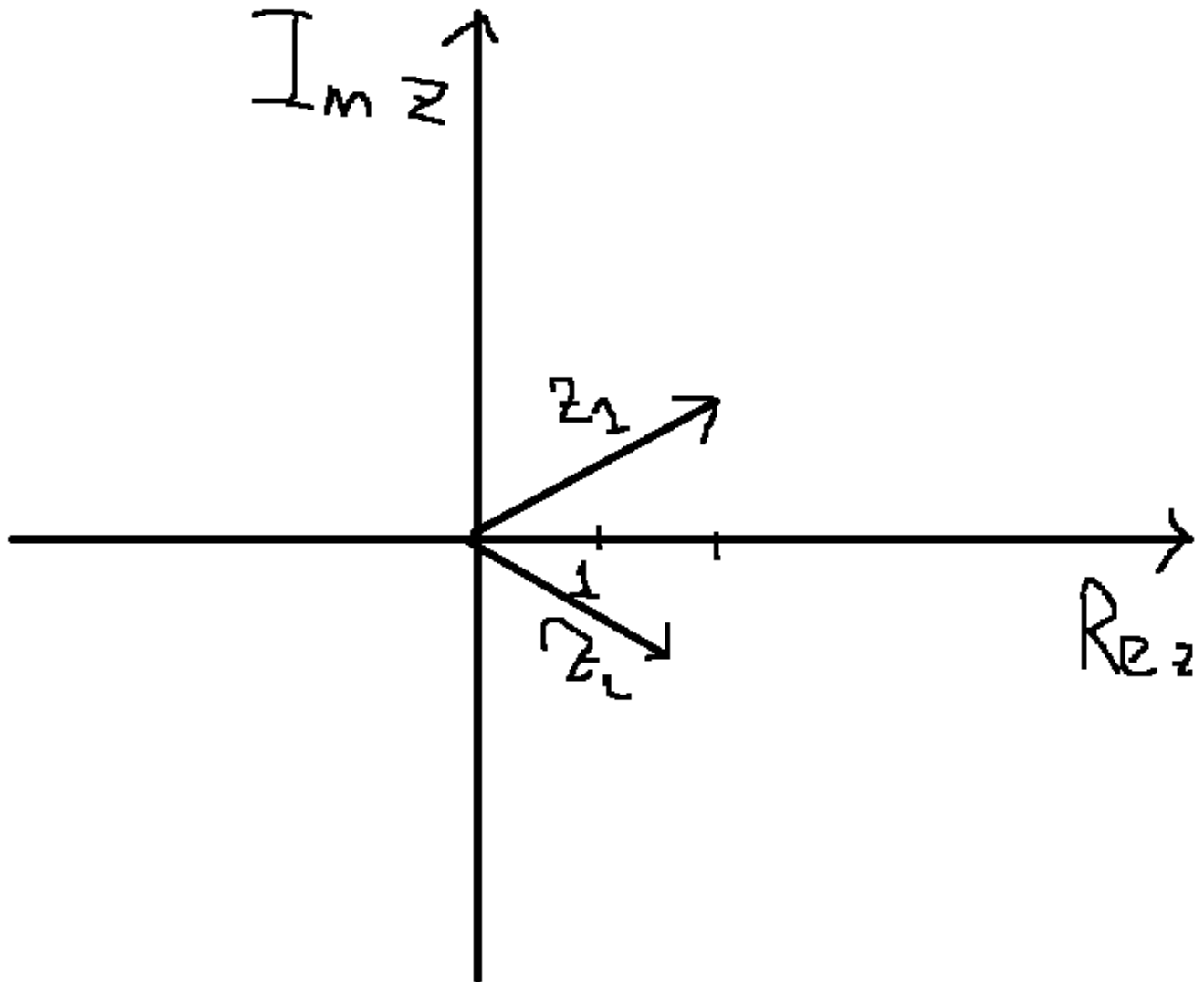


13/02/2025



$$z_1 = \sqrt{3} - i = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_2 = 2 + 2i = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (\sqrt{3} - i)(2 + 2i) = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}i - 2i + 2 = 2\sqrt{3} + 2 + i(2\sqrt{3} - 2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 2e^{-i\pi/8} \cdot \sqrt{8}e^{i\pi/4} = 2\sqrt{8}e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})} = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$4\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sqrt{3} + 2 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2\sqrt{3} + 2}{4\sqrt{2}}$$

$$\frac{z_1^2}{z_2} = \frac{(\sqrt{3}-i)^2}{2+2i} = \frac{3-2\sqrt{3}i-1}{2-2i} = \frac{(2-2\sqrt{3}i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} = \frac{4+4i+4\sqrt{3}i+4\sqrt{3}}{4+4} =$$

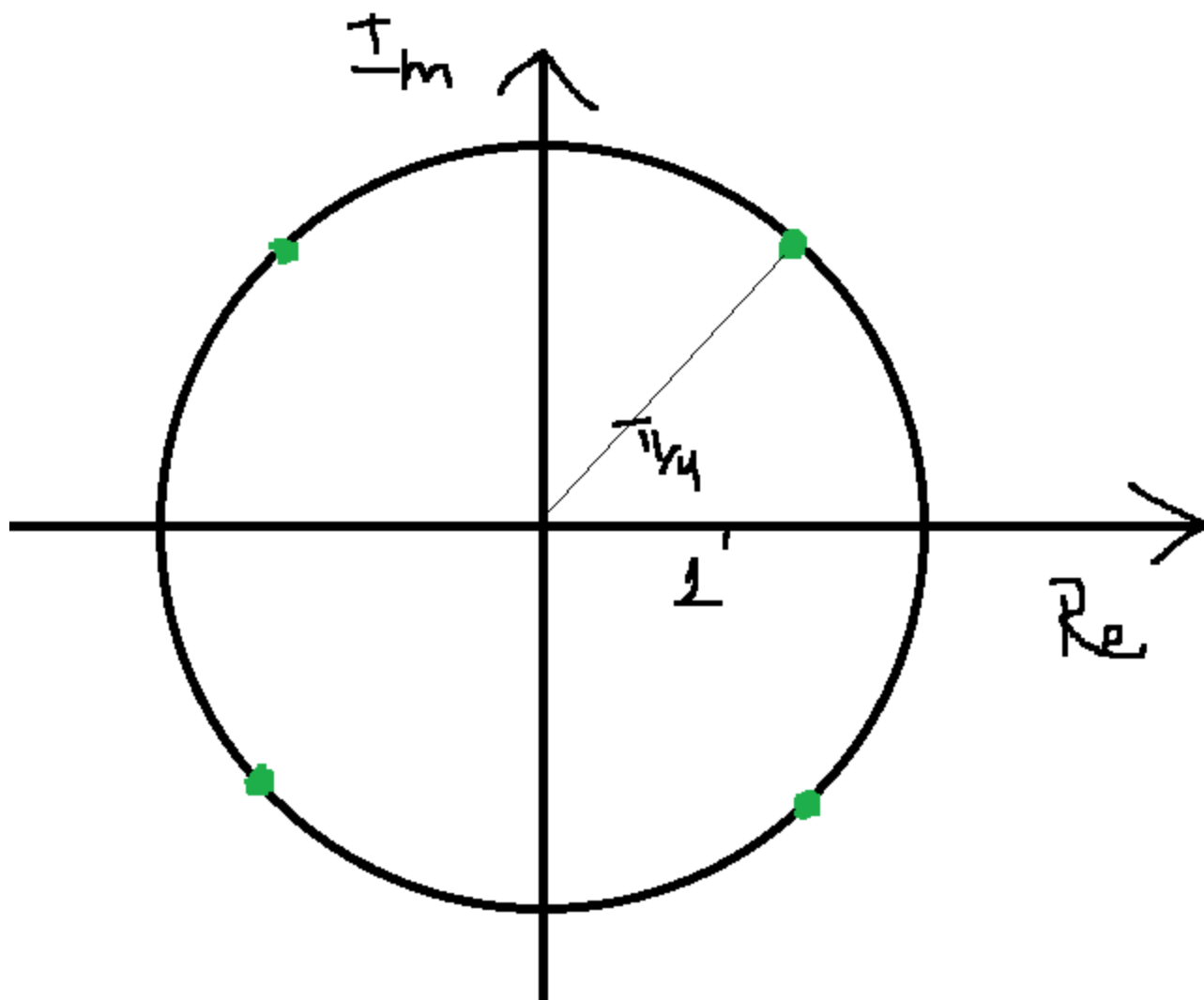
$$= \frac{1+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})}{2}$$

$$\frac{z_1^2}{z_2} = \frac{4e^{-i\pi/3}}{\sqrt{8}e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$z = -16 = 16e^{\pi i}$$

$$\sqrt[4]{z} = 2e^{\frac{1}{4}i(\pi/4+2\pi k)} = 2e^{\frac{1}{4}i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2})}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$x + iy = \pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$$

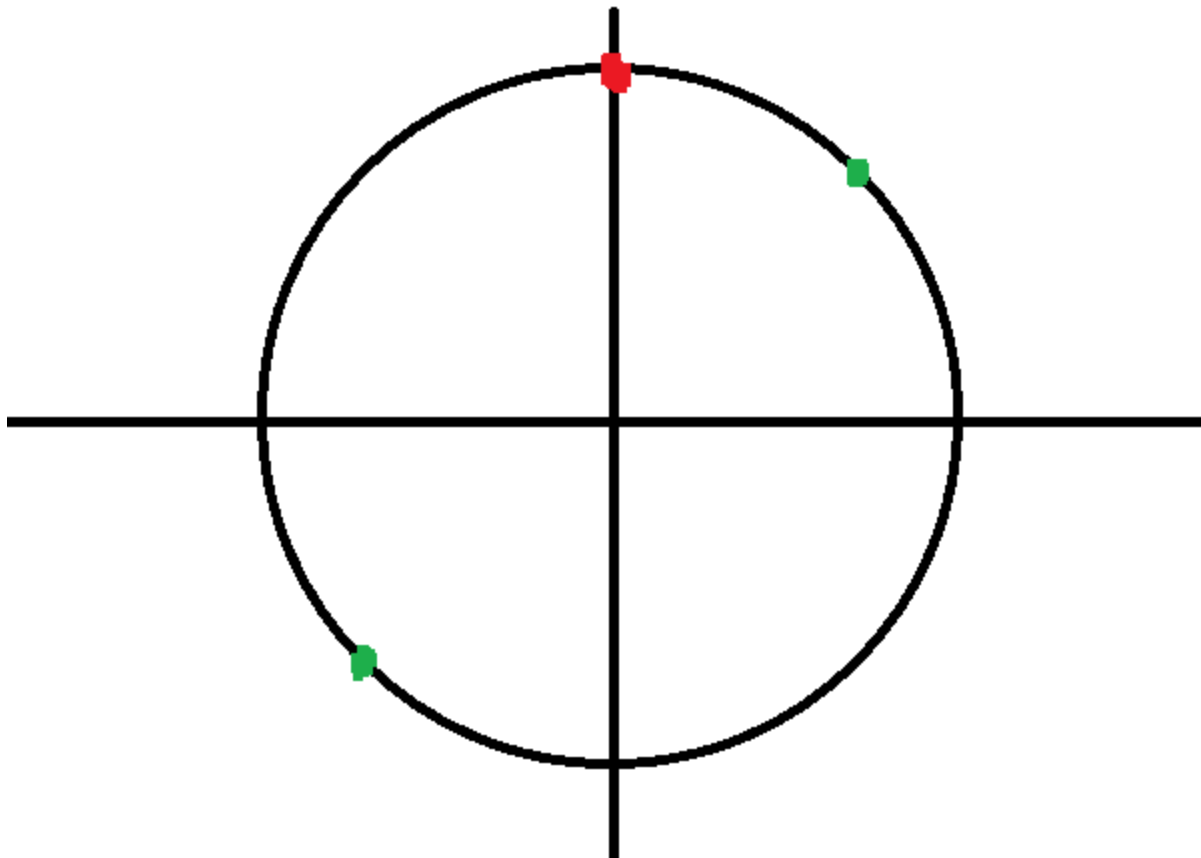


Корень n -ой степени - n значений

$$\sqrt{-1} = \pm i$$

$$\sqrt{1} = \sqrt{e^{2\pi ni}} = e^{\pi ni} = \begin{cases} e^0 = 1 \\ e^{\pi i} = -1 \end{cases}$$

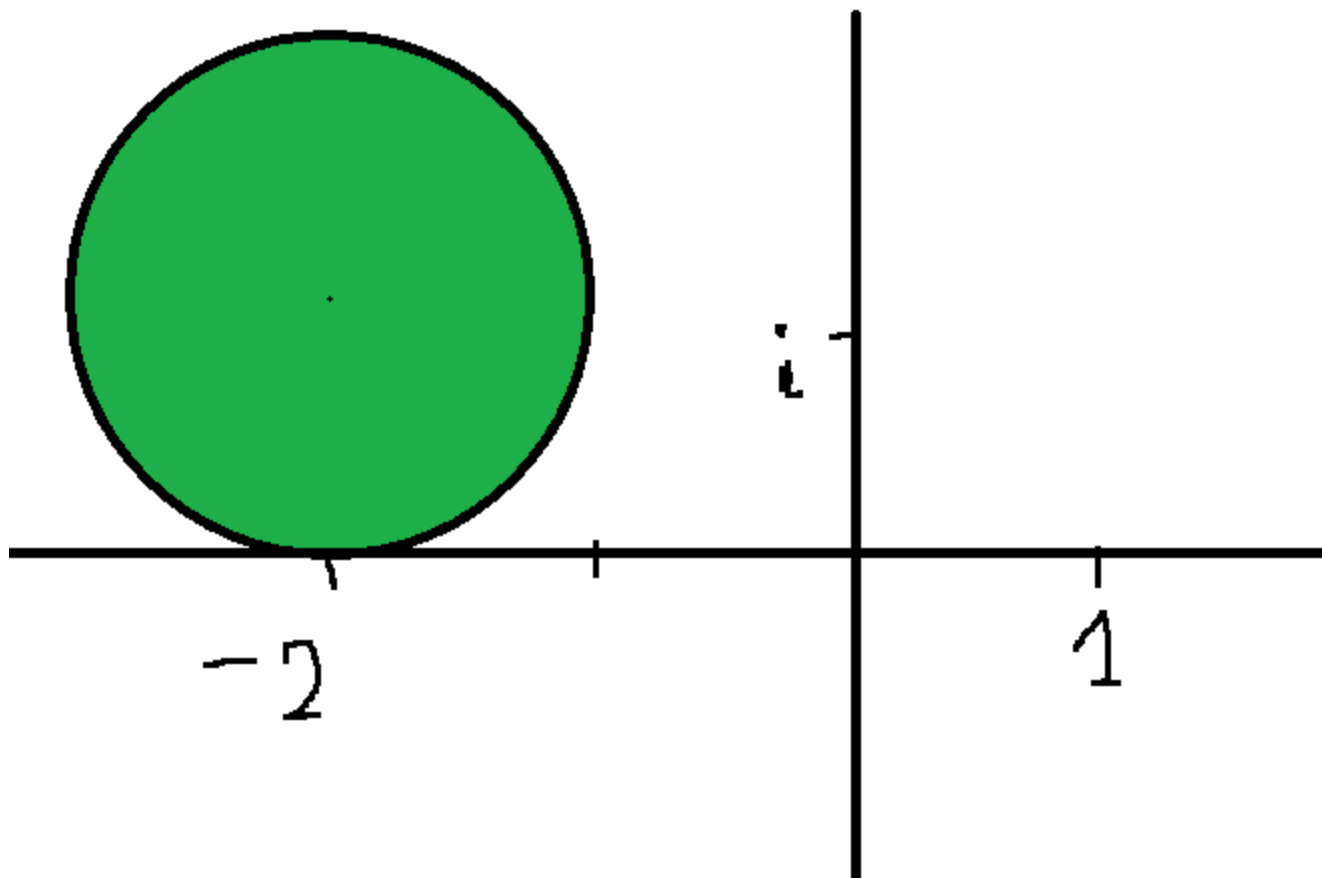
$$\sqrt{i} = e^{i(\frac{\pi}{2}+2\pi n)} = e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi n)} = \begin{cases} e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \\ e^{\frac{5\pi i}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$$|z + 2 - i| \leq 1$$

Можно свести задачу к школьной, перейдя к декартовым координатам,
но иногда можно решить проще

$$|z - (-2 + i)| \leq 1 \quad - \quad \text{Окружность с центром в } (-2+i)$$



$$\begin{cases} |z + 3| + |z + 3i| \leq 6 & - \text{Эллипс} \\ |z + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i| > \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

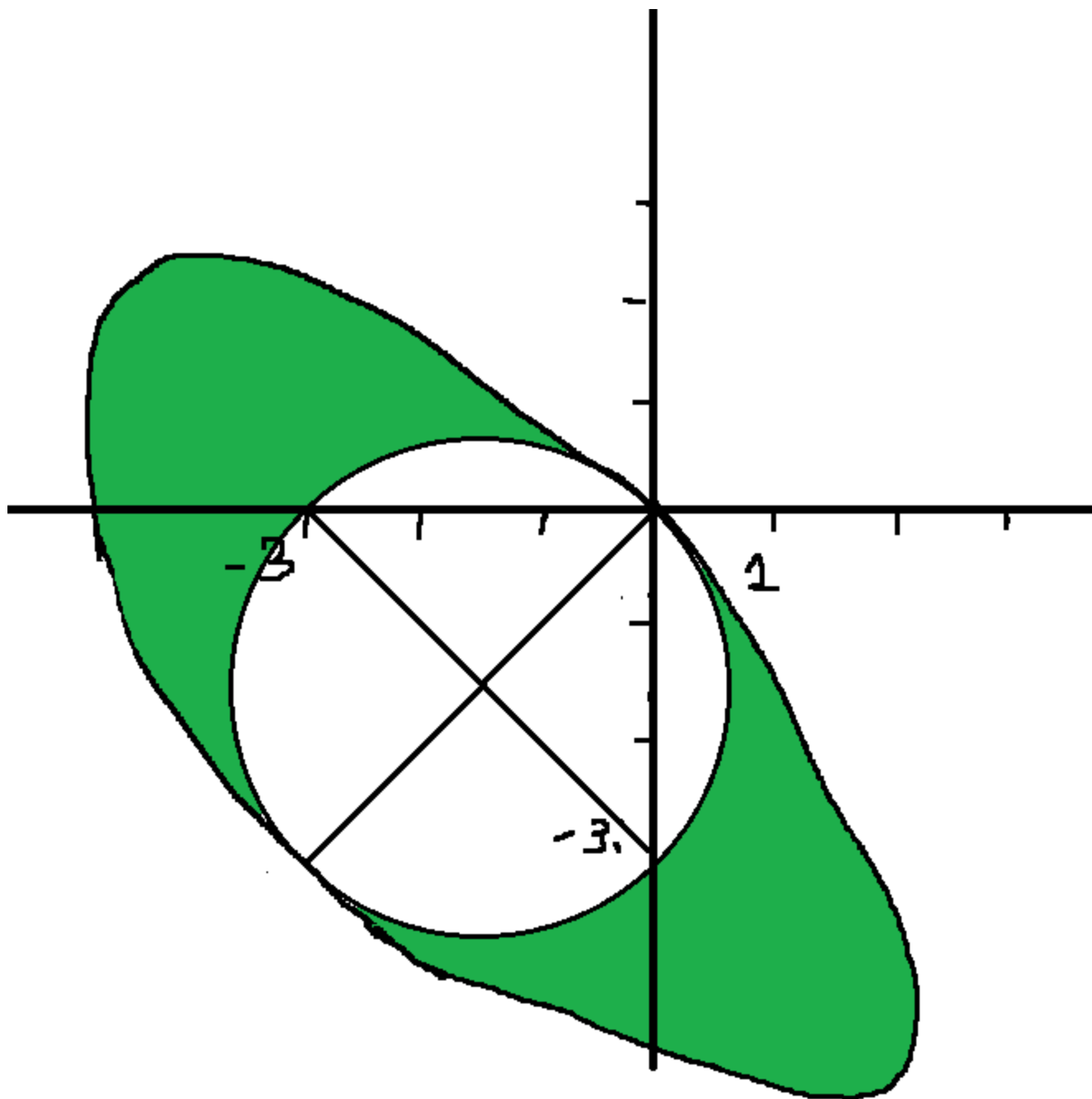
$$z_1 = -3$$

$$z_2 = -3i$$

$$a = \frac{6}{2} = 3$$

$$c = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$$

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a \text{ — гипербола}$$

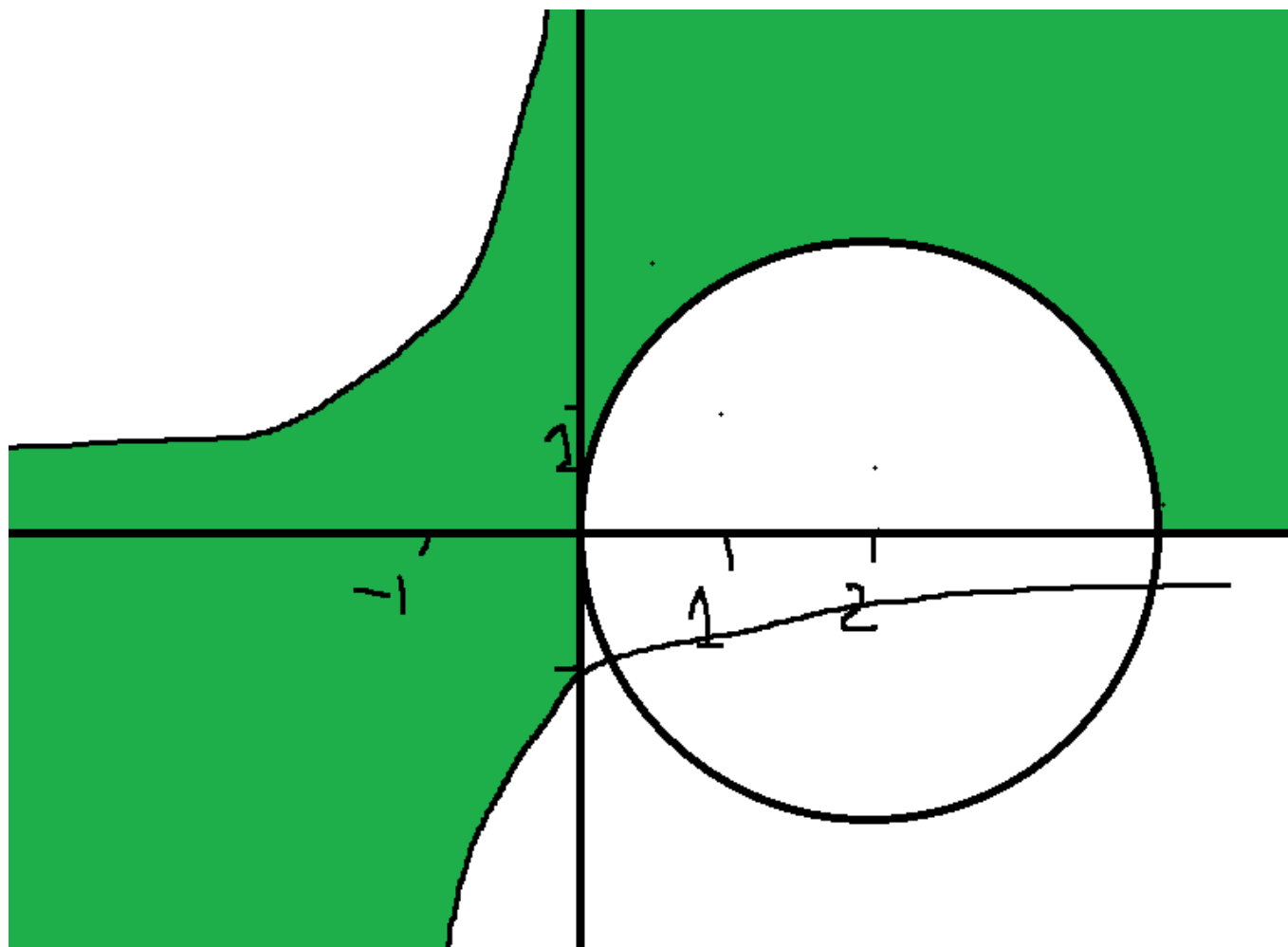
$$\begin{cases} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{4} \\ \operatorname{Im}(z^2 - \bar{z}) \leq 2 + \operatorname{Im}(z) \end{cases}$$

$$z = x + iy$$

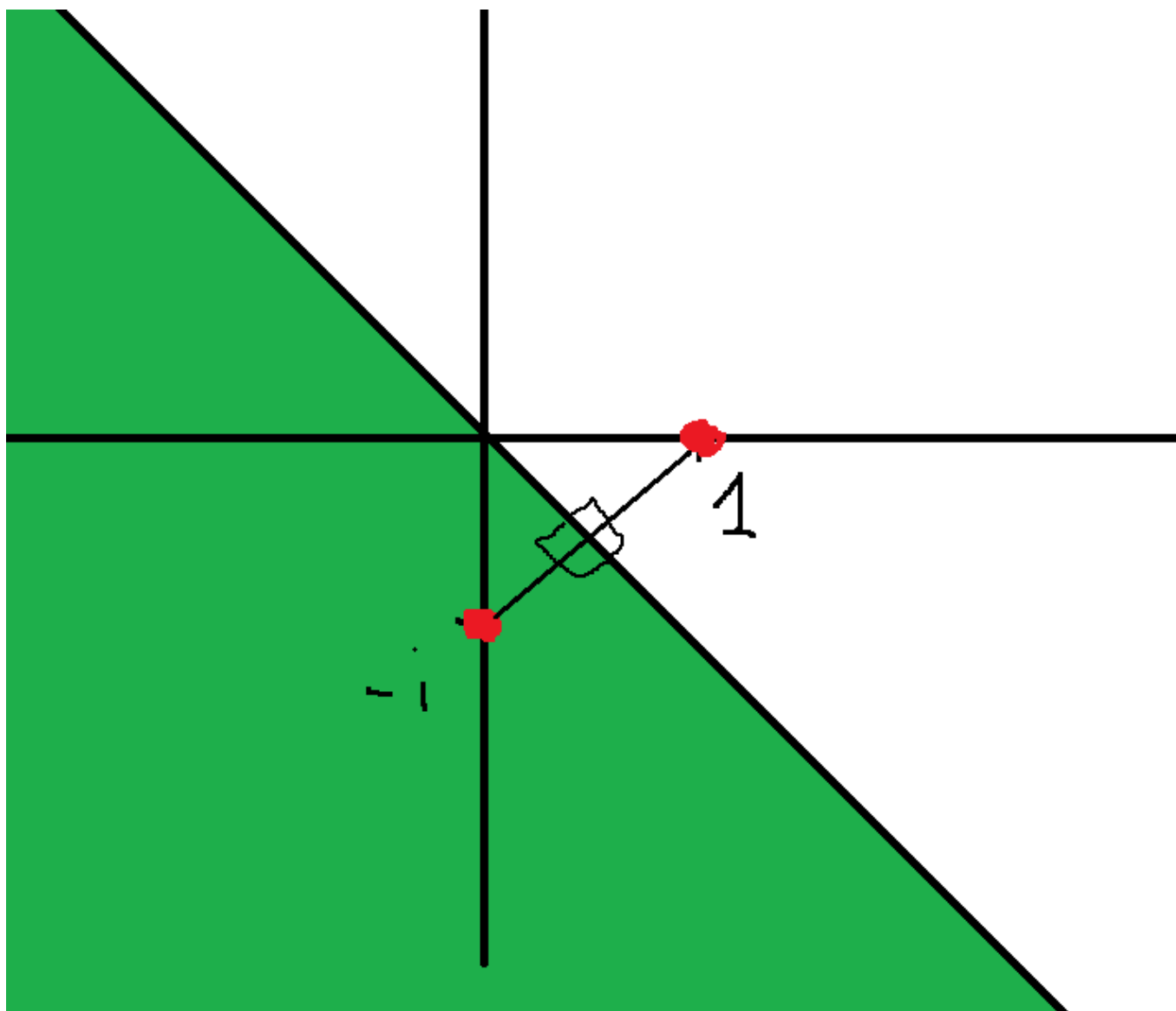
$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{x + iy}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{Im}(\overline{(x + iy)^2 - x + iy}) = \operatorname{Im}(\overline{x^2 - y^2 + 2xyi - (x - iy)}) = -2xy - y \leq 2 + y$$

$$\begin{cases} \frac{x}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{4} \\ (x + 1)y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x \leq x^2 + y^2 \\ (x + 1)y \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + y^2 \geq 4 \\ (x + 1)y \geq -1 \end{cases}$$



$$|z + i| < |z - 1|$$



$$\begin{aligned}
 |x + iy + i| &< |x + iy - 1| \\
 \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} &< \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \\
 x^2 + y^2 + 2y + 1 &< x^2 - 2x + 1 + y^2 \\
 2x + 2y &< 0 \\
 x + y &< 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |z^2 + 4| \leq 4 & - \text{Из номотеха: Лемниската} \\ \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$$

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

$$z^2 = r^2(\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)) \quad - \text{Формула Муавра}$$

$$|z^2 + 4| \leq 4$$

$$|r^2(\cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)) + 4| \leq 4$$

$$\sqrt{(r^2 \cos(2\varphi) + 4)^2 + r^2 \sin^2(2\varphi)} \leq 4$$

$$r^4 \cos^2(2\varphi) + 16 + 8r^2 \cos(2\varphi) + r^4 \sin^2(2\varphi) \leq 16$$

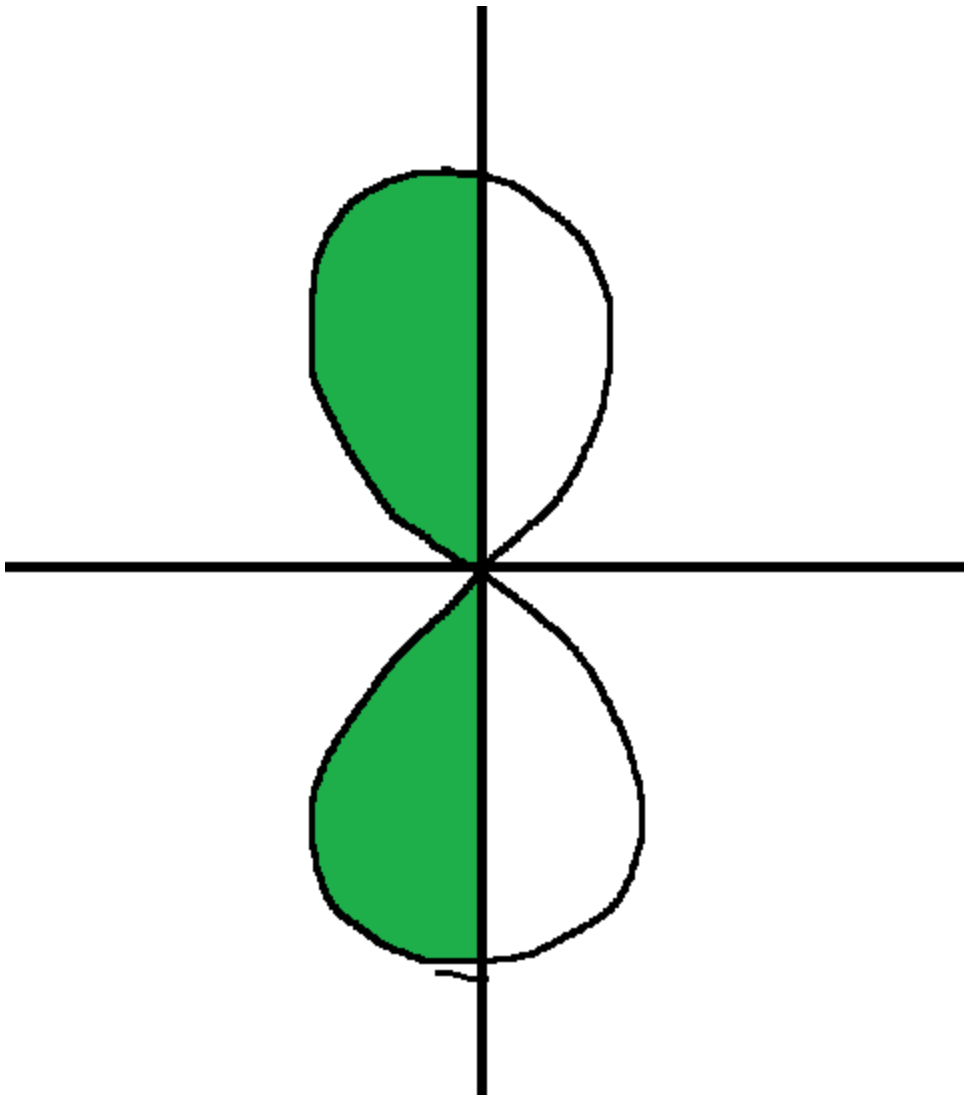
$$r^4 \cos^2(2\varphi) + 8r^2 \cos(2\varphi) + r^4 \sin^2(2\varphi) \leq 0$$

$$r^4 + 8r^2 \cos(2\varphi) \leq 0$$

$$r^2 + 8 \cos(2\varphi) \leq 0$$

$$r^2 \leq -8 \cos(2\varphi)$$

$$r < 2\sqrt{2}\sqrt{-\cos(2\varphi)}$$



20/02/2025

Пропустил

$$\sum_{n=1}^N \frac{\left(\frac{x}{|e-i|}\right)^n}{n!}$$

27/02/2025

$$\cos z = \cos x \operatorname{ch} y + i(-\sin x \operatorname{sh} y)$$

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z$$

$$\operatorname{ch} iz = \cos z$$

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z$$

$$\cos iz = \operatorname{ch} z$$

$$\operatorname{sh} \left(\ln 3 + \frac{i\pi}{4} \right) = \operatorname{sh}(\ln 3) \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{ch}(\ln 3) \cdot i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} (e^{\ln 3} - e^{-\ln 3} + ie^{\ln 3} + ie^{-\ln 3})$$

Убедиться, что если подставить в $\alpha^z = e^{z \operatorname{Ln} \alpha}$ $\alpha = e$, то полученные функции будут однозначными

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i(i\frac{\pi}{2} + 2\pi ki)} = e^{-(\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}, k \in \mathbb{Z}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x, y) = f(z, \bar{z})$$

$$\text{C.R.} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

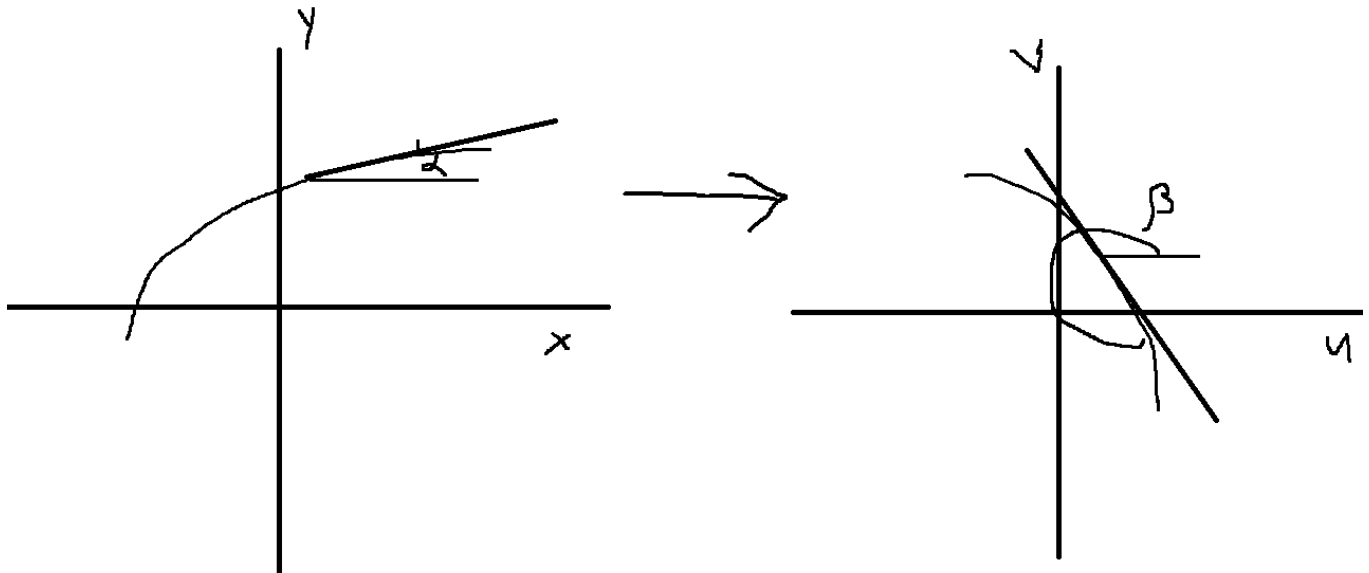
$$\begin{cases} x = \frac{z+\bar{z}}{2} \\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases}$$

$$f = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \psi(z, \bar{z}) \Rightarrow \text{не дифференцируема}$$

$$z^2 = (x + iy)(x + iy) = x^2 - y^2 + 2xyi$$

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix} = 2(x + iy) = 2z$$

Аргумент говорит о том, как поворачиваются касательные



$$\beta - \alpha = \arg f'(z)$$

$$|\Delta w| = |f'(z)| |\Delta z| + |o(\Delta z)|$$

$$\begin{cases} u_{yx} = v_{yy} \\ u_{xy} = -v_{xx} \end{cases} \Rightarrow v_{yy} + v_{xx} = 0$$

u и v гармонические

$$v(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$v_{xx} = \left(\frac{2x(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)(2(x^2 + y^2)2x)}{(x^2 + y^2)^4} \right)_x = \left(\frac{-2x^3 + 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3} \right)_x =$$

$$= \frac{2((3y^2 - 3x^2)(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2)^2 2x(3xy^2 - x^3))}{(x^2 + y^2)^6} = \frac{2(-3x^4 + 3y^4 - 6(3x^2y^2 - x^4))}{(x^2 + y^2)^4} =$$

$$= \frac{6(x^4 + y^4 - 6x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$f(x, y) = -f(y, x)$$

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$$

$$f'(z) = \frac{2y^3 - 6yx^2}{(x^2 + y^2)^3} + i \frac{-2x^3 + 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3} =$$

$$= \frac{2(y^3 - 3yx^2 - ix^3 + 3ixy^2)}{(x^2 + y^2)^3} = \frac{2(y + ix)^2}{(z\bar{z})^3} = 2 \frac{i\cancel{z}^3}{(z\cancel{z})^3} = \frac{2i}{z^3} \Rightarrow$$

$$f(z) = -\frac{i}{z^2} + C$$

$u = \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ - Очевидно, что не может быть действительной частью

Гармоническое векторное поле - это соленоидальное и потенциальное векторное поле

Соленоидальное векторное поле: $\operatorname{div} \vec{f} = 0$

Потенциальное векторное поле: $\operatorname{rot} \vec{f} = 0$

06/03/2025

Конформные отображения.

Отображение, осуществляемое линейной функцией.

$$w = (1 + i)z + (3 - 2i)$$

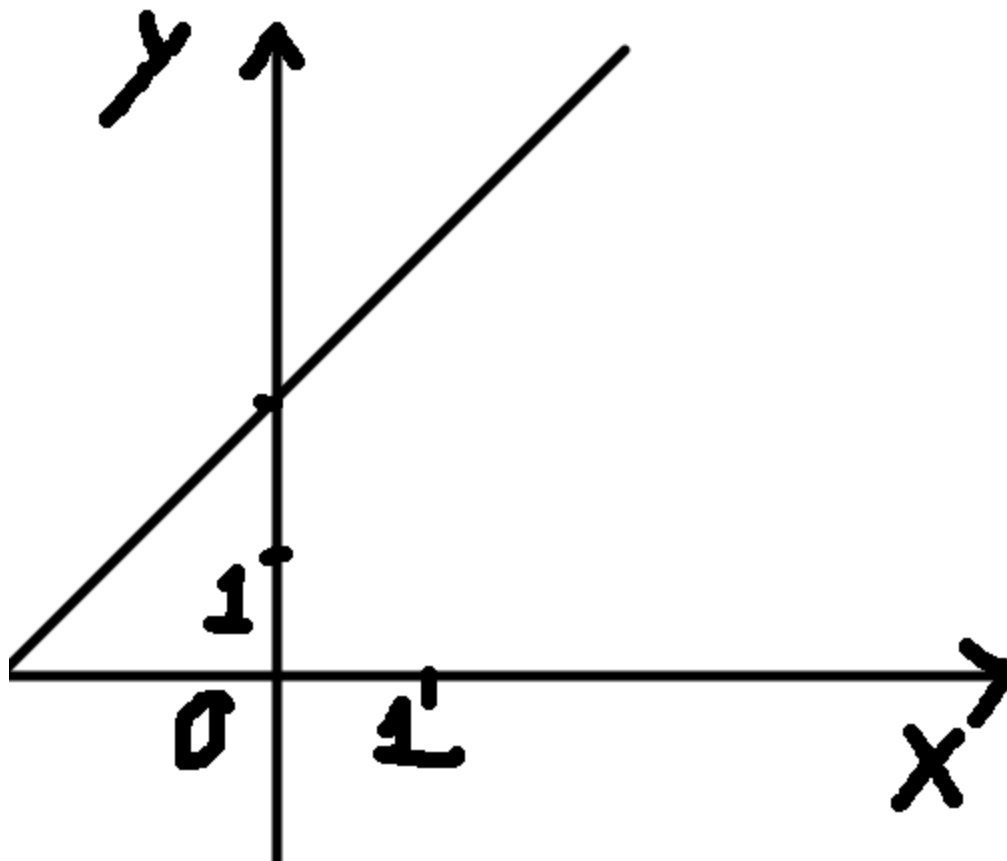
$$\text{б) } y = x + 2$$

$$w = (1 + i)(x + iy) + (3 - 2i) = (x - y + 3) + i(x + y - 2) = u + iv$$

$$\begin{cases} u = x - y + 3 \\ v = x + y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 2x + 1 \\ v - u = 2y - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{u+v-1}{2} \\ y = \frac{v-u+5}{2} \end{cases}$$

$$\frac{v - u + 5}{2} = \frac{u + v - 1}{2} + 2$$
$$u = 1$$



“Pasted image 20250306114509.png” не может быть найдена.

$$y = \frac{3}{2}x$$

$$v - u + 5 = 3 \frac{u + v - 1}{2}$$

$$2v - 2u + 10 = 3u + 3v - 3$$

$$13 = 5u + v$$

$$v = 13 - 5u$$

Дробно-линейные функции

Сдвиг

Инверсия

Растяжение/сжатие, поворот

Круговое свойство: отображает окружности в окружности

$$w = \frac{1}{z}$$

а) $y = 3x$

“Pasted image 20250306115917.png” не может быть найдена.

$$w = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ v = -\frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{u}{u^2 + v^2} \\ y = -\frac{v}{u^2 + v^2} \end{cases}$$

$$-\frac{v}{\cancel{u^2 + v^2}} = 3 \frac{u}{\cancel{u^2 + v^2}}$$

$$v = -3u$$

“Pasted image 20250306120513.png” не может быть найдена.

$$\text{б) } y = x - 1$$

$$-\frac{v}{u^2 + v^2} = \frac{u}{u^2 + v^2} - 1$$

$$0 = v + u - u^2 - v^2$$

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

“Pasted image 20250306121038.png” не может быть найдена.

“Pasted image 20250306121409.png” не может быть найдена.

$$\begin{aligned}
\text{в) } |z - i - 1| &= \sqrt{2} \\
(x - 1)^2 + (y - 1)^2 &= 2 \\
\frac{(u - u^2 - v^2)^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{(-v - u^2 - v^2)^2}{(u^2 + v^2)^2} &= 2 \\
\frac{u^2 + \cancel{u^4} + v^4 - 2u^3 - 2uv^2 + \cancel{2u^2v^2}}{u^2 + \cancel{u^4} + v^4 + 2v^3 + 2vu^2 + \cancel{2u^2v^2}} + &= \frac{\cancel{2u^4} + \cancel{2v^4} + 4u^2v^2}{u^2 + \cancel{u^4} + v^4 + 2v^3 + 2vu^2 + \cancel{2u^2v^2}} \\
u^2 - 2u^3 - 2uv^2 + 2vu^2 + 2v^3 + v^2 &= 0 \\
(u^2 + v^2) - 2u(u^2 + v^2) + 2v(u^2 + v^2) &= 0 \\
1 - 2u + 2v &= 0 \\
v &= u - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

“Pasted image 20250306122209.png” не может быть найдена.

“Pasted image 20250306122214.png” не может быть найдена.

$$\text{в) } |z - 2 - 2i| = 1$$

“Pasted image 20250306122306.png” не может быть найдена.

$$\begin{aligned}
(x - 2)^2 + (y - 2)^2 &= 1 \\
\left(\frac{u}{u^2 + v^2} - 2\right)^2 + \left(-\frac{v}{u^2 + v^2} - 2\right)^2 &= 1 \\
\frac{u^2}{(u^2 + v^2)^2} + 4 - \frac{4u}{u^2 + v^2} + \frac{v^2}{(u^2 + v^2)^2} + 4 + \frac{4v}{u^2 + v^2} &= 1 \\
\frac{1 - 4u + 4v}{u^2 + v^2} &= -7 \\
\frac{1}{7} - \frac{4}{7}u + \frac{4}{7}v + u^2 + v^2 &= 0 \\
\left(u - \frac{2}{7}\right)^2 + \left(v + \frac{2}{7}\right)^2 &= \frac{1}{7^2}
\end{aligned}$$

“Pasted image 20250306122914.png” не может быть найдена.

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{z-2i}{z+2} \\
 \text{a) } y &= x+2 \\
 \frac{x+iy-2i}{x+iy+2} &= \frac{(x+iy-2i)(x+2-iy)}{(x+2)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2+\dots}{(x+2)^2+y^2} - \text{сложно} \\
 w &= \frac{z-2i}{z+2} \\
 (z+2)w &= z-2i \\
 z(w-1) &= -2i-2w \\
 z &= -2\frac{w+i}{w-1} \\
 x+iy &= -2\frac{u+vi+i}{u+vi-1} = -2\frac{(u+(v+1)i)((u-1)-vi)}{(u-1)^2+v^2} = \\
 &= -2\frac{u^2-u+v^2+v+i(-uv+uv+u-v-1)}{(u-1)^2+v^2} = \\
 &= -2\left(\frac{u^2-u+v^2+v}{(u-1)^2+v^2} + i\frac{u-v-1}{(u-1)^2+v^2}\right) \\
 \begin{cases} x = -2\frac{u^2-u+v^2+v}{(u-1)^2+v^2} \\ y = -2\frac{u-v-1}{(u-1)^2+v^2} \end{cases} \\
 -\cancel{2}(u-v-1) &= -\cancel{2}(u^2-u+v^2+v) + \cancel{2}((u-1)^2+v^2) \\
 \cancel{-u} + v + \cancel{1} &= \cancel{-u^2} + u - \cancel{v^2} - v + \cancel{u^2} - \cancel{2u} + \cancel{1} + \cancel{v^2} \\
 v &= 0
 \end{aligned}$$

“Pasted image 20250306124600.png” не может быть найдена.

“Pasted image 20250306124757.png” не может быть найдена.

Лунка - область, ограниченная двумя окружностями

$$\text{б) } \begin{cases} |z| > 2 \\ |z+1-i| < \sqrt{2} \end{cases}$$

“Pasted image 20250306125030.png” не может быть найдена.

Следующие соображения

$$f(z) = -\frac{z-z_1}{z-z_2}$$

“Pasted image 20250306125552.png” не может быть найдена.

$$\begin{aligned}
 w_1 &= f(z_1) = 0 \\
 w_2 &= f(z_2) = \infty \\
 z_0 &= \frac{z_1 + z_2}{2} \\
 f(z_0) &= -\frac{\frac{z_1 + z_2}{2} - z_1}{\frac{z_1 + z_2}{2} - z_2} = -\frac{z_2 - z_1}{z_1 - z_2} = 1
 \end{aligned}$$

Границы отображаются в прямые

“Pasted image 20250306125657.png” не может быть найдена.

ДОДЕЛАТЬ ЗАДАЧУ!!!