Домашняя работа № 2-1 Интерполяция Лагранжа

Вычисление интерполяционного полинома Лагранжа

Определение 1 (*интерполяционного полинома Лагранжа и сеточного полинома*)
Пусть на отрезке $[a;b]$ задана сетка $A=\langle\tau_0,\tau_1,...,\tau_k\rangle$, где $\tau_0,\tau_1,...,\tau_k\in[a;b]$ – её узлы, т.е. $a\le\tau_0<\tau_1<...<\tau_k\le b$. Кроме того, зафиксирована A-сеточная функция $f_A:A\to\mathbb{R}$, обозначаемая далее вектором ${}^{>}\boldsymbol{y}=[y_0,y_1,...,y_k\rangle\in{}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$, где $y_0=f_A(\tau_0),y_1=f_A(\tau_1),...,y_k=f_A(\tau_k)$ и ${}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$ – нормированное пространство A-сеточных функций с чебышёвской нормой $\|\cdot\|$, для которой $\|{}^{>}\boldsymbol{y}\|=\max\{|y_0|,|y_1|,...,|y_k|\}$).

Полином $L_k(\tau)=x_0+x_1\tau+x_2\tau^2+...+x_k\tau^k$, где $x_0,x_1,x_2,...,x_k\in\mathbb{R}$ – неизвестные коэффициенты, определённый на отрезке $[a;b]$, для которого выполняются равенства:

$$L_k(\tau_0)=y_0=f_A(\tau_0),L_k(\tau_1)=y_1=f_A(\tau_1),...,L_k(\tau_k)=y_k=f_A(\tau_k)\,,-$$

называется *интерполяционным полиномом Лагранжа для A-сеточной функции* ${}^{>}\boldsymbol{y}\in{}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$.

Полином $\Lambda_A(\tau)=(\tau-\tau_0)\cdot(\tau-\tau_1)\cdot...\cdot(\tau-\tau_k)$, определённый на отрезке $[a;b]$, называется *A-сеточным полиномом*.►

Теорема 1 (*об интерполяционном полиноме Лагранжа*)
Интерполяционный полином Лагранжа $L_k=L(A;{}^{>}\boldsymbol{y})$ для A-сеточной функции ${}^{>}\boldsymbol{y}\in{}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$ – единственен и его коэффициенты определяются из решения СЛАУ:

$$\begin{cases} x_0+x_1\tau_0+x_2\tau_0{}^2+...+x_k\tau_0{}^k=y_0; \\ x_0+x_1\tau_1+x_2\tau_1{}^2+...+x_k\tau_1{}^k=y_1; \\ \text{..} \\ x_0+x_1\tau_k+x_2\tau_k{}^2+...+x_k\tau_k{}^k=y_k. \end{cases} \blacktriangleright$$

Определение 2 (*сеточного отображения и остатка интерполяции Лагранжа*)
Сетка $A=\langle\tau_0,\tau_1,...,\tau_k\rangle$ отрезка $[a;b]$ определяет *A-сеточное отображение* $\hat{A}:C([a;b],\mathbb{R})\to{}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$, для которого $\hat{A}(f)=[f(\tau_0),f(\tau_1),...,f(\tau_k)\rangle\in{}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$, если $f\in C([a;b],\mathbb{R})$. Кроме того, функция $Rest_A(\tau)=f(\tau)-L_k(\tau)$, где $L_k(\tau)$ – интерполяционный полином Лагранжа для A-сеточной функции $\hat{A}(f)\in{}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$, называется *остатком A-интерполяции Лагранжа для функции* $f\in\underline{C}([a;b],\mathbb{R})$ на отрезке $[a;b]$.►

Теорема 2 (*об остатке интерполяции Лагранжа в форме Коши*)
Если $f\in\underline{C}^{(k+1)}([a;b],\underline{\mathbb{R}})$, то в обозначениях *определения 4.2* для любой точки $\tau_*\in[a;b]$ остаток A-интерполяции Лагранжа $Rest_A(\tau)=f(\tau)-L_k(\tau)$ представим *в форме Коши*:

$$Rest_A(\tau_*) = f^{(k+1)}(\xi(\tau_*)) \cdot \frac{\Lambda_A(\tau_*)}{(k+1)!},$$

где $\xi(\tau_*) \in (a;b)$ – некоторая точка, зависящая от точки $\tau_* \in [a;b]$. Поэтому для чебышевской нормы $\|Rest_A\|$ в пространстве $\underline{C}^{(k+1)}([a;b],\underline{\mathbb{R}})$ справедливо неравенство:

$$\|Rest_A\| \le \frac{\left\|f^{(k+1)}\right\|}{(k+1)!} \cdot \|\Lambda_A\|. \blacktriangleright \tag{1}$$

Определение 3 (*уклонения функции от нуля*)
Если $h \in \underline{C}([a;b],\underline{\mathbb{R}})$, то значение чебышевской нормы $\|h\| = \max\{|h(\tau)| : \tau \in [a;b]\}$ называется *уклонением функции* h *от нуля на отрезке* $[a;b]$.►

Замечание 1 (*об остатке интерполяции Лагранжа*)
Согласно форме Коши (1) остатка интерполяции Лагранжа абсолютная погрешность такой интерполяции для произвольной $(k+1)$-гладкой на отрезке $[a;b]$ функции лимитируется только абсолютной погрешностью сеточного полинома Λ_A. Поэтому естественно возникает проблема оптимального расположения узлов сетки $A = \langle \tau_0, \tau_1, ..., \tau_k \rangle$, которое обеспечивало бы минимальное уклонение от нуля на отрезке $[a;b]$ A-сеточного полинома Λ_A.►

Теорема 3 (*об оптимальном выборе схемы сеток для задачи интерполяции Лагранжа*)
Для задачи интерполяции Лагранжа на сетке $A = \langle \tau_0, \tau_1, ..., \tau_k \rangle \subset [a;b]$ в классе всех гладких на отрезке $[a;b]$ функций минимальное уклонение от нуля сеточного полинома Λ_A будет минимальным, если использовать чебышевскую схему сеток:

$$A = \langle \tau_j = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cdot \cos\frac{(2j+1)\pi}{2(k+1)} : j = \overline{0,k} \rangle.$$

Если $f \in \underline{C}^{(k+1)}([a;b],\underline{\mathbb{R}})$, то для остатка $Rest_A(\tau) = f(\tau) - L_k(\tau)$ такой интерполяции Лагранжа функции справедлива оценка:

$$\|Rest_A\| \le \left\|f^{(k+1)}\right\| \cdot \frac{1}{(k+1)!2^k}. \blacktriangleright$$

Теорема 4 (*Чебышёва*). Пусть для гладкой функции $f \in \underline{C}^{(1)}([a;b],\underline{\mathbb{R}})$ на отрезке $[a;b]$ задана схема чебышёвских сеток:

$$A_{(\cdot)} = (A_k = \langle \tau_j = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cdot \cos\frac{(2j+1)\pi}{2(k+1)} : j = \overline{0,k} \rangle : k \in \mathbb{N}).$$

Тогда $L_k = L(A_k; \hat{A}_k(f)) \xrightarrow[k \to +\infty]{} f$.

<u>ЗАДАНИЕ</u> (*N – номер фамилии студента в журнале, n – номер группы)*

Для гладкой на отрезке $[0;2]$ функции $f(\tau)=\dfrac{20+0.2\cdot N}{1+(20+0,2\cdot N)\cdot(1+0.05\cdot(54-n))\cdot(\tau-1)^2}$, используя равномерную сетку с 11-ю узлами, вычислить интерполяционный полином Лагранжа. Используя равномерную сетку с 21 узлом, представить графики функции f и вычисленного (с 11-ю равномерными узлами) интерполяционного полинома Лагранжа. Прокомментировать результаты интерполяции.

Для гладкой на отрезке $[0;2]$ функции f, используя чебышевскую сетку с 11-ю узлами, вычислить интерполяционный полином Лагранжа. Используя равномерную сетку с 21 узлом, представить графики функции f и вычисленного (с 11-ю чебышевскими узлами) интерполяционного полинома Лагранжа.

Прокомментировать результаты интерполяций с равномерными и чебышевскими узлами.

Замечание: коэффициенты интерполяционных полиномов определять с помощью решения соответствующей СЛАУ.►