Домашняя работа №1-1. Погрешности при решении СЛАУ

Погрешности при решении приближённо заданных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Рассмотрим заданную без погрешностей СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей:

$$\boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} = {}^{>}\boldsymbol{b} \quad \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j = b^i,\ i = \overline{1,n}\Big), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{A} = (a_j^i)_n^n \in \mathrm{GL}(\mathbb{R};n)$ и ${}^{>}\boldsymbol{b} = [b^1,\dots,b^n\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^n$ – матрица и вектор-столбец правой части СЛАУ, соответственно, и ${}^{>}\boldsymbol{x} = [x^1,\dots,x^n\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^n$ – неизвестное решение этой СЛАУ в виде соответствующего вектора-столбца.

Понятия подчинённых норм матриц и векторов позволяют оценить погрешности, возникающие при численном решении СЛАУ. Здесь предполагается, что для векторов и матриц используются чебышевские нормы, т.е.

$$\|{}^{>}\boldsymbol{b}\| = \max\{|b^1|,\dots,|b^n|\},\ \|\boldsymbol{A}\| = \max\{\sum_{j=1}^{n}|a_j^i| : i = \overline{1,n}\}.$$

Определение 1.1 (числа обусловленности матрицы). Число $cond(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$ называют *числом обусловленности матрицы* $\boldsymbol{A} \in \mathrm{GL}(\mathbb{R};n)$.►

Пусть правая часть системы (1) задана с некоторой погрешностью. Тогда наряду со СЛАУ (1) рассматривается приближённая СЛАУ:

$$\boldsymbol{A}({}^{>}\boldsymbol{x} + {}^{>}\Delta\boldsymbol{x}) = {}^{>}\boldsymbol{b} + {}^{>}\Delta\boldsymbol{b}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{A}\cdot{}^{>}\Delta\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{b} = [\Delta b^1,\dots,\Delta b^n\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^n$ – погрешность в правой части СЛАУ (1).

Теорема 1.1 (*об относительной погрешности в решении приближённой СЛАУ*).

Пусть правая часть невырожденной матрицы СЛАУ (1) получила такое приращение ${}^{>}\Delta\boldsymbol{b}$, что $\dfrac{\|\Delta\,{}^{>}\boldsymbol{b}\|}{\|{}^{>}\boldsymbol{b}\|} < 1$. Тогда оценка для относительной погрешности $\dfrac{\|{}^{>}\Delta\boldsymbol{x}\|}{\|{}^{>}\boldsymbol{x}\|}$ решения СЛАУ (2) удовлетворяет неравенству

$$\frac{\|{}^{>}\Delta\boldsymbol{x}\|}{\|{}^{>}\boldsymbol{x}\|} \le cond(\mathbf{A})\frac{\|\Delta\,{}^{>}\boldsymbol{b}\|}{\|{}^{>}\boldsymbol{b}\|}. \blacktriangleright \tag{3}$$

Замечание 1 (*о числе обусловленности невырожденной квадратной матрицы*)

Число обусловленности $cond(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$ определяет, насколько погрешность входных данных может повлиять *на относительную погрешность приближённого решения* СЛАУ (1).

Всегда $cond(\boldsymbol{A}) \ge 1$. Действительно: $1 = \|\mathbf{E}\| = \|\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}\| \le \|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{A}^{-1}\| = cond(\boldsymbol{A})$.

Если $cond(\boldsymbol{A}) \sim 10$, то ошибки входных данных слабо сказываются на приближённом решении и СЛАУ (2) считается *хорошо обусловленной*.

Если $cond(\boldsymbol{A}) > 10^2$, то СЛАУ (2) является *плохо обусловленной*.

Согласно СЛАУ (2), справедливы неравенства:

$$\vec{b} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} \Rightarrow \| \vec{b} \| \le \| \boldsymbol{A} \| \cdot \| \vec{x} \| \Rightarrow \| \vec{x} \| \ge \frac{\| \vec{b} \|}{\| \boldsymbol{A} \|};$$

$$\vec{\Delta x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \Delta \vec{b} \Rightarrow \| \vec{\Delta x} \| \le \| \boldsymbol{A}^{-1} \| \cdot \| \Delta \vec{b} \|.$$

Из этих неравенств для относительной погрешности $\frac{\| \vec{\Delta x} \|}{\| \vec{x} \|}$ решения СЛАУ (2) получаем:

$$\frac{\| \vec{\Delta x} \|}{\| \vec{x} \|} \le \| \boldsymbol{A} \| \cdot \| \boldsymbol{A}^{-1} \| \cdot \frac{\| \Delta \vec{b} \|}{\| \vec{b} \|} = cond(\mathbf{A}) \frac{\| \Delta \vec{b} \|}{\| \vec{b} \|}. \tag{4}$$

Неравенство (4) ещё раз подчёркивает, что число обусловленности $cond(\boldsymbol{A}) = \| \boldsymbol{A} \| \cdot \| \boldsymbol{A}^{-1} \|$ определяет, насколько относительная погрешность в правой части СЛАУ влияет на относительную погрешность в решении приближённой СЛАУ.►

Замечание 2 (*об овражности симметричной положительно определённой матрицы*)

Как было показано ранее, евклидова норма матрицы $\boldsymbol{A}$ имеет вид $\| \boldsymbol{A} \| = \sqrt{\rho_{\mathrm{Spr}}({}^T\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A})}$.

Если квадратная матрица симметрична, т.е. ${}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, и положительно определена, то

$$\| \boldsymbol{A} \| = \sqrt{\rho_{\mathrm{Spr}}({}^T\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A})} = \sqrt{\rho_{\mathrm{Spr}}(\boldsymbol{A}^2)} = \sqrt{\lambda^2_{\max}(\boldsymbol{A})} = \lambda_{\max}(\boldsymbol{A});$$

$$\max(\mathrm{Spr}(\boldsymbol{A}^{-1})) = \frac{1}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{A})}, \; {}^T\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1};$$

$$\| \boldsymbol{A}^{-1} \| = \sqrt{\rho_{\mathrm{Spr}}({}^T\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A})} = \sqrt{\rho_{\mathrm{Spr}}(\boldsymbol{A}^{-2})} = \sqrt{\lambda^{-2}_{\min}(\boldsymbol{A}^{-1})} = \frac{1}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{A})}.$$

Отсюда получаем для евклидова числа обусловленности $cond_e(\boldsymbol{A}) = \| \boldsymbol{A} \| \cdot \| \boldsymbol{A}^{-1} \|$ симметричной и положительно определённой матрицы $\boldsymbol{A}$ вид:

$$cond_e(\boldsymbol{A}) = \| \boldsymbol{A} \| \cdot \| \boldsymbol{A}^{-1} \| = \frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{A})}.►$$

ЗАДАНИЕ 1.1

Дана СЛАУ (N – номер студента в журнале, $\alpha = (n-50)/100$, где n – номер группы):

$$\begin{cases} 200(1+0{,}5N+\alpha)x^1 + 200(1+0{,}5N)x^2 + 200(1+0{,}5N)x^3 = 200(3+1{,}5N+\alpha); \\ 200{,}1\cdot(1+0{,}5N)x^1 + 199{,}9\cdot(1+0{,}5N+\alpha)x^2 + 200(1+0{,}5N)x^3 = 200(3+1{,}5N+\alpha); \\ 199{,}9\cdot(1+0{,}5N)x^1 + 200\cdot(1+0{,}5N)x^2 + 200{,}1\cdot(1+0{,}5N+\alpha)x^3 = 200(3+1{,}5N+\alpha). \end{cases}$$

Предполагается, что ошибка в матрице этой СЛАУ достаточно мала и относительная ошибка в её правой части равна 0,01. Приближённая СЛАУ имеет вид:

$$\begin{cases} 200(1+0{,}5N+\alpha)x^1 + 200(1+0{,}5N)x^2 + 200(1+0{,}5N)x^3 = 200(3+1{,}5N+\alpha)(1+0{,}01); \\ 200{,}1\cdot(1+0{,}5N)x^1 + 199{,}9\cdot(1+0{,}5N+\alpha)x^2 + 200(1+0{,}5N)x^3 = 200(3+1{,}5N+\alpha)(1-0{,}01); \\ 199{,}9\cdot(1+0{,}5N)x^1 + 200\cdot(1+0{,}5N)x^2 + 200{,}1\cdot(1+0{,}5N+\alpha)x^3 = 200(3+1{,}5N+\alpha)(1+0{,}01). \end{cases}$$

Требуется найти число обусловленности матрицы рассматриваемой СЛАУ и относительную погрешность в решении приближённой СЛАУ. Затем, прокомментировать получившиеся результаты.►

ЗАДАНИЕ 1.2

Исходные данные в настоящем задании определяются параметрами, приведёнными в *таблице 1*, где вариант N – номер фамилии студента в журнале и $\alpha = (55 - n)/100$, где n – номер группы.

Таблица 1

N	$\lambda + \alpha$	F	a	b
1	0,5	sin	π/4	3π/4
2	-0,5	sin	π/4	3π/4
3	0,4	cos	-π/4	π/4
4	-0,4	cos	-π/4	π/4
5	0,4	sin	π/4	3π/4
6	-0,4	sin	π/4	3π/4
7	0,3	cos	-π/4	π/4
8	-0,3	cos	-π/4	π/4
9	0,5	arctg	0	1
10	-0,5	arctg	0	1
11	0,5	th	0	1
12	-0,5	th	0	1
13	0,4	arctg	0	1
14	-0,4	arctg	0	1
15	0,3	th	0	1
16	-0,3	th	0	1
17	0,3	arctg	0	1
18	-0,3	arctg	0	1
19	0,3	sin	π/4	3π/4
20	-0,3	sin	π/4	3π/4
21	0,5	cos	-π/4	π/4
22	-0,5	cos	-π/4	π/4
23	0,4	arctg	-1	0
24	-0,4	arctg	-1	0

Согласно этой таблице, на отрезке $[a;b]$ выбрана центрально равномерная сетка с десятью узлами $s_1 = \tau_1 = a + \dfrac{h}{2},\ s_2 = \tau_2 = \tau_1 + h,\ s_3 = \tau_3 = \tau_2 + h, \ldots, s_{10} = \tau_{10} = \tau_9 + h$, имеющая шаг $h = \dfrac{b-a}{10}$.

Требуется решить приближённую СЛАУ:

$$(\boldsymbol{E} + \lambda \boldsymbol{A})\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}} + \vec{\Delta \boldsymbol{b}}, \tag{5}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ – ненулевое число (см. *таблицу 1*), $\boldsymbol{E} \in \mathrm{GL}(\mathbb{R};10)$ – единичная матрица, $\boldsymbol{A} = (a_j^i)_{10}^{10} \in \mathrm{GL}(\mathbb{R};10)$ и $\vec{\boldsymbol{b}} = [b^1, \ldots, b^{10}\rangle \in \vec{\mathbb{R}}^{10}$ – матрица и вектор, соответственно, которые с помощью *таблицы 1* определяются соотношениями:

$$a_j^i = F(s_i \cdot \tau_j)\frac{b-a}{10} \text{ для } i, j = \overline{1,10}, \quad \vec{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{E} + \lambda \boldsymbol{A}) \cdot \vec{\boldsymbol{x}}_* \text{ и } \vec{\boldsymbol{x}}_* = [1,1,\ldots,1\rangle \in \vec{\mathbb{R}}^{10}.$$

Согласно СЛАУ (5), приближённая СЛАУ определяется только погрешностью ${}^{>}\Delta\boldsymbol{b} = [\Delta b^1, \ldots, \Delta b^{10}\rangle = 0,01 \cdot [b^1, -b^2, b^3, -b^4, b^5, -b^6, b^7, -b^8, b^9, -b^{10}\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{10}$ в правой части СЛАУ (5).

Требуется найти число обусловленности матрицы рассматриваемой СЛАУ и относительную погрешность в решении приближённой СЛАУ (5). Затем, прокомментировать получившиеся результаты. Коме того, найти решение СЛАУ, которая получается из СЛАУ (5) делением каждого её i-го уравнения ($i = \overline{1,10}$) на число $b^i + \Delta b^i$. После этого сравнить абсолютную погрешность в решении получившейся СЛАУ с абсолютной погрешностью в решении приближённой СЛАУ (5).►