

Учебники:

Тензорное счисление. Ю.И. Димитриенко издание 2001 года, синий учебник

Основы тензорного исчисления

Задать вопрос можно ли конспектировать на ноуте

10/02/2025

Тензорная алгебра. Пространство, сопряжённое с линейным пространством.

Правило расстановки индексов.

Объекты могут иметь нижние (ковариантные) индексы, верхние (контрвариантные) и смешанные (например δ_k^i)

Сравнивать, складывать, приравнивать можно только объекты с одинаковыми индексами (должно совпадать их число, обозначение и расположение (вверху/внизу)).

$$(a_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$(b_i) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$
$$a_i + b_i$$

Задание 2. Нахождение компонент матрицы при помощи формулы связи с компонентами других матриц в том же базисе.

В операциях умножения обычного (, скалярного и векторного, тензорного) повторяющиеся индексы должны располагаться один вверху, один внизу.

$$x^i \epsilon_i = \sum_{i=1}^3 x^i \epsilon_i = x^1 \epsilon_1 + x^2 \epsilon_2 + x^3 \epsilon_3$$

Пример.

Найти компоненты матрицы C^i , если $C^i = a^{ij} b_j$

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(b_j) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$C^i = a^{ij}b_j$$

$$C^1 = a^{11}b_1 + a^{12}b_2 + a^{13}b_3 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 4$$

$$C^2 = a^{21}b_1 + a^{22}b_2 + a^{23}b_3 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 5$$

$$C^3 = a^{31}b_1 + a^{32}b_2 + a^{33}b_3 = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14$$

$$C^i = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$d^i = ? d^i = a^{ij} \cdot b_{jk} \cdot C^k$$

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b_{jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(C^k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$d^i = a^{ij}(b_{j1}C^1 + b_{j2}C^2 + b_{j3}C^3) =$$

$$a^{ij}b_{j1}C^1 + a^{ij}b_{j2}C^2 + a^{ij}b_{j3}C^3 =$$

$$a^{i1}b_{11}C^1 + a^{i2}b_{21}C^1 + a^{i3}b_{31}C^1 +$$

$$a^{i1}b_{12}C^2 + a^{i2}b_{22}C^2 + a^{i3}b_{32}C^2 +$$

$$a^{i1}b_{13}C^3 + a^{i2}b_{23}C^3 + a^{i3}b_{33}C^3$$

$$d^i = a^{i1}(b_{11}C^1 + b_{12}C^2 + b_{13}C^3) +$$

$$a^{i2}(b_{21}C^1 + b_{22}C^2 + b_{23}C^3) +$$

$$a^{i3}(b_{31}C^1 + b_{32}C^2 + b_{33}C^3) =$$

$$a^{i1}(1 + 0 + 1 \cdot 7) + a^{i2}(3 + 7) + a^{i3}(1) =$$

$$8a^{i1} + 10a^{i2} + a^{i3} \Rightarrow (d^i) = \begin{pmatrix} 9 \\ 26 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Нахождение метрической матрицы некоторого базиса.

Фундаментальная матрица - это матрица, которая ищется следующим образом:

$$g_{ij} = e_i \cdot e_j$$

Базис ортогональный $\Leftrightarrow i \neq j \rightarrow e_i e_j = 0$

Ортонормированный $g_{ij} = \delta_{ij}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Метрическую матрицу можно найти через компоненты \overline{Q}_i^j

$$e_i = \overline{Q}_i^j \overline{e}_j$$

$$g_{ij} = e_i e_j = \overline{Q}_i^k \overline{e}_k \overline{Q}_j^l \overline{e}_l = \overline{Q}_i^k \overline{Q}_j^l \overline{e}_k \overline{e}_l = \overline{Q}_i^k \overline{Q}_j^l \delta_{kl}$$

$$e_i, \overline{Q}_i^j, \overline{e}_i$$

$$e_i = Q_i^j$$

$$Q_i^j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{11} = e_1 e_1 = 2$$

$$g_{12} = e_1 e_2 = 1$$

$$g_{13} = e_1 e_3 = 1$$

$$g_{21} = g_{12} = 1$$

$$g_{22} = e_2 e_2 = 1$$

$$g_{23} = e_2 e_3 = 1$$

$$g_{33} = e_3 e_3 = 2$$

$$\Rightarrow (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g_{ij} = Q_i^k Q_j^l \delta_{kl} g_{11} = Q_1^k Q_1^l \delta_{kl} = Q_1^1 Q_1^1 \delta_{11} + Q_1^1 Q_1^2 \delta_{12} + Q_1^1 Q_1^3 \delta_{13} +$$

$$Q_1^1 Q_1^2 \delta_{21} + Q_1^2 Q_1^2 \delta_{22} + Q_1^2 Q_1^3 \delta_{23} +$$

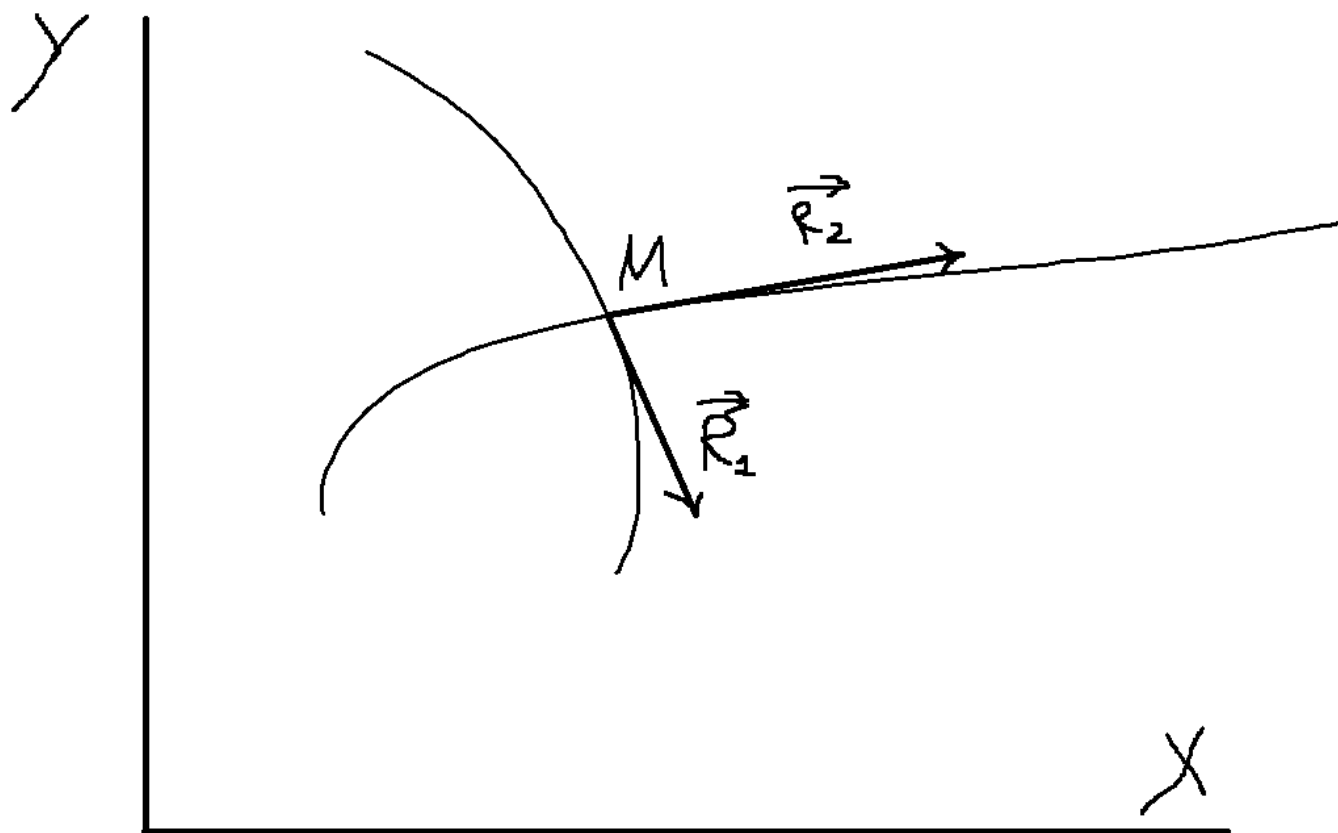
$$Q_1^1 Q_1^3 \delta_{31} + Q_1^3 Q_1^2 \delta_{32} + Q_1^3 Q_1^3 \delta_{33} =$$

$$Q_1^1 Q_1^1 + Q_1^2 Q_1^2 + Q_1^3 Q_1^3$$

$$g_{ij} = \sum_{n=1}^3 Q_i^n Q_j^n$$

17/02/2025

Криволинейная система координат в точке М.



$$x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y$$

$$X^1 \equiv X, \quad X^2 \equiv Y$$

$$\begin{cases} x^1 = x = X^2 + \frac{1}{Y} \\ x^2 = y = X - 2 \ln Y \end{cases}$$

$M(X, Y) \rightarrow M(1, 1)$ - криволинейные координаты точки

$$\vec{a} = \{1, -1\}$$

$$1) Q_J^I = \frac{\partial x^I}{\partial X^J}$$

$$Q_1^1 = \frac{\partial x}{\partial X} = 2X(M) = 2$$

$$Q_2^1 = \frac{\partial x}{\partial Y} = -\frac{1}{Y^2}(M) = -1$$

$$Q_1^2 = \frac{\partial y}{\partial X} = 1(M) = 1$$

$$Q_2^2 = \frac{\partial y}{\partial Y} = -\frac{2}{Y}(M) = -2 \implies$$

$$Q_J^I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Q = \det(Q_J^I) = -3$$

$$P_J^I = \frac{\partial X^I}{\partial x^J}, \quad P = Q^{-1}$$

$$P_J^I = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$P = -\frac{1}{3}$$

$$PQ = 1$$

$$P_J^I Q_K^J = \delta_K^I$$

$$P_J^1 Q_1^J = P_1^1 Q_1^1 + P_2^1 Q_1^2 = 1$$

$$P_J^1 Q_2^J = P_1^1 Q_2^1 + P_2^1 Q_2^2 = 0$$

$$P_J^2 Q_1^J = P_1^2 Q_1^1 + P_2^2 Q_1^2 = 0$$

$$P_J^2 Q_2^J = P_1^2 Q_2^1 + P_2^2 Q_2^2 = 1$$

Определить базисные орты

$$\vec{R}_J = Q_J^I \vec{e}_I$$

$$\begin{cases} \vec{R}_1 = Q_1^I \vec{e}_I = Q_1^1 \vec{e}_1 + Q_1^2 \vec{e}_2 = 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 \\ \vec{R}_2 = Q_2^I \vec{e}_I = Q_2^1 \vec{e}_1 + Q_2^2 \vec{e}_2 = -1\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \end{cases}$$

Определить компоненты метрической матрицы

$$g_{IJ} = \vec{R}_I \cdot \vec{R}_J$$

$$\begin{cases} g_{11} = \vec{R}_1 \cdot \vec{R}_1 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5 \\ g_{12} = g_{21} = \vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2 = -2 - 2 = -4 \\ g_{22} = \vec{R}_2 \cdot \vec{R}_2 = 5 \end{cases}$$

$$g_{IJ} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$g^{IJ} = (g_{IJ})^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

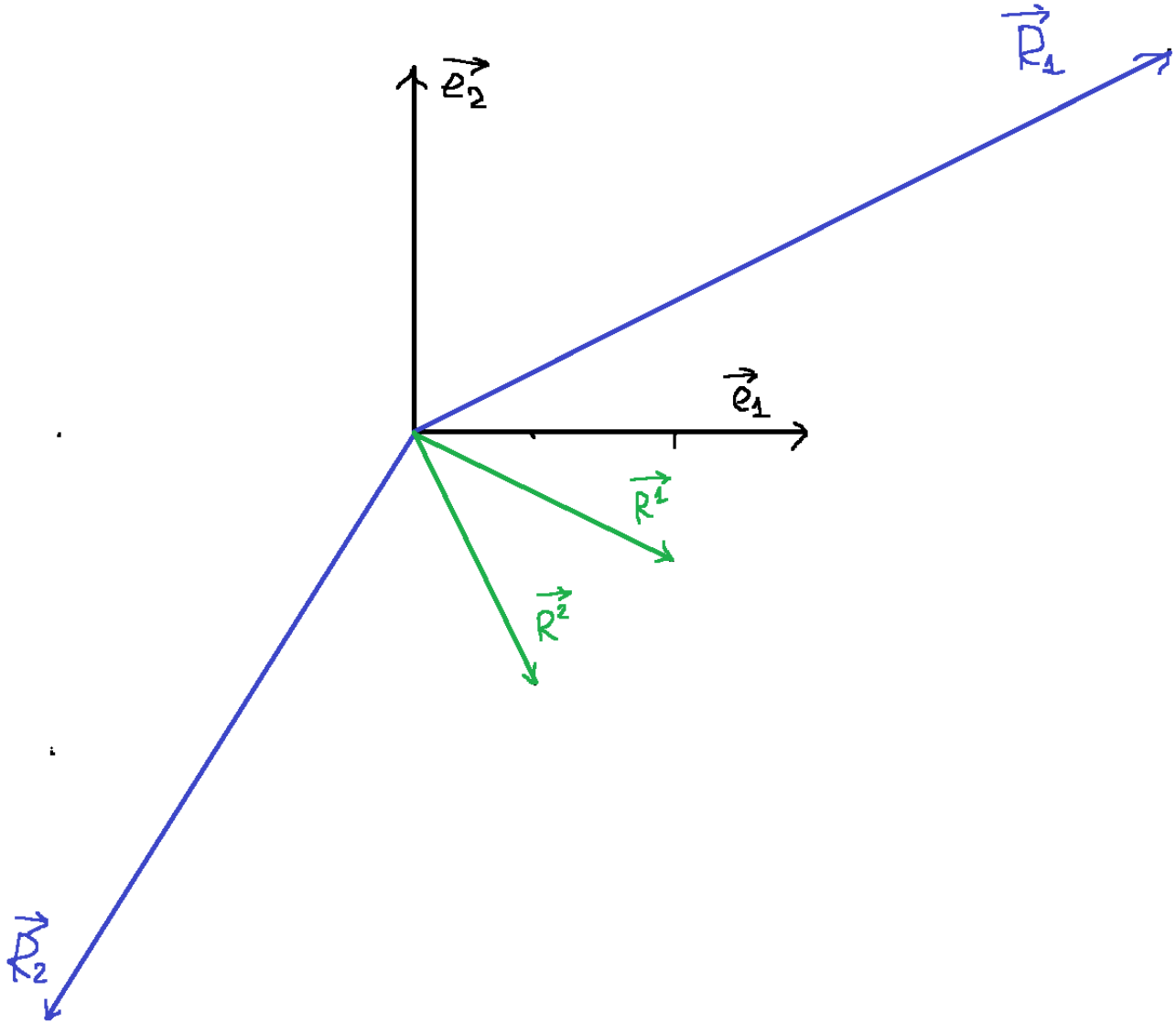
$$g^{IJ}g_{JK} = \delta_K^I$$

$$1) \vec{R}^I = g^{IJ} \vec{R}_J$$

$$\vec{R}^1 = g^{1J} \vec{R}_J = g^{11} \vec{R}_1 + g^{12} \vec{R}_2 = \frac{5}{9} \vec{R}_1 + \frac{4}{9} \vec{R}_2 = \frac{5}{9} (2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \frac{4}{9} (-\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) = \frac{2}{3} \vec{e}_1 - \frac{1}{3} \vec{e}_2$$

$$\text{Аналогично, } \vec{R}^2 = \frac{1}{3} \vec{e}_1 - \frac{2}{3} \vec{e}_2$$

Рисунок на миллиметровке!



$$\vec{R}^I \vec{R}_J = \delta_J^I$$

$$\vec{R}^1 \vec{R}_1 = \left(\frac{1}{3} \vec{e}_1 \cdot \frac{1}{3} \vec{e}_2 \right) (2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

$$\vec{a} = a^I \vec{e}_I, \quad a^I = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a = a^I \vec{e}_I = a^I P_I^J \vec{R}_J = a_I Q_J^I \vec{R}^J$$

$$\text{Пусть } a = b^I \vec{R}_J = b_J \vec{R}^J \implies$$

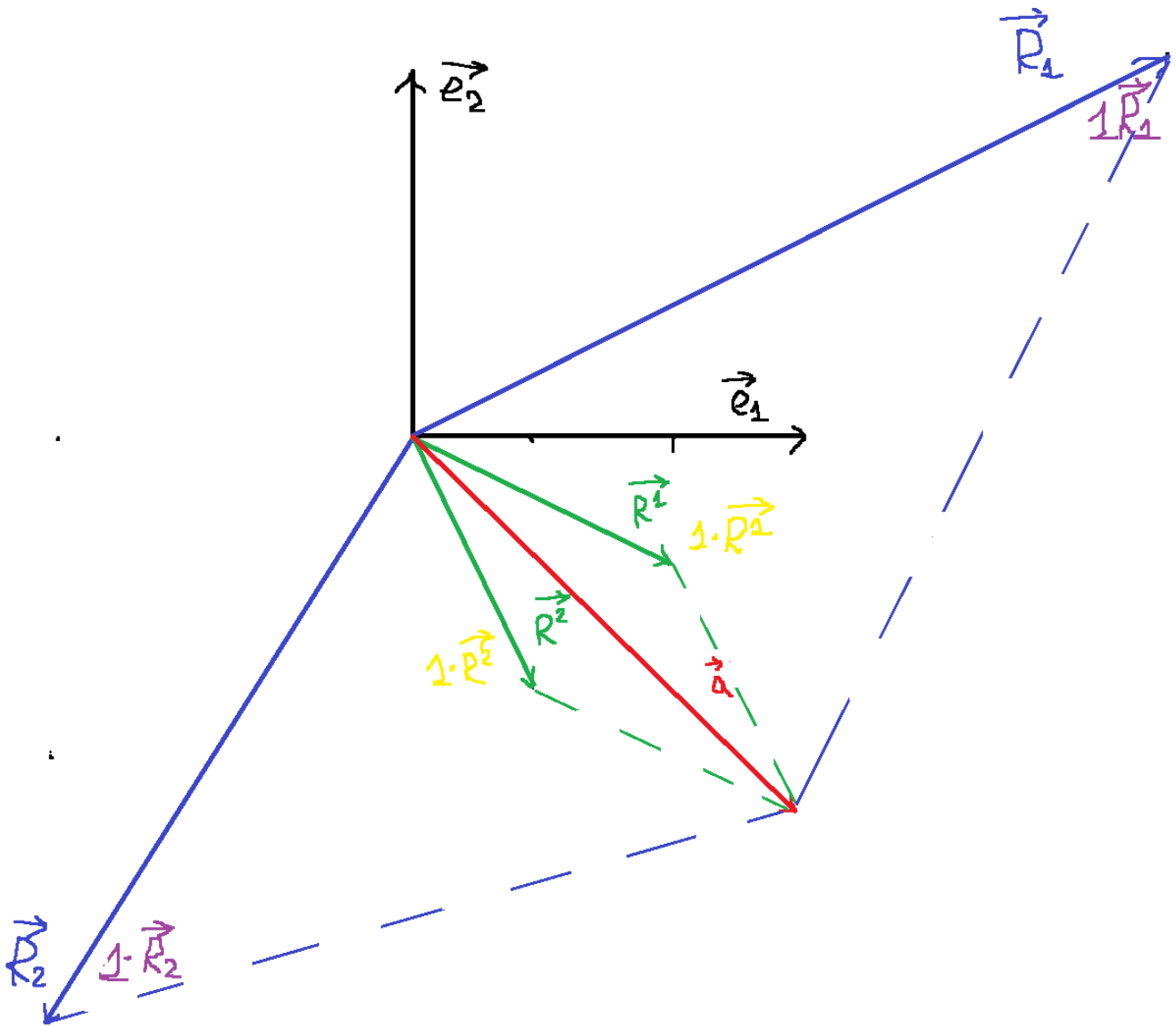
$$b^J = a^I P_I^J, \quad b_J = a_I Q_J^I$$

$$b^I = P_J^I a^J$$

$$\begin{cases} b^1 = P_J^1 a^J = P_1^1 a^1 + P_2^1 a^2 = \frac{2}{3} \cdot 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)(-1) = 1 \\ b^2 = P_J^2 a^J = P_1^2 a^1 + P_2^2 a^2 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)(-1) = 1 \\ b_1 = Q_1^I a_I = Q_1^1 a_1 + Q_1^2 a_2 = 2 \cdot 1 + 1(-1) = 1 \\ b_2 = Q_2^I a_I = Q_2^1 a_1 + Q_2^2 a_2 = (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 1 \end{cases}$$

$$\vec{a} = \vec{R}^1 + \vec{R}^2$$

$$\vec{a} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$$



$$g_{IJ} = Q_I^K Q_J^L \delta_{KL}, \quad g^{IJ} = P_K^I P_L^J \delta^{KL}$$

24/02/2025

2 раздел. 1 Пункт.

$$\begin{gathered} \vec{R}^I \vec{R}_J = \delta^I_J \\ \vec{R}^I \vec{R}_I = \left(\frac{2}{3} \right) \vec{e}_1 \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \vec{R}_i \cdot \vec{R}_j, \quad g^{ij} = \vec{R}^i \cdot \vec{R}^j \\ \vec{R}^i \cdot \vec{R}^j &= (g^{ik} \vec{R}_k) \cdot (g^{jl} \vec{R}_l) = g^{ik} g^{jl} (\vec{R}_k \cdot \vec{R}_l) = \\ &= g^{ik} (g^{jl} g_{kl}) = g^{ik} \delta_k^j = g^{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{R}_i &= g_{ij} \vec{R}^j \\ \vec{R}_i &= \delta_i^k \vec{R}_k = g_{ij} g^{ik} \vec{R}_k = g_{ij} \vec{R}^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^i &= \vec{a} \cdot \vec{R}^i \\ \vec{a} \cdot \vec{R}^i &= a_j \vec{R}_j \cdot \vec{R}^i = a_j \delta_j^i = a_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{R}^i \cdot \vec{R}_j &= \delta_j^i \\ \vec{R}^i \cdot \vec{R}_j &= (\vec{R}_k g^{ik}) \cdot \vec{R}_j = g^{ik} \vec{R}_k \cdot \vec{R}_j = g^{ik} g_{jk} = \delta_j^i \\ \vec{R}^i \cdot \vec{R}_j &= \vec{R}^i \cdot (g_{jk} \vec{R}^k) = g_{jk} \vec{R}^i \cdot \vec{R}^k = g_{jk} g^{ik} = \delta_j^i \end{aligned}$$

Переход от декартового базиса к криволинейному Vs от криволинейного к декартовому

$$\begin{aligned} \vec{R}_i &= Q_i^j \vec{e}_j \Leftrightarrow \vec{e}_j = P_j^i \vec{R}_i \\ \vec{R}^i &= P_j^i \vec{e}^j \Leftrightarrow \vec{e}^j = Q_i^j \vec{R}^i \end{aligned}$$

03/03/2025

Векторное произведение.

Векторное произведение \vec{a} и \vec{b}

Исправить дома

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sqrt{g} \varepsilon_{ijk} a^i b^j \vec{R}^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{lmn} a_l b_m \vec{R}_n$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, \text{ есть совпадающие индексы} \\ 1, \text{ чётная перестановка} \\ -1, \text{ нечётная перестановка} \end{cases}$$

$$[\vec{e}_k, \vec{e}_l] = \varepsilon_{klm} \vec{e}_m$$

$$[\vec{e}_3, \vec{e}_2] = \varepsilon_{321} \vec{e}_1 = -\vec{e}_1$$

$$[\vec{e}_k, \vec{e}_l] \cdot \vec{e}_n = \varepsilon_{klm} (\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n) - \text{смешанное произведение}$$

$$\varepsilon_{klm} (\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n) = \sum \varepsilon_{klm} \delta_{mn} = ?$$

$$\varepsilon_{ijk} = ([\vec{e}_i, \vec{e}_j], \vec{e}_k)$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_i^l & \delta_i^m & \delta_i^n \\ \delta_j^l & \delta_j^m & \delta_j^n \\ \delta_k^l & \delta_k^m & \delta_k^n \end{vmatrix}$$

$$\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_B \cdot \underbrace{\varepsilon^{lmn}}_C = \begin{vmatrix} \delta_i^l & \delta_i^m & \delta_i^n \\ \delta_j^l & \delta_j^m & \delta_j^n \\ \delta_k^l & \delta_k^m & \delta_k^n \end{vmatrix}$$

$$\det A = \det B \cdot \det C$$

$$\det(B \cdot C) = \det B \cdot \det C$$

$$\det(A^T) = \det A \implies$$

$$B \cdot C^T = \begin{pmatrix} \delta_i^1 & \delta_i^2 & \delta_i^3 \\ \delta_j^1 & \delta_j^2 & \delta_j^3 \\ \delta_k^1 & \delta_k^2 & \delta_k^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_l^1 & \delta_m^1 & \delta_n^1 \\ \delta_l^2 & \delta_m^2 & \delta_n^2 \\ \delta_l^3 & \delta_m^3 & \delta_n^3 \end{pmatrix}$$

$$(B \cdot C^T)_1^1 = \delta_i^1 \delta_l^1 + \delta_i^2 \delta_l^2 + \delta_i^3 \delta_l^3 = \sum \delta_{ip} \delta_{lp} = \delta_{il}$$

Одинарная свёртка

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ilm} = \delta_j^l \delta_k^m - \delta_k^l \delta_j^m$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ilm} = \begin{vmatrix} \delta_i^i & \delta_i^l & \delta_i^m \\ \delta_j^i & \delta_j^l & \delta_j^m \\ \delta_k^i & \delta_k^l & \delta_k^m \end{vmatrix} = \delta_i^i \delta_j^l \delta_k^m + \delta_i^l \delta_j^m \delta_k^i + \delta_i^m \delta_j^i \delta_k^l - (\delta_i^m \delta_j^l \delta_k^i + \delta_i^i \delta_j^m \delta_k^l + \delta_i^l \delta_j^i \delta_k^m) =$$

$$= \cancel{\delta_i^i \delta_j^l \delta_k^m} + \cancel{\delta_i^l \delta_j^m \delta_k^i} + \cancel{\delta_i^m \delta_j^i \delta_k^l} - \cancel{\delta_i^m \delta_j^l \delta_k^i} - \cancel{\delta_i^i \delta_j^m \delta_k^l} - \cancel{\delta_i^l \delta_j^i \delta_k^m} =$$

$$= \delta_j^l \delta_k^m - \delta_j^m \delta_k^l$$

Двойная свёртка

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijl} = 2\delta_k^l$$

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijl} = \delta_j^j \delta_k^l - \delta_k^j \delta_j^l = 3\delta_k^l - \delta_k^l = 2\delta_k^l$$

Тройная свёртка

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk} = 6 \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk} = 2 \delta_k^k = 2 \cdot 3 = 6$$

4.

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} a_i b_j \vec{R}_k = -\frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{jik} b_j a_i \vec{R}_k = -\vec{b} \times \vec{a}$$

5.

$$\vec{R}^k = \frac{1}{2\sqrt{g}} \varepsilon^{nmk} \vec{R}_n \times \vec{R}_m$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g}} \varepsilon^{nmk} \vec{R}_n \times \vec{R}_m =$$

$$\vec{R}_n = \delta_n^j \vec{R}_j$$

$$\vec{R}_m = \delta_m^i \vec{R}_i$$

$$= \frac{1}{2\cancel{\sqrt{g}}} \varepsilon^{nmk} \left(\cancel{\sqrt{g}} \underbrace{\varepsilon_{jil} \delta_n^j \delta_m^i}_{\varepsilon_{nml}} \vec{R}^l \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon^{nmk} \cdot \varepsilon_{nml} \vec{R}^l = \frac{1}{2} \cdot 2\delta_l^k \vec{R}^l = \vec{R}^k$$

$$\vec{R}_k = \sqrt{g_2} \varepsilon_{nmk} \vec{R}^n \times \vec{R}^m$$

$$\frac{\sqrt{g}}{2} \varepsilon_{nmk} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \underbrace{\varepsilon^{jil} \delta_j^n \delta_i^m}_{\varepsilon^{nml}} \vec{R}_l \right) =$$

$$\vec{R}^n = \delta_j^n \vec{R}^j$$

$$\vec{R}^m = \delta_i^m \vec{R}^i$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_{nmk} \varepsilon^{nml} \vec{R}_l = \frac{1}{2} \cdot 2\delta_k^l \vec{R}_l = \vec{R}_k$$

6.

$$\vec{R}^i \times \vec{R}^j = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} \vec{R}_k$$

$$\vec{R}^i = \delta_l^i \vec{R}^l$$

$$\vec{R}^j = \delta_m^j \vec{R}^m$$

$$\vec{R}^i \times \vec{R}^j = \frac{1}{\sqrt{g}} \underbrace{\varepsilon^{lmk} \delta_l^i \delta_m^j}_{\varepsilon^{ijk}} \vec{R}_k = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} \vec{R}_k$$

7.

$$\begin{aligned}
 \vec{R}_i \times \vec{R}^i &= \vec{0} \\
 \vec{R}_i \times g^{ij} \vec{R}_j &= g^{ij} \vec{R}_i \times \vec{R}_j = \\
 \vec{R}_i &= \delta_i^k \vec{R}_k \\
 \vec{R}_j &= \delta_j^l \vec{R}_l \\
 &= g^{ij} (\sqrt{g} \varepsilon_{klm} \delta_i^k \delta_j^l \vec{R}^m) = \\
 &= \sqrt{g} \underbrace{(g^{ig} \delta_i^k \delta_j^l)}_{g^{kl}} \cdot \varepsilon_{klm} \vec{R}^m = \\
 &= \sqrt{g} \cancel{g^{kl}} \overset{0}{\varepsilon_{klm}} \vec{R}^m = \vec{0}
 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
 (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \\
 (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} a_i b_j \right) c_k = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} a_i b_j c_k \\
 (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} &= \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{ijk} c_i a_j \right) b_k = \frac{1}{\sqrt{g}} a_j b_k c_i = \\
 &\quad \dots \\
 &= \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{kij} a_i b_j c_k
 \end{aligned}$$