Алгазин Олег Дмитриевич

10/02/2025

Комплексные числа - обощение действительных чисел.

$$arg\,z = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, x > 0 \\ \frac{\pi}{2}, x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, x = 0, y < 0 \\ arctg\frac{y}{x} + \pi, x < 0, y > 0 \end{cases}$$

Связь между полярными и декартовыми координатами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}, z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$$

Алгебраическая форма, Тригонометрическая форма, Показательная форма записи комплексного числа

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Сложение комплексных чисел

$$\begin{aligned} z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \\ z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ 1)\ \textit{Коммутативность} : z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ 2)\ \textit{Ассоциативность} : (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \\ 3)\ \textit{Нейтральный элемент} : z + 0 = 0 \end{aligned}$$

Умножение:

$$\begin{aligned} 1) z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \\ 2) (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) \\ 3) (z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 \\ 4) z \cdot 1 = z \end{aligned}$$

$$i^2 = -1$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1iy_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = w \Rightarrow z_2 \cdot w = z_1$$

$$(x_2 + iy_2)(u + iv) = x_1 + iy_1$$

$$x_2u - y_2v + i(x_2v + y_2u) = x_1 + iy_1$$

$$\begin{cases} x_2u - y_2v = x_1 \\ x_2v + y_2u = y_1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = x_2^2 + y_2^2 = |z_2|^2 \neq 0 \Rightarrow z_2 \neq 0$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1 & -y_2 \\ y_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_1x_2 + y_1y_2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix} = x_2y_1 - x_1y_2$$

$$u = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$v = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$w = u + iy = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)i$$

$$z = r \cdot e^{i\varphi} \Rightarrow \overline{z} = r \cdot e^{-i\varphi}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1z_2} = \overline{z_1z_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)^2} = A + Bi$$

$$z_1z_2 = r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|$$

$$Arg(z_1z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = w, wz_2 = z_1 \Rightarrow |w||z_2| = |z_1| \Rightarrow |w| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \Rightarrow |\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$$

$$z^{\frac{1}{n}} = (re^{i\varphi})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i(\varphi+2\pi k)}{n}} == r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i\varphi}{n}\frac{2\pi ki}{n}}$$

$$\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, n \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

$\mathbb{R}$ - упорядоченное поле
$\mathbb{C}$ - неупорядоченное поле
$i = (0,1) > (0,0) = 0 \Rightarrow (-1,0) = -1 > 0 = (0,0)$

Функции комплексного переменного

$$D \subset \mathbb{C}, \forall z \in D \rightarrow \textit{одна или несколько комплексных переменных } w$$

$$w = f(z) \text{ однозначна или многозначна}$$

1. однозначна $w = z^2$
2. n-значна $w = \sqrt[n]{z}$
3. ∞-значна $w = Arg(z)$

$$\begin{cases} u = u(x, y) = \mathrm{Re}(w) \\ v = v(x, y) = \mathrm{Im}(w) \end{cases} \Leftrightarrow w = f(z)$$

$$w = z^2$$

$$u + iv = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow \begin{cases} u = 1 - y^2 \\ v = 2y \end{cases}$$

Линейная функция

$$w = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

$$a = re^{i\varphi}$$

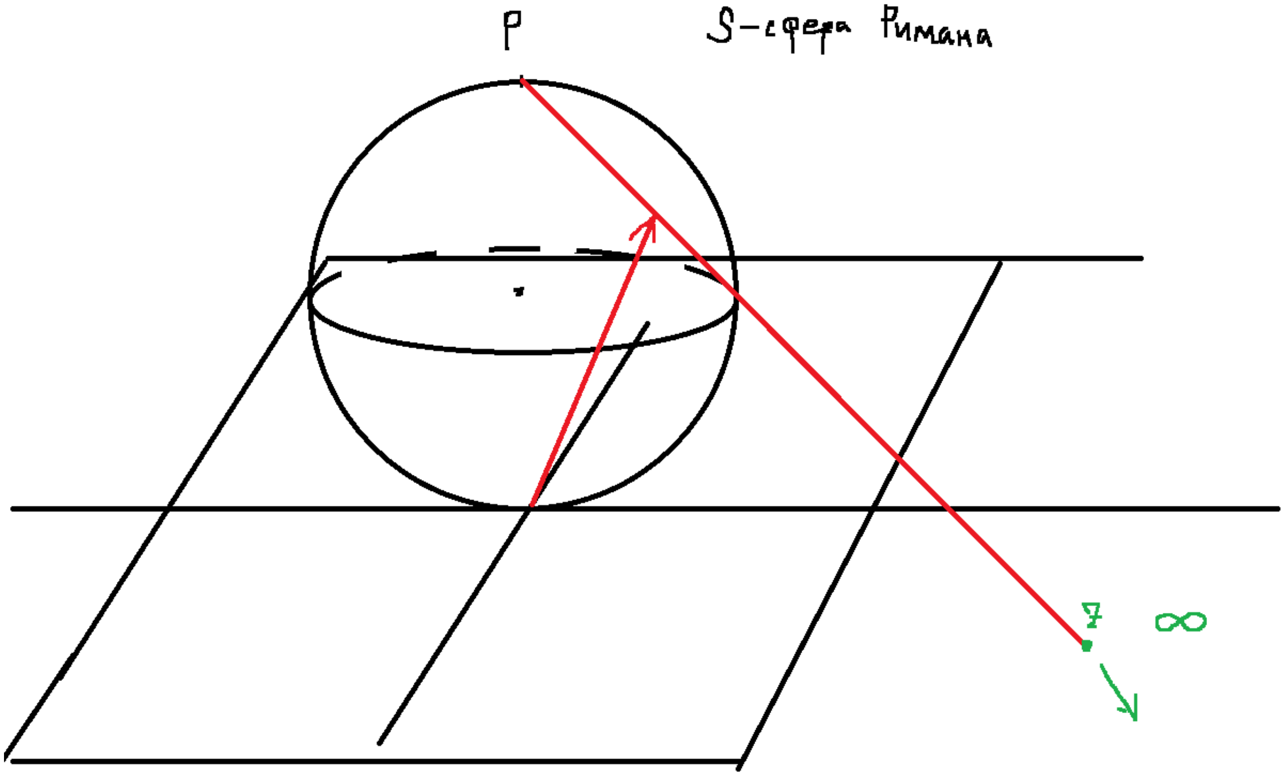
$$w = re^{i\varphi} z + b$$

Совокупность:

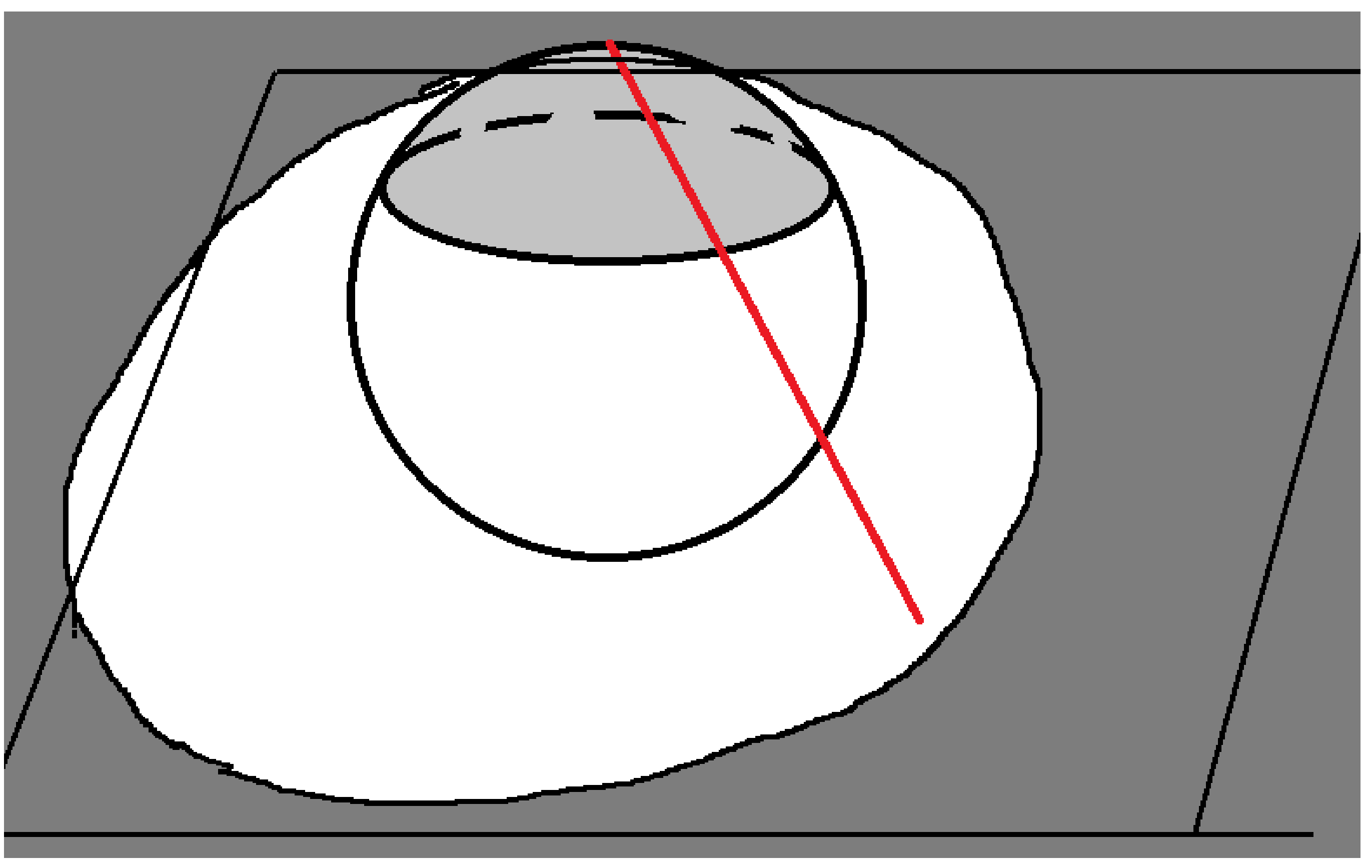
1. Растяжение/Сжатие
2. Поворот
3. Параллельный перенос

17/02/2025

Сфера Римана



$$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}} \leftrightarrow S$$
$$\infty \leftrightarrow S$$
Окр ∞ - $|z| > R$



Предел

$$\{z_n\} \text{ - последовательность комплексных чисел}$$
$$A \text{ - предел последовательности}$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N(n > N \implies |z_n - A| < z)$$
$$A = \lim_{n \to \infty} z_n$$

Ряд

$$z_n = x_n + iy_n$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + iy_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$
$$A = B + iC$$
$$|z_n - A| = |x_n + iy_n - B - iC| = |(x_n - B) + i(y_n - C)| = \sqrt{(x_n - B)^2 + (y_n - C)^2} \to 0$$
$$\Leftrightarrow |x_n - B| \to 0 \wedge |y_n - C| \to C$$

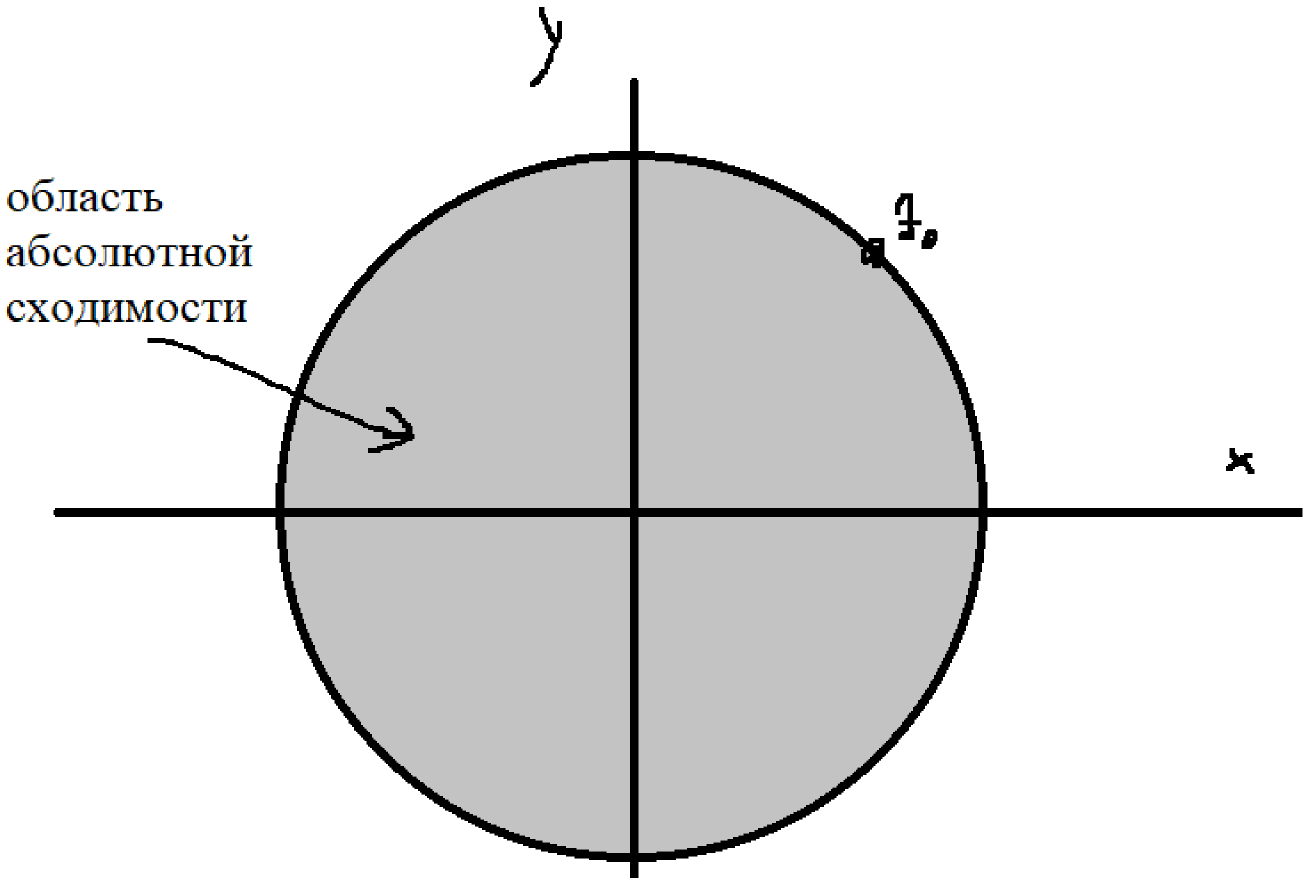
Комплексный ряд сходится тогда и только тогда когда сходятся ряды, соответствующие его действительной и мнимой части

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \text{ - функциональный ряд}$$
$$f_n(z) \text{ обл. на одном множестве } D \subset \mathbf{C}$$

Теорема Абеля

Если ряд (1) сходится в точке z_0, то он сходится в области $|z| < |z_0|$

Если расходится, то расходится для $|z| > z_0|$ тем более



Элементарные функции комплексной плоскости

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ 0! = 1$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Функция Коши-Адамара

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$$

абсолютно сходится в круге $|z| < R$

$$R = \frac{1}{L}, L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}$$

$$L = \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|}$$

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2+(-1)^n)^n(z+i)^n$$
$$\sqrt[n]{|C_n|}=\sqrt[n]{(2+(-1)^n)^n}=2+(-1)^n$$
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|C_n|}=3$$

$$\cos(-z)=\cos(z)$$
$$\sin(-z)=-\sin(z)$$
$$\cos(0)=1$$
$$\sin(0)=0$$
$$e^0=1$$
$$e^{iz}=1+iz-\frac{z^2}{2}+\frac{iz^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{iz^5}{5!}+\dots=$$
$$\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\dots\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\dots\right)=\cos z+i\sin z$$

Формула Эйлера

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z$$
$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=re^{i\varphi}$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \implies \begin{cases} \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\ \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{ch} z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} \\ \operatorname{sh} z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2} \end{cases}$$

$$\cos iz = \frac{e^{-z}+e^{z}}{2} = \operatorname{ch} z$$

$$\sin iz = \frac{e^{-z}-e^{z}}{2i} = i\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = i\operatorname{sh} z$$

$$\cos(iz) = ch(z)$$

$$\sin(iz) = ish(z)$$

$$ch(iz) = \cos(z)$$

$$sh(iz) = i\sin z$$

Теорема сложения для экспонент

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

$$\text{exp - гомоморфизм}$$

$$f(z_1+z_2) = f(z_1)f(z_2)$$

$$\text{Доказательство:}$$

$$e^{z_1}e^{z_2} = \left(1 + z_1 + \frac{z_1^2}{2} + \frac{z_1^3}{3!} + \dots\right)\left(1 + z_2 + \frac{z_2^2}{2} + \frac{z_2^3}{3!} + \dots\right) =$$

$$= 1 + (z_1+z_2) + \left(\frac{z_2^2}{2} + z_1 z_2 + \frac{z_1^2}{2}\right) + \dots = e^{z_1+z_2}$$

Сложение для синусов и косинусов:

$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1+z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \cos z_2$$

Доказательство для косинуса (для синуса аналогичное):

`\begin{gather} \cos(z_{1}+z_{2})=\frac{{e^{i(z_{1}+z_{2})}+e^{-i(z_{1}+z_{2})}}}{2}=\frac{1}{2}(e^{i`

$$tg(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}, ctg(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}, th(z) = \frac{ch(z)}{sh(z)}, cth(z) = \frac{sh(z)}{sh(z)}$$

Логарифм

$$e^W = z, W = Ln(z)$$
$$z = re^{i\varphi}, W = u + iv$$
$$e^{u+iv} = re^{i\varphi}$$
$$e^u e^{iv} = re^{i\varphi}$$

$$e^u = z, u = \ln(z)$$
$$v = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$$
$$Lz = u + iv = \ln z + i(\varphi + 2\pi k)$$
$$Lnz = \ln|z| + i(arg(z) + 2\pi k), k \in \mathbf{Z}$$
$$(Lnz)_k = \ln|z| + i(argz + 2\pi k), k \text{ - фиксирован в разрезе плоскcти}$$

Пример:

$$Ln(-1) = \ln(|-1|) + i(arg(-1) + 2\pi k) = \ln(1) + i(\pi + 2\pi k) = i(\pi + 2\pi k), k \in \mathbf{Z}$$

Ещё про логарифм:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots$$
$$|z| < 1$$
$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n!}$$
$$a > 0,\ a^b = e^{b\ln a}$$
$$w^z = e^{z\ln w}$$
$$(-1)^i = e^{iLn(-1)} = e^{i\cdot i(\pi+2\pi k)} = e^{-\pi-2\pi k}, k \in \mathbf{Z}$$

Обратные функции:

$$w = Arccosz$$
$$\cos w = z$$
$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z$$
$$e^{iw} + e^{-iw} - 2z = 0$$
$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$
$$e^{iw} = \xi$$
$$\xi^2 - 2z\xi + 1 = 0$$
$$\xi = z \pm \sqrt{z^2+1}_1 = z + \sqrt{z^2+1}$$
$$iw = Ln(z + \sqrt{z^2+1})$$
$$W = -iLn(z + \sqrt{z^2+1})$$
$$Arccosz = -iLn(z + \sqrt{z^2+1})$$

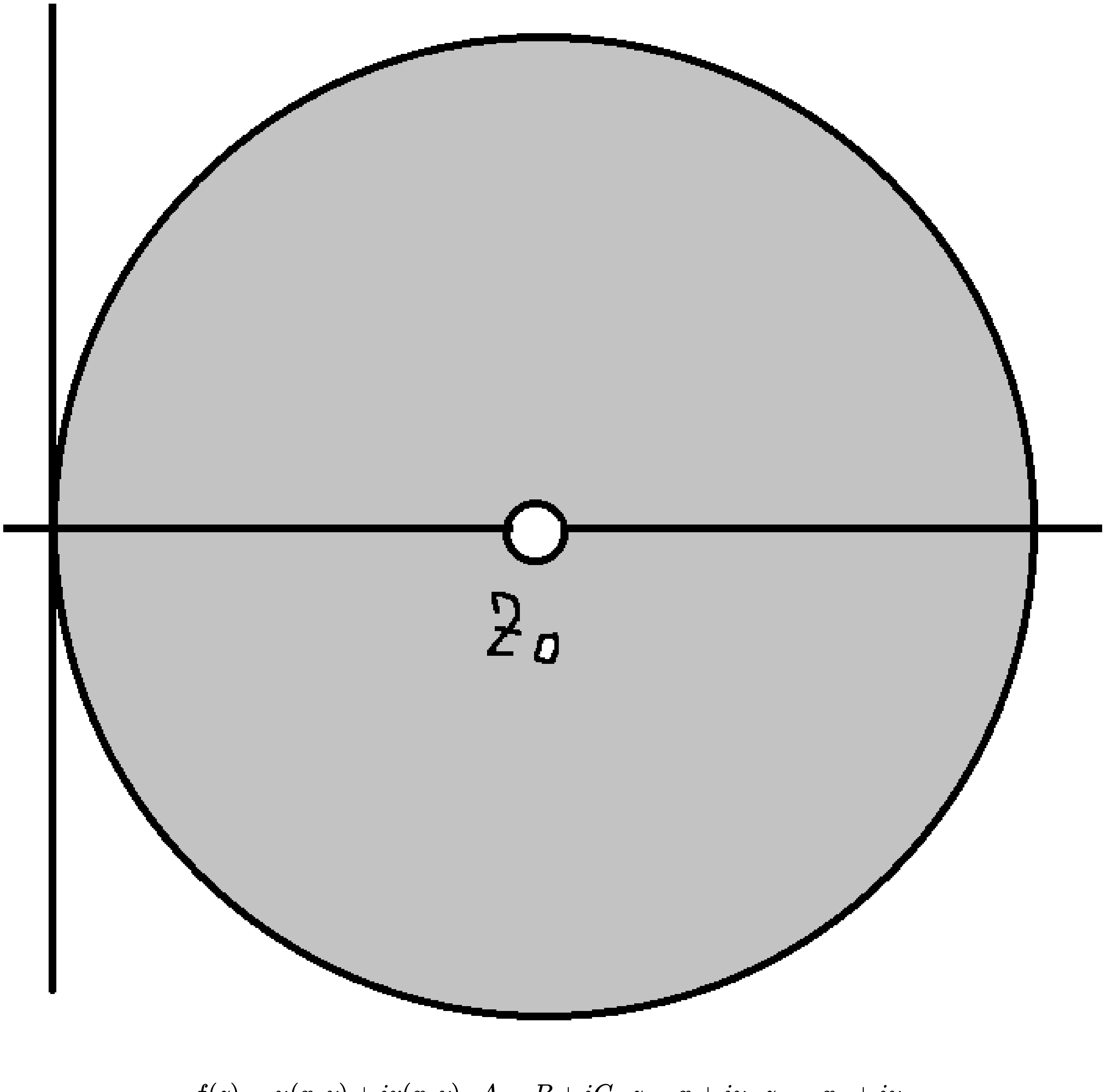
24/02/2025

Предел и непрерывность

$E \subset \mathbb{C}, f : E \to \mathbb{C}, f(z)$ определена на линейном пространстве E , z_0 - предельная точка E
A - предел $f(z)$ при $z \to z_0$ по множеству E :
$$\lim_{z \to z_0,\ z \in E} f(z) = A := \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall z \in E \,(\, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon)$$

Проколотая окрестность:

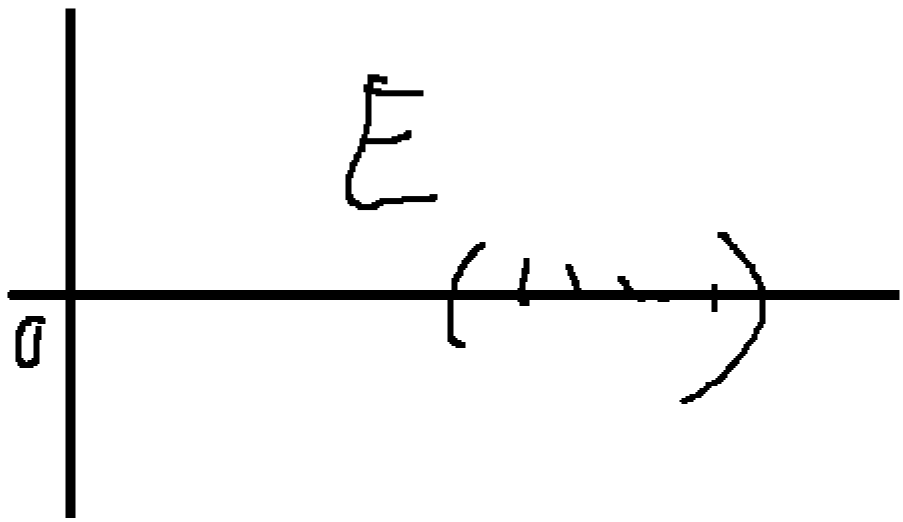
$$E = \cup^{o}_{R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$$



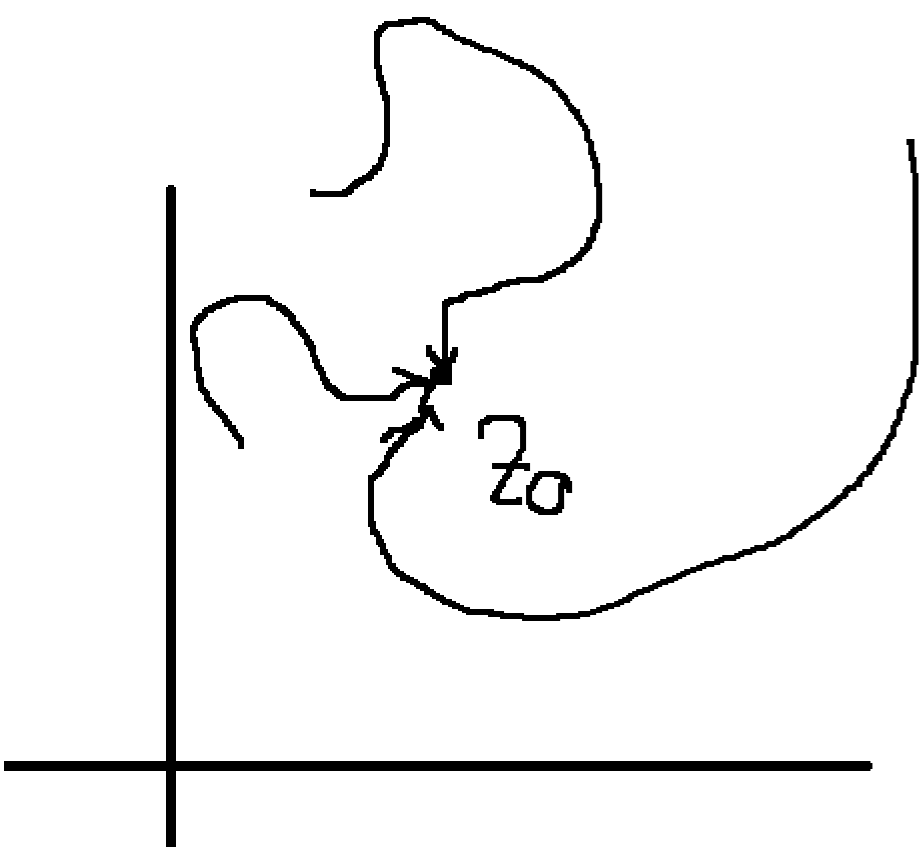
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),\ A = B + iC,\ z = x + iy,\ z_0 = x_0 + iy_0$$
$$\lim_{z \to z_0,\ z \in E} f(z) = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0),\ (x,y) \in E} u = B \\ \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0),\ (x,y) \in E} v = C \end{cases}$$

Предельная точка множества E $z_0 \in E$

$f(z)$ - непрерывна в точке z_0 по множеству $E,$ если:
$$\lim_{z\to z_0,\, z\in E} f(z) = f(z_0)$$



$$E = \cup_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < R\}$$
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$



Производная

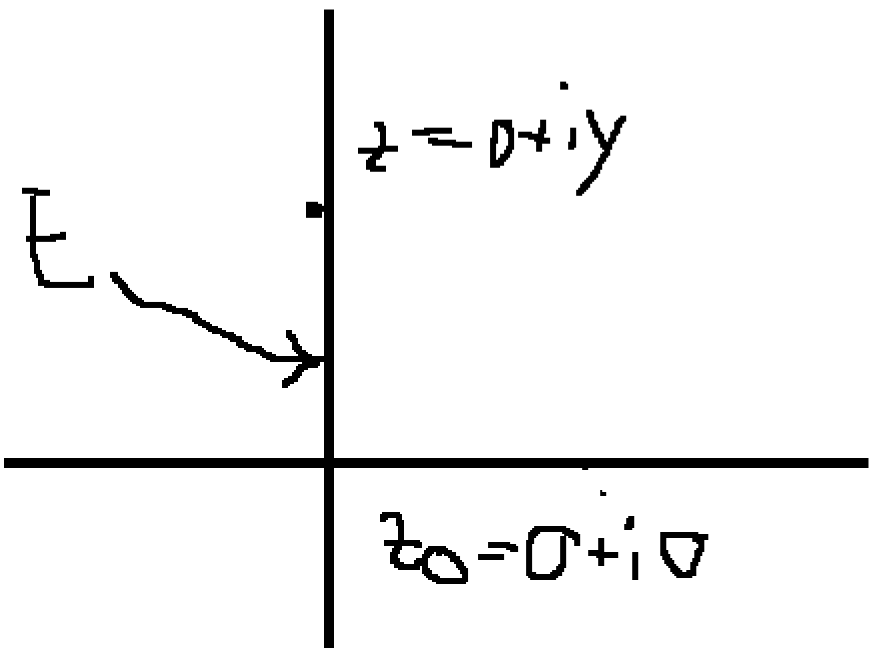
$$f : E \to \mathbb{C}, z_0 \text{ - предельная точка } E,\ z_0 \in E$$
$$f'_E(z_0) := \lim_{z\to z_0,\, z\in E} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Частный случай:

$$E=\cup_R(z_0)\qquad \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=f'(z_0)$$

Пример:

$$f(z)=x$$
$$u=x,v=0,E=\mathbb{R}$$
$$f'_{\mathbb{R}}(0)=\lim_{x\to0}\frac{x-0}{x-0}=1$$
$$E=i\mathbb{R}$$
$$f(z)=0$$
$$f(z_0)=0$$
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{y\to0}\frac{0-0}{iy-0}=0$$
$$f'(z_0)\text{ не сущ}$$



$$n\in\mathbb{N},z^n=f(z)$$
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{\Delta z\to0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to0}\frac{(z_0+\Delta z)^n-z_0^n}{\Delta z}=$$
$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{\cancel{z_0^n}+nz_0^{n-1}\cancel{\Delta z}+\frac{n(n-1)}{2!}z_0^{n-2}\cancelto{0}{\Delta z^2}+0+\cancelto{0}{\Delta z^n}-\cancel{z_0^n}}{\cancel{\Delta z}}=nz_0^{n-1}$$
$$(z^n)'=z^{n-1}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, |z| < \infty$$
$$(e^z)' = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots = e^z$$
$$(e^z)' = e^z$$
$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots$$
$$(\cos z)' = -z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \ldots = -\sin z$$
$$(\cos z)' = -\sin z$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots$$
$$(\sin z)' = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \cos(z)$$
$$(\sin z)' = \cos z$$
$$(\text{ch } z)' = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \text{sh } z$$
$$(\text{sh } z)' = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)' = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \text{ch } z$$
$$(\text{tg } z)' = \left(\frac{\sin z}{\cos z}\right)' = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$(\text{Ln } z)_k = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)$$
$$w = \text{Ln } z$$
$$z = e^w$$
$$w'_z = \frac{1}{z'_w} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$$
$$(\text{Ln } z)' = \frac{1}{z}$$

$$\exists f'(z); \ \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0)$$
$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z_0) + \alpha(\Delta z), \text{ где } \alpha \text{ - бесконечно малая}$$
$$|\Delta z| < R, |z - z_0| < R, \quad \Delta w = f'(z_0)\Delta z + \alpha f(\Delta z)\Delta z \text{ - функция дифференцируема в точке } z_0$$

$$f(z) \text{ аналитическая в точке } z_0, \text{ если она дифференцируема в некоторой окрестности точки } z_0$$

Синонимы: аналитическая, голоморфная, правильная, регулярная

$$f(z) \text{ аналитическая в области } D, \text{ если она дифференцируема в каждой точке } D$$

$$e^z, \sin z, \cos z, \text{sh } z, \text{ch } z \text{ дифференцируемы в } \mathbb{C} \Rightarrow$$
$$\text{аналитические в } \mathbb{C} \text{ - целые}$$

Аналитическую функцию можно разложить в ряд.

Функция непрерывна $\Leftrightarrow$ её действительная и мнимая часть непрерывны

$$f(z) = x + i0$$
$$u = x \qquad \text{- не аналитична}$$
$$v = 0$$

Теорема

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \text{ дифференцируема в точке } z_0 = x_0 + iy_0$$
$$\text{как функция комплексного переменного } \Leftrightarrow$$
$$u(x,y), v(x,y) \text{ дифференцируемы в точке } (x_0, y_0)$$
$$\text{и выполняются условия Коши-Римана :}$$
$$\text{C.-R.} = \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{matrix}$$

Необходимость:

$$\Delta w = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z)\Delta z$$
$$\Delta u + i\Delta v = (A + Bi)(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1(\Delta x, \Delta y) + i\alpha_2(\Delta x, \Delta y))(\Delta x + i\Delta y)$$
$$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \alpha_1\Delta x - \alpha_2\Delta y$$
$$\Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \alpha_2\Delta x + \alpha_1\Delta y$$
$$\begin{matrix} A = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} \\ B = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{matrix} \implies \begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{matrix}$$

Достаточность:

$$u, v \text{ - дифференцируемы и } \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$
$$\Delta u = u_x\Delta x + u_y\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$$
$$\Delta v = v_x\Delta x + v_y\Delta y + \alpha_3\Delta x + \alpha_4\Delta y$$
$$\alpha_i \text{ - бесконечно малые}$$
$$\Delta u = A\Delta x - B\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$$
$$\Delta v = B\Delta x + A\Delta y + \alpha_3\Delta x + \alpha_4\Delta y$$
$$\Delta w = \Delta u + i\Delta w = A\Delta x - B\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y + i(B\Delta x + A\Delta y + \alpha_3\Delta x + \alpha_4\Delta y) =$$
$$= A(\Delta x + i\Delta y) + Bi(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha_1 + i\alpha_3)\Delta x + i\Delta y(\alpha_4 - i\alpha_2) =$$
$$= (A + Bi)\Delta z + (\alpha_1 + i\alpha_3)\frac{\Delta x}{\Delta z}\Delta z + i\frac{\Delta y}{\Delta z}(\alpha_4 - i\alpha_2)\Delta z =$$
$$= (A + Bi)\Delta z + \alpha\Delta z, \text{ где } \alpha = (\alpha_1 + i\alpha_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + i\frac{\Delta y}{\Delta z}(\alpha_4 - i\alpha_2)$$

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$$
$$|z_1| \le |z_2| + |z_1 + z_2|$$
$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2|$$
$$-(|z_1| - |z_2|) \le |z_1 + z_2|$$
$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1| + |z_2|$$

$$|\alpha| \le (|\alpha_1| + |\alpha_2|)\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right| + (|\alpha_4| + |\alpha_2|)\left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le$$
$$\le |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| + |\alpha_4| \to 0 \text{ - доказали, что } \alpha \text{ - бесконечно малая}$$

Функция $u(x, y)$ называется гармонической, если она удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Теорема

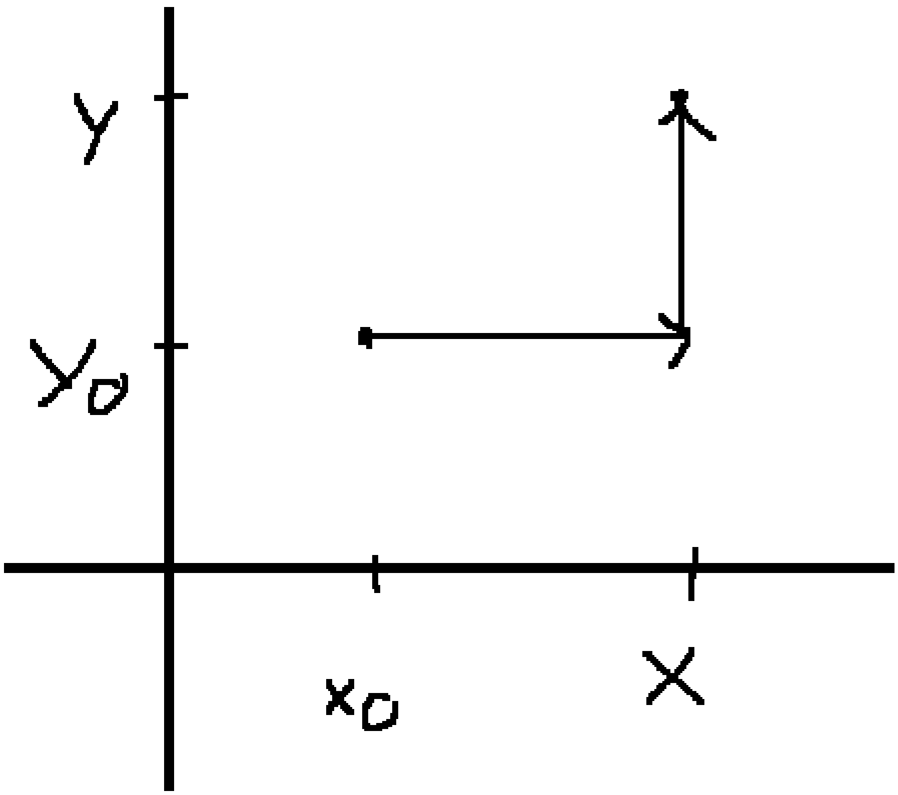
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \text{ - аналитическая в области } D \implies$$
$$u(x, y), v(x, y) \text{ - гармонические в области } D$$

Доказательство:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} u_{xx} = v_{xy} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases} \implies u_{xx} + v_{yy} = 0 \\ \begin{cases} u_{xy} = v_{yy} \\ u_{xy} = -v_{xx} \end{cases} \implies v_{yy} + v_{xx} = 0 \end{array}$$

03/03/2025

$$f(x) \text{ - аналитическая в области } D, f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \Rightarrow$$
$$u(x, y), v(x, y) \text{ - гармонические, т.е. удовлетворяют уравнению Лапласа}$$
$$\text{Пусть задана } u(x, y) \text{ в области } D\text{. Найти аналитическую функцию } f(z), \mathrm{Re} f(z) = u(x, y)$$
$$\text{Пусть задана } v(x, y) \text{ в области } D\text{. Найти аналитическую функцию } f(z), \mathrm{Im} f(z) = v(x, y)$$
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \text{ - аналитическая в } D \Rightarrow \begin{cases} u_x = v_y & u \text{ задана} \\ u_y = -v_x & v \text{ надо найти} \end{cases}$$
$$v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy = P dx + Q dy$$
$$D \text{ - односвязная}$$
$$P, Q \text{ непрерывные}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -u_{yy}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = u_{xx}$$
$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow \text{ Форма является точной}$$
$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y dx + u_x dx + C$$
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) + iC, C \in \mathbb{R}$$
$$\text{не зависит от пути}$$
$$v(x, y) = \int_{x_0}^{x} -u_y(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y} u_x(x, y) dy$$



2 способ

$$\text{C.R.}: \begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \implies \begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases}$$

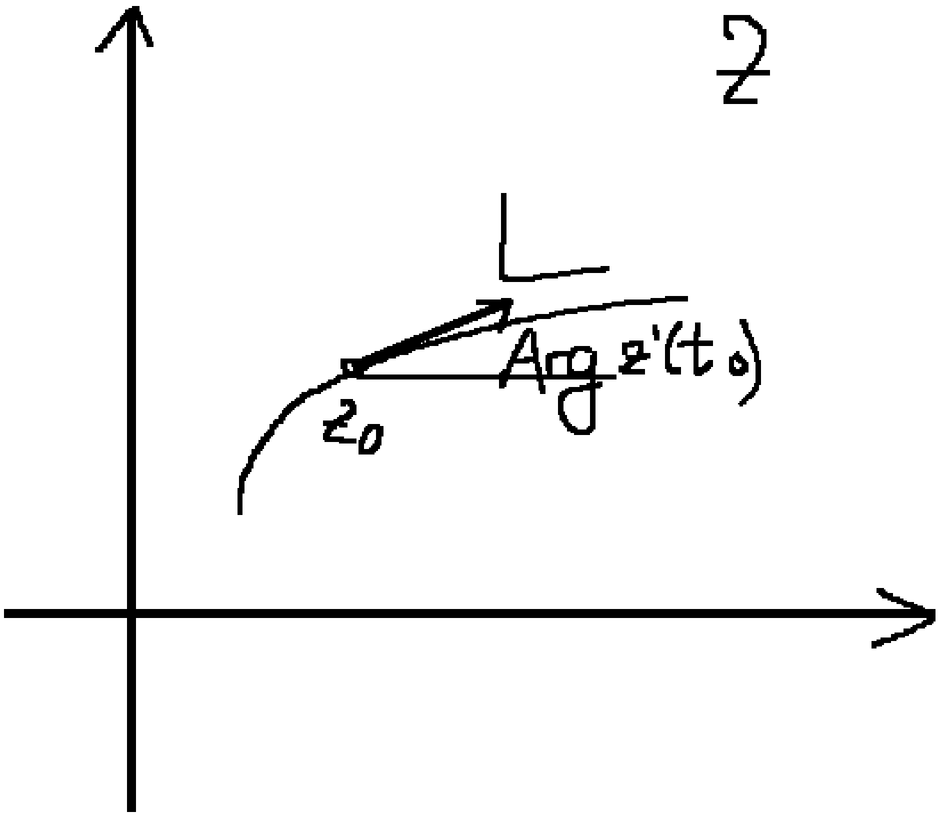
$$v = \int (-u_y) dx + \varphi(y)$$

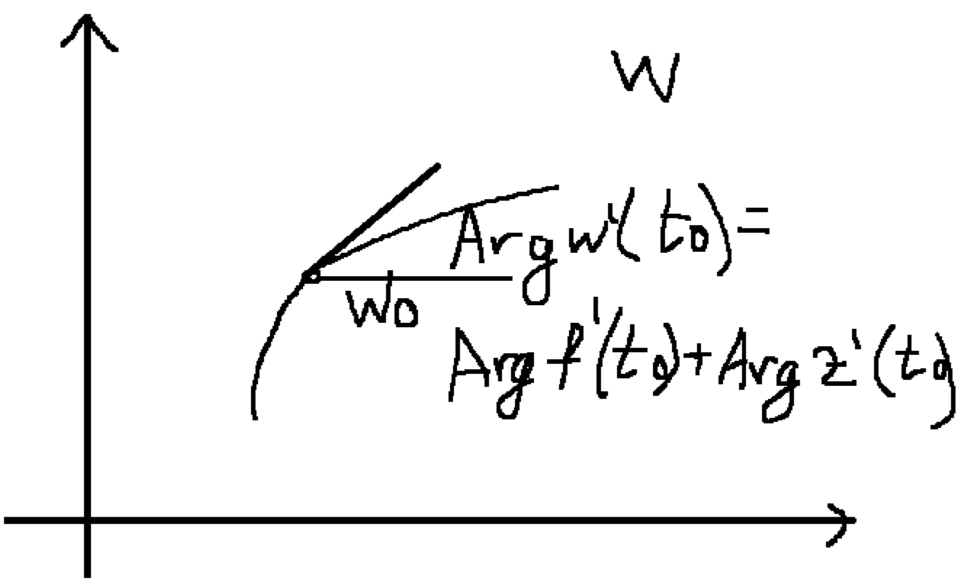
Пример

$$u = x^2 - y^2 - x \text{ в } \mathbb{C}$$
$$u_x = 2x - 1, u_{xx} = 2$$
$$u_y = -2y, u_{yy} = -2$$
$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$
$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = 2y \\ v_y = 2x - 1 \end{cases}$$
$$v = \int 2y dx + \varphi(y) = 2xy + \varphi(y)$$
$$v_y = 2x + \varphi'(y)$$
$$\cancel{2x} + \varphi'(y) = \cancel{2x} - 1$$
$$\varphi(y) = \int -1 dy = -y + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$v = 2xy - y + C, C \in \mathbb{R} \Rightarrow$$
$$f(z) = x^2 - y^2 - x + i(2xy - y + C)$$
Теорема о единственности
$$y = 0 \Rightarrow x^2 - x + iC|_{x=z} = z^2 - z + iC$$
Если $v(0,0) = 0$
$$v(0,0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

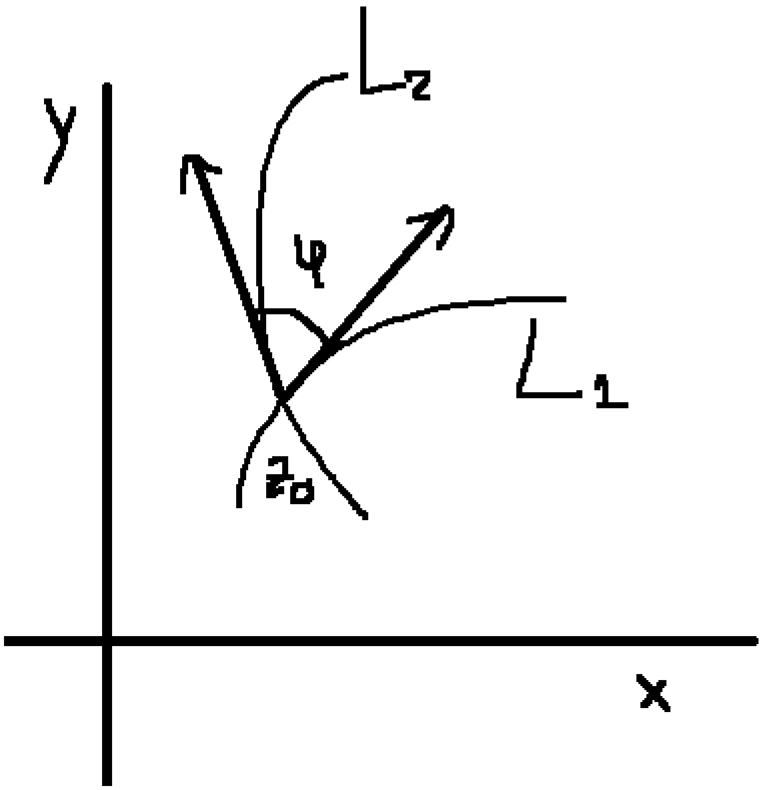
Геометрический смысл аргумента и модуля производной

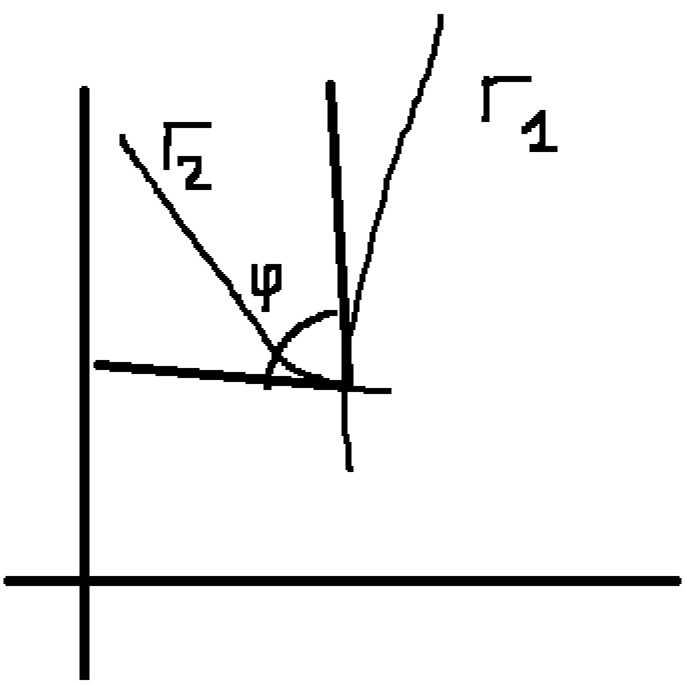
\end{gather}$$





Угол между кривыми - угол между касательными (в точке пересечения)
Производная сохраняет углы между кривыми



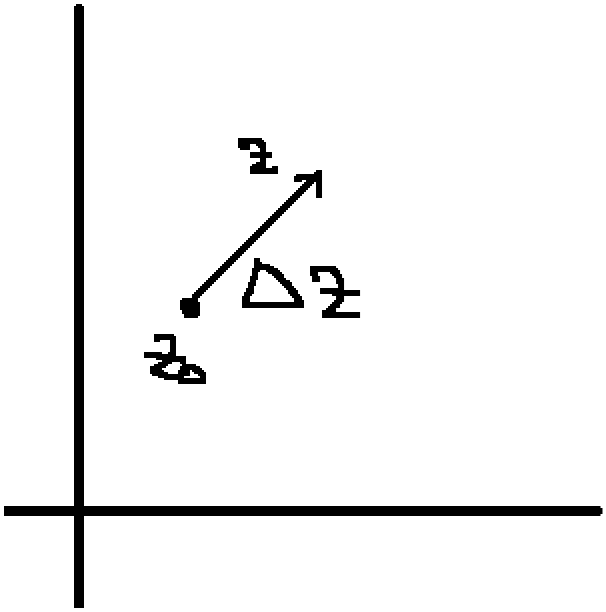


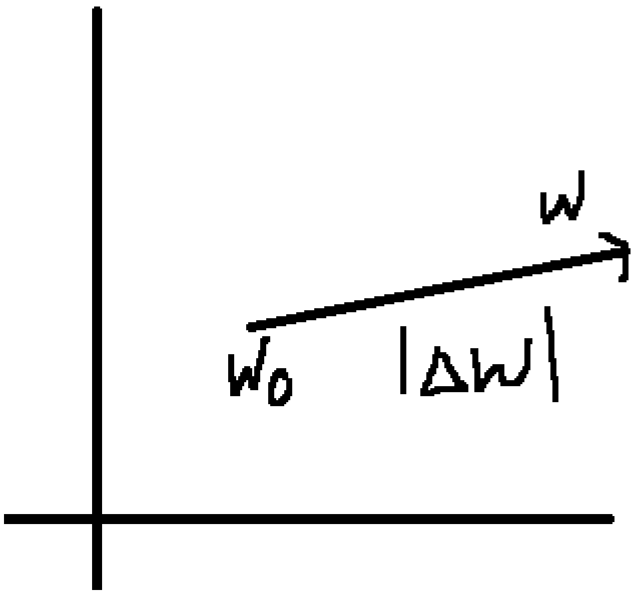
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

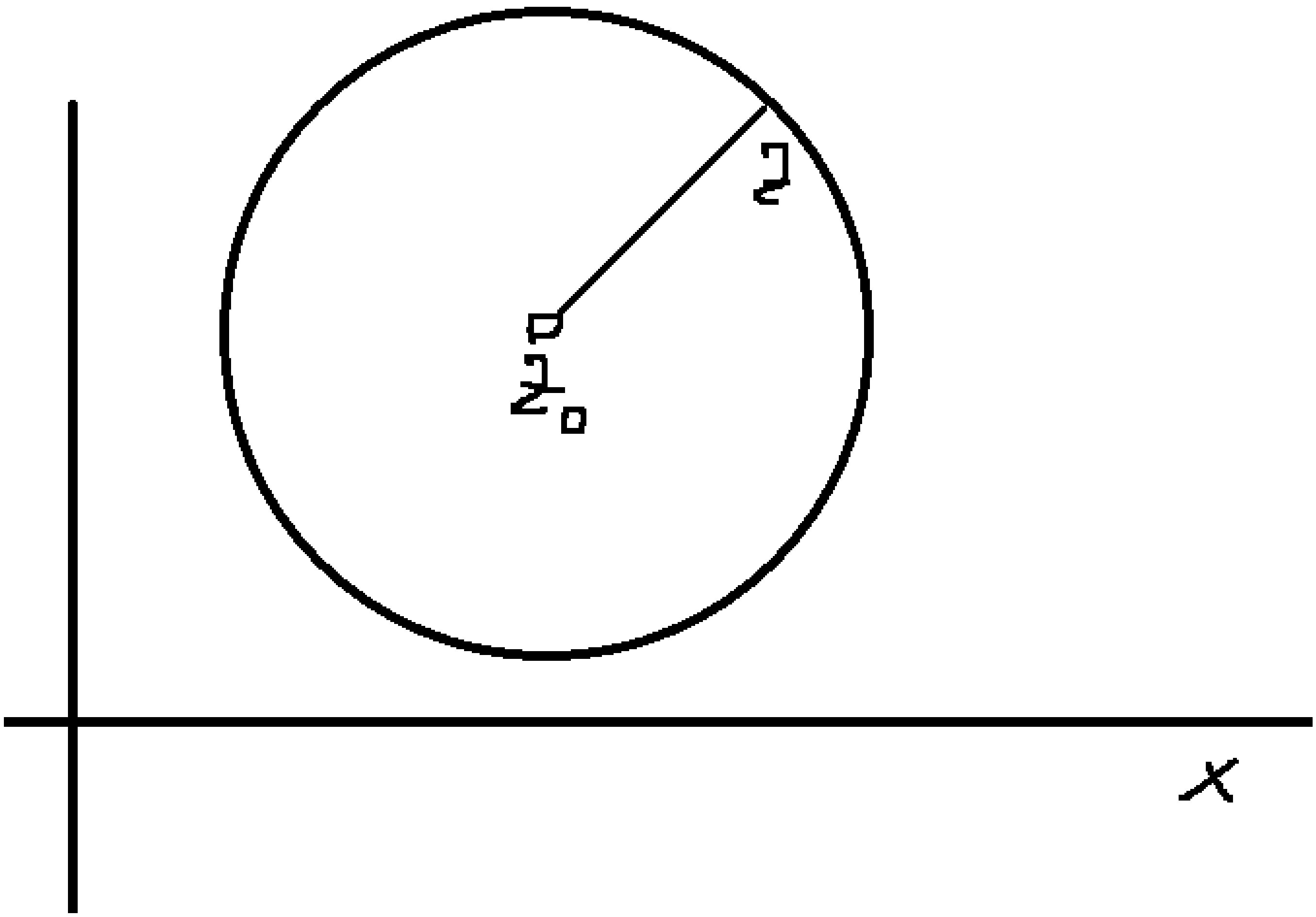
$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$

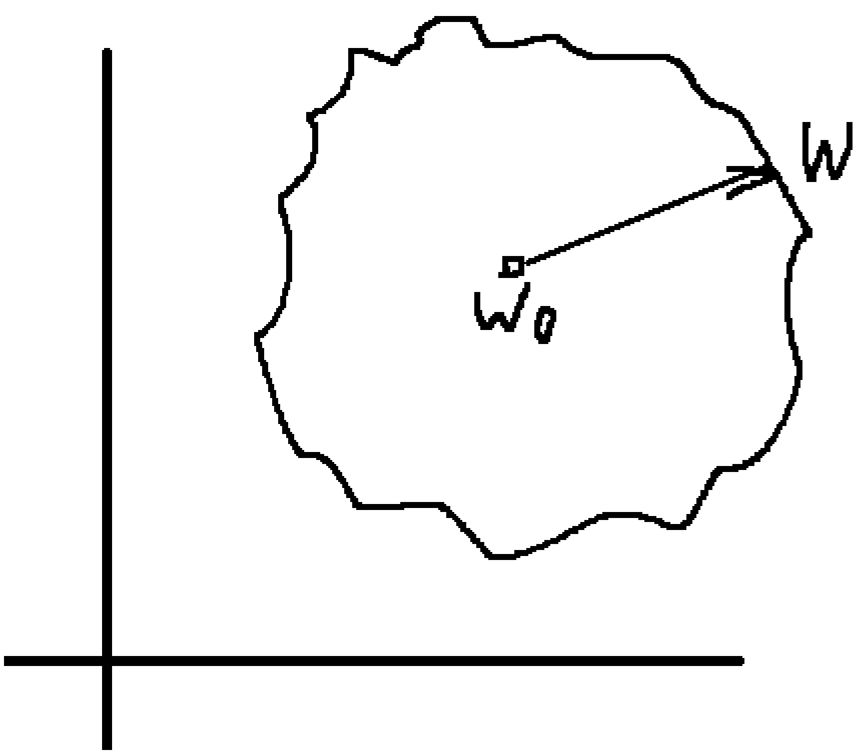
$$|\Delta z| \text{ мал } |f'(z_0)| \approx \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}, |\Delta w| \approx |f'(z_0)||\Delta z|$$

$|f' z_0|$ коэффициент растяжения


z
Δz
z0


w
w0
|Δw|





Конформные отображения

На расширенной комплексной плоскости часть плоскости, вырезаемая кругом, является односвязной.

Область D односвязная относительно расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, если её граница ∂D - связное множество (состоит из одного куска). В противном случае - многосвязная.

Примеры

$D = \mathbb{C}$, $\partial D = \{\infty\}$ - односвязная

$D = \overline{\mathbb{C}}$, $\partial D = \varnothing$ - односвязная

$D = \overline{\mathbb{C}} \backslash \{z_0\}$, $\partial D = \{z_0\}$ - односвязная

$D = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| < R\}$, $\partial D = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = R\}$ - односвязная

Положительный обход - такой обход, что область остаётся слева.

$D = \{z \in \overline{\mathbb{C}} | \ |z| > R\}$, $\partial D = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| = R\}$ - односвязная

Теорема Римана

Любую односвязную относительно $\overline{\mathbb{C}}$ область, границы которой содержат не менее 2-х точек, можно конформно отобразить на $D = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| < 1\}$ бесконечно многими способами.

Односвязные области, не подходящие под условие "содержит не менее 2-х точек":

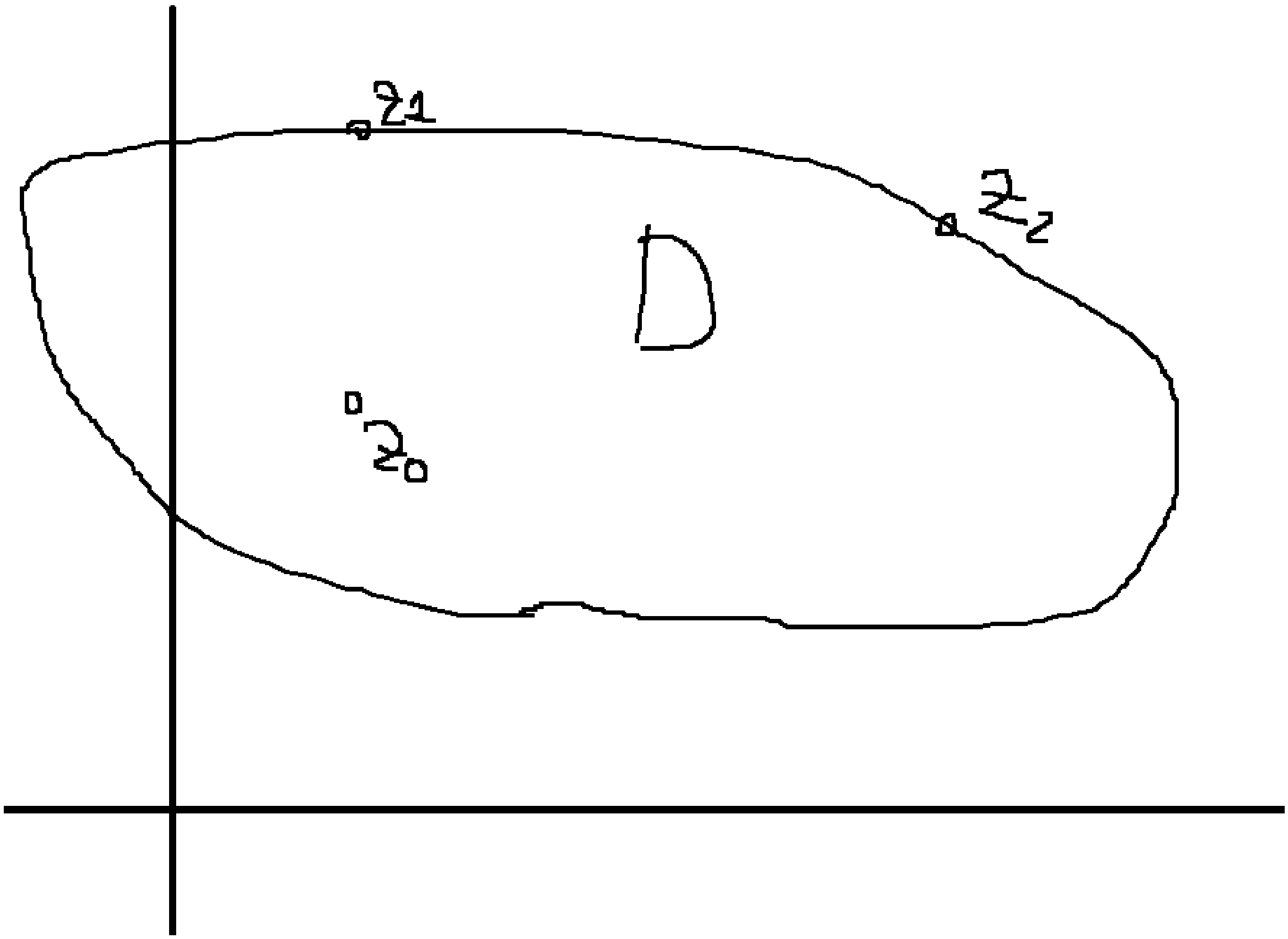
$\mathbb{C}, \overline{\mathbb{C}}, \overline{\mathbb{C}} \backslash \{z_0\}$

$$w = f(z)$$

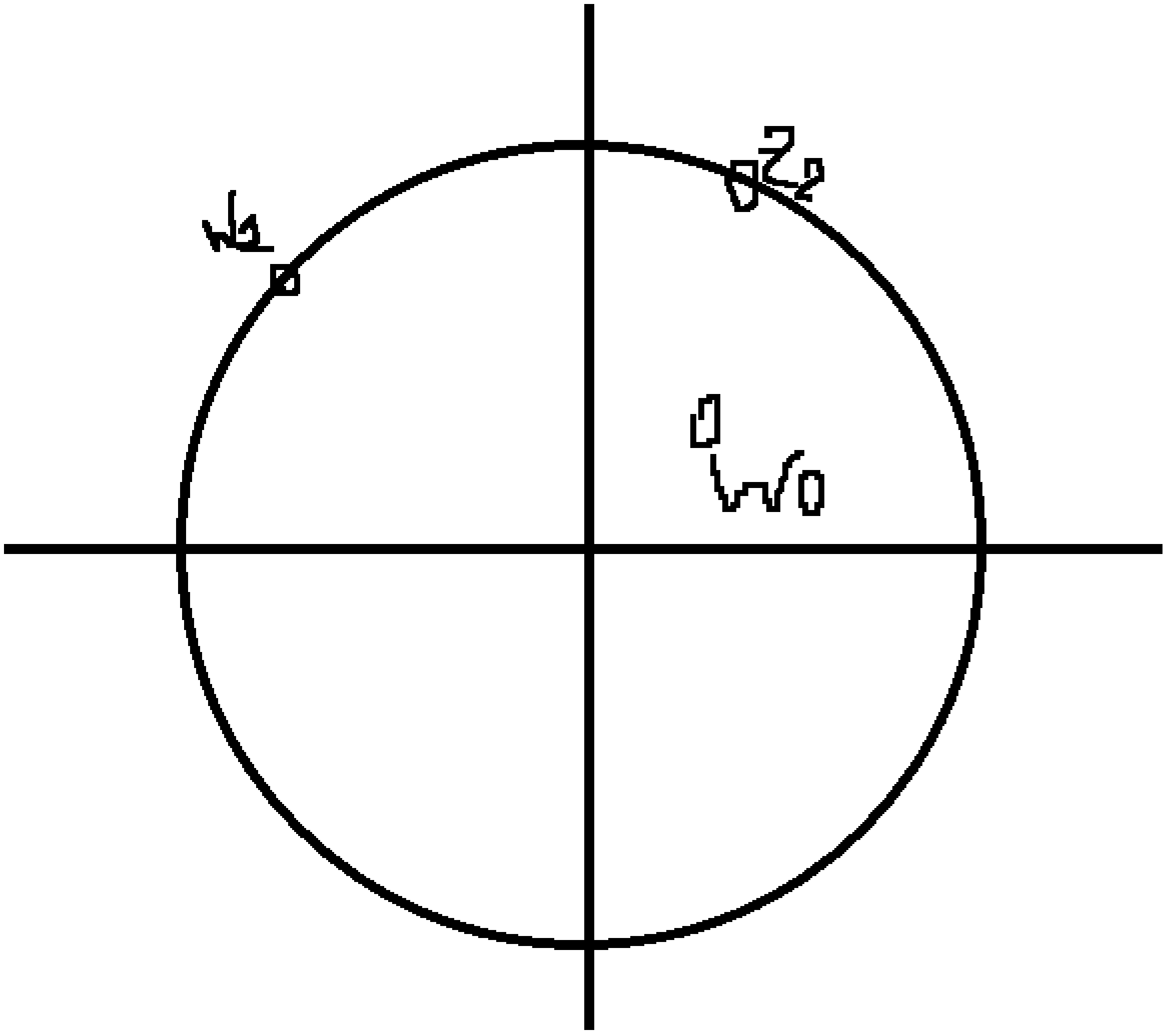
$$\begin{cases} w_0 = f(z_0) \\ \arg f'(z_0) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_0 = f(z_0) \\ w_1 = f(z_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_1 = f(z_1) \\ w_2 = f(z_2) \\ w_3 = f(z_3) \end{cases}$$



z_1
z_2
D
z_0



w_1
z_2
w_0