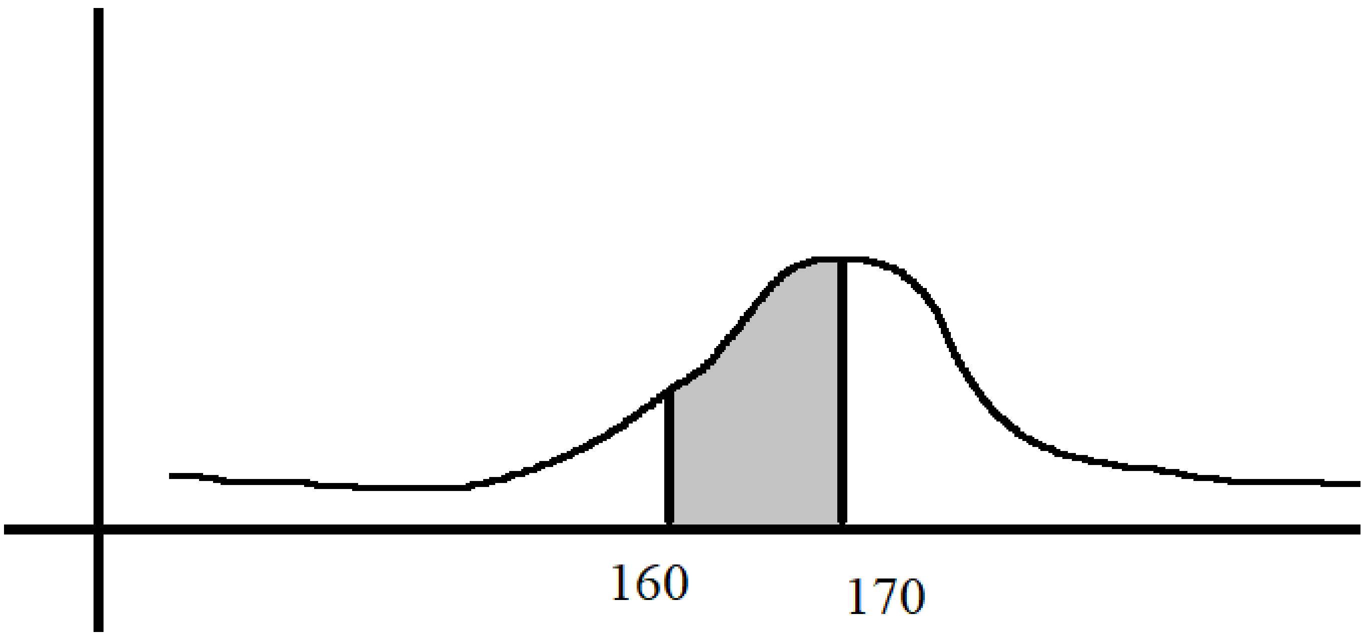
Кирилл Михайлович 89060399998

13/02/2025

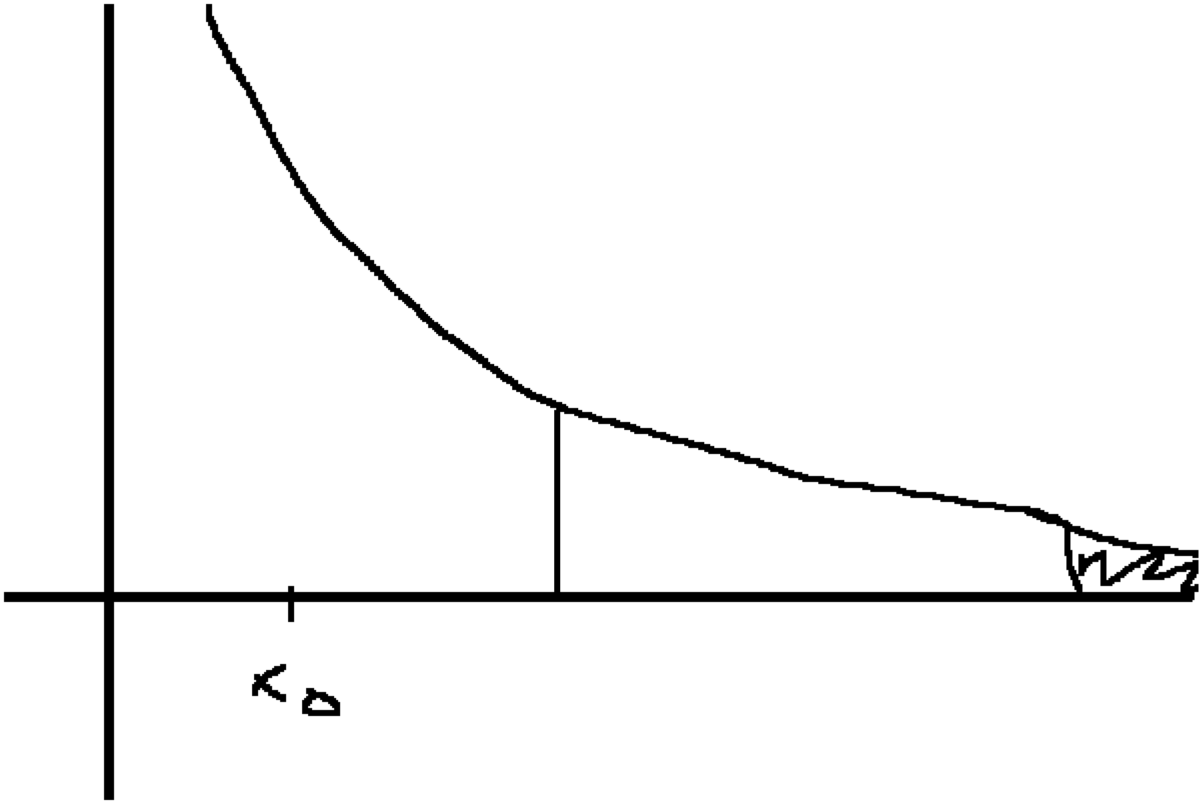
Дискретная случайная величина:
Эксперимент, различные значения
Грань кубика

x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Непрерывная:
Рост человека:



Вероятность - это площадь. Наапример, $P(160 < \xi < 170)$
Вероятность принять конкретное значение 0.
Доход населения (закон Парето):



лстм?
эконофизика
эконометрика (ранхигс?)
Задачи по комбинаторике в матанализе

1. Правило суммы
   Сколько существует способов поставить белопольного слона на шахматную доску так, чтобы он держал по боем больше 10 полей

7	**0**	**7**	**0**	**7**	**0**	**7**	**0**
0	9	0	9	0	9	0	7
7	0	11	0	11	0	9	0
0	9	0	13	0	11	0	7
7	0	11	0	13	0	9	0
0	9	0	11	0	11	0	7
7	0	9	0	9	0	9	0
0	7	0	7	0	7	0	7

8
Кружки: математический, английский, спортивный

М	**150**
А	80

М	**150**
С	110
МА	40
МС	70
АС	60
МАС	21
0	14

$$\#(M \cup A \cup C \cup n_0) = 14 + 150 + 80 + 110 - 40 - 70 - 60 + 21 = 354 - 170 + 21 = 184 + 21 = 205$$

Правило произведения
Сколько 4значных чётных чисел можно составить из 7 цифр, если цифры могут повторяться
6*7*7*4=24_49=24_(50-1)=1200-24=1176
0/[2/4/6]

$$\begin{matrix} 0 - 1 & [2,4,6] - 3 \\ 6 * 5 * 4 & 5 * 5 * 4 \end{matrix}$$

3. Перестановки
   $P_n = n!$
   Сколькими способами n книг на полку, чтобы m книг стояли рядом

$$(n - m + 1)!m!$$

4. Перестановки с повторениями

$$A \ - \ \text{множество из } n \text{ элементов, где } k_1, k_2, \ldots, k_m \text{ - элементов каждого типа}$$
$$n! = P(k_1, k_2, \ldots, k_n) \cdot \prod_{i=1}^{n} k_i! \Leftrightarrow P(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} k_i!}$$

   Сколько "слов" можно составить из слова параллелограмм

п	**1**
а	3
р	2
л	3
е	1
о	1
г	1
м	2

$$\frac{14!}{3!3!2!2!}$$

20/02/2025

Размещения
$A=\{a_i\}$
Составим **упорядоченные** наборы из m элементов ($m \leq n$)

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Сочетания - **неупорядоченные**

$$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

Выпишем все упорядоченные наборы по 2 элемента (A_4^2)

$$a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_2a_1, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_1, a_3a_2, a_3a_4, a_4a_1, a_4a_2, a_4a_3$$

12

$$A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$$

14 юношей, 15 девушек, 20 билетов. Сколько вариантов распределить билеты так, чтобы юноши и девушки чередовались?

$$\begin{gathered}\text{2 случая: В начале юноша / в начале девушка}\\ \text{1 случай: В начале юноша}\\ A_{14}^{10}\cdot A_{15}^{10}\\ \text{2 случай аналогичен}\\ n = 2\cdot A_{14}^{10}\cdot A_{15}^{10}\end{gathered}$$

6значные числа, делящиеся на 5, чтобы ни одна цифра не повторялась.
В конце или есть 0, или его нет.
Есть 0: $A_9^5 = \frac{9!}{4!} = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 15120$
Если в конце не 0, то это 5.

$$8\cdot A_8^4 = 8\cdot\frac{8!}{4!} = 13440$$

$$n = 13440 + 15120 = 28560$$

Размещения с повторениями

$$\{a_i\}_1^n$$

Составим упорядоченное множество из m элементов, где элементы могут повторяться

$$\bar{A}_n^m = n^m$$

Сколько "слов" 3хсимвольных можно составить из тире и точки? - 2^3
Сочетания:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

$$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

Выпишем сочетания

$$a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4$$

6

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

4 белых, 3 красных

а) число способов вытащить 2 одинаковых шара

$$C_4^2 + C_3^2 = 6 + 3 = 9$$
$$C_n^1 = n$$

б) число способов вытащить 2 шара разного цвета

Гипергеометрическая схема

1б 1к

$$C_4^1 \cdot C_3^1 = 4 \cdot 3 = 12$$

Сочетания с повторениями:

Сколько способов существует набрать 10 пирожных 3 видов: наполеон, медовик, птичье молоко

$$\underbrace{\cdots}_{\text{н}}|\underbrace{\cdots}_{м}|\underbrace{\cdots}_{п}$$

Число способов поставить палки вместо точек. C_{12}^2

Могла быть другая задача: сколько способов поставить палки между точками C_9^2

$$\overline{C_n^m} = C_{m+n-1}^{n-1}$$

Классическая модель

$$(\Omega, \mathcal{A}, P)$$
$$\Omega - \text{множество элементарных исходов}$$
$$\mathcal{A} \text{ - алгебра событий}$$
$$P \text{ - вероятность (мера)}$$

Подбрасываем игральный кубик

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$\mathcal{A} : A \in \mathcal{A} \implies \overline{A} \in \mathcal{A}$$
$$B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}, A \cap B \in \mathcal{A}$$
$$\Omega, \varnothing \in \mathcal{A}$$

$2^{\mathcal{A}}$ - является алгеброй

$$A = \{\text{чётное число очков}\}$$
$$B = \{\text{нечётное число очков}\}$$
$$\mathcal{A} = \{A, B, \varnothing, \Omega\}$$

$$P \geq 0$$
$$0 \leq P(A) \leq 1$$
$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Классическая модель

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

В урне 10 красных, 7 синих и 6 чёрных шаров. Каковы вероятность события А= "выбраны 1 красный, 2 синих, 3 чёрных", если равновероятно выбираются 6 шаров.

$$A = \{1\text{к}, 2\text{с}, 3\text{ч}\}$$
$$\#\Omega = C_{23}^6$$
$$\#A = C_{10}^1 \cdot C_7^2 \cdot C_6^3$$
$$P(A) = \frac{C_{10}^1 \cdot C_7^2 \cdot C_6^3}{C_{23}^6}$$

Сколько должно быть студентов в группе, чтобы с веротностью большей $\frac{1}{2}$ хотя бы у двух совпадёт день рождения.

r - число студентов

A - хотя бы 2 родились в 1 день

Хотя бы $\rightarrow$ разумно перейти к обратному

$\overline{A}$ - все в разные дни

$$\#\Omega = 365^r$$
$$\overline{A} = A_{365}^r$$
$$P(\overline{A}) = \frac{A_{365}^r}{365^r}$$
$$P(A) = 1 - \frac{A_{365}^r}{365^r} = 1 - \frac{365!}{(365-r)!365^r} > \frac{1}{2}$$
$$P(A(23)) \approx 0.507$$

27/03/2025

Дискретный случайный вектор

$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ - случайный вектор

3 шара случайным образом распределяются по 3 корзинам.

ξ - число шаров в первой корзине

η - число шаров во второй корзине

$\eta \backslash \xi$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	0
2	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	0
3	$\frac{1}{27}$	0	0	0

$P(\xi = 0, \eta = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

$P(\xi = 1, \eta = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot C_3^1 = \frac{3}{27}$

$P(\xi = 1, \eta = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 = \frac{6}{27}$

Найдём распределение компонент:

ξ :

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**
P_i	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

P_i - сумма значений в i+1 столбце

$$M\xi = 1$$
$$M\xi^2 = \frac{45}{27}$$
$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{18}{27}$$

η :

y_j	**0**	**1**	**2**	**3**
P_j	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

P_j - сумма значений в j+1 строке

Ковариация:
$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta$
$\operatorname{cov}(\xi, \xi) = D_\xi$
$M(\xi\eta) = \sum_i \sum_j x_i y_j P(\xi = x_i, \eta = y_j)$
$= \frac{6}{27} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{3}{27} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{3}{27} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{18}{27}$
$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \frac{18}{27} - 1 \cdot 1 = -\frac{1}{3}$
$\rho_{\xi\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D_\xi}\sqrt{D_\eta}} = -\frac{\frac{1}{3}}{\frac{18}{27}} = -\frac{1}{2}$

Свойства числовых характеристик

1. $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$
2. $M(\alpha\xi) = \alpha M(\xi)$
3. $M(\alpha) = \alpha$
4. $D_\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) = M(\xi^2) - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 = M(\xi^2) - (M\xi)^2$
5. $D\alpha = M(\alpha^2) - (M\alpha)^2 = 0$
6. $D(\alpha\xi) = M(\alpha^2\xi^2) - (M\alpha\xi)^2 = \alpha^2 D\xi$
7. $D(\xi + \eta) = M(\xi + \eta)^2 - (M\xi + M\eta)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2 + M\eta^2 - (M\eta)^2 + 2M(\xi\eta) - 2M\xi M\eta = D\xi + D\eta - 2\operatorname{cov}(\xi$
   Если случайные величины независимы, то $\rho_{\xi\eta} = 0 = \operatorname{cov}(\xi, \eta)$. Обратное утверждение неверно.
   Условие независимости случайных величин.
   $$\forall i, j: \quad P(\xi = xi, \eta = yj) = P(\xi = xi)P(\eta = yj)$$
8. $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\eta, \xi)$
9. $\operatorname{cov}(\xi + \eta, \zeta) = \operatorname{cov}(\xi, \zeta) + \operatorname{cov}(\eta, \zeta)$
10. $\operatorname{cov}(\alpha\xi, \eta) = \alpha\operatorname{cov}(\xi, \eta)$
11. $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = D\xi \geq 0$
    cov - это скалярное произведение в пространстве случайных величин.

$\rho_{\xi\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}\sqrt{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}}$ - "косинус" угла между случайными величинами
$-1 \le \rho_{\xi,\eta} \le 1$
12) $\operatorname{cov}(\alpha+\xi,\eta) = \operatorname{cov}(\xi,\eta) + M(\alpha\eta) - (M\alpha)M(\eta) = \operatorname{cov}(\xi,\eta)$
13) $D(\xi+\alpha) = D\xi$

Пример:
Зависимость между оценками по кратным интегралам и термехом:

$$\xi - \text{кратные интегралы}$$
$$\eta - \text{термех}$$
$$3,3-7$$
$$3,4-1$$
$$3,5-0$$
$$4,3-27$$
$$4,4-9$$
$$4,5-0$$
$$5,3-19$$
$$5,4-24$$
$$5,5-13$$
$$n=100$$

$\xi\backslash\eta$	**3**	**4**	**5**
3	0.07	0.27	0.19
4	0.01	0.09	0.24
5	0	0	0.13

ξ:

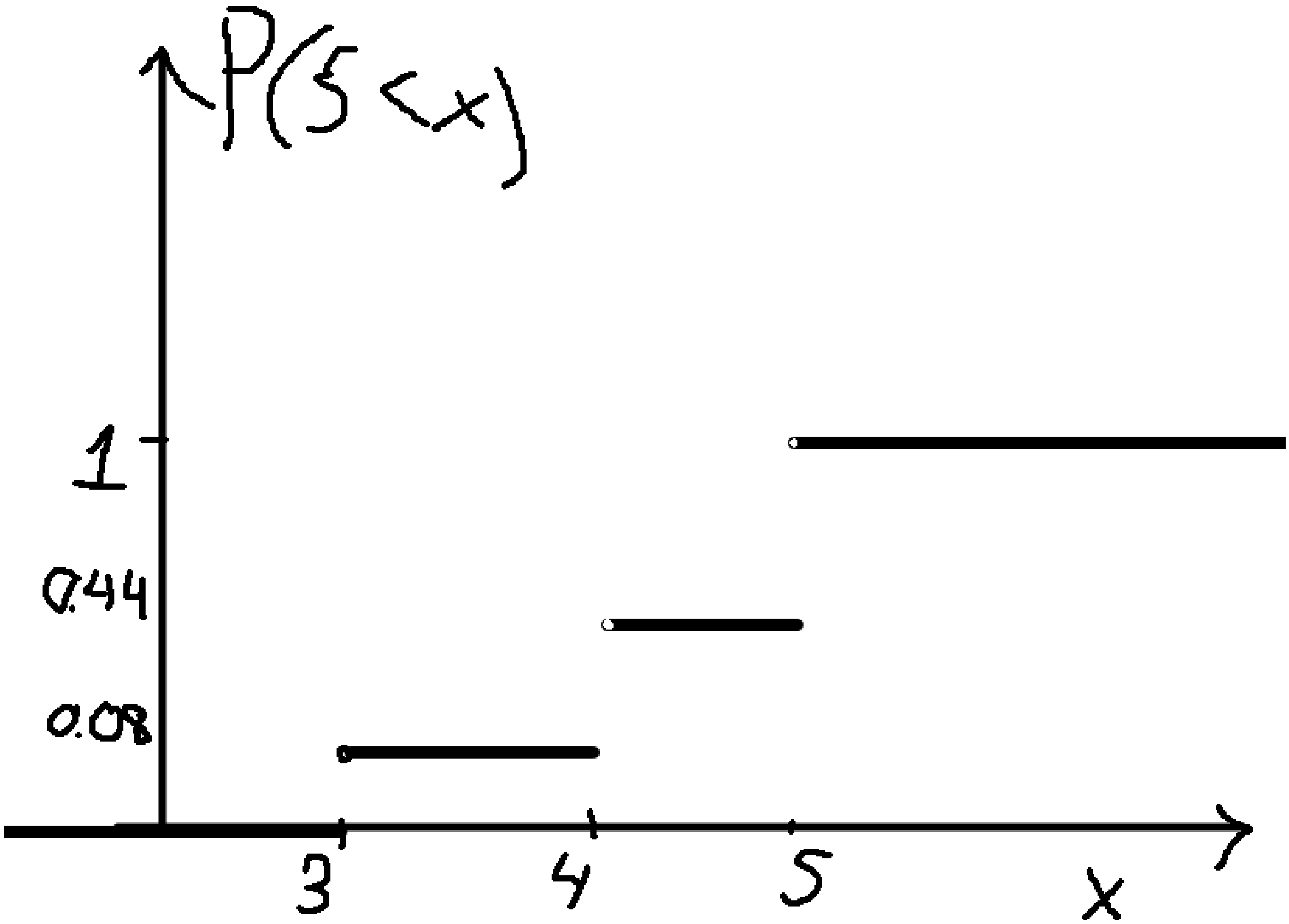
x_i	**3**	**4**	**5**
P_i	0.08	0.36	0.56

η:

y_j	**3**	**4**	**5**
P_j	0.53	0.34	0.13

$$M\xi = 4.48$$
$$D\xi = 0.41$$
$$M\eta = 3.6$$
$$D\eta = 0.5$$
$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0.2$$
$$\rho_{\xi\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = 0.45$$

$F_\xi(x) = P(\xi < x)$



$F(x+0) - F(x) = P(\xi = x)$
$P(\alpha \le \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3 \\ 0.08, & 3 < x \le 4 \\ 0.44, & 4 < x \le 5 \\ 1, & 5 < x \end{cases}$$

03/04/2025

Условные законы распределения

$\xi \backslash \eta$	**3**	**4**	**5**
3	0.07	0.27	0.19
4	0.01	0.09	0.24
5	0	0	0.13

Найдём условные распределения

$$P(\xi | \eta = y_j) = \frac{P(\xi = x_i, \eta = y_j)}{P(\eta = y_j)}$$

$$P(\xi = 3|\eta = 3) = \frac{P(\xi = 3, \eta = 3)}{P(\eta = 3)} = 0.13$$
$$P(\xi = 4|\eta = 3) = \frac{P(\xi = 4, \eta = 3)}{P(\eta = 3)} = 0.51$$
$$P(\xi = 5|\eta = 3) = \frac{P(\xi = 5, \eta = 3)}{P(\eta = 3)} = 0.36$$

3	4	5
0.13	0.51	0.3

$$M(\xi|\eta = 3) = 4.23$$

$$P(\xi = 3|\eta = 4) = 0.03$$
$$P(\xi = 4|\eta = 4) = 0.26$$
$$P(\xi = 5|\eta = 4) = 0.71$$
$$P(\xi|\eta = 5) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Производная Радона-Никодима

Матожидание с точки зрения функционального анализа - интеграл Лебега

$$M(\xi|\eta) = \varphi(\eta) = \beta_0 + \beta_1\eta$$

Сплайны

Доказать, что для случайной величины ξ распределённой по геометрическому закону, для $n > m$ будет верно

$$P(\xi \geq n|\xi \geq m) = P(\xi \geq n - m)$$

1	2	3	...	k	...
p	pq	pq^2	$\ldots$	pq^{k-1}	$\ldots$

$P(\xi = k) = pq^{k-1}$

$$P(\xi \geq n|\xi \geq m) = \frac{P(\xi \geq n, \xi \geq m)}{P(\xi \geq m)} = \frac{P(\xi \geq n)}{P(\xi \geq m)} = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} pq^{k-1}}{\sum_{k=m}^{\infty} pq^{k-1}} = q^{n-m}$$
$$P(\xi \geq n - m) = \sum_{k=n-m}^{\infty} pq^{k-1} = \frac{pq^{n-m-1}}{1-q} = q^{n-m-1}$$

Производящие функции

$$\psi_\xi(z) = Mz^\xi, \xi \in \mathbb{N}_0$$
$$M\varphi(\xi) = \sum_k \varphi(k)P(\xi = k)$$
$$\psi_\xi(z) = \sum_k P(\xi = k)z^k$$

Пусть ξ - число очков на кубике

$\xi = \overline{1..6}$

$\psi_\xi(z) = \frac{1}{6}(z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6)$

Характеристики случайной величины:

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(\xi = k)$$
$$\psi_\xi(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k P(\xi = k)$$
$$\psi'_\xi(z) = \sum_{k=0}^{n} k z^{k-1} P(\xi = k)$$
$$\psi'_\xi(1) = M(\xi)$$
$$M(\xi^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 P(\xi = k)$$
$$\psi''_\xi(z) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) z^{k-2} P(\xi = k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} k^2 z^{k-2} P(\xi = k) - \sum_{k=0}^{n} k z^{k-2} P(\xi = k)$$
$$M\xi^2 = \psi''_\xi(1) + \psi'_\xi(1)$$
$$D\xi = \psi''_\xi(1) + \psi'_\xi(1) - (\psi'_\xi(1))^2$$

Мультипликативное свойство:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n - \text{независимые случайные величины}$$
$$\eta = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$$
$$\psi_\eta(z) = Mz^2 = M(z^{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}) = M(z^{\xi_1} z^{\xi_2} \ldots z^{\xi_n}) = M(z^{\xi_1}) M(z^{\xi_2}) \cdot \ldots \cdot M(z^{\xi_n}) = \prod_{k=1}^{n} \psi_{\xi_k}(z)$$

ξ - число заказов за час

ξ распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda = 20$

η_i - доход от одного заказа

$$\eta_i = \begin{cases} 100, & p = 0.4 \\ 120, & p = 0.6 \end{cases}$$

Найти производящую функцию дохода

$$S = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_\xi$$
$$\psi_{\eta_i}(z) = z^{100} \cdot 0.4 + z^{120} \cdot 0.6$$
$$\text{Зафиксируем } \xi = n$$
$$S = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n$$
$$\psi_S(z|\xi = n) = (\psi_{\eta_i}(z))^n$$
$$\psi_S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_S(z|\xi = k) P(\xi = k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (\psi_{\eta_i}(z))^k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \psi_{\eta_i}(z))^k}{k!} = \exp(\lambda(\psi_{\eta_i}(z) - 1)) =$$
$$= \exp(\lambda(z^{100} \cdot 0.4 + z^{120} \cdot 0.6 - 1))$$
$$\psi'_S(z) = \exp(\lambda(z^{100} \cdot 0.4 + z^{120} \cdot 0.6 - 1)) \cdot \lambda(40 z^{99} + 72 z^{119})$$
$$\psi'_S(1) = 2240 - \text{ математическое ожидание}$$

Среда - допзанятие

10 апреля РК

#конец