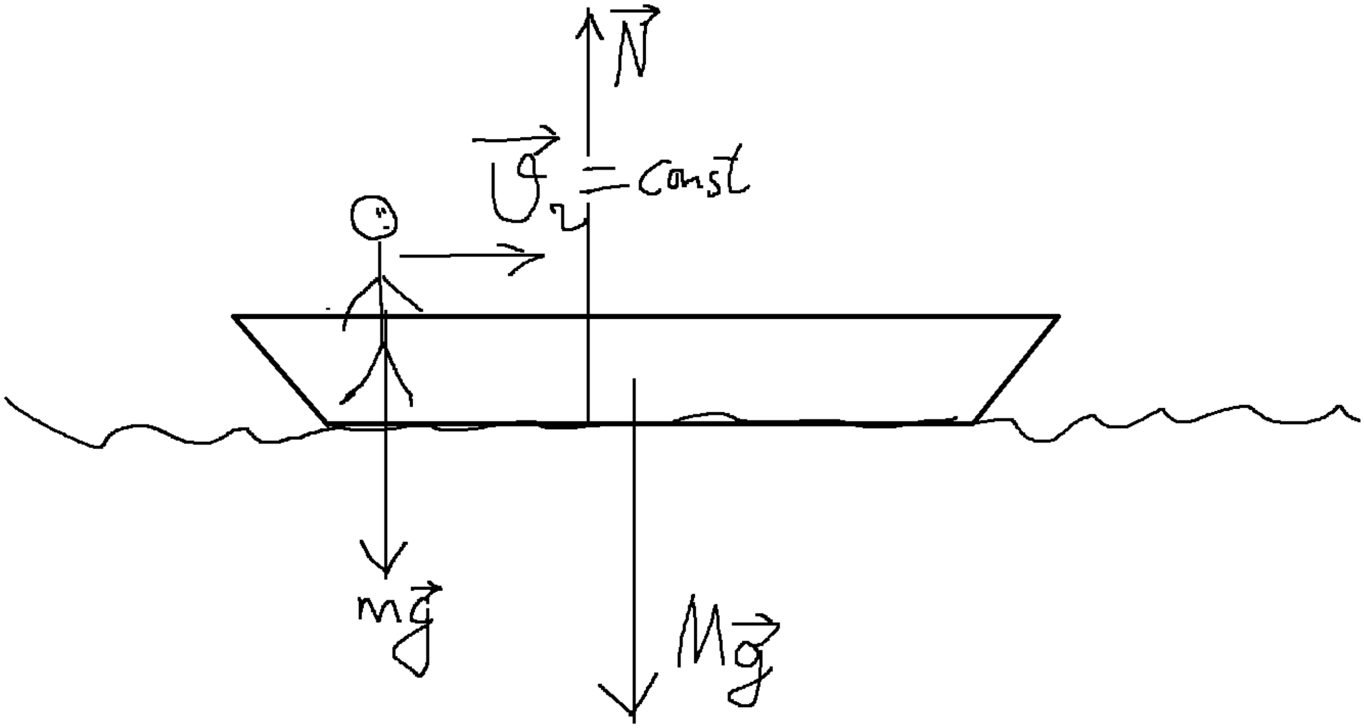
$$d\vec{s} = \vec{F}dt$$

Элементарным импульсом силы $\vec{s}$ будем называть векторную величину на дифференциал времени
Полный импульс силы - интеграл от элементарного импульса силы на определённом промежутке времени

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(\tau)d\tau$$

$$\vec{Q}_\text{к} - \vec{Q}_\text{н} = \sum_i \vec{S}^{(\text{в})}$$

Теорема об изменении количества движения в импульсной форме



$$M_C\vec{a}_C = m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{N}$$
$$x : M_C a_C^x = 0 \Rightarrow$$
$$M_C V_C^x = const$$
$$\text{Пусть } V_C|_{t=0} = 0 \ \Rightarrow$$
$$v_{\text{цм}}^x = 0$$
$$Q^x = 0 \implies$$
$$Q^x = Q_{\text{л}}^x + Q_{\text{ч}}^x$$
$$\vec{v}_ч = \vec{v}_л + \vec{v}_r, \text{ где } \vec{v}_{\text{л}} = \vec{v}_e$$
$$Q^x = M(-V_{\text{л}}) + m(-V_{\text{л}} + V_{\text{ч}})$$
$$mV_{\text{ч}} - (m+M)V_{\text{л}} = 0$$
$$V_{\text{л}} = \frac{m}{m+M}V_{\text{ч}}$$

04/03/2025

$$m_i\vec{a}_i = \sum \vec{F}_{ij}$$

Рассмотрим инерциальную систему отсчёта и точку O, неподвижную в этой истеме отсчёта
Для каждой точки введём радиус-вектор $\vec{r}_i$.

$$\vec{r}_i \times m_i\vec{a}_i = \sum_j \vec{r}_i \times \vec{F}_{iO} = \sum_j \vec{M}_O(\vec{F}_{ij})$$

Кинетический момент (момент количества движения) относительно некоторого полюса - векторная величина, равная векторному произведению радиус-вектора этой точки M_i относительно исходного полюса, умноженного на количество движения этой точки

$$\vec{K}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{r}_i \times \vec{q}_i$$

$$\frac{d\vec{K}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \cancelto{0}{(\vec{v}_i \times m\vec{v}_i)} + (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i)$$

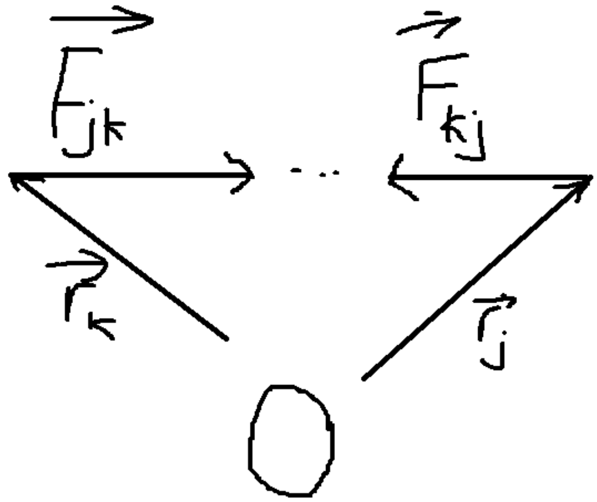
$$\frac{d\vec{K}_i}{dt} = \sum_j \vec{M}_O(\vec{F}_{ij})$$

Кинетический момент системы относительно полюса O

$$\vec{K}^O = \sum_i \vec{K}_i^O = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{q}_i = \sum_i \vec{M}^O(\vec{F}_i)$$

$$\frac{d\vec{K}^O}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{r}_{i \times m_i \vec{v}_i}\right) = \sum_i [\cancelto{0}{(\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i)} + (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i)]$$

$$\frac{d\vec{K}^O}{dt} = \sum_{ij} \vec{M}^O(\vec{F}_{iO}) = \sum \vec{M}_O \vec{F}^{\text{внеш}} + \sum \vec{M}_O \vec{F}^{\text{внутр}}$$



$$\vec{L}_O(\vec{F}_{jk}^{(i)}, \vec{F}_{kj}^{(i)}) = \vec{r}_k \times \vec{F}_{jk}^{(i)} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{kj}^{(i)} \Rightarrow$$

$$\vec{r}_j = \vec{r}_k + \overrightarrow{M_k M_j}$$

$$\vec{L}_O(\vec{F}_{jk}^{(i)} \vec{F}_{kj}^{(i)}) = 0$$

$$\frac{d\vec{K}^O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}^{\text{внеш}})$$

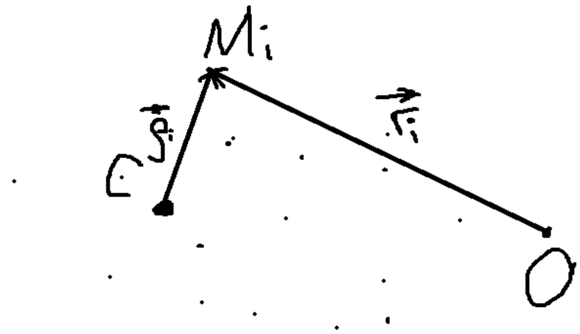
Уравнение описывает вращение системы относительно O.

Законы сохранения вектора кинетической энергии.

Кинетический момент механической системы в её относительном движении относительно центра масс механической системы

$\vec{K}$ относительного движения

$i=1,..,n$

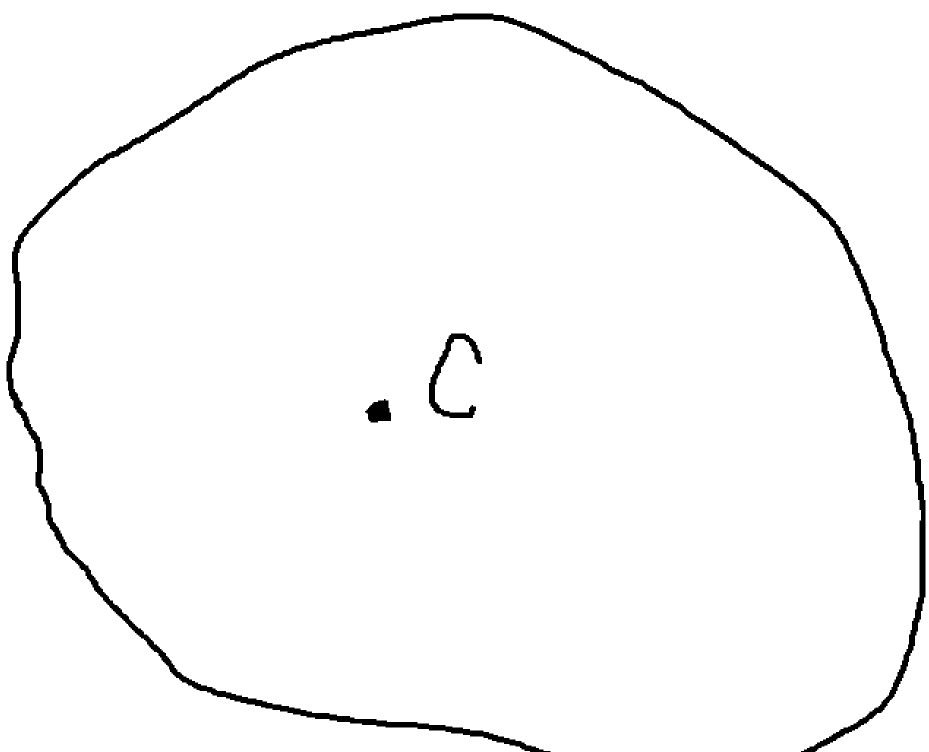


Кёнигова система отсчёта - подвижная система отсчёта, с осями координат параллельными инерациальной системе отсчёта и с центром, связанным с центром масс механической системы.

$$\vec{K}^O = \sum \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i =$$
$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$$
$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_i^{(r)}$$
$$= \sum (\vec{r}_C + \vec{\rho}_i) \times m_i(\vec{v}_C + \vec{v}_i^{(r)}) =$$
$$= \sum \vec{r}_C \times m_i\vec{v}_C + \sum \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_C + \sum \vec{r}_C \times m_i\vec{v}_i^{(r)} + \sum \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_i^{(r)} =$$
$$= \vec{r}_C \times M\vec{v}_C + \cancelto{0}{\left[\sum m_i\vec{\rho}_i\right]} \times \vec{v}_C + \vec{r}_C \times \cancelto{0}{\sum m_i\vec{v}_i^{(r)}} + \sum \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_i^{(r)} =$$
$$= \vec{M}_O(\vec{Q}) + 0 + 0 + \vec{K}_C^{(r)}$$
$$\vec{K}^O = \vec{K}_C^{(r)} + \vec{M}_O(\vec{Q})$$

Применение теоремы об изменении кинетического момента в случае, если в системе несчётное число точек.

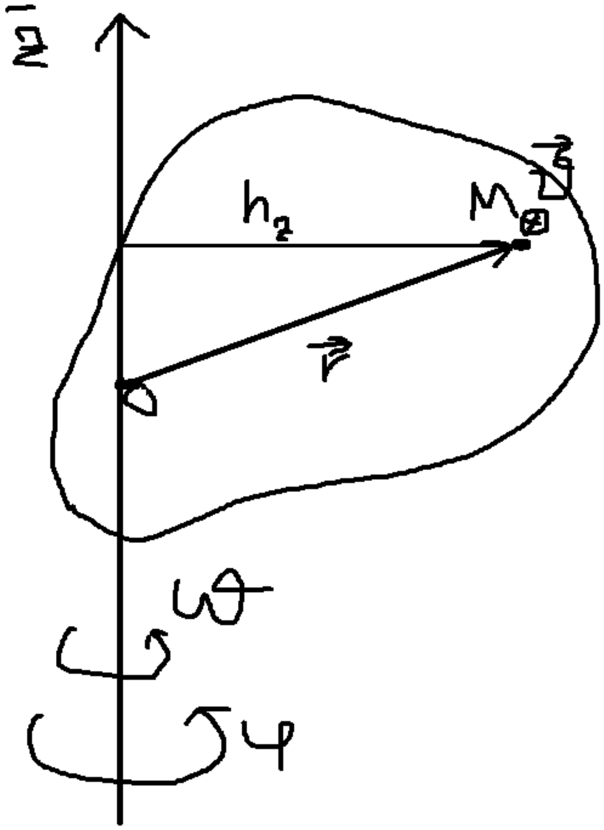
Уравнение поступательного движения абсолютно твёрдого тела



$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = M\vec{a}_C = \sum \vec{F}^{(e)}$$

$$\begin{cases} M\ddot{x} = \sum F_x^{(e)} \\ M\ddot{y} = \sum F_y^{(e)} \\ M\ddot{z} = \sum F_z^{(e)} \end{cases}$$

Вращательное движение



$$\vec{K}_O = \int_V \vec{r} \times dm\vec{v} = \int_V \vec{r} \times \vec{v}\rho dV$$

$$K_{Oz} = \int_V h_z \cdot \omega_z h_z dm$$

$$K_{Oz} = \omega_z \int_V h_z^2 dm$$

Момент инерции твёрдого тела относительно оси z называется следующий интеграл:

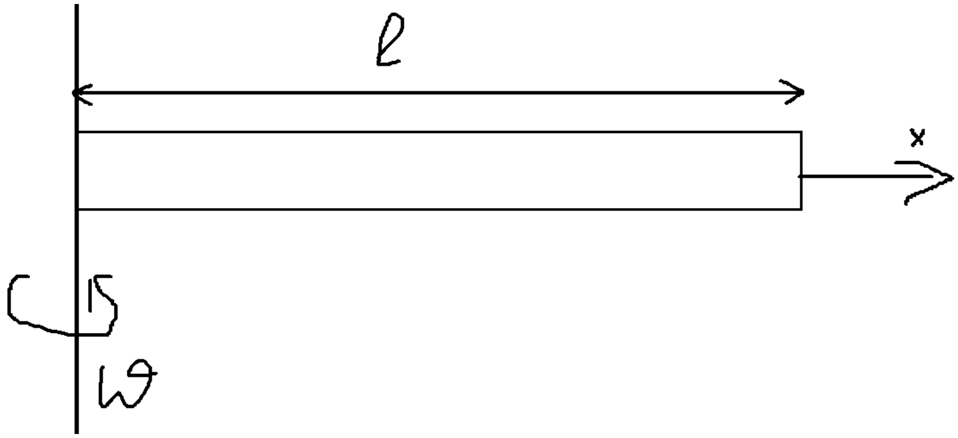
$$I_Z = \int_V h_z^2 dm$$

$$K_{Oz} = I_z \omega_z$$

$$\frac{dK_{Oz}}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\dot{\varphi}) = I_z\ddot{\varphi} = \sum M_{Oz}(\vec{F}^{(e)})$$

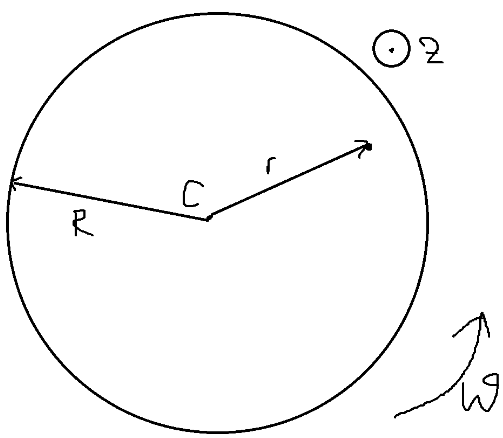
$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_{Oz}(\vec{F}^{(e)})$$

Примеры подсчёта моментов инерции:



$$\rho_l = \frac{dm}{dl}, \text{здесь } \rho_l = \text{const}$$
$$I_z = \int_0^l x^2 \rho_l dx = \frac{\rho_l l^3}{3} = \frac{ml^2}{3}$$

Дома: момент инерции стержня относительно своей середины



$$\rho_S = \frac{dm}{dS} = \text{const}$$
$$I_z = \int_S r^2 \rho_S dS = \begin{bmatrix} S(r) = \pi r^2 \\ dS = 2\pi r \end{bmatrix} = \int_0^l r^2 \rho_S \cdot 2\pi r dr =$$
$$= 2\pi\rho_S \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

для колечка $I_z = mR^2$

11/03/2025

$$K_{OZ} = I_{OZ}\omega_Z$$
$$I_{OZ} = \int_V \rho_Z^2 dm$$

Рассмотрим некоторую декартовую СО.

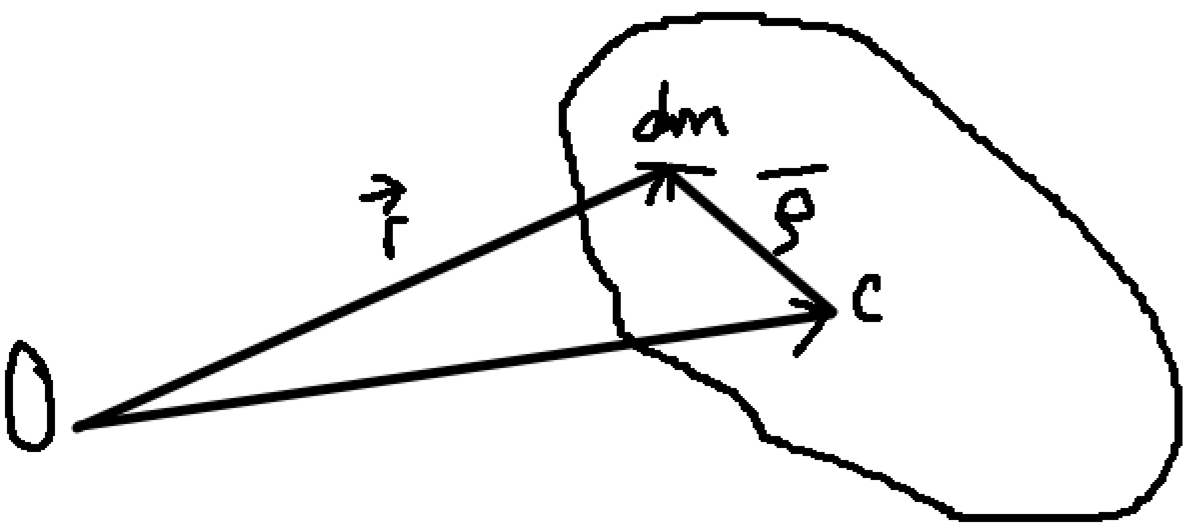
Момент инерции относительно центра координат:

$$I_O = \int_V (x^2 + y^2 + z^2)\rho dV$$

$$I_{OX} = \int_V (y^2 + z^2)\rho dV$$

$$I_{OX} + I_{OY} + I_{OZ} = 2I_O$$

Теорема Гюйгенса-Штейнера:
Момент инерции относительно некоторой точки пространство параллельно оси z можно вычислить как момент инерции относительно оси z, проходящей через центрм масс системы, сложенный с произведением квадрата длины радиус-вектора, соединяющего точки, на массу.



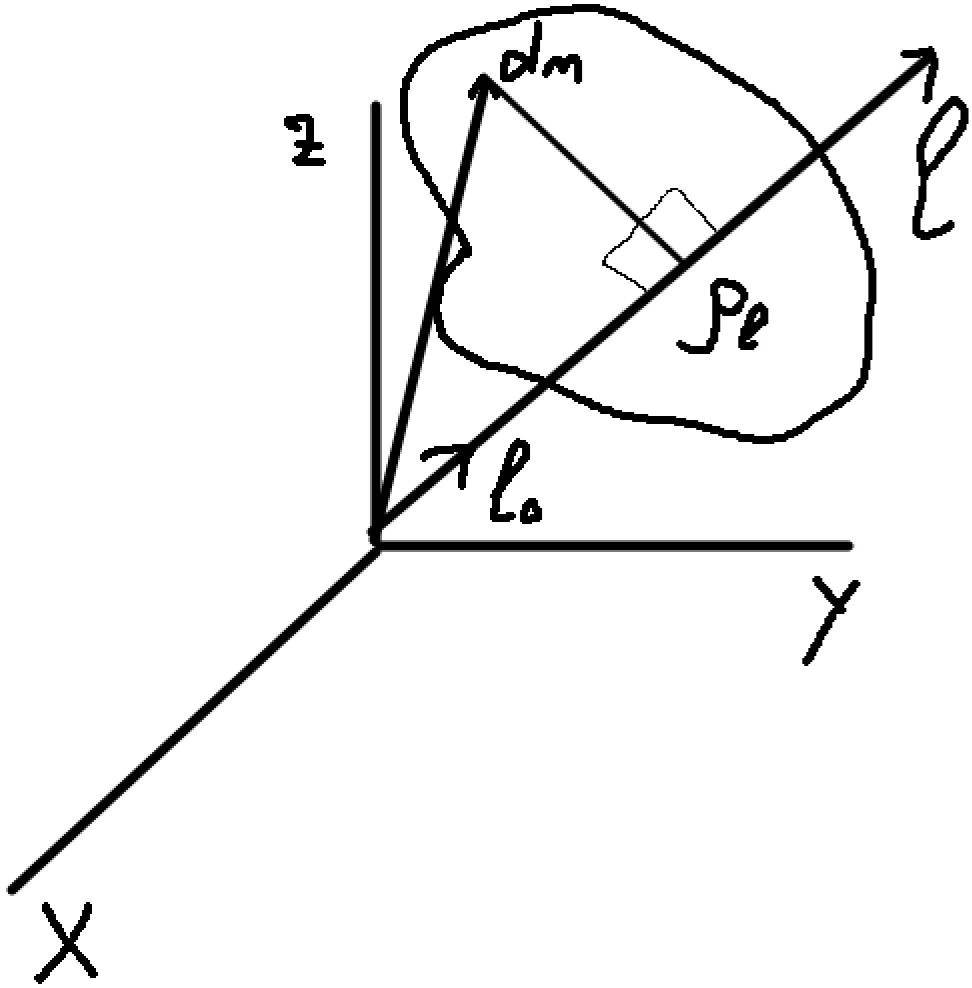
$$I_{OZ} = I_{iZ} + mOC^2$$
$$I_{OZ} = \int_V r^2 dm = \int_V (\overline{OC} + \overline{\rho})^2 dm = \int_V (OC^2 + 2\overline{OC}\overline{\rho} + \rho^2) dm =$$
$$= OC^2 m + 2\overline{OC} \cancelto{m\overline{\rho_C}=0}{\int_V \overline{\rho} dm} + I_{CZ}$$

Центробежные моменты инерции I_{OXY} следующие интегралы

$$I_{OXY} = \int_V xy dm$$

Момент инерции твёрдого тела при вращении вокруг произвольной оси:

$$|\vec{l}_0| = 1$$
$$\cos\alpha = \vec{l}_0 \cdot \vec{i}$$
$$\cos\beta = \vec{l}_0 \cdot \vec{j}$$
$$\cos\gamma = \vec{l}_0 \cdot \vec{k}$$



$$I_{Ol} = \int_V \rho_l^2 dm$$

$$OM_l = \vec{r} \cdot \vec{l} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

$$\rho_l^2 = r^2 - OM_l^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$$

$$I_{Ol} = \int_V [x^2 - x^2\cos^2\alpha + y^2 - y^2\cos^2\beta + z^2 - z^2\cos^2\gamma -$$

$$-2xy\cos\alpha\cos\beta - 2xz\cos\alpha\cos\gamma - 2yz\cos\beta\cos\gamma]dm$$

$$l_0^2 = 1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

$$I_{Ol} = \int_V x^2[\cos^2\beta + \cos^2\gamma] + y^2[\cos^2\alpha + \cos^2\gamma] + z^2[\cos^2\alpha + \cos^2\beta]dm -$$

$$-2I_{Oxy}\cos\alpha\cos\beta - 2I_{Oxz}\cos\alpha\cos\gamma - 2I_{Oyz}\cos\beta\cos\gamma$$

$$I_{Ol} = I_{Ox}\cos^2\alpha + I_{Oy}\cos^2\beta + I_{Oz}\cos^2\gamma - 2I_{Oxy}\cos\alpha\cos\beta - 2I_{Oxz}\cos\alpha\cos\gamma - 2I_{Oyz}\cos\beta\cos\gamma$$

$$I_{Ol} = \vec{l}_O^T \hat{I}_O \vec{l}_O$$

$\hat{I}_O$ - тензор инерции

$$\hat{I_O} = \begin{pmatrix} I_{OX} & -I_{Oxy} & -I_{Oxz} \\ -I_{Oxy} & I_{OY} & -I_{Oyz} \\ -I_{Oxz} & -I_{Oyz} & I_{OZ} \end{pmatrix}$$

Т.к. форма положительно определена существует СК, в которой она имеет диагональный вид
Момент инерции относительно произвольной оси нам необходима информация о моментах инерции этого тела относительно 3 осей,
Главные оси инерции - оси системы отсчёта с центром в точке O, относительно которых матрица

тензора инерции принимает диагональный вид
Если главные центральные оси имеют центр масс, они называются главными
Для определения любого момента инерции, проходящего через некоторую точку
Нам нужно знать осевые моменты инерции относительно 3 главных осей инерции.

Кинетический момент абсолютно твёрдого тела при сферическом движении

$$\vec{K}_O = \int_V \vec{r} \times \vec{v} dm = \int_V \vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}] dm =$$
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$
$$= \int_V \vec{\omega} r^2 - \vec{r}(\vec{r}\vec{\omega}) dm$$
$$K_{OX} = \int_V \omega_x (x^2 + y^2 + z^2) - x(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) dm =$$
$$= \int_V \omega_x x^2 + \omega_x y^2 + \omega_x z^2 - \omega_x x^2 - xy\omega_y - xz\omega_z dm =$$
$$= \omega_x \int_V (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int_V xydm - \omega_z \int_V xzdm$$
$$K_{OX} = I_{OX}\omega_x - I_{Oxy}\omega_y - I_{Oxz}\omega_z$$
$$\vec{K}_O = \hat{I}_O \vec{\omega}$$

Уравнение движения абсолютно твёрдого тела в частных и в общем случае движения
Поступательное:

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{F}^{(e)}$$

Вращательное:

$$I_{Oz}\ddot{\varphi} = \sum M_{Oz}(\vec{F}^{(e)})$$

Плоское:

$$n = 3$$
$$x_C, y_C, \varphi$$
$$\begin{cases} Mx_c = \sum F_x^{(e)} \\ My_c = \sum F_y^{(e)} \\ I_{cz}\ddot{\varphi} = \sum M_{cz}(\vec{F}^{(e)}) \end{cases}$$

Сферическое:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}^{(e)})$$

Выберем подвижную систему координат, связанную с телом.

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{K}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{K}_O$$
$$\frac{\tilde{d}\vec{K}_O}{dt} = \hat{I}_O \vec{r}$$

Выделяем главные оси инерции. В такой системе отсчёта матрица тензора инерции будет диагональной.

$$\vec{K}_O(A\omega_x, B\omega_y, C\omega_z)$$
$$\hat{I}_O\vec{r} = (A\dot{\omega_x}, B\dot{\omega_y}, C\dot{\omega_z})$$
$$\omega \times K_{\vec{o}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ A\omega_x & B\omega_y & C\omega_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} (C-B)\omega_y\omega_z \\ (A-C)\omega_x\omega_z \\ (B-A)\omega_x\omega_y \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} A\frac{d\omega_x}{dt} + (C-B)\omega_y\omega_z = \sum M_{Ox}(\vec{F}^{(e)}) \\ B\frac{d\omega_y}{dt} + (A-C)\omega_x\omega_z = \sum M_{Oy}(\vec{F}^{(e)}) \\ C\frac{d\omega_z}{dt} + (B-A)\omega_x\omega_y = \sum M_{Oy}(\vec{F}^{(e)}) \end{cases}$$

Это были динамические уравнение Эйлера

Случаи:

Волчок (Эйлер)

Тяжёлый волчок (момент силы тяжести) (Лагранж)

некоторое соотношение между моментами (Ковалевская)

Общий случай движения:

n=6

Теорема об изменении движения

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}^{(e)} = M\vec{a}_C$$

Теорема об изменении кинетического момента относительно центра масс

$$\frac{d\vec{K}_C}{dt} = \sum \vec{M}_C(\vec{F}^{(e)})$$

Вычисление моментов инерции для основных симметричных моментов тел

1. Стержень

$$\rho_l = \text{const}, m, l$$
$$I_{Cx} = 0$$
$$I_{cy} = I_{cz} = I_{Oz} - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12}$$

2. Диск

$$I_{Cz} = \frac{mr^2}{2}$$
$$I_{Cx} + I_{Cy} + I_{cz} = 2I_C$$
$$I_C = \int_V \rho_C^2 dm = \int_V \rho_{Cz}^2 dm = I_{Cz}$$
$$I_{cx} = I_{cy} \Rightarrow 2I_{cx} = 2I_{cz} - I_{cz} = I_{cz}$$
$$I_{cx} = I_{cy} = \frac{mr^2}{4}$$

   Это главные оси инерции 100%

3. Шар

$$R, m, \rho = \rho_V = \text{const}$$
$$I_{cx} = I_{cy} = I_{cz} = \frac{2}{3} I_C$$
$$I_C = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV = \int_0^R r^2 \rho 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho \int_0^R r^4 dr = \frac{4}{5}\pi\rho R^5 = \frac{3}{5} m R^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow dV = 4\pi R^2 dR = SdR$$
$$I_{cx} = I_{cy} = I_{cz} = \frac{2}{5} m R^2$$

01/04/2025

Принцип Д'Аламбера

$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$
Рассмотрим подвижную систему отсчёта, связанную с точкой. Оси параллельны осям неподвижной СК.
Скорее всего, это неинерциальная система отсчёта
$ma_\Sigma = \sum \vec{F}_i + \vec{\Phi}^e + \vec{\Phi}^k$
$\vec{r'} = \vec{0}$
$\vec{v'} = \vec{0}$
$\vec{a'} = \vec{0}$

$\vec{0} = \sum \vec{F}_i + \vec{\Phi}^k$
$\vec{\Phi} = -m\vec{a}$
Система сил, действующих на материальную точку, состоящая из всех активных сил реакции и силы Д'Аламбера ($\Phi = -ma$) должна быть уравновешена при любом движении точки.

$\{\vec{F}_i, \vec{\Phi}\} \sim \{\vec{0}\}$
Принцип Д'Аламбера для механической системы:
Наша система состоит из конечного числа материальных точек.
$\vec{\Phi}_i = -m_i \vec{a}_i$
Каждая система сил $\{\vec{F}_{ij}, \vec{\Phi}_i\} \sim \{\vec{0}\} \Rightarrow$
$\begin{matrix} i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in \{1, \dots, m\} \end{matrix} \{\vec{F}_{ij}, \vec{\Phi}_i\} \sim \{\vec{0}\}$
$\{\text{внутренние силы}\} \sim \{\vec{0}\} \Rightarrow$
$\{\text{внешние силы}, \vec{\Phi}_i\} \sim \{\vec{0}\}$
Если система сил эквивалентна 0, то её главный вектор равен 0 и главный момент тоже равен 0.

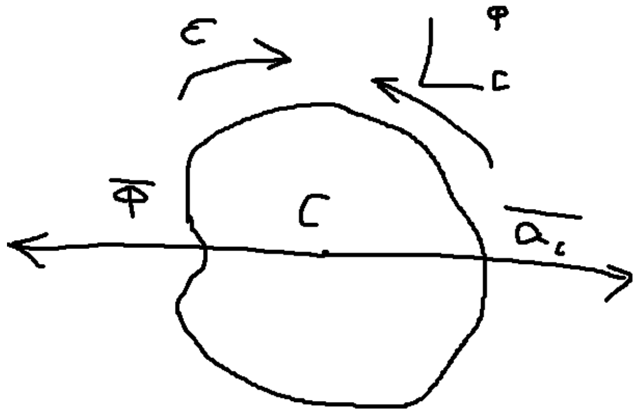
$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i^{(\mathrm{e})} + \sum_i \vec{\Phi}_i = \vec{0}$$
$$\vec{L}_O = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)}) + \sum \vec{M}_O(\vec{\Phi}_i) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}^{\mathrm{e}}$$
$$\vec{\Phi} = \sum_i \vec{\Phi}_i = -\frac{d\vec{Q}}{dt}$$
$$\vec{\Phi} = -M\vec{a}_C$$
$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_i^{(e)})$$
$$\vec{L}_O(\vec{\Phi}) = -\frac{d\vec{K}_O}{dt}$$

Силы инерции Д'Аламбера в разных случаях движения абсолютно твёрдого тела:
(Мы находимся на плоскости)
Для материальной точки:
$\vec{\Phi} = -m\vec{a}$
Для абсоютно твёрдого тела:

1. Поступательное движение ($\vec{a}_i = \vec{a}$):
   $\vec{\Phi} = -M\vec{a}_C$, приложена к центру масс тела
2. Вращательное движение:
   $\vec{\Phi} = -m\vec{a}_C$
   $L_O^{\Phi} = -\frac{dK_{Oz}}{dt} = I_{Oz}\varepsilon_z$

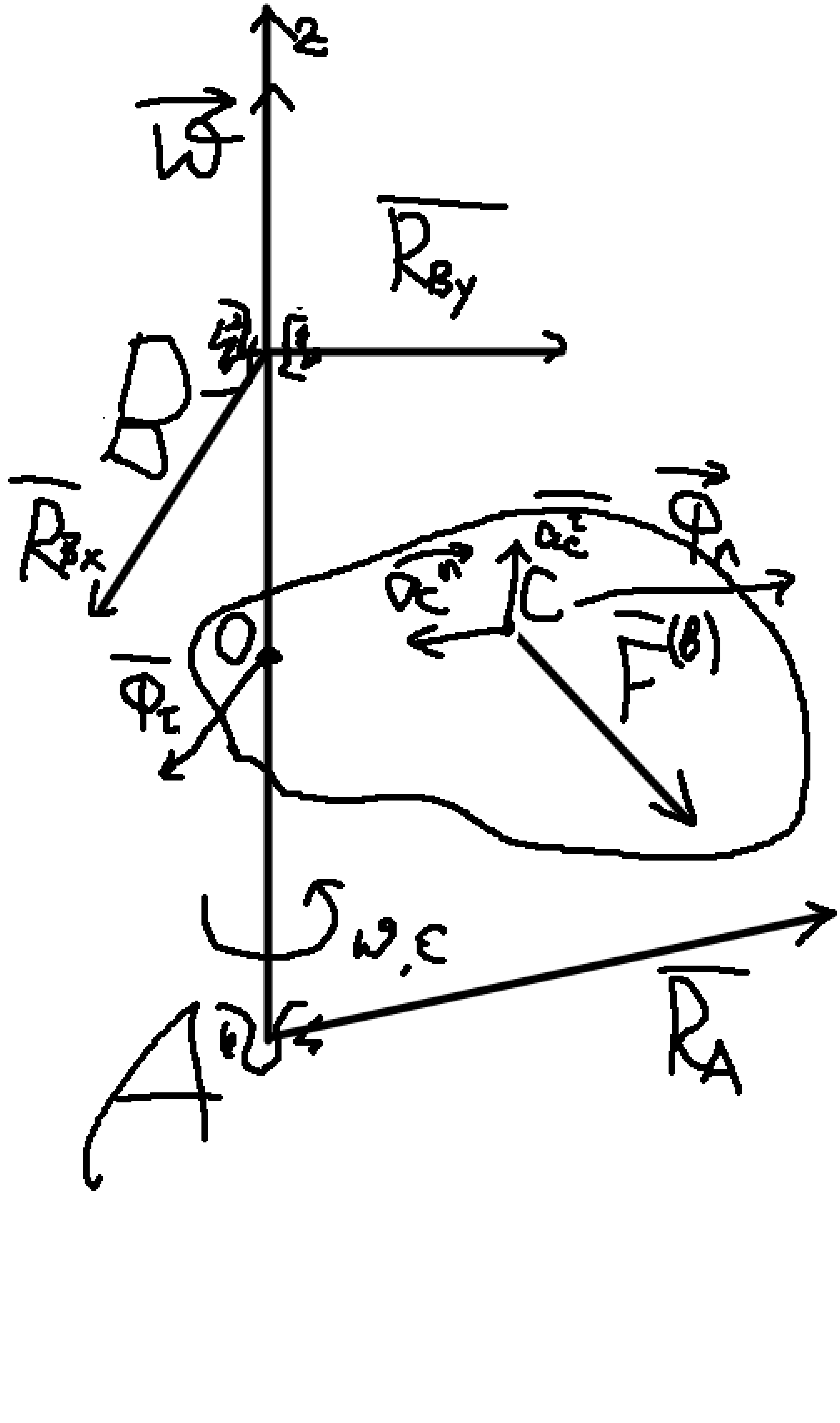
3. Плоское движение:
   Рассматриваем центр масс
   $\vec{\Phi} = -M\vec{a}_C$
   $L_{CZ}^{\Phi} = -I_{CZ}\varepsilon_Z$



Мы могли бы подобное расписать и для пространства, но это не так легко

Метод кинемостатики и его применение к задаче о вращающемся движении абсолютно твёрдого тела

Пусть оси x, y вращаются вместе с телом



$$n = 1$$
$$\#\{\vec{R}_i\} = 5$$
$$\vec{\Phi} = -M(\vec{a}_C^n + \vec{a}_C^\tau)$$
$$\vec{\Phi}_n = -M\vec{a}_C^n$$
$$\vec{\Phi}_\tau = -M\vec{a}_C^\tau$$
$$a_c^n = \omega^2 \cdot y_C$$
$$a_C^\tau = \varepsilon \cdot y_C$$
$$\text{Вызываем Кракена}$$
$$\vec{L}_O^\Phi = -\frac{d\vec{K}_O}{dt} = -\frac{\tilde{d}\vec{K}_O}{dt} - \vec{\omega} \times \vec{K}_O$$
$$\vec{\omega}(0, 0, \omega_z)$$
$$\vec{K}_O = \hat{I}_O\vec{\omega}$$
$$\hat{I}_O = \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ \dots & I_y & I_{yz} \\ \dots & \dots & I_z \end{pmatrix}$$
$$\vec{K}_O(-I_{xz}\omega_z, -I_{yz}\omega_z, I_z\omega z)$$
$$\vec{L}_O^\Phi = \begin{pmatrix} I_{xz}\varepsilon_z \\ I_{yz}\varepsilon_z \\ -I_z\varepsilon_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I_{YZ}\omega_z^2 \\ I_{YZ}\omega_z^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{\omega} \times \vec{K}_O = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_z \\ K_{OX} & K_{OY} & K_{OZ} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{OY}\omega_z \\ K_{OX}\omega_z \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{L}_O^\Phi = \begin{pmatrix} I_{xz}\varepsilon_z - I_{YZ}\omega_z^2 \\ I_{yz}\varepsilon_z + I_{YZ}\omega_z^2 \\ -I_z\varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Применение принципа Д'Аламбера в таких случаях называют применением принципа кинемостатики.

Принцип Д'Аламбера для вот этого абсолютно твёрдого тела:

$$\{\vec{R}_i, \vec{F}^{(e)}, \vec{\Phi}, \vec{L}_O^\Phi\} \sim \{\vec{0}\}$$
$$\begin{cases} x : R_A^x + R_B^x + F_x^e + \Phi_\tau = 0 \\ y : R_A^y + R_B^y + F_y^e + \Phi^n = 0 \\ z : R_A^z + F_z^e = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \sum M_{OX} : & R_A^Y \cdot AO & -R_B^Y \cdot OB + & M_{OX}^e & +L_{OX}^\Phi = 0 \\ \sum M_{OY} : & -R_A^X \cdot OA & +R_B^X \cdot OB + & M_{OY}^e & +L_{OY}^\Phi = 0 \\ \sum M_{OZ} : & & & M_{OZ}^e & -I_z\varepsilon_z = 0 \end{cases}$$

Статические реакции - те реакции в опорах, которые возникают под действием внешних активных сил.

Динамиеческие реакции - те реакции, которые возникают при воздействии сил инерции.

$$\vec{R}_A = \vec{R}_A^{\text{ст}} + \vec{R}_A^{\text{д}}$$
$$\vec{R}_B = \vec{R}_B^{\text{ст}} + \vec{R}_B^{\text{д}}$$
$$\{\vec{R}_A^{\text{ст}}, \vec{R}_B^{\text{д}}, \vec{F}^e\} \sim \{\vec{0}\} \Rightarrow$$
$$\{\vec{R}_A^{\text{д}}, \vec{R}_B^{\text{д}}, \vec{\mathit{\Phi}}, \vec{L}_O^\Phi\} \sim \{\vec{0}\}$$

Иногда стоит соблюдать технику безопасности

Статическая и динамическая уравновешенность:

Уравновешенность - сведение к минимуму таких-то реакций.

Нахождение центра масс на оси вращения - это один способов минимизировать эти реакции.

Динамическое уравнение
$\vec{R}_A^{\text{д}} = 0, \vec{R}_B^{\text{Д}} = 0 \Rightarrow \{\vec{\Phi}, \vec{L}_O^{\Phi}\} \sim \{\vec{0}\}$
Также можно взять в качестве оси вращения ось симметрии (в общем виде, главную центральную ось инерции).

08/04/2025

Аналитическая механика
Конец 18 - начало 19 века
Гамильтоновой механики не будет, будет Лагранж

Ряд переопределений уже известных величин
Любое уравнение, ограничивающие координаты и скорости точки вида
$f(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \wedge 0$ - связь
Если $\wedge$ это $=$ - удерживающая связь
Если $\wedge$ это $>$ - неудерживающая связь

Рассмотрим качение мячика по поверхности
Тогда высота шарика в пространстве равна константе - удерживающая связь.
Игра в теннис - различные варианты высоты шарика в пространстве, ограничение влияния земли на шарик будет неравенством (центр шарика не может быть ниже R) - неудерживающая связь

Связь стационарна, если она не зависит явным образом от времени.
$f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = 0$
Нестационарна, если явным образом зависит от времени.

Если лифт движется вверх, то координата центра масс лифта зависит от времени - нестационарная связь.

Связь геометрическая, если она явно не зависит от скорости
$f(t, \vec{r}) = 0$
Связь кинематическая, если она явно зависит от скорости

Например, для цилиндра такими связями будут
$y_C = R$ и $v_p = 0$

Связь интегрируемая, если она приводит к дифференциальному уравнению, которое мы можем свести к геометрической связи
$f(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}) \to f_2(t, \vec{r})$

$v_C = \omega R$
$\dot{x}_C = \dot{\varphi} R$
$dx_C = d\varphi R$
$x_C = \varphi R + C$

Контрпример: качение шара по поверхности, связь, ограничивающая положение точек шара будет $\pm$ таким же, но сферическим, а значит, что выражается через уравнения Эйлера - а в лоб их проинтегрировать нельзя.
Такие связи называют неинтегрируемыми.

Голономная связь - геометрическая или интегрируемая кинематическая связь.

Понятие возможных перемещений

Возможное перемещение - это любое бесконечномалое перемещение точки, незапрещённое связями, в данный момент времени.
$\delta\vec{r} = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}$
Возможным перемещением времени будет её изохронная вариация радиус-вектора.

Пусть на точку наложена связь вида $f(x, y, z, t) = 0$

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt$$

Если связь, наложенная на точку, стационарна, то $\delta f = df$.
Если она нестационарна, то $\neq$

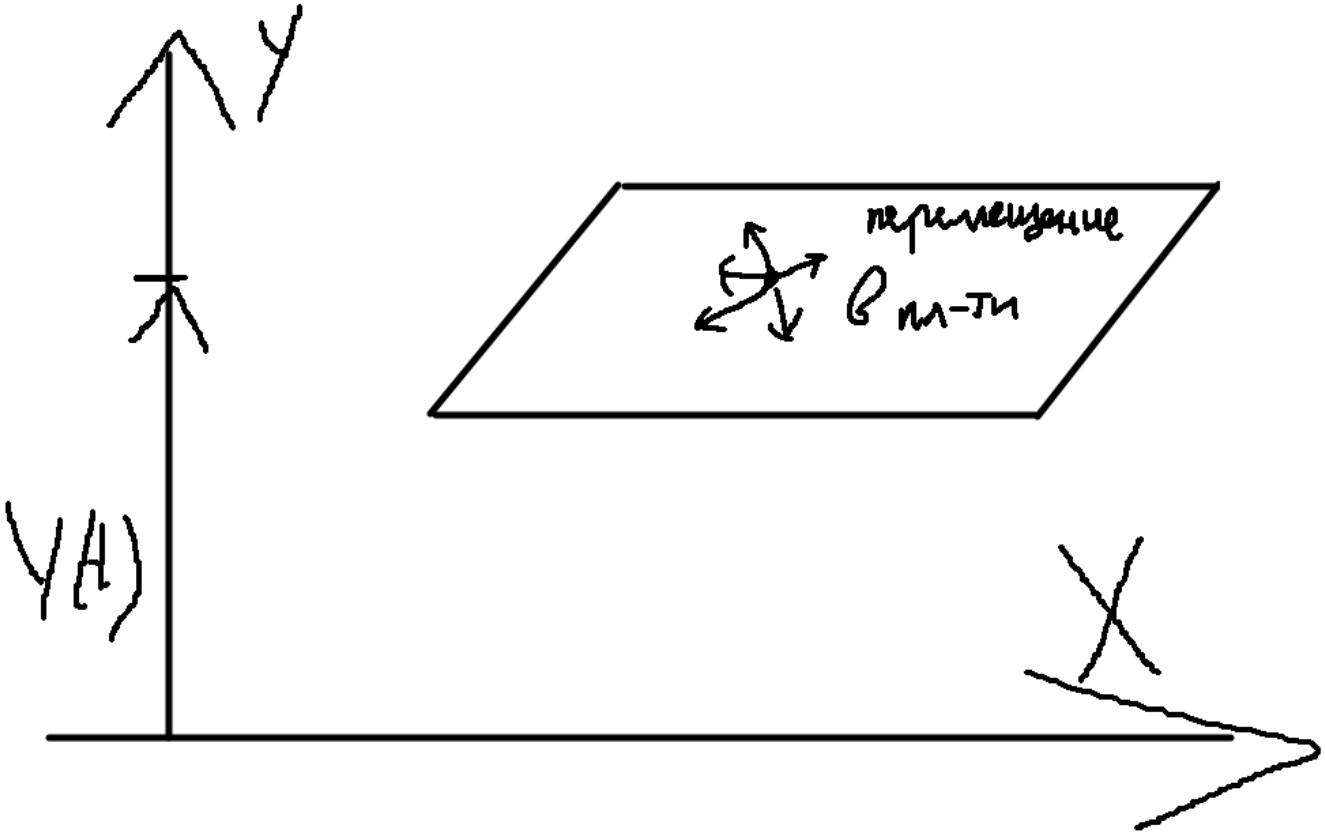
Рассмотрим нормаль

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{\operatorname{grad} f}}{|\vec{\operatorname{grad}} f|}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\operatorname{grad}} f \cdot \delta\vec{r} = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z$$

у задаёт положение плоскости



$$
\begin{gathered}
y-f(t)=0 \\
dy=f'(t)dt \\
\delta y=\delta(f(t))=0 \Rightarrow \delta y=0
\end{gathered}
$$

Идеальные реакции связи.
Возможная работа δA - работа силы на некотором возможном перемещении точки.
Идеальная связь - такая, возможная работа реакции которой $=0$ на любом возможном перемещении точки.

Нормальная реакция опоры, как сила реакции для любой геометрической стационарной связи, - идеальная реакция связи

$$
\begin{gathered}
f(x,y,z)=0 \\
\vec{N}=\lambda\vec{n} \\
\delta A(\vec{N})=\lambda\vec{n}\delta\vec{r}=\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z\right)=\lambda\delta f=0
\end{gathered}
$$

Трение без проскальзывания - тоже

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N точек. Каждая из этих точек описывается набором из 3 вещественных координат.
Суммарное число координат - $3N$.
Предположим, что на точки системы наложены некие голономные связи вида

$$m:\{f_j(x_iy_i,z_i,t)=0$$

Количество степеней свободы этой системы - количество независимых вариаций координат точек системы.

В нашем случае всего вариаций будет $3N$
Для $j = 1 \dots m$

$$\sum_i \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \sum_i \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i = 0$$

Количество независимых вариаций будет $3N - m$

Обобщёнными координатами называется минимальный набор независимых геометрических параметров, которыми однозначно описывается перемещение любой точки системы.

Для системы, на которую наложены только голономные связи, количество обобщённых координат совпадает с числом степеней свободы этой системы.

Примеры обобщённых координат
Рассмотрим движение 3 точек на плоскости, соединённых упругими элементами.
С позиции обычной декартовой системы координат 6 параметров.
Мы можем ввести полярную систему с центром в (x_M, y_M), расстоянием до точки и углом до неё BM, φ
Для задания точек A и C введём еще P, S треугольника ABC
$x_M, y_M, BM, \varphi, P, S$

Например, закон площадей можно рассматривать как условие на то, что "скорость" площади = 0

Принцип Лагранжа (принцип возможных перемещений)
Расмотрим некоторую механическую систему. Она будет состоять из материальных точек и абсолютно твердых тел. Предположим, что данная система находится в равновесии.
Если на эту систему наложены идеальные стационарные голономные связи, то для того чтобы данная система находилась в состоянии покоя необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_i \delta A(F_i) = 0$$

Обоснование:
Пусть мы система находится в равновесии. Тогда

$$\forall i : \sum_j \vec{F}_{ij} + \vec{R}_{ij} = 0 \Rightarrow$$
$$\left(\sum_j \vec{F}_{ij} \delta\vec{x} + \vec{R}_{ij} \delta\vec{x} \right) = 0 \Rightarrow$$
$$\sum_i \delta A(\vec{F}_{ij}) = \sum_i \sum_j \vec{F}_{ij} \delta\vec{x} + \vec{R}_{ij} \delta\vec{x} = 0$$

Пусть $\sum \delta A(\vec{F}_i) = 0$
Предположим, что система не находится в равновесии

$$\exists F_I : \vec{F}_I \cdot \delta\vec{r} \neq 0$$
$$\text{Так как связи, наложенные на нашу систему, стационарные}$$
$$\text{Теорема об изменении кинетической энергии}$$
$$dT = \sum d(A) \neq 0 \Rightarrow \text{не равновесие} \Rightarrow \text{противоречие}$$

Предположим, что МС находится в равновесии и к ней применим принцип возможных перемещений. Введём набор обобщённых координат, полагая число степеней свободы $= n$.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n)$$
$$\delta\vec{r}_i = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^j}\delta q^j$$
$$\vec{F} - \text{равнодействующая, приложенная к } i\text{-й точке}$$
$$\sum \delta A(\vec{F}) = \sum_i \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \sum_j \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^j}\delta q^j == \sum_j \left(\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^j}\right)\delta q^j = \sum Q_j \delta q^j$$
$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q^j}$$

$$\sum \delta A(\vec{F}) = \sum_j Q_j \delta q_j = 0$$

Пусть $\delta r_i : \begin{cases} \delta q_1 \neq 0 \\ \delta q_j = 0, \quad j \neq 1 \end{cases} \Rightarrow Q_1 = 0$
$\delta r_i : \begin{cases} \delta q_2 \neq 0 \\ \delta q_j = 0, \quad j \neq_2 \end{cases} \Rightarrow Q_2 = 0$
$\Rightarrow Q_j = 0$

Для того, чтобы система находилась в равновесии, необходимо чтобы все обобщённые силы равнялись 0.

Поиск отдельных реакций связи.
Предположим, что мы зафиксировали все точки системы и число степеней свободы $= 0$.
Рассмотрим эту систему как экивалентную МС с 1 степенью свободы, на которую действует реакция связи $\vec{R}_i$
Для системы с 1 степенью свободы введём 1 обобщённую координату q_1
Принцип возможных перемещений для такой системы:

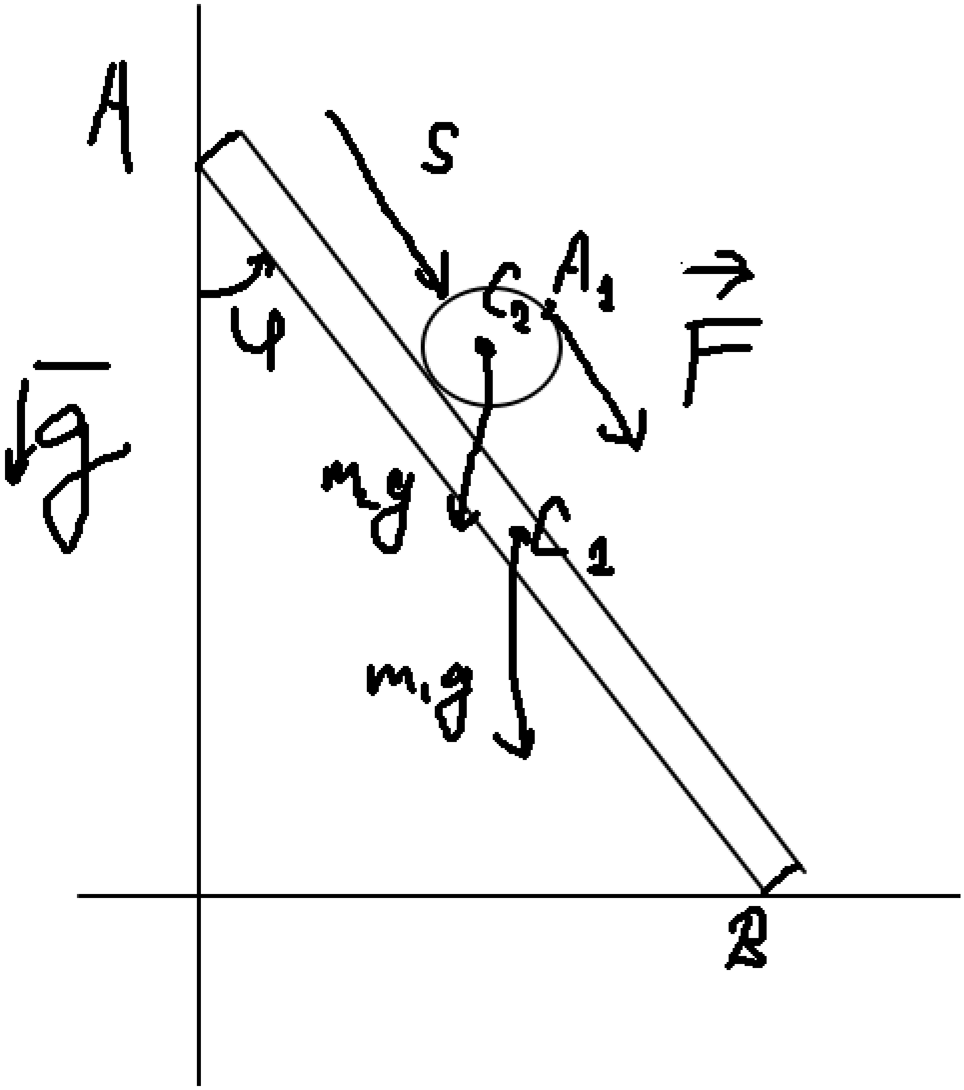
$$\sum \delta A(\vec{F}_i, \vec{R}) = 0$$
$$Q_1(\vec{F}_i, \vec{R}) = 0$$

Связь обощённых сил от потенциальных

22/04/2025

Уравнение Лагранжа второго рода

\end{gather}$$



Решение:

$$n = 2$$

$$\text{Выбрали } \varphi, s$$

$$Q_i = Q_i^{\text{п}} + Q_i^{\textit{непотенциальных}} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + Q^{\text{нп}}$$

$$T = T_1 + T_2$$

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{I_{1C_1}\omega_1^2}{2}$$

$$T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{I_{2C_2}\omega_2^2}{2}$$

$$\omega_1^2 = \dot{\varphi}^2$$

$$\overrightarrow{OC_1} = \begin{pmatrix} \frac{l\sin\varphi}{2} \\ \frac{l\cos\varphi}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{v_{C_1}} = \begin{pmatrix} \frac{l}{2}\cos\varphi\dot{\varphi} \\ -\frac{l}{2}\sin\varphi\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$v_{c^1}^2 = \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2$$

$$\overrightarrow{OC_2} = \begin{pmatrix} s\sin\varphi + r\cos\varphi \\ (l-s)\cos\varphi + r\sin\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{v_{C_2}} = \begin{pmatrix} \dot{s}\sin\varphi + s\sin\varphi\dot{\varphi} + \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi} \\ -\dot{s}\cos\varphi - (l-s)\sin\varphi\dot{\varphi} + \dot{r}\sin\varphi + r\sin\varphi\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$v_{C_2}^2 = [\dot{s}\sin\varphi + (s\cos\varphi - r\sin\varphi)\dot{\varphi}]^2 + [\dot{s}\cos\varphi + [(l-s)\sin\varphi - r\cos\varphi]\dot{\varphi}]^2$$

$$\vec{\omega}_2 = \underbrace{\vec{\omega}_l}_{\vec{\omega}_1} + \vec{\omega}_r$$

$$|\vec{\omega}_r| = \frac{|\dot{s}|}{r}$$

$$|\vec{\omega}_r| = \left|\varphi - \frac{\dot{s}}{2}\right|$$

$$\omega_r^2 = \left(\dot{\varphi} - \frac{\dot{s}}{r}\right)^2$$

$$T = \frac{m_1 l^2}{2\cdot 4}\dot{\varphi}^2 + \frac{m_1 l^2}{12}\cdot\frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m_2 v_l^2}{2} + \frac{m_r r^2}{2}\frac{\left(\dot{\varphi} - \frac{\dot{s}}{2}\right)^2}{2}$$

$$Q^{\text{п}} : U = U_1^T + U_2^T = \frac{m_1 g l\cos\varphi}{2} + m_2 g[(l-s)\cos\varphi + r\sin\varphi]$$

$$Q_\varphi^{\text{п}} = -\frac{\partial U}{\partial\varphi} = \frac{m_1 g l}{2}\sin\varphi - m_2 g[r\cos\varphi + (s-l)\sin\varphi]$$

$$Q_s^{\text{п}} = -\frac{\partial U}{\partial s} = m_2 g\cos\varphi$$

$$v_{C_2}^e = \begin{pmatrix} [s\cos\varphi - r\sin\varphi]\dot{\varphi} \\ [r\cos\varphi - (l-s)\sin\varphi]\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$v_{A_1} = \begin{pmatrix} (s\cos\varphi - r\sin\varphi)\dot{\varphi} - r\dot{\varphi}\sin\varphi \\ [r\cos\varphi - (l-s)\sin\varphi]\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F\sin\varphi \\ F\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$Q_\varphi(\vec{F}) = \left|\begin{matrix} \delta\varphi F\sin\varphi[s\cos\varphi - 2r\sin\varphi] \\ \delta\varphi[F\cos\varphi(2r\cos\varphi - (l-s)\sin\varphi)] \\ \delta\varphi \neq 0 \\ \delta s = 0 \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{F\sin\varphi(s\cos\varphi - 2r\sin\varphi)\delta\varphi}{\delta\varphi} + \frac{F\cos\varphi(2r\cos\varphi - (l-s)\sin\varphi)\delta\varphi}{\delta\varphi}$$

29/04/2025

Структура левых частей уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + Q^{\text{н.п.}}$$

$$T = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$$

$$\vec{r}(q_1, \ldots, q_n)$$

$$\dot{\vec{r}}_j = \sum_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial q_i}$$

$$A_{jk} = m_i \sum_{j,k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

$$T = \sum_{j,k} \frac{A_{j,k} \dot{q}_j \dot{q}_k}{2}$$

Линейно диссипативные силы

Диссипативная сила - сила сопротивления со стороны среды, которая действует на нашу систему.

Линейно диссипативная сила - диссипативная сила, которая линейно зависит от относительной скорости точки относительно среды. $\vec{F}^{\text{д}} = -\mu \vec{v}^{\text{r}}$

$$Q_i(\vec{F}^{\text{д}}) = \frac{\vec{F}^{\text{д}} \delta \vec{r}}{\delta q_i} =$$

$$\vec{F}^{\text{д}} = -\mu \dot{\vec{r}}$$

$$\delta \vec{r} = \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$\delta A(\vec{F}^{\text{д}}) = -\mu \dot{\vec{r}} \sum_i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \delta q_i =$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_i}$$

$$= -\mu \dot{\vec{r}} \sum_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \sum_i -\frac{\mu}{2} \frac{\partial v^2}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i$$

$$\delta(\vec{F}^{\text{д}}) = -\sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$\Phi = \frac{\mu v^2}{2} - \text{диссипативная функция Релея}$$

$$Q_i(\vec{F}^{\text{д}}) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + Q^{\text{н.п.н.д}}$$

Физический смысл диссипативной функции Релея

Рассмотрим механическую систему, на которую действуют только потенциальные и линейно диссипативные силы. В этом случае можно записать теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме

$dT = -dU + d'A(\vec{F}_j^{\text{д}})$

$d'A(\vec{F}_j^{\text{д}}) = \sum_j -\mu_j \vec{v}_j d\vec{r}_j$

$$\frac{d}{dt}T = -\frac{d}{dt}U - \sum_j \mu_j \vec{v}_j \frac{d\vec{r}_j}{dt}$$
$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dU}{dt} - 2\Phi$$
$$E = T + U$$
$$\frac{dE}{dt} = -2\Phi$$

Малые колебания механических систем

$$U(\vec{q}_0)|_{q_i \sim 0} = \underbrace{U(0)}_{=0} + \sum_i \cancelto{0}{\frac{\partial Q}{\partial q_i}(0)} q_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 Q}{\partial q_i \partial q_j}(0) q_i q_j + O(q_i^3) \approx \sum_{i,j} C_{i,j} q_i q_j$$
$$C_{i,j} - \text{положительно определённая матрица}$$

В консервативных системах полная энергия - постоянная величина

$$E = \mathrm{const} = T + U = \sum_{ij}\frac{A_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j}{2} + \sum_{i,j} C_{i,j} q_i q_j$$

Уравнение малых колебаний с 1 степенью свободы в окрестности устойчивого положения равновесия.

$$T = \frac{A(q)\dot{q}^2}{2} = \frac{\left(A(0) + \frac{\partial A}{\partial \dot{q}}\dot{q} + \dots\right)\dot{q}^2}{2}$$
$$U = U(q) = U_0 + \cancelto{0}{\frac{\partial U}{\partial q}} q + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial q^2} q^2 \approx \frac{Cq^2}{2}$$
$$\frac{\partial T}{\partial q} \sim \dot{q}^2 \sim 0$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \sim \left(A(0) + \frac{\partial A}{\partial q} q + \dots\right)\dot{q} \sim A(0)\dot{q}$$
$$a = A(0)$$
$$c = \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}$$
$$a - \text{обобщённый коэффициент энергии}$$
$$c - \text{обобщённый коэффицент упругости / жёсткости}$$
$$T \underset{\text{ур-ния Л}}{\rightarrow} a\ddot{q}$$
$$U \rightarrow -cq = -\frac{\partial U}{\partial q} = Q^{\text{п}}$$

Для консервативной системы вид уравнения колебаний вблизи устойчивого положения равновесия:

$$a\ddot{q} + cq = 0$$

Для диссипативной системы:

$$Q^{\text{д}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}$$
$$\Phi = \frac{B(q)\dot{q}^2}{2}$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} = B(q)\dot{q} \approx B(0)\dot{q}$$
$$b = B(0) - \text{обобщённый коэффициент сопротивления}$$
$$\Phi \rightarrow -b\dot{q}$$
$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = 0$$

Для системы уравнение малых колебаний - линейное однородное дифференциальное уравнение

Структура действия сил в окрестности положения равновесия

Стационарные, голономные, удерживающие связи

Положение равновесия $q = 0$

Рассмотрим силу F, действующую на точку системы

Пусть $\vec{F}(q, \dot{q}) = \vec{F}(0, 0) + \frac{\partial \vec{F}}{\partial q}|_0 q + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \dot{q}}|_0 q + O(q^2, \ldots, \dot{q}^2)$

$\vec{F}(t) \to Q = \vec{F}(t) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} = Q(t)$

Общий вид уравнения колебаний - ЛНДУ

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = f(t)$$

Решение уравнения малых колебаний для консервативной системы:

$$a\ddot{q} + cq = 0$$
$$a\lambda^2 + c = 0$$
$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$
$$c < 0 \Rightarrow$$
$$q = C_1 e^{\lambda t} + C_2 e^{-\lambda t} - \text{ неустойчивое положение равновесия}$$
$$c = 0 \Rightarrow$$
$$\ddot{q} = 0 \Rightarrow q = C_3 t + C_4 \text{ - неустойчиво}$$
$$c > 0 \Rightarrow$$
$$q = C_5 \cos kt + C_6 \sin kt \text{ - устойчиво}$$
$$k = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

k - циклическая частота малых колебаний

$q = C_7 \sin(kt + \varphi_0)$

φ_0 - начальная фаза малых колебаний

$\varphi = kt + \varphi_0$- фаза колебаний

Период - время прохождения между 2 одинаковыми состояниями механической системы

$T = \frac{2\pi}{k}$