Колесников, Никитин,

Солодкая Елена Викторовна Всё решает экзамен.

Д31	Д32	Д33	Д34

11/02/25

Динамика материальной точки

Основное уравнение динамики точки (.) в инерциальной системе отсчёта:

$$ec{a}=rac{ec{F}}{m}$$

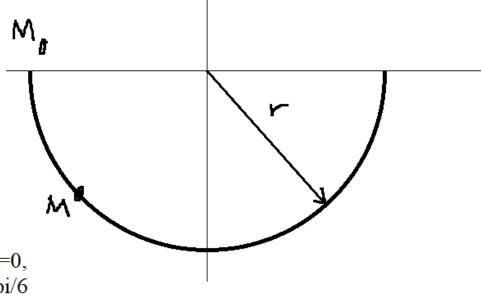
В ДСК:

$$egin{cases} m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{k_x} \ m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{k_y} \ m\ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{k_z} \end{cases}$$

Естественный способ задачи:

$$egin{aligned} ma^n &= \sum_{k=1}^n F_{k_n} \ ma^ au &= \sum_{k=1}^n F_{k_n} \ a^n &= rac{V^2}{
ho} = rac{\dot{s}^2}{
ho} \ a^ au &= \ddot{s}(t) = rac{dV_ au}{dt} \end{aligned}$$

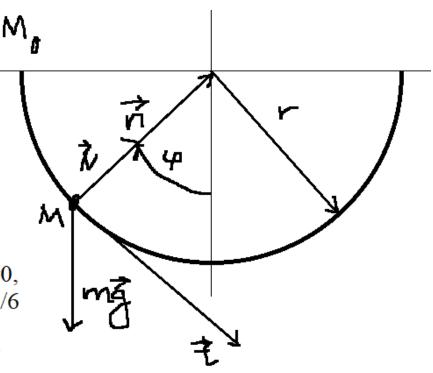
+ граничные, начальные условия



Mm

t0=0, phi0=pi/2, V0=0, t=t1, phi1=phi(t1)=pi/6

- 1. Естественный способ задания
- 2. Силы



M,m

t0=0, phi0=pi/2, V0=0, t=t1, phi1=phi(t1)=pi/6

$$V1=V(t1)=?, N(t1)=?$$

3.
$$\vec{n} = \frac{\vec{F}}{m}$$

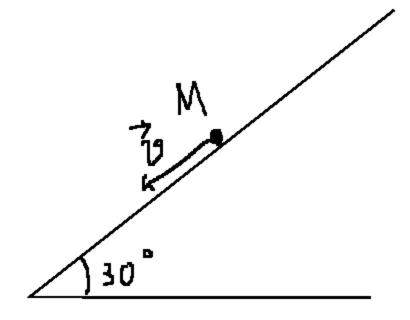
4.

$$egin{align} au: ma^{ au} &= \sum_{k=1}^{N} F_k^{ au} \ &n: ma^n = \sum_{k=1}^{N} F_k^n \ &\Rightarrow egin{cases} m rac{dV_{ au}}{dt} &= mg\sinarphi \ rac{mV^2}{r} &= N - mg\cosarphi \ \end{cases} \ (1)$$

(1):

$$egin{aligned} rac{dV}{dt} &= g \sin arphi \ dV &= g \sin arphi dt \ V &= \dot{arphi} r \ \ddot{arphi} r &= g \sin arphi \ rac{dV}{dt} &= g \sin arphi \ rac{dV}{dt} &: rac{d\varphi}{darphi} = g \sin arphi \ rac{dV}{dt} \cdot rac{d\varphi}{darphi} &= g \sin arphi \ rac{dV}{darphi} \cdot -rac{V}{r} &= g \sin arphi \ rac{dV}{darphi} \cdot -rac{V}{r} &= g \sin arphi \ rac{V_1^2}{2} &= rg \cos arphi |rac{ar{v}}{rac{v}{2}} \ rac{V_1^2}{2} &= rg rac{\sqrt{3}}{2} \ rac{V_1}{2} &= rg \cos arphi + m rac{V_1^2}{2} \end{aligned}$$

27.5

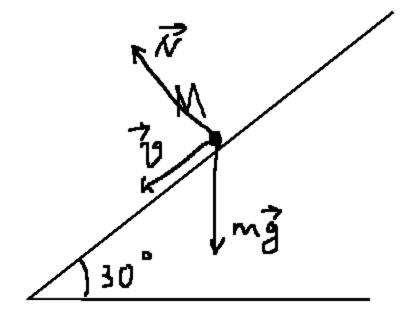


$$(.) M$$

 $t_0=0, V(0)=2Mc$
 $S_M(t_1)=96M$
 $t_1=2$

5. ДСК

6. Силы: $m \vec{g}$



7. $egin{aligned} ec{a} &= rac{ec{F}}{m} \ x : ma_x &= \sum_{k=1}^N F_{kx} \ y : ma_y &= \sum_{k=1}^N F_{ky} \ \implies \left\{ egin{aligned} m\ddot{x} &= mg\sin(30^o) \ m\ddot{y} &= mg\cos(30^o) + N \end{aligned}
ight. \implies \ddot{x} &= rac{g}{2} \end{aligned}$

Решаем:

$$\ddot{x}=rac{g}{2} \ x=rac{gt^2}{4}+V_0t+x_0 \Rightarrow \ x=rac{gt^2}{4}+2t \implies \ 9.6=rac{gt_1^2}{4}+2t_1 \implies \ t_1=1.6$$

Эта же задача с сопротивлением по закону $ec{R} = -\mu V ec{V}$

$$egin{cases} m\ddot{x}=rac{mg}{2}-\mu\dot{x}^2\ m\ddot{y}=mgrac{\sqrt{3}}{2}-\mu\dot{y}^2 &\leftrightarrow mrac{dV}{dt}=mrac{g}{2}-\mu V^2 \end{cases}$$

$$egin{aligned} mrac{dV}{dt}rac{dl}{dl} &= mrac{g}{2} - \mu V^2 \ mVrac{dV}{dl} &= rac{mg}{2} - \mu V^2 \ mrac{dV^2}{dl} &= mg - 2\mu V^2 \ q &= V^2 \ mrac{dq}{dl} &= mg - 2\mu q \end{aligned}$$

$$F = k^2 M \delta$$
 $F = k^2 M \delta$
 $M = 0$
 $M = 0$

1. ДСК

2. силы: \vec{F} , $m \vec{g}$

3.
$$\begin{cases} m\ddot{x} = -F\cos\alpha \\ m\ddot{y} = mg - F\sin\alpha \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -k^2mx \\ m\ddot{y} = mg - F\sin\alpha \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -k^2mx \\ m\ddot{y} = mg - k^2my \end{cases} \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} \ddot{x} + k^2x = 0 \\ \ddot{y} + k^2y = g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = a\cos(kt) \\ y = C_1\sin(kt) + C_2\cos(kt) + C_3 \implies y = C_4\sin(kt) + C_5\cos(kt) + \frac{g}{k^2} \end{cases}$$

18/02/2025

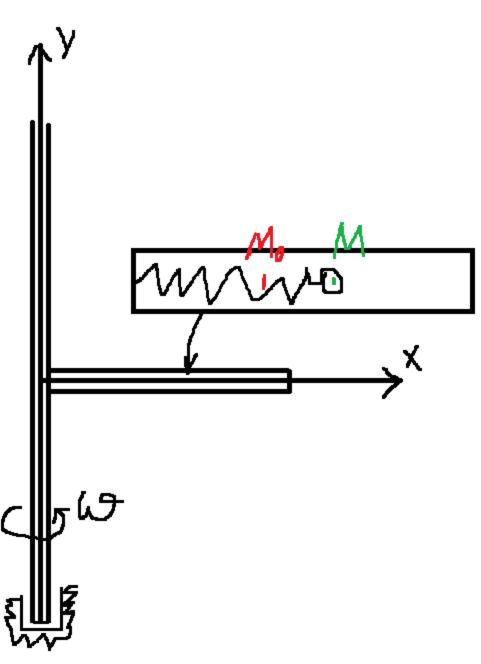
Динамика материальной точки в неинерциальной системе отсчёта.

$$mec{a}=\sum_{i=1}^Nec{F_i}$$
 $ec{a}=ec{a^r}+ec{a^e}+ec{a^\kappa}$ $mec{a^r}=\sum_{i=1}^Nec{F_i}-mec{a^e}-mec{a^\kappa}$ $ec{c}=-mec{a^e}$ - Переносная сила инер

 $ec{\mathcal{\Phi}^e} = -m ec{a^e}$ - Переносная сила инерции $ec{\mathcal{\Phi}^\kappa} = -m ec{a^\kappa}$ - сила инерции Кориолиса

$$mec{a^r} = \sum_{i=1}^N ec{F}_i + ec{m{ec{\Phi}}^e} + ec{m{ec{\Phi}}^\kappa}$$

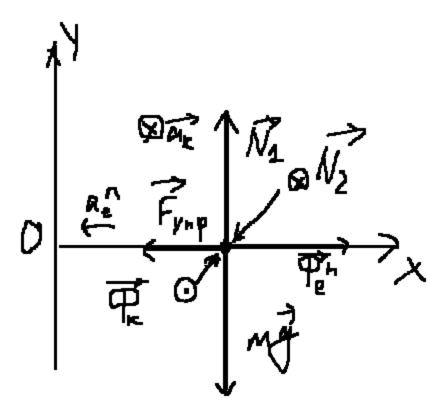
$$ec{a_{\scriptscriptstyle K}} = 2ec{\omega_e} imes ec{V_r}$$



Дано:

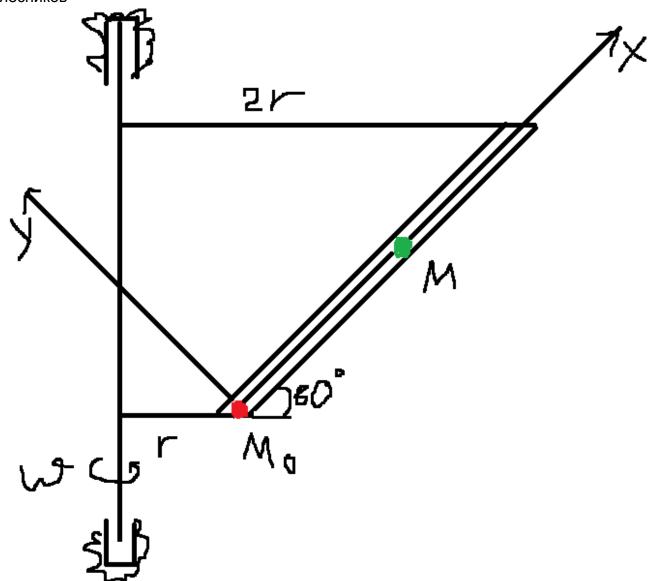
$$\omega = const, \ C$$
 - жёсткость пружины, $t_0 = 0, \ x(0) = l, \ V_r(0) = 0$ Решение:

$$ec{\mathcal{\Phi}^e} = -ec{a^e}, \ ec{\mathcal{\Phi}_{\kappa}} = -mec{a_{\kappa}} \ ec{a^e} = ec{a_e^n} + ec{a_e^ au} \ \omega_e = const \Rightarrow ec{a_e^ au} = 0 \ ec{a_{\kappa}} = 2ec{\omega_e} imes ec{V_r}$$

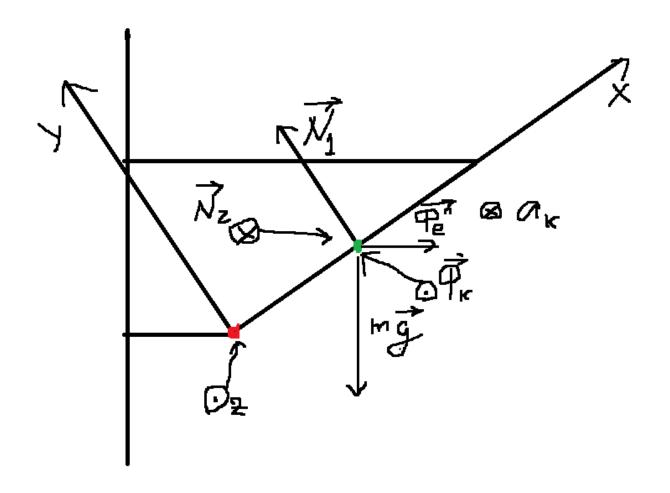


$$3.\ mec{a}^r = \sum_{i=1}^N ec{F}_i + ec{\phi}^e + ec{\phi}^\kappa$$
 $\left\{ egin{align*}{ma_y^r = N_1 - mg} & ma_v^r = N_2 \\ ma_e^r = N_1 - mg \\ ma_e^r = \omega_\kappa - N_2 \\ N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} \\ F_{\mathrm{упр}} = C(x - l) \\ ec{\varphi}_e^n = ma_e^n = m\omega^2 x \ (x - \mathrm{pacterosphue} \ \mathrm{ot} \ \mathrm{och} \ \mathrm{bpaligneh}) \\ \Longrightarrow & m\ddot{x} = -C(x - l) + m\omega^2 x \\ \ddot{x} + x \left(\frac{C}{m} - \omega^2 \right) = \frac{C}{m} l, \ \frac{C}{m} = k^2 \\ \ddot{x} + (k^2 - \omega^2) x = k^2 l \\ x = x_0 \mathrm{dimee} \ \mathrm{odhhopodhoe} \\ \ddot{x} = \lambda^2 \\ \lambda^2 = -(k^2 - \omega^2) \\ 1.\ k^2 - \omega^2 > 0 \\ x_0 \mathrm{dimee} \ \mathrm{odhopodhoe} = C_1 \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + C_2 \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) \\ x_0 \mathrm{dimee} \ \mathrm{odhopodhoe} = C_1 \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + C_2 \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) \\ + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2} \\ x = C_1 \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + C_2 \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2} \\ \dot{x}(0) = l \implies C_2 + \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2} = l \implies C_2 = l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2} \\ \dot{x}(0) = 0 \implies C_1 = 0 \\ x = \left(l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2}\right) \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2} \\ x = C_1 e^{\sqrt{k^2 - \omega^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{k^2 - \omega^2}t} + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2} \\ Haxoдим константы \\ x(0) = l \implies C_1 + C_2 = l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2} \\ \dot{x}(0) = 0 \implies C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \left(l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2}\right) \\ x = \frac{1}{2} \left(l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2}\right) \left(e^{\sqrt{k^2 - \omega^2}t} + e^{-\sqrt{k^2 - \omega^2}t}\right) + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2} \\ \frac{1}{k^2 - \omega^2} + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2} \right)$

1 Домашнее задание можно делать, варианты согласно списку На след неделю Динамика материальной точки



Дано:
$$t_0=0, V_r(0)=0$$
 Найти:
$$\omega_{\min}=?(V_r>0)$$
 $t=t_1, \omega=2\omega_{\min}, Vr(t_1)=?$ Решение:



$$ec{a_e} = ec{a_{e^n}} + ec{eta_e^r} \ ec{eta_e} = -mec{a_e} \ ec{eta_e} = -mec{a_e} \ ec{eta_e} = -mec{a_e} \ ec{eta_e} = -mec{a_{e^n}} \ ec{eta_e} = -mec{a_{e^n}} \ ec{m}ec{a_r} = \sum_{r} ec{F_i} + ec{eta_\kappa} + ec{eta_e} \ ec{eta_e} = -mg\cos\frac{\pi}{6} + er{eta_e}\cos\frac{\pi}{3} \ ec{m}ec{a_z} = -mg\sin\frac{\pi}{6} - ec{eta_e}\sin\frac{\pi}{3} \ ec{m}ec{a_z} = 0 = ec{eta_\kappa} - N_2 \ ec{x} = -grac{\sqrt{3}}{2} + \omega^2\left(R + rac{1}{2}x
ight) \cdot rac{1}{2} \ ec{x} + \omega^2\left(R + rac{1}{2}x
ight) \ \sum_{r} F_{kx} + ec{eta_{ex}} = 0 \implies \omega_{min} \ \omega_{min} = \sqrt{rac{g\sqrt{3}}{R}} \ ec{x} = rac{dV_r}{dt} = rac{dV_r}{dt} \cdot rac{dx}{dx} = rac{dV_r}{dx} \cdot V_r \ ec{x} - rac{1}{4}\omega^2 x - rac{1}{2}\omega^2 R + grac{\sqrt{3}}{2} = 0 \ ec{v} = 0 \ ec{v} \ ec{v} = 0 \ ec{v} \ ec{v} = 0 \ ec{v} \ ec{v} \ ec{v} = 0 \ ec{v} \ ec{v} \ ec{v} \ ec{v} = 0 \ ec{v} \ ec{v}$$

25/02/2025

Общие теоремы динамики механической системы.

Уравнения движения центра масс. Теорема об изменении количества движения. Координаты центра масс:

$$egin{aligned} x_C &= rac{\sum_{n=1}^{N} x_n \cdot m_n}{\sum_{n=1}^{N} m_n} = rac{\sum_{n=1}^{N} x_n \cdot m_n}{M} \ y_C &= rac{\sum_{n=1}^{N} y_n \cdot m_n}{M} \ ec{r}_C &= rac{\sum_{n=1}^{N} ec{r}_n \cdot m_n}{M} \end{aligned}$$

Для точки:

$$ec{a}=rac{F}{m}\Leftrightarrow mec{a}=\sum_{k=1}^Nec{F}_k$$
 $Mec{a}_C=\sum_{k=1}^Nec{F}_k^{(e)}$, где $ec{F}^e$ - внешние силы $m\ddot{x}_C=\sum_{k=1}^Nec{F}_{kx}^{(e)}$ $m\ddot{y}_C=\sum_{k=1}^Nec{F}_{ky}^{(e)}$

Частные случаи:

$$\sum_{k=1}^N ec{F}_{kx} = 0 \implies M \ddot{x}_C = 0$$
 Если при $t=0$ - покой, то $\ddot{x}_C = 0 \implies \dot{x}_C = Const$ + начальные условия $\implies \dot{x}_C = 0 \implies x_C = Const$

Количество движения (для точки)

$$ec{Q} = m ec{V} \ ec{Q} = \sum_{i=1}^N ec{Q}_i \ rac{dec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^N ec{F}_i$$

Теорема об изменении количества движения Частные случаи:

$$\left\{ egin{aligned} rac{dQ_x}{dt} &= \sum_{k=1}^N F_{kx} = 0 \ rac{dQ_y}{dt} &= \sum_{k=1}^N F_{ky} \end{aligned}
ight. \implies rac{dQ_x}{dt} = 0 \implies Q_x = const$$

Общие теоремы динамики работают в инерциальной системме отсчёта $ec{V}$ - абсолютная скорость

Дано:

$$lpha=60^o \ m_2=m_1=m, m_3=2m \ arphi(t)=2arepsilon t^2 \ t=0$$
 - покой

Найти:

$$x_4(t) = ?, \ a_4 = ?$$

Решение:

$$egin{aligned} rac{dec{Q}}{dt} &= \sum_{k=1}^{N} ec{F}_{k}^{e} = 0 \ ec{V}(0) &= 0 \ Q_{x} &= Q_{x_{1}} + Q_{x_{2}} + Q_{x_{3}} + Q_{x_{4}} \ V_{A} &= V_{B} \ Q_{x_{1}} &= mV_{A} = mV_{B} \ Q_{x_{2}} &= mV_{B} \end{aligned}$$

 V_{Cx} - проекция абсолютной скорости центра масс на ось х

$$egin{aligned} Q_{x_3} &= m_3 V_{Cx} \ Q_{x_3} &= m_3 (-V_C^r \cdot \cos 60^o + V_C^{(e)}) \ V_K^r &= |\dot{arphi}| r = 4 arepsilon t \ V_C^r &= 2 arepsilon t \ V_C^e &= V_B \ Q_{x_3} &= m_3 (V_B - arepsilon t r) \ Q_x &= 2 m V_B + 2 m (V_B - arepsilon t r) - m V_B = 0 \ V_B &= rac{8 arepsilon r}{5} t \ x &= rac{8 arepsilon r}{5} t \ x &= rac{8 arepsilon r}{5} rac{t^2}{2} = rac{4 arepsilon r}{5} t^2 \ V_C^r &= 2 arepsilon r t \ rac{d}{dt} \left(2 m \cdot 2 arepsilon t r rac{\sqrt{3}}{2}
ight) = N - g (m_4 + 4 m) \ N &= 2 \sqrt{3} m arepsilon r + g (m_4 + 4 m) \end{aligned}$$

Уравнение движения центра масс

"Drawing 2025-02-25 11.22.25.excalidraw" не может быть найдена.

Дано:

$$m_1, m_2, l_2 = 2l, m_3, arphi = \omega t, \omega = const$$

Найти:

$$x_1(t)$$

Решение:

$$egin{aligned} Mec{a}_C &= \sum_{k=1}^N ec{F}_k^{(e)} \ Ma_{Cx} &= 0 &\Longrightarrow x_C = const \ x_C^1 &= 0 &\Longrightarrow x_C = t_3 \cdot m_1 + t_2 \cdot m_2 + t_3 \cdot m_3 \ m_1 + m_2 + m_3 & m_1 + m_2 + m_3 \ x_C^2 &= rac{(x_1 + x_1')m_1 + (x_2 + x_2')m_2 + (x_3 + x_3')m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \ x_2' &= x_1' \ V_{Bx}^r &= -l\omega \sin arphi \ S_{Bx}^r &= l\cos arphi \ S_{Bx}^r &= l\cos arphi \
onumber \
end{align*} V_{Bx}^r = l\cos arphi \
onumber \
onum$$