## Интерполяция сплайнами

***Задание:***

Рассмотрим функцию, заданную на отрезке $[0;2]$

$$f(x) := 2(54-n)\sin(\pi x)\sqrt{1+2N(x-0.5)+N^2}\ ,$$

где n- номер группы, а N- номер студента в журнале.

Пусть задана равномерная сетка с шагом $h = 0,1$.

Построить

- интерполяционный многочлен $S_2(x)$, используя квадратичные сплайны дефекта 1;

- интерполяционный многочлен $S_3(x)$, используя кубические сплайны дефекта 1;

- интерполяционный многочлен $H_3(x)$, используя кубические Эрмитовы сплайны дефекта 1;

- вычислить значения производной функции и сплайнов в узлах.

**Отчет по самостоятельной работе должен содержать:**

1. таблицу значений функции;
2. общий вид сплайнов для всех промежутков;
3. таблицу значений коэффициентов;
4. решение систем;
5. найденные сплайны для всех промежутков;
6. графики сплайнов и производных;

Теория

Для построения по данной функции $f(x)$ интерполирующего ее сплайна (11.8) нужно найти $4n$ его коэффициентов $a_k$, $b_k$, $c_k$, $d_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Чтобы понять, имеется ли для этого достаточное количество связей, расшифруем фигурирующие в определении 11.2 условия а)–в) через функции $g_k(x)$, составляющие $g(x)$, имея в виду, что в любом внутреннем узле должны

совпадать значения двух соседних звеньев сплайна и двух их первых производных (см. наглядную структуру сплайна на рис. 11.4)

Имеем:

из условий интерполяции а):

$$g_1(x_0) = f_0, \quad g_k(x_k) = f_k \text{ при } k = 1, 2, \ldots, n;$$

из условий гладкой стыковки звеньев сплайна б):

$$\left.\begin{aligned} g_{k-1}(x_{k-1}) &= g_k(x_{k-1}), \\ g'_{k-1}(x_{k-1}) &= g'_k(x_{k-1}), \\ g''_{k-1}(x_{k-1}) &= g''_k(x_{k-1}) \end{aligned}\right\} \text{ при } k = 2, 3, \ldots, n;$$

из краевых условий в):

$$g''_1(x_0) = 0, \quad g''_n(x_n) = 0.$$

Как видим, условий оказалось $4n$ — ровно столько, сколько в записи сплайна (11.8) неизвестных коэффициентов. Подставляя сюда выражения функций

$$g_k(x) := a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$$

и их производных

$$g'_k(x) = b_k + 2c_k(x - x_k) + 3d_k(x - x_k)^2 \tag{11.9}$$

и

$$g''_k(x) = 2c_k + 6d_k(x - x_k)$$

через коэффициенты $a_k$, $b_k$, $c_k$, $d_k$ при указанных значениях $k$ и полагая для краткости

$$h_k := x_k - x_{k-1}, \tag{11.10}$$

получаем детализированную систему связей

$$\left\{\begin{array}{lll} a_1 - b_1 h_1 + c_1 h_1^2 - d_1 h_1^3 = f_0, & & (11.11) \\ a_k = f_k \quad \text{при } k = 1, 2, \ldots, n, & & (11.12) \\ \left.\begin{array}{l} a_{k-1} = a_k - b_k h_k + c_k h_k^2 - d_k h_k^3, \\ b_{k-1} = b_k - 2c_k h_k + 3d_k h_k^2, \\ c_{k-1} = c_k - 3d_k h_k, \end{array}\right\} & \text{при } k = 2, 3, \ldots, n & \begin{array}{l} (11.13) \\ (11.14) \\ (11.15) \end{array} \\ c_1 - 3d_1 h_1 = 0, & & (11.16) \\ c_n = 0. & & (11.17) \end{array}\right.$$

Теперь ставим задачу выявления эффективного способа нахождения коэффициентов сплайна $a_k$, $b_k$, $c_k$, $d_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ из этой линейной относительно них системы (11.11)–(11.17). С этой целью будем исключать из системы неизвестные $a_k$, $d_k$, $b_k$ и сводить все к решению системы относительно неизвестных $c_k$. При этом для упрощения записей используем уже применявшееся ранее (см. (8.39) в § 8.6) обозначение разделенной разности

$$f(x_{k-1}; x_k) := \frac{f_k - f_{k-1}}{h_k} \tag{11.18}$$

и, кроме того, введем фиктивный коэффициент

$$c_0 = 0. \tag{11.19}$$

Итак, согласно (11.12), коэффициенты $a_k$ известны и равны $f_k$ при любом $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Подставляя их значения в равенства (11.11) и (11.13), приходим к равенству

$$b_k h_k - c_k h_k^2 + d_k h_k^3 = f_k - f_{k-1},$$

справедливому при $k=1, 2, \ldots, n$, откуда с учетом обозначения (11.18) получаем выражение

$$b_k = f(x_{k-1}; x_k) + c_k h_k - d_k h_k^2 \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{11.20}$$

Далее, из (11.15) и (11.16), если учесть (11.19), можно однозначно выразить $d_k$ через $c_k$:

$$d_k = \frac{c_k - c_{k-1}}{3h_k} \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{11.21}$$

С помощью (11.21) избавляемся от $d_k$ в (11.20):

$$b_k = f(x_{k-1}; x_k) + \frac{2}{3} h_k c_k + \frac{1}{3} h_k c_{k-1} \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{11.22}$$

Теперь пользуемся связью (11.14), подставляя туда $b_{k-1}$, $b_k$ из (11.22) и $d_k$ из (11.21):

$$f(x_{k-2}; x_{k-1}) + \frac{2}{3} h_{k-1} c_{k-1} + \frac{1}{3} h_{k-1} c_{k-2} =$$

$$= f(x_{k-1}; x_k) + \frac{2}{3} h_k c_k + \frac{1}{3} h_k c_{k-1} - 2h_k c_k + 3h_k^2 \cdot \frac{c_k - c_{k-1}}{3h_k}.$$

После упрощения отсюда получаем относительно неизвестных $c_k$ трехточечное разностное уравнение второго порядка

$$h_{k-1} c_{k-2} + 2(h_{k-1} + h_k) c_{k-1} + h_k c_k =$$

$$= 3f(x_{k-1}; x_k) - 3f(x_{k-2}; x_{k-1}), \tag{11.23}$$

где $k = 2, 3, \ldots, n$, $c_0 = 0$ (согласно (11.19)) и $c_n = 0$ (согласно (11.17)).

## 11.5. ЭРМИТОВЫ (ЛОКАЛЬНЫЕ) СПЛАЙНЫ

Предположим, что у аппроксимируемой функции $y = f(x)$ в точках $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ известны не только значения $y_0, y_1, \dots, y_n$, но и значения производных до $m$-й включительно,



т.е. функция $y = f(x)$ задается таблицей

| $x$ | $y$ | $y'$ | … | $y^{(m)}$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ | $y_0'$ | … | $y_0^{(m)}$ |
| $x_1$ | $y_1$ | $y_1'$ | … | $y_1^{(m)}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $x_n$ | $y_n$ | $y_n'$ | … | $y_n^{(m)}$ |

(11.65)

Как известно (см. § 8.8), по этой информации об $f(x)$ можно построить единственный интерполяционный многочлен Эрмита степени $(n+1)(m+1)-1$. Даже при сравнительно небольших значениях $n$ и $m$ эта степень может оказаться неоправданно высокой. Здесь имеется в виду как сложность построения и эффективного использования многочленов Эрмита высоких степеней, так и повышенные требования к гладкости функций, для которых они должны служить приближениями.

Применение в таких случаях обычных интерполяционных сплайнов высоких степеней и малых дефектов дает нужную гладкость интерполируемой функции, т. е. самого сплайна, но не обеспечивает согласования его производных с данными производными функции $f(x)$.

Напрашивается сведение воедино этих двух способов аппроксимации функций, т. е. образование гибрида интерполяционного сплайна и интерполяционного многочлена Эрмита. Такие гибриды называют ***эрмитовыми сплайнами***.

Глядя на таблицу (11.65), в соответствии с полученным из § 8.8 представлением об эрмитовой интерполяции, легко вообразить, что по данным в точках $x_0$ и $x_1$ значениям функции $f(x)$ и ее $m$ производных можно построить единственный многочлен Эрмита $H^1_{2m+1}(x)$ степени $2m+1$, по данным в точках $x_1$ и $x_2$ — многочлен такой же степени $H^2_{2m+1}(x)$, и т. д. Поскольку каждый из этих многочленов — звеньев эрмитова сплайна

$$S_{2m+1}(x) := \left\{ H^i_{2m+1}(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i] \right\}_{i=1}^{n} \tag{11.66}$$

— строится независимо от остальных, то такие сплайны называются также ***локальными сплайнами***.

Свойство локальности эрмитова сплайна дает определенные преимущества при его построении, особенно в случае большого числа $n$ элементарных промежутков $[x_{i-1}, x_i]$, а также позволяет составлять эрмитов сплайн из звеньев разных степеней, если на каких-то участках промежутка интерполяции $[a, b]$ функция $f(x)$ представлена производными одного порядка, а на других — другого порядка. При этом заметим, что в точках стыковки таких участков допустимо использование односторонних производных.

Посмотрим, что собой представляет **эрмитов сплайн**, например, **третьей степени** (эрмитов сплайн первой степени, по сути, определен в § 11.1 формулами (11.2)–(11.3)).

Считая, что на $i$-м элементарном промежутке функция $y = f(x)$ задается таблицей

| $x$ | $y$ | $y'$ |
|---|---|---|
| $x_{i-1}$ | $y_{i-1}$ | $y'_{i-1}$ |
| $x_i$ | $y_i$ | $y'_i$ |

,

полагаем в (11.66) $m=1$, и $i$-е звено сплайна $S_3(x)$ ищем в виде*)

$$H_3^i(x) = a_0^i + a_1^i(x - x_{i-1}) + a_2^i(x - x_{i-1})^2 + a_3^i(x - x_{i-1})^3. \quad (11.67)$$

Два уравнения для нахождения коэффициентов многочлена $H_3^i(x)$ получаем из интерполяционных условий $H_3^i(x_{i-1}) = y_{i-1}$, $H_3^i(x_i) = y_i$, а именно:

$$a_0^i = y_{i-1}, \quad (11.68)$$

$$a_0^i + a_1^i h_i + a_2^i h_i^2 + a_3^i h_i^3 = y_i, \quad (11.69)$$

где $h_i := x_i - x_{i-1}$. Далее дифференцируем (11.67):

$$\left(H_3^i\right)'(x) = a_1^i + 2a_2^i(x - x_{i-1}) + 3a_3^i(x - x_{i-1})^2,$$

и из условий $\left(H_3^i\right)'(x_{i-1}) = y'_{i-1}$, $\left(H_3^i\right)'(x_i) = y'_i$ получаем еще два уравнения:

$$a_1^i = y'_{i-1}, \quad (11.70)$$

$$a_1^i + 2a_2^i h_i + 3a_3^i h_i^2 = y'_i. \quad (11.71)$$

Равенства (11.68) и (11.70) уже определяют первые коэффициенты многочлена $H_3^i(x)$. Подставив их в оставшиеся равенства (11.69) и (11.71), легко находим третий и четвертый коэффициенты:

$$a_2^i = \frac{1}{h_i^2}(3y_i - 3y_{i-1} - 2h_i y'_{i-1} - h_i y'_i), \quad (11.72)$$

$$a_3^i = \frac{1}{h_i^3}(2y_{i-1} - 2y_i + h_i y'_{i-1} + h_i y'_i). \quad (11.73)$$

---

*) Здесь $i$ — определяемый номером узла индекс, а не показатель степени.

Обратим внимание на то, что формула (11.66) определяет эрмитов сплайн заведомо нечетной степени. Для построения эрмитовых сплайнов четных степеней постановка задачи несколько видоизменяется.

Как и в случае рассматриваемых ранее (см. § 11.3) квадратичных интерполяционных сплайнов, будем строить эрмитов сплайн $S_{2m}(x)$ для заданной таблицей (11.65) функции $y = f(x)$, вводя дополнительные узлы $z_i$ между данными узлами интерполяции $x_{i-1}$ и $x_i$; для простоты будем считать, что $z_i$ находится точно посередине между $x_{i-1}$ и $x_i$. Тогда одно звено $G_{2m}^i(x)$ сплайна $S_{2m}(x)$ на элементарном промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ составляется из двух многочленов:

$$G_{2m}^i(x) := \begin{cases} p_{2m}^i(x) := a_0^i + a_1^i(x - x_{i-1}) + \cdots + a_{2m}^i(x - x_{i-1})^{2m}, \\ \qquad \text{если } x \in [x_{i-1}, z_i], \\ q_{2m}^i(x) := b_0^i + b_1^i(x_i - x) + \cdots + b_{2m}^i(x_i - x)^{2m}, \\ \qquad \text{если } x \in [z_i, x_i]. \end{cases}$$

Для нахождения $2(2m+1)$ коэффициентов многочленов–полузвеньев $p_{2m}^i(x)$ и $q_{2m}^i(x)$ $i$-го звена $G_{2m}^i(x)$ сплайна $S_{2m}(x)$ (дефекта $m$) привлекаются $2m + 2$ интерполяционных условия

$$\left(G_{2m}^i\right)^{(j)}(x_{i-1}) = y_{i-1}^{(j)}, \quad \left(G_{2m}^i\right)^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)} \quad (j = 0, 1, \ldots, m)$$

и $2m$ условий гладкой стыковки полузвеньев в точке $z_i$:

$$\left(p_{2m}^i\right)^{(j)}(z_i) = \left(q_{2m}^i\right)^{(j)}(z_i) \qquad (j = 0, 1, \ldots, 2m - 1).$$

Несложно доказать, что такие коэффициенты могут быть однозначно найдены без привлечения информации с других промежутков, что означает возможность построения локальных сплайнов четной степени.

Построим **квадратичный эрмитов сплайн**, пользуясь теми же данными, которые использовались при построении кубического эрмитова сплайна.

Представляя $i$-е звено эрмитова сплайна $S_2(x)$ многочленами

$$p_2^i(x) = a_0^i + a_1^i(x - x_{i-1}) + a_2^i(x - x_{i-1})^2, \text{ если } x \in [x_{i-1}, z_i], \tag{11.74}$$

и

$$q_2^i(x) = b_0^i + b_1^i(x_i - x) + b_2^i(x_i - x)^2, \text{ если } x \in [z_i, x_i], \tag{11.75}$$

дифференцируем их:

$$\left(p_2^i\right)'(x) = a_1^i + 2a_2^i(x - x_{i-1}),$$

$$\left(q_2^i\right)'(x) = -b_1^i - 2b_2^i(x_i - x).$$

Далее на основе равенств

$$p_2^i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad (p_2^i)'(x_{i-1}) = y'_{i-1},$$

$$q_2^i(x_i) = y_i, \quad (q_2^i)'(x_i) = y'_i,$$

$$p_2^i(z_i) = q_2^i(z_i), \quad (p_2^i)'(z_i) = (q_2^i)'(z_i),$$

полагая $z_i - x_{i-1} = x_i - z_i = \frac{1}{2}h_i$, устанавливаем связи между известными величинами $y_{i-1}$, $y_i$, $y'_{i-1}$, $y'_i$ и неизвестными коэффициентами $a_0^i$, $a_1^i$, $a_2^i$, $b_0^i$, $b_1^i$, $b_2^i$ $i$-го звена искомого сплайна:

$$\begin{cases} a_0^i = y_{i-1}, \\ a_1^i = y'_{i-1}, \\ b_0^i = y_i, \\ b_1^i = -y'_i, \\ a_0^i + \frac{1}{2}h_i a_1^i + \frac{1}{4}h_i^2 a_2^i = b_0^i + \frac{1}{2}h_i b_1^i + \frac{1}{4}h_i^2 b_2^i, \\ a_1^i + h_i a_2^i = -b_1^i - h_i b_2^i. \end{cases} \tag{11.76}$$

Первые четыре уравнения полученной системы (11.76) представляют собой явные выражения первых четырех коэффициентов многочленов (11.74) и (11.75); подставив их в последние два уравнения, находим оставшиеся два коэффициента:

$$a_2^i = \frac{2}{h_i^2}(y_i - y_{i-1}) - \frac{1}{2h_i}(y'_i + 3y'_{i-1}), \tag{11.77}$$

$$b_2^i = \frac{2}{h_i^2}(y_{i-1} - y_i) + \frac{1}{2h_i}(3y'_i + y'_{i-1}). \tag{11.78}$$