

Колесников, Никитин,

Солодкая Елена Викторовна

Всё решает экзамен.

Д31	Д32	Д33	Д34

11/02/25

Динамика материальной точки

Основное уравнение динамики точки (.) в инерциальной системе отсчёта:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

В ДСК:

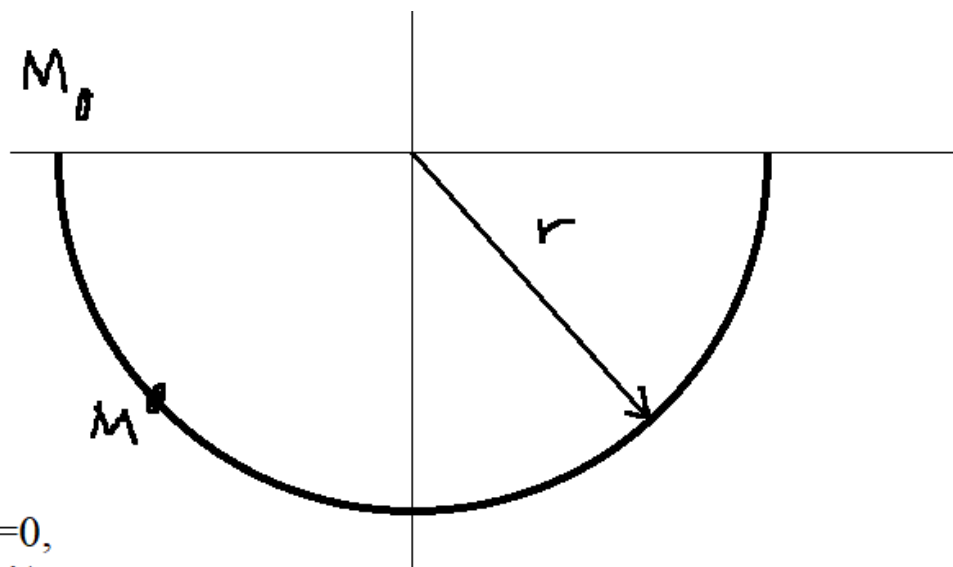
$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{k_x} \\ m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{k_y} \\ m\ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{k_z} \end{cases}$$

Естественный способ задачи:

$$\begin{cases} ma^n = \sum_{k=1}^n F_{k_n} \\ ma^\tau = \sum_{k=1}^n F_{k_\tau} \end{cases}$$
$$a^n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$$
$$a^\tau = \ddot{s}(t) = \frac{dV_\tau}{dt}$$

+ граничные, начальные условия

M, m



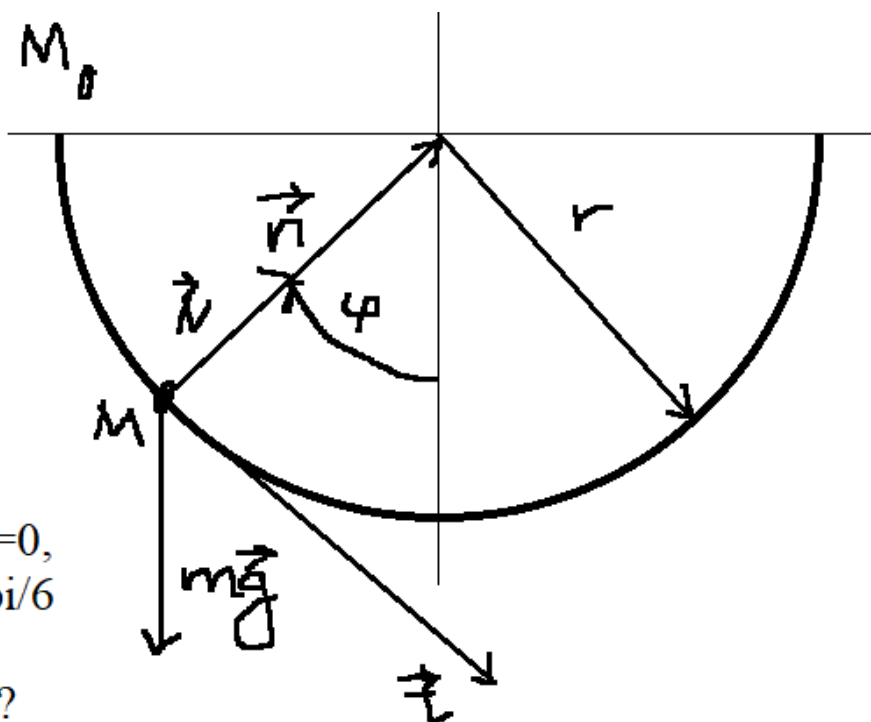
$$t_0=0, \varphi_0=\pi/2, V_0=0, \\ t=t_1, \varphi_1=\varphi(t_1)=\pi/6$$

$$V_1=V(t_1)=?, N(t_1)=?$$

1. Естественный способ задания

2. Силы

M, m



$$t_0=0, \varphi_0=\pi/2, V_0=0, \\ t=t_1, \varphi_1=\varphi(t_1)=\pi/6$$

$$V_1=V(t_1)=?, N(t_1)=?$$

$$3. \vec{n} = \frac{\vec{F}}{m}$$

4.

$$\tau : ma^\tau = \sum_{k=1}^N F_k^\tau$$

$$n : ma^n = \sum_{k=1}^N F_k^n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \frac{dV_\tau}{dt} = mg \sin \varphi & (1) \\ \frac{mV^2}{r} = N - mg \cos \varphi & (2) \end{cases}$$

(1):

$$\frac{dV}{dt} = g \sin \varphi$$

$$dV = g \sin \varphi dt$$

$$V = \dot{\varphi} r$$

$$\ddot{\varphi} r = g \sin \varphi$$

$$\frac{dV}{dt} = g \sin \varphi$$

$$\frac{dV}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{d\varphi} = g \sin \varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{V_\tau}{r}$$

$$\frac{dV}{d\varphi} \cdot -\frac{V}{r} = g \sin \varphi$$

$$\int_{V_0}^{V_1} V dV = - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} rg \sin \varphi d\varphi \implies \frac{V_1^2}{2} = rg \cos \varphi \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}$$

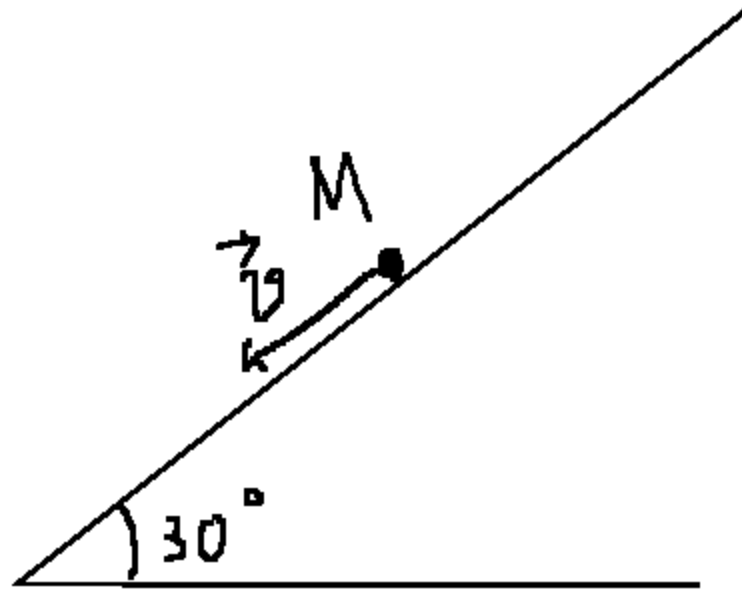
$$\frac{V_1^2}{2} = rg \frac{\sqrt{3}}{2} \implies$$

$$V_1 = \sqrt{rg} \sqrt[4]{6}$$

$$N = mg \cos \varphi_1 + m \frac{V_1^2}{2}$$

27.5

27.5



(.) M

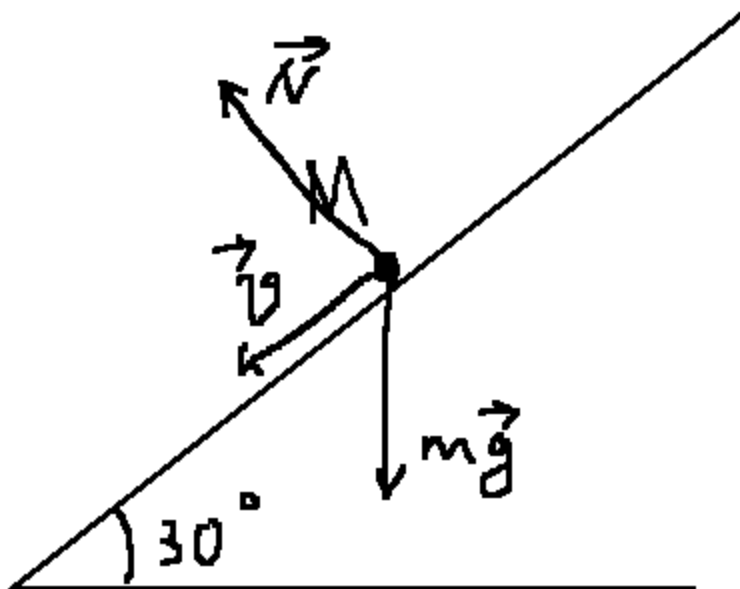
$$t_0 = 0, \quad v(0) = 2 \text{ m/s}$$

$$s_M(t_1) = 9.6 \text{ m}$$

$$t_1 = ?$$

5. ДСК

6. Силы: $m\vec{g}$



7.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$x : ma_x = \sum_{k=1}^N F_{kx}$$

$$y : ma_y = \sum_{k=1}^N F_{ky}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin(30^\circ) \\ m\ddot{y} = mg \cos(30^\circ) + N \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{g}{2}$$

Решаем:

$$\ddot{x} = \frac{g}{2}$$

$$x = \frac{gt^2}{4} + V_0 t + x_0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{gt^2}{4} + 2t \Rightarrow$$

$$9.6 = \frac{gt_1^2}{4} + 2t_1 \Rightarrow t_1 = 1.6$$

Эта же задача с сопротивлением по закону $\vec{R} = -\mu V\vec{V}$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{mg}{2} - \mu\dot{x}^2 \\ m\ddot{y} = mg\frac{\sqrt{3}}{2} - \mu\dot{y}^2 \end{cases} \Leftrightarrow m\frac{dV}{dt} = m\frac{g}{2} - \mu V^2$$

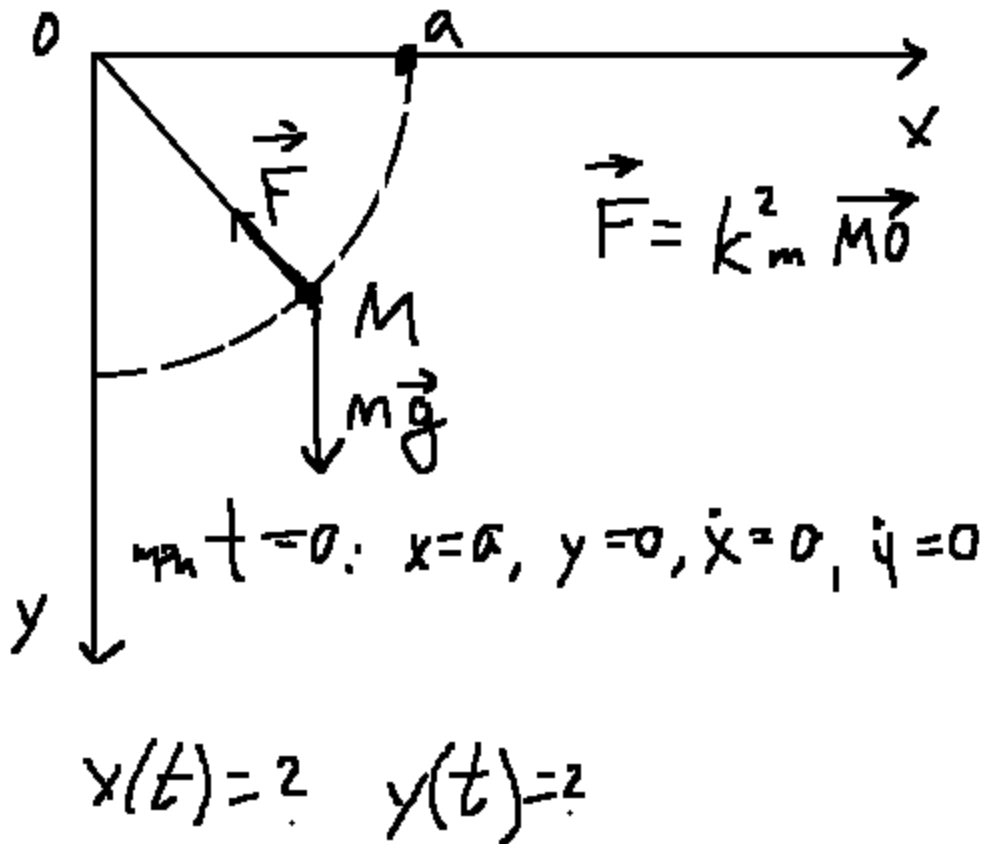
$$m \frac{dV}{dt} \frac{dl}{dl} = m \frac{g}{2} - \mu V^2$$

$$mV \frac{dV}{dl} = \frac{mg}{2} - \mu V^2$$

$$m \frac{dV^2}{dl} = mg - 2\mu V^2$$

$$q = V^2$$

$$m \frac{dq}{dl} = mg - 2\mu q$$



1. ДСК

2. силы: \vec{F} , $m\vec{g}$

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

3.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -F \cos \alpha \\ m\ddot{y} = mg - F \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -k^2 mx \\ m\ddot{y} = mg - k^2 my \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \ddot{x} + k^2 x = 0 \\ \ddot{y} + k^2 y = g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \cos(kt) \\ y = C_1 \sin(kt) + C_2 \cos(kt) + C_3 \end{cases} \Rightarrow y = C_4 \sin(kt) + C_5 \cos(kt) + \frac{g}{k^2}$$

18/02/2025

Динамика материальной точки в неинерциальной системе отсчёта.

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$\vec{a} = \vec{a}^r + \vec{a}^e + \vec{a}^\kappa$$

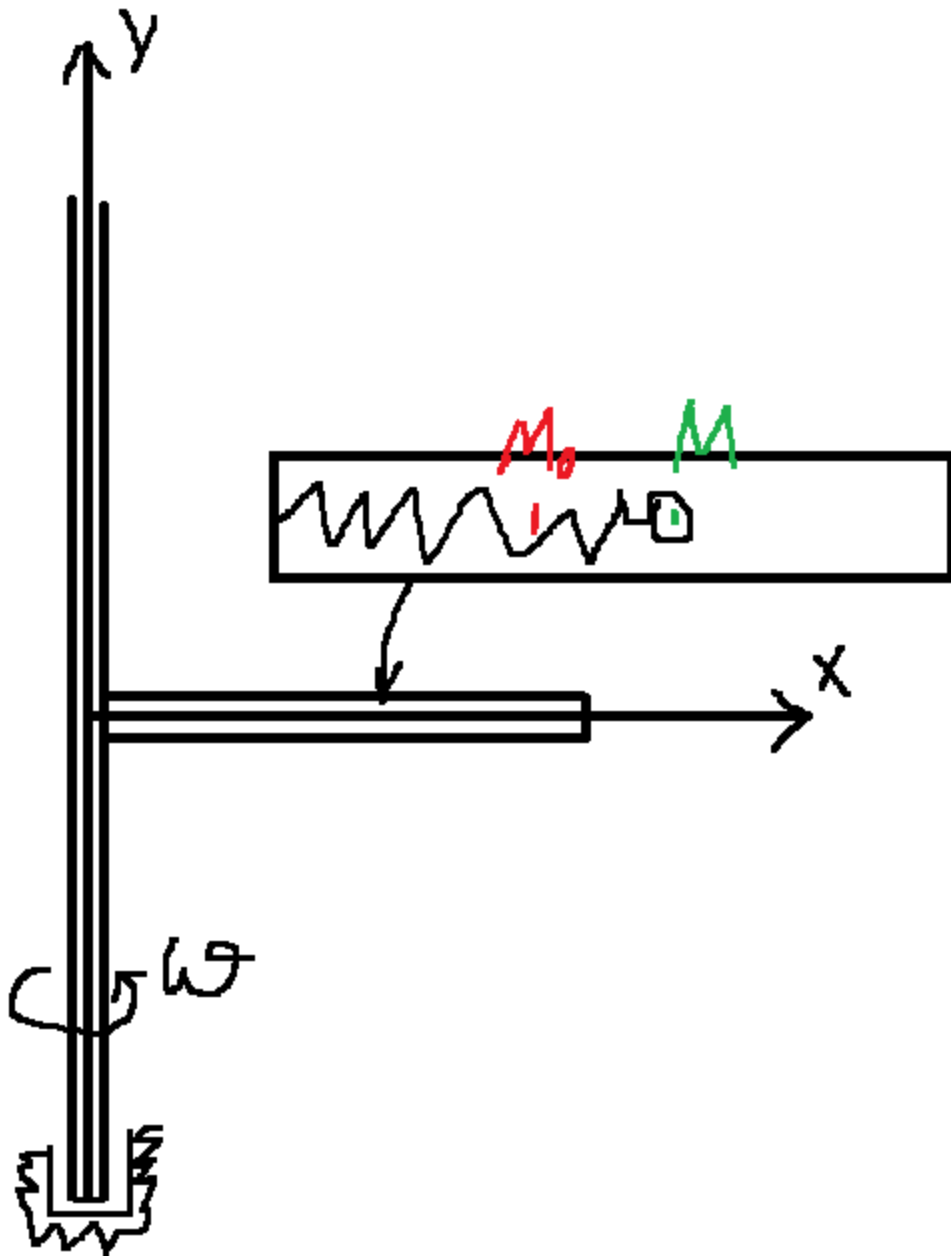
$$m\vec{a}^r = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i - m\vec{a}^e - m\vec{a}^\kappa$$

$$\vec{\Phi}^e = -m\vec{a}^e - \text{Переносная сила инерции}$$

$$\vec{\Phi}^\kappa = -m\vec{a}^\kappa - \text{сила инерции Кориолиса}$$

$$m\vec{a}^r = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \vec{\Phi}^e + \vec{\Phi}^\kappa$$

$$\vec{a}^\kappa = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$$



Дано:

$\omega = const$, C - жёсткость пружины, $t_0 = 0$, $x(0) = l$, $V_r(0) = 0$

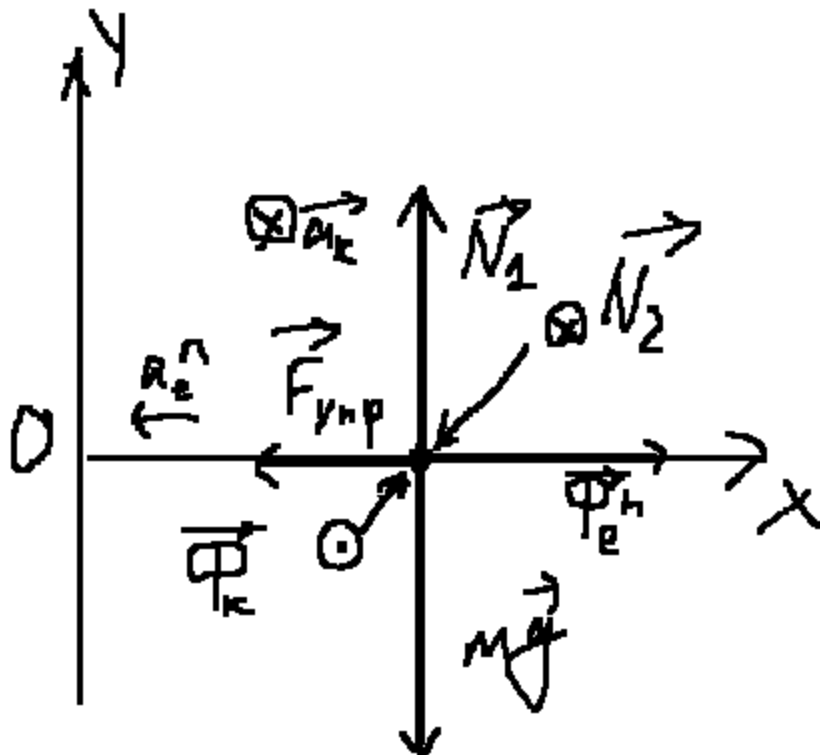
Решение:

$$\vec{\Phi}^e = -\vec{a}^e, \quad \vec{\Phi}_\kappa = -m\vec{a}_\kappa$$

$$\vec{a}^e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^r$$

$$\omega_e = const \Rightarrow \vec{a}_e^r = 0$$

$$\vec{a}_\kappa = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$$



$$3. m\vec{a}^r = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \vec{\Phi}^e + \vec{\Phi}^k$$

$$\begin{cases} ma_x^r = -F_{\text{упр}} + \Phi_e^n \\ ma_z^r = N_1 - mg \\ ma_y^r = \Phi_k - N_2 \end{cases}$$

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$$

$$F_{\text{упр}} = C(x - l)$$

$$\Phi_e^n = ma_e^n = m\omega^2 x \quad (x - \text{расстояние от оси вращения})$$

\implies

$$m\ddot{x} = -C(x - l) + m\omega^2 x$$

$$\ddot{x} + x \left(\frac{C}{m} - \omega^2 \right) = \frac{C}{m} l, \quad \frac{C}{m} = k^2$$

$$\ddot{x} + (k^2 - \omega^2)x = k^2 l$$

$$x = x_{\text{общее однородное}} + x_{\text{частное неоднородное}}$$

$$\ddot{x} = \lambda^2$$

$$\lambda^2 = -(k^2 - \omega^2)$$

$$1. k^2 - \omega^2 > 0$$

$$x_{\text{общее однородное}} = C_1 \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + C_2 \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2}t)$$

$$x_{\text{частное неоднородное}} = A \implies A = \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2}$$

$$x = C_1 \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + C_2 \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2}$$

Находим константы

$$x(0) = l \implies C_2 + \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2} = l \implies C_2 = l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \implies C_1 = 0$$

$$x = \left(l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2} \right) \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2} \quad 2. k^2 - \omega^2 < 0$$

$$x_{\text{общее однородное}} = C_1 e^{\sqrt{k^2 - \omega^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{k^2 - \omega^2}t}$$

$$x = C_1 e^{\sqrt{k^2 - \omega^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{k^2 - \omega^2}t} + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2}$$

Находим константы

$$x(0) = l \implies C_1 + C_2 = l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2}$$

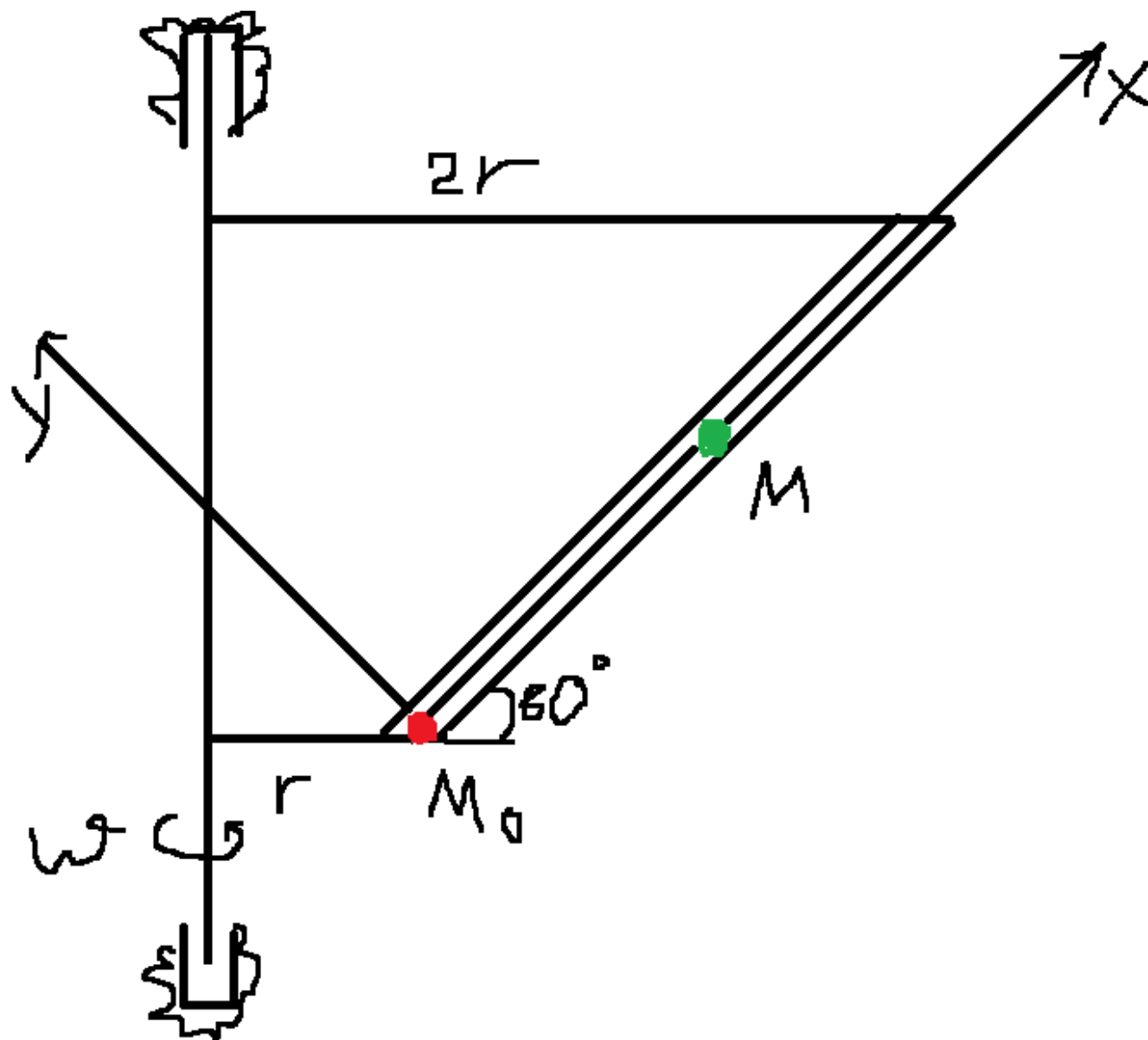
$$\dot{x}(0) = 0 \implies C_1 = C_2 = \frac{1}{2} \left(l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2} \right)$$

$$x = \frac{1}{2} \left(l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2} \right) (e^{\sqrt{k^2 - \omega^2}t} + e^{-\sqrt{k^2 - \omega^2}t}) + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2}$$

1 Домашнее задание можно делать, варианты согласно списку

На след неделю

Динамика материальной точки



Дано:

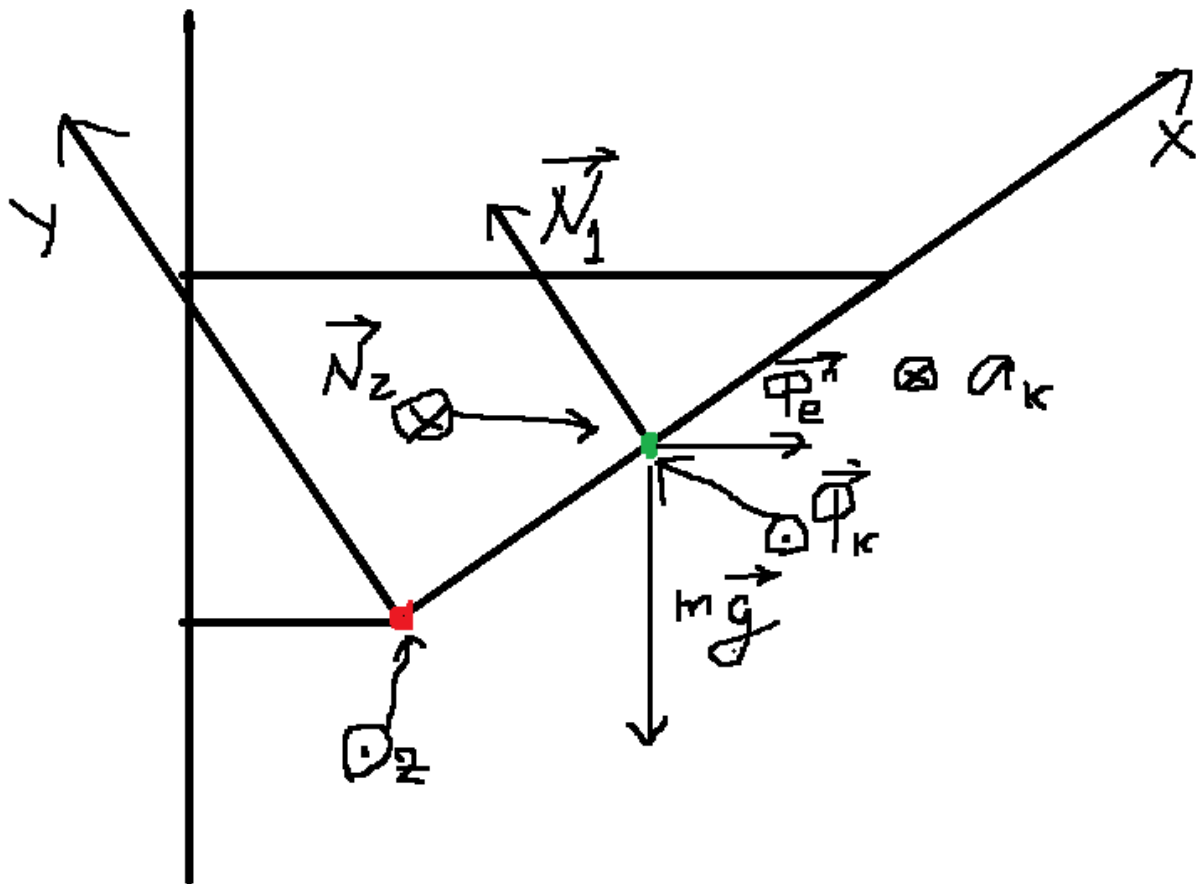
$$t_0 = 0, V_r(0) = 0$$

Найти:

$$\omega_{\min} = ? (V_r > 0)$$

$$t = t_1, \omega = 2\omega_{\min}, V_r(t_1) = ?$$

Решение:



$$\vec{a}_e = \vec{a}_{e^n} + \cancel{\vec{a}_e^t}$$

$$\vec{\Phi}_\kappa = -m\vec{a}_\kappa$$

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e = -m\vec{a}_{e^n}$$

$$m\vec{a}_r = \sum \vec{F}_i + \vec{\Phi}_\kappa + \vec{\Phi}_e$$

$$\begin{cases} m\vec{a}_x = -mg \cos \frac{\pi}{6} + \Phi_e^n \cos \frac{\pi}{3} \\ m\vec{a}_y = -mg \sin \frac{\pi}{6} - \Phi_e^n \sin \frac{\pi}{3} \\ m\vec{a}_z = 0 = \Phi_\kappa - N_2 \end{cases}$$

$$\ddot{x} = -g \frac{\sqrt{3}}{2} + \omega^2 \left(R + \frac{1}{2}x \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 \left(R + \frac{1}{2}x \right)$$

$$\sum F_{kx} + \Phi_{ex} = 0 \implies \omega_{min}$$

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{g\sqrt{3}}{R}}$$

$$\ddot{x} = \frac{dV_r}{dt} = \frac{dV_r}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{dV_r}{dx} \cdot V_r$$

$$\ddot{x} - \frac{1}{4}\omega^2 x - \frac{1}{2}\omega^2 R + g \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

25/02/2025

Общие теоремы динамики механической системы.

Уравнения движения центра масс. Теорема об изменении количества движения.

Координаты центра масс:

$$x_C = \frac{\sum_{n=1}^N x_n \cdot m_n}{\sum_{n=1}^N m_n} = \frac{\sum_{n=1}^N x_n \cdot m_n}{M}$$
$$y_C = \frac{\sum_{n=1}^N y_n \cdot m_n}{M}$$
$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{n=1}^N \vec{r}_n \cdot m_n}{M}$$

Для точки:

$$\vec{a} = \frac{F}{m} \Leftrightarrow m\vec{a} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k$$

$$M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{(e)}, \text{ где } \vec{F}^{(e)} - \text{внешние силы}$$

$$m\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{kx}^{(e)}$$

$$m\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^N \vec{F}_{ky}^{(e)}$$

Частные случаи:

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_{kx} = 0 \implies M\ddot{x}_C = 0$$

Если при $t = 0$ - покой, то

$$\ddot{x}_C = 0 \implies \dot{x}_C = \text{Const}$$

+ начальные условия $\implies \dot{x}_C = 0$

$$\implies x_C = \text{Const}$$

Количество движения (для точки)

$$\vec{Q} = m\vec{V}$$

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^N \vec{Q}_i$$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

Теорема об изменении количества движения

Частные случаи:

$$\begin{cases} \frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^N F_{kx} = 0 \\ \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^N F_{ky} \end{cases} \implies \frac{dQ_x}{dt} = 0 \implies Q_x = \text{const}$$

Общие теоремы динамики работают в инерциальной системме отсчёта

\vec{V} - абсолютная скорость

Дано:

$$\alpha = 60^\circ$$

$$m_2 = m_1 = m, m_3 = 2m$$

$$\varphi(t) = 2\varepsilon t^2$$

$$t = 0 - \text{покой}$$

Найти:

$$x_4(t) = ?, a_4 = ?$$

Решение:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^e = 0 \Rightarrow Q_x = 0$$

$$\vec{V}(0) = 0$$

$$Q_x = Q_{x_1} + Q_{x_2} + Q_{x_3} + Q_{x_4}$$

$$V_A = V_B$$

$$Q_{x_1} = mV_A = mV_B$$

$$Q_{x_2} = mV_B$$

V_{Cx} - проекция абсолютной скорости центра масс на ось x

$$Q_{x_3} = m_3 V_{Cx}$$

$$Q_{x_3} = m_3(-V_C^r \cdot \cos 60^\circ + V_C^{(e)})$$

$$V_K^r = |\dot{\varphi}|r = 4\varepsilon tr$$

$$V_C^r = 2\varepsilon tr$$

$$V_C^e = V_B$$

$$Q_{x_3} = m_3(V_B - \varepsilon tr)$$

$$Q_x = 2mV_B + 2m(V_B - \varepsilon tr) - mV_B = 0$$

$$V_B = \frac{8\varepsilon r}{5}t$$

$$x = \frac{8\varepsilon r}{5} \frac{t^2}{2} = \frac{4\varepsilon r}{5} t^2$$

$$V_C^r = 2\varepsilon tr$$

$$\frac{d}{dt} \left(2m \cdot 2\varepsilon tr \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = N - g(m_4 + 4m)$$

$$N = 2\sqrt{3}m\varepsilon r + g(m_4 + 4m)$$

Уравнение движения центра масс

“Drawing 2025-02-25 11.22.25.excalidraw” не может быть найдена.

Дано:

$$m_1, m_2, l_2 = 2l, m_3, \varphi = \omega t, \omega = \text{const}$$

Найти:

$$x_1(t)$$

Решение:

$$M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^{(e)}$$

$$Ma_{Cx} = 0 \implies x_C = \text{const}$$

$$\dot{x}_C = 0$$

$$x_C^1 = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + x_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_C^2 = \frac{(x_1 + x_1')m_1 + (x_2 + x_2')m_2 + (x_3 + x_3')m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_2' = x_1'$$

$$V_{Bx}^r = -l\omega \sin \varphi$$

$$S_{Bx}^r = l \cos \varphi$$

$$\nabla * f(x) = (\nabla(f))(x)$$