

Домашняя работа № 2-3

Рассмотрим на квадрате $[a;b] \times [a;b]$ интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметричным, непрерывным и аналитически заданным ядром:

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s, \tau) x(\tau) d\tau = y(s), \quad s \in [a; b], \quad (1)$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ – фиксированное ненулевое число, не являющееся характеристическим числом интегрального оператора этого уравнения, $K \in C^1([a; b] \times [a; b], \mathbb{R})$ – заданное симметричное ядро этого оператора и $y \in C^1([a; b], \mathbb{R})$ – известная функция.

ЗАДАНИЕ

Используя дискретный аналог уравнения (1), индуцированный методом конечных сумм с квадратурными формулами прямоугольников (количество узлов в квадратурной формуле не менее 20), найти приближённое решение уравнения (1), которое имеет вид:

$$x(s) - \frac{1}{n-47} \cdot \int_0^{\frac{N+7}{N}} K(s, \tau) x(\tau) dt = \frac{N+3}{N} (s^2 + \frac{n-53}{2}), \quad s \in [0; \frac{N+7}{N}],$$

где N – номер фамилии студента в журнале, n – номер группы и

$$K(s, \tau) = \begin{cases} s \cdot (2 \frac{N+7}{N} - \tau), & 0 \leq s \leq \tau; \\ \tau \cdot (2 \frac{N+7}{N} - s), & \tau \leq s \leq \frac{N+7}{N}. \end{cases}$$

Найти аналитическое решение уравнения, сведя интегральное уравнение к соответствующей краевой задаче.

В узлах сетки наглядно сравнить приближённое решение с аналитическим, построив графики этих решений, и оценить абсолютную погрешность приближённого решения.►

Метод конечных сумм для решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным, непрерывным и аналитически заданным ядром

Для построения дискретного аналога, аппроксимирующего уравнение (1), зададим на квадрате $[a; b] \times [a; b]$ двумерную центрально-равномерную сетку $B \times A = \langle (s_i, \tau_j) : s_i \in B, \tau_j \in A \rangle$ типа $n \times n$ шага (h, τ) . Следовательно, $B = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ и

$A = \langle \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \rangle$ центрально-равномерные сетки отрезка $[a; b]$ с шагами $h = \frac{b-a}{n}$ и

$\tau = \frac{b-a}{n}$, соответственно.

Для любого узла $(s_i, \tau_j) \in B \times A$ ($i, j = \overline{1, n}$) и функций K , x и y из уравнения (1) приняты обозначения: $K_j^i = K(s_i; \tau_j)$, $x^j = x(\tau_j) = x(s_j)$ и $y^i = y(s_i)$. Используя эти обозначения и квадратурную формулу прямоугольников, из уравнения (1) получаем его дискретный аналог, аппроксимирующий уравнение (1) при $h, \tau \rightarrow 0$, в виде СЛАУ:

$$\begin{cases} x^i - \lambda \sum_{j=1}^n K_j^i h \cdot x^j = y^i, \\ i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2)$$

Введём обозначения:

$${}^>\mathbf{x} = [x^1, \dots, x^n], {}^>\mathbf{y} = [y^1, \dots, y^n] \in {}^>\mathbb{R}^n, \mathbf{F} = (\delta_j^i - \lambda K_j^i \cdot h)_n^n = (f_j^i)_n^n \in \mathbf{L}(\mathbb{R}, n), \quad (3)$$

$$\text{где } \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Используя эти обозначения (3), СЛАУ (2) перепишем в виде:

$$\mathbf{F} \cdot {}^>\mathbf{x} = {}^>\mathbf{y}. \quad (4)$$

Решая СЛАУ (4), получаем сеточную функцию ${}^>\mathbf{x} = [x^1, \dots, x^n] \in {}^>\mathbb{R}^{|A|}(A)$, индуцирующую с помощью интерполяции в виде ломаной приближённое решение уравнения (1). При $h, \tau \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) такое приближённое решение в чебышёвской (равномерной) норме сходится к решению уравнения (1).