11/02/2025

$n = 2$ **- плоскость**	L **- линейное пространство**
$n = 3$ - пространство	E - евклидово пространство

L_2
В линейном пространстве есть линейные элементы (векторы):

$$+, \lambda\cdot$$
$$1)\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad \text{- полугруппа}$$
$$2)\exists 0 : \forall \vec{a} | \vec{a} + 0 = \vec{a}$$
$$3)\forall \vec{a}\ \exists -\vec{a}|\ \vec{a} + -\vec{a} = 0 \quad \text{1,2,3 - группа}$$
$$4)\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} - 1, 2, 3, 4 \quad \text{1,2,3,4 - Абелева группа}$$
$$5)\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$
$$6)(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$$
$$7)\lambda_1(\lambda_2\vec{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{a}$$
$$8)1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

$$8 \to 1 \neq 0$$
$$\forall \vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a^i \vec{e}_i$$

Правило Эйнштейна:

$$\sum_{i=1}^{N} a^i \vec{e}_i = a^i e_i$$

Правило Эйнштейна не распространяется на греческий алфавит
Вместо сумма говорим свёртка. Выше представлена одинарная свёртка.
Вектор не обязан быть геометрическим вектором
Например, в множестве полиномов не выше 2 степени:

$$\vec{a} = a^1 x^2 + a^2 x + a^3$$
$$\vec{e_1} = 1$$
$$\vec{e_2} = x$$
$$\vec{e_3} = x^2$$
$$\implies \vec{a} = a^i \vec{e}_i$$

Базис можно менять
Рассмотрим Линейное пространство, сопряжённое пространство, евклидово

пространство
Симметрия верхнего и нижнего индексов
Индекс:
i,j,k,l,m,n,p,q,r,s,t
В плоскости вместо маленьких букв используются заглавные
буква с индексом означает несколько чисел
т.е.

$$a^i - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Замена базиса

$$\vec{e_i} \to \vec{e'_i}$$

$$\vec{a} = a'^i \vec{e'_i} = a^i \vec{e_i}$$
$$\vec{e'_i} = Q^j{}_i \vec{e_j}$$

Верхний индекс ближе к букве, чем нижний

$$Q^I{}_J = \begin{pmatrix} Q^1{}_1 & Q^1{}_2 \\ Q^2{}_1 & Q^2{}_2 \end{pmatrix}$$
$$a^i = Q^j{}_i a'^i$$

$Q^j{}_i$ - матрица преобразования
Свойство: $Q = \det(Q^j{}_i) \neq 0$
Доказательство:

$$Q = 0$$
$$\exists \text{ Линейная нетривиальная комбинация столбцов с суммой } = 0$$
$$\sum_{\alpha=1}^{N} S_\alpha Q^j{}_\alpha = 0$$

Свободный индекс означает, что пробегаются все возможные значения
$\sum_{\alpha=1}^{N} S_\alpha Q^j{}_\alpha = 0 \leftrightarrow \sum_{\alpha=1}^{N} S_\alpha Q^j{}_\alpha = 0, j \in \{1,2,3\}$

$$\sum_{\alpha=1}^{3} S_\alpha \vec{e'_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{3} S_\alpha Q^j{}_i \vec{e_j} = \lambda'^j \vec{e_j} = 0 - \textit{противоречие}$$

$$Q \neq_0 \implies \exists Q^{-1} = P$$
$$P^i{}_j Q^j{}_k = \delta^i_k = \begin{cases} 1, i = k \\ 0, i \neq k \end{cases}$$

δ - символ Кронекера, вводится для записи единичной матрицы
${p^i}_j {Q^j}_k$ - то же самое, что матричное умножение
Сопряжённое линейные пространство L_n^*

$$f : L_n \to \mathbb{R}$$
$$f = f(\vec{a})$$

Линейность: $f(\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2}) = \lambda_1 f(\vec{a_1}) + \lambda_2 f(\vec{a_2})$
Сопряжённое линейное пространство.
Функционал - линейное отображение, элемент L_n^*

$$f(\vec{a}) = f(a^i \vec{e_i}) = a^i f(\vec{e_i}) = a^i f_i, \qquad f_i = f(\vec{e_i})$$
$$\vec{a} = a^i \vec{e_i}$$
$$f = a^i f_i$$

Для вектора меняются векторные координаты (компоненты), а для функционала - значение функционала над базисными векторами
Рассматриваем базисные функционалы:

$$e^1 = f(\vec{e_1})$$
$$e^2 = f(\vec{e_2})$$
$$e^3 = f(\vec{e_3})$$

$$e^i(\vec{e_j}) = \delta^i_j$$

$$e^i(\vec{a}) = e^i(a^j \vec{e_k}) = a^j e^i(\vec{e_j}) = a^j \delta^i_j = a^i$$
$$e_i : \ \vec{a} \to a^i$$

$f(\vec{a}) = f_i e^i(\vec{a})$ - разложение $\vec{a}$ по базисным функционалам
Наблюдается двойственность того, что меняется при смене базиса, и того, что в каком месте индесы - вверху или внизу
Определение взаимных базисов:

Базис $\vec{e_j} \in L_n$ и $e^i \in L_n^*$ взаимны $\Leftrightarrow e^i(\vec{e_j}) = \delta^i_j$

Отображение линейных отображений???
Евклидово пространство E_n
$\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$
Точки! Расстояния! Углы!

Криволинейные координаты.
Мы можем охарактеризовать положение точки в 3х мерном пространстве с помощью 3 декартовых координат.

$$\vec{x} = \vec{x}(x^i) = \vec{x}(x^j)$$

x^i - декартовы, x^j - криволинейные

$$x^i = x^i(x^j)$$

$$x^j = x^j(x^i)$$

$$\vec{x} = \vec{x}(x^1, x^2, x^3) = \begin{cases} x^1(x^1, x^2, x^3) \\ x^2(x^1, x^2, x^3) \\ x^3(x^1, x^2, x^3) \end{cases}$$

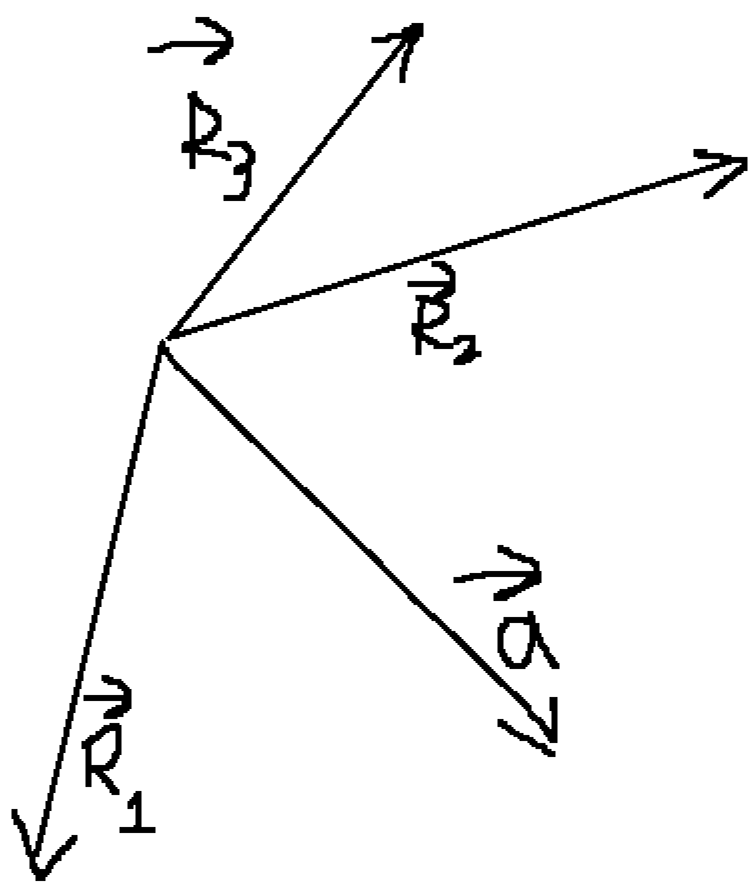
Если зафиксировать x^2, x^3, то получится функция от одной неизвестной
Криволинейные орты:

$$\vec{R}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial x^i}$$

$$\vec{R}_i = \frac{\partial(\vec{x}^j \vec{e}_j)}{\partial x^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} e_j$$

${Q^j}_i = \frac{\partial x^j}{\partial x^i}$ - матрица преобразования или матрица Якоби

$Q \neq 0$ доказывается точно так же



$\vec{a} = a^i \vec{R}_i$, a^i - контрвариантные компоненты вектора $\vec{a}$
Метрическая матрица

$$g_{ij} = \vec{R}_i \cdot \vec{R}_j$$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

$$g_{ij} = g_{ji}$$

Свойство определителя метрической матрицы:

$$g = \det(g_{ij}) > 0$$

Рассмотрим переход от декартового базиса к криволинейному $\vec{e}_i \to \vec{R}_i$
$g_{ij}^{(декартовая)} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$

$$\vec{R}_i = Q_i^j \vec{e}_j$$
$$\vec{R}_k = Q_k^l \vec{e}_l$$
$$g_{ij} = \vec{R}_i \cdot \vec{R}_k = Q_i^j Q_k^l \vec{e}_j \cdot \vec{e}_l = Q_i^j Q_k^l \delta_{jk}$$

Компоненты метрического тензора ковариантны.

Верхние индексы ковариanты.

Нижние индексы - контрвариантны.

$$g_{lj} Q_i^j = X_{li}$$
$$\det(Q_i^j Q_k^l \delta_{jk}) = \det(Q_i^j) \det(Q_k^l) \det(\delta_{jk}) = QQ1 = Q \cdot Q > 0$$

Теорема Рисса.

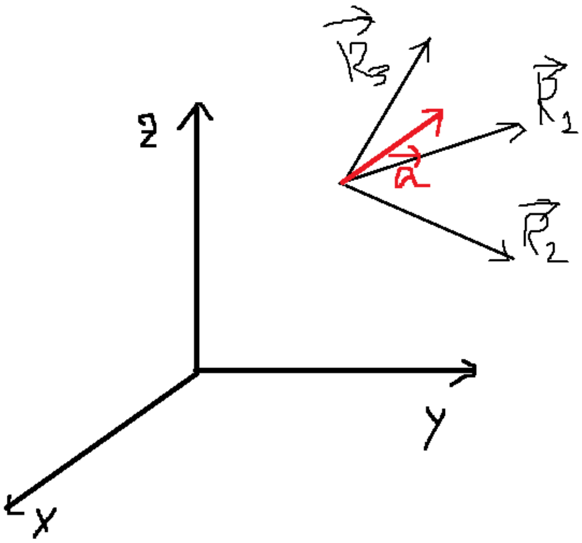
$\exists$ биекция, независящая от базисов, между элементами

$$\exists f : E_n^* \to E_n \wedge \exists f^{-1}$$

$$\exists! b \in E_n : \forall \vec{a} : f(\vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Доказательство теоремы Рисса:

$$\forall f(\vec{a}), \forall \vec{a} \in E_n$$
$$\exists! \vec{b} \in E_n : f(\vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$$



$$\vec{b} = b^i \vec{R}_i$$

$$b^i = g^{ij} f_j, \text{ где } f_j = f(\vec{R}_j)$$

f_j - базисные функционалы

$$\vec{b} \cdot \vec{a} = g^{ij} f(\vec{R}_j) \vec{R}_i \cdot a^k \vec{R}_k =$$

$$\vec{R}_i \cdot \vec{R}_k = g_{ik}$$

$$= g^{ij} g_{ik} a^k f(\vec{R}_j) = \delta^j_k a^k f(\vec{R}_j) = a^j f_j = f(\vec{a})$$

Пусть $\exists \vec{b_1} \neq \vec{b_2} : \forall a \; f(\vec{a}) = \vec{b_1} \cdot \vec{a} = \vec{b_2} \cdot \vec{a} \implies$

$$(\vec{b_1} - \vec{b_2}) \cdot \vec{a} \equiv 0$$

Возьмём

$$\vec{a} = \vec{b_1} - \vec{b_2}$$

$$|\vec{b_1} - \vec{b_2}|^2 = 0$$

Противоречие

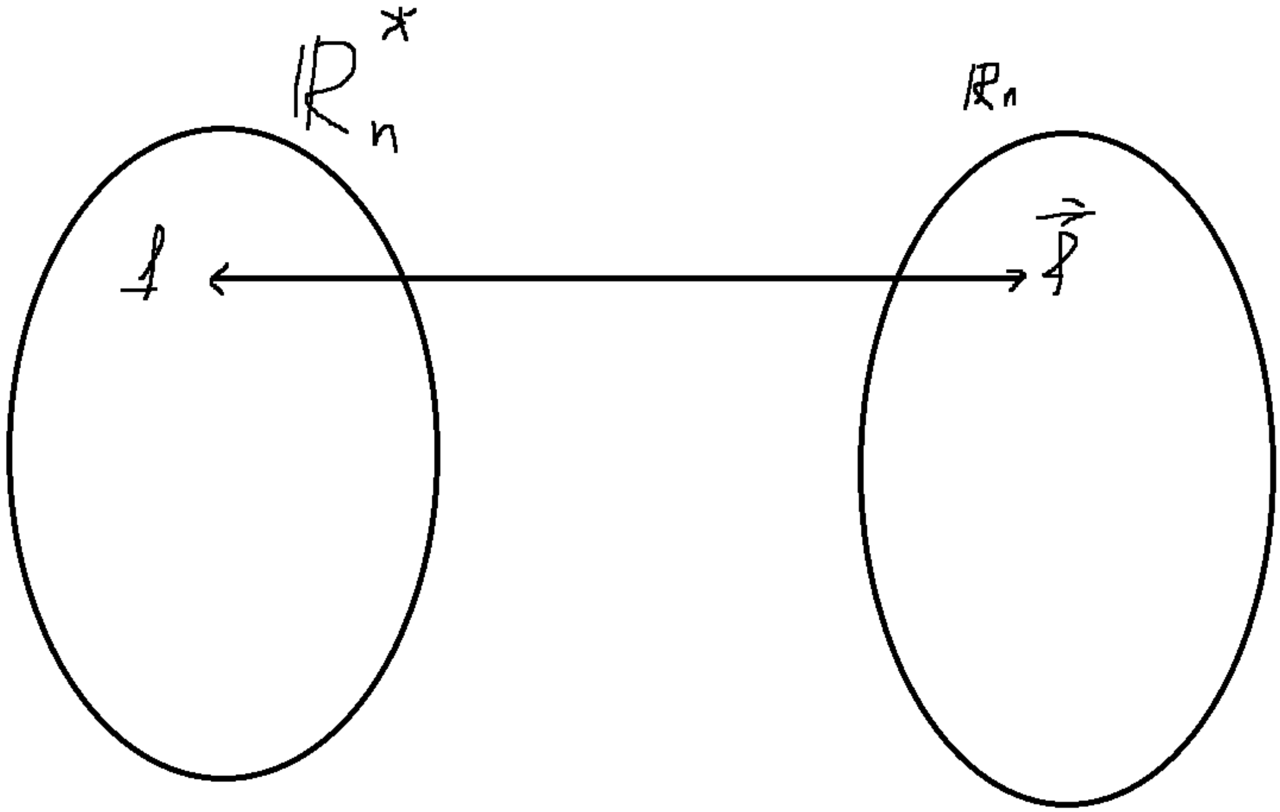
Следствие

$$f(\vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$f \leftrightarrow \vec{b}$$

$$f \in R_n^* \leftrightarrow \vec{f} \in R_n$$

Отождествление E_n^* и E_n !



$$e^i(\vec{R}_j) = \vec{e^i} \cdot \vec{R}_j = \delta^i_j$$

$$\vec{e^i} = e^{ik}\vec{R}_k$$

$$e^{ik}(\vec{R}_k \cdot \vec{R}_j) = \delta^i_j$$

$e^{ik} = g^{ik}$ - обратная метрическая матрица

$$\vec{e^i} = g^{ik}\vec{R}_k$$

$\vec{R}^i = g^{ik}\vec{R}_k$ - взаимный базис

$\vec{R}_k$ - локальный базис

$$\vec{R}_i = g_{ik}\vec{R}^k$$

Док-во: $g_{ik}\vec{R}^k = g_{ik}g^{kl}\vec{R}_l = \delta^l_i\vec{R}_l = \vec{R}_i$

$\vec{a} \in E_n$ можно разложить двояко:

$\vec{a} = a^i\vec{R}_i$ - контрвариантные компоненты

$\vec{a} = a_j\vec{R}^j$ - ковариантные компоненты

$$\begin{cases} \vec{R}_i = Q^i_j\vec{e}_i \\ a_j = Q^j_i a_j^{\text{декарт.}} \end{cases} \text{ - ковариант}$$

$a_j = Q^j_i a_j^{\text{декарт.}}$ - контр

$$\vec{R}^i \cdot \vec{R}_j = \delta^i_j$$

Из кватернионов получилось скалярное и векторное произведение

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a^i\vec{R}_i\cdot b_j\vec{R}^j=a^ib_j\vec{R}_i\cdot\vec{R}^j=a^ib_j\delta_i^j=a^ib_i$$
$$\text{Поднятие индекса: } a^i=g^{ij}a_j$$
$$\vec{a}=a^i\vec{R}_i=a_j\vec{R}^j=g^{ij}a_j\vec{R}_i$$
$$\text{Опускание индекса: } a_i=g_{ij}a^j$$

Векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$

Символы Леви-Чивиты:

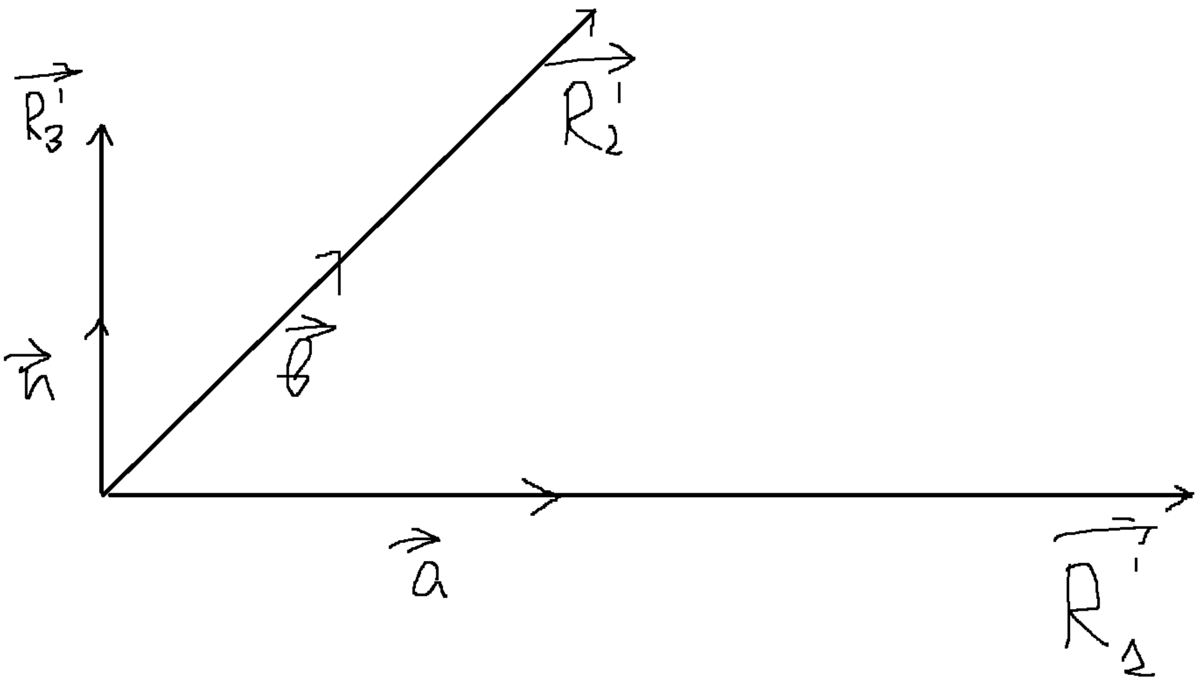
$$\varepsilon_{ijk}=\varepsilon^{ijk}=\begin{cases}+1, & \text{Ориентация } (123)\\ -1, & \text{Ориентация } (213)\\ 0, & \text{Хотя бы 2 из 3 индексов совпадают}\end{cases}$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ilm}=\delta_j^l\delta_k^m-\delta_k^l\delta_j^m$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijl}=2\delta_k^l$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk}=2\delta_k^k$$
$$\text{Для 3хмерного пространства } \delta_k^k=3$$
$$\det A_\beta^\alpha\cdot\varepsilon_{ijk}=\varepsilon_{lmn}A_i^lA_j^mA_k^n$$
$$\text{Частный случай: } i=1,\ j=2,\ k=3:$$
$$\det A_\beta^\alpha=\varepsilon_{lmn}A_1^lA_2^mA_3^k=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&2&1\\2&1&3\\1&3&2\end{pmatrix}$$
$$g\varepsilon_{ijk}=\varepsilon^{lmn}g_{li}g_{mj}g_{nk}$$
$$\vec{a}=[a^i]\vec{R}_i$$
$$\vec{b}=[b^i]\vec{R}_j$$
$$[\vec{R}^k]$$
$$\sqrt{g}\varepsilon_{ijk}a^ib^j\vec{R}^k=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{lmn}(a^ig_{il})(b^jg_{jm})(\vec{R}^kg_{kn})$$
$$\vec{a}\times\vec{b}=\sqrt{g}\varepsilon_{ijk}a^ib^j\vec{R}^k=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{lmn}a_lb_m\vec{R}_n$$

Совпадение с обычным определением:

1. Направление

\begin{gather} \begin{cases} (\vec{a}\times \vec{b})\cdot\vec{a}=0 \\ (\vec{a}\times \vec{b})\cdot \vec{

\end{gather}$$



$$\begin{gather}
S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = |\vec{a}\times\vec{b}| \\
|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = a^j a_j = g_{ij}a^i a^j = \\
g_{11}a^1a^1 \\
|\vec{b}|^2 = g_{22}b^2b^2 \\
S = \sqrt{g_{11}g_{22}}|\vec{a^1}\vec{b^2}|\sin\varphi = \\
\sqrt{g_{11}g_{22}}|\vec{a^1}\vec{b^2}|\sqrt{1-\cos^2\varphi} \implies \\
\cos\varphi = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \implies \\
\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{\frac{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}{g_{11}g_{22}}} = \sqrt{\frac{gg^{33}}{\cancel{g_{11}g_{22}}}} \\
S = |a^1b^2|\sqrt{gg^{33}} \\
|\vec{a}\times\vec{b}| = |\sqrt{g}\varepsilon_{123}a^1b^2\vec{R}^3| = \sqrt{g}|a^1b^2|\sqrt{g^{33}}
\end{gather}$$

25/02/2025

Тензоры II ранга
Отсебятина:

$$
\begin{gathered}
f: V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \rightarrow W: \\
f(\lambda_{11} v_{11}+\lambda_{12} v_{12}, \lambda_{21} v_{21}+\lambda_{22} v_{22}, \ldots, \lambda_{n_1} v_{n_1}+\lambda_{n_2} v_{n_2})= \\
=\lambda_{11} f(v_{11}, \lambda_{21} v_{21}+\lambda_{22} v_{22}, \ldots, \lambda_{n_1} v_{n_1}+\lambda_{n_2} v_{n_2})+ \\
+\lambda_{12} f(v_{12}, \lambda_{21} v_{21}+\lambda_{22} v_{22}, \ldots, \lambda_{n_1} v_{n_1}+\lambda_{n_2} v_{n_2})= \\
=\lambda_{21} f(\lambda_{11} v_{11}+\lambda_{12} v_{12}, v_{21}, \ldots, \lambda_{n_1} v_{n_1}+\lambda_{n_2} v_{n_2})+ \\
+\lambda_{22} f(\lambda_{11} v_{11}+\lambda_{12} v_{12}, v_{22}, \ldots, \lambda_{n_1} v_{n_1}+\lambda_{n_2} v_{n_2})= \\
=\ldots= \\
=\lambda_{n_1} f(\lambda_{11} v_{11}+\lambda_{12} v_{12}, \lambda_{21} v_{21}+\lambda_{22} v_{22}, \ldots, v_{n_1})+ \\
+\lambda_{n_2} f(\lambda_{11} v_{11}+\lambda_{12} v_{12}, \lambda_{21} v_{21}+\lambda_{22} v_{22}, \ldots, v_{n_2})
\end{gathered}
$$

r - ранг тензора - количество индексов

r=0 - скаляр

r=1 - вектор, функционал

r=2

r=3

r=4

Все тензоры образуют специальное линейное пространство $(+, \lambda\cdot)$

специальное - обладает дополнительным операциями

$$
a_j = Q_j^i a_i^{дек}
$$

Нижний - с помощью Q. Верхний - с помощью P.

$$
g^{ij} = P_k^i P_l^j g^{kl}
$$

Отношение эквивалентности (тожд).

Аксиомы:

симметричность $A * B \Leftrightarrow B * A$

рефлексивность $A * A$

транзитивность $\begin{matrix} A * B \\ B * C \end{matrix} \Rightarrow A * C$

Класс эквивалентности:

$[a] = \{x | x \sim a\}$

1. $A \sim B \Leftrightarrow [A] = [B]$

   Доказательство:

$$
\begin{gathered}
\Longrightarrow A \sim B, C \in [A] \Rightarrow C \sim A \Rightarrow \\
C \sim B \Rightarrow C \in [B] \\
[A] \subset [B] \\
\text{Аналогично, если A поменять на B выведем} \\
[B] \subset [A] \Rightarrow [A] = [B] \\
\Longleftarrow [A] = [B] \Rightarrow \\
A \in [B] \Rightarrow A \sim B
\end{gathered}
$$

2. Множество классов эквивалентности разбивает множество на непересекающиеся части и каждый элемент входит в какую-либо часть
   Пусть $\exists x$ не лежит ни в каком классе эквивалентности. Рассмотрим $[x]$. $x \in [x]$.
   Противоречие
   Пусть классы эквивалентности могут пересекаться.

$$\exists A, B \ \ [A] \cap [B] \neq \varnothing \Rightarrow \exists C : C \in [A] \wedge C \in [B] \Rightarrow \\ C \sim A \wedge C \sim B \Rightarrow A \sim B \Rightarrow [A] = [B]$$

$$n = 2 \text{ - плоскость} \\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \\ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f} \, (n = 3) \\ \underbrace{E_2}_{\text{левые}} \times \underbrace{E_2}_{\text{правые}}$$

   Признаки эквивалентности:
   $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \sim \vec{c}, \vec{d}, \vec{a}, \vec{b}$
   $\lambda \neq 0 \ \ (\lambda\vec{a})\vec{b}(\lambda\vec{c})\vec{d} = \vec{a}(\lambda\vec{b})\vec{c}(\lambda\vec{d})$
   Нулевая пара - пара, в которой есть хотя бы 1 нулевой вектор
   $\vec{a}\vec{0} \sim \vec{0}\vec{c} \sim \vec{0}\vec{0}$

Умножение на число

$$\lambda[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}] = [(\lambda\vec{a})\ \vec{b}\ (\lambda\vec{c})\ \vec{d}] = [\vec{a}\ (\lambda\vec{b})\ \vec{c}\ (\lambda\vec{d})] \\ (\lambda\vec{a})\ \vec{b}\ (\lambda\vec{c})\ \vec{d} \sim \vec{a}\ (\lambda\vec{b})\ \vec{c}\ (\lambda\vec{d})$$

Частный случай класса эквивалентности

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{0}\ \vec{0}] \text{ - только 1 пара ненулевая}$$

Диада

$$\vec{a} \otimes \vec{b} \text{ - векторная диада} \\ (\vec{a} + \vec{a}') \otimes \vec{b} = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{a}' \otimes \vec{b} \\ (\vec{a} + \vec{a}') \otimes \vec{b} = [(\vec{a} + \vec{a}')\vec{b}\vec{0}\vec{0}] \\ (\vec{a} + \vec{a}') \otimes \vec{b} = [(\vec{a} + \vec{a}')\vec{b}\vec{0}\vec{0}] = [\vec{a}\vec{b}\vec{0}\vec{0}] + [\vec{a}'\vec{b}\vec{0}\vec{0}] = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{a}' \otimes \vec{b}$$

Все левые и правые совпадения - однотипные наборы

$$[\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}_1, \vec{d}] + [\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}_2, \vec{d}] = [(\vec{a}_1 + \vec{a}_2), \vec{b}, (\vec{c}_1 + \vec{c}_2), \vec{d}] \\ (\lambda + \mu)\vec{a} \otimes \vec{b} = \lambda\vec{a} \otimes \vec{b} + \mu\vec{a} \otimes \vec{b} \\ (\lambda + \mu)\vec{a} \otimes \vec{b} = (\lambda + \mu)[\vec{a}\vec{b}\vec{0}\vec{b}] = \\ = [(\lambda + \mu)\vec{a}\vec{b}\vec{0}\vec{b}] = [(\lambda\vec{a} + \mu\vec{a})\vec{b}\vec{0}\vec{b}] = \\ = [(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{0}\vec{0}] + [(\mu\vec{a})\vec{b}\vec{0}\vec{0}] = \lambda\vec{a} \otimes \vec{b} + \mu\vec{a} \otimes \vec{b}$$

Базисные диады

$$\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J$$

$$\forall[\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}] \text{ можно разложить как линейную комбинацию } \vec{R}_I \otimes \vec{R}_J$$
$$\text{Доказательство:}$$
$$\vec{a} \otimes \vec{b} = (a^I R_I) \otimes (b^J \otimes R_J) = a^I b^J \vec{R}_I \otimes \vec{R}_J$$
$$\vec{c} \otimes \vec{d} = c^I d^J \vec{R}_I \otimes \vec{R}_J$$
$$[\vec{a}(\vec{b}+\vec{0})\vec{c}(\vec{0}+\vec{d})] = [\vec{a}\vec{b}\vec{0}\vec{d}] + [\vec{a}\vec{0}\vec{c}\vec{d}] =$$
$$= \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{c} \otimes \vec{b} = (a^I b^J + c^I d^J)\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J$$
$$\vec{T} = [\vec{a}\vec{b}\vec{c}\vec{d}] = T^{IJ}\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J = (a^I b^J + c^I d^J)\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J$$

Независимость диад, состоящих из базисных векторов:
От противного

$$\vec{R}_2 \otimes \vec{R}_1$$
$$a^{IJ}\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J = \Theta = [\quad \underbrace{\vec{a}\vec{b}}_{\text{где-то здесь есть 0}} \quad \underbrace{\vec{c}\vec{d}}_{\text{где-то здесь есть 0}} \quad],\ a^{IJ} \not\equiv 0$$
$$\vec{R}_I \otimes (a^{IJ}\vec{R}_J) = \Theta$$
$$[\vec{R}_1(a^{1J}\vec{R}_J)\vec{R}_2(a^{2J}\vec{R}_J)] = \Theta$$
$$a^{1J}\vec{R}_J = \vec{0} \text{ , где } \vec{R}_J \text{ - базисы}$$
$$\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J \text{ - базис в пространстве } [\vec{a}\vec{b}\vec{c}\vec{d}]$$
$$2^2 = 4 \text{ - размерность}$$
$$C = T + B = \underbrace{(T^{IJ} + B^{IJ})}_{C^{IJ}}\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J$$

Аксиомы линейного пространства выполняются.

$$E_2 \otimes E_2 = \left[(E_2 \times E_2)^2\right]$$

Тензор 2 порядка - элемент тензорного пространства

$$n = 2:\ \vec{T} = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{c} \otimes \vec{d}$$
$$n = 3: \vec{T} = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{c} \otimes \vec{d} + \vec{e} \otimes \vec{f}$$
$$\vec{D} = \vec{a} \otimes \vec{b} = a^I b^J \vec{R}_I \otimes \vec{R}_J =$$
$$= a^I b^J Q^k_I \vec{e}_k \otimes Q^l_J \vec{e}_l = Q^K_I Q^L_J D^{IJ} \vec{e}_K \otimes \vec{e}_L$$
$$\vec{D} = D^{KL}_{\text{декарт}}\, \vec{e}_K \otimes \vec{e}_L$$
$$D^{KL}_{\text{декарт}} = Q^K_I Q^L_J D^{IJ}$$

03/04/2025

Свойства тензоров 2 ранга:
$E_2, (L_3)$ - n=2 - плоскость

$E_3, (L_3)$ - n=3 - пространство

$n=2\ (I,J)\vec{T}=\vec{a}\otimes\vec{b}+\vec{c}\otimes\vec{d}=[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\vec{d}]$

$n=3\ (i,j,k)\vec{T}=\vec{a}\otimes\vec{b}+\vec{c}\otimes\vec{d}+\vec{e}\otimes\vec{f}=[\vec{a}\vec{b}\vec{c}\vec{d}\vec{e}\vec{f}]$

Свойства диад

$$T_{IJ}=g_{IK}T^K_J=g_{JK}T_I{}^K$$
$$T^K_J=g_{JK}T^{KL}$$
$$T_I{}^K=g_{IK}T^{LK}$$

Транспониированные и симметричные тензоры.

$$\exists\vec{T}\Rightarrow\vec{T}^T:\ \begin{matrix}(T^T)^{IJ}=T^{JI}\\ \text{или }(T^T)_{IJ}=T_{JI}\end{matrix}$$

Симметричный тензор:

$$\vec{T}^T=\vec{T}$$

$$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}\Rightarrow C^{IJ}=A^{IJ}+B^{IJ}$$
$$\vec{L}=\lambda\vec{T}\Rightarrow L^{IJ}=\lambda T^{IJ}$$

Прямые и обратные тензорные признаки.

$$\begin{matrix}A^{IJ}\sim\vec{A}\\ B^{IJ}\sim\vec{B}\end{matrix}\Rightarrow A^{IJ}+B^{IJ}\text{ тоже компоненты тензора}$$

Пусть неизвестно, является ли T^{IJ} компонентами тензора. Но, известно, что

$$T^{IJ}\quad\underbrace{V^K_J}_{\text{компоненты}}\quad=\quad\underbrace{C^{IK}}_{\text{компоненты}}\quad\Rightarrow$$

$$T^{IJ}\text{ - компоненты}$$

$$C^{IJ}=Q^I{}_SQ^K{}_PC'^{SP}$$
$$B^K_J=Q^K_IP^M_JB'^L_M$$
$$\times P^N_IP^T{}_K$$
$$\text{левая часть }=P^N_IP^T{}_K(Q^K{}_LP^M_J)T^{IJ}B'^L_M=P^N_IP^M_JT^{IJ}B'^T_M$$
$$\text{правая часть }=P^N_IP^T{}_KQ^I{}_SQ^K{}_PC'^{SP}=C'^{NT}$$
$$\underbrace{P^N_IP^M_JT^{IJ}}_{T'^{MN}}B'^T_M=C'^{NT}$$
$$T'^{MN}=P^N_IP^M_JT^{IJ}$$

Умножение тензора $\overset{\leftrightarrow}{T}$ на вектор $\vec{a}$

$$\vec{a}\otimes\vec{b}=a^Ib^J\vec{R}_I\otimes\vec{R}_J$$
$$\vec{a}\otimes\vec{b}:=\begin{matrix}a^1b^1 & a^1b^2\\ a^2b^1 & a^2b^2\end{matrix}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a^Ib^J\vec{R}_I\cdot\vec{R}_J=a^Ib_J$$

Вывод:

$$\otimes \underbrace{\rightarrow}_{\text{свёртка}} \cdot$$

$$(\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J) \cdot \vec{R}_K = R_I \otimes_{\backslash|/} (\vec{R}_J \cdot \vec{R}_K)$$
$$r^* = r_1 + r_2 - 2$$

$$\overleftrightarrow{T} \cdot \vec{a} \neq \vec{a} \cdot \overleftrightarrow{T}$$

$$\vec{b} = \overleftrightarrow{T} \cdot \vec{a} = T^{IJ}(\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J) \cdot a^k \vec{R}_k = T^{IJ} a^k g_{Jk} \vec{R}_I \Rightarrow$$
$$b^I = T^{IJ} a_J = T^I{}_J a^J \text{ - правило немых индексов}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \cdot \overleftrightarrow{T} = a^k \vec{R}_k \cdot T^{IJ} \vec{R}_I \otimes \vec{R}_J = a^k g_{kI} T^{IJ} \vec{R}_J$$
$$c^J = a_I T^{IJ} = T^{IJ} a_I$$

Скалярное умножение тензора на тензор

$$\overleftrightarrow{A} \cdot \overleftrightarrow{B}$$
$$(\vec{R}_I \otimes \vec{R}_J) \cdot (\vec{R}_K \otimes \vec{R}_L) = g_{JK} \vec{R}_I \otimes \vec{R}_L$$

11/03/2025

Компоненты тензора через скалярное произведение

$$T^i{}_j = \vec{R}^i \cdot \overline{T} \cdot \vec{R}_j$$
$$T_j{}^i = \vec{R}_j \cdot \overline{T} \cdot \vec{R}^i$$
$$T_{ij} = \vec{R}_i \cdot \overline{T} \cdot \vec{R}_j$$
$$T^{ij} = \vec{R}^i \cdot \overline{T} \cdot \vec{R}^j$$

$$\text{Доказательство для 3:}$$
$$\langle\text{правая часть}\rangle = (\vec{R}_i \cdot T_{kl} \vec{R}^k \otimes \vec{R}^l) \vec{R}_j = \delta_i^k T_{kl} \vec{R}^l \cdot \vec{R}_j = \delta_i^k T_{kl} \delta_j^l = T_{ij}$$

Двойное скалярное произведение

$$\overline{T} \cdot\cdot \overline{B} = (T^{ij} \vec{R}_i \otimes \vec{R}_j) \cdot\cdot (B^{kl} \vec{R}_k \otimes \vec{R}_l) =$$
$$= T^{ij} B^{kl} g_{jk} (\vec{R}_i \cdot \vec{R}_l) = T^{ij} B^{kl} g_{jk} g_{il} =$$
$$= T^i{}_k B^k{}_i \text{ - одно число}$$
$$\text{inv}$$

Одна из основных задач тензорного исчисления - нахождение инвариантов.
Инварианты:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i b^i$$
$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| - \text{длина}$$
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} - \text{ угол}$$

$$\overleftrightarrow{T}\cdot\cdot\overleftrightarrow{T} = T^i{}_k T^k_i$$

Определение:

Квадрат Тензора: $\overleftrightarrow{T}^2 = \overleftrightarrow{T}\cdot\overleftrightarrow{T}$

$$\overleftrightarrow{T}^2 = T^i{}_k T^k_j$$
$$\overleftrightarrow{T}\cdot\overleftrightarrow{B} = T^i{}_k B^k_j$$
$$\overleftrightarrow{T}\cdot\cdot\overleftrightarrow{T} = \mathrm{tr}(\overleftrightarrow{T}^2) = \mathrm{spur}(\overleftrightarrow{T}^2)$$
$$\text{Внутренняя свёртка: } T^i_i = \mathrm{tr}(T^i{}_j) = \mathrm{tr}(T_j{}^i)$$
$$\text{Определитель тензора: } \det\overleftrightarrow{T} = \det(T^i{}_j) = \det(T_j{}^i)$$

Доказательство инвариантности определителя относительно замены координат:

$$T_k{}^l = P^l{}_j Q^i{}_k T_i{}^j{}_{\text{декартовая}}$$
$$\det(T_k{}^l) = \det(P^l{}_j)\det(Q^i{}_k)\det(T_i{}^j{}_{\text{декартовая}}) = PQ\det T_i{}^j{}_{\text{декартовая}}$$
$$PQ = 1$$
$$\det T_k{}^l = \det T_i{}^j{}_{\text{декартовая}} \ \square$$

Единичный тензор $\overleftrightarrow{E}$

$$\forall\overleftrightarrow{T}: \overleftrightarrow{T}\cdot\overleftrightarrow{E} = \overleftrightarrow{E}\cdot\overleftrightarrow{T} = \overleftrightarrow{T}$$
$$\overleftrightarrow{T}\cdot\overleftrightarrow{E} = T^{ij}E_j{}^k\vec{R}_i\otimes\vec{R}_k$$
$$\overleftrightarrow{T} = T^{ik}\vec{R}_i\otimes\vec{R}_k = T^{ij}E_j{}^k\vec{R}_i\otimes\vec{R}_k \Rightarrow$$
$$T^{ik} = T^{ij}E_j{}^k = T^{ij}\delta^k_j$$
$$E^k_j = \delta^k_j$$

$$\overleftrightarrow{E} = \vec{R}_j\otimes\vec{R}^j = \vec{R}^j\otimes\vec{R}_j = \delta^k_j\vec{R}_k\otimes\vec{R}^j = g_{jl}\vec{R}^l\otimes\vec{R}^j = g^{jl}\vec{R}_l\otimes\vec{R}_j$$

Обратный тензор

$$\det(\overleftrightarrow{T}) \neq 0 \Rightarrow \exists!\overleftrightarrow{T}^{-1}: \overleftrightarrow{T}^{-1}\cdot\overleftrightarrow{T} = \overleftrightarrow{E}$$

На плоскости в декартовой системе координат $\vec{e}_I$

$$T = [\vec{e}_1 \vec{a} \vec{e}_2 \vec{b}] = [\vec{a} \vec{e}_1 \vec{b} \vec{e}_2]$$
$$T^{-1} = [\vec{e}_1 \vec{x} \vec{e}_2 \vec{y}] = ?$$
$$T_{IJ} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$
$$T_{IJ}^T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$
$$\overleftrightarrow{T} = \vec{e}_1 \otimes \vec{a} + \vec{e}_2 \otimes \vec{b}$$
$$\overline{T} \cdot \overline{T}^{-1} = (\vec{e}_1 \otimes \vec{a} + \vec{e}_2 \otimes \vec{b}) \cdot (\vec{e}_1 \otimes \vec{x} + \vec{e}_2 \otimes \vec{y}) =$$
$$\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2$$
$$(\vec{e}_1 \otimes \vec{a} + \vec{e}_2 \otimes \vec{b}) \cdot (\vec{e}_1 \otimes \vec{x} + \vec{e}_2 \otimes \vec{y}) =$$
$$= a_1 \vec{e}_1 \otimes \vec{x} + a_2 \vec{e}_1 \otimes \vec{y} + b_1 \vec{e}_2 \otimes \vec{x} + b_2 \vec{e}_2 \otimes \vec{y} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} a_1 \vec{x} + a_2 \vec{y} = \vec{e}_1 \\ b_1 \vec{x} + b_2 \vec{y} = \vec{e}_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} a_1 x_1 + a_2 y_1 = 1 \\ a_1 x_2 + a_2 y_2 = 0 \\ b_1 x_1 + b_2 y_1 = 0 \\ b_1 x_2 + b_2 y_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ x_2 = -\frac{a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ y_1 = -\frac{b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \\ y_2 = -\frac{a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \end{cases}$$

Ортогональный тензор

Тензор ортогонален, если

$$\overleftrightarrow{O} \cdot \overleftrightarrow{O}^T = \overleftrightarrow{E}$$

Свойство $\overleftrightarrow{O}$

$$\overleftrightarrow{O}^{-1} = \overleftrightarrow{O}^T$$

Найдём ортогональный тензор

$$\overset{\leftrightarrow}{O} = \vec{e}_1 \otimes \vec{a} + \vec{e}_2 \otimes \vec{b}$$

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})^T = \vec{b} \otimes \vec{a}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{O}^T = a \otimes \vec{e}_1 + \vec{b} \otimes \vec{e}_2$$

$$\overset{\leftrightarrow}{O}^{-1} = \vec{e}_1 \otimes (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) + \vec{e}_2 \otimes (y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2)$$

$$\begin{cases} \frac{b_2}{\Delta} = x_1 = a_1 \\ -\frac{b_1}{\Delta} = y_1 = a_2 \\ -\frac{a_2}{\Delta} = x_2 = b_1 \\ \frac{a_1}{\Delta} = y_2 = b_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \pm 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b_2 = \pm a_1 \\ b_1 = \mp a_2 \end{cases}, \ \Delta = a_1(\pm a_1) - a_2(\mp a_2) = \pm(a_1^2 + a_2^2) = \pm_1 \Rightarrow$$

$$a_1^2 + a_2^2 = 1 \Rightarrow b_1^2 + b_2^2 = 1 \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1 \Rightarrow$$

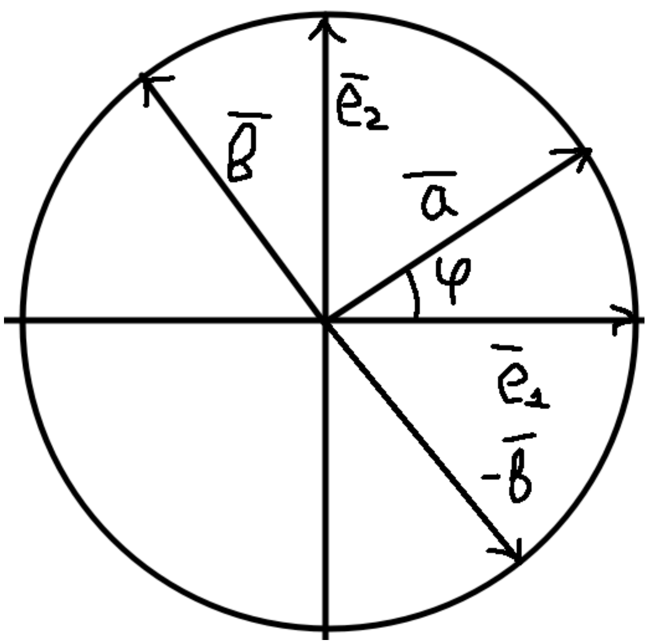
$$\vec{a}\vec{b} = a_1(\mp a_2) + a_2(\pm a_1) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow$$

$$\overset{\leftrightarrow}{T} = \vec{e}_1 \otimes \vec{a} + \vec{e}_2 \otimes \vec{b}$$

$$\exists \varphi : \begin{matrix} a_1 = \cos\varphi \\ a_2 = \sin\varphi \end{matrix}$$

$$b_1 = \mp \sin\varphi$$

$$b_2 = \pm \cos\varphi$$



$$O_I^J = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\overset{\leftrightarrow}{O} \to \varphi$$

$$\overset{\leftrightarrow}{O}^{-1} \to -\varphi$$

Векторное произведение $\overset{\leftrightarrow}{T} \times \vec{a}, \vec{a} \times \overset{\leftrightarrow}{T}$

$$\overleftrightarrow{T} \otimes \vec{a} = [T^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j] \times (a^k\vec{R}_k) =$$

$$\vec{R}_j \times \vec{R}_k = \sqrt{g}\varepsilon_{lmn}\delta_j^l\delta_k^m\vec{R}^n = \sqrt{g}\varepsilon_{jkn}\vec{R}^n$$

$$= \sqrt{g}\varepsilon_{jkn}T^{ij}a^k\vec{R}_i \otimes \vec{R}^n$$

$$\vec{a} \otimes \vec{T} = \sqrt{g}\varepsilon_{kin}a^kT^{ij}\vec{R}^n \otimes \vec{R}_j$$