11/02/2025

$n = 2$ **- плоскость**	L **- линейное пространство**
$n = 3$ - пространство	E - евклидово пространство

L_2

В линейном пространстве есть линейные элементы (векторы):

$$+, \lambda\cdot$$
$$1)\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad \text{- полугруппа}$$
$$2)\exists 0 : \forall \vec{a} | \vec{a} + 0 = \vec{a}$$
$$3)\forall \vec{a}\ \exists -\vec{a}|\ \vec{a} + -\vec{a} = 0 \quad \text{1,2,3 - группа}$$
$$4)\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} - 1, 2, 3, 4 \quad \text{1,2,3,4 - Абелева группа}$$
$$5)\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$
$$6)(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$$
$$7)\lambda_1(\lambda_2\vec{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{a}$$
$$8)1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$8 \to 1 \neq 0$$
$$\forall \vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a^i \vec{e}_i$$

Правило Эйнштейна:

$$\sum_{i=1}^{N} a^i \vec{e}_i = a^i e_i$$

Правило Эйнштейна не распространяется на греческий алфавит
Вместо сумма говорим свёртка. Выше представлена одинарная свёртка.
Вектор не обязан быть геометрическим вектором
Например, в множестве полиномов не выше 2 степени:

$$\vec{a} = a^1 x^2 + a^2 x + a^3$$
$$\vec{e_1} = 1$$
$$\vec{e_2} = x$$
$$\vec{e_3} = x^2$$
$$\implies \vec{a} = a^i \vec{e}_i$$

Базис можно менять
Рассмотрим Линейное пространство, сопряжённое пространство, евклидово пространство
Симметрия верхнего и нижнего индексов
Индекс:
i,j,k,l,m,n,p,q,r,s,t
В плоскости вместо маленьких букв используются заглавные
буква с индексом означает несколько чисел
т.е.

$$a^i - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Замена базиса

$$\vec{e}_i \to \vec{e'_i}$$

$$\vec{a} = a'^i \vec{e'_i} = a^i \vec{e}_i$$
$$\vec{e'_i} = Q^j{}_i \vec{e}_j$$

Верхний индекс ближе к букве, чем нижний

$$Q^I{}_J = \begin{pmatrix} Q^1{}_1 & Q^1{}_2 \\ Q^2{}_1 & Q^2{}_2 \end{pmatrix}$$

$$a^i = Q^j{}_i a'^i$$

$Q^j{}_i$ - матрица преобразования
Свойство: $Q = \det(Q^j{}_i) \neq 0$
Доказательство:

$$Q = 0$$
$$\exists \text{ Линейная нетривиальная комбинация столбцов с суммой } = 0$$
$$\sum_{\alpha=1}^{N} S_\alpha Q^j{}_\alpha = 0$$

Свободный индекс означает, что пробегаются все возможные значения
$\sum_{\alpha=1}^{N} S_\alpha Q^j{}_\alpha = 0 \leftrightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} S_\alpha Q^j{}_\alpha = 0, j \in \{1, 2, 3\}$

$$\sum_{\alpha=1}^{3} S_\alpha \vec{e'_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{3} S_\alpha Q^j{}_i \vec{e}_j = \lambda'^j \vec{e}_j = 0 - \textit{противоречие}$$

$$Q \neq_0 \implies \exists Q^{-1} = P$$
$$P^i{}_j Q^j{}_k = \delta^i_k = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$$

δ - символ Кронекера, вводится для записи единичной матрицы
$p^i{}_j Q^j{}_k$ - то же самое, что матричное умножение
Сопряжённое линейные пространство L_n^*

$$f : L_n \to \mathbb{R}$$
$$f = f(\vec{a})$$

Линейность: $f(\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2}) = \lambda_1 f(\vec{a_1}) + \lambda_2 f(\vec{a_2})$
Сопряжённое линейное пространство.
Функционал - линейное отображение, элемент L_n^*

$$f(\vec{a}) = f(a^i \vec{e}_i) = a^i f(\vec{e}_i) = a^i f_i, \qquad f_i = f(\vec{e}_i)$$
$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i$$
$$f = a^i f_i$$

Для вектора меняются векторные координаты (компоненты), а для функционала - значение функционала над базисными векторами

Рассматриваем базисные функционалы:

$$e^1 = f(\vec{e_1})$$
$$e^2 = f(\vec{e_2})$$
$$e^3 = f(\vec{e_3})$$

$$e^i(\vec{e_j}) = \delta^i_j$$

$$e^i(\vec{a}) = e^i(a^j\vec{e_k}) = a^j e^i(\vec{e_j}) = a^j\delta^i_j = a^i$$
$$e_i : \ \vec{a} \to a^i$$

$f(\vec{a}) = f_i e^i(\vec{a})$ - разложение $\vec{a}$ по базисным функционалам
Наблюдается двойственность того, что меняется при смене базиса, и того, что в каком месте индесы - вверху или внизу
Определение взаимных базисов:

Базис $\vec{e_j} \in L_n$ и $e^i \in L_n^*$ взаимны $\Leftrightarrow e^i(\vec{e_j}) = \delta^i_j$

Отображение линейных отображений???
Евклидово пространство E_n
$\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$
Точки! Расстояния! Углы!

Криволинейные координаты.
Мы можем охарактеризовать положение точки в 3х мерном пространстве с помощью 3 декартовых координат.

$$\vec{x} = \vec{x}(x^i) = \vec{x}(x^j)$$

x^i - декартовы, x^j - криволинейные

$$x^i = x^i(x^j)$$

$$x^j = x^j(x^i)$$

$$\vec{x} = \vec{x}(x^1, x^2, x^3) = \begin{cases} x^1(x^1, x^2, x^3) \\ x^2(x^1, x^2, x^3) \\ x^3(x^1, x^2, x^3) \end{cases}$$

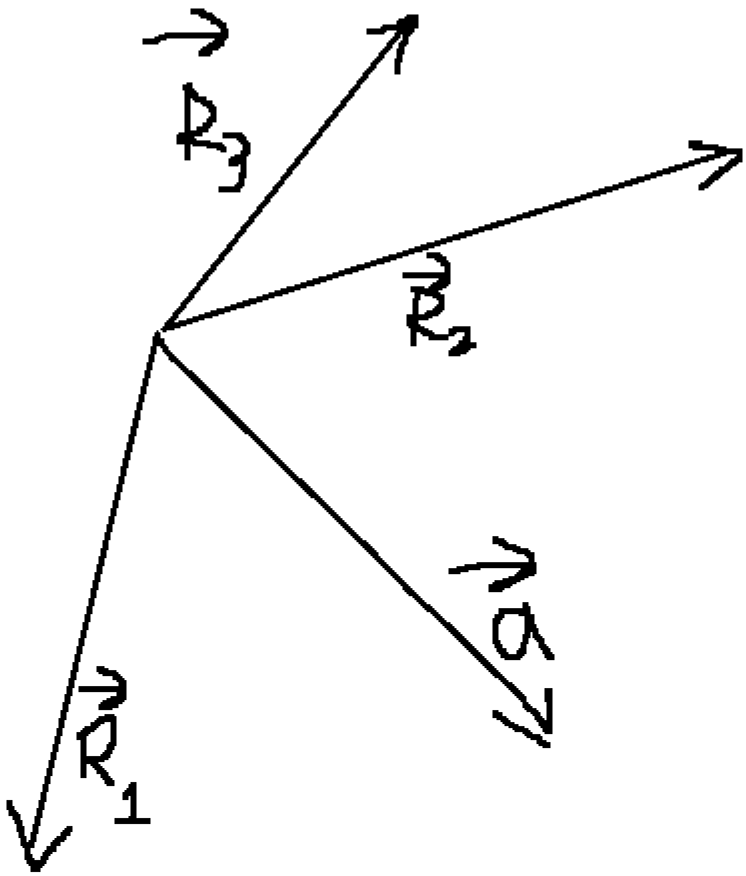
Если зафиксировать x^2, x^3, то получится функция от одной неизвестной
Криволинейные орты:

$$\vec{R}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i}$$

$$\vec{R}_i = \frac{\partial(\vec{x}^j\vec{e}_j)}{\partial x^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} e_j$$

$Q^j{}_i = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}$ - матрица преобразования или матрица Якоби

$Q \neq 0$ доказывается точно так же



$\vec{a} = a^i \vec{R}_i$, a^i - контрвариантные компоненты вектора $\vec{a}$
Метрическая матрица

$$g_{ij} = \vec{R}_i \cdot \vec{R}_j$$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

$$g_{ij} = g_{ji}$$

Свойство определителя метрической матрицы:

$$g = \det(g_{ij}) > 0$$

Рассмотрим переход от декартового базиса к криволинейному $\vec{e}_i \to \vec{R}_i$
$g_{ij}^{(декартовая)} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

$$\vec{R}_i = Q_i^j \vec{e}_j$$
$$\vec{R}_k = Q_k^l \vec{e}_l$$
$$g_{ij} = \vec{R}_i \cdot \vec{R}_k = Q_i^j Q_k^l \vec{e}_j \cdot \vec{e}_l = Q_i^j Q_k^l \delta_{jk}$$

Компоненты метрического тензора ковариантны.
Верхние индексы ковариантны.
Нижние индексы - контрвариантны.

$$g_{lj}Q_i^j = X_{li}$$
$$\det(Q_i^j Q_k^l \delta_{jk}) = \det(Q_i^j)\det(Q_k^l)\det(\delta_{jk}) = QQ1 = Q \cdot Q > 0$$

Теорема Рисса.

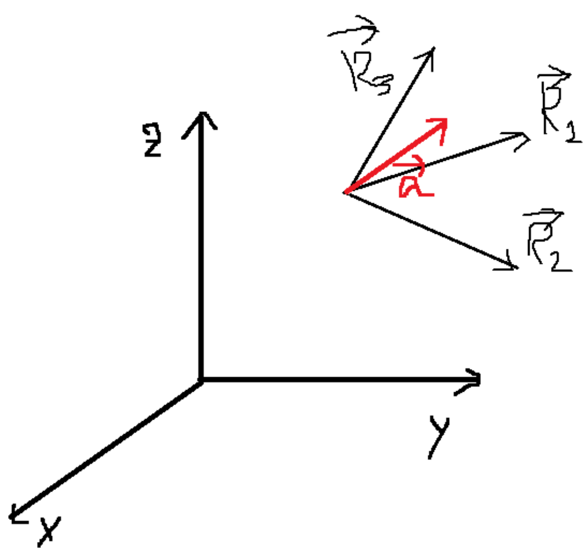
$\exists$ биекция, независящая от базисов, между элементами

$$\exists f : E_n^* \to E_n \wedge \exists f^{-1}$$

$$\exists! b \in E_n : \forall \vec{a} : f(\vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Доказательство теоремы Рисса:

$$\forall f(\vec{a}), \forall \vec{a} \in E_n$$
$$\exists! \vec{b} \in E_n : f(\vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$$



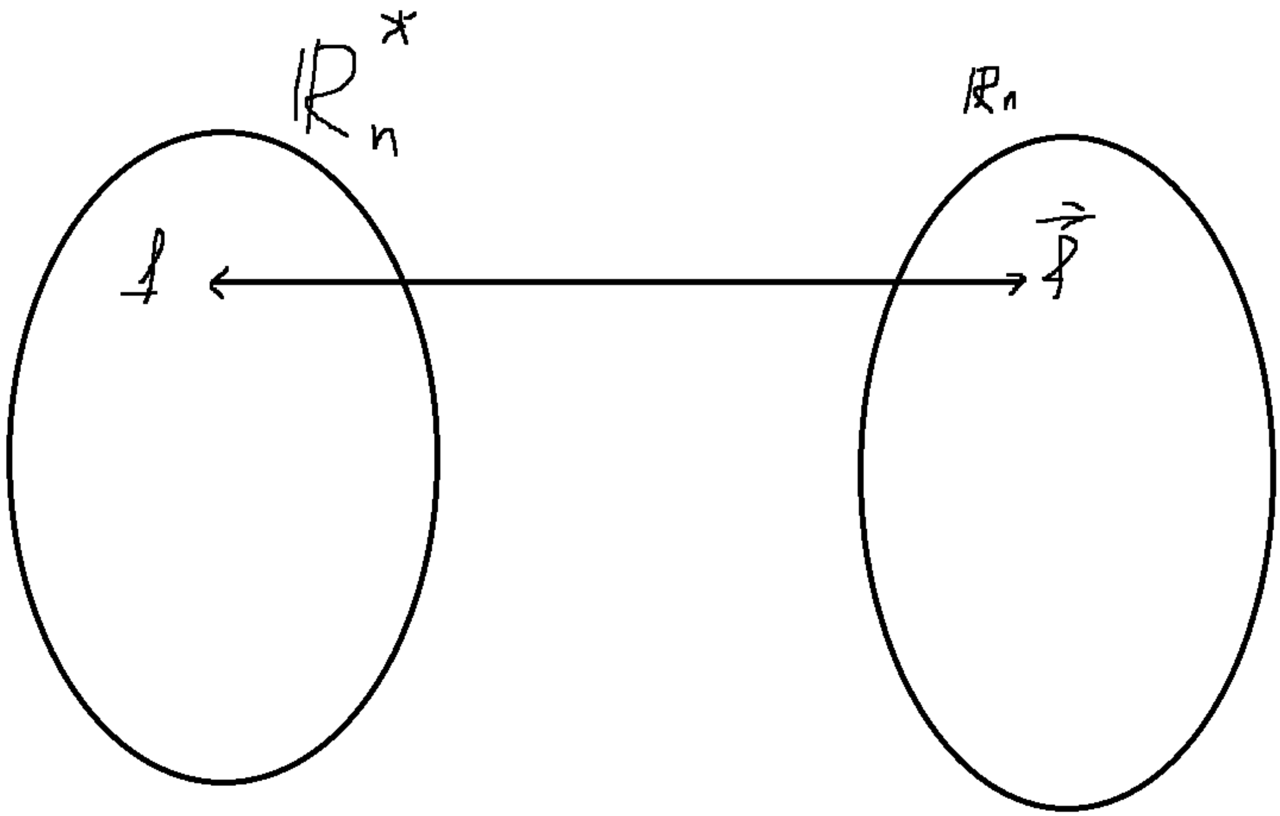
$$\vec{b} = b^i \vec{R}_i$$
$$b^i = g^{ij} f_j, \text{ где } f_j = f(\vec{R}_j)$$
$$f_j \text{ - базисные функционалы}$$
$$\vec{b} \cdot \vec{a} = g^{ij} f(\vec{R}_j)\vec{R}_i \cdot a^k \vec{R}_k =$$
$$\vec{R}_i \cdot \vec{R}_k = g_{ik}$$
$$= g^{ij} g_{ik} a^k f(\vec{R}_j) = \delta_k^j a^k f(\vec{R}_j) = a^j f_j = f(\vec{a})$$

$$\text{Пусть } \exists \vec{b}_1 \neq \vec{b}_2 : \forall a\ f(\vec{a}) = \vec{b}_1 \cdot \vec{a} = \vec{b}_2 \cdot \vec{a} \implies$$
$$(\vec{b}_1 - \vec{b}_2) \cdot \vec{a} \equiv 0$$
$$\text{Возьмём}$$
$$\vec{a} = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$$
$$|\vec{b}_1 - \vec{b}_2|^2 = 0$$
$$\text{Противоречие}$$

Следствие

$$f(\vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
$$f \leftrightarrow \vec{b}$$
$$f \in R_n^* \leftrightarrow \vec{f} \in R_n$$

Отождествление E_n^* и E_n !



$$e^i(\vec{R}_j) = \vec{e^i} \cdot \vec{R}_j = \delta^i_j$$
$$\vec{e^i} = e^{ik}\vec{R}_k$$
$$e^{ik}(\vec{R}_k \cdot \vec{R}_j) = \delta^i_j$$
$e^{ik} = g^{ik}$ - обратная метрическая матрица
$$\vec{e^i} = g^{ik}\vec{R}_k$$
$\vec{R}^i = g^{ik}\vec{R}_k$ - взаимный базис

$\vec{R}_k$ - локальный базис
$$\vec{R}_i = g_{ik}\vec{R}^k$$
Док-во: $g_{ik}\vec{R}^k = g_{ik}g^{kl}\vec{R}_l = \delta^l_i\vec{R}_l = \vec{R}_i$

$\vec{a} \in E_n$ можно разложить двояко:

$\vec{a} = a^i\vec{R}_i$ - контрвариантные компоненты

$\vec{a} = a_j\vec{R}^j$ - ковариантные компоненты

$\begin{cases} \vec{R}_i = Q^i_j\vec{e}_i \\ a_j = Q^j_i a_j^{\text{декарт.}} \end{cases}$ - ковариант

$a_j = Q^j_i a_j^{\text{декарт.}}$ - контр

$$\vec{R}^i \cdot \vec{R}_j = \delta^i_j$$

Из кватернионов получилось скалярное и векторное произведение

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a^i\vec{R}_i\cdot b_j\vec{R}^j=a^ib_j\vec{R}_i\cdot\vec{R}^j=a^ib_j\delta_i^j=a^ib_i$$

$$\text{Поднятие индекса: } a^i=g^{ij}a_j$$

$$\vec{a}=a^i\vec{R}_i=a_j\vec{R}^j=g^{ij}a_j\vec{R}_i$$

$$\text{Опускание индекса: } a_i=g_{ij}a^j$$

Векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$
Символы Леви-Чивиты:

$$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon^{ijk}=\begin{cases}+1, \text{ Ориентация } (123)\\ -1, \text{ Ориентация } (213)\\ 0, \text{ Хотя бы 2 из 3 индексов совпадают}\end{cases}$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ilm}=\delta_j^l\delta_k^m-\delta_k^l\delta_j^m$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijl}=2\delta_k^l$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk}=2\delta_k^k$$

$$\text{Для 3хмерного пространства } \delta_k^k=3$$

$$\det A_\beta^\alpha\cdot\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{lmn}A_i^lA_j^mA_k^n$$

$$\text{Частный случай: } i=1,\ j=2,\ k=3:$$

$$\det A_\beta^\alpha=\varepsilon_{lmn}A_1^lA_2^mA_3^k=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$

$$g\varepsilon_{ijk}=\varepsilon^{lmn}g_{li}g_{mj}g_{nk}$$

$$\vec{a}=[a^i]\vec{R}_i$$

$$\vec{b}=[b^i]\vec{R}_j$$

$$[\vec{R}^k]$$

$$\sqrt{g}\varepsilon_{ijk}a^ib^j\vec{R}^k=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{lmn}(a^ig_{il})(b^jg_{jm})(\vec{R}^kg_{kn})$$

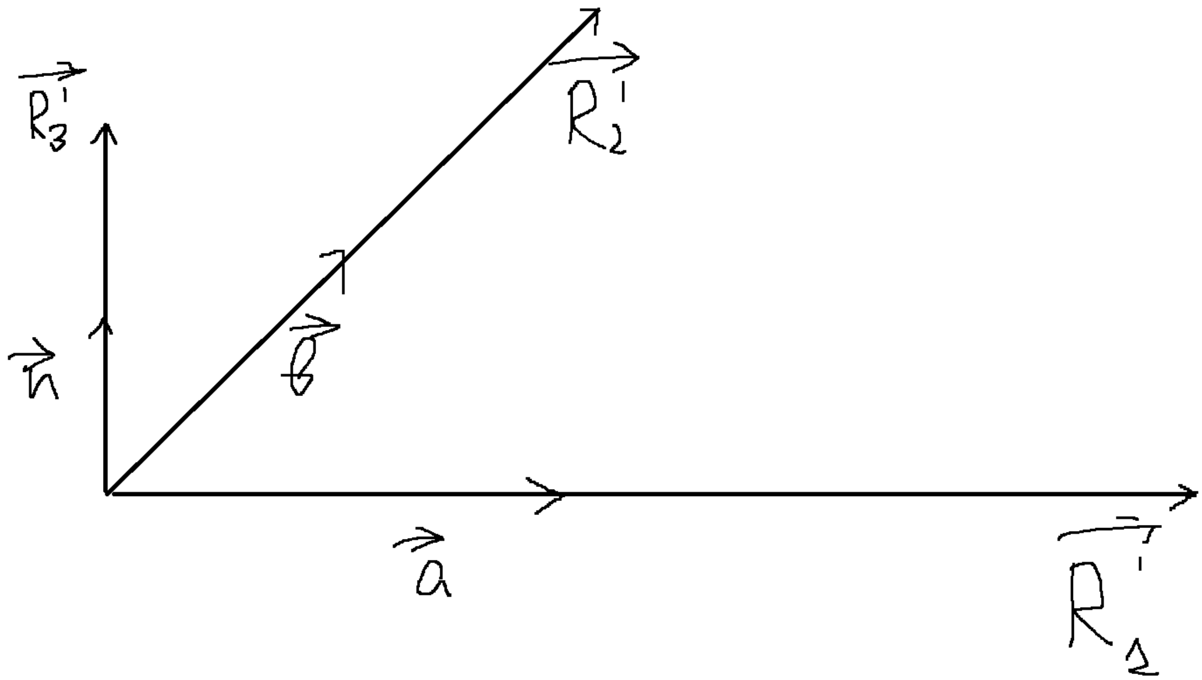
$$\vec{a}\times\vec{b}=\sqrt{g}\varepsilon_{ijk}a^ib^j\vec{R}^k=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{lmn}a_lb_m\vec{R}_n$$

Совпадение с обычным определением:

1. Направление

\begin{gather} \begin{cases} (\vec{a}\times \vec{b})\cdot\vec{a}=0 \\ (\vec{a}\times \vec{b})\cdot \vec{b}=0 \end{case

\end{gather}$$



$$
\begin{gather}
S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a}\times\vec{b}| \\
|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = a^j a_j = g_{ij}a^i a^j = \\
g_{11}a^1 a^1 \\
|\vec{b}|^2 = g_{22}b^2 b^2 \\
S = \sqrt{g_{11}g_{22}}|\vec{a^1}\vec{b^2}|\sin\varphi = \\
\sqrt{g_{11}g_{22}}|\vec{a^1}\vec{b^2}|\sqrt{1-\cos^2\varphi} \implies \\
\cos\varphi = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \implies \\
\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{\frac{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}} = \sqrt{\frac{gg^{33}}{\cancel{g_{11}g_{22}}}} \\
S = |a^1 b^2|\sqrt{gg^{33}} \\
|\vec{a}\times\vec{b}| = |\sqrt{g}\varepsilon_{123}a^1 b^2 \vec{R}^3| = \sqrt{g}|a^1 b^2|\sqrt{g^{33}}
\end{gather}
$$

25/02/2025

Тензоры II ранга
Отсебятина:

$$
\begin{gather}
f : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \to W : \\
f(\lambda_{11}v_{11} + \lambda_{12}v_{12}, \lambda_{21}v_{21} + \lambda_{22}v_{22}, \ldots, \lambda_{n_1}v_{n_1} + \lambda_{n_2}v_{n_2}) = \\
= \lambda_{11}f(v_{11}, \lambda_{21}v_{21} + \lambda_{22}v_{22}, \ldots, \lambda_{n_1}v_{n_1} + \lambda_{n_2}v_{n_2}) + \\
+\lambda_{12}f(v_{12}, \lambda_{21}v_{21} + \lambda_{22}v_{22}, \ldots, \lambda_{n_1}v_{n_1} + \lambda_{n_2}v_{n_2}) = \\
= \lambda_{21}f(\lambda_{11}v_{11} + \lambda_{12}v_{12}, v_{21}, \ldots, \lambda_{n_1}v_{n_1} + \lambda_{n_2}v_{n_2}) + \\
+\lambda_{22}f(\lambda_{11}v_{11} + \lambda_{12}v_{12}, v_{22}, \ldots, \lambda_{n_1}v_{n_1} + \lambda_{n_2}v_{n_2}) = \\
= \ldots = \\
= \lambda_{n_1}f(\lambda_{11}v_{11} + \lambda_{12}v_{12}, \lambda_{21}v_{21} + \lambda_{22}v_{22}, \ldots, v_{n_1}) + \\
+\lambda_{n_2}f(\lambda_{11}v_{11} + \lambda_{12}v_{12}, \lambda_{21}v_{21} + \lambda_{22}v_{22}, \ldots, v_{n_2})
\end{gather}
$$

r - ранг тензора - количество индексов
r=0 - скаляр
r=1 - вектор, функционал
r=2
r=3
r=4
Все тензоры образуют специальное линейное пространство $(+, \lambda\cdot)$
специальное - обладает дополнительным операциями

$$a_j = Q^i_j a_i^{дек}$$

Нижний - с помощью Q. Верхний - с помощью P.

$$g^{ij} = P^i_k P^j_l g^{kl}$$

Отношение эквивалентности (тожд).
Аксиомы:
симметричность $A * B \Leftrightarrow B * A$
рефлексивность $A * A$
транзитивность $\begin{matrix} A * B \\ B * C \end{matrix} \Rightarrow A * C$

Класс эквивалентности:
$[a] = \{x | x \sim a\}$

1. $A \sim B \Leftrightarrow [A] = [B]$
   Доказательство:

$$\begin{gathered} \implies A \sim B, C \in [A] \Rightarrow C \sim A \Rightarrow \\ C \sim B \Rightarrow C \in [B] \\ [A] \subset [B] \\ \text{Аналогично, если A поменять на B выведем} \\ [B] \subset [A] \Rightarrow [A] = [B] \\ \impliedby [A] = [B] \Rightarrow \\ A \in [B] \Rightarrow A \sim B \end{gathered}$$

2. Множество классов эквивалентности разбивает множество на непересекающиеся части и каждый элемент входит в какую-либо часть
   Пусть $\exists x$ не лежит ни в каком классе эквивалентности. Рассмотрим $[x]$. $x \in [x]$. Противоречие
   Пусть классы эквивалентности могут пересекаться.

$$\begin{gathered} \exists A, B \;\; [A] \cap [B] \neq \varnothing \Rightarrow \exists C : C \in [A] \wedge C \in [B] \Rightarrow \\ C \sim A \wedge C \sim B \Rightarrow A \sim B \Rightarrow [A] = [B] \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} n = 2 \text{ - плоскость} \\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f} \; (n = 3) \\ \underbrace{E_2}_{\text{левые}} \times \underbrace{E_2}_{\text{правые}} \end{gathered}$$

   Признаки эквивалентности:
   $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \sim \vec{c}, \vec{d}, \vec{a}, \vec{b}$

$\lambda \neq 0 \;\; (\lambda\vec{a})\vec{b}(\lambda\vec{c})\vec{d} = \vec{a}(\lambda\vec{b})\vec{c}(\lambda\vec{d})$

Нулевая пара - пара, в которой есть хотя бы 1 нулевой вектор

$\vec{a}\vec{0} \sim \vec{0}\vec{c} \sim \vec{0}\vec{0}$

Умножение на число

$$\lambda[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c}\;\vec{d}] = [(\lambda\vec{a})\;\vec{b}\;(\lambda\vec{c})\;\vec{d}] = [\vec{a}\;(\lambda\vec{b})\;\vec{c}\;(\lambda\vec{d})]$$
$$(\lambda\vec{a})\;\vec{b}\;(\lambda\vec{c})\;\vec{d} \sim \vec{a}\;(\lambda\vec{b})\;\vec{c}\;(\lambda\vec{d})$$

Частный случай класса эквивалентности

$$[\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{0}\;\vec{0}] \text{ - только 1 пара ненулевая}$$

Диада

$$\vec{a}\otimes\vec{b} \text{ - векторная диада}$$
$$(\vec{a}+\vec{a}')\otimes\vec{b} = \vec{a}\otimes\vec{b} + \vec{a}'\otimes\vec{b}$$
$$(\vec{a}+\vec{a}')\otimes\vec{b} = [(\vec{a}+\vec{a}')\vec{b}\vec{0}\vec{0}]$$
$$(\vec{a}+\vec{a}')\otimes\vec{b} = [(\vec{a}+\vec{a}')\vec{b}\vec{0}\vec{0}] = [\vec{a}\vec{b}\vec{0}\vec{0}] + [\vec{a}'\vec{b}\vec{0}\vec{0}] = \vec{a}\otimes\vec{b} + \vec{a}'\otimes\vec{b}$$

Все левые и правые совпадения - однотипные наборы

$$[\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}_1, \vec{d}] + [\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}_2, \vec{d}] = [(\vec{a}_1+\vec{a}_2), \vec{b}, (\vec{c}_1+\vec{c}_2), \vec{d}]$$
$$(\lambda+\mu)\vec{a}\otimes\vec{b} = \lambda\vec{a}\otimes\vec{b} + \mu\vec{a}\otimes\vec{b}$$
$$(\lambda+\mu)\vec{a}\otimes\vec{b} = (\lambda+\mu)[\vec{a}\vec{b}\vec{0}\vec{b}] =$$
$$= [(\lambda+\mu)\vec{a}\vec{b}\vec{0}\vec{b}] = [(\lambda\vec{a}+\mu\vec{a})\vec{b}\vec{0}\vec{b}] =$$
$$= [(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{0}\vec{0}] + [(\mu\vec{a})\vec{b}\vec{0}\vec{0}] = \lambda\vec{a}\otimes\vec{b} + \mu\vec{a}\otimes\vec{b}$$

Базисные диады

$$\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J$$

$$\forall[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}] \text{ можно разложить как линейную комбинацию } \vec{R}_I\otimes\vec{R}_J$$
$$\text{Доказательство:}$$
$$\vec{a}\otimes\vec{b} = (a^I R_I)\otimes(b^J\otimes R_J) = a^I b^J \vec{R}_I\otimes\vec{R}_J$$
$$\vec{c}\otimes\vec{d} = c^I d^J \vec{R}_I\otimes\vec{R}_J$$
$$[\vec{a}(\vec{b}+\vec{0})\vec{c}(\vec{0}+\vec{d})] = [\vec{a}\vec{b}\vec{0}\vec{d}] + [\vec{a}\vec{0}\vec{c}\vec{d}] =$$
$$= \vec{a}\otimes\vec{b} + \vec{c}\otimes\vec{b} = (a^I b^J + c^I d^J)\vec{R}_I\otimes\vec{R}_J$$
$$\vec{T} = [\vec{a}\vec{b}\vec{c}\vec{d}] = T^{IJ}\vec{R}_I\otimes\vec{R}_J = (a^I b^J + c^I d^J)\vec{R}_I\otimes\vec{R}_J$$

Независимость диад, состоящих из базисных векторов:

От противного

$$\vec{R}_2 \otimes \vec{R}_1$$
$$a^{IJ}\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J = \Theta = [\quad \underbrace{\vec{a}\vec{b}}_{\text{где-то здесь есть 0}} \qquad \underbrace{\vec{c}\vec{d}}_{\text{где-то здесь есть 0}} \quad],\ a^{IJ} \not\equiv 0$$
$$\vec{R}_I \otimes (a^{IJ}\vec{R}_J) = \Theta$$
$$[\vec{R}_1(a^{1J}\vec{R}_J)\vec{R}_2(a^{2J}\vec{R}_J)] = \Theta$$
$$a^{1J}\vec{R}_J = \vec{0}\text{ , где }\vec{R}_J\text{ - базисы}$$
$$\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J\text{ - базис в пространстве }[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\vec{d}]$$
$$2^2 = 4\text{ - размерность}$$
$$C = T + B = \underbrace{(T^{IJ} + B^{IJ})}_{C^{IJ}}\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J$$

Аксиомы линейного пространства выполняются.

$$E_2 \otimes E_2 = \left[(E_2 \times E_2)^2\right]$$

Тензор 2 порядка - элемент тензорного пространства

$$n = 2:\ \vec{T} = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{c} \otimes \vec{d}$$
$$n = 3: \vec{T} = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{c} \otimes \vec{d} + \vec{e} \otimes \vec{f}$$
$$\vec{D} = \vec{a} \otimes \vec{b} = a^I b^J \vec{R}_I \otimes \vec{R}_J =$$
$$= a^I b^J Q_I^k \vec{e}_k \otimes Q_J^l \vec{e}_l = Q_I^K Q_J^L D^{IJ} \vec{e}_K \otimes \vec{e}_L$$
$$\vec{D} = D^{KL}_{\text{декарт}}\, \vec{e}_K \otimes \vec{e}_L$$
$$D^{KL}_{\text{декарт}} = Q_I^K Q_J^L D^{IJ}$$

03/04/2025

Свойства тензоров 2 ранга:
$E_2, (L_3)$ - n=2 - плоскость
$E_3, (L_3)$ - n=3 - пространство
$n = 2\ (I, J)\vec{T} = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{c} \otimes \vec{d} = [\vec{a}\vec{b}\vec{c}\vec{d}]$
$n = 3\ (i, j, k)\vec{T} = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{c} \otimes \vec{d} + \vec{e} \otimes \vec{f} = [\vec{a}\vec{b}\vec{c}\vec{d}\vec{e}\vec{f}]$

Свойства диад

$$T_{IJ} = g_{IK}T^K_J = g_{JK}{T_I}^K$$
$$T^K_J = g_{JK}T^{KL}$$
$${T_I}^K = g_{IK}T^{LK}$$

Транспониированные и симметричные тензоры.

$$\exists\vec{T} \Rightarrow \vec{T}^T : \begin{array}{c}(T^T)^{IJ} = T^{JI} \\ \text{или } (T^T)_{IJ} = T_{JI}\end{array}$$

Симметричный тензор:

$$\vec{T}^T = \vec{T}$$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \Rightarrow C^{IJ} = A^{IJ} + B^{IJ}$$
$$\vec{L} = \lambda\vec{T} \Rightarrow L^{IJ} = \lambda T^{IJ}$$

Прямые и обратные тензорные признаки.

$$\begin{matrix} A^{IJ} \sim \vec{A} \\ B^{IJ} \sim \vec{B} \end{matrix} \Rightarrow A^{IJ} + B^{IJ} \text{ тоже компоненты тензора}$$

$$\text{Пусть неизвестно, является ли } T^{IJ} \text{ компонентами тензора. Но, известно, что}$$

$$T^{IJ} \underbrace{V^K_J}_{\text{компоненты}} = \underbrace{C^{IK}}_{\text{компоненты}} \Rightarrow$$

$$T^{IJ} \text{ - компоненты}$$

$$C^{IJ} = Q^I{}_S Q^K{}_P C'^{SP}$$
$$B^K{}_J = Q^K_I P^M_J B'^L{}_M$$
$$\times P^N_I P^T{}_K$$
$$\text{левая часть } = P^N_I P^T{}_K (Q^K{}_L P^M_J) T^{IJ} B'^L{}_M = P^N_I P^M_J T^{IJ} B'^T{}_M$$
$$\text{правая часть } = P^N_I P^T{}_K Q^I{}_S Q^K{}_P C'^{SP} = C'^{NT}$$
$$\underbrace{P^N_I P^M_J T^{IJ}}_{T'^{MN}} B'^T{}_M = C'^{NT}$$
$$T'^{MN} = P^N_I P^M_J T^{IJ}$$

Умножение тензора $\overleftrightarrow{T}$ на вектор $\vec{a}$

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = a^I b^J \vec{R}_I \otimes \vec{R}_J$$
$$\vec{a} \otimes \vec{b} := \begin{matrix} a^1 b^1 & a^1 b^2 \\ a^2 b^1 & a^2 b^2 \end{matrix}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^I b^J \vec{R}_I \cdot \vec{R}_J = a^I b_J$$

Вывод:

$$\otimes \underbrace{\rightarrow}_{\text{свёртка}} \cdot$$

$$(\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J) \cdot \vec{R}_K = R_I \otimes_{\backslash|/} (\vec{R}_J \cdot \vec{R}_K)$$
$$r^* = r_1 + r_2 - 2$$

$$\overleftrightarrow{T} \cdot \vec{a} \neq \vec{a} \cdot \overleftrightarrow{T}$$

$$\vec{b} = \overleftrightarrow{T} \cdot \vec{a} = T^{IJ} (\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J) \cdot a^k \vec{R}_k = T^{IJ} a^k g_{Jk} \vec{R}_I \Rightarrow$$
$$b^I = T^{IJ} a_J = T^I{}_J a^J \text{ - правило немых индексов}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \cdot \overleftrightarrow{T} = a^k \vec{R}_k \cdot T^{IJ} \vec{R}_I \otimes \vec{R}_J = a^k g_{kI} T^{IJ} \vec{R}_J$$
$$c^J = a_I T^{IJ} = T^{IJ} a_I$$

Скалярное умножение тензора на тензор

$$\overleftrightarrow{A} \cdot \overleftrightarrow{B}$$
$$(\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J) \cdot (\vec{R}_K \otimes \vec{R}_L) = g_{JK} \vec{R}_I \otimes \vec{R}_L$$

11/03/2025

Компоненты тензора через скалярное произведение

$$T^i{}_j = \vec{R}^i \cdot \overline{T} \cdot \vec{R}_j$$
$$T_j{}^i = \vec{R}_j \cdot \overline{T} \cdot \vec{R}^i$$
$$T_{ij} = \vec{R}_i \cdot \overline{T} \cdot \vec{R}_j$$
$$T^{ij} = \vec{R}^i \cdot \overline{T} \cdot \vec{R}^j$$

$$\text{Доказательство для 3:}$$
$$\text{<правая часть>} = (\vec{R}_i \cdot T_{kl}\vec{R}^k \otimes \vec{R}^l)\vec{R}_j = \delta_i^k T_{kl}\vec{R}^l \cdot \vec{R}_j = \delta_i^k T_{kl}\delta_j^l = T_{ij}$$

Двойное скалярное произведение

$$\overline{T} \cdot\cdot \overline{B} = (T^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j) \cdot\cdot (B^{kl}\vec{R}_k \otimes \vec{R}_l) =$$
$$= T^{ij}B^{kl}g_{jk}(\vec{R}_i \cdot \vec{R}_l) = T^{ij}B^{kl}g_{jk}g_{il} =$$
$$= T^i{}_k B^k{}_i \text{ - одно число}$$
$$\text{inv}$$

Одна из основных задач тензорного исчисления - нахождение инвариантов.
Инварианты:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b^i$$
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| - \text{длина}$$
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} - \text{ угол}$$

$$\overleftrightarrow{T} \cdot\cdot \overleftrightarrow{T} = T^i{}_k T^k{}_i$$

Определение:

Квадрат Тензора: $\overleftrightarrow{T}^2 = \overleftrightarrow{T} \cdot \overleftrightarrow{T}$

$$\overleftrightarrow{T}^2 = T^i{}_k T^k{}_j$$
$$\overleftrightarrow{T} \cdot \overleftrightarrow{B} = T^i{}_k B^k{}_j$$
$$\overleftrightarrow{T} \cdot\cdot \overleftrightarrow{T} = \mathrm{tr}(\overleftrightarrow{T}^2) = \mathrm{spur}(\overleftrightarrow{T}^2)$$
$$\text{Внутренняя свёртка: } T^i{}_i = \mathrm{tr}(T^i{}_j) = \mathrm{tr}(T_j{}^i)$$
$$\text{Определитель тензора: } \det \overleftrightarrow{T} = \det(T^i{}_j) = \det(T_j{}^i)$$

Доказательство инвариантности определителя относительно замены координат:

$$T_k{}^l = P^l{}_j Q^i{}_k T_i{}^j{}_{\text{декартовая}}$$
$$\det(T_k{}^l) = \det(P^l{}_j)\det(Q^i{}_k)\det(T_i{}^j{}_{\text{декартовая}}) = PQ\det T_i{}^j{}_{\text{декартовая}}$$
$$PQ = 1$$
$$\det T_k{}^l = \det T_i{}^j{}_{\text{декартовая}} \;\; \square$$

Единичный тензор $\overleftrightarrow{E}$

$$\forall \overleftrightarrow{T} : \overleftrightarrow{T} \cdot \overleftrightarrow{E} = \overleftrightarrow{E} \cdot \overleftrightarrow{T} = \overleftrightarrow{T}$$
$$\overleftrightarrow{T} \cdot \overleftrightarrow{E} = T^{ij} E_j{}^k \vec{R}_i \otimes \vec{R}_k$$
$$\overleftrightarrow{T} = T^{ik} \vec{R}_i \otimes \vec{R}_k = T^{ij} E_j{}^k \vec{R}_i \otimes \vec{R}_k \Rightarrow$$
$$T^{ik} = T^{ij} E_j{}^k = T^{ij} \delta_j^k$$
$$E_j^k = \delta_j^k$$

$$\overleftrightarrow{E} = \vec{R}_j \otimes \vec{R}^j = \vec{R}^j \otimes \vec{R}_j = \delta_j^k \vec{R}_k \otimes \vec{R}^j = g_{jl} \vec{R}^l \otimes \vec{R}^j = g^{jl} \vec{R}_l \otimes \vec{R}_j$$

Обратный тензор

$$\det(\overleftrightarrow{T}) \neq 0 \Rightarrow \exists! \overleftrightarrow{T}^{-1} : \overleftrightarrow{T}^{-1} \cdot \overleftrightarrow{T} = \overleftrightarrow{E}$$

На плоскости в декартовой системе координат $\vec{e}_I$

$$T = [\vec{e}_1 \vec{a} \vec{e}_2 \vec{b}] = [\vec{a} \vec{e}_1 \vec{b} \vec{e}_2]$$
$$T^{-1} = [\vec{e}_1 \vec{x} \vec{e}_2 \vec{y}] = ?$$
$$T_{IJ} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$
$$T_{IJ}^T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$
$$\overleftrightarrow{T} = \vec{e}_1 \otimes \vec{a} + \vec{e}_2 \otimes \vec{b}$$
$$\overline{T} \cdot \overline{T}^{-1} = (\vec{e}_1 \otimes \vec{a} + \vec{e}_2 \otimes \vec{b}) \cdot (\vec{e}_1 \otimes \vec{x} + \vec{e}_2 \otimes \vec{y}) =$$
$$\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2$$
$$(\vec{e}_1 \otimes \vec{a} + \vec{e}_2 \otimes \vec{b}) \cdot (\vec{e}_1 \otimes \vec{x} + \vec{e}_2 \otimes \vec{y}) =$$
$$= a_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{x} + a_2 \vec{e}_1 \otimes \vec{y} + b_1 \vec{e}_2 \otimes \vec{x} + b_2 \vec{e}_2 \otimes \vec{y} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} a_1 \vec{x} + a_2 \vec{y} = \vec{e}_1 \\ b_1 \vec{x} + b_2 \vec{y} = \vec{e}_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 y_1 = 1 \\ a_1 x_2 + a_2 y_2 = 0 \\ b_1 x_1 + b_2 y_1 = 0 \\ b_1 x_2 + b_2 y_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ x_2 = -\frac{a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ y_1 = -\frac{b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ y_2 = -\frac{a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{cases}$$

Ортогональный тензор

Тензор ортогонален, если

$$\overleftrightarrow{O} \cdot \overleftrightarrow{O}^T = \overleftrightarrow{E}$$

Свойство $\overleftrightarrow{O}$

$$\overleftrightarrow{O}^{-1} = \overleftrightarrow{O}^T$$

Найдём ортогональный тензор

$$\overleftrightarrow{O} = \vec{e}_1 \otimes \vec{a} + \vec{e}_2 \otimes \vec{b}$$

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})^T = \vec{b} \otimes \vec{a}$$

$$\overleftrightarrow{O}^T = a \otimes \vec{e}_1 + \vec{b} \otimes \vec{e}_2$$

$$\overleftrightarrow{O}^{-1} = \vec{e}_1 \otimes (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) + \vec{e}_2 \otimes (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2)$$

$$\begin{cases} \frac{b_2}{\Delta} = x_1 = a_1 \\ -\frac{b_1}{\Delta} = y_1 = a_2 \\ -\frac{a_2}{\Delta} = x_2 = b_1 \\ \frac{a_1}{\Delta} = y_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \pm 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b_2 = \pm a_1 \\ b_1 = \mp a_2 \end{cases}, \ \Delta = a_1(\pm a_1) - a_2(\mp a_2) = \pm(a_1^2 + a_2^2) = \pm_1 \Rightarrow$$

$$a_1^2 + a_2^2 = 1 \Rightarrow b_1^2 + b_2^2 = 1 \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1 \Rightarrow$$

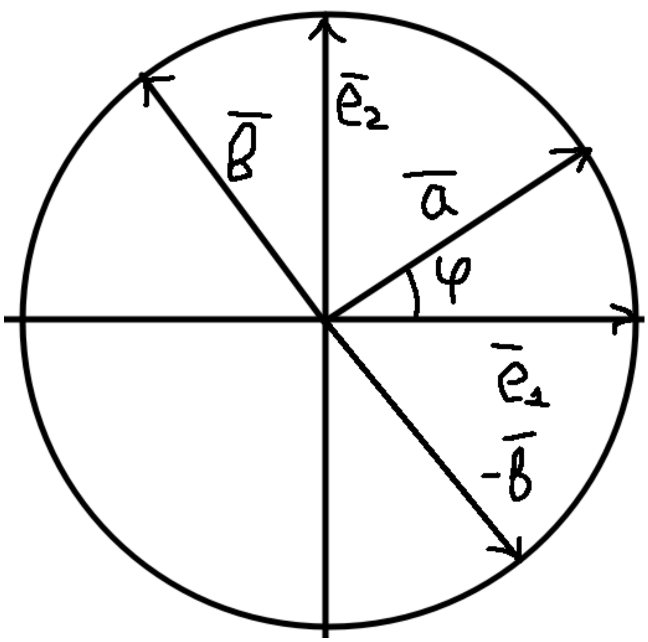
$$\vec{a}\vec{b} = a_1(\mp a_2) + a_2(\pm a_1) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow$$

$$\overleftrightarrow{T} = \vec{e}_1 \otimes \vec{a} + \vec{e}_2 \otimes \vec{b}$$

$$\exists\varphi : \begin{matrix} a_1 = \cos\varphi \\ a_2 = \sin\varphi \end{matrix}$$

$$b_1 = \mp \sin\varphi$$

$$b_2 = \pm \cos\varphi$$



$$O_I^J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\overleftrightarrow{O} \to \varphi$$

$$\overleftrightarrow{O}^{-1} \to -\varphi$$

Векторное произведение $\overleftrightarrow{T} \times \vec{a}, \vec{a} \times \overleftrightarrow{T}$

$$\overleftrightarrow{T} \otimes \vec{a} = [T^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j] \times (a^k\vec{R}_k) =$$

$$\vec{R}_j \times \vec{R}_k = \sqrt{g}\varepsilon_{lmn}\delta_j^l\delta_k^m\vec{R}^n = \sqrt{g}\varepsilon_{jkn}\vec{R}^n$$

$$= \sqrt{g}\varepsilon_{jkn}T^{ij}a^k\vec{R}_i \otimes \vec{R}^n$$

$$\vec{a} \otimes \vec{T} = \sqrt{g}\varepsilon_{kin}a^kT^{ij}\vec{R}^n \otimes \vec{R}_j$$

01/04/2025

Относительные (и/или псевдо) тензоры

$$\Omega^{i_1,i_2,...,i_n}_{j_1,j_2,...,j_m} = \kappa|Q|^{\omega} P^{i_1}_{l_1} \dots P^{i_n}_{l_n} Q^{p_1}_{j_1} \dots Q^{p_m}_{j_m} \Omega^{l_1,l_2,...,l_n}_{p_1,p_2,...,p_m}$$
$$Q = \det\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right), \kappa = \frac{Q}{|Q|}, (Q \neq 0)$$
$$\kappa - \text{нет и}$$
$$\omega = 0 \Rightarrow \text{истинные тензоры}$$

$\kappa \backslash \omega$	$\omega = 0$	$\omega = \pm 1$	$\omega = -1; \pm 2; \pm \dots$
κ нет	Истинные тензоры $\overset{\leftrightarrow}{E}$: g_{ij}, g^{ij}	$\sqrt{g}$ - относительный скаляр	Относительные
κ есть	$(\overset{\leftrightarrow}{a} \times \overset{\leftrightarrow}{b}) \cdot \overset{\leftrightarrow}{c}$ - псевдоскаляр $\vec{a} \times \vec{b}$ - псевдовектор $\sqrt{g}\varepsilon_{ijk}$ и $\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}$ - псевдотензоры	ε_{ijk} - относительный псевдотензор $\omega = 1$ ε^{ijk} - тоже, $\omega = -1$	Относительные псевдотензоры

Относительный -
Псевдо -

Тензорный анализ

$\vec{R}_i(X^j), \vec{R}^j(X^k)$
$\vec{R}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial X^i}$
$\frac{\partial \vec{R}_i}{\partial X^j} = \Gamma^k_{ij}\vec{R}_k$, где
Γ^k_{ij} - символы Кристофеля 2 рода
Свойство символов Кристофеля (в евклидовом пространстве):

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$$

Доказательство:

$$\Gamma^k_{ij}\vec{R}_k = \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial X^j} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial X^j \partial X^i} = \frac{\partial \vec{R}_j}{\partial X^i} = \Gamma^k_{ji}\vec{R}_k$$

Поэтому у нас не $3 \times 3 \times 3 = 27$, а 18 разных символов
Свойство звёздочка *:

$$\frac{\partial \vec{R}^i}{\partial X^j} = -\Gamma^i_{jk}\vec{R}^k$$

Связь символов Кристофеля с метрической матрицей:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} = \frac{\partial(\vec{R}_i \cdot \vec{R}_j)}{\partial X^k} = \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial X^k} \cdot \vec{R}_j + \vec{R}_i \cdot \frac{\partial \vec{R}_j}{\partial X^k} = \Gamma^l_{ik}\vec{R}_l \cdot \vec{R}_j + \vec{R}_i \cdot \Gamma^l_{jk}\vec{R}_l$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} = \Gamma^l_{ik} g_{lj} + \Gamma^l_{jk} g_{il} - *$$

$$\text{Заменяем } i \text{ на } k \text{ и наоборот :}$$

$$\frac{\partial g_{kj}}{\partial X^i} = \Gamma^l_{ik} g_{lj} + \Gamma^l_{ji} g_{kl} - **$$

$$j \leftrightarrow k :$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial X^j} = \Gamma^l_{ij} g_{lk} + \Gamma^l_{jk} g_{il} - ***$$

$$(**) + (***) - (*) : \quad 2\Gamma^l_{ij} g_{lk}$$

$$2\Gamma^l_{ij} g_{lk} = -\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial X^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial X^j}$$

$$\Gamma^m_{ij} = \frac{1}{2} g^{km} \left(-\frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial X^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial X^j} \right)$$

Следствия:

1: $g_{ij} = \text{const} \to \Gamma^k_{ij} = 0$

2: $\Gamma^m_{km} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial X^m} + \frac{\partial g_{im}}{\partial X^k} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^i} \right) = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial X^k}$

$$g^{im} \frac{\partial g_{ki}}{\partial X^m} - \underbrace{g^{im} \frac{\partial g_{km}}{\partial X^i}}_{g^{mi} \frac{\partial g_{ki}}{\partial X^m}} = 0$$

3: $\Gamma^m_{km} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial X^k}$

$$\frac{\partial g}{\partial X^k} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} =$$

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}$$

$$= g g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} = ?$$

4: $\Gamma^m_{km} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X^k}$

$$g = \sqrt{g}^2$$

$$\frac{\partial \sqrt{g^2}}{\partial X^k} = 2\sqrt{g} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X^k}$$

$$\Gamma^m_{km} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial X^k}$$

5: $\Gamma^m_{km} = \frac{\partial \ln(\sqrt{g})}{\partial X^k}$

Символ Кристофеля 1 рода:

$$\Gamma_{ijk} = \Gamma^m_{ij} g_{mk} = \frac{1}{2} g^{mn} (\ldots) g_{mk} \Rightarrow$$

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial X^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial X^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^k} \right)$$

Скалярные и векторные поля

Скалярное поле φ :
Примеры: T, ρ

$$d\varphi(X^k) = \frac{\partial \varphi}{\partial X^k} dX^k = \vec{\nabla}\varphi d\vec{x}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_k b^k$$
$$d\vec{x} = dX^k \vec{R}_k$$
$$\vec{\nabla}\varphi = \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial X^k}\vec{R}^k$$
$$\nabla_k \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial X^k}$$
$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{R}^k \nabla_k \varphi$$

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{R}^k \frac{\partial \varphi}{\partial X^k}$$
$$\vec{a} - \text{ векторное поле}$$
$$\operatorname{div}\vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \vec{R}^k \cdot \frac{\partial \vec{a}}{\partial X^k}$$
$$\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{R}^k \times \frac{\partial \vec{a}}{\partial X^k}$$
$$\operatorname{grad}\vec{a} = \vec{\nabla} \otimes \vec{a} = \vec{R}^k \otimes \frac{\partial \vec{a}}{\partial X^k}$$

08/04/2025

Тензорный анализ. Векторное поле. ($\vec{a} = \vec{a}(\vec{x})$)

$$d\vec{a} = \underbrace{\overset{\leftrightarrow}{T}}_{\text{тензор второго ранга}} \cdot d\vec{x}$$
$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial X^k} \text{ (3 вектора)}$$
$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial X^k} = Q^i_k \frac{\partial \vec{a}}{\partial X^i} = \frac{\partial x^i}{\partial X^k}\frac{\partial \vec{a}}{\partial X^i}$$
$$\underset{\text{контрвариантные производные}}{\frac{\partial \vec{a}}{\partial X^k} = (\ldots)\vec{R}_k} \quad \underset{\text{ковариантные производные}}{\frac{\partial \vec{a}}{\partial X^k} = (\ldots)\vec{R}^i}$$

Мы подошли к изучению ко-(контро-)вариантных производных от ко-(контро-)вариантных компонент.
Они обозначаются как

$$\nabla_i a_j$$
$$\nabla_i a^j$$
$$\nabla^i a_j$$
$$\nabla^i a^j$$

$$\nabla^i a_j = g^{ik} \nabla_k a_j$$
$$\nabla^i a^j = g^{ik} \nabla_k a^j$$

Мы определим 2 варианта, остальные 2 выразим через метрический тензор и эти определения

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial X^k} = \nabla_k a^j \vec{R}_k \quad \frac{\partial \vec{a}}{\partial X^k} = \nabla_k a_j \vec{R}^i$$

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k} = \frac{\partial (a^i \vec{R}_i)}{\partial x^k} = \frac{\partial a^i}{\partial x^k}\vec{R}_i + a^i \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial x^k} = \underbrace{\left(\frac{\partial a^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{jk} a^j\right)}_{\text{ковариантная производная от контрвариантных компонент}} \vec{R}_i$$

Аналогично

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k} = \underbrace{\left(\frac{\partial a_i}{\partial x^k} - \Gamma^j_{ik} a_j\right)}_{\text{ковариантная производная от ковариантных компонент}} \vec{R}^i$$

$$\nabla_k a^j = \frac{\partial a^j}{\partial x^k} + a^j \Gamma^j_{ik}$$

$$\nabla_k a_j = \frac{\partial a_j}{\partial x^k} - a_i \Gamma^i_{jk}$$

$$\nabla_k a^j, \nabla_k a_j, \nabla^k a^j, \nabla^k a_j - \text{компоненты некого тензора}$$

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k} = (\nabla_k a^j)\vec{R}_j = (\nabla_k a_j)\vec{R}^j$$

$$d\vec{a} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k} dx^k$$

$$d\vec{a} = dx^k \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k}$$

$$dx^k = d\vec{x} \cdot \vec{R}^k$$

$$d\vec{a} = d\vec{x} \cdot \vec{R}^k \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k} = d\vec{x} \cdot \left(\vec{R}^k \otimes \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k}\right)$$

$$d\vec{a} = \underbrace{\left(\vec{R}^k \otimes \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k}\right)^T}_{\text{искомый тензор}} \cdot d\vec{x}$$

То, что было до транспонирования, называют градиентом $\vec{a}$.

$$\vec{\nabla} \otimes = \vec{R}^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\vec{\nabla} = \vec{R}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\vec{\nabla} \otimes \vec{a} = \vec{R}^k \otimes \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k} = (\nabla_k a^j)\vec{R}^k \otimes \vec{R}_j$$

$$d\vec{a} = \underbrace{(\vec{\nabla} \otimes \vec{a})^T}_{\text{транспонированный градиент } \vec{a}} \cdot d\vec{x}$$

$$(\vec{\nabla} \otimes \vec{a})^T = \begin{matrix} (\nabla_k a^j)\vec{R}_j \otimes \vec{R}^k \\ (\nabla_k a_j)\vec{R}^j \otimes \vec{R}^k \\ (\nabla^k a^j)\vec{R}_j \otimes \vec{R}_k \\ (\nabla^k a_j)\vec{R}^j \otimes \vec{R}_k \end{matrix}$$

Это была самая общая характеристика

Ротор векторного поля

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{R}^k \times \frac{\partial \vec{a}}{\partial x^k} = 2\vec{\omega}$$

Любому антисимметричному тензору соответствует вектор

$\vec{\omega}$ - вектор вихря

$$\vec\nabla\times\vec a=\delta^i_{i'}\vec R^{i'}\times(\nabla_i a_j)\vec R^j=\frac{1}{\sqrt g}\varepsilon^{i'jk}\delta^i_{i'}(\nabla_i a_j)\vec R_k=$$
$$\frac{1}{\sqrt g}\varepsilon^{ijk}\nabla_i a_j\vec R_k=\frac{1}{\sqrt g}\begin{vmatrix}\vec R_1&\vec R_2&\vec R_3\\\nabla_1&\nabla_2&\nabla_3\\a_1&a_2&a_3\end{vmatrix}$$

Вернёмся к вектору вихря

$$\overleftrightarrow{\Omega}=\overleftrightarrow{E}\times\vec\omega=\vec R_i\otimes\vec R^i\times\left(\frac12\vec R^j\times\frac{\partial\vec a}{\partial x^j}\right)=\frac12\vec R_i\otimes\left(\vec R^i\times\left(\vec R^j\times\frac{\partial\vec a}{\partial x^j}\right)\right)=$$
$$\vec a\times(\vec b\times\vec c)=\vec b(\vec a\cdot\vec c)-\vec c(\vec a\cdot\vec b)$$
$$\vec b(\vec a\cdot\vec c)=\vec R^j\left(\vec R^i\cdot\frac{\partial\vec a}{\partial x^j}\right)$$
$$\vec c(\vec a\cdot\vec b)=\frac{\partial\vec a}{\partial^j}(\vec R^i\cdot\vec R^j)$$
$$=\frac12\left(\vec R^j\left(\vec R^i\cdot\frac{\partial\vec a}{\partial x^j}\right)-\frac{\partial\vec a}{\partial^j}(\vec R^i\cdot\vec R^j)\right)=$$
$$=\frac12\left(\cancel{\vec R_i\otimes\vec R^i}^{\overleftrightarrow{E}}\cdot\underbrace{\frac{\partial\vec a}{\partial x^j}\otimes\vec R^j}_{(\vec\nabla\otimes\vec a)^T}-\overleftrightarrow{E}\cdot\underbrace{\left(\vec R\otimes\frac{\partial\vec a}{\partial x^j}\right)}_{\vec\nabla\otimes\vec a}\right)=$$
$$=\frac12((\vec\nabla\otimes\vec a)^T-\vec\nabla\otimes\vec a)$$
$$(\vec\nabla\otimes\vec a)^T=\underbrace{\frac12((\vec\nabla\otimes\vec a)+\vec\nabla\otimes\vec a)}_{\text{линейный тензор деформации над полем }\vec a}+\underbrace{\frac12((\vec\nabla\otimes\vec a)^T-\vec\nabla\otimes\vec a)}_{\vec\omega}$$
$$\overleftrightarrow{T}=\operatorname{def}\vec a$$

Факт: $\overleftrightarrow{\Omega}\cdot d\vec x=\vec\omega\times d\vec x$

$$d\vec a=(\vec\nabla\otimes\vec a)^T\cdot d\vec x=\overleftrightarrow{T}\cdot d\vec x+\overleftrightarrow{\Omega}\cdot d\vec x=\overleftrightarrow{T}\cdot d\vec x+\vec\omega\times d\vec x$$

Аналогия с термехом - разложили поле на "нормальную" (чистая деформация) и "тангенциальную" (чистое вращение) составляющие

Ещё более частные характеристики

$$\vec\nabla\cdot\vec a=\operatorname{div}\vec a\text{ (или расходимость)}$$
$$\vec\nabla\cdot\vec a=\vec R^i\cdot\underbrace{\frac{\partial\vec a}{\partial x^i}}_{(\nabla_i a^j)\vec R_j}=\delta^i_j(\nabla_i a^j)=\nabla_i a^i$$

Формула без вывода:

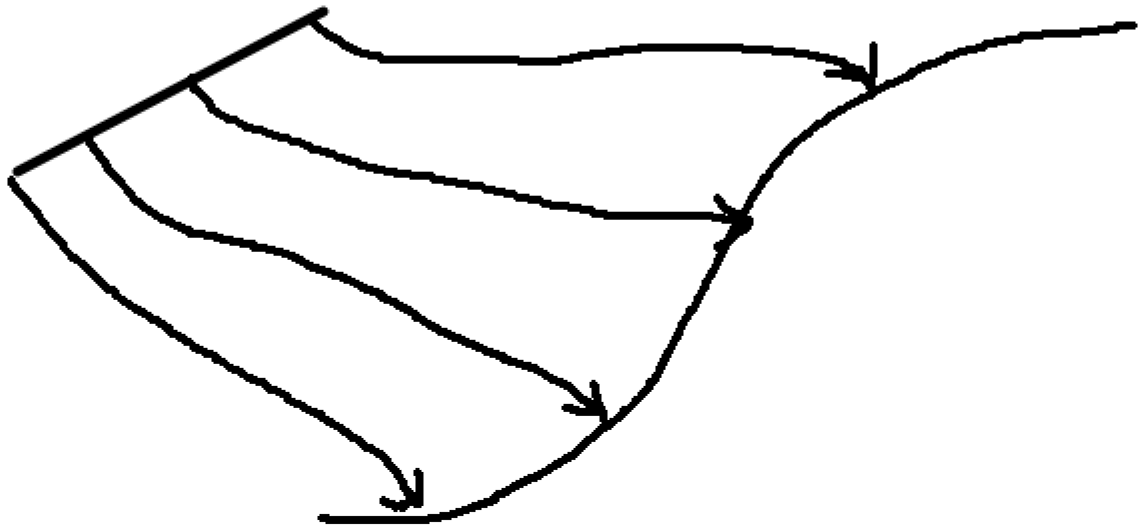
$$\operatorname{div}\vec a=\frac{1}{\sqrt g}\frac{\partial(\sqrt g a^i)}{\partial x^i}$$

В декартовых:

$$\operatorname{div}\vec a=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Дифференциальная геометрия кривой

Кривая - это $f([\xi_1, \xi_2])$, где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, непрерывное отображение.

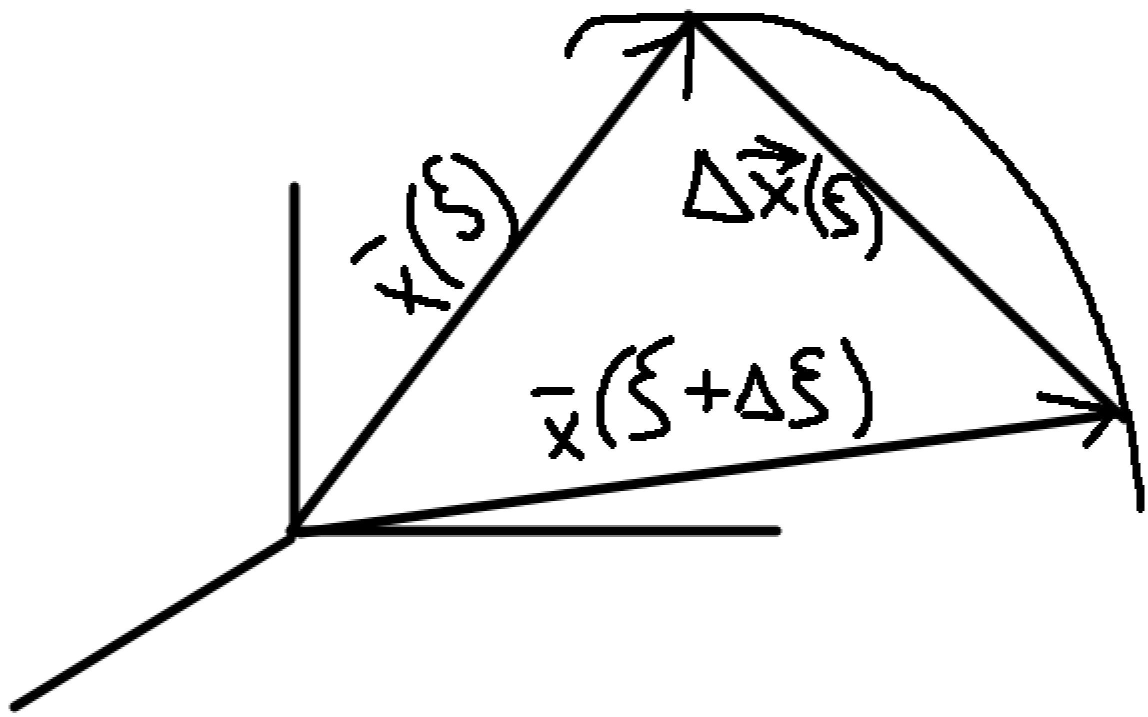


$$\xi \to \vec{x}$$
$$\vec{x}(\xi)$$
$$\begin{cases} x^1 = x = x(\xi) \\ x^2 = y = y(\xi) \\ x^3 = z = z(\xi) \end{cases}$$

Особых точек нет - одновременно не может быть такого, что все 3 производные обращаются в 0
$\forall \xi \|\dot{\vec{x}}(\xi)\| \neq 0$
"Динамический" способ задания кривой.
Может быть ещё "статическое" определение:

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = 0 \\ \Phi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{x}}{d\xi} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{d\xi} \\ \frac{dy}{d\xi} \\ \frac{dz}{d\xi} \end{pmatrix}$$



$$\Delta\vec{x}(\xi) = \vec{x}(\xi+\Delta\xi) - \vec{x}(\xi) \text{ лежит на секущей}$$
$$\lim_{\Delta\xi\to 0}\frac{\Delta\vec{x}(\xi)}{\Delta\xi} = \frac{d\vec{x}}{d\xi} \text{ лежит на касательной}$$

22/04/2025

Формулы Френе

k, τ - кривая

$k(s), \tau(s)$ - функции => кривизна

$\frac{d}{ds}\vec{t}, \vec{\nu}, \vec{b} = ?$

$\frac{d\vec{t}}{ds} = k(s)\vec{\nu}$

$\vec{\nu} = \vec{t}\times\vec{b} \Rightarrow \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k(s)\vec{\nu}\times\vec{b}$

$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau(s)$

Формцлы Френе:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{t}}{ds} = k(s)\vec{\nu} \\ \frac{d\vec{\nu}}{ds} = -k(s)\vec{t} + \tau(s)\vec{b} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau(s)\vec{\nu} \end{cases}$$

$k(s) \geq 0, \tau(s) \overset{\text{однозначно}}{\Rightarrow}$ кривая

k - кривизна

τ - кручение

Механический (термех) смысл формул Френе:

$\vec{t}$ - касательная кривой

$\vec{\nu}$ - нормаль

$\vec{b}$ - бинормаль

$$\left|\frac{\Delta\vec{t}}{\Delta S}\right| = |k\vec{\nu}| = k$$
$$t \sim S$$
$$k = \omega_{\text{вращения вокруг оси } \vec{b}}$$
$$\left|\frac{\Delta\vec{b}}{\Delta S}\right| = |-\tau(s)\vec{\nu}| = |\tau|$$
$$\tau = \omega_{\text{вращения вокруг оси } t}$$
$$\omega = \sqrt{k^2+\tau^2} - \text{угловая скорость вращения трёхгранника}$$
$$\text{Вектор Дарбу (мгновенная ось вращения): } \vec{\omega} = k\vec{b} + \tau\vec{t}$$

Поверхности (2мерные)

Метрическая матрица

$$g_{IJ} = \vec{\rho}_I \cdot \vec{\rho}_J$$
$$\det g > 0$$

$$\vec{\rho}^I = g^{IJ}\vec{\rho}_J$$

Касательная плоскость: $\vec{\rho}^1, \vec{\rho}^2$
$(\rho_1^2\rho_3^2 - \rho_2^1\rho_3^1)(x-x_0) + (\rho_2^1\rho_1^3 - \rho_1^1\rho_2^3)(y-y_0) + (\rho_1^1\rho_2^2 - \rho_2^1\rho_1^2)(z-z_0) = 0$

Кривая на поверхности. Первая квадратичная форма

29/04/2025

Вторая квадратичная форма поверхности (изменение $\vec{n}$)
$I = ds^2 = g_{IJ}dX^IdX^J$ - расстояния, углы, площади.
Кривизны нет... :(
Вторая квадратичная форма:

$$II = -d\vec{x}\cdot d\vec{n}$$

$$d\vec{x} = \vec{\rho}_I dx^I$$
$$\vec{n}_j = \frac{\partial\vec{n}}{\partial x^j}$$
$$d\vec{n} = \vec{n}_j dx^j$$
$$II = -(\vec{\rho}_I\vec{n}_J)$$
$$II = b_{IJ}dx^Idx^J$$
$$b_{IJ} = -\vec{\rho}_I\vec{n}_J$$

Формула для подсчёта b_{IJ}

$$\vec{\rho}_I\vec{n} = 0$$
$$\vec{n}\frac{\partial}{\partial x^J}\vec{\rho}_I + \vec{\rho}_I\frac{\partial\vec{n}}{\partial x^J} = 0$$
$$\vec{n}\vec{\rho}_{IJ} + \vec{\rho}_I\vec{n}_J = 0$$
$$\vec{n}\vec{\rho}_{IJ} = -\vec{\rho}_I\vec{n}_J = II$$

$$|\vec{\rho}_1 \times \vec{\rho}_2| = \sqrt{g}$$
$$|\vec{\rho}_1||\vec{\rho}_2| \sin^2\alpha = g_{11}g_{22}\frac{g}{g_{11}g_{22}} = g$$
$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{g}}\vec{\rho}_1 \times \vec{\rho}_2$$

Двузначная формула

$$II = \frac{1}{\sqrt{g}}\vec{\rho}_{IJ}\cdot\vec{\rho}_1 \times \vec{\rho}_2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\langle\vec{\rho}_{IJ}\vec{\rho}_1\vec{\rho}_2\rangle$$

Тензор 2 квадратичной формы. Тензор 2 ранга

$$\overset{\leftrightarrow}{B} = b^{IJ}\vec{\rho}_I \otimes \vec{\rho}_J = b_{IJ}\vec{\rho}^I \otimes \vec{\rho}^J = b^I_J\vec{\rho}_I \otimes \vec{\rho}^J = b^J_I\vec{\rho}^I \otimes \vec{\rho}_J$$

Изменение $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{n}$

Деривационная формулы поверхности

$$\vec{\rho}_{IJ} = \tilde{\Gamma}^K_{IJ}\vec{\rho}_K + \tilde{b}_{IJ}\vec{n}$$
$$\vec{n}_I = C^K_I\vec{\rho}_K + d_I\vec{n}$$

$$\underbrace{\vec{\rho}_{IJ}\cdot\vec{n}}_{b_{IJ}} = \cancel{\tilde{\Gamma}^K_{IJ}\vec{\rho}_K\cdot\vec{n}} + \tilde{b}_{IJ}\vec{n}\vec{n}$$
$$\tilde{b}_{IJ} = b_{IJ}$$
$$\vec{\rho}_{IJ}\cdot\vec{\rho}_L = \tilde{\Gamma}^K_{IJ}\underbrace{\vec{\rho}_K\vec{\rho}_L}_{g_{KL}} + 0$$
$$g_{IJ} = \vec{\rho}_I\vec{\rho}_J$$
$$\vec{\rho}_{IL}\vec{\rho}_J + \vec{\rho}_I\vec{\rho}_{JL} = \frac{\partial g_{IJ}}{\partial x^L}$$
$$J \leftrightarrow L$$
$$I \leftrightarrow L$$

-*+**+***

$$\vec{\rho}_{IJ}\vec{\rho}_L = \tilde{\Gamma}_{IJL} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{IL}}{\partial x^J} + \frac{\partial g_{JL}}{\partial x^I} - \frac{\partial g_{IJ}}{\partial x^L}\right] = \Gamma_{IJL}$$

$$\vec{n}_I\vec{n} = \cancel{C^J_I\vec{\rho}_J\vec{n}} + d_I\vec{n}\vec{n}$$
$$d_I = 0$$
$$\underbrace{\vec{n}_I\vec{\rho}_k}_{-b_{IK}} = C^J_I\vec{\rho}_J\vec{\rho}_K = C^J_I g_{JK}$$
$$C_{IK} = -b_{IK}$$
$$C^J_I = -b^J_I$$

Деривационные формулы

$$\begin{cases} \vec{\rho}_{IJ} = \Gamma^K_{IJ}\vec{\rho}_K + b_{IJ}\vec{n} & \text{- уравнения Гаусса} \\ \vec{n}_I = -b^J_I\vec{\rho}_J & \text{- Вейнгартен} \end{cases}$$

Учебник Рашевского

Развёртывающаяся поверхность - поверхность гомеоморфная плоскости

Ковариантное дифференцирование (вектора) на поверхности

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial X^k} = \frac{\partial (a^I \vec{\rho}_I)}{\partial X^K} = \frac{\partial a^I}{\partial X^K} \vec{\rho}_I + a^I \underbrace{\frac{\partial}{\partial X^K} \vec{\rho}_I}_{\vec{\rho}_{IK} = \Gamma^L_{IK} \vec{\rho}_L + b_{IK} \vec{n}} =$$

$$\vec{a}_K = \left(\frac{\partial a^I}{\partial X^K} \vec{\rho}_I + a^I (\Gamma^L_{IK} \vec{\rho}_L + b_{IK} \vec{n}) \right) = \left(\underbrace{\frac{\partial a^I}{\partial X^K} + a^J \Gamma^I_{KJ}}_{\text{ковариационная прозводная контрвариантных компонент } \vec{a}} \right) \vec{\rho}_I + a^I b_{IK} \vec{n}$$

$$\nabla_I \vec{a}^J = \frac{\partial a^J}{\partial X^I} + \Gamma^J_{IK} a^K$$

$$\nabla_I \vec{a}_J = \frac{\partial a_J}{\partial X^I} - \Gamma^K_{IJ} a_K$$