Теорвер и Матстат Севастьянова Бориса Николаевича (мат стат нет),
13/02/2025
Задача де Мере
Сколько раз нужно подбросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью хотя бы $\frac{1}{2}$ выпало 6+6?

Колмогоровский подход

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$
Ω - множество элементарных исходов,
$\mathcal{A}$ - система подмножеств Ω, является σ-алгеброй.
Элементы $\mathcal{A}$ - события.
$\omega \in \Omega$ - элементарный исход.
Если $\omega \in A$ - ω благоприятствует A
$\varnothing$ - невозможное событие.
Ω - достоверное событие
$A \subset B$ - событие A влечёт событие B
$A \backslash B$ - разность событий
$A + B = A \cup B$ - сумма собыьтий
$A \cdot B = A \cap B$

P - мера на $\mathcal{A}$, из аксиоматики колмогорова:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A+B) = P(A) + P(B)$ - A и B называются независимыми.
   Примеры:
   Классическая вероятностная модель:

$$\Omega \in X \; - \; \text{Конечное множество}$$
$$\mathcal{A} = 2^X \; - \; \text{система всех подмножеств}$$
$$P(A \in \Omega) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{Общее число исходов}}$$

   Пример, поясняющий пример:

$$\Omega = \{(i, j), \substack{i = \overline{1,6} \\ j = \overline{1,6}}\}$$

   Задача де Мере
   n - подбрасываемая

$$\Omega = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_{36}, j_{36})\}$$
$$|\Omega| = 36^n$$
$$A = \{\text{Хотя бы 1 раз выпало 6+6}\}$$
$$\overline{A} = \Omega \backslash A \ - \ \text{Противоположное событие}$$
$$\Omega = \overline{A} + A$$
$$\overline{A} = \{\text{Ни разу не выпало 6+6}\}$$
$$|\overline{A}| = 35^n$$
$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$$
$$P(\overline{A}) = \left(\frac{35}{36}\right)^n$$
$$\left(\frac{35}{36}\right)^n < \frac{1}{2}$$
$$n \ln\left(\frac{35}{36}\right) < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$n > \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{35}{36}\right)} \approx 24, \dots$$

Вычисление вероятностей в класс схеме - комбинаторная задача

Правила комбинаторики:

1. Правило суммы.

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow \#A \cup B = \#A + \#B$$

2. Правило произведения.

$$\#A \times B = \#A \cdot \#B$$

1. Перестановки в множестве с мощностью n:

$$P_n = n!$$

2. Размещения на m мест в множестве с мощностью n:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

3. Сочетания из n элементов по m мест

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k+1}$$

$$\begin{matrix} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{matrix}$$

4. Имеются элементы n типов

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$$
$$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n}$$

5. Размещения с повторениями

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

6. Сочетания с повторениями

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Пример:

$$\text{Имеется n неразличимых шаров, m различимых ящиков, так чтобы все ящики были заняты}$$
$$n \le m$$
$$\cdot\cdot\cdot|\cdot\cdot|\cdot|\cdot\cdot\cdot\cdot|\cdot$$
$$\text{n-1 граница разделит точки на n частей}$$

Модель геометрической вероятности

$$\Omega \ - \ \text{Измеримая геометрическая фигура} \to \exists\, \mathrm{mes}(\Omega)$$
$$\mathcal{A} \ - \ \text{измеримые подмножества}$$
$$P(A \in \mathcal{A}) = \frac{\mathrm{mes}(A)}{\mathrm{mes}(\Omega)}$$

Основные теоремы вероятности

7. $A \subset B \Rightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$ (См 3 аксиому и определение разности)
8. $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$ - P - это мера
9. $\forall A \ \ 0 \le P(A) \le 1$ т.к. $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \le P(\Omega) = 1$
10. Теорема сложения: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ - это мера
11. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ (см 1 св-во)
12. Теорема непрерывности: $B_{n+1} \subset B_n \subset \dots \subset B_2 \subset B_1 \wedge \cap_i B_i = \varnothing \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$ - это мера

20/02/2025

Примеры вероятностных моделей.

Класс модель $\to$ Гипергеометрическая модель

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω - конечное множество

$\mathcal{A}$ - все подмножества

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

n_1 - предметов 1 типа

n_2 - предметов 2 типа

Выберем m прдеметов без возвращения $m \leq n_1, m \leq n_2$

A_k - среди вынутых предметов k $-$ 1-го типа, $(m-k)$ $-$ 2-го типа.

$|A_k| = C_{n_1}^k - C_{n_2}^{m-k}$

$C_{n_1}^k$ - выбрано предметов 1 типа

$$P(A_k) = \frac{C_{n_1}^k C_{n_2}^{m-k}}{C_{n_1+n_2}^m}$$

Обобщение

Имеются предметы l типов в количествах $n_1, n_2, \dots, n_l$ выберем m предметов.

$$P(A_{k_1, k_2, \dots, k_l}) = \frac{C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} \dots C_{n_l}^{k_l}}{C_{n_1+n_2+\dots+nl}^m}$$

Модель геометрических вероятностей.

Геометрическая вероятность.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω - измеримое множество

$\mathcal{A}$ - измеримые подмножества

$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

Пример:

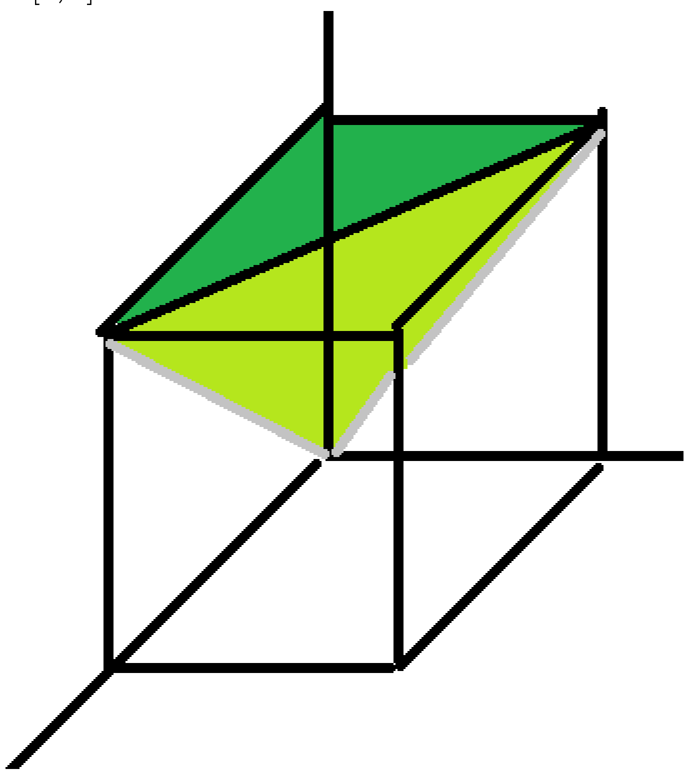
Датчик случаёных чисел.

Запускаем его 3 раза. Получаем 3 числа: x, y, z $\in [0, 1]$

$P(z > x + y) = ?$

$\omega = (x, y, z)$ $-$ точка

$\Omega = [0,1]^3$



$$P(z > x + y) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}$$

Парадокс Бертрана

В круге наугод выбирается хорда x. $P(x > R\sqrt{3}) =?$

Парадокс в том, что в зависимости от способа выбора случайной хорды, ответ меняется.

Первый способ:

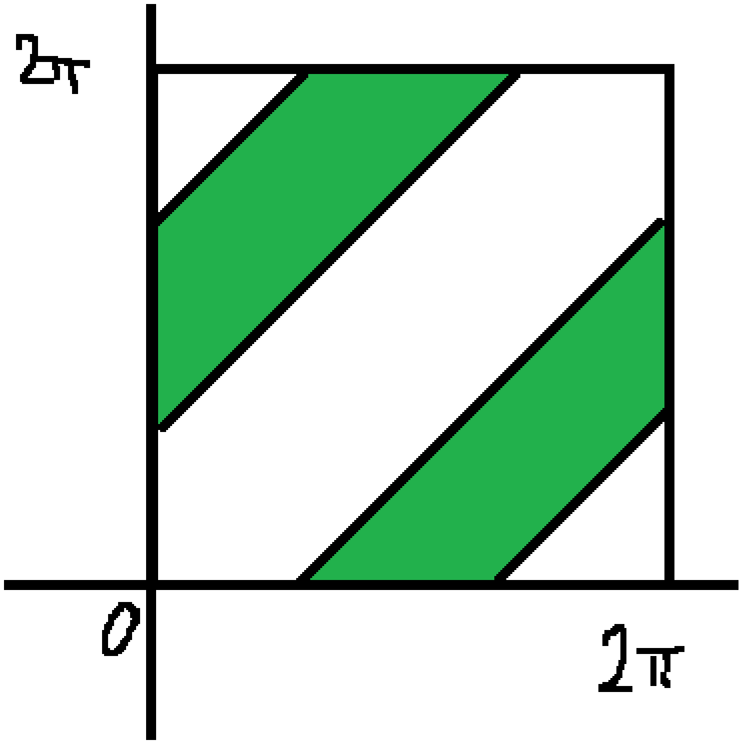
A - произвольная точка.

B - произвольная точка

$x = [A, B]$

$\Omega = [0, 2\pi]^2$

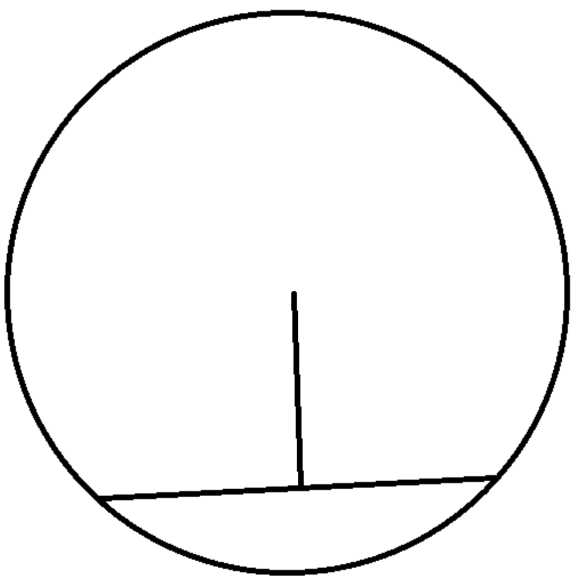
$$\frac{2\pi}{3} < |x - y| < \frac{4\pi}{3}$$

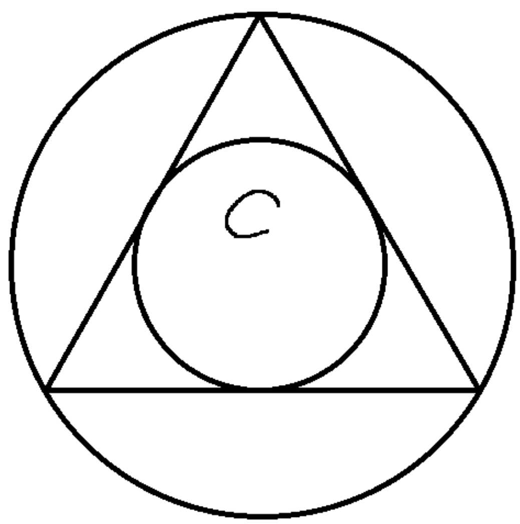


$$P(x > R\sqrt{3}) = \frac{S(C)}{S(\Omega)} = \frac{S(C)}{(2\pi)^2}$$

Второй способ:

Хорда отождествляется с её серединой





$$P(C) = \frac{S(C)}{S(\Omega)} = \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{(2\pi)^2} = \frac{1}{4}$$

Третий способ:

Хорда на диаметре.

Абсолютно непрерывная вероятностная модель

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$
$\Omega = \mathbb{R}$
$\mathcal{A} = B$ - борелевская σ-алгебра

1. $P(A) = \int_A p(x)dx$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$
3. цел: $p(x) \geq 0$
   Пример: гауссовская плотность

$$P_{a.\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{a,\sigma}(x)dx = \left| \begin{matrix} \frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = y \\ dx = dy\sigma\sqrt{2} \end{matrix} \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{8\pi}\sigma} e^{-y^2} \sigma\sqrt{2}dy = 1$$

$$\int_{b_1}^{b_2} p_{a,\sigma}(x)dx = \left| \begin{matrix} \frac{x-a}{\sigma} = y \\ dx = \sigma dy \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{b_1-a}{\sigma}}^{\frac{b_2-a}{\sigma}} e^{-y^2}dy = \varphi\left(\frac{b_2-a}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{b_1-a}{\sigma}\right)$$

Условные вероятности.

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Пояснение: n опытов, фиксируем события A.
n_A - наступило A
n_B - наступило B
n_{AB} - наступило A и B

$$\frac{n_A}{n} \approx P(A)$$
$$\frac{n_{AB}}{n_B} \approx P(A|B)$$
$$\frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}} \approx \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Формула умножения

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Пример
В урне имеется a белых и b чёрных шаров. Вынимаем 2 шара. Вычисляем вероятность того, что оба вынутых шара белые.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{C_a^2}{C_{a+b}^2} = \frac{a! \cdot 2! \cdot (a+b-2)!}{(a-2)! \cdot 2!(a+b)!} = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$

Событие равносильно следующей совокупности событий:

Достали белый шар, а потом достали второй белый шар

$$P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1}$$

Условное вероятностное пространство
$B, P(B) > 0$
$(\Omega, \mathcal{A}, P) \to (B, \mathcal{A}_B, P_B)$
$\mathcal{A}_B = \mathcal{A} \cap B$ - сужение алгебры $\mathcal{A}$ на B.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} \geq 0$$

$$P_B(B) = 1$$

$$A_1 \cap A_B = \varnothing$$
$$P_B(A_1 + A_2) = \frac{P((A_1+A_2)B)}{P(B)} = \frac{P(A_1B+A_2B)}{P(B)} = \frac{P(A_1B)+P(A_2B)}{P(B)} = P_B(A_1) + P_B(A_2)$$

Теорема умножения
$P(A_1, A_2, \dots, A_n) > 0 \implies$

$$P(A_1, A_2, \dots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_{n-1} \dots A_3A_2A_1)$$

Формулы полной вероятности и Байеса

$$H_1, H_2, \dots, H_l \text{ - полная группа событий} \Leftrightarrow$$
$$P(H_i) > 0$$
$$H_i \cap H_j = \delta_{ij}$$
$$\sum_i H_i = \Omega$$

Теорема о полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{l} P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

$$A = A\Omega = A \sum_i H_i = \sum_i AH_i$$

Пример:
5 белых и 3 черных шара
вынимаем 1 шар и перекладываем в корзину с 2 белыми и 2 черными шарами
Вынимаем шар, какой цвет?

$$H_1 \text{ - переложен белый}$$
$$H_2 \text{ - переложен чёрный}$$
$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{21}{40}$$

$$\mathcal{H} = \{H_i\} \text{ - полная группа событий}$$
$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{i=1}^{l} P(A|H_i) \cdot P(H_i)}$$
$$P(H_i) \text{ - априорные вероятности}$$
$$P(H_i|A) \text{ - апостериорные вероятности}$$

МК1

$$7 \text{ белых, } 5 \text{ черных, } 4 \text{ красных}$$
$$7 + 5 + 4 = 16$$
$$\frac{4}{16} + \frac{12}{16} \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{15} < \frac{1}{2}$$
$$\frac{5}{16} + \frac{11}{16} \cdot \frac{5}{15} = \frac{15}{48} + \frac{11}{48} = \frac{26}{48} > \frac{24}{48}$$

06/03/2025

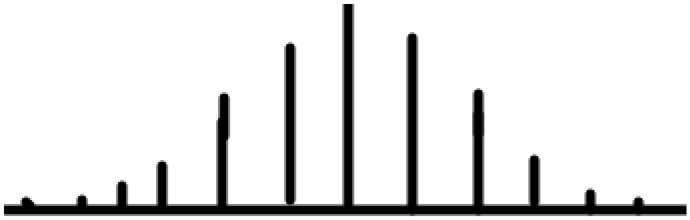
Предельные теоремы в схеме Бернулли

Схема Бернулли

$$\omega = (0, 1, \ldots, 0, 1) \text{ - последовательность 0 и 1}$$
$$P(\omega) = p^k (1-p)^{n-k}, \ p \text{ - вероятность}$$
$$p_n^k = P(\underbrace{\mu}_{\text{число успехов}} = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$
$$p_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$\text{Пример: 3 шара с возвращениями}$$

Наиболее вероятное число успехов

$$k : p_n^k = \max$$
$$q = 1 - p$$
$$p_n^k \ \text{vs} \ p_n^{k+1} \Leftrightarrow \frac{n!}{p!(n-k)!} p^k q^{n-k} \ \text{vs} \ \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} q^{n-k-1} \Leftrightarrow$$
$$k + q \ \text{vs} \ np$$
$$1) \ k + 1 < np \Rightarrow k + n < np \Rightarrow p_n^k < p_n^{k+1}$$
$$2) \ k > np \Rightarrow k + q > np \Rightarrow p_n^k > p_n^{k+1}$$



Пример:

$$n_1 \quad - \quad p_1 = 0.8 \quad \text{- вероятность попадания первого}$$
$$n_2 \quad - \quad p_2 = 0.6 \quad \text{- вероятность попадания второго}$$

Одновременно производят 15 выстрелов. Найти вероятное число залпов, когда оба выстрела попадут.

$$p = p_1 p_2 = 0.48$$
$$np = 15 \cdot 0.48 = 7.2$$
$$p_n^k < p_m^{k+1}, \;\; k+1 < np \Rightarrow k = \overline{0,7}$$
$$p_n^k > p_n^{k+1}, \;\; k > np \Rightarrow k = \overline{8,15}$$
$$p_{15}^7 \;\; \text{vs} \;\; p_{15}^8$$

Теорема 1 (локальная Муавра-Лапласа)
Пусть в схеме Бернулли $\sqrt{npq} \gg 1$, тогда

$$pn^k \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

равномерно по $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \in [a,b]$

$$p_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

$k = np + x\sqrt{npk}$ - бесконечно большая

$n - k = nq - x\sqrt{npk}$ - бескольнечно большая

$$p_n^k \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi(n-k)}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} p^k q^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{(np)^k (nq)^{n-k}}{k^k (n-k)^{n-k}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} = A$$

$$\ln A = -k \ln\left(\frac{np + x\sqrt{npq}}{np}\right) - (n-k)\ln\left(\frac{nq - x\sqrt{npk}}{nq}\right) =$$

$$= -k \ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (n-k)\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \approx$$

$$\approx (np + x\sqrt{npk})\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}x^2 \frac{q}{np} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) -$$

$$\left(nq - x\sqrt{npq}\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2}{2}\frac{p}{nq} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) =$$

$$= \cancel{-x\sqrt{npq}} - x^2 q + \frac{1}{2}x^2 q + o(1) + \cancel{x\sqrt{npq}} + \frac{x^2}{2} - x^2 p + o(1) =$$

$$= -\frac{x^2}{2}(q+p) + o(1) = -\frac{x^2}{2} + o(1)$$

$$\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} = \sqrt{\frac{n}{(np + x\sqrt{npq})(np - x\sqrt{npk})}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\left(p + x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\left(q - x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{npk}}$$

Теорема 2 (интегральная теорема Муавра-Лапласа)

$$\sum_{k=k_1}^{k_2-1} p_n^k = \int_{\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

27/03/2025

Коллоквиум: 19.04 8:30 922 л.

Характеристика случайного вектора:

$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_m \end{pmatrix}$

$M\vec{\xi} = \begin{pmatrix} M\xi_1 \\ M\xi_2 \\ \dots \\ M\xi_m \end{pmatrix}$ - вектор математического ожидания

Ковариационная матрица:

$$\Sigma = (\sigma_{ij})$$
$$\sigma_{ij} = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = M(\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j)$$
$$\sigma_{ii} = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_i) = M * \xi_i - M\xi_i)^2$$
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$
$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$$
$$\text{Вычисление } \operatorname{cov}(\xi, \eta):$$
$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \sum_k \sum_j (x_k - M\xi)(y_j - M\eta) \cdot P\begin{pmatrix} \xi = x_k \\ \eta = y_j \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta = \sum_k \sum_j x_k \cdot y_j P(\xi = x_k, \eta = y_j) - M\xi M\eta$$

Свойства ковариации:

1. $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\eta, \xi)$
2. $\operatorname{cov}(\alpha\xi, \eta) = \alpha \operatorname{cov}(\xi, \eta)$
3. $\operatorname{cov}(\xi_1 + \xi_2, \eta) = \operatorname{cov}(\xi_1, \eta) + \operatorname{cov}(\xi_2, \eta)$
4. $\operatorname{cov}(\xi, \xi) \geq 0$
   $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = 0 \Leftrightarrow P(\xi = M\xi) = 1$

Доказательство:

$$\begin{gathered} \operatorname{cov}(\xi_1 + \xi_2, \eta) = M(\xi_1 + \xi_2 - M(\xi_1 + \xi_2))(\eta - M\eta) = \\ = M((\xi_1 - M\xi_1) + (\xi_2 - M\xi_2))(\eta - M\eta) = \\ = M(\xi_1 - M\xi_1)(\eta - M\eta) + M(\xi_2 - M\xi_2)(\eta - M\eta) = \\ = \operatorname{cov}(\xi_1, \eta) + \operatorname{cov}(\xi_2, \eta) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \eta \geq 0 \\ M\eta = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P(\eta = 0) = 1 \Bigg) \Rightarrow (D(\eta) = 0 \Rightarrow P(\eta = 0) = 1) \\ 0 = M\eta = \sum_{\omega \in \Omega} \underbrace{\eta(\omega)}_{\geq 0} \underbrace{P(\omega)}_{\geq 0} \Rightarrow (\eta(\omega) \neq 0 \Rightarrow P(\omega) = 0) \Rightarrow \\ P(\eta > 0) = 0 \Rightarrow P(\eta = 0) = 1 \end{gathered}$$

Пример:

Имеется урна, в которой m_1 белых шаров, m_2 чёрных, m_3 красных.

Из этой урны с возвращением вынимается n шаров.

ξ - число белых шаров среди вынутых
η - число черных шаров среди вынутых

$$P(\xi = k, \eta = j)$$

Элементарный исход - это последовательность длины m, где на каждом месте находится или белый, или черный, или красный шар
(, , , , ...)
m

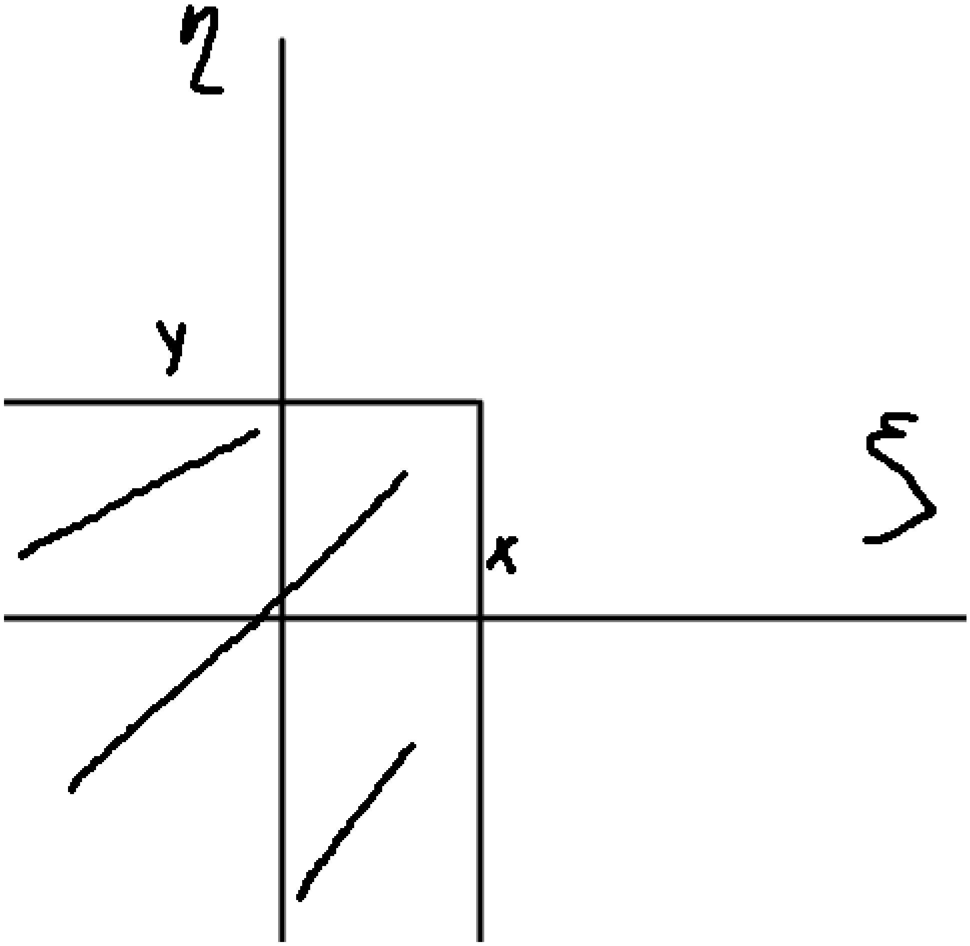
$$\alpha = \frac{N_1}{N_1 + N_2 + N_3}$$
$$\beta = \frac{N_2}{N_1 + N_2 + N_3}$$
$$\gamma = \frac{N_3}{N_1 + N_2 + N_3}$$
$$P(\omega) = \alpha^k \cdot \beta^j \cdot \gamma^{m-k-j} \cdot \underbrace{C_m^k}_{\text{выбираем места для белых}} \cdot \underbrace{C_{m-k}^j}_{выбираемчерные} = \frac{m!}{k!j!(m-k-j)!}\alpha^k \beta^j \gamma^{(m-k-j)}$$

Находим характеристики $M\xi, M\eta, D\xi, D\eta, \operatorname{cov}(\xi, \eta)$

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m - \text{количество шаров при } m \text{ вытаскиваниях}$$
$$M\xi = M\xi_1 + M\xi_2 + \ldots + M\xi_m = m\alpha$$
$$\xi_i : \begin{cases} 1, \text{ с вероятностью } \alpha \\ 0, 1 - \alpha \end{cases}$$
$$\eta = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_m$$
$$M\eta = m\beta$$
$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_m, \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_m) = \sum_{i=j=1}^{m} \operatorname{cov}(\xi_i, \eta_i) + \sum_{i \neq j} \operatorname{cov}(\xi_i, \eta_j) =$$
$$\operatorname{cov}(\xi_i, \eta_i) = M\xi_i\eta_i - M\xi_i M\eta_i = -\alpha\beta$$
$$P(\xi_i\eta_i = 0) = 1$$
$$i \neq j: \operatorname{cov}(\xi_i, \eta_j) = M\xi_i\eta_j - M\xi_i M\eta_j = \alpha\beta - \alpha\beta = 0 \xi_i\eta_j = \begin{cases} 1, \alpha\beta \\ 0, 1 - \alpha\beta \end{cases}$$
$$P(\xi_i = 1, \eta_j = 1) = P(\xi_i = 1)P(\eta_j = 1)$$
$$= -m\alpha\beta$$

Закон распределения случайного вектора
Функция распределения

$$F_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_m < x_m)$$
$$m = 2: \quad F_{\xi\eta}(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$$



Свойства:

$$0 \leq F_{\xi\eta}(x, y) \leq 1$$
$$\lim_{x \to -\infty} F_{\xi,\eta}(x, y) = 0$$
$$\lim_{\eta \to -\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = 0$$
$$\lim_{x,y \to +\infty} F_{\xi\eta}(x, y) = 1$$
$$\lim_{x \to \infty} F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\eta}(y)$$
$$F_{\xi\eta}(x, y) \text{ непрерывна слева по каждому аргументу}$$
$$\forall h_1 \geq 0 \forall h_2 \geq 0 \Delta_{h_1 h_2} F_{\xi\eta}(x, y) \geq 0$$
$$\Delta_{h_2} F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi\eta}(x, y + h_2) - F_{\xi,\eta}$$
$$\Delta_{h_1 h_2} F_{\xi\eta}(x, y) = F_{\xi\eta}(x + h_1, y + h_2) - F_{\xi\eta}(x + h_1, y) - F_{\xi\eta}(x, y + h_2) + F_{\xi\eta}(x, y)$$

Последнее можно представить графически - утверждение эквивалентно тому, что площадь прямоугольника со сторонами h_1 и h_2 > 0.

Если свойства от 1 до 6 выполняются, то любая функция может быть представлена как функция распределения случайной величины.

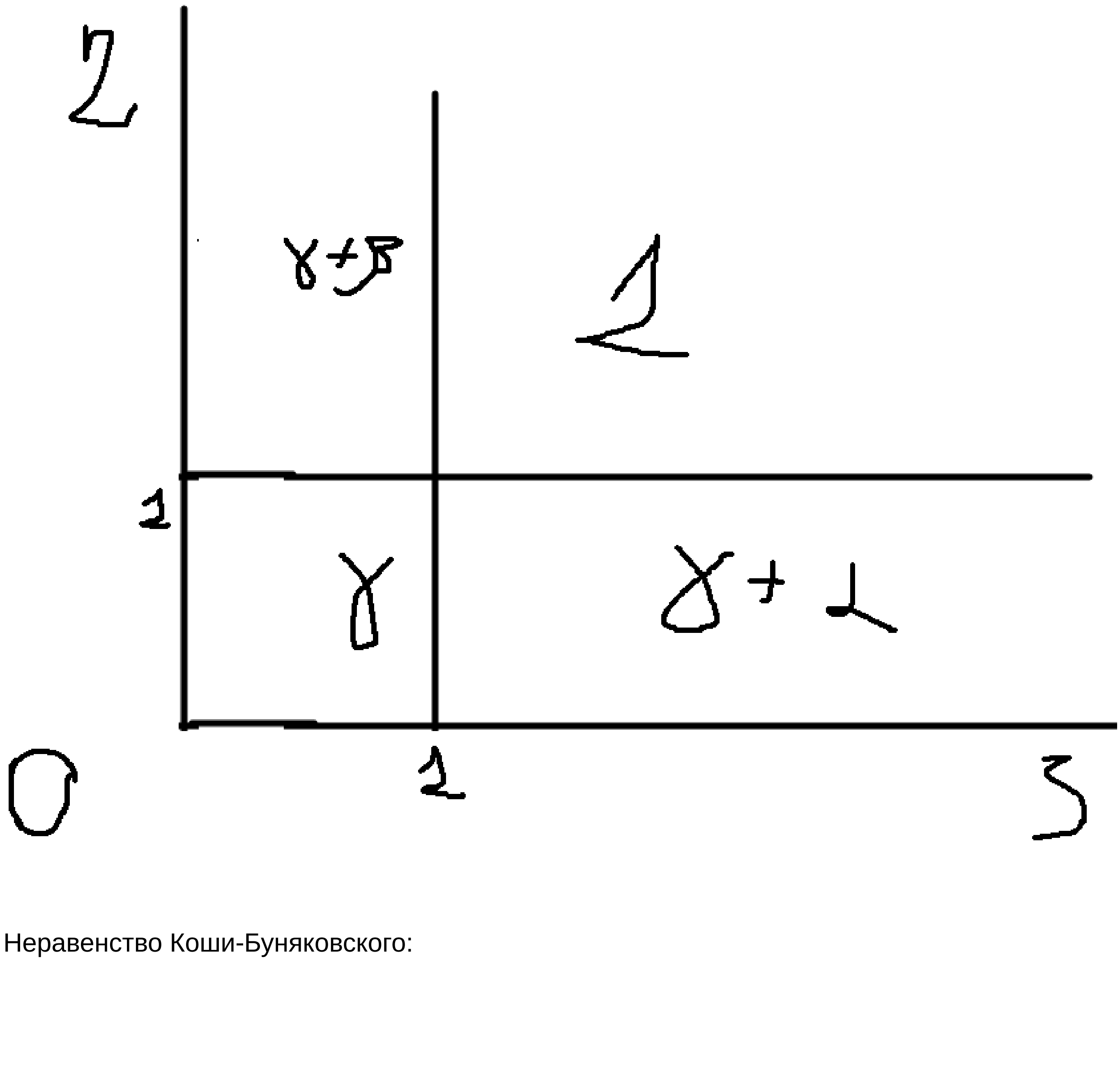
Пример:
Прошлая схема, вытаскиваем 1 шар

ξ - число белых шаров (или 0, или 1)
η - число черных

$\xi \backslash \eta$	**0**	**1**
0	γ	β
1	α	0

$$F_{\xi\eta}(x, y) = P(\xi < x, \eta < y)$$

График:



Неравенство Коши-Буняковского:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) \le \sqrt{\operatorname{cov}(\xi,\xi)}\sqrt{\operatorname{cov}(\eta,\eta)} = \sqrt{D_\xi D_\eta} \Rightarrow$$
$$-1 \le \frac{\operatorname{cov}(\eta,\xi)}{\sqrt{D_\xi}\sqrt{D_y}} \le 1 - \text{ коэффициент корреляции}$$
$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0 - \ \xi \text{ и } \eta \text{ некоррелированные величины}$$
$$\text{Если } \xi \text{ и } \eta \text{ некоррелированные, то}$$
$$D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta + \ \cancelto{0}{2\operatorname{cov}(\xi,\eta)}$$

Независимость случайных величин

Случайные величины ξ и η независимые, если

$$\forall k,j\ P(\xi = x_k, \eta = y_j) = P(\xi = x_k)\cdot P(\eta = y_j)$$

или

Разбиения

$$\Omega = (\xi = x_1) + (\xi = x_2) + \ldots + (\xi = x_m)$$
$$\omega = (\eta = y_1) + (\eta = y_2) + \ldots + (\eta = y)l$$

или

Алгебры $\mathcal{A}_\xi$ и $\mathcal{A}_\eta$ независимы

$$P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = P(\xi \in B_1)P(\eta \in B_2)$$

а значит

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x)P(\eta < y)$$
$$F_{\xi\eta}(x,y) = F_\xi(x)\cdot F_\eta(y)$$

Теорема

$$(F_{\xi\eta}(x,y) = F_\xi(x)\cdot F_\eta(y)) \Rightarrow \xi \text{ и } \eta \text{ независимы}$$

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(x_i \le \xi < x_i + \varepsilon, y_j \le \eta < y_j + \varepsilon) =$$
$$= F_{\xi\eta}(x_i+\varepsilon, y_j+\varepsilon) - F_{\xi\eta}(x_i+\varepsilon, y_j) - F_{\xi\eta}(x_i, t_j+\varepsilon) + F(x_i,y_j) =$$
$$F_\xi(x_i+\varepsilon)F_\eta(y_j+\varepsilon) - F_\xi(x_i+\varepsilon)F_\eta(y_j) - F_\xi(x)F_\eta(y_j+\varepsilon) + F_\xi(x)F_\eta(y_j) =$$
$$= (F_\xi(x_i+\varepsilon) - F_\xi(x_i))(F_\eta(y_j+\varepsilon) - F_\eta(y_j)) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j)$$

Если ξ и η независимы, то они некоррелированны.

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \sum_i\sum_j (x_i - M\xi)(y_j - M\eta)\cdot P(\xi = x_i, \eta = y_j) =$$
$$= \sum_i\sum_j (x_i - M\xi)P(\xi = x)\cdot(y_j - M\eta)P(\eta = y_j) =$$
$$= \sum_i (x_i - M\xi)P(\xi = x)\cdot\sum_j (y_j - M\eta)P(\eta = y_j) =$$
$$= (M\xi - M\xi)(M\eta - M\eta) = 0$$

Пример

$\xi\backslash\eta$	**-1**	**0**	**1**	$P(\xi = i)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$P(\eta = j)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{5}{12}$	1

$P(\xi = 1, \eta = 0) = 0 \neq P(\xi = 1)P(\eta = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$
ξ и η зависимы

$$M\xi\eta = 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + (-1)(-1) \cdot \frac{1}{4} = 0$$
$$M\xi = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$$
$$M\eta = (-1) \cdot \frac{5}{12} + 0 \cdot \frac{2}{12} + 1 \cdot \frac{5}{12} = 0$$

Зависимы и некоррелированы
Теорема о свёртке
Если ξ и η независимы, то $P(\xi + \eta = k) = \sum_j P(\xi = j)P(\eta = k - j)$
$P(\xi + \eta = k) = \sum_j P(\xi + \eta = k, \xi = j)$

Пусть есть 2 Пуассоновские величины
$\xi \sim P(\lambda)$
$\eta \sim P(\mu)$
$P(\xi + \eta = k) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j, \eta = k - k) = \sum_{j=0}^{k} P(\xi = j)P(\eta = k - j)$

$$= \sum_{k=0}^{k} \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!} e^{-\mu} k! = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda + \mu)^k}{k!} \sim P(\lambda + k)$$

#конец