Домашняя работа №1-3
1. Методы простой итерации и Зейделя.
2. Методы касательных и секущих, метод деления отрезка пополам

1. Методы простой итерации и Зейделя для решения СЛАУ

Теорема 1 (*о совместности СЛАУ для метода простой итерации*)
Пусть $^{>}\boldsymbol{g} \in {}^{>}\mathbb{R}^n$ – вектор-стобец высоты n, $\boldsymbol{F} \in \mathrm{L}(\mathbb{R}; n)$ – квадратная матрица размера $n \times n$, чебышевская норма $\|\boldsymbol{F}\| = \max\{\sum_{j=1}^{n} \left| f_j^i \right| : i = \overline{1, n}\}$ которой удовлетворяет условию: $\|\boldsymbol{F}\| < 1$. Тогда СЛАУ:

$$^{>}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot {}^{>}\boldsymbol{x} + {}^{>}\boldsymbol{g} \; – \tag{1}$$

совместна и имеет единственное решение $^{>}\boldsymbol{x}_* \in {}^{>}\mathbb{R}^n$.►

1.1. Метод простой итерации

Для решения СЛАУ (1) используется метод простой итерации $\mathrm{itr}(\boldsymbol{F}(\cdot) + {}^{>}\boldsymbol{g}; {}^{>}\boldsymbol{x}_{(0)})$, в котором:

1) выбирается произвольный вектор $^{>}\boldsymbol{x}_{(0)} \in {}^{>}\mathbb{R}^n$ (начальный вектор итераций);

2) если вектор $^{>}\boldsymbol{x}_{(k)} \in {}^{>}\mathbb{R}^n$, где $k \in \mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$, – уже задан, то вычисляется вектор $^{>}\boldsymbol{x}_{(k+1)} \in {}^{>}\mathbb{R}^n$, для которого

$$^{>}\boldsymbol{x}_{(k+1)} = \boldsymbol{F} \cdot {}^{>}\boldsymbol{x}_{(k)} + {}^{>}\boldsymbol{g}\,; \tag{2}$$

3) при достаточно большом $k \in \mathbb{N}$ вектор $^{>}\boldsymbol{x}_{(k)} \in {}^{>}\mathbb{R}^n$ считается приближённым решением СЛАУ (1).

Определение 1 (*рабочей формулы метода простой итерации и его последовательности*)
Формула (2) называется *рабочей формулой метода простой итерации для решения СЛАУ* (1) и последовательность $^{>}\boldsymbol{x}_{(\bullet)} = ({}^{>}\boldsymbol{x}_{(k+1)})_{\mathbb{N}}$, индуцированная рабочей формулой (2) из фиксированного вектора $^{>}\boldsymbol{x}_{(0)} \in {}^{>}\mathbb{R}^n$, - *последовательностью* приближённых решений СЛАУ (1) *метода простой итерации*, для которого, в этом случае, используется обозначение: $\mathrm{itr}(\boldsymbol{F}(\cdot) + {}^{>}\boldsymbol{g}; {}^{>}\boldsymbol{x}_{(0)})$.►

Теорема 2 (*об оценке погрешности метода простой итерации*)
Пусть $^{>}\boldsymbol{x}_{(\bullet)} = ({}^{>}\boldsymbol{x}_{(k)})_{\mathbb{N}}$ – последовательность приближённых решений метода простой итерации $\mathrm{itr}(\boldsymbol{F}(\cdot) + {}^{>}\boldsymbol{g}; {}^{>}\boldsymbol{x}_{(0)})$ для СЛАУ (1). Тогда, если $\|\boldsymbol{F}\| < 1$, эта последовательность $^{>}\boldsymbol{x}_{(\bullet)}$ сходится к решению $^{>}\boldsymbol{x}_* = (\boldsymbol{E} + \sum_{k=1}^{+\infty} \boldsymbol{F}^k) \cdot {}^{>}\boldsymbol{g} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{F})^{-1} \cdot {}^{>}\boldsymbol{g}$ СЛАУ (1). Кроме того, в этом случае при любом $k \in \mathbb{N}$ справедливы оценки:

$$\left\| {}^{>}\boldsymbol{x}_{(k)} - {}^{>}x_{*} \right\| \le \frac{\|\boldsymbol{F}\|^{k}}{1-\|\boldsymbol{F}\|} \cdot \left\| {}^{>}\boldsymbol{g} \right\| + \|\boldsymbol{F}\|^{k} \cdot \left\| {}^{>}\boldsymbol{x}_{(0)} \right\| \qquad (3)$$

и

$$\left\| {}^{>}\boldsymbol{x}_{(k+1)} - {}^{>}\boldsymbol{x}_{*} \right\| \le \|\boldsymbol{F}\| \cdot \left\| {}^{>}\boldsymbol{x}_{(k)} - {}^{>}\boldsymbol{x}_{*} \right\|, \qquad (4)$$

где $\left\| {}^{>}\boldsymbol{x} \right\| = \max\{ |x^1|, ..., |x^n| \}$ – чебышевская норма вектора ${}^{>}\boldsymbol{x} = [x^1, ..., x^n\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^n$, которой подчинена норма банаховой алгебры $\mathrm{L}(\mathbb{R}; n)$.▶

Замечание 1 (*о СЛАУ с диагональным преобладанием*)
Для любой матрицы $\boldsymbol{A} = (a^i_j)^n_n \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}; n)$ существует такая диагональная матрица $\boldsymbol{D} \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}; n)$, что $\|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A}\| < 1$. Поэтому любая СЛАУ вида:

$$\boldsymbol{A} \cdot {}^{>}\boldsymbol{x} = {}^{>}\boldsymbol{b} \ \ (\ \boldsymbol{A} = (a^i_j)^n_n \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}; n) \text{ и } {}^{>}\boldsymbol{b} \in {}^{>}\mathbb{R}^n\ ) - \qquad (5)$$

может быть сведена к равносильной СЛАУ вида:

$${}^{>}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot {}^{>}\boldsymbol{x} + {}^{>}\boldsymbol{g}\ ,$$

где $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A}$, $\|\boldsymbol{F}\| < 1$ и ${}^{>}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{D} \cdot {}^{>}\boldsymbol{b}$, для решения которой можно уже использовать метод простой итерации. В частности, если в СЛАУ (5) матрица $\boldsymbol{A}$ имеет *диагональное преобладание*, т.е. $|a^i_i| > |a^i_1| + \ldots + |a^i_{i-1}| + |a^i_{i+1}| + \ldots + |a^i_n|,\ i = \overline{1, n},$ то указанную выше диагональную матрицу $\boldsymbol{D}$ можно выбрать в виде:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}, \text{ где } \alpha_i = \frac{1}{a^i_i} \text{ для } i = \overline{1, n}.▶$$

Теорема 3 (*об устойчивости метода простой итерации*)
Пусть ${}^{>}\boldsymbol{x}_{(\bullet)} = ({}^{>}\boldsymbol{x}_{(k)})_{\mathbb{N}}$ – последовательность приближённых решений метода простой итерации $\mathrm{itr}(\boldsymbol{F}, {}^{>}\boldsymbol{g}; {}^{>}\boldsymbol{x}_{(0)})$ решения СЛАУ (1), где $\|\boldsymbol{F}\| < 1$, ${}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(0)} \in {}^{>}\mathbb{R}^n$ и последовательность $({}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)})_{\mathbb{N}} \in {}^{>}\mathbb{R}^n$ такова, что $\left\| {}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)} \right\| \le \left\| {}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(0)} \right\| = \varepsilon > 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда, положив ${}^{>}\underline{\boldsymbol{x}}_{(0)} = {}^{>}\boldsymbol{x}_{(0)} + {}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(0)}$ и ${}^{>}\underline{\boldsymbol{x}}_{(k)} = \boldsymbol{F} \cdot {}^{>}\underline{\boldsymbol{x}}_{(k-1)} + {}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}$, для любого $k \in \mathbb{N}$ получим:

$$\left\| {}^{>}\underline{x}_{(k)} - {}^{>}x_{(k)} \right\| = \left\| \boldsymbol{F}^k \cdot {}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(0)} + \ldots + \boldsymbol{F} \cdot {}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(k-1)} + {}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)} \right\| \le \left(1 + \|\boldsymbol{F}\| + \ldots + \|\boldsymbol{F}\|^k \right) \cdot \varepsilon \le \frac{1}{1 - \|\boldsymbol{F}\|} \cdot \varepsilon\ .$$

Таким образом, метод простой итерации $\mathrm{itr}(\boldsymbol{F}(\cdot) + {}^{>}\boldsymbol{g}; {}^{>}\boldsymbol{x}_{(0)})$ решения СЛАУ (1) устойчив к вычислительным погрешностям.▶

1.2. Метод Зейделя

Метод Зейделя для решения СЛАУ (1) является модификацией метода простой итерации и, как правило, он сходится быстрее метода простой итерации.

Пусть ${}^{>}\boldsymbol{y}_{(0)} \in {}^{>}\mathbb{R}^n$ – фиксированный вектор. Тогда для получения последовательности ${}^{>}\boldsymbol{y}_{(\bullet)} = ({}^{>}\boldsymbol{y}_{(k)})_{\mathbb{N}}$ приближённых решений СЛАУ (1) метод Зейделя предлагает следующую рабочую формулу:

$$ {}^{>}\boldsymbol{y}_{(k)} = \boldsymbol{P}\cdot {}^{>}\boldsymbol{y}_{(k-1)} + \boldsymbol{Q}\cdot {}^{>}\boldsymbol{y}_{(k)} + {}^{>}\boldsymbol{g},\ k\in\mathbb{N}, \qquad (6)$$

где

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} f_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ f_1^2 & f_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ f_1^n & f_2^n & \cdots & f_n^n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} f_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f_n^n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{D},\ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{Q} \text{ и } \boldsymbol{F} = (f_j^i)_n^n. \qquad (7)$$

При фиксированном $k\in\mathbb{N}$ из (6) и (7) получаем:

$$\begin{cases} y_{(k)}^1 = f_1^1\cdot y_{(k-1)}^1 + f_2^1\cdot y_{(k-1)}^2 + f_3^1\cdot y_{(k-1)}^3 + \ldots + f_{n-1}^1\cdot y_{(k-1)}^{n-1} + f_n^1\cdot y_{(k-1)}^n + g^1; \\ y_{(k)}^2 = f_1^2\cdot y_{(k)}^1 + f_2^2\cdot y_{(k-1)}^2 + f_3^2\cdot y_{(k-1)}^3 + \ldots + f_{n-1}^2\cdot y_{(k-1)}^{n-1} + f_n^2\cdot y_{(k-1)}^n + g^2; \\ y_{(k)}^3 = f_1^3\cdot y_{(k)}^1 + f_2^3\cdot y_{(k)}^2 + f_3^3\cdot y_{(k-1)}^3 + \ldots + f_{n-1}^3\cdot y_{(k-1)}^{n-1} + f_n^3\cdot y_{(k-1)}^n + g^3; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{(k)}^n = f_1^n\cdot y_{(k)}^1 + f_2^n\cdot y_{(k)}^2 + f_3^n\cdot y_{(k)}^3 + \ldots + f_{n-1}^n\cdot y_{(k)}^{n-1} + f_n^n\cdot y_{(k-1)}^n + g^n; \end{cases}, \qquad (8)$$

где ${}^{>}\boldsymbol{y}_{(k)} = \left[y_{(k)}^1,\ldots,y_{(k)}^n\right\rangle,\ {}^{>}\boldsymbol{y}_{(k-1)} = \left[y_{(k-1)}^1,\ldots,y_{(k-1)}^n\right\rangle,\ {}^{>}\boldsymbol{g} = \left[g^1,\ldots,g^n\right\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^n$.

Таким образом, при любом $k\in\mathbb{N}$ каждая последующая компонента вектора ${}^{>}\boldsymbol{y}_{(k)}$ в рабочей формуле (8) метода Зейделя вычисляется с учётом уже найденных в этой формуле предыдущих компонент вектора ${}^{>}\boldsymbol{y}_{(k)}$. Поэтому, если для СЛАУ (1) методы простой итерации и Зейделя сходятся к решению СЛАУ (1), то метод Зейделя предпочтительнее, т.к. он сходится «быстрее». Отметим, что, согласно (6) и (7):

$$ {}^{>}\boldsymbol{y}_{(k)} = (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})^{-1}\cdot\boldsymbol{P}\cdot {}^{>}\boldsymbol{y}_{(k-1)} + (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})^{-1}\cdot {}^{>}\boldsymbol{g},\ k\in\mathbb{N}.$$

Теорема 4 (*о признаке сходимости метода Зейделя*)
Пусть для матрицы $\boldsymbol{F}$ СЛАУ (1) выполняется условие: $\|\boldsymbol{F}\| < 1$. Тогда метод Зейделя сходится к решению СЛАУ (1).►

ЗАДАНИЕ 1.1

(*N – номер фамилии студента в журнале, $\beta = 1 - 0{,}03(50-n)$, n – номер группы*)

Используя метод простой итерации с нулевым начальным вектором, найти приближённое решение СЛАУ: $\boldsymbol{A}\cdot {}^{>}\boldsymbol{x} = {}^{>}\boldsymbol{b}$, с матрицей, имеющей диагональное преобладание. Абсолютная погрешность приближённого решения не должна превышать величины 0,01. Предполагается, что все компоненты решения заданной СЛАУ равны единице. Матрица $\boldsymbol{A}$ этой СЛАУ приведена ниже в зависимости от варианта задания (см. *Таблицы 1а,б*).

Кроме того, используя неравенство (3), найти в методе простой итерации число шагов, необходимое для того чтобы гарантировать абсолютную погрешность приближённого решения не более 0,01. Сравнить это расчётное количество шагов с реальным количеством шагов, обеспечившим заданную погрешность. ►

Таблица 1*а*

N	$\boldsymbol{A}$	N	$\boldsymbol{A}$
1	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**2**	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 10\beta & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**4**	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**6**	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**8**	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$

Таблица 1*б*

N	$\boldsymbol{A}$	N	$\boldsymbol{A}$
9	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 10\beta & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**10**	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 10\beta & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**12**	$\begin{pmatrix} 10\beta & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**14**	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**16**	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$

17	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & -2 \\ 3 & 2 & -4 & 10\beta \end{pmatrix}$	**18**	$\begin{pmatrix} 10\beta & 4 & 2 & 3 \\ -2 & 10\beta & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 10\beta \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 10\beta & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 10\beta & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**20**	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & -4 & 2 \\ 2 & 4 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 10\beta \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 10\beta \end{pmatrix}$	**22**	$\begin{pmatrix} 10\beta & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10\beta & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 10\beta & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 10\beta \end{pmatrix}$

ЗАДАНИЕ 1.2

Используя метод Зейделя с нулевым начальным вектором, найти приближённое решение СЛАУ: $\boldsymbol{A}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$, с матрицей, имеющей диагональное преобладание. Абсолютная погрешность приближённого решения не должна превышать величины 0,01. Предполагается, что все компоненты решения заданной СЛАУ равны единице. Матрица $\boldsymbol{A}$ этой СЛАУ приведена в *Таблицах 1а,б*. Сравнить в методах простой итерации и Зейделя количество шагов для достижения абсолютной погрешности, не превышающей величины 0,01.►

2. Методы касательных и секущих, метод деления отрезка пополам

Пусть $f\in C^2\left(\left[a;b\right],\mathbb{R}^1\right)$, $f'>0$ $\left(f'<0\right)$ на отрезке $\left[a;b\right]$, $f''\geq 0$ на отрезке $\left[a;b\right]$ и уравнение $f\left(x\right)=0$ имеет на отрезке $\left[a;b\right]$ единственный корень $x_*\in\left(a;b\right)$, не являющийся кратным, т.к. $f'\left(x\right)\neq 0$ для любой точки $x\in\left[a;b\right]$. Тогда метод простой итерации $\mathrm{itr}\left(\varphi,x_0\right)$, где $x_0\in\left[x_*;b\right]$ $\left(x_0\in\left[a;x_*\right]\right)$ и $\varphi\left(x\right)=x-\left(f'\left(x\right)\right)^{-1}\cdot f\left(x\right)$ для любого $x\in\left[a;b\right]$, сходится к этому корню x_* уравнения $f\left(x\right)=0$. Такой метод $\mathrm{itr}\left(\varphi,x_0\right)$ называется методом Ньютона или методом касательных. Его рабочая формула при любом $k\in N$ имеет вид:

$$x_k=x_{k-1}-\left(f'\left(x_{k-1}\right)\right)^{-1}\cdot f\left(x_{k-1}\right), \tag{9}$$

т.е. $f\left(x_{k-1}\right)+f'\left(x_{k-1}\right)\left(x_k-x_{k-1}\right)=0$ для $k\in\mathbb{N}$ и, следовательно, точка $x_k\in\left[x_*;b\right]$ $\left(x_k\in\left[a;x_*\right]\right)$ является абсциссой точки пересечения касательной к графику функции $y=f\left(x\right)$, проведённой в точке $\left(x_{k-1},f\left(x_{k-1}\right)\right)$, с осью абсцисс, что иллюстрирует рис. 1.

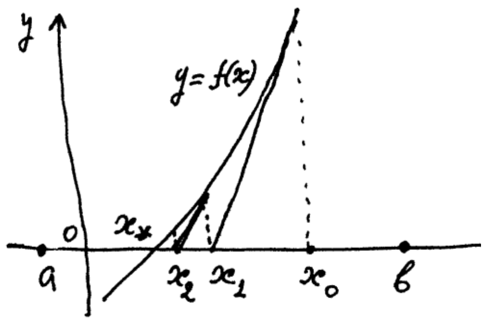

Рис. 1

Скорость сходимости метода Ньютона с рабочей формулой (9) достаточно велика (квадратична), т.к.

$$\varphi'(x) = \frac{f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} \cdot f(x) \to 0 \text{ при } x \to x_*.$$

Но преимущества метода Ньютона сказываются только в достаточно малой окрестности корня x_*, где значение φ' - мало. Поэтому, прежде, следует «хорошо» локализовать корень x_* каким-либо другим методом (например, графически или методом деления отрезка пополам), а, затем, использовать уже метод Ньютона для достижения высокой точности результата.

В многомерном случае рабочая формула (9), где f' - матрица Якоби, приведет к многомерному (n-мерному) методу Ньютона.

Метод секущих

На каждом шаге метода Ньютона приходится вычислять не только значение функции f, но значение и её производной, что создаёт дополнительные практические трудности. Поэтому, заменив в рабочей формуле (9) метода Ньютона значение производной $f'(x_{k-1})$ на величину $\frac{1}{(x_{k-1} - x_{k-2})}\left(f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})\right)$ получаем рабочую формулу:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{(x_{k-1} - x_{k-2})\, f(x_{k-1})}{f(x_{k-1}) - f(x_{k-2})} - \tag{10}$$

двухшагового метода секущих, где $k \in \mathbb{N}$.

Приближение x_k при заданных $k \in \mathbb{N}$ является, согласно формуле (10), абсциссой точки пересечения секущей прямой, проведённой через точки $\left(x_{k-1} + h_{k-1}, f(x_{k-1} + h_{k-1})\right)$ и $\left(x_{k-1}, f(x_{k-1})\right)$, с осью абсцисс, что иллюстрирует рис. 2.

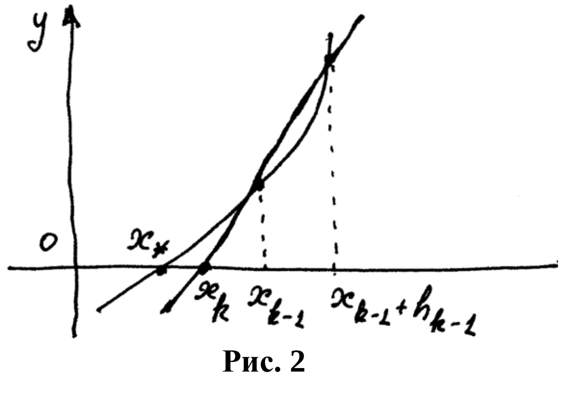

Рис. 2

Если $f(a)\cdot f(b)<0$ и $f(b)\cdot f''>0$ на $[a;b]$, то целесообразно использовать метод, не выпускающий корень $x_* \in (a;b)$ из найденной «вилки» и использующий рабочую формулу:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{(b-x_{k-1})\, f(x_{k-1})}{f(b)-f(x_{k-1})} \quad (k\in N),$$

что иллюстрирует рис. 3, где $x_0 = a$.

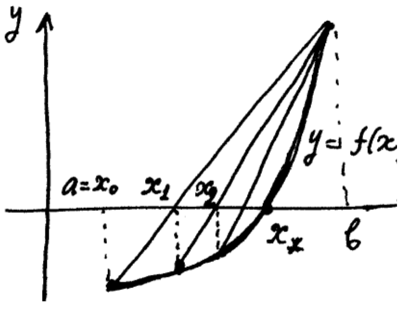

Рис. 3

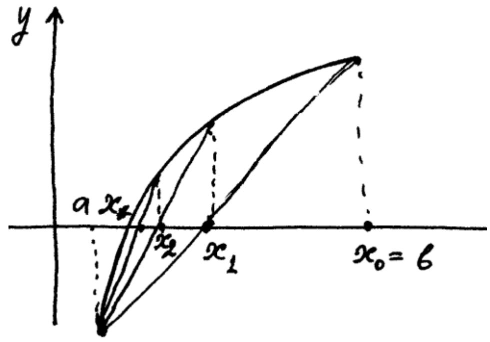

Рис. 4

Если же $f(a)\cdot f(b)<0$ и $f(a)\cdot f''>0$ на $[a;b]$, то, полагая $x_0 = b$, целесообразно использовать рабочую формулу:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{(x_{k-1}-a)\, f(x_{k-1})}{f(x_{k-1})-f(a)} \quad (k\in N),$$

что иллюстрирует рис. 4.

ЗАДАНИЕ 2

(N *– номер фамилии студента в журнале,* $\alpha = 0,003\cdot(n-50)$, n *– номер группы*)

С погрешностью, не превосходящей величину $\varepsilon = 0,0001$, найти все корни уравнения:

$$[N+5,2+(-1)^N\alpha]\cdot x^3 - [2N^2+10,4N+(-1)^{N+1}\alpha]\cdot x^2 - N^2(N+5,2)(x-2N)+(-1)^N\alpha = 0 .$$

Нарисовать график функции, стоящей в левой части уравнения. Используя этот график отделить корни уравнения. Для определения левого корня использовать метод касательных, правого – метод секущих. Для определения срединного корня использовать метод деления отрезка пополам.