1. Гамма-распределение.

А) Гамма распределение широко применяется для моделирования сложных потоков событий, сумм временных интервалов между событиями, в экономике, теории массового обслуживания, в логистике, описывает продолжительность жизни в медицине.

Б) Моделирует общее время наработки на отказ системы, состоящей из нескольких компонентов, каждый из которых отказывает через случайное экспоненциальное время.
В) Сумма k независимых и одинаково распределенных экспоненциально случайных величин имеет гамма-распределение.

Г) Один из классических примеров — моделирование размера страховых выплат. Размеры исков часто имеют правостороннюю асимметрию (много маленьких исков и несколько очень крупных). Гамма-распределение хорошо подходит для их описания.

Д)В эконометрике длительность пребывания в каком-либо состоянии (например, безработице) часто моделируется с помощью распределений длительности жизни (duration models), таких как гамма-распределение.

Е)В операционных исследованиях и моделировании бизнес-процессов (например, в банке или call-центре) гамма-распределение может использоваться для описания времени обслуживания клиента.

$$\gamma_{\alpha,\lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}, \ \lambda > 0, \alpha > 0$$

Свойства гамма-функции $\Gamma(\lambda) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx$, $\lambda > 0.$

1. $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} x^{-1/2} e^{-x} dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-x} d\sqrt{x} = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$

3. $\Gamma(\lambda+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\lambda} e^{-x} dx = -x^{\lambda} e^{-x}\Big|_0^{\infty} + \int\limits_0^{+\infty} \lambda x^{\lambda-1} e^{-x} dx = \lambda\Gamma(\lambda)$

2. Бэта-распределение.

Бета-распределение — это накопление вероятностей *по вероятностям* **. Мы используем его для расчета вероятностей: рейтинг кликов следующей рекламы, коэффициент конверсии клиентов, фактически купивших что-то на предстоящем этапе, насколько вероятно, что посетители поставят лайки в следующем блоге, насколько вероятно избранный прогноз на второй срок, 5-летний прогноз выживания женщины с раком груди и так далее.**

Представьте, что вы моделируете вероятность успеха p (например, вероятность клиента купить товар).

Параметр m можно интерпретировать как количество "успехов" в ваших предварительных знаниях.

Параметр n можно интерпретировать как количество "неудач" в ваших предварительных знаниях.
Совместно параметры m + n можно интерпретировать как "размер виртуальной выборки" или силу вашего предварительного убеждения. Чем больше эта сумма, тем "увереннее" вы априори и тем больше новых данных потребуется, чтобы изменить ваше мнение.
Форма бета-распределения сильно зависит от α и β, что наглядно показывает, какие вероятности мы считаем более правдоподобными.

Симметричная неопределенность: m = n = 1

Это частный случай — равномерное распределение (Uniform distribution) на интервале [0, 1].

Вы не имеете ни малейшего представления о вероятности `p`. Любое значение от 0 до 1. Ваша "виртуальная выборка" пуста (0 успехов, 0 неудач).

Beta(1, 1) — это состояние полного неведения.

Уверенность в симметрии: m = n > 1

Распределение становится симметричным и колоколообразным с модой вокруг 0.5.

Вы уверены, что вероятность p близка к 0.5, и сила этой уверенности определяется величиной параметров. Чем больше m и n, тем уже и выше "колокол" (меньше дисперсия).

Beta(10, 10). Вы априори считаете, что шансы успеха и неудачи примерно равны, и ваше убеждение основано на эквиваленте 20 наблюдений (10 успехов и 10 неудач)

Асимметричные убеждения: $m \neq n$

Распределение становится асимметричным, смещенным в сторону большего параметра.

$m > n$: Вы верите, что вероятность успеха p выше 0.5.

Beta(8, 2) — вы ожидаете успех в 80% случаев (на основе эквивалента 10 наблюдений: 8 успехов и 2 неудачи).

$m < n$: Вы верите, что вероятность успеха p ниже 0.5.

Beta(2, 8) — вы ожидаете успех лишь в 20% случаев.

Допустим, вы аналитик в банке и хотите оценить вероятность дефолта по новому кредитному продукту.

У вас есть исторические данные по похожим продуктам. В среднем, дефолт происходил в ~5% случаев, и эта оценка была довольно основанна на примерно 1000 наблюдений.

Вы выбираете априорное распределение Beta(50, 950).

Ваше априорное убеждение эквивалентно тому, что вы уже видели 50 дефолтов ($m - 1 = 49$) и 950 успешных выплат ($n - 1 = 949$). Ваш "размер виртуальной выборки" — 1000. Ожидаемое значение $p = m / (m + n) = 50 / 1000 = 0.05$.

Вы запускаете новый продукт и собираете данные по 200 клиентам. Из них 3 допустили дефолт, а 197 — нет.

Это ваши данные: 3 успеха (дефолта) и 197 неудач (исправных выплат) в терминах модели.

Обновление убеждений (Posterior)

Магия бета-распределения (как сопряженного априорного для биномиального) в том, что апостериорное распределение вычисляется просто путем сложения параметров с данными.

Новое (апостериорное) распределение: Beta(50 + 3, 950 + 197) = Beta(53, 1147)

Новая оценка вероятности дефолта:p = 53 / (53 + 1147) ≈ 0.0441 или **4.41%**`.

$$\beta_{m,n}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{\mathrm{B}(m,n)}, & 0<x<1\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases},\ m>0,n>0\text{, где}$$

$$\mathrm{B}(m,n)=\int_0^1 w^{m-1}(1-w)^{n-1}\,dw,\ m>0,n>0.$$

Свойства бэта-функции

1. $\mathrm{B}(m,n)=\int_0^\infty \frac{u^{m-1}}{(1+u)^{m+n}}du$.

2. $\mathrm{B}(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

3. $\mathrm{B}(m+1,n+1)=\frac{1}{(m+n+1)C_{m+n}^m}$

https://medium.com/nuances-of-programming/%D0%B1%D0%B5%D1%82%D0%B0-%D1%80%D0%B0%D1%81%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5-%D0%B8%D0%BD%D1%82%D1%83%D0%B8%D1%86%D0%B8%D1%8F-%D0%BF%D1%80%D0%B8%D0%BC%D0%B5%D1%80%D1%8B-%D0%B2%D1%8B%D0%B2%D0%BE%D0%B4-4662b929305e

3. Хи-квадрат распределение с n степенями свободы **Само распределение Хи-квадрат (с k степенями свободы) это распределение суммы квадратов k независимых стандартных нормальных величин**

$$p_{\chi^2(n)}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{-x/2}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

Свойства.

1. $p_{\chi^2(1)}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x/2}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ - совпадает с распределением квадрата стандартной нормально распределенной случайной величины

2. Пусть ξ_i независимы и распределены по стандартному нормальному закону. Тогда случайная величина $\eta=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$ распределена по закону Хи-квадрат с n степенями свободы.

4. Распределение Фишера-Снедекора $\mathbf{F}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})$.

$$p_{F(m,n)}(x)=\begin{cases}\dfrac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mx)^{\frac{m+n}{2}}\mathrm{B}\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2}\right)}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

Теорема. Если случайные величины ξ_i, $i=1,\ldots,m$, η_i, $j=1,\ldots,n$, независимы и распределены по стандартному нормальному закону $\mathrm{N}(0,1)$, то плотность распределения случайной величины $\zeta=\dfrac{\frac{1}{m}\left(\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots.+\xi_m^2\right)}{\frac{1}{n}\left(\eta_1^2+\eta_2^2+\ldots+\eta_n^2\right)}$

5. Распределение Стьюдента с $\boldsymbol{n}$ степенями свободы.

Пусть ξ_i, $i=0,1,\ldots,n$, независимы и распределены по стандартному нормальному закону. Тогда случайная величина $\eta=\dfrac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}}$ имеет плотность распределения

$p_{t(n)}(x)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$ (распределение Стьюдента с n степенями свободы)

Задачи

Пример 1

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, имеющей гамма – распределение с плотностью:

$$\gamma_{\alpha,\lambda}(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-\alpha x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases},\ \lambda>0,\alpha>0.$$

Найдем математическое ожидание

$$M\xi=\int_0^{+\infty}\frac{x\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-\alpha x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda}e^{-\alpha x}dx=\begin{Bmatrix}\alpha x=t\\ \alpha dx=dt\end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\alpha\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty}t^{\lambda}e^{-t}dx=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\alpha\Gamma(\lambda)}=\frac{\lambda\Gamma(\lambda)}{\alpha\Gamma(\lambda)}=\frac{\lambda}{\alpha}$$

Найдём момент k-ого порядка

$$M\xi^k=\int_0^{+\infty}\frac{x^k\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}e^{-\alpha x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda+k-1}e^{-\alpha x}dx=\begin{Bmatrix}\alpha x=t\\ \alpha dx=dt\end{Bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\alpha^k\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty}t^{\lambda+k-1}e^{-t}dx=\frac{\Gamma(\lambda+k)}{\alpha^k\Gamma(\lambda)}$$

Теперь найдём дисперсию

$$D\xi=\frac{\Gamma(\lambda+2)}{\alpha^2\Gamma(\lambda)}-\frac{\lambda^2}{\alpha^2}=\frac{(\lambda+1)\lambda\Gamma(\lambda)}{\alpha^2\Gamma(\lambda)}-\frac{\lambda^2}{\alpha^2}=\frac{\lambda}{\alpha^2}.$$

Пример 2

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, имеющей бэта – распределение с плотностью:

$$\beta_{m,n}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{\mathrm{B}(m,n)}, & 0<x<1\\ 0, & x\notin(0,1)\end{cases},\ m>0, n>0.$$

Найдём математическое ожидание бэта распределения

$$M\xi=\int_0^1\frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}x}{\mathrm{B}(m,n)}dx=\int_0^1\frac{x^m(1-x)^{n-1}}{\mathrm{B}(m,n)}dx=\frac{1}{\mathrm{B}(m,n)}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-1}dx=$$

$$\frac{1}{\mathrm{B}(m,n)}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-1}dx=\frac{\mathrm{B}(m+1,n)}{\mathrm{B}(m,n)}$$

Используем связь Бетта и Гамма-функции $\mathrm{B}(m,n)=\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ получаем

$$\frac{\mathrm{B}(m+1,n)}{\mathrm{B}(m,n)}=\frac{\dfrac{\Gamma(m+1)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+1)}}{\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}}=\frac{m\Gamma(m)\Gamma(n)}{(m+n)\Gamma(m+n)}\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}=\frac{m}{(m+n)}$$

$$M\xi^2=\int_0^1\frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}x^2}{\mathrm{B}(m,n)}dx=\int_0^1\frac{x^{m+1}(1-x)^{n-1}}{\mathrm{B}(m,n)}dx=\frac{1}{\mathrm{B}(m,n)}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^{n-1}dx=$$

$$\frac{1}{\mathrm{B}(m,n)}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-1}dx=\frac{\mathrm{B}(m+2,n)}{\mathrm{B}(m,n)}$$

Используем связь Бетта и Гамма-функции и получаем

$$\frac{\mathrm{B}(m+2,n)}{\mathrm{B}(m,n)}=\frac{\dfrac{\Gamma(m+2)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+2)}}{\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}}=\frac{m(m+1)\Gamma(m)\Gamma(n)}{(m+n)(m+n+1)\Gamma(m+n)}\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}=\frac{m(m+1)}{(m+n)(m+n+1)}$$

Подставим полученные значения в формулу дисперсии и получим

$$D\xi=\frac{mn}{(m+n)^2(m+n+1)}$$

Пример 3

Докажите, что при $n \to \infty$ плотность распределения Стьюдента поточечно сходится к стандартной нормальной плотности.

Решение. Рассмотрим Распределение Стьюдента

$$p_{t(n)}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Устремим число степеней свободы к бесконечности

Согласно второму замечательному пределу

$$\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \to e^{-\frac{x^2}{2}} \quad .$$

То есть достаточно проверить, что

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{или} \quad \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \to 1.$$

Лемма (формула Лежандра). $\mathrm{B}(x,x) = \frac{1}{2^{2x-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},x\right)$

$$\mathrm{B}(x,x) = \int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{x-1}dv = \int_0^1\left(\frac{1}{4}-\left(v-\frac{1}{2}\right)\right)^{x-1} d\left(v-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{4}-u^2\right)^{x-1}du = \left\{\begin{array}{c} u=\frac{1}{2}\sqrt{t} \\ \frac{1}{4}-u^2=\frac{1}{4}(1-t) \\ du=\frac{dt}{4\sqrt{t}} \end{array}\right\} = \frac{2}{4^x}\int_0^1(1-t)^{x-1}t^{\frac{1}{2}-1}du = \frac{1}{2^{2x-1}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},x\right).$$

Из леммы находим соотношение:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(x)}{2^{2x-1}\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}, \quad \text{или} \quad \frac{\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(x)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2x)}{2^{2x-1}\,\Gamma(x)\Gamma(x)}$$

В случае, если $x=\frac{n}{2}$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n)}{2^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Применим формулу Стирлинга $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$ для подпоследовательности

$n=2k+2$.

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{n}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\frac{\Gamma\left(k+1+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{k+1}\cdot\Gamma(k+1)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2k+2)}{2^{2k+1}\sqrt{k+1}\Gamma(k+1)\Gamma(k+1)}=\frac{\sqrt{\pi}\,(2k+1)!}{2^{2k+1}\sqrt{k+1}\,(k!)^{2}}\sim$$

$$\sim\frac{\sqrt{\pi}\sqrt{2\pi(2k+1)}\left(\frac{2k+1}{e}\right)^{2k+1}}{2^{2k+1}\sqrt{k+1}\cdot2\pi k\left(\frac{k}{e}\right)^{2k}}=\frac{2\pi\sqrt{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\frac{2k+1}{e}\left(\frac{2k+1}{e}\right)^{2k}}{2\cdot2^{2k}\sqrt{k+1}\cdot2\pi k\left(\frac{k}{e}\right)^{2k}}=\sqrt{\frac{k+\frac{1}{2}}{k+1}}\,\frac{k+\frac{1}{2}}{ek}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k}\to1$$

Пример 4

Если случайные величины ξ_i, $i=1,\ldots,m$, η_i, $j=1,\ldots,n$, независимы и распределены по стандартному нормальному закону $\mathrm{N}(0,1)$, то случайная величина

$$\zeta=\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_m^2}{\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_m^2+\eta_1^2+\eta_2^2+\ldots+\eta_n^2}$$ распределена по закону $\mathrm{B}\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)$.

Решение. Введем обозначения $\xi=\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_m^2$, $\eta=\eta_1^2+\eta_2^2+\ldots+\eta_n^2$. Эти случайные величины независимы и распределены по законам $\chi^2(m)$ и $\chi^2(n)$ соответственно.

$$p_{\chi^2(n)}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{-x/2}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$p_{\chi^2(m)}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}e^{-x/2}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

Тогда для $0<z<1$

$$F_\zeta(z)=P(\zeta<z)=P\left(\frac{\xi}{\xi+\eta}<z\right)=\iint\limits_{\frac{x}{x+y}<z}p_{\xi\eta}(x,y)\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_{\frac{x}{x+y}<z}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}e^{-\frac{x}{2}}\frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{-\frac{y}{2}}dxdy=\frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_0^{+\infty}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}dy\int\limits_0^{y\frac{z}{1-z}}x^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}dx.$$

.

Дифференцируем по z под знаком интеграла:

$$p_\zeta(z)=\frac{1}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int\limits_0^{+\infty}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}\left(y\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{y\frac{z}{1-z}}{2}}\frac{y}{(1-z)^2}dy=$$

Вынесем множитель с z за скобки и преобразуем степень экспоненты

$$=\frac{z^{\frac{m}{2}-1}}{2^{\frac{m+n}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty} y^{\frac{n}{2}-1}\left(y\frac{1}{1-z}\right)^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{y}{2(1-z)}}\frac{y}{(1-z)^2}dy$$

Сведём вычисление интеграла к Гамма функции, для этого домножим и разделим все на $(1-z)^{\frac{n}{2}-1}2^{\frac{m+n}{2}}$, тогда с учётом слагаемого $\frac{y}{(1-z)^2}$ и внесения множителя под знак дифференциала получаем

$$=\frac{(z)^{\frac{m}{2}-1}(1-z)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{2(1-z)}\right)^{\frac{n+m}{2}-1} e^{-\frac{y}{2(1-z)}} d\left(\frac{y}{2(1-z)}\right)=\frac{(z)^{\frac{m}{2}-1}(1-z)^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

$$=\frac{(z)^{\frac{m}{2}-1}(1-z)^{\frac{n}{2}-1}}{B\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2}\right)}$$

Пример 5

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ,

имеющей распределение Фишера: $p_{\mathrm{F}(m,n)}(x)=\begin{cases}\dfrac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mx)^{\frac{m+n}{2}}\mathrm{B}\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2}\right)}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$,

$m>0, n>0$.

Решение.

$$M\xi=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mx)^{\frac{m+n}{2}}\mathrm{B}\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2}\right)}dx=\frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{m+2}{2}-1}}{n^{\frac{n+m}{2}}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{\frac{m+n}{2}}}dx=$$

$$=\frac{m^{\frac{m}{2}}}{n^{\frac{m}{2}}\mathrm{B}\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m+2}{2}}\int_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{m}{n}x\right)^{\frac{m+2}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{\frac{(m+2)+(n-2)}{2}}}d\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{n\mathrm{B}\left(\frac{m+2}{2};\frac{n-2}{2}\right)}{m\mathrm{B}\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2}\right)}=$$

$$=\frac{n\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{m\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}=\frac{n}{m}\frac{\frac{m}{2}}{\frac{n-2}{2}}=\frac{n}{n-2}-\textit{существует при}\; n>2$$

$$M\xi^2=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}x^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mx)^{\frac{m+n}{2}}\mathrm{B}\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2}\right)}dx=\frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{\mathrm{B}\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2}\right)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{m+4}{2}-1}}{n^{\frac{n+m}{2}}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{\frac{m+n}{2}}}dx=$$

$$=\frac{m^{\frac{m}{2}}}{n^{\frac{m}{2}}\mathrm{B}\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m+4}{2}}\int_0^{+\infty}\frac{\left(\frac{m}{n}x\right)^{\frac{m+4}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{\frac{(m+4)+(n-4)}{2}}}d\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{n^2\mathrm{B}\left(\frac{m+4}{2};\frac{n-4}{2}\right)}{m^2\mathrm{B}\left(\frac{m}{2};\frac{n}{2}\right)}=$$

$$=\frac{n^2\Gamma\left(\frac{m+4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{m^2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}=\frac{n^2}{m^2}\frac{\left(\frac{m}{2}+1\right)\frac{m}{2}}{\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)}=\frac{n^2(m+2)}{m(n-2)(n-4)}$$

$$D\xi = \frac{n^2(m+2)}{m(n-2)(n-4)} - \frac{n^2}{(n-2)^2} = \frac{n^2\left((m+2)(n-2)-n(m-4)\right)}{m(n-2)^2(n-4)} = \frac{2n^2(n+m-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$$

- существует при $n > 4$

Ответ. $M\xi = \dfrac{n}{n-2}$, $n > 2$; $D\xi = \dfrac{2n^2(n+m-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, n > 4.$

Пример 6

Докажите, что сумма независимых случайных величин, распределенных по закону $\gamma_{\alpha,\lambda}$ и $\gamma_{\alpha,\nu}$ соответственно, распределена по закону $\gamma_{\alpha,\,\lambda+\nu}$.

Решение. Вычислим свертку гамма-плотностей ($x > 0$):

$$\left(\gamma_{\alpha,\lambda} * \gamma_{\alpha,\nu}\right)(x) = \int_0^x \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} y^{\lambda-1} e^{-\alpha y} \cdot \frac{\alpha^\nu}{\Gamma(\nu)} (x-y)^{\nu-1} e^{-\alpha(x-y)} dy =$$

$$= \frac{\alpha^{\lambda+\nu} e^{-\alpha x}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\nu)} \int_0^x y^{\lambda-1} \cdot (x-y)^{\nu-1} dy = \left\{ \begin{array}{c} y = xt \\ dy = xdt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{\alpha^{\lambda+\nu} e^{-\alpha x}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\nu)} \int_0^1 (xt)^{\lambda-1} \cdot (x-xt)^{\nu-1} xdt = \frac{\alpha^{\lambda+\nu} e^{-\alpha x} x^{\lambda+\nu-1}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\nu)} \int_0^1 (t)^{\lambda-1} \cdot (1-t)^{\nu-1} dt =$$

$$= \frac{\alpha^{\lambda+\nu} e^{-\alpha x} x^{\lambda+\nu-1}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\nu)} \mathrm{B}(\lambda,\nu) = \frac{\alpha^{\lambda+\nu} e^{-\alpha x} x^{\lambda+\nu-1}}{\Gamma(\lambda+\nu)} = \gamma_{\alpha,\lambda+\nu}(x).$$

Пример 7

Докажите, что если случайная величина ξ имеет плотность $\gamma_{\alpha,\lambda}(x)$, то $\eta = \alpha\xi$ имеет плотность $\gamma_{1,\lambda}(x)$. Таким образом, параметр α – несущественный (масштабный)

$$\gamma_{\alpha,\lambda}(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

$$\eta = \alpha\xi \Rightarrow y = \alpha x \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha} y = g^{-1}(y) \Rightarrow \left(g^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{\alpha}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \left(\dfrac{1}{\alpha} y\right)^{\lambda-1} e^{-\alpha \frac{1}{\alpha} y} \cdot \dfrac{1}{\alpha}, & y > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\lambda)} y^{\lambda-1} e^{-y} \cdot, & y > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases} = \gamma_{1,\lambda}$$

Пример 8

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, имеющей распределение Стьюдента с плотностью: $\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$.

При каких значениях параметра эти характеристики существуют?

Ответ. $M\xi = 0$ при $n > 1$, $M\xi^2 = D\xi = \dfrac{n}{n-2}$ при $n > 2$.

Решение.

$$M\xi^2 = 2\int_0^\infty x^2 \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx = \left\{ \begin{aligned} \frac{x^2}{n} &= t \\ x &= \sqrt{tn} \\ dx &= \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{t}} dt \end{aligned} \right\} =$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{tn}{(1+t)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{t}} dt = \frac{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{3}{2}-1}}{(1+t)^{\frac{3}{2}+\frac{n-1}{2}}} dt =$$

$$=\frac{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\mathrm{B}\left(\frac{3}{2};\frac{n-1}{2}\right)=\frac{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}=\frac{n\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}=\frac{n}{n-2}.$$