Вариант 5

1. Определить скорость v распространения волны в упругой среде, если разность фаз колебаний двух точек среды, отстоящих друг от друга на расстояние Δx, равна Δφ. Частота колебаний равна ω.

Дано:

$\Delta\varphi(\Delta x), \omega$

Найти:

v (распространения)

Решение:

$$\varphi = kx + \omega t + \varphi_0 \text{ - уравнение фазы волны}$$

$$k = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \text{const} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}\Delta\varphi = \int_{\varphi(x_0,t_0)}^{\varphi(x_0+\Delta x,t_0)} d\varphi = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} k dx = k\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = k \\ 2\pi = \int_{\varphi(x_0,t_0)}^{\varphi(x_0+\lambda,t_0)} d\varphi = \int_{x_0}^{x_0+\lambda} k dx = k\lambda \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = k\end{matrix}\right. \Rightarrow \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi\Delta x}{\Delta\varphi}$$

$$\text{Рассмотрим фронт волны: } \varphi(x,t) = \text{const}$$

$$v = \frac{dx_{\text{фронта волны}}}{dt} = \text{const} \Rightarrow$$

$$\lambda = \int_{x(t_0)}^{x(t_0+T)} dx = \int_{t_0}^{t_0+T} v dt = vT \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T}$$

$$\omega = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \text{const} \Rightarrow$$

$$2\pi = \int_{\varphi(x_0,t_0)}^{\varphi(x_0,t_0+T)} d\varphi = \int_{t_0}^{t_0+T} \omega dt = \omega T \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow$$

$$v = \frac{\lambda}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega\lambda}{2\pi} = \frac{2\pi\Delta x\omega}{2\pi\Delta\varphi} = \frac{\Delta x}{\Delta\varphi}\omega$$

Пояснения: под $\int_{\varphi(x_0,t_0)}^{\varphi(x_0+a,t_0)} d\varphi$ и $\int_{\varphi(x_0,t_0)}^{\varphi(x_0,t_0+b)} d\varphi$ подразумеваются интегралы от φ по отрезкам, параллельным t и x соответственно.

То, что $2\pi = \int_{\varphi(x_0,t_0)}^{\varphi(x_0+\lambda,t_0)} d\varphi = \int_{\varphi(x_0,t_0)}^{\varphi(x_0,t_0+T)} d\varphi$, следует из определения длины волны и периода волны.

Ответ: $v = \frac{\Delta x}{\Delta\varphi}\omega$

2. Газ находится в очень высоком цилиндрическом сосуде при температуре T . Считая поле тяжести однородным, найти среднее значение потенциальной энергии ⟨U ⟩ молекул газа. Масса одной молекулы m.

Дано:	Найти:
$h \gg 1$ м	$\langle U \rangle$
$T, \vec{g} = \overrightarrow{\text{const}}, m$	

Решение:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) - \text{ распределение Больцмана} \Rightarrow$$

$$p(U) = \frac{n}{N} = \frac{n_0}{N} \exp\left(-\frac{U}{kT}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{U}{kT}\right)$$

$$U(h) = mgh - U_0, U_0 = U(h_0) \Rightarrow U = mg(h - h_0),\ h_0 - \text{высота нижней точки сосуда}$$

Выберем ось координат так, чтобы $h_0 = 0 \Rightarrow$

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{N} \sum_{U_i} U_i \cdot n_i = \sum_{U_i} U_i p(U_i)$$

При $N \to \infty$ p становится плотностью вероятности $\to$

$$\int_0^H p(h) dh = 1 = \int_0^H p_0 \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) dh =$$

$$= p_0 \frac{kT}{mg} \left(1 - \exp\left(-\frac{mgH}{kT}\right)\right) \approx p_0 \frac{kT}{mg} \Rightarrow p_0 = \frac{mg}{kT} \Rightarrow$$

$$p = \frac{mg}{kT} \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right)$$

$$\langle U \rangle = \int_0^H U(h) p(h) dh = \int_0^H mgh \frac{mg}{kT} \exp\left(-\frac{mgh}{kT}\right) dh =$$

$$= mg \frac{kT}{mg} \left(\cancelto{0}{\exp\left(-\frac{mgH}{kT}\right)} \left(-\frac{mgH}{kT} - 1\right) - \exp(0)(0 - 1) \right) \approx kT$$

Ответ: $\langle U \rangle = kT$