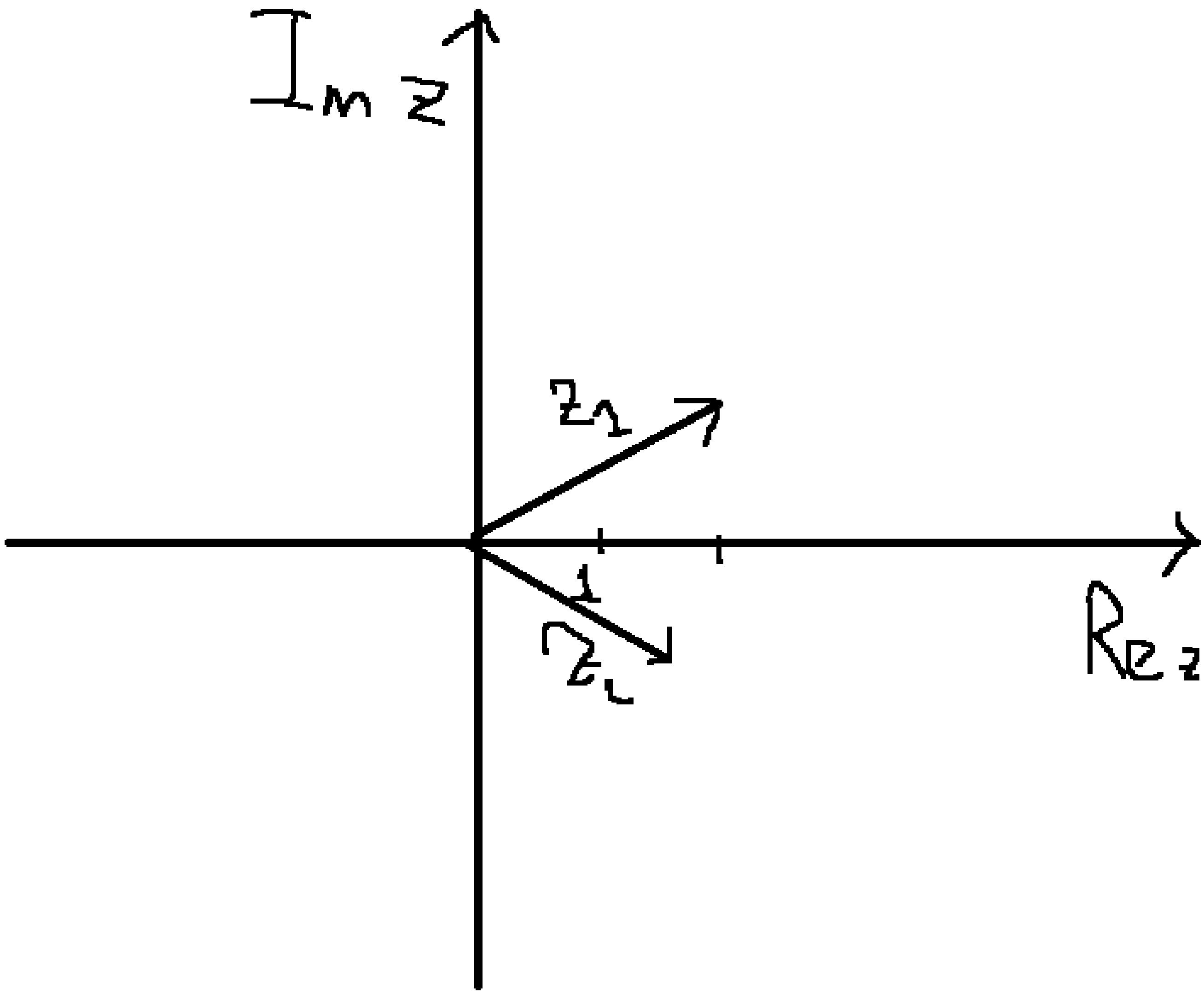
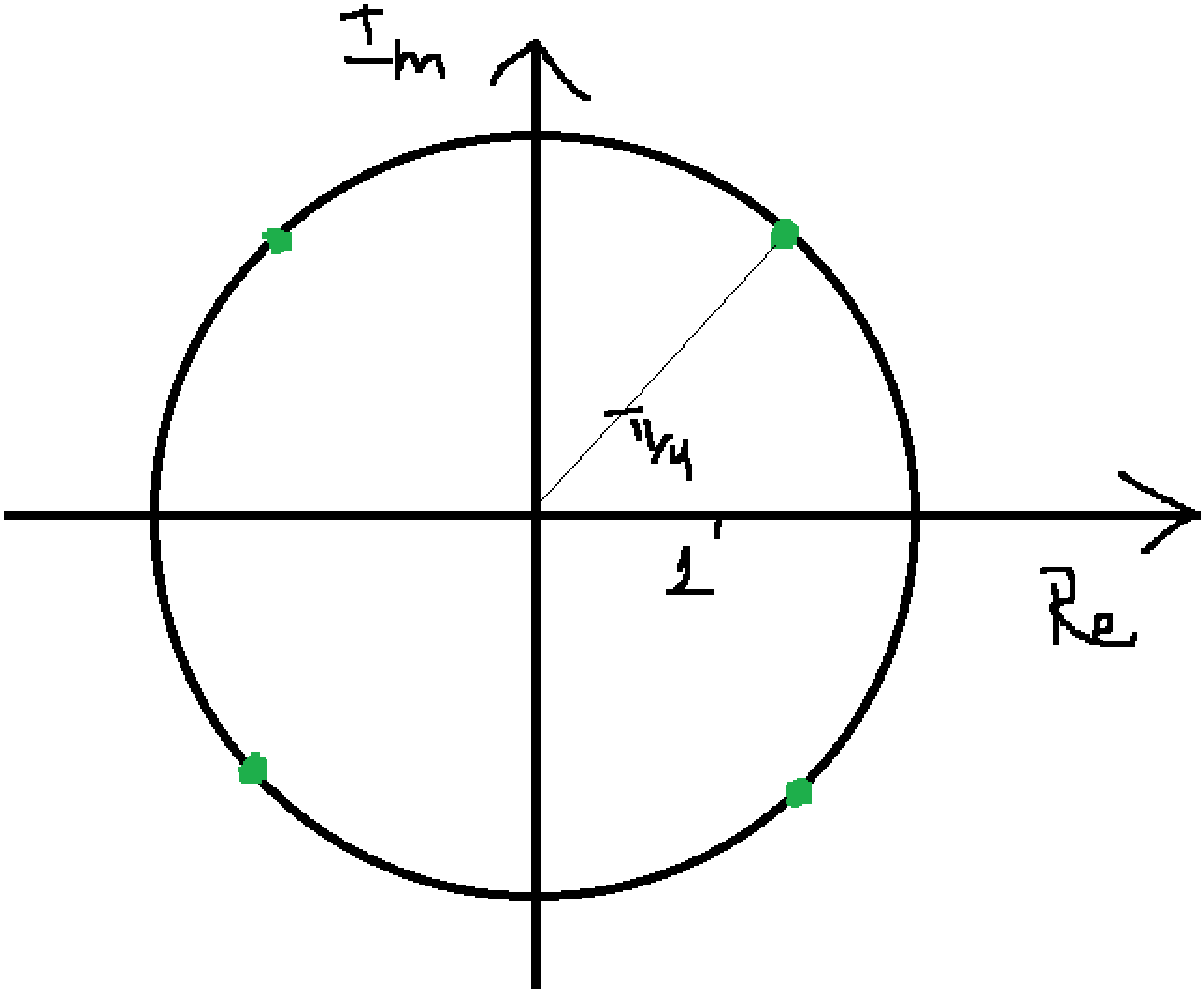
13/02/2025



$$z_1 = \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$
$$z_2 = 2 + 2i = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$z_1 \cdot z_2 = (\sqrt{3} - i)(2 + 2i) = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}i - 2i + 2 = 2\sqrt{3} + 2 + i(2\sqrt{3} - 2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = 2e^{-i\pi/8} \cdot \sqrt{8}e^{i\pi/4} = 2\sqrt{8}e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$
$$4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{3} + 2 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2\sqrt{3} + 2}{4\sqrt{2}}$$

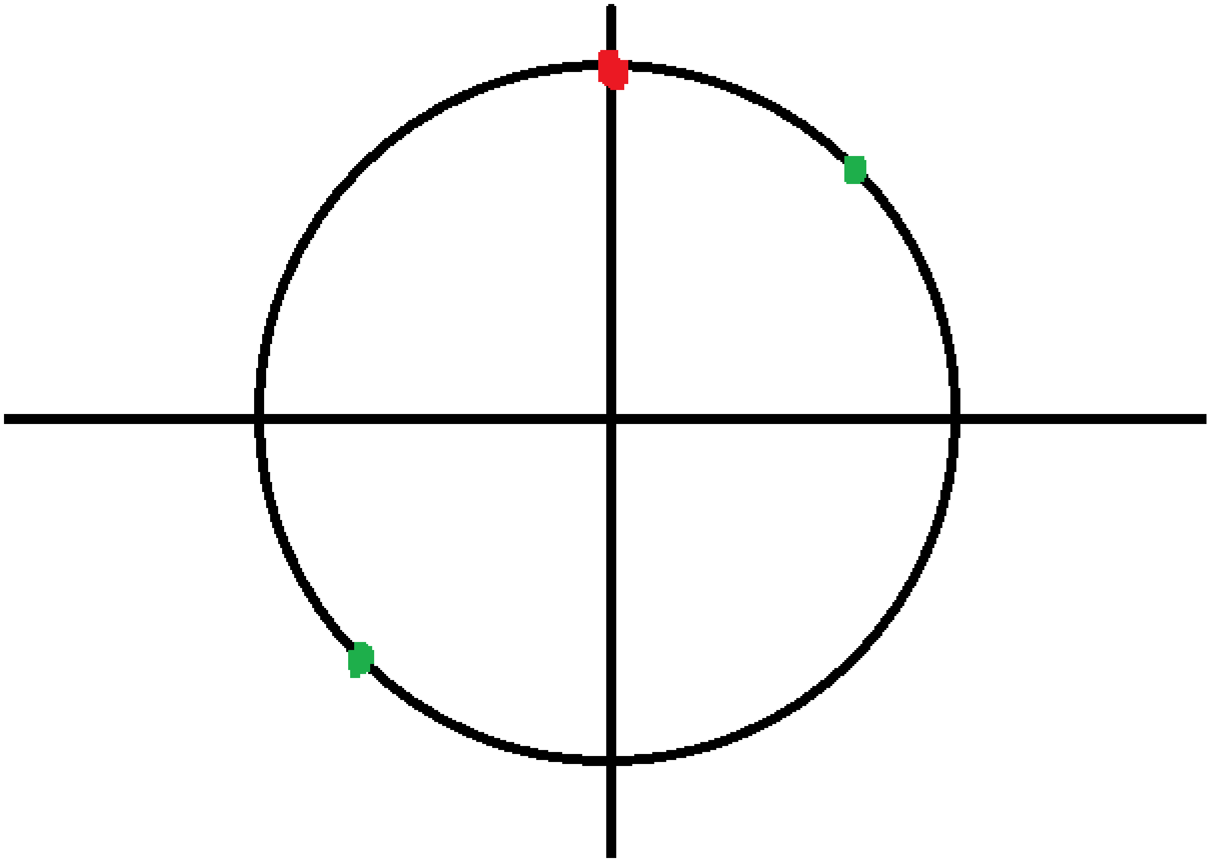
$$\frac{z_1^2}{\overline{z_2}} = \frac{\left(\sqrt{3} - i\right)^2}{2 + 2i} = \frac{3 - 2\sqrt{3}i - 1}{2 - 2i} = \frac{(2 - 2\sqrt{3}i)(2 + 2i)}{(2 - 2i)(2 + 2i)} = \frac{4 + 4i + 4\sqrt{3}i + 4\sqrt{3}}{4 + 4} =$$
$$= \frac{1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})}{2}$$
$$\frac{z_1^2}{\overline{z_2}} = \frac{4e^{-i\pi/3}}{\sqrt{8}e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$z = -16 = 16e^{\pi i}$$
$$\sqrt[4]{z} = 2e^{\frac{1}{4}i(\pi/4+2\pi k)} = 2e^{\frac{1}{4}i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)},\ k \in \{0,1,2,3\}$$
$$x + iy = \pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$$



Корень n-ой степени - n значений

$$\sqrt{-1} = \pm 1$$
$$\sqrt{1} = \sqrt{e^{2\pi n i}} = e^{\pi n i} = \begin{cases} e^0 = 1 \\ e^{\pi i} = -1 \end{cases}$$
$$\sqrt{i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi n\right)} = \begin{cases} e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \\ e^{\frac{5\pi i}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

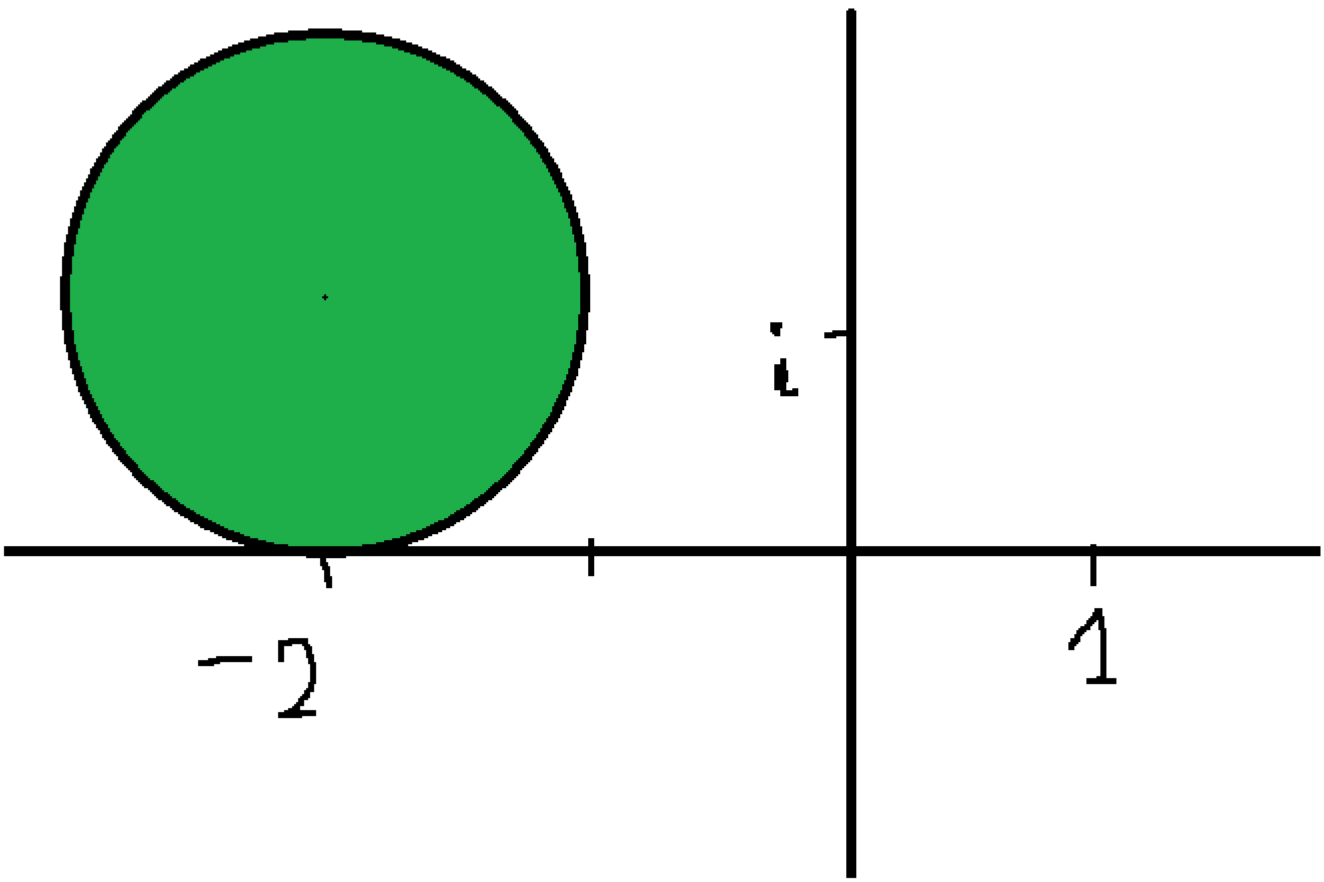


$|z + 2 - i| \leq 1$

Можно свести задачу к школьной, перейдя к декартовым координатам,

но иногда можно решить проще

$|z - (-2 + i)| \leq 1$ – Окружность с центром в (-2+i)



$$\begin{cases} |z+3|+|z+3i| \leq 6 \ - \ \text{Эллипс} \\ |z+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i| > \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

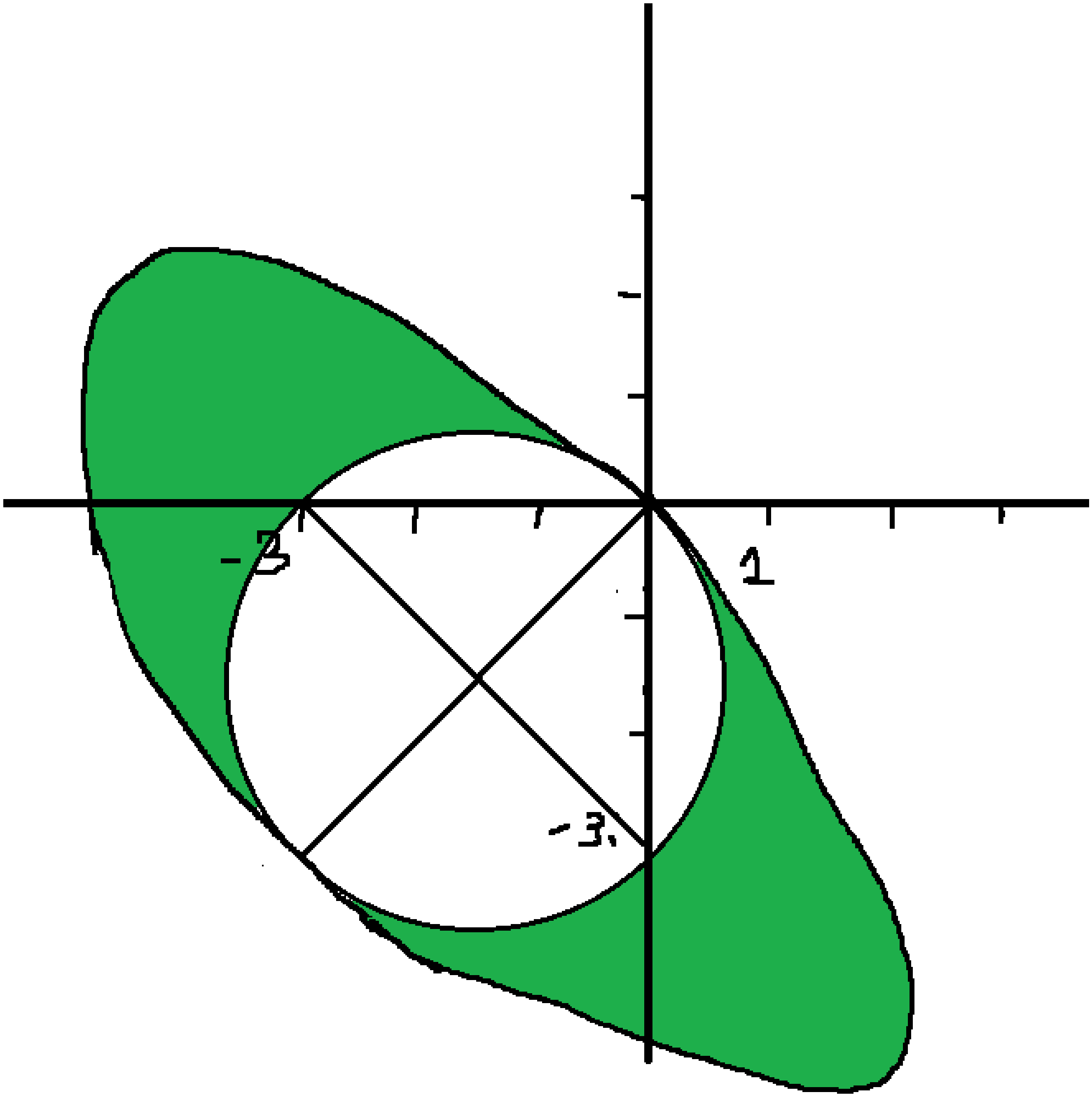
$$z_1 = -3$$

$$z_2 = -3i$$

$$a = \frac{6}{2} = 3$$

$$c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$$

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a \ - \ \text{гипербола}$$

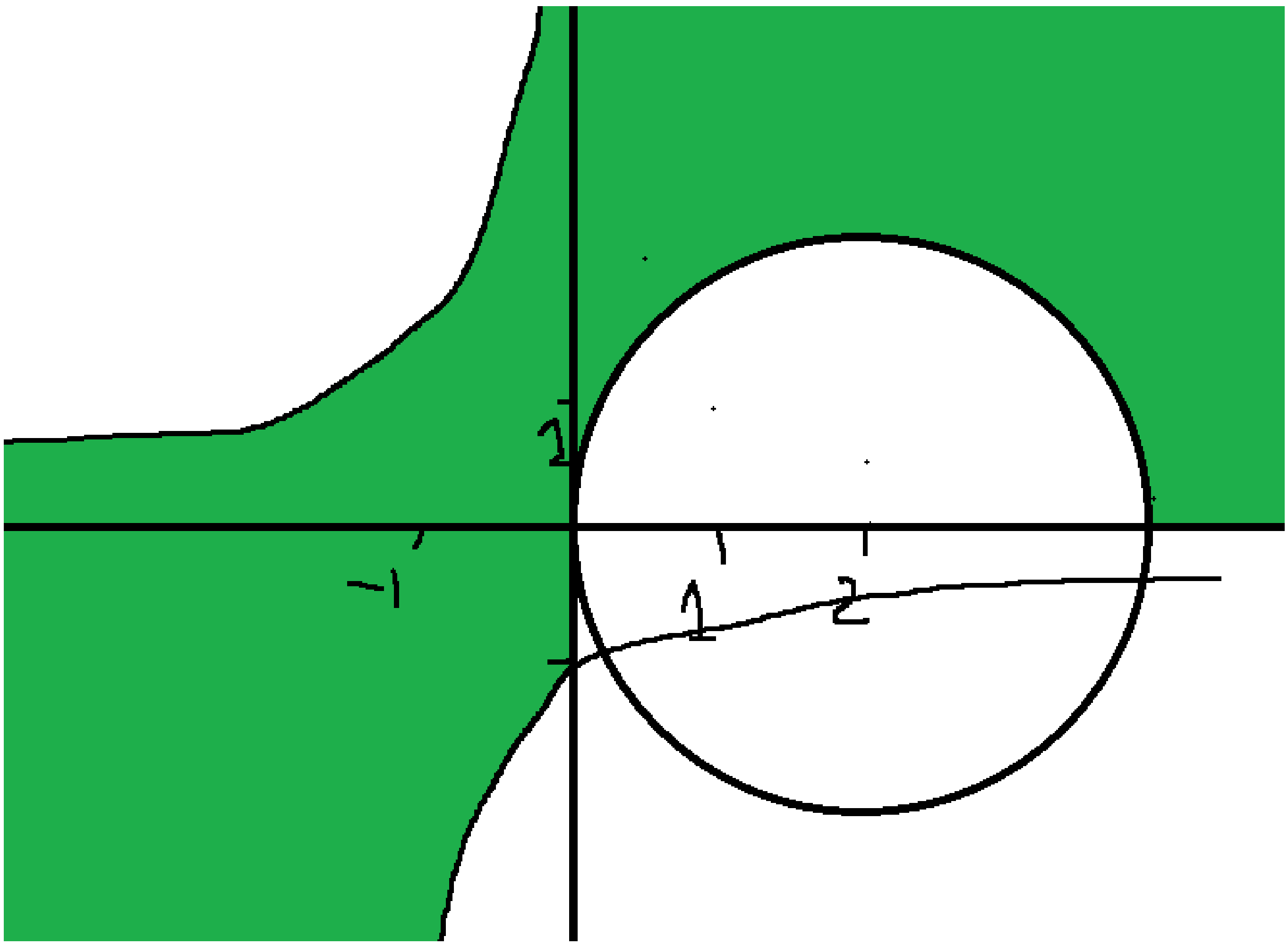
$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \le \frac{1}{4} \\ \operatorname{Im}(\overline{z^2 - \overline{z}}) \le 2 + \operatorname{Im}(z) \end{cases}$$

$$z = x + iy$$

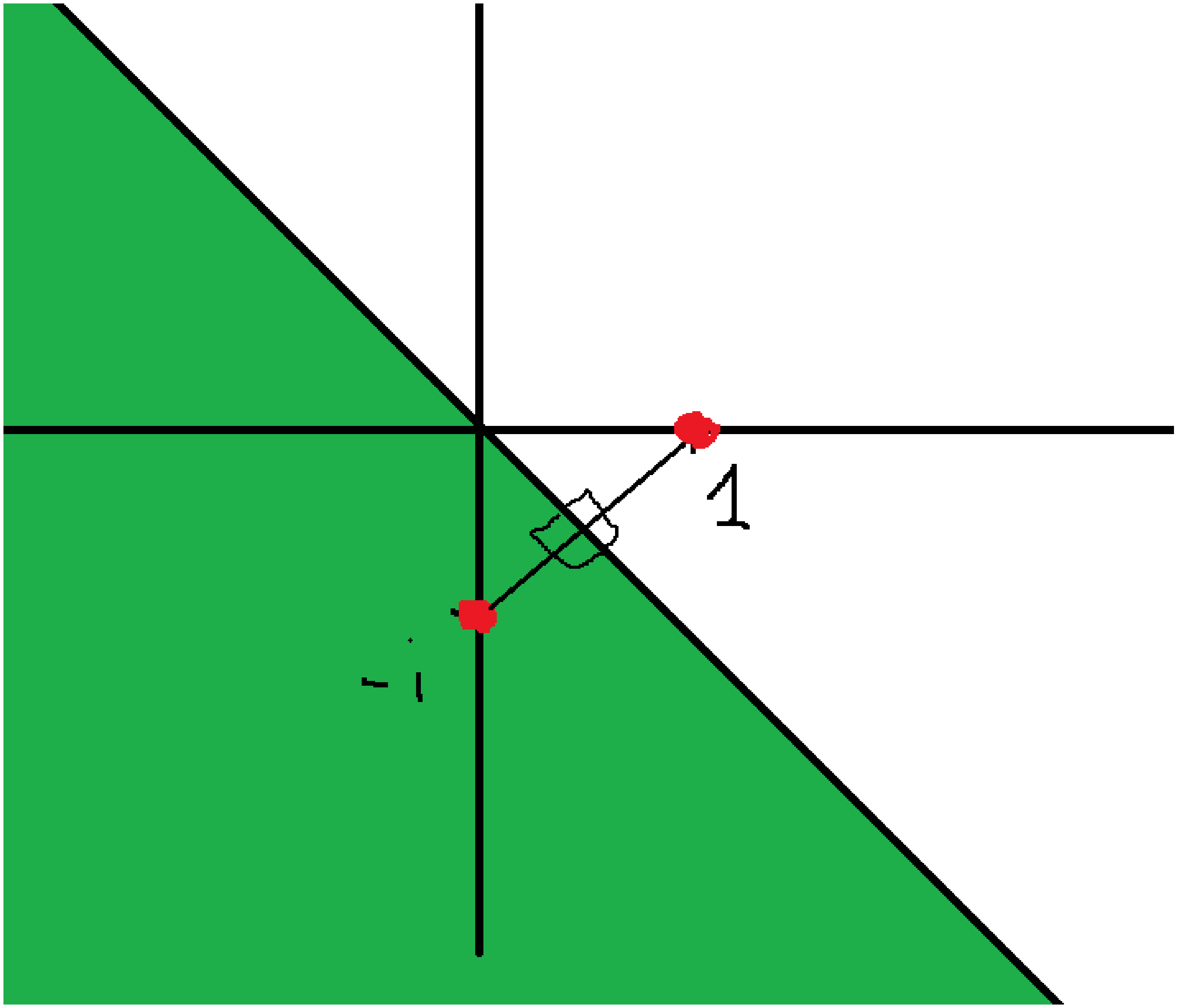
$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{x+iy}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x - iy}{x^2+y^2}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} \le \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Im}(\overline{(x+iy)^2 - \overline{x+iy}}) = \operatorname{Im}(\overline{x^2 - y^2 + 2xyi - (x - iy)}) = -2xy - y \le 2 + y$$

$$\begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2} \le \frac{1}{4} \\ (x+1)y \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \le x^2 + y^2 \\ (x+1)y \ge -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + y^2 \ge 4 \\ (x+1)y \ge -1 \end{cases}$$



$|z+i| < |z-1|$



$$|x+iy+i|<|x+iy-1|$$
$$\sqrt{x^2+(y+1)^2}<\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$x^2+y^2+2y+1<x^2-2x+1+y^2$$
$$2x+2y<0$$
$$x+y<0$$

$$\begin{cases} |z^2+4| \le 4 \ - \ \text{Из номотеха: Лемниската} \\ \mathrm{Re} z < 0 \end{cases}$$

$$z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$

$$z^2 = r^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)) \ - \ \text{Формула Муавра}$$

$$|z^2+4| \le 4$$

$$|r^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)) + 4| \le 4$$

$$\sqrt{(r^2\cos(2\varphi)+4)^2 + r^2\sin^2(2\varphi)} \le 4$$

$$r^4\cos^2(2\varphi) + 16 + 8r^2\cos(2\varphi) + r^4\sin^2(2\varphi) \le 16$$

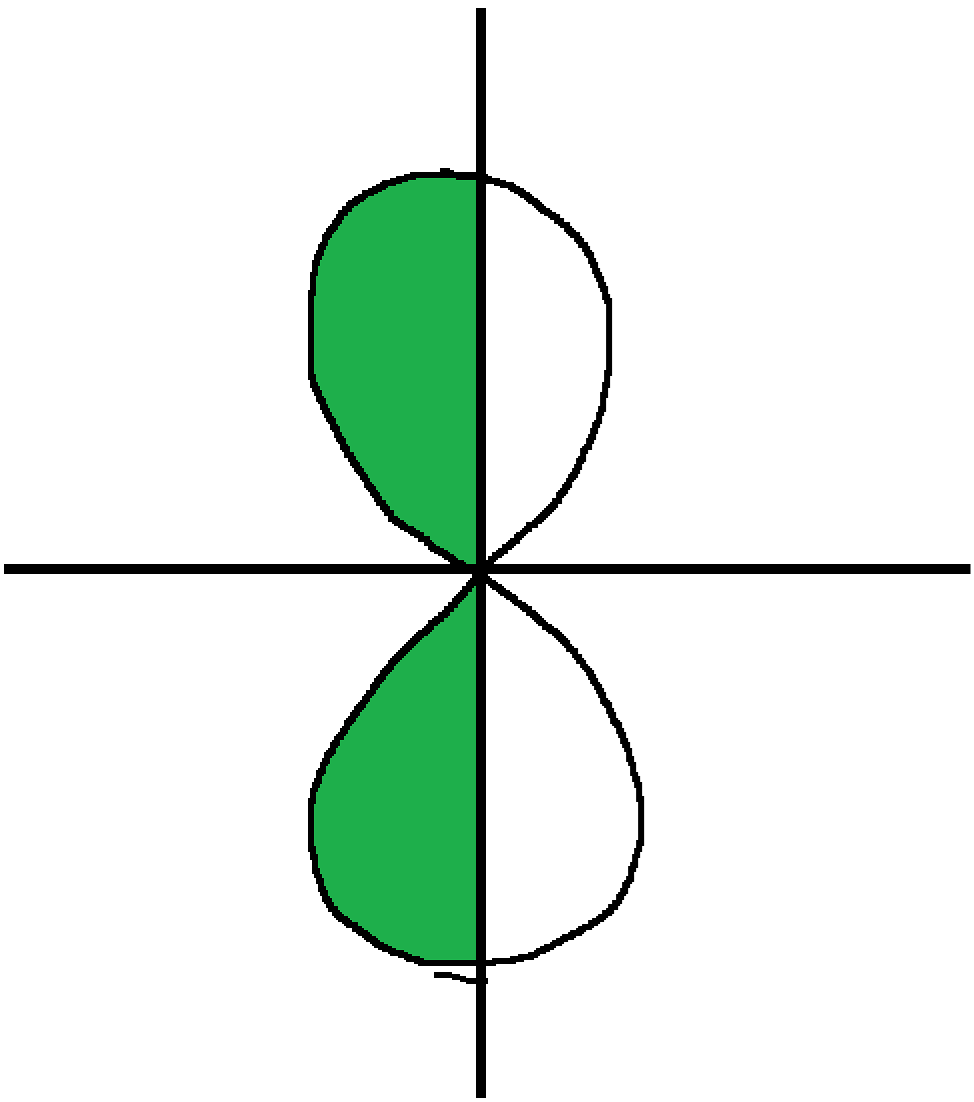
$$r^4\cos^2(2\varphi) + 8r^2\cos(2\varphi) + r^4\sin^2(2\varphi) \le 0$$

$$r^4 + 8r^2\cos(2\varphi) \le 0$$

$$r^2 + 8\cos(2\varphi) \le 0$$

$$r^2 \le -8\cos(2\varphi)$$

$$r < 2\sqrt{2}\sqrt{-\cos(2\varphi)}$$



20/02/2025

Пропустил

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\left(\frac{x}{|e-i|}\right)^n}{n!}$$

27/02/2025

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y + i(-\sin x \operatorname{sh} y)$$
$$\operatorname{sh} iz = i \sin z$$
$$\operatorname{ch} iz = \cos z$$
$$\sin iz = i \operatorname{sh} z$$
$$\cos iz = \operatorname{ch} z$$

$$\operatorname{sh} \left(\ln 3 + \frac{i\pi}{4}\right) = \operatorname{sh} (\ln 3) \cos \left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ch} (\ln 3) \cdot i \sin \left(\frac{\pi}{4}\right) =$$
$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(e^{\ln 3} - e^{-\ln 3} + ie^{\ln 3} + ie^{-\ln 3})$$

Убедиться, что если подставить в $\alpha^z = e^{z \ln \alpha}$ $\alpha = e$, то полученные функции будут однозначными

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i\left(i\frac{\pi}{2} + 2\pi k i\right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}, k \in \mathbb{Z}$$

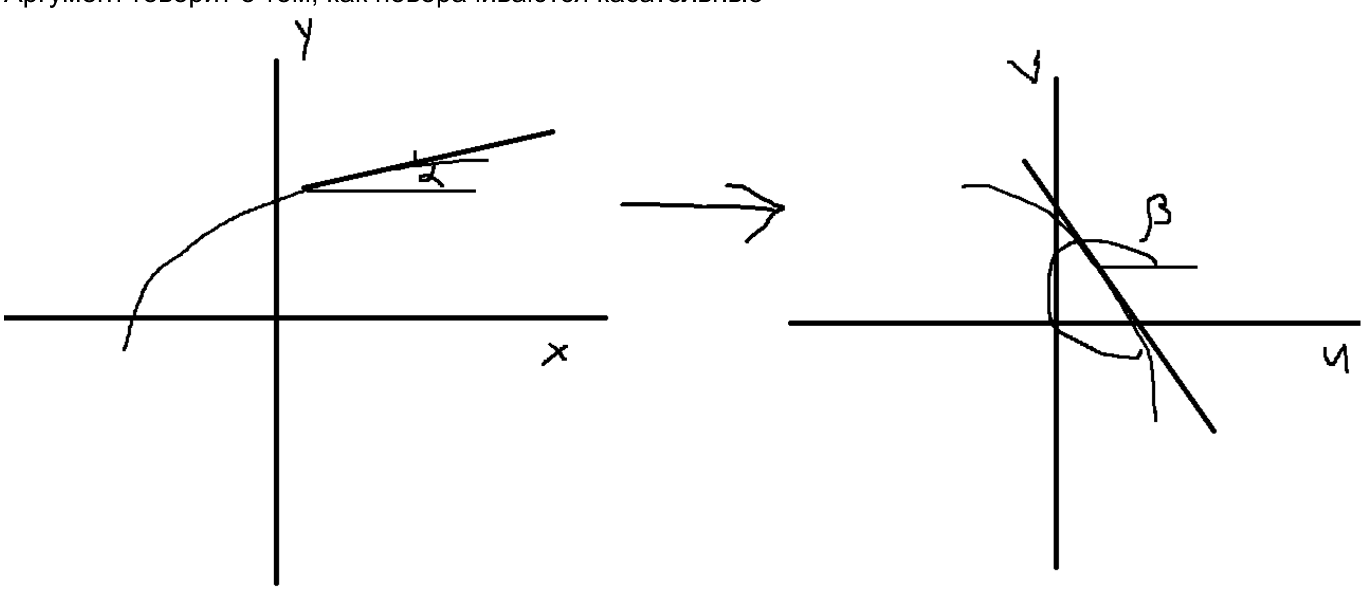
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

$$f(x, y) = f(z, \overline{z})$$
$$\text{C.R.} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{z + \overline{z}}{2} \\ y = \frac{z - \overline{z}}{2i} \end{cases}$$

$$f = |z| = \sqrt{z\overline{z}} = \psi(z, \overline{z}) \Rightarrow \text{ не дифференцируема}$$
$$z^2 = (x + iy)(x + iy) = x^2 - y^2 + 2xyi$$
$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix} = 2(x + iy) = 2z$$

Аргумент говорит о том, как поворачиваются касательные



$$\beta - \alpha = \arg f'(z)$$
$$|\Delta w| = |f'(z)||\Delta z| + |o(\Delta z)|$$

$$\begin{cases} u_{yx} = v_{yy} \\ u_{xy} = -v_{xx} \end{cases} \Rightarrow v_{yy} + v_{xx} = 0$$

u и v гармонические

$$v(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v_{xx} = \left(\frac{2x(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)(2(x^2+y^2)2x)}{(x^2+y^2)^4}\right)_x = \left(\frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3}\right)_x =$$

$$= \frac{2\left((3y^2-3x^2)(x^2+y^2)^3-3(x^2+y^2)^2 2x(3xy^2-x^3)\right)}{(x^2+y^2)^6} = \frac{2(-3x^4+3y^4-6(3x^2y^2-x^4))}{(x^2+y^2)^4} =$$

$$= \frac{6(x^4+y^4-6x^2y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$f(x,y) = -f(y,x)$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$$

$$f'(z) = \frac{2y^3-6yx^2}{(x^2+y^2)^3} + i\frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3} =$$

$$= \frac{2(y^3-3yx^2-ix^3+3ixy^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2(y+ix)^2}{(z\bar{z})^3} = 2\frac{i\cancel{\bar{z}^3}}{(z\cancel{\bar{z}})^3} = \frac{2i}{z^3} \Rightarrow$$

$$f(z) = -\frac{i}{z^2} + C$$

$u = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ - Очевидно, что не может быть действительной частью

Гармоническое векторное поле - это соленоидальное и потенциальное векторное поле

Соленоидальное векторное поле: $\operatorname{div} \vec{f} = 0$

Потенциальное векторное поле: $\operatorname{rot} \vec{f} = 0$

06/03/2025

Конформные отображения.

Отображение, осуществляемое линейной функцией.

$$w = (1+i)z + (3-2i)$$

$$\text{б) } y = x+2$$

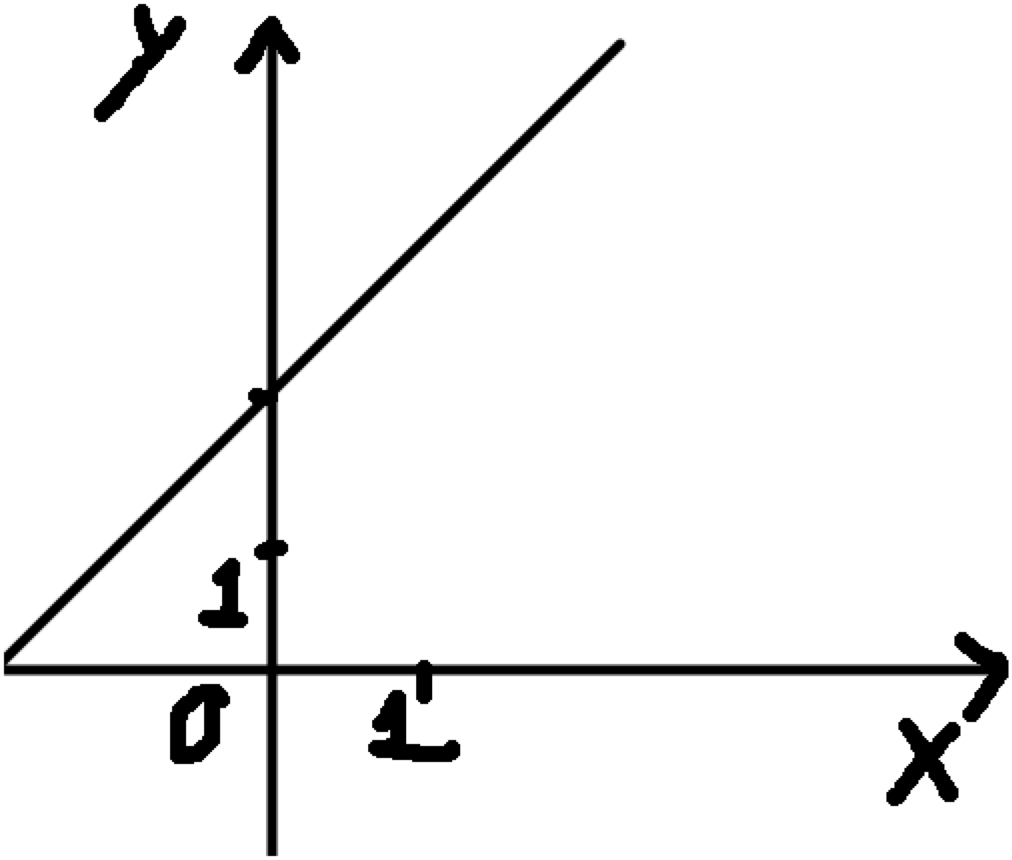
$$w = (1+i)(x+iy) + (3-2i) = (x-y+3) + i(x+y-2) = u+iv$$

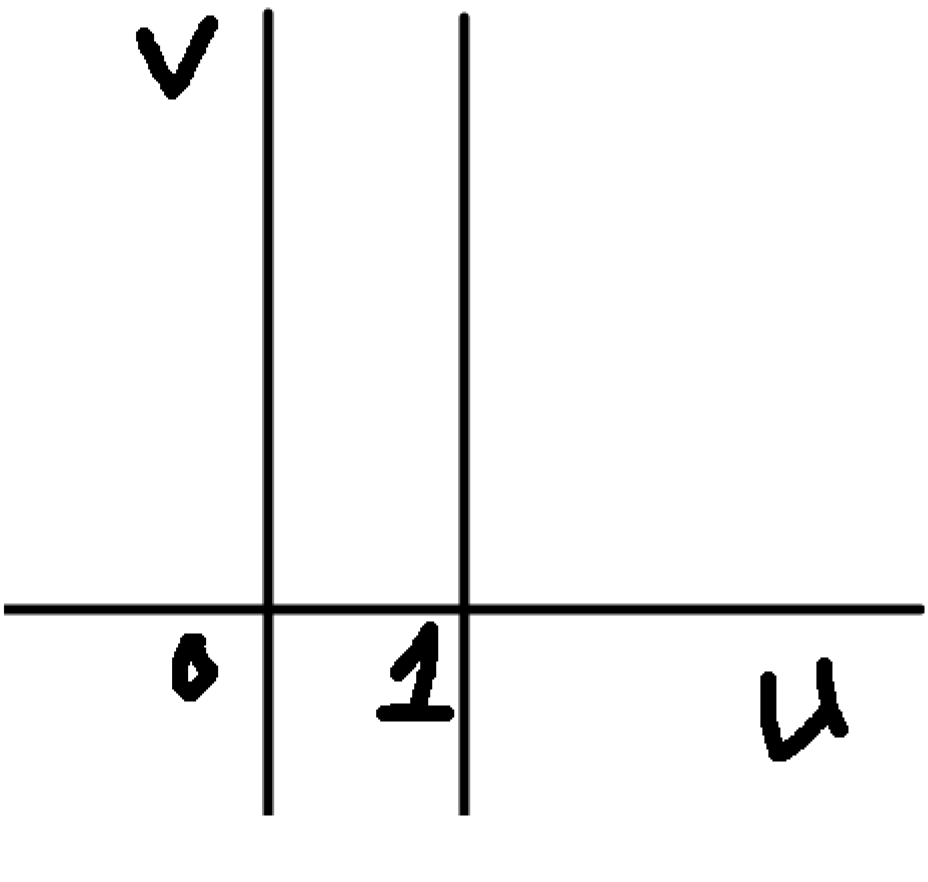
$$\begin{cases} u = x-y+3 \\ v = x+y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u+v = 2x+1 \\ v-u = 2y-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{u+v-1}{2} \\ y = \frac{v-u+5}{2} \end{cases}$$

$$\frac{v-u+5}{2} = \frac{u+v-1}{2} + 2$$

$$u = 1$$


y
1
0
1
x


v
0
1
u

$$y = \frac{3}{2}x$$
$$v - u + 5 = 3\frac{u+v-1}{2}$$
$$2v - 2u + 10 = 3u + 3v - 3$$
$$13 = 5u + v$$
$$v = 13 - 5u$$

Дробно-линейные функции

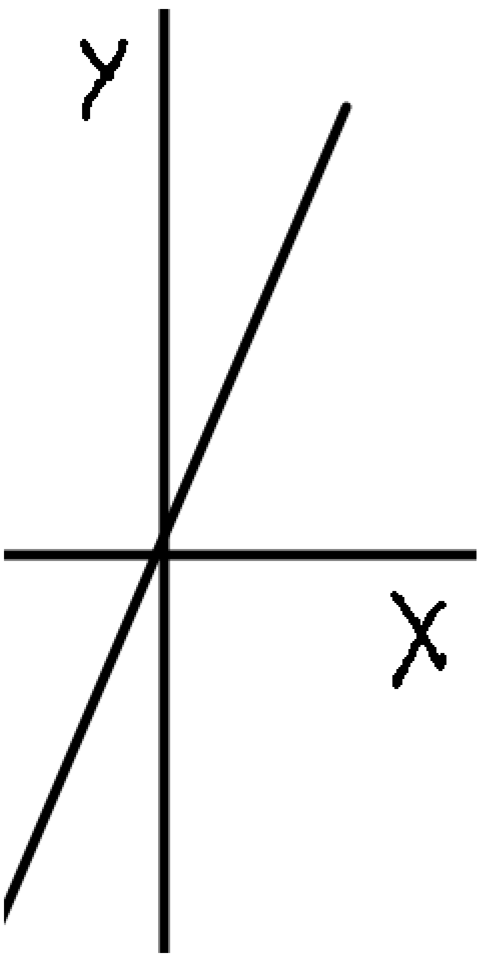
Сдвиг

Инверсия

Растяжение/сжатие, поворот

Круговое свойство: отображает окружности в окружности

$$w = \frac{1}{z}$$
а) $y = 3x$



$$w = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

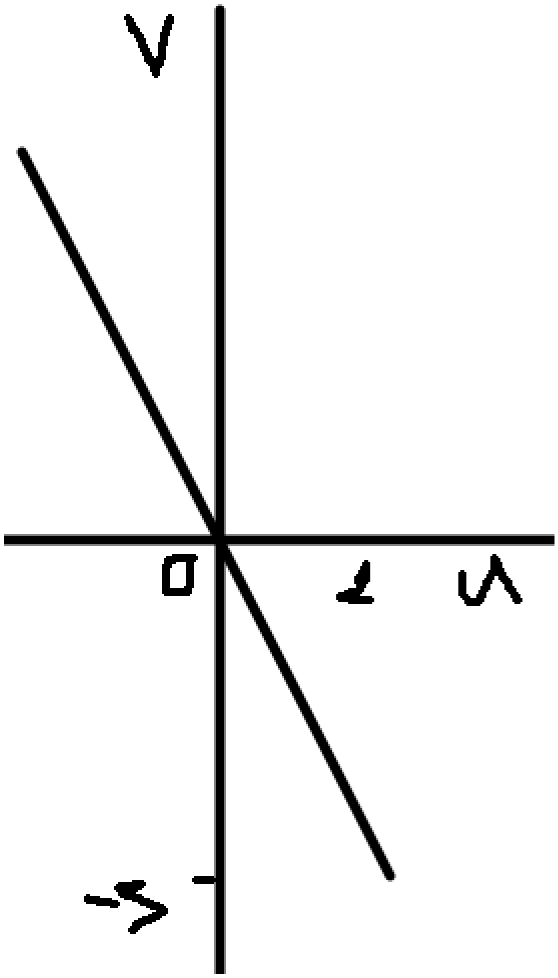
$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2} \\ v = -\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$u^2+v^2 = \frac{1}{x^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{u}{u^2+v^2} \\ y = -\frac{v}{u^2+v^2} \end{cases}$$

$$-\frac{v}{\cancel{u^2+v^2}} = 3\frac{u}{\cancel{u^2+v^2}}$$

$$v = -3u$$

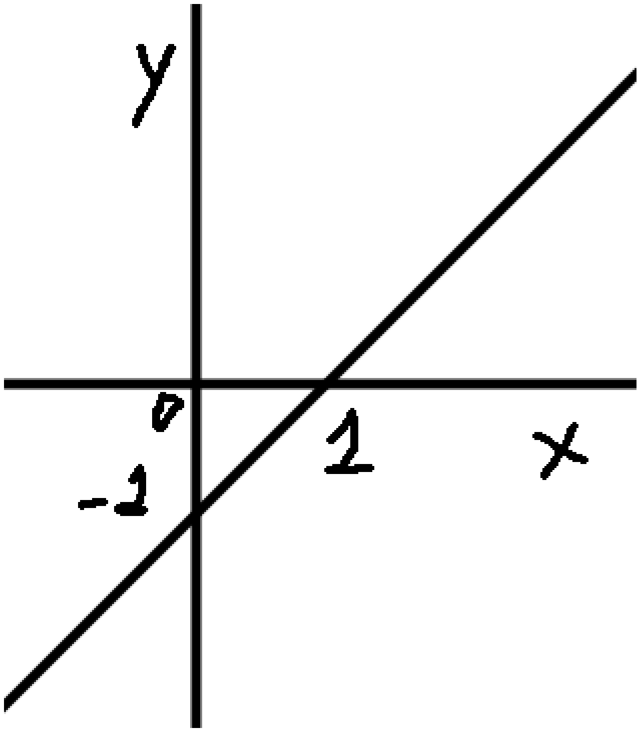


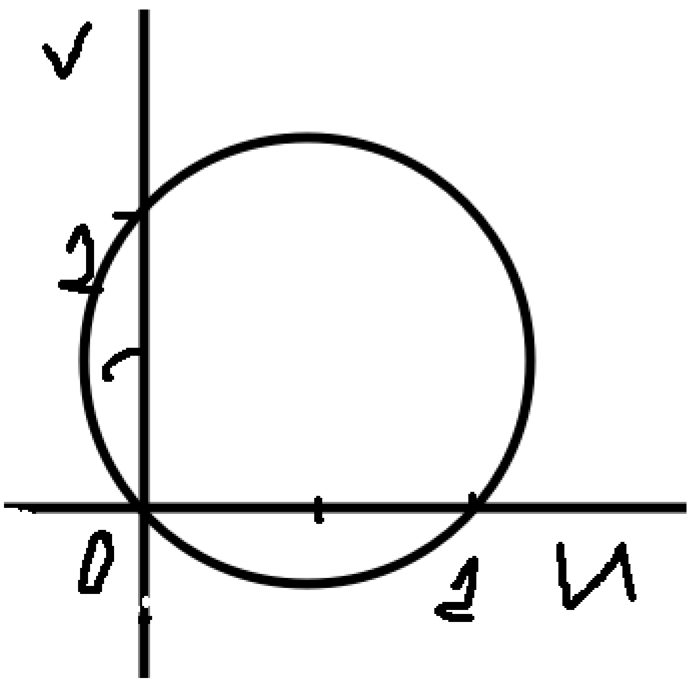
б) $y = x - 1$

$$-\frac{v}{u^2+v^2} = \frac{u}{u^2+v^2} - 1$$

$$0 = v + u - u^2 - v^2$$

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(v-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$





$$\text{в) } |z-i-1|=\sqrt{2}$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2=2$$

$$\frac{(u-u^2-v^2)^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{(-v-u^2-v^2)^2}{(u^2+v^2)^2}=2$$

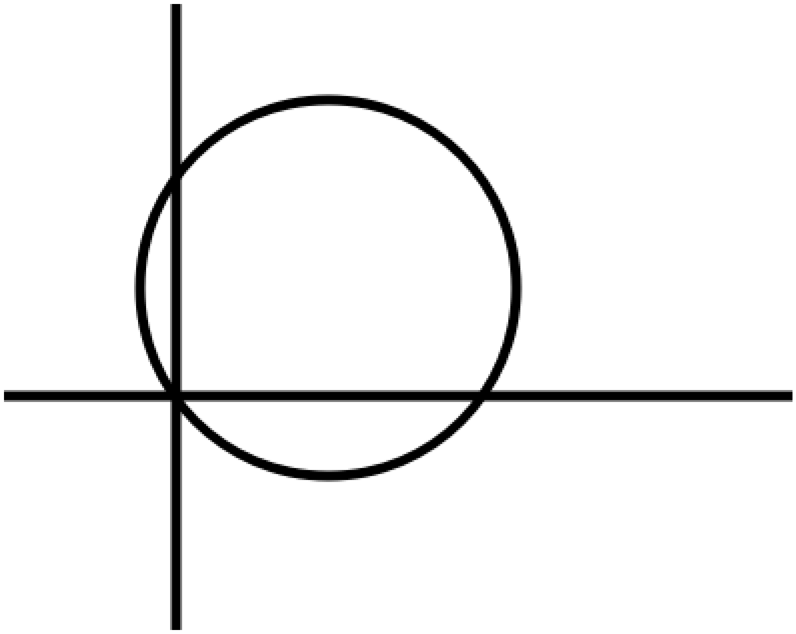
$$\begin{matrix} u^2 \cancel{+u^4+v^4}-2u^3-2uv^2\cancel{+2u^2v^2} \\ v^2 \cancel{+u^4+v^4}+2v^3+2vu^2\cancel{+2u^2v^2} \end{matrix} + = \cancel{2u^4+2v^4}+4u^2v^2$$

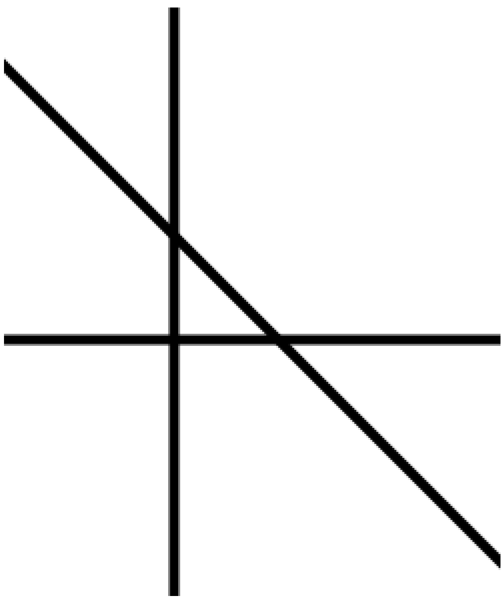
$$u^2-2u^3-2uv^2+2vu^2+2v^3+v^2=0$$

$$(u^2+v^2)-2u(u^2+v^2)+2v(u^2+v^2)=0$$

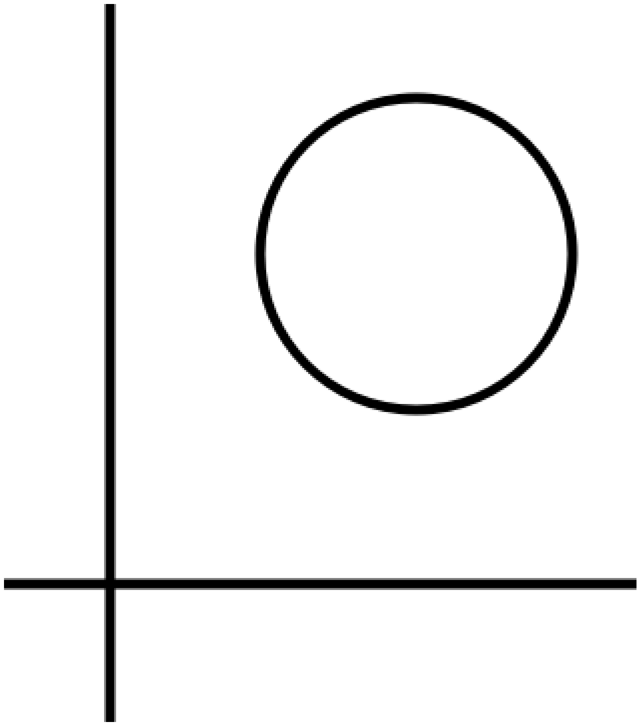
$$1-2u+2v=0$$

$$v=u-\frac{1}{2}$$

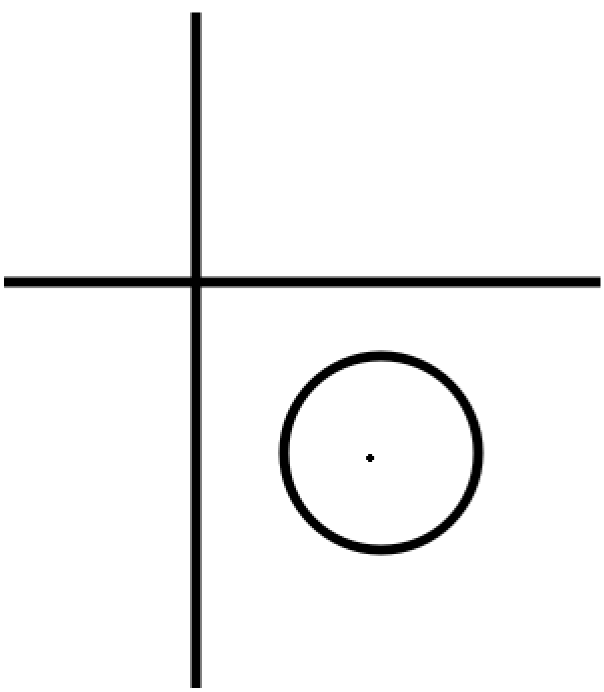




в) $|z-2-2i|=1$



$$(x-2)^2+(y-2)^2=1$$
$$\left(\frac{u}{u^2+v^2}-2\right)^2+\left(-\frac{v}{u^2+v^2}-2\right)^2=1$$
$$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+4-\frac{4u}{u^2+v^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}+4+\frac{4v}{u^2+v^2}=1$$
$$\frac{1-4u+4v}{u^2+v^2}=-7$$
$$\frac{1}{7}-\frac{4}{7}u+\frac{4}{7}v+u^2+v^2=0$$
$$\left(u-\frac{2}{7}\right)^2+\left(v+\frac{2}{7}\right)^2=\frac{1}{7^2}$$



$$f(z) = \frac{z-2i}{z+2}$$

a) $y = x+2$

$$\frac{x+iy-2i}{x+iy+2} = \frac{(x+iy-2i)(x+2-iy)}{(x+2)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2+\dots}{(x+2)^2+y^2}$$ - сложно

$$w = \frac{z-2i}{z+2}$$

$$(z+2)w = z-2i$$

$$z(w-1) = -2i-2w$$

$$z = -2\frac{w+i}{w-1}$$

$$x+iy = -2\frac{u+vi+i}{u+vi-1} = -2\frac{(u+(v+1)i)((u-1)-vi)}{(u-1)^2+v^2} =$$

$$= -2\frac{u^2-u+v^2+v+i(-uv+uv+u-v-1)}{(u-1)^2+v^2} =$$

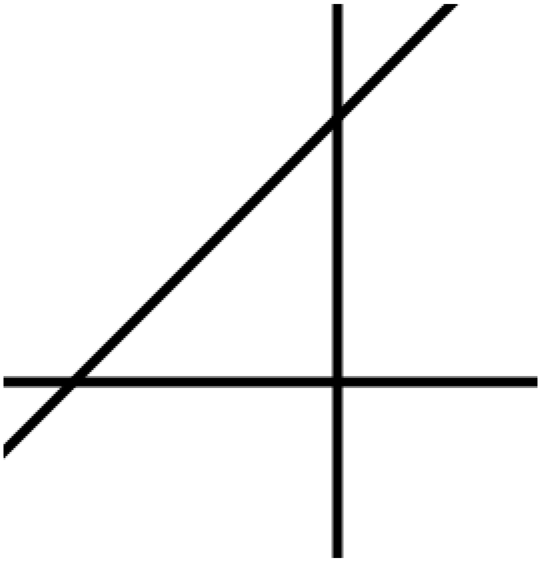
$$= -2\left(\frac{u^2-u+v^2+v}{(u-1)^2+v^2} + i\frac{u-v-1}{(u-1)^2+v^2}\right)$$

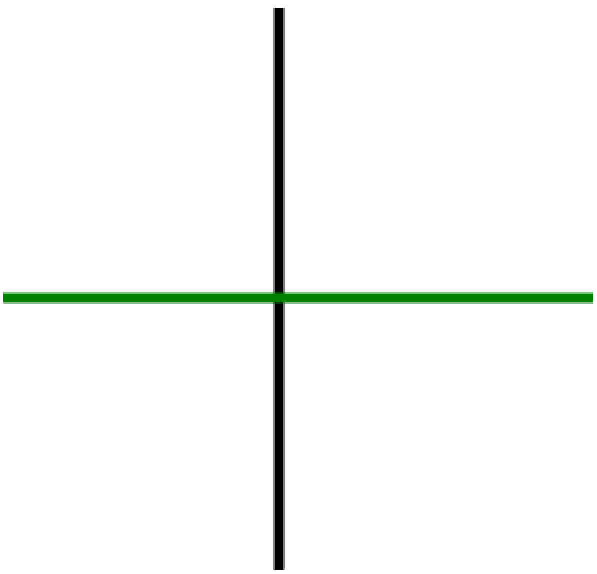
$$\begin{cases} x = -2\frac{u^2-u+v^2+v}{(u-1)^2+v^2} \\ y = -2\frac{u-v-1}{(u-1)^2+v^2} \end{cases}$$

$$-\cancel{2}(u-v-1) = -\cancel{2}(u^2-u+v^2+v) + \cancel{2}((u-1)^2+v^2)$$

$$\cancel{-u} + v \cancel{+1} = \cancel{-u^2} \cancel{+u} \cancel{-v^2} - v \cancel{+u^2} - \cancel{2}\cancel{u} \cancel{+1} \cancel{+v^2}$$

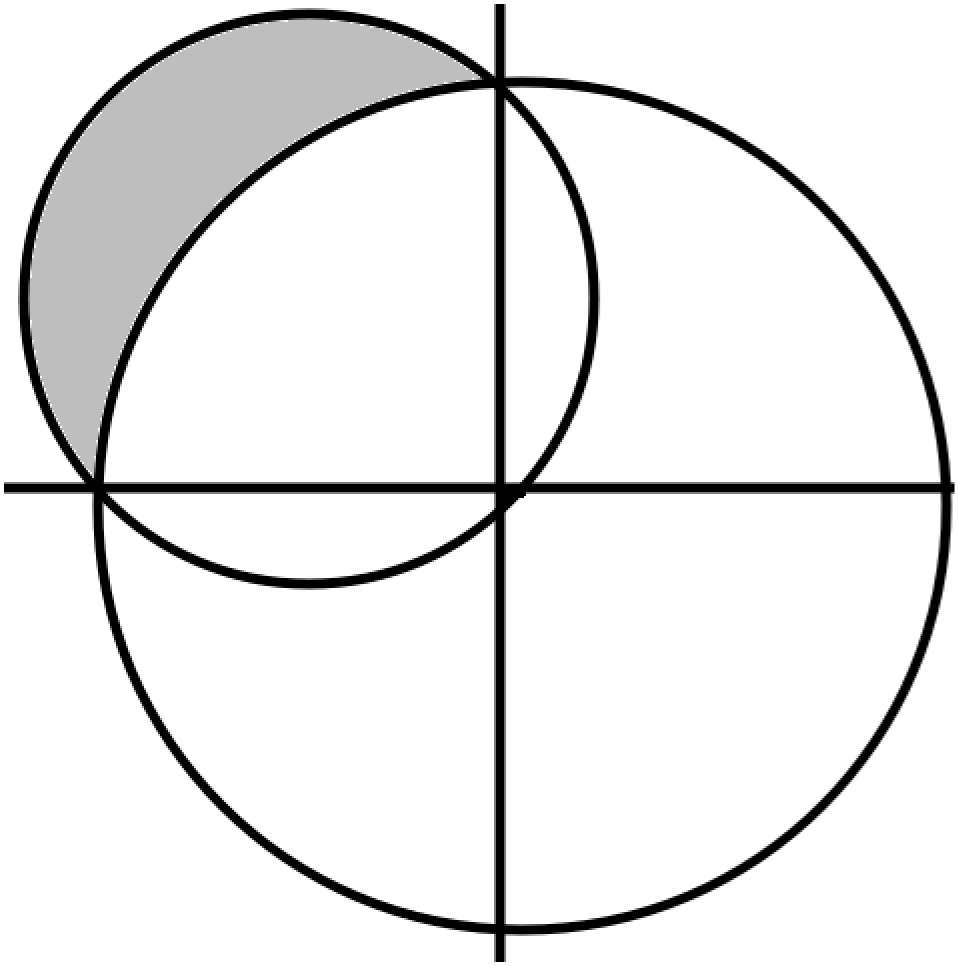
$$v = 0$$





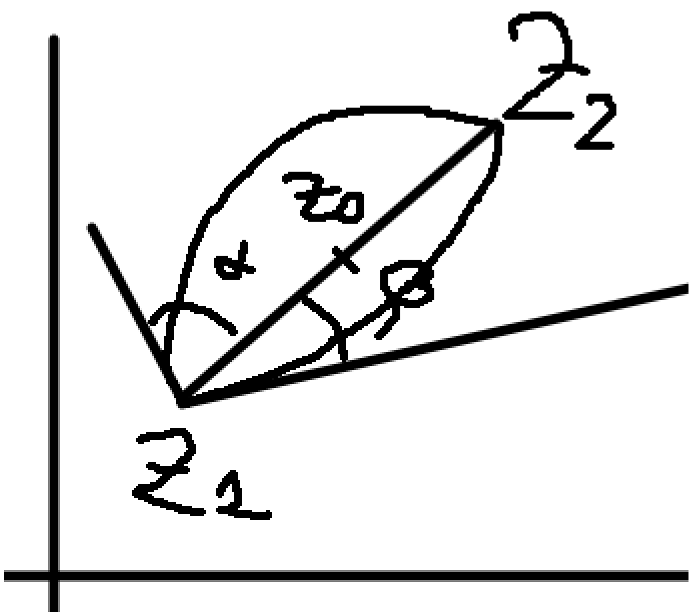
Лунка - область, ограниченная двумя окружностями

$$б)\ \begin{cases} |z| > 2 \\ |z+1-i| < \sqrt{2} \end{cases}$$



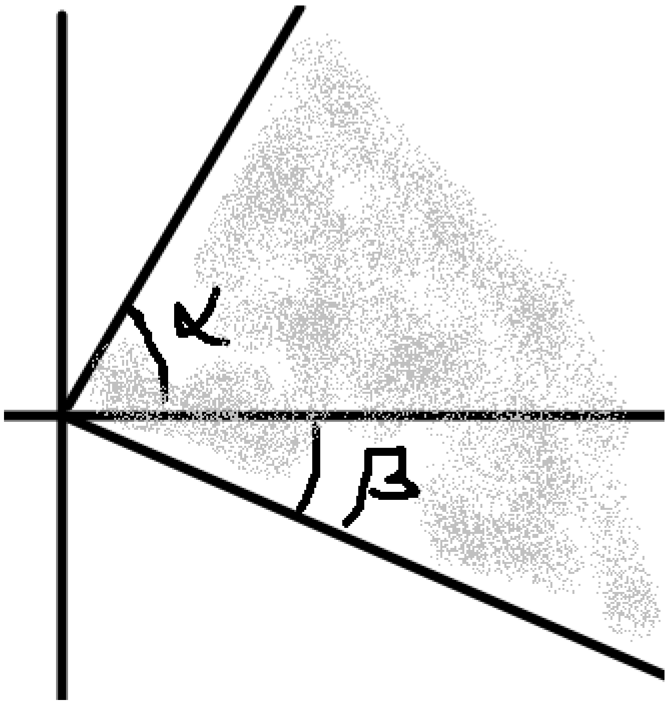
Следующие соображения

$$f(z) = -\frac{z - z_1}{z - z_2}$$



$$w_1 = f(z_1) = 0$$
$$w_2 = f(z_2) = \infty$$
$$z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$$
$$f(z_0) = -\frac{\frac{z_1+z_2}{2} - z_1}{\frac{z_1+z_2}{2} - z_2} = -\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_2} = 1$$

Границы отображаются в прямые



ДОДЕЛАТЬ ЗАДАЧУ!!!

03/04/2025

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin\left(\frac{1}{z^2}\right) + \cos z}{(z^2+4)^3} = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_0 f(z) = 0 \text{ (подытегральная функция чётная)}$$

$$\oint \frac{dz}{z^4+16},\ C: |z+\sqrt{2}| = 2\pi i(\mathrm{res}_{-\sqrt{2}-\sqrt{2}i} + \mathrm{res}_{-\sqrt{2}+\sqrt{2}i})$$

$$z^4 = -16$$

$$z^2 = \pm 4i$$

$$z = \pm\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i:$$

$$-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i - \text{ особые точки, полюса порядка1}$$

$$\text{Формула для полюсов } n=1: \ \ \mathrm{res}_{z=z_0} f = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}, \begin{matrix} \varphi(z):\varphi(z_0)\neq 0 \\ \psi(z):\psi(z_0)=0 \end{matrix}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+13x^2+36} = \oint \frac{dz}{z^4+13z^2+36} = 2\pi i(\mathrm{res}_{2i} f + \mathrm{res}_{3i} f) =$$

$$f(z) = \frac{1}{z^4+13z^2+36} = \frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)} = \frac{1}{(z+2i)(z-2i)(z+3i)(z-3i)}$$

$$\text{Если функция убывает достаточно быстро } |f(x)| < \frac{M}{R^{1+\delta}}, \delta > 0$$

$$\text{То интеграл на бесконечности } 0$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{4z^3+26z}|_{2i,3i}\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{-32i+52i} + \frac{1}{-108i+78i}\right) = 2\pi\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{30}\right) = 2\pi\cdot\frac{1}{60} = \frac{\pi}{30}$$

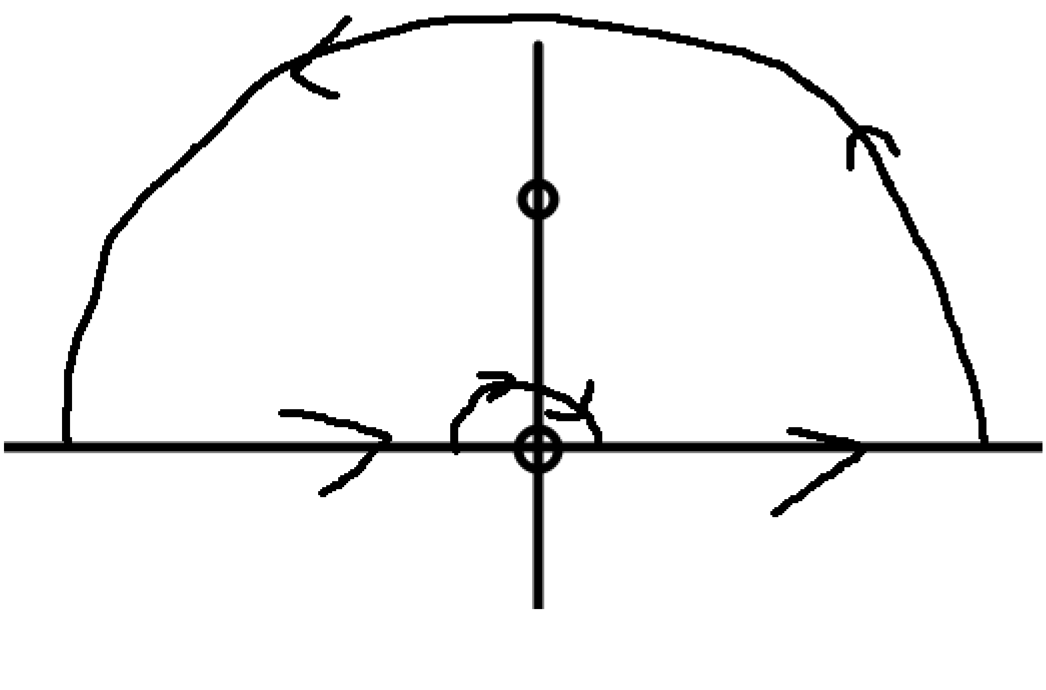
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \pi i\left(\frac{x^2+1}{4x^3}|_{\exp(\frac{\pi}{4}i),\exp(\frac{3\pi}{4}i)}\right) = \frac{\pi i}{4}\left(\frac{i+1}{e^{3\pi i/4}} + \frac{-i+1}{e^{\pi i/4}}\right) =$$

$$= \frac{\pi i}{4}\left((i+1)e^{5\pi i/4} + (-i+1)e^{7\pi i/4}\right) = \frac{\pi i}{8}((i+1)(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i) + (1-i)(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)) =$$

$$= \frac{\pi i}{8}(-\sqrt{2}+\sqrt{2}+i(-\sqrt{2}-\sqrt{2}) + \sqrt{2}-\sqrt{2}+i(-\sqrt{2}-\sqrt{2})) = \frac{\pi i}{8}(-4\sqrt{2}i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

Лемма Жордана:

Если функция f стремится равномерно к 0 независимо от угла, то интеграл по добавленной дуге тоже стремится к 0



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+x+1}dx = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+x+1}dx = \operatorname{Im}\oint \frac{ze^{iz}}{z^2+z+1}dz =$$

$$z^2+z+1=0$$

$$z = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$$z_0 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \text{ - полюс порядка 1}$$

$$= \operatorname{Im}\left(2\pi i \operatorname*{Res}_{z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}} \frac{ze^{iz}}{z^2+z+1}\right) = \operatorname{Im}\left(2\pi i \frac{z\exp(iz)}{2z+1}|_{z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}}\right) = \operatorname{Im}\left(2\pi i \frac{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}e^{-i/2}e^{-\sqrt{3}/2}}{\sqrt{3}i}\right) =$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{\pi(-1+\sqrt{3}i)e^{-\sqrt{3}/2}\left(\cos\left(\frac{1}{2}-i\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi e^{-\sqrt{3}/2}}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{1}{2}\right)+\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+4)}dx = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+4)}dx =$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+4)}$$

$$z = 0, \pm 2i$$

0 расположен на действительной оси

$$\oint \frac{e^{iz}}{z(z^2+4)}dz = \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z(z^2+4)}dz + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z(z^2+4)}dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iz}}{z(z^2+4)}dz + \int_r^R \frac{e^{iz}}{z(z^2+4)}dz =$$

$$2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} f = 2\pi i \frac{\left(\frac{e^{iz}}{z}\right)}{2z}|_{z=2i} = \pi i \cdot \frac{e^{i\cdot 2i}}{(2i)^2} = -\frac{\pi i}{4e^2}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z(z^2+4)}dz = \begin{vmatrix} z = re^{i\varphi} \\ dz = rie^{i\varphi}d\varphi \end{vmatrix} = \lim_{r\to 0}\int_{C_r} \frac{e^{ire^{i\varphi}}}{re^{i\varphi}(r^2e^{2i\varphi}+4)} rie^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= \int_\pi^0 \frac{id\varphi}{4} = -\frac{\pi i}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(-\frac{\pi i}{4e^2} - \lim_{r\to 0}\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z(z^2+4)}d\right) = \frac{\pi}{8}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$$

10/04/2025

Действительный определённый интеграл через вычеты Коши

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{3}\sin t+4} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\sqrt{3}\left(\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}+4\right)iz} = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\sqrt{3}(z^2-1)+4iz} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-\frac{i}{\sqrt{3}}} f = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi$$

Замена $z = \exp(it), t \in [0, 2\pi] \to z$ находится на единичной окружности

$$dz = ie^{it}dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz}$$

$$\sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$$

$$\sqrt{3}z^2 - \sqrt{3} + 4iz = 0$$

$$z = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-2i \pm \sqrt{-4+(\sqrt{3})^2}\right) = -\frac{i}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}i$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{i}{\sqrt{3}}} f = \frac{1}{2\sqrt{3}z+4i}|_{z=-\frac{i}{\sqrt{3}}}$$

До РК допускаются только прикрепившие решение

$$f(z)=\frac{\sin z}{z(z-1)^2}$$

Особые точки:

$$z=0 \text{ - устранимый разрыв} \Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} f=0$$

$$z=1 \text{ - полюс 2 порядка}$$

$$z=\infty$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f=\lim_{z\to 1}\frac{1}{1!}\left(\frac{\sin z}{z(z-1)^2}(z-1)^2\right)'=\lim_{z\to 1}\frac{\cos z\cdot z-\sin z}{z^2}=\cos 1-\sin 1$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f=\sin 1-\cos 1 \text{т.к. сумма всех вычетов} =0$$

$$f(z)=\frac{\sin z}{z(z-1)^2}=\left|w=\tfrac{1}{z}\right|=\frac{w\sin\left(\frac{1}{w}\right)}{\left(\frac{1}{w}-1\right)^2}=\frac{w^3\sin\left(\frac{1}{w}\right)}{(1-w)^2}=$$

$$\sin\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{1}{w}-\frac{1}{3!w^3}+\frac{1}{5!w^5}+\dots$$

$$\frac{1}{(1-w)^2}=\left(\frac{1}{1-w}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}w^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}nw^{n-1}$$

$$=w^3\left(\frac{1}{w}-\frac{1}{3!w^3}+\frac{1}{5!w^5}-\frac{1}{7!w^7}+\frac{1}{9!w^9}-\frac{1}{11!w^{11}}+\dots\right)(1+2w+3w^2+4w^3+\dots)=$$

Смотрим только на слагаемые при степени 1

$$=w\left(-\frac{2}{3!}+\frac{4}{5!}-\frac{6}{7!}+\frac{8}{9!}+\dots\right)+\dots$$

Вычет в бесконечности:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n}{(2n+1)!}$$

$$\sin 1-\cos 1=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\dots-\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}+\dots\right)=$$

$$\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)=\frac{2}{3!}$$

$$\left(\frac{1}{(2n)!}-\frac{1}{(2n+1)!}\right)=\frac{2n}{(2n+1)!}$$

Легко видеть, что ответы совпали

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$$

Начинаем такие задачи в начале на абсолютную сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{in}}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ - сходится абсолютно}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1-i)^{2n}}{4^n\cdot n^4}$$

$$z_1=z+1-i$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{z_1^{2n}}{4^n n^4}\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_1^2}{4\sqrt[n]{n^4}}=\frac{z_1^2}{4}<1$$

$$|z_1|<2$$

Проверяем границу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{4^n n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \text{ - сходится}$$

Ответ: сходится на $|z+1-i| \leq 2$

$$w = e^z$$
$$\mathrm{Im} z = \frac{\pi}{4}$$
$$\text{Окружность вводим в комплексной форме}$$
$$e^{x+\pi/4 \cdot i} = e^x e^{\pi/4 \cdot i}$$
$$arg\left(w - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} tdt = 2\pi^2 = \oint_{|z|=1} \frac{\ln z}{i}\frac{dz}{iz} = -\oint_{|z|=1} \frac{\ln z}{z} dz$$
$$z = e^{it}, t \in [0, 2\pi] \Rightarrow |z| = 1$$
$$dz = ie^{it} dt \Rightarrow dt = \frac{dz}{iz} t = \frac{\ln z}{i}$$

РК будет 17.04.2025 аудитория 225а РК1