Колесников, Никитин,

Солодкая Елена Викторовна
Всё решает экзамен.

ДЗ1	ДЗ2	ДЗ3	ДЗ4

11/02/25

Динамика материальной точки

Основное уравнение динамики точки (.) в инерциальной системе отсчёта:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

В ДСК:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{k_x} \\ m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} F_{k_y} \\ m\ddot{z} = \sum_{k=1}^{n} F_{k_z} \end{cases}$$

Естественный способ задачи:

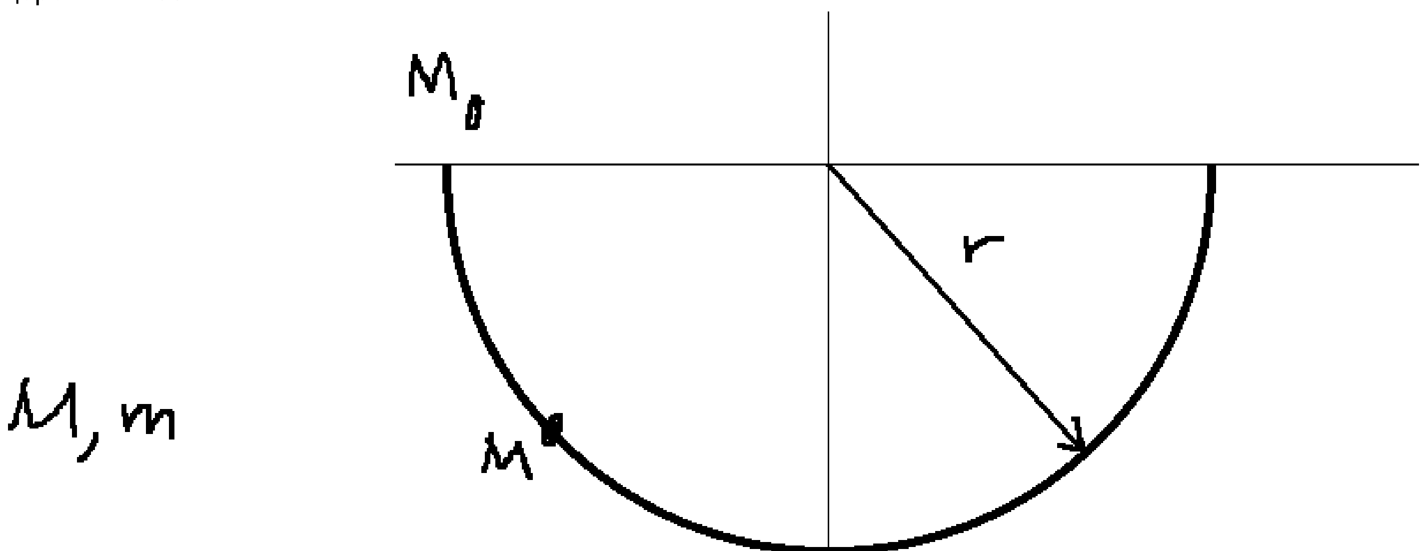
$$\begin{cases} ma^{n} = \sum_{k=1}^{n} F_{k_n} \\ ma^{\tau} = \sum_{k=1}^{n} F_{k_n} \end{cases}$$

$$a^{n} = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$$

$$a^{\tau} = \ddot{s}(t) = \frac{dV_{\tau}}{dt}$$

+ граничные, начальные условия

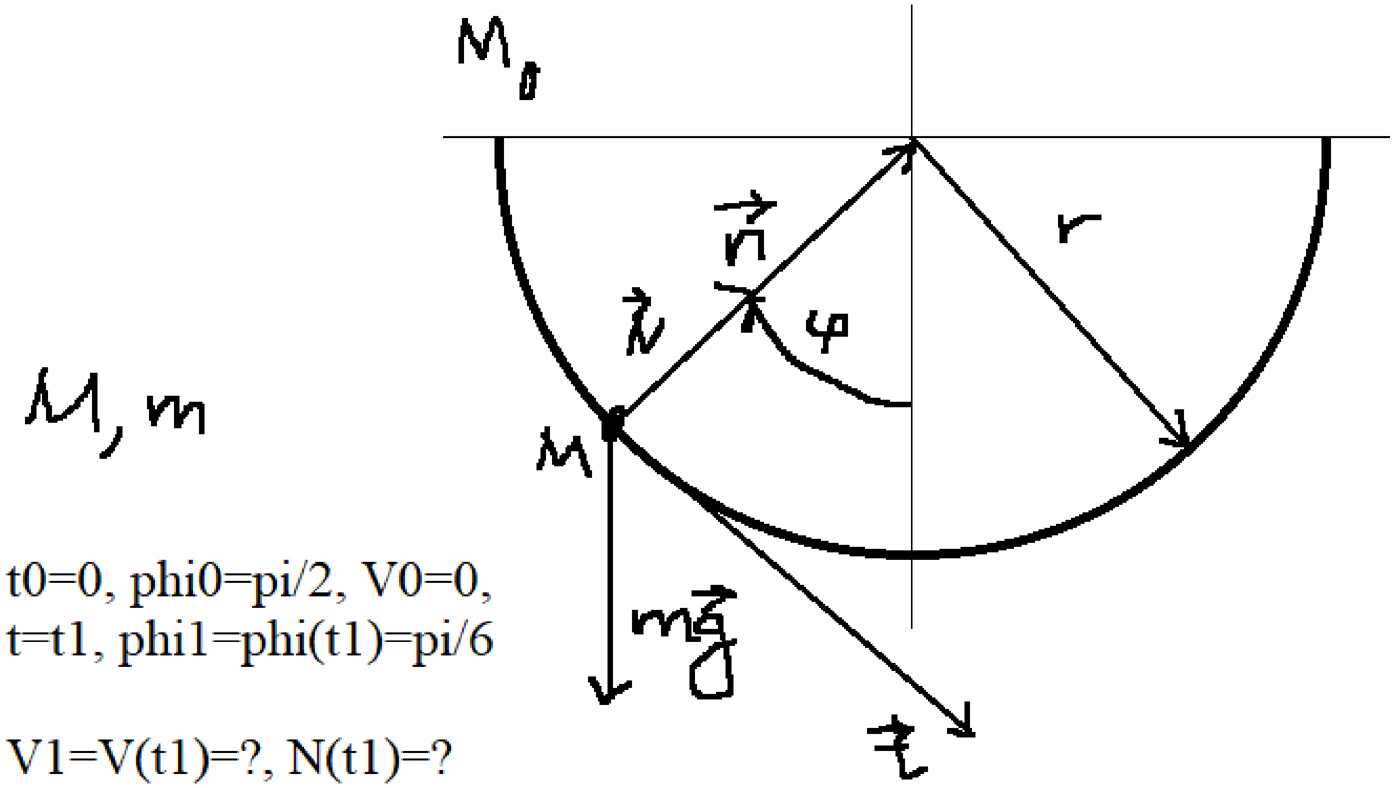
Мещерский 27.65



t0=0, phi0=pi/2, V0=0,
t=t1, phi1=phi(t1)=pi/6

V1=V(t1)=?, N(t1)=?

1. Естественный способ задания
2. Силы



3. $\vec{n} = \frac{\vec{F}}{m}$

4.
$$\tau : ma^{\tau} = \sum_{k=1}^{N} F_k^{\tau}$$
$$n : ma^{n} = \sum_{k=1}^{N} F_k^{n}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m\frac{dV_\tau}{dt} = mg\sin\varphi & (1) \\ \frac{mV^2}{r} = N - mg\cos\varphi & (2) \end{cases}$$

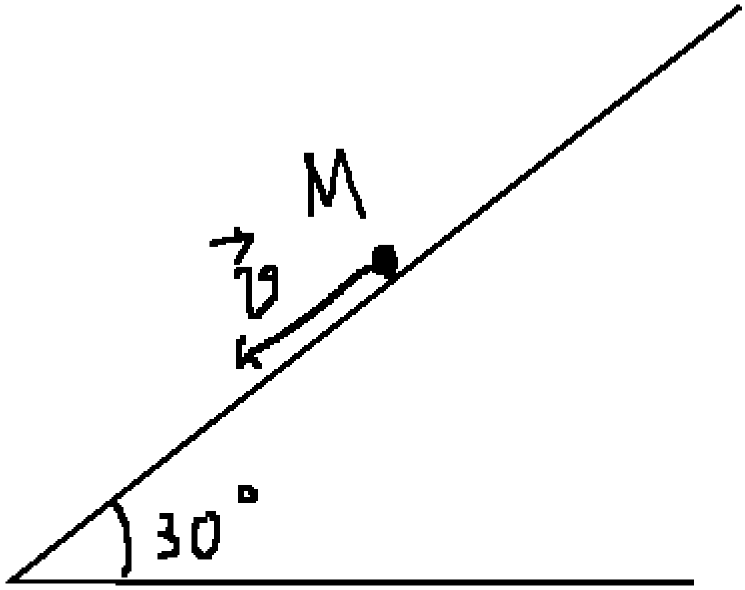
(1):

$$\frac{dV}{dt} = g\sin\varphi$$
$$dV = g\sin\varphi dt$$
$$V = \dot{\varphi} r$$
$$\ddot{\varphi} r = g\sin\varphi$$
$$\frac{dV}{dt} = g\sin\varphi$$
$$\frac{dV}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{d\varphi} = g\sin\varphi$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{V_\tau}{r}$$
$$\frac{dV}{d\varphi}\cdot -\frac{V}{r} = g\sin\varphi$$
$$\int_{V_0}^{V_1} VdV = -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} rg\sin\varphi d\varphi \implies \frac{V_1^2}{2} = rg\cos\varphi|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}$$
$$\frac{V_1^2}{2} = rg\frac{\sqrt{3}}{2} \implies$$
$$V_1 = \sqrt{rg}\sqrt[4]{6}$$

$$N = mg\cos\varphi_1 + m\frac{V_1^2}{2}$$

27.5

27.5



(·) M

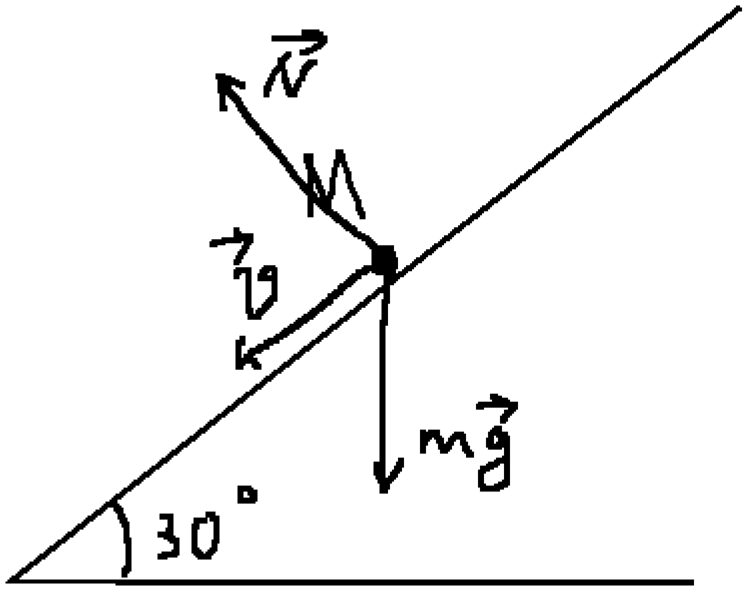
$t_0 = 0, \; V(0) = 2$ м/с

$S_M(t_1) = 9{,}6$ м

$t_1 = ?$

5. ДСК

6. Силы: $m\vec{g}$



7.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$x : ma_x = \sum_{k=1}^{N} F_{kx}$$

$$y : ma_y = \sum_{k=1}^{N} F_{ky}$$

$$\implies \begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin(30^o) \\ m\ddot{y} = mg\cos(30^o) + N \end{cases} \implies \ddot{x} = \frac{g}{2}$$

Решаем:

$$\ddot{x} = \frac{g}{2}$$

$$x = \frac{gt^2}{4} + V_0 t + x_0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{gt^2}{4} + 2t \implies$$

$$9.6 = \frac{gt_1^2}{4} + 2t_1 \implies$$

$$t_1 = 1.6$$

Эта же задача с сопротивлением по закону $\vec{R} = -\mu V \vec{V}$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{mg}{2} - \mu\dot{x}^2 \\ m\ddot{y} = mg\frac{\sqrt{3}}{2} - \mu\dot{y}^2 \end{cases} \leftrightarrow m\frac{dV}{dt} = m\frac{g}{2} - \mu V^2$$

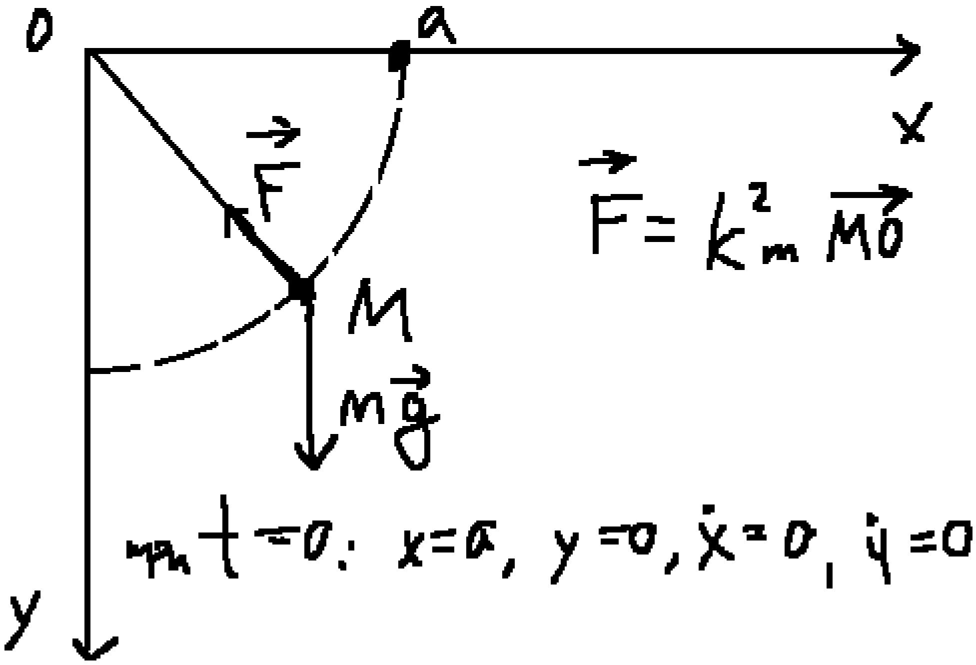
$$m\frac{dV}{dt}\frac{dl}{dl} = m\frac{g}{2} - \mu V^2$$

$$mV\frac{dV}{dl} = \frac{mg}{2} - \mu V^2$$

$$m\frac{dV^2}{dl} = mg - 2\mu V^2$$

$$q = V^2$$

$$m\frac{dq}{dl} = mg - 2\mu q$$



$x(t) = ?$ $y(t) = ?$

1. ДСК
2. силы: $\vec{F}$, $m\vec{g}$
3. $$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$
$$\begin{cases} m\ddot{x} = -F\cos\alpha \\ m\ddot{y} = mg - F\sin\alpha \end{cases} \implies \begin{cases} m\ddot{x} = -k^2 mx \\ m\ddot{y} = mg - k^2 my \end{cases} \implies$$
$$\begin{cases} \ddot{x} + k^2 x = 0 \\ \ddot{y} + k^2 y = g \end{cases} \implies \begin{cases} x = a\cos(kt) \\ y = C_1\sin(kt) + C_2\cos(kt) + C_3 \end{cases} \implies y = C_4\sin(kt) + C_5\cos(kt) + \frac{g}{k^2}$$

18/02/2025

Динамика материальной точки в неинерциальной системе отсчёта.

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\vec{a} = \vec{a^r} + \vec{a^e} + \vec{a^к}$$

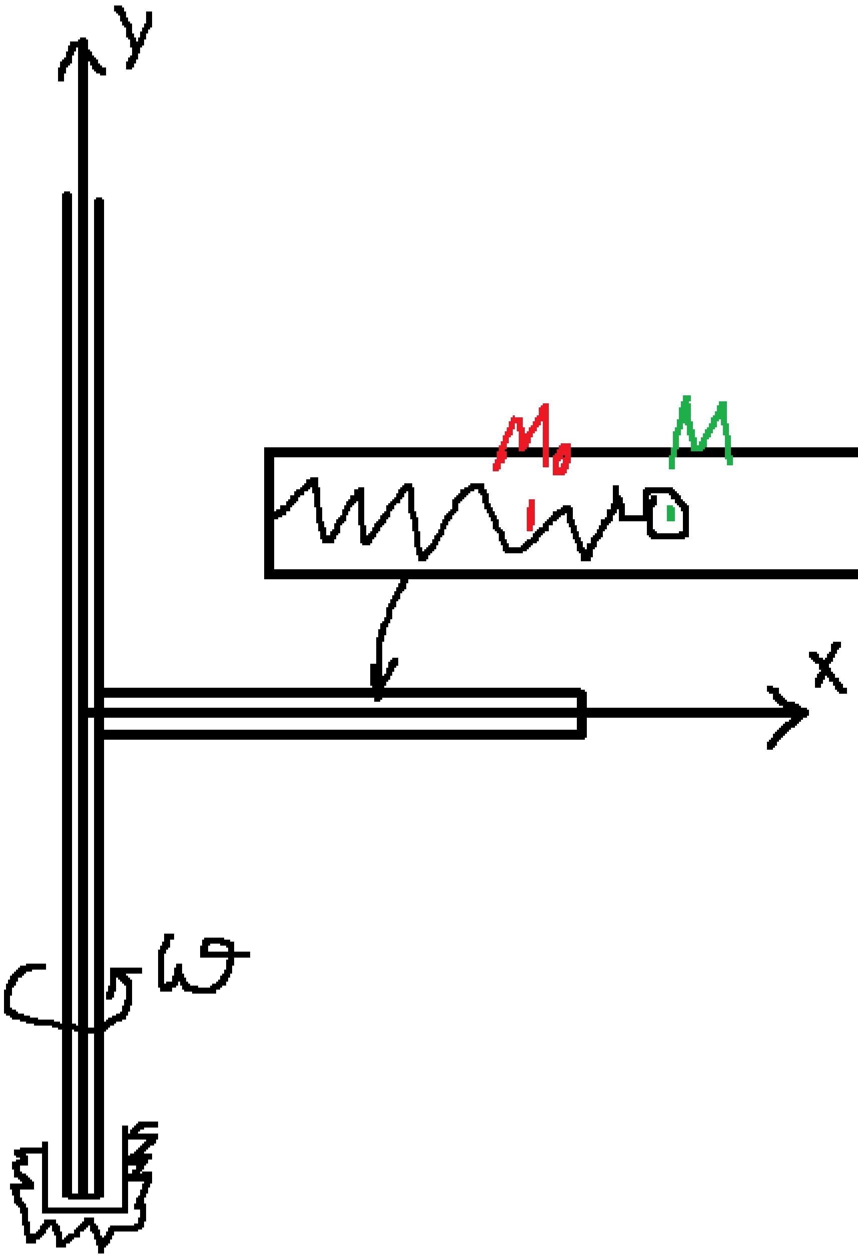
$$m\vec{a^r} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i - m\vec{a^e} - m\vec{a^к}$$

$$\vec{\Phi^e} = -m\vec{a^e} \text{ - Переносная сила инерции}$$

$$\vec{\Phi^к} = -m\vec{a^к} \text{ - сила инерции Кориолиса}$$

$$m\vec{a^r} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i + \vec{\Phi^e} + \vec{\Phi^к}$$

$$\vec{a}_к = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$$



Дано:

$\omega = const,\ C$ - жёсткость пружины, $t_0 = 0,\ x(0) = l,\ V_r(0) = 0$

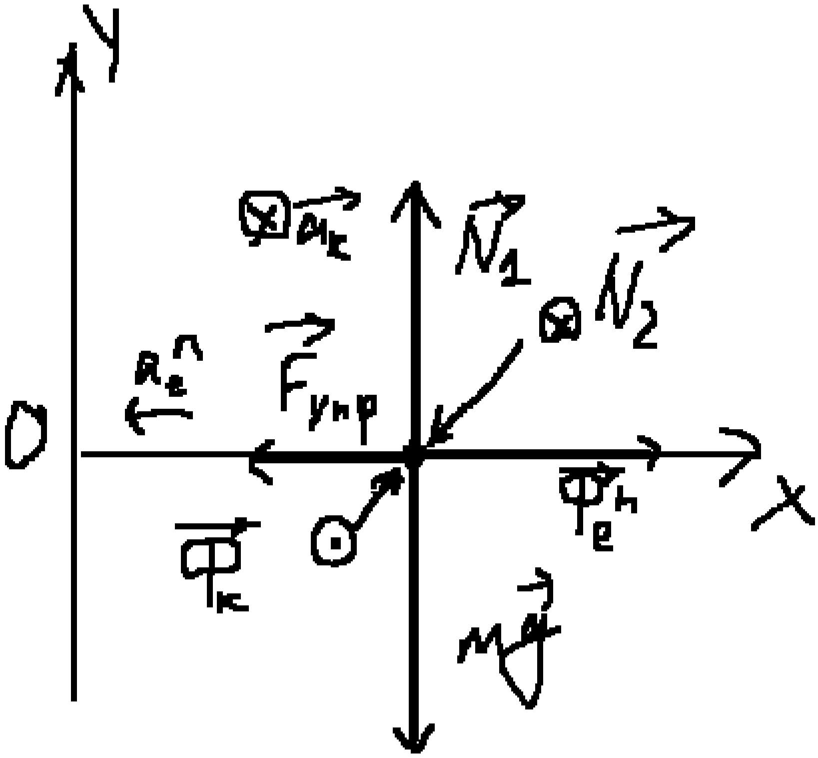
Решение:

$$\vec{\Phi}^e = -\vec{a}^e,\ \vec{\Phi}_к = -m\vec{a}_к$$

$$\vec{a}^e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau$$

$$\omega_e = const \Rightarrow \vec{a}_e^\tau = 0$$

$$\vec{a}_к = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$$


y
O
x
N1
N2
Fупр
mg

$$3.\ m\vec{a^r} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i + \vec{\Phi}^e + \vec{\Phi}^к$$

$$\begin{cases} ma_x^r = -F_{упр} + \Phi_e^n \\ ma_z^r = N_1 - mg \\ ma_y^r = \Phi_к - N_2 \end{cases}$$

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$$

$$F_{упр} = C(x-l)$$

$$\Phi_e^n = ma_e^n = m\omega^2 x \text{ (x - расстояние от оси вращения)}$$

$$\Longrightarrow$$

$$m\ddot{x} = -C(x-l) + m\omega^2 x$$

$$\ddot{x} + x\left(\frac{C}{m} - \omega^2\right) = \frac{C}{m}l,\ \frac{C}{m} = k^2$$

$$\ddot{x} + (k^2 - \omega^2)x = k^2 l$$

$$x = x_{\text{общее однородное}} + x_{\text{частное неоднородное}}$$

$$\ddot{x} = \lambda^2$$

$$\lambda^2 = -(k^2 - \omega^2)$$

$$1.\ k^2 - \omega^2 > 0$$

$$x_{\text{общее однородное}} = C_1 \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + C_2 \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2}t)$$

$$x_{\text{частное неоднородное}} = A \implies A = \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2}$$

$$x = C_1 \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + C_2 \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2}$$

Находим константы

$$x(0) = l \implies C_2 + \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2} = l \implies C_2 = l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \implies C_1 = 0$$

$$x = \left(l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2}\right)\cos(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2} 2.\ k^2 - \omega^2 < 0$$

$$x_{\text{общее однородное}} = C_1 e^{\sqrt{k^2 - \omega^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{k^2 - \omega^2}t}$$

$$x = C_1 e^{\sqrt{k^2 - \omega^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{k^2 - \omega^2}t} + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2}$$

Находим константы

$$x(0) = l \implies C_1 + C_2 = l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \implies C_1 = C_2 = \frac{1}{2}\left(l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2}\right)$$

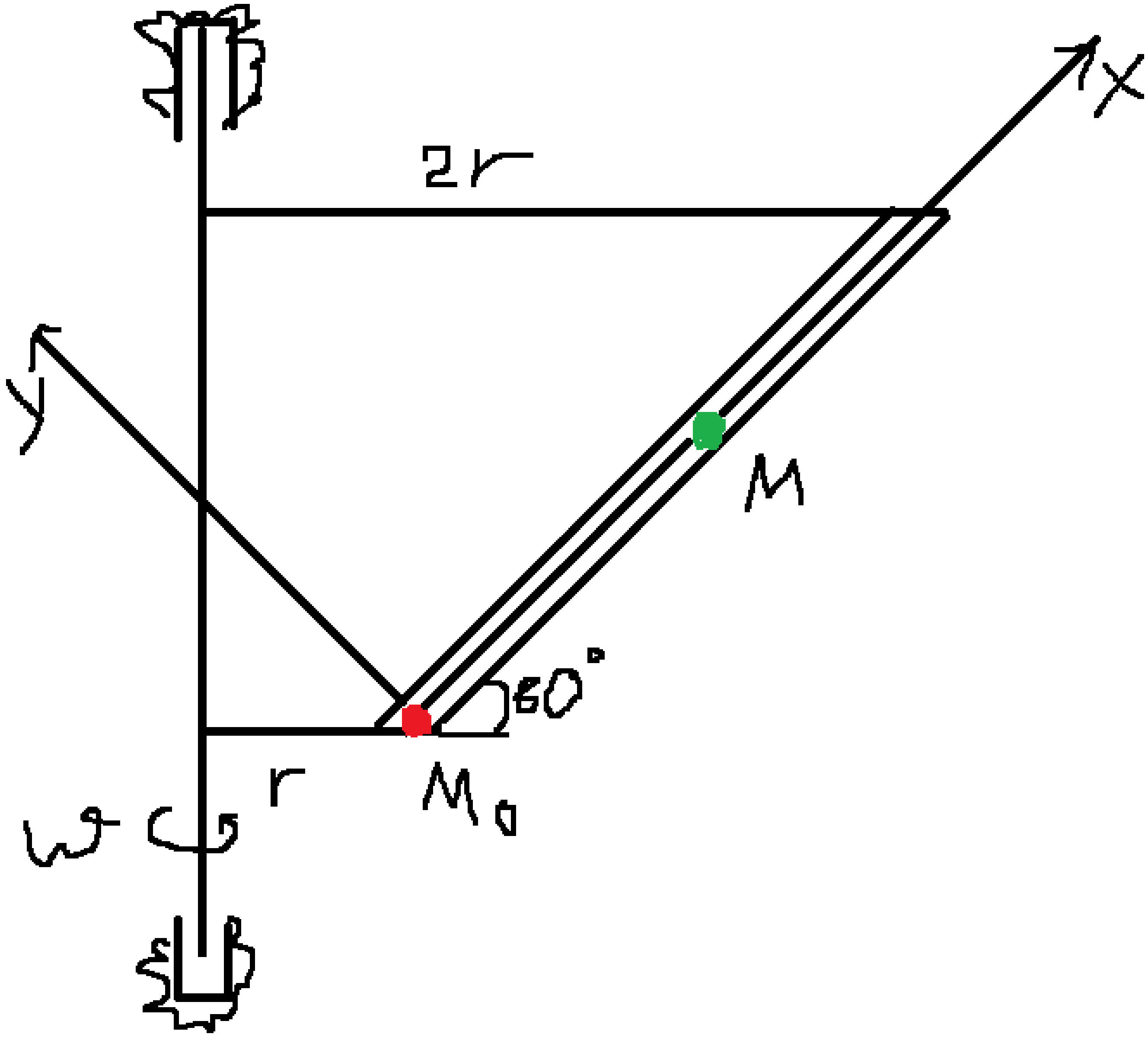
$$x = \frac{1}{2}\left(l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2}\right)(e^{\sqrt{k^2 - \omega^2}t} + e^{-\sqrt{k^2 - \omega^2}t}) + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2}$$

1 Домашнее задание можно делать, варианты согласно списку

На след неделю

Динамика материальной точки

Колесников



Дано:

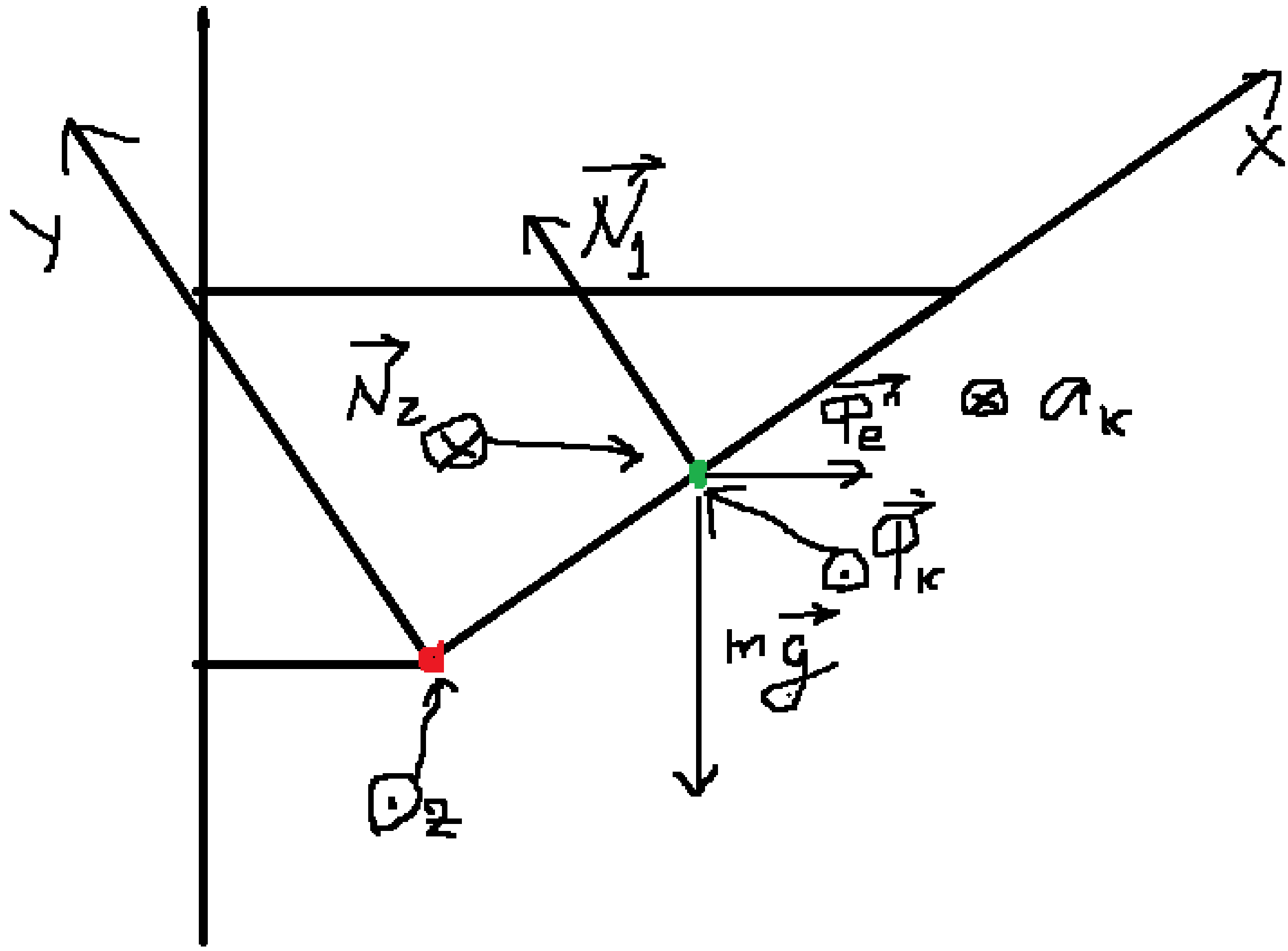
$t_0 = 0, V_r(0) = 0$

Найти:

$\omega_{\min} = ?(V_r > 0)$

$t = t_1, \omega = 2\omega_{\min}, Vr(t_1) = ?$

Решение:



$$\vec{a_e} = \vec{a_{e^n}} + \cancel{\vec{a_e^\tau}}$$

$$\vec{\Phi}_к = -m\vec{a}_к$$

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{a}_e = -m\vec{a_{e^n}}$$

$$m\vec{a_r} = \sum \vec{F_i} + \vec{\Phi}_к + \vec{\Phi}_e$$

$$\begin{cases} m\vec{a_x} = -mg\cos\frac{\pi}{6} + \Phi_e^n \cos\frac{\pi}{3} \\ m\vec{a_y} = -mg\sin\frac{\pi}{6} - \Phi_e^n \sin\frac{\pi}{3} \\ m\vec{a}z = 0 = \Phi_к - N_2 \end{cases}$$

$$\ddot{x} = -g\frac{\sqrt{3}}{2} + \omega^2\left(R + \frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\ddot{x} + \omega^2\left(R + \frac{1}{2}x\right)$$

$$\sum F_{kx} + \Phi_{ex} = 0 \implies \omega_{min}$$

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{g\sqrt{3}}{R}}$$

$$\ddot{x} = \frac{dV_r}{dt} = \frac{dV_r}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{dV_r}{dx} \cdot V_r$$

$$\ddot{x} - \frac{1}{4}\omega^2 x - \frac{1}{2}\omega^2 R + g\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

25/02/2025

Общие теоремы динамики механической системы.

Уравнения движения центра масс. Теорема об изменении количества движения.

Координаты центра масс:

$$x_C = \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n \cdot m_n}{\sum_{n=1}^{N} m_n} = \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n \cdot m_n}{M}$$
$$y_C = \frac{\sum_{n=1}^{N} y_n \cdot m_n}{M}$$
$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{n=1}^{N} \vec{r}_n \cdot m_n}{M}$$

Для точки:

$$\vec{a} = \frac{F}{m} \Leftrightarrow m\vec{a} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k$$

$$M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(e)}, \text{где } \vec{F}^e \text{ - внешние силы}$$

$$m\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{kx}^{(e)}$$
$$m\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ky}^{(e)}$$

Частные случаи:

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{kx} = 0 \implies M\ddot{x}_C = 0$$
$$\text{Если при } t = 0 \text{ - покой, то}$$
$$\ddot{x}_C = 0 \implies \dot{x}_C = Const$$
$$+ \text{ начальные условия } \implies \dot{x}_C = 0$$
$$\implies x_C = Const$$

Количество движения (для точки)

$$\vec{Q} = m\vec{V}$$
$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{N} \vec{Q}_i$$
$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Теорема об изменении количества движения
Частные случаи:

$$\begin{cases} \frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^{N} F_{kx} = 0 \\ \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^{N} F_{ky} \end{cases} \implies \frac{dQ_x}{dt} = 0 \implies Q_x = const$$

Общие теоремы динамики работают в инерциальной системме отсчёта
$\vec{V}$ - абсолютная скорость
Дано:

$$\alpha = 60^o$$
$$m_2 = m_1 = m, m_3 = 2m$$
$$\varphi(t) = 2\varepsilon t^2$$
$$t = 0 \text{ - покой}$$

Найти:

$$x_4(t) = ?,\ a_4 = ?$$

Решение:

$$\left.\begin{array}{c}\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^e = 0 \\ \vec{V}(0) = 0\end{array}\right. \Rightarrow Q_x = 0$$

$$Q_x = Q_{x_1} + Q_{x_2} + Q_{x_3} + Q_{x_4}$$
$$V_A = V_B$$
$$Q_{x_1} = mV_A = mV_B$$
$$Q_{x_2} = mV_B$$

V_{Cx} - проекция абсолютной скорости центра масс на ось x

$$Q_{x_3} = m_3 V_{Cx}$$
$$Q_{x_3} = m_3(-V_C^r \cdot \cos 60^o + V_C^{(e)})$$
$$V_K^r = |\dot{\varphi}| r = 4\varepsilon tr$$
$$V_C^r = 2\varepsilon tr$$
$$V_C^e = V_B$$
$$Q_{x_3} = m_3(V_B - \varepsilon tr)$$
$$Q_x = 2mV_B + 2m(V_B - \varepsilon tr) - mV_B = 0$$
$$V_B = \frac{8\varepsilon r}{5} t$$
$$x = \frac{8\varepsilon r}{5}\frac{t^2}{2} = \frac{4\varepsilon r}{5} t^2$$
$$V_C^r = 2\varepsilon rt$$
$$\frac{d}{dt}\left(2m \cdot 2\varepsilon tr \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = N - g(m_4 + 4m)$$
$$N = 2\sqrt{3} m\varepsilon r + g(m_4 + 4m)$$

“Drawing 2025-02-25 10.39.34.excalidraw” не может быть найдена.

Уравнение движения центра масс

“Drawing 2025-02-25 11.22.25.excalidraw” не может быть найдена.

Дано:

$$m_1, m_2, l_2 = 2l, m_3, \varphi = \omega t, \omega = const$$

Найти:

$$x_1(t)$$

Решение:

$$M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{N}\vec{F}_k^{(e)}$$

$$\left.\begin{array}{c}Ma_{Cx} = 0 \\ \dot{x_C} = 0\end{array}\right. \implies x_C = const$$

$$x_C^1 = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + x_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$
$$x_C^2 = \frac{(x_1 + x_1')m_1 + (x_2 + x_2')m_2 + (x_3 + x_3')m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$
$$x_2' = x_1'$$
$$V_{Bx}^r = -l\omega \sin\varphi$$
$$S_{Bx}^r = l\cos\varphi$$

$$\nabla \circ (x) = (\nabla(f))(x)$$

11/03/2025

Общие теоремы динамики

$$M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(\mathrm{e})} \text{ - уравнение движения центра масс}$$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(\mathrm{e})} \text{ - теорема об изменении количества движения}$$

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{F}_k^{(\mathrm{e})}) \text{ - Теорема об изменении кинематического момента}$$

$$\vec{K}_0 \text{ - кинематический момент системы}$$

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{F}$$

$$\vec{K}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{Q} \text{ для (.)}$$

$$\vec{K}_0 = \vec{K}_C^{(\mathrm{r})} + \vec{M}_0(\vec{Q}) \text{ для общего случая}$$

$$K_{OZ} = J_{OZ}\omega_Z \text{ - для вращательного движения}$$

$$J_{OZ} \text{ - момент инерции относительно OZ}$$

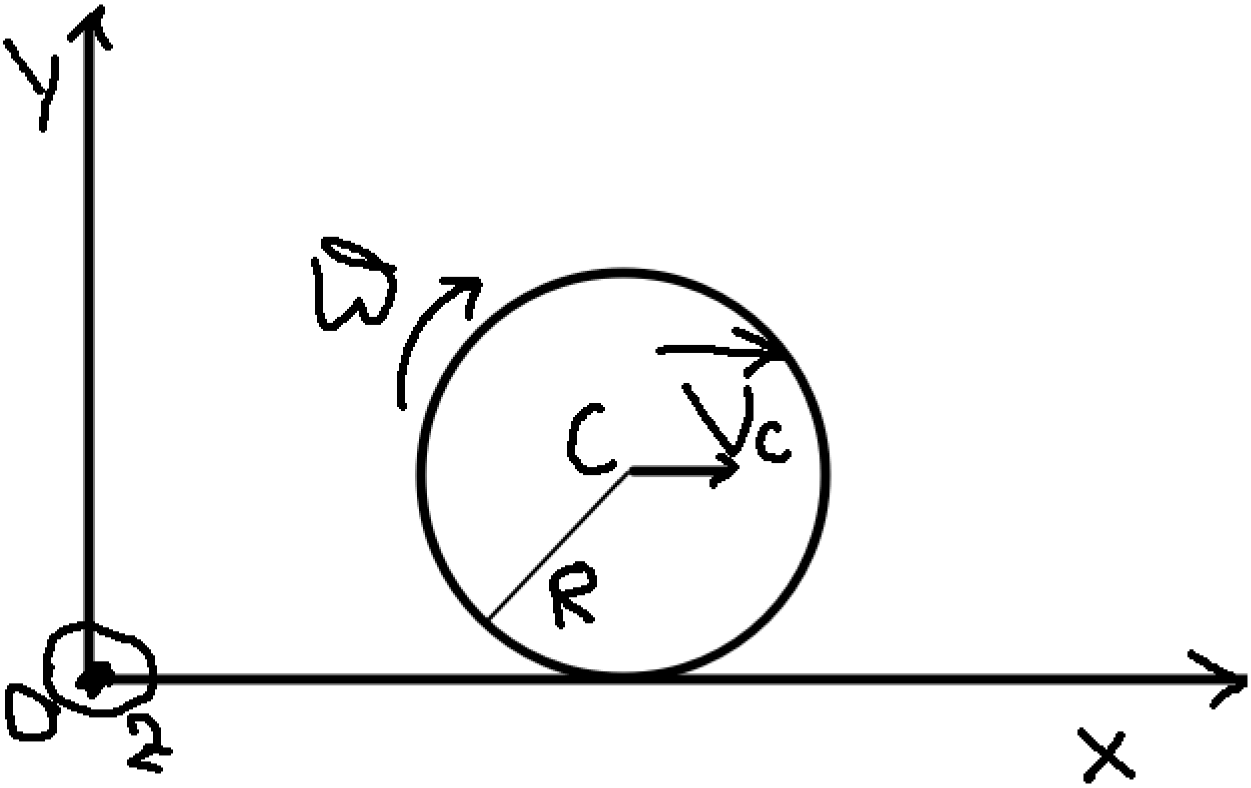
Теорема Гюйгенса-Штейнера

$$J_{AZ_1} = J_{OZ} + mR^2$$

Кольцо	$J_{OZ} = mR^2$
Стержень, центр	$J_{OZ} = \frac{ml^2}{12}$
Стержень, край	$J_{OZ_1} = \frac{ml^2}{3}$

Поступательное движение

Плоское движение: $\vec{K}_0 = \vec{K}_C^{(\mathrm{r})} + \vec{M}_0(\vec{Q})$



$$K_{OZ} = K_{CZ_1}^{(\mathrm{r})} + M_{OZ}(\vec{Q}) = -J_{CZ_1}\omega_{z_1} - RmV_C$$

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_k^{(\mathrm{e})})$$

Дано:

$$1 - \text{невесомый блок}$$

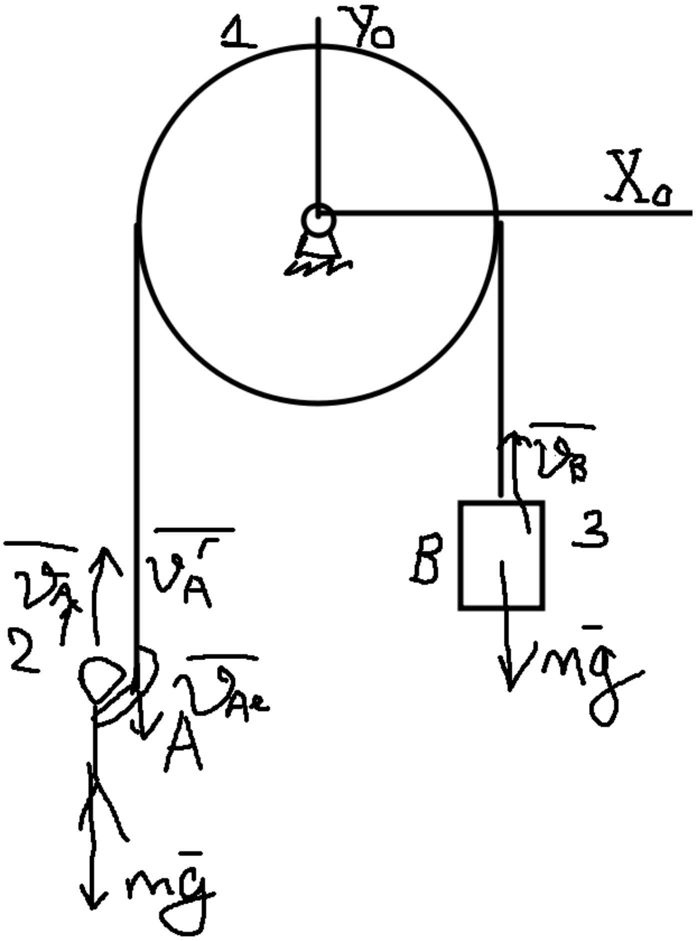
$$m_2 = m_3 = m$$

$$V_A^r = u$$

Найти:

$$V_B$$

Решение:



$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{F}_k^{(e)})$$

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{F}_k^{(e)}) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dK_{OZ}}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$K_{OZ} = \text{const, т.к. при t=0 покой} \Rightarrow K_{OZ} = 0$$

$$\text{Поступательное движение:}$$

$$K_{OZ} = -mV_A R + mV_B R \Rightarrow V_B = V_A$$

$$V_A = V_A^{(r)} - V_A^{(e)} = u - V_B \Rightarrow$$

$$V_B = \frac{u}{2}$$

Платформа => Теорема об изменении кинетического момента

Дано:

$$1 - \text{платформа (диск)}$$

$$M, R$$

$$r - (.)A, m; OA = r$$

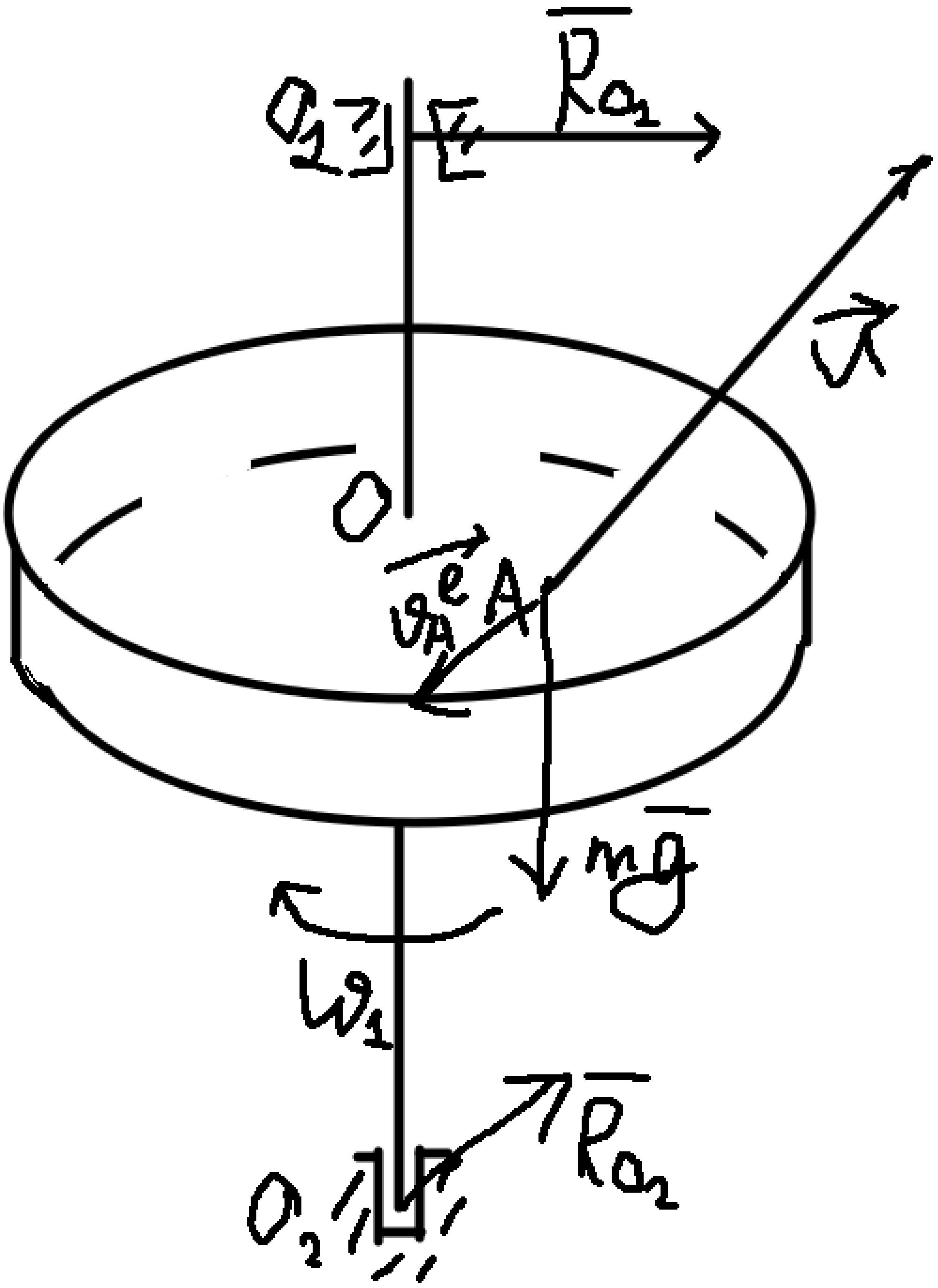
$$t = 0 \text{ - покой}$$

$$t = t_1, V_A^r = u$$

Найти:

$$\omega_1(t_1) = ?$$

Решение:



$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{F}_k^{(e)}); \frac{dK_{OZ}}{dt} = 0 \Rightarrow$$
$$K_{OZ} = \text{const}, K_{OZ} = 0, \text{т.к. } t = 0 \text{ покой}$$
$$K_{OZ} = -J_{OZ} * \omega_1 + mr(u - V_A^e) = -\frac{MR^2}{2}\omega_1 + mr(u - \omega_1 r) = 0 \Rightarrow$$
$$V_A^e = \omega_1 r$$
$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{mru}{mr^2 + \frac{MR^2}{2}}$$

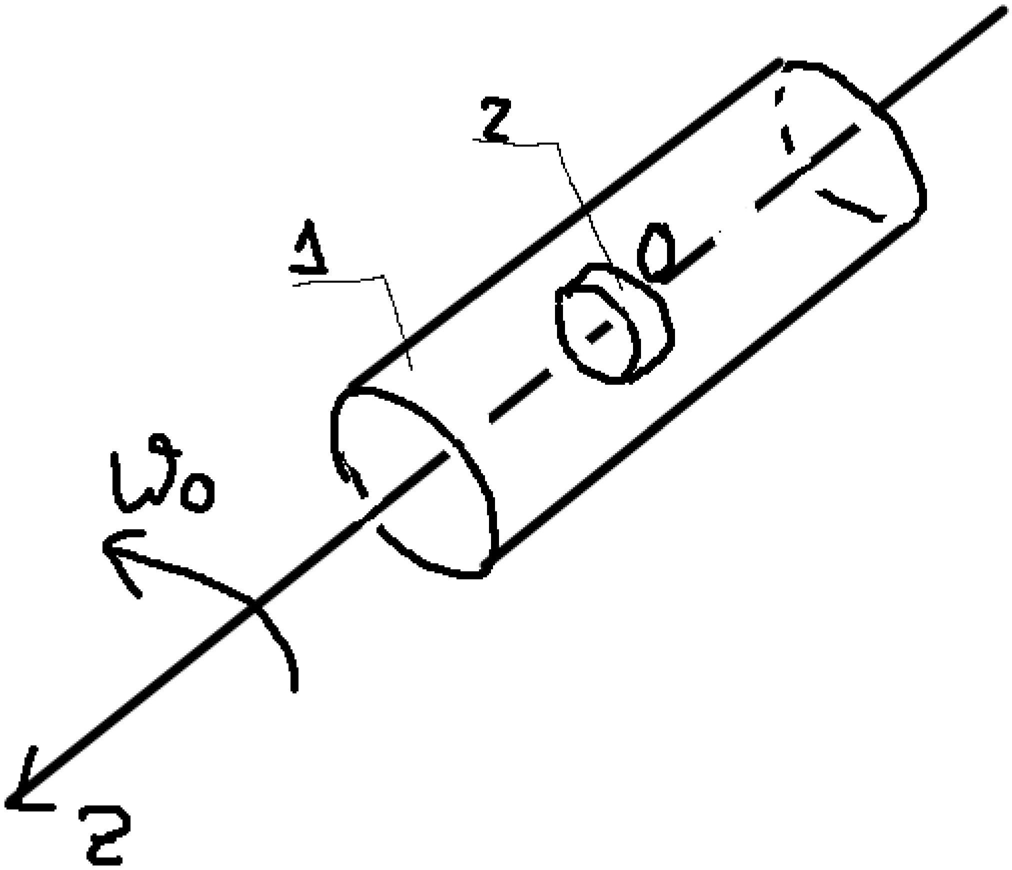
Дано:

$$t = 0; \omega_{\text{станции}} = \omega_0$$
$$J_{OZ}^{\text{станции}} = J_{OZ}$$
$$1 - \text{станция}$$
$$2 - \text{маховик}$$
$$t = 0, \omega_{r_1}^M = 0$$
$$t = t_1 + \omega_r^M > 0$$

Найти:

$$\omega^{\text{станции}}(t_1) = \frac{\omega_0}{2}, \omega_r^M(t_1) = ?$$

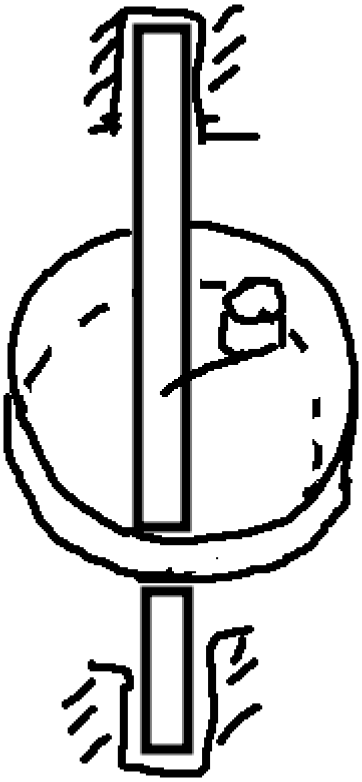
Решение:



$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{F}_k^{(e)}) = 0 \Rightarrow \vec{K}_0 = \text{const}$$

04/01/2025

Горизонтальная платформа, представляющая собой однородный диск, вращается с угловой ω_0. Маховик на платформе с вертикальной осью - однородный диск с радиусом R и массой M. В начальный момент вермени он не вращался, до какой угловой скорости надо раскрутить маховик, чтобы платформа остановилась?



$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{i=1}^{N} M_z(\vec{F}_i^{(\mathrm{e})}) \Rightarrow K_z = \mathrm{const}$$

$$K_z(0) = \frac{MR^2}{2}\omega_0 + \left(\frac{mr^2}{2} + md^2\right)\omega_0$$

$$K_z = \cancelto{0}{M_z(0)} + K_{z_1}$$

$$K_{z_1} = \frac{mr^2}{2}\omega_r$$

$$\frac{mr^2}{2}\omega_r = \frac{MR^2}{2}\omega_0 + \left(\frac{mr^2}{2} + md^2\right)\omega_0$$

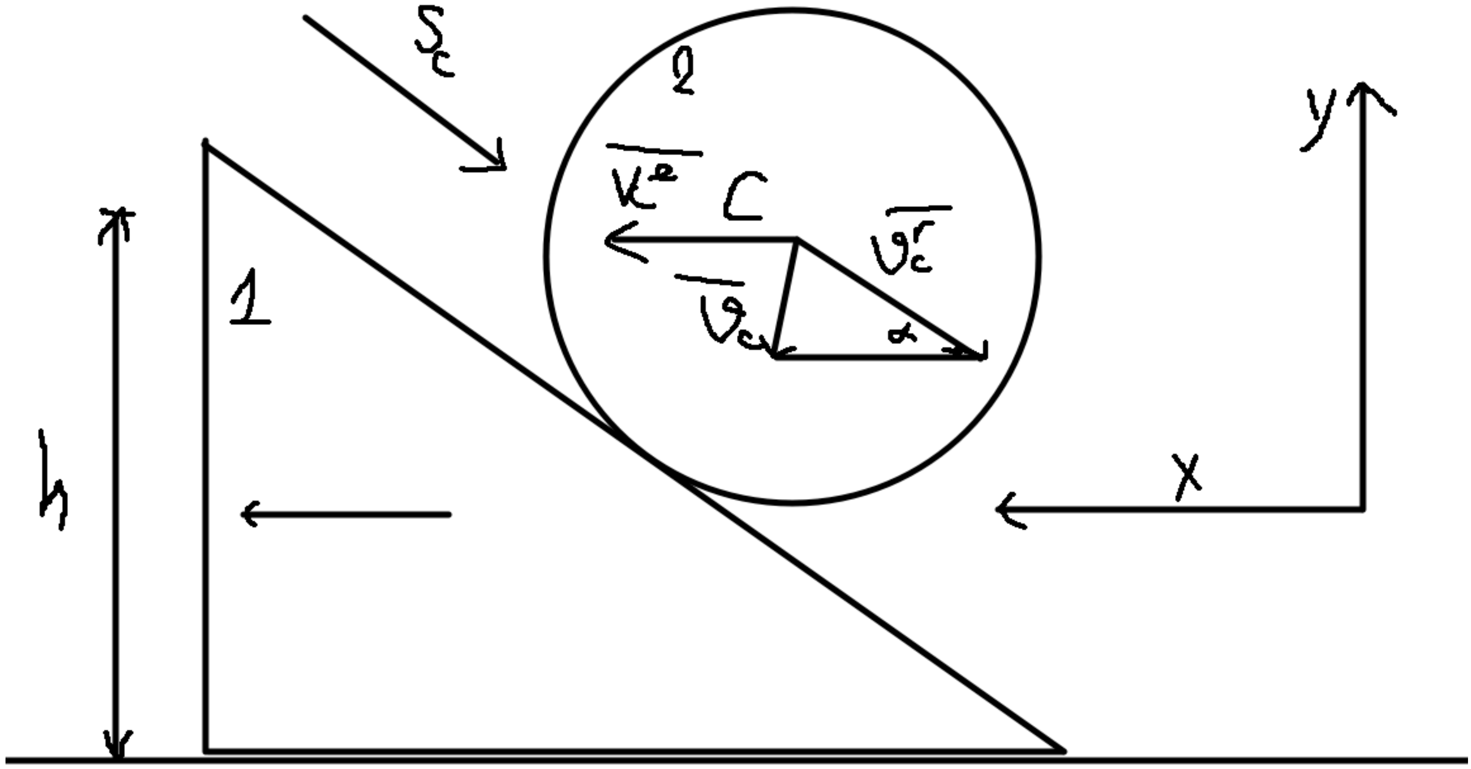
$$\vec{K}_O = \vec{K}_{OM} + \vec{K}_{Om} = I_{On}\cdot\vec{\omega}_0 + \vec{r}_O \times m\vec{v}_C + I_C\cdot\vec{\omega}_m$$

$$K_{Oz} = I_{Oz}^{\text{платформы}}\omega_z^{\text{платформы}} + dm\omega_z^{\text{платформы}}d + I_{CZ}\omega_Z^{\text{маховика}}$$

$$K_{OZ_1}(0) = \frac{MR^2}{2}\omega_0 + md^2\omega_0$$

$$K_{OZ_2} = \left(\frac{mr^2}{2} + md^2\right)\omega_r$$

$$\begin{cases} M\vec{a}_C = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{(\mathrm{e})} \\ \frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_k^{(\mathrm{e})} \\ \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{M}_O(\vec{F}_k^{(\mathrm{e})}) \\ T - T_0 = \sum_{k=1}^{N} A_k^{(\mathrm{i})} + \sum_{k=1}^{N} A_k^{(\mathrm{e})} \end{cases}$$



S_c
2
$\overline{V^e}$
C
$\overline{v_c^r}$
$\overline{v_c}$
α
1
h
y
x

$$\alpha = 30^\circ, h$$
$$t = 0 - \text{ покой}$$
$$V_C(t_1) = ?$$

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{N} A_k^{(\mathrm{i})} + \sum_{k=1}^{N} A_k^{(\mathrm{e})}; \qquad \sum_{k=1}^{N} A_k^{(\mathrm{i})} = 0 - (\mathrm{ATT})$$
$$T_0 = 0 - \text{покой}$$
$$T_1 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$
$$T_2 = \frac{1}{2} J_{CZ}\omega_{CZ}^2 + \frac{1}{2} m V_C^2$$
$$\vec{V}_C = \vec{V}_C^e + \vec{V}_C^r$$
$$V_C^2 = (V_C^r)^2 + (V_C^e)^2 - 2V_C^r V_C^e \cos\alpha$$
$$= \dot{S}_C^2 + \dot{x}^2 - 2\dot{S}_C\dot{x} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= \dot{S}_C^2 + \dot{x}^2 - \sqrt{3}\dot{S}_C\dot{x}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2} \cdot \frac{\dot{S}_C^2}{R^2} + \frac{1}{2} m(\dot{S}_C^2 + \dot{x}^2 - \sqrt{3}\dot{S}_C\dot{x})$$
$$T = \frac{1}{2} m \left[\frac{3}{2}\dot{S}_C^2 + 2\dot{x}^2 - \sqrt{3}\dot{S}_C\dot{x}\right]$$
$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(\mathrm{e})}$$
$$\begin{cases} \frac{dQ_x}{dt} = \sum_{i=1}^{N} F_{ix}^{(\mathrm{e})} \\ \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{i=1}^{N} F_{iy}^{(\mathrm{e})} \end{cases}$$
$$x: \ \frac{d}{dt}(-m\dot{x} + m(\dot{S}\cos\alpha - \dot{x})) = 0 \Rightarrow -2\dot{x} + \dot{S}\frac{\sqrt{3}}{2} = C_1$$
$$C_1 = 0$$
$$\dot{S} = \frac{2\dot{x}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}\dot{x}$$
$$T = \frac{1}{2} m \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{16}{3}\dot{x}^2 + 2\dot{x}^2 - 4\dot{x}^2\right] = 3m\dot{x}^2$$
$$A_{mg} = mgh$$
$$3m\dot{x}^2 = mgh$$
$$\dot{x} = \sqrt{\frac{gh}{3}} \Rightarrow V_C = \sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{gh}$$
$$3m\dot{x}^2 = mgS_1\sin\alpha$$

08/04/2025

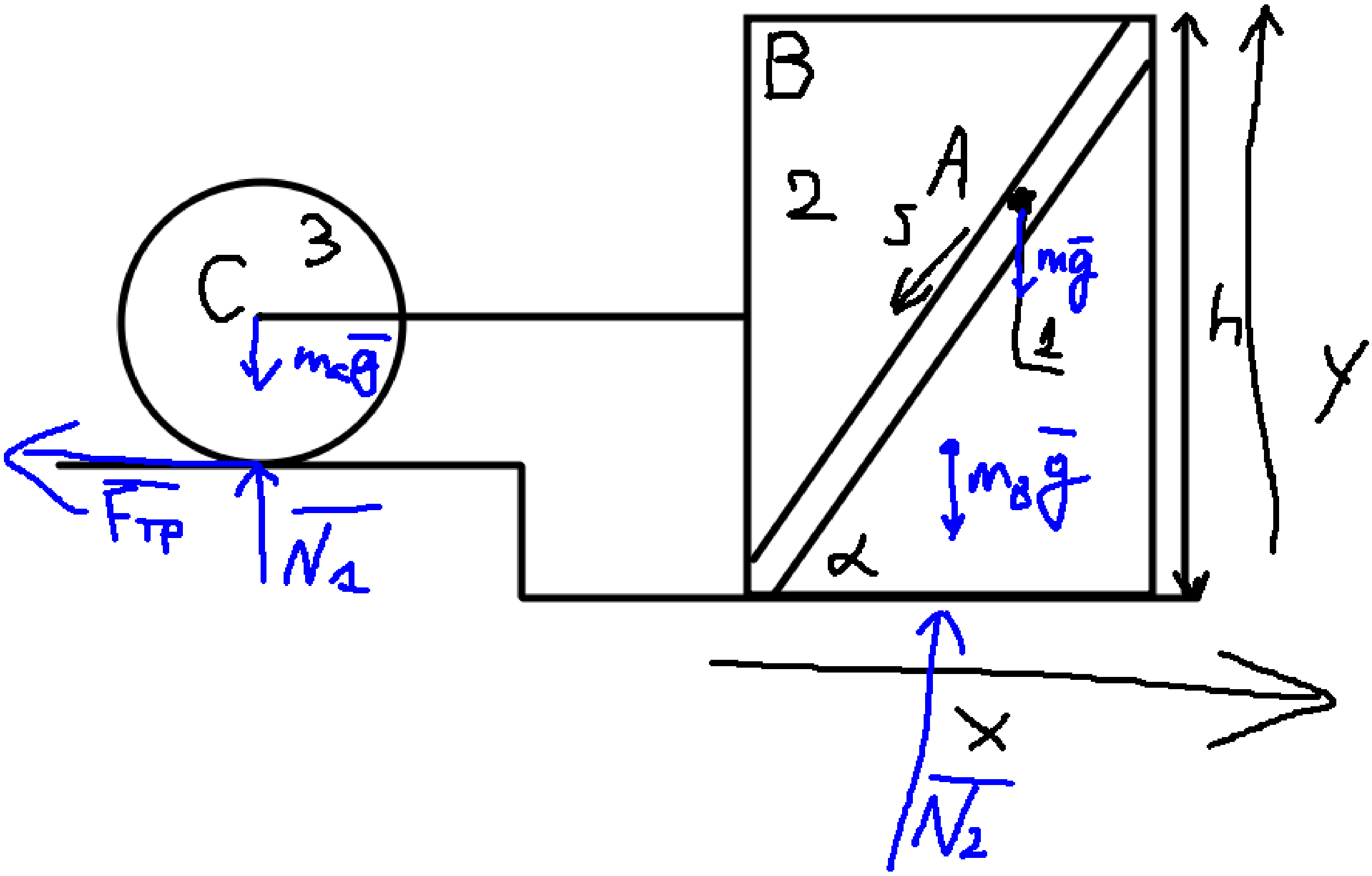
Дано:

$$m, \alpha = 60^\circ, m_B = 4m, m_3 = m_C = 2m, t = 0 - \text{покой}, y(0) = h, t_1 : y = 0$$

Найти:

$$v_B(t_1)$$

Решение:



$$T - \cancel{T_0}^{0} = \sum A_k^{e} + \cancel{\sum A_k^{i}}^{0}$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m_A v_A^2$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_e + \vec{v}_r$$

$$v_A^2 = v_e^2 + v_r^2 - 2 v_e v_r \cos\alpha$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{S}^2 - \dot{x}\dot{S})$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_B v_B^2 = 2m\dot{x}^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{CZ}\omega_Z^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2mR^2}{2} \left(\frac{\dot{x}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot \dot{x}^2 =$$

$$= \frac{3}{2} m\dot{x}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{s}^2 - \dot{x}\dot{s}) + 2m\dot{x}^2 + \frac{3}{2} m\dot{x}^2 = 4m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{s}^2 - \frac{1}{2} m\dot{x}\dot{s}$$

Теорема об изменении количества движения

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} F_k^{(e)}$$

$$\begin{cases} \frac{dQ_{x'}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} F_{kx'} \\ \frac{dQ_{y'}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} F_{ky'} \end{cases}$$

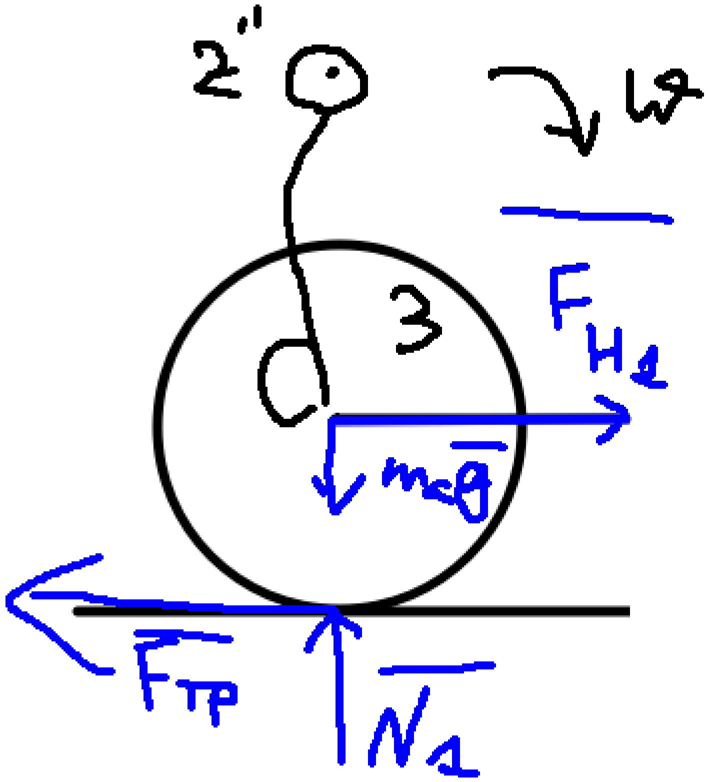
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m\dot{x} - m\dot{s}\cos\alpha + m_B\dot{x} + m_C\dot{x}) = -F_{\text{трения}}\ (1) \\ \frac{d}{dt}(-m\dot{s}\sin\alpha) = N_1 + N_2 - m_B g - mg - m_C g\ (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(m\dot{x} - \frac{1}{2} m\dot{s} + 4m\dot{x} + 2m\dot{x}\right) = -F_{\text{тр}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(7m\dot{x} - \frac{1}{2} m\dot{s}\right) = -F_{\text{тр}}$$

Чтобы найти $F_{\text{тр}}$ разобъём схему

Взять кинетический момент относительно любой точки



$$\frac{d\vec{K}_C^{(r)}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_C^r(\vec{F}_k^{(e)})$$

$$-\frac{d}{dt}[-J_{cz''}\omega_{z''}] = -F_{\text{тр}}R$$

$$-\frac{d}{dt}\left[\frac{2mR^2}{2} \cdot \frac{\dot{x}}{R}\right] = -F_{\text{тр}}R$$

$$F_{\text{тр}} = \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(7m\dot{x} - \frac{1}{2}m\dot{s}\right) = \frac{d}{dt}(-m\dot{x})$$

$$7m\dot{x} - \frac{1}{2}m\dot{s} = -m\dot{x} + \cancel{C}^0$$

$$8m\dot{x} = \frac{1}{2}m\dot{s}$$

$$\dot{s} = 16\dot{x}$$

$$T = 4m\dot{x}^2(t_1) + \frac{1}{2}m \cdot 256\dot{x}^2(t_1) - \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t_1) \cdot 16 = 124m\dot{x}^2(t_1)$$

$$A = \int \vec{F}d\vec{r}$$

$$A_{\text{тр}} = \int \vec{F}_{\text{тр}}d\vec{r}_{\text{нижняя}} = \int \vec{F}_{\text{тр}} \cdot \vec{v}_{\text{нижняя}}dt = 0$$

$$A_{m\vec{g}} = \int_0^{S_1} m\vec{g} \cdot d\vec{S}_A = mg\int_0^{S_1} \sin\alpha dS_A = mgS_1\sin\alpha = mgh$$

$$124m\dot{x}^2(t_1) = mgh$$

$$v_B = \dot{x}(t_1) = \sqrt{\frac{gh}{124}}$$

Принцип возможных перемещений

$$\delta\vec{r}_k$$

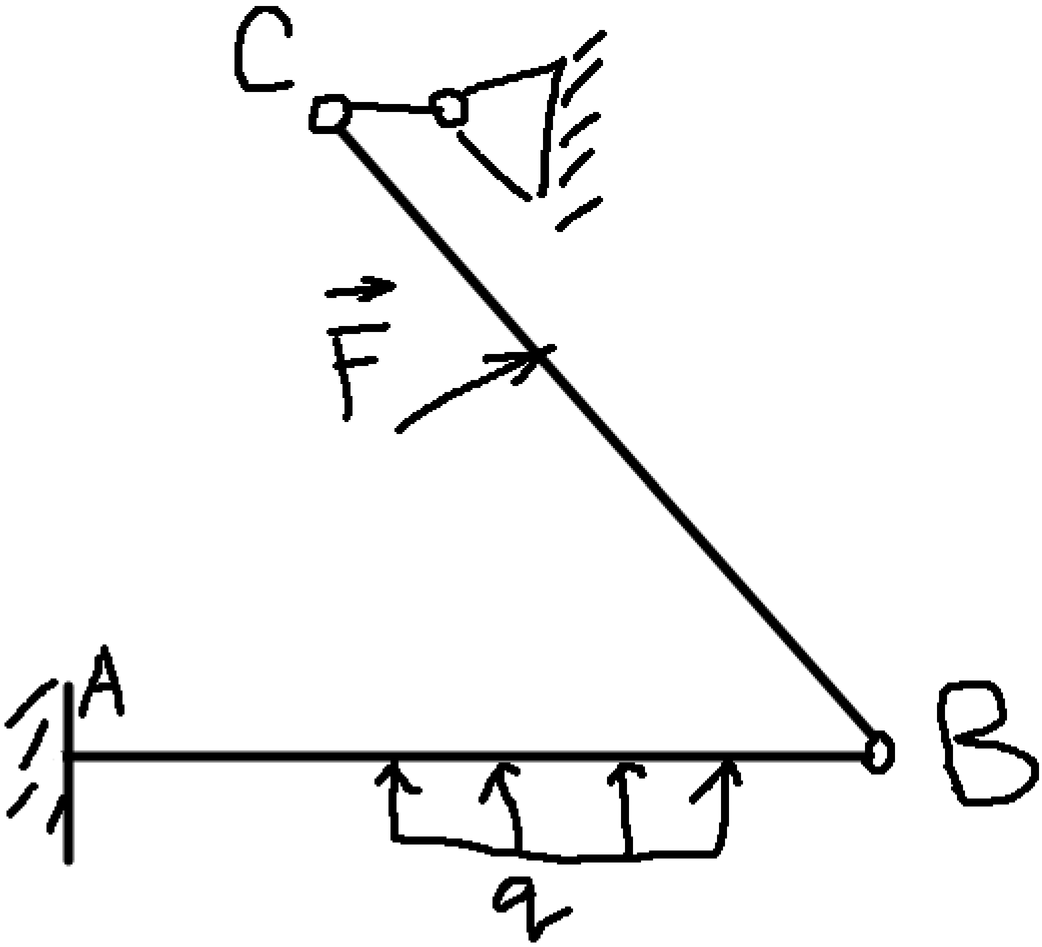
Возможное перемещение - бесконечно малое мыслимое перемещение с учётом наложенных связей в фиксированный момент времени (текущий момент не зависит от времени)

$$\sum_{k=1}^{N} \delta A_k(\vec{F}_k, \vec{R}_k) = 0$$

Если система находится в равновесии (необходимое условие)
Связи идеальные (внутренние силы не совершают работу)

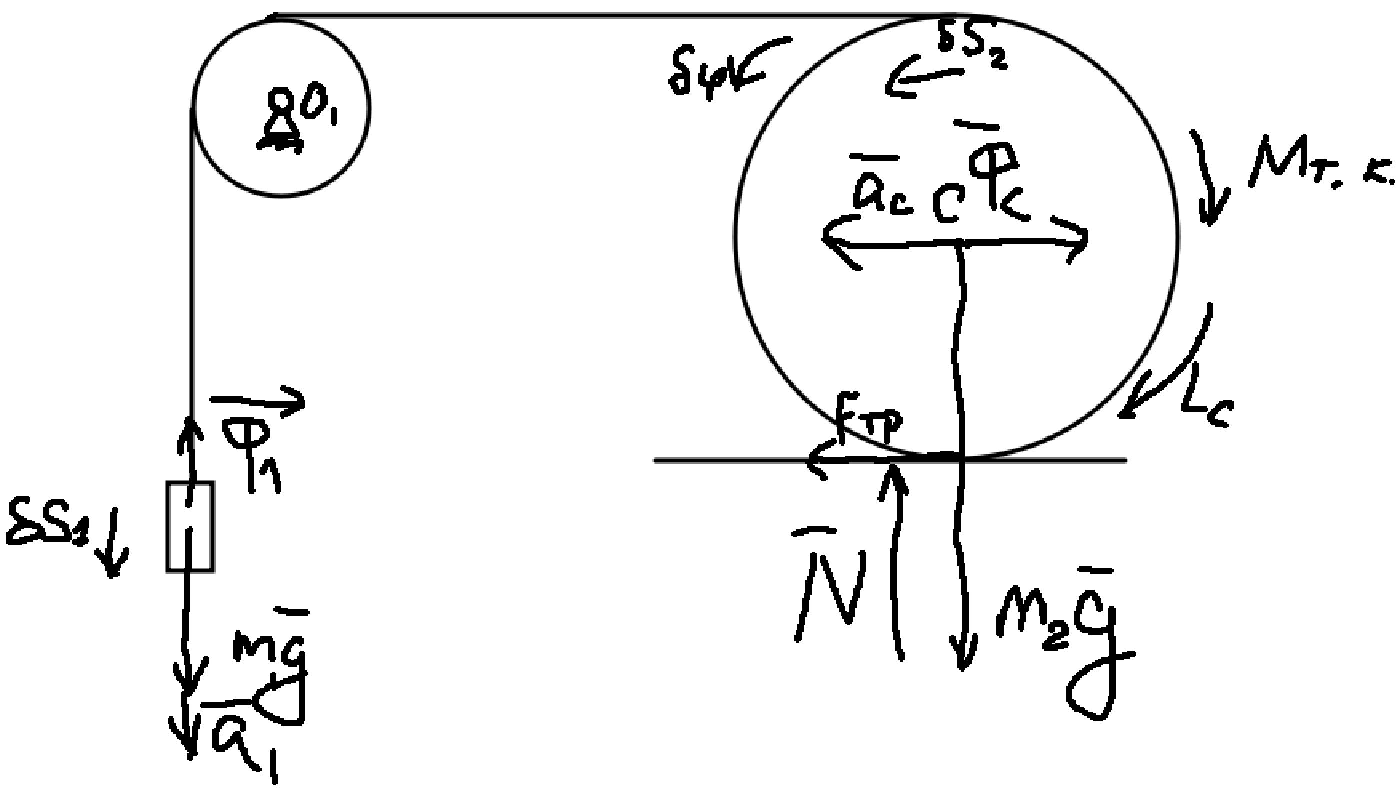
$$\delta\vec{r}_k = \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i$$

q_i - обощённая координата



18/04/2025 17:00 консультация по 2 дз 815 аудитория

29/04/2025



$$\sum_{k=1}^{N}\delta A_k = 0$$

$$m_1\vec{g}\delta\vec{S}_1 + \vec{\Phi}_1\delta\vec{S}_2 + \vec{\Phi}_C\delta\vec{S}_C - M_{\text{т.к.}}\delta\varphi - L_c\delta\varphi = 0$$

$$A = \int \vec{F}_{\text{тр}}(\vec{v}_C + \vec{v}_{KC})dt = \int \vec{F}_{\text{тр}}d\vec{S}_C + \int \vec{F}_{\text{тр}}\left(\vec{\omega}\times\overrightarrow{CK}\right)dt$$

$$\delta S_1 = 2\delta S_C$$
$$\Phi_1 = m_1 a_1$$
$$\Phi_C = m_C a_C$$
$$M_{\text{т.к.}} = \delta N = \delta m_C g$$
$$\delta S_C = \delta\varphi r \Rightarrow \delta\varphi = \frac{\delta S_1}{2r}$$
$$L_C = \frac{d}{dt}K_{CZ} = J_{CZ}\varepsilon_Z = J_{CZ}\frac{a_C}{r}$$
$$m_1 g\delta S_1 - m_1 a_1\delta S_1 - m_2\frac{a_1}{2}\frac{\delta S_1}{2} - \delta m_C g\frac{\delta S_1}{2r} - \frac{m_2 r^2}{2}\frac{a_1}{2r}\frac{\delta S_1}{2r} = 0$$
$$a_1\left(-m_1 - \frac{m_2}{4} - \frac{m_2}{8}\right) = -m_1 g + \frac{m_C g}{2r}$$
$$a_1 = \frac{m_1 g - \frac{m_C g}{2r}}{m_1 + \frac{3m_2}{8}}$$

Расчётная схема

Уравнение Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}T\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

T - кинетическая энергия, q - обощённая координата, Q_i - обобщённая сила

Обощённая координата - независимая координата.
Возможное пересечение $\delta\vec{r}_k = \frac{\partial\vec{r}_k}{\partial q_i}\delta q_i$

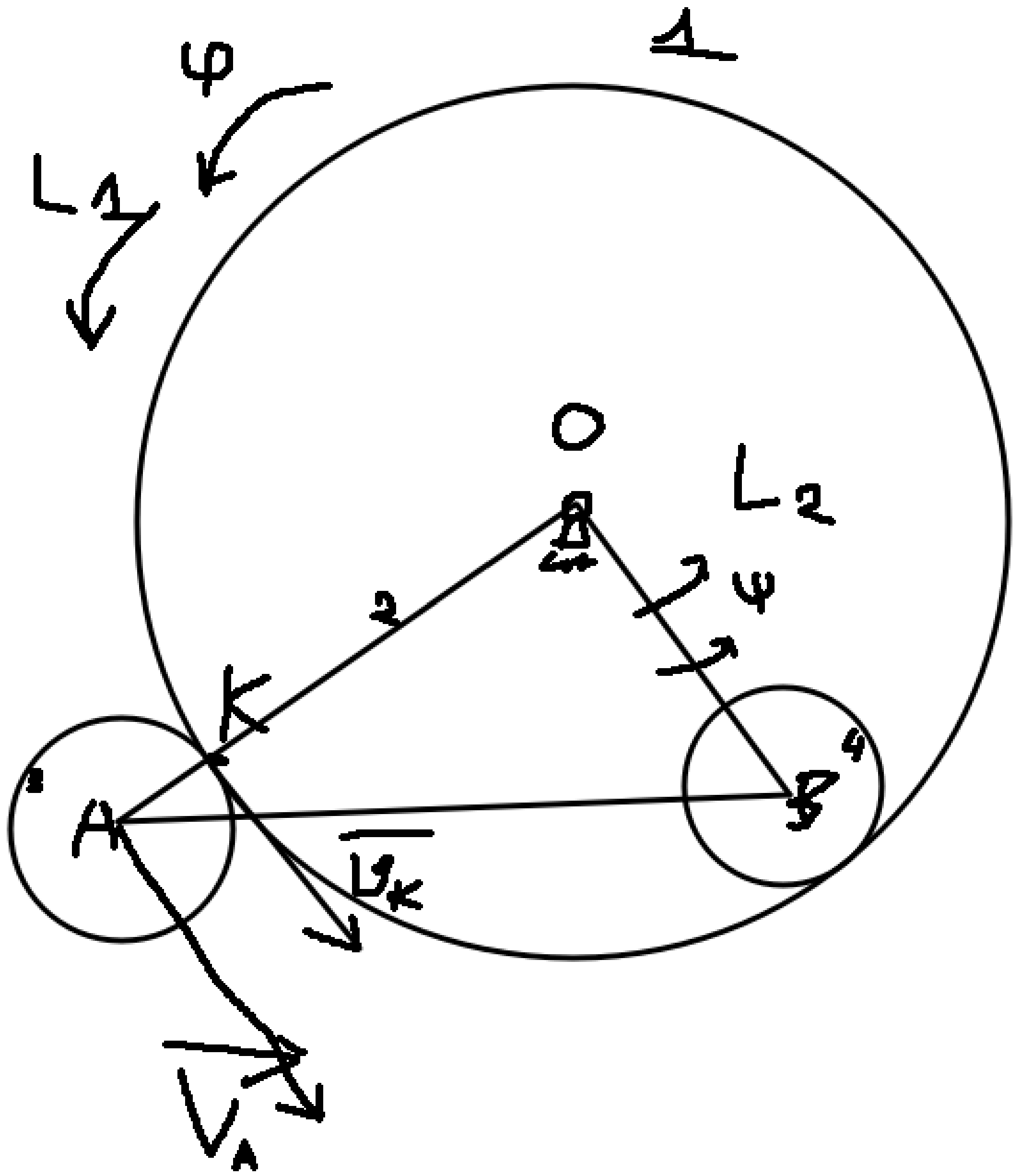
$$\delta A_k = \vec{F}_k \delta \vec{r}_k = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

$$\vec{Q}_i = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \delta A_k}{\delta q_i}$$

Дано:

$m_1 = 2m_2, R = 2r, L_1, L_2$

Решение:



$$i = 2, q_1 = \varphi, q_2 = \psi$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = Q_\psi$$
$$T = T_1 + T_3 + T_4$$
$$T_1 = \frac{1}{2} J_O \omega_1^2 = \frac{1}{2} m_1 R^2 \cdot \dot{\varphi}^2 = 4mr^2\dot{\varphi}^2$$
$$T_3 = \frac{1}{2} J_A \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2$$
$$J_A = \frac{mr^2}{2}$$
$$v_A = \dot{\psi} OA = \dot{\psi}(R+r) = 3r\dot{\psi}$$
$$v_K = \dot{\varphi} R = 2r\dot{\varphi}$$
$$\vec{v}_k = \vec{v}_A + \vec{v}_{KA}$$
$$\omega_3 = \frac{v_{KA}}{KA}$$
$$\vec{v}_{KA} = \vec{v}_K - \vec{v}_A$$
$$v_{KA} = [\text{Achtung! нечестный подсчёт!}] = 3\dot{\psi} r - 2\dot{\varphi} r$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}(3\dot{\psi} - 2\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m (3\dot{\psi} r)^2 = \frac{9}{4} mr^2\dot{\psi}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2 - 3mr^2\dot{\psi}\dot{\varphi} + \frac{9}{2} mr^2 \dot{\psi}^2 = \dots$$
$$T_4 = \frac{1}{2} J_B \omega_4^2 + \frac{1}{2} m v_B^2$$
$$\omega_4 = \frac{v_{MB}}{MB}$$
$$v_B = \dot{\psi} r$$
$$T_4 = \dots$$
$$T = f(\varphi, \dot{\varphi}, \psi, \dot{\psi})$$
$$Q_\varphi : \psi = 0$$
$$Q_\varphi = \frac{L\delta\varphi}{\delta\varphi} = L_1$$
$$Q_\psi : \delta\varphi = 0$$
$$Q_\psi = \frac{\sum \delta A_k}{\delta\psi} = L_2$$

При определении работы силы берём из общей рассчётной схемы!!!

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 12mr^2\dot{\varphi} - 4\dot{\psi} mr^2$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 12mr^2\ddot{\varphi} - 4mr^2\ddot{\psi} = L_1$$
$$12mr^2\ddot{\psi} - 4mr^2\ddot{\varphi} = L_2$$

Уравнение Лагранжа. Сила трения совершает работу, считаем через общую рассчетную схему
Вспомним теорему об изменении количества движения. 4 теоремы

20/05/2025

Колебания
Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = \underbrace{-\frac{\partial U}{\partial q}}_{Q^{\text{п}}} \underbrace{-\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}}}_{Q^{\text{д}}} + Q^{\text{в}}$$

Ф - диссипативная функция Рэлея
$\Phi = \frac{1}{2} b\dot{q}^2;\ \Phi = \frac{1}{2}\mu v_A^2$
$U = \frac{1}{2} cq^2$, c - обобщённый квазиупругий коэффициент
$T = \frac{1}{2} a\dot{q}^2$

$$a\ddot{q} + b\dot{q} + cq = Q^{в}$$

Для свободных колебаний

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + \omega^2 q = 0; \omega = \sqrt{\frac{c}{a}} - \text{собственная частота колебаний механической системы}$$

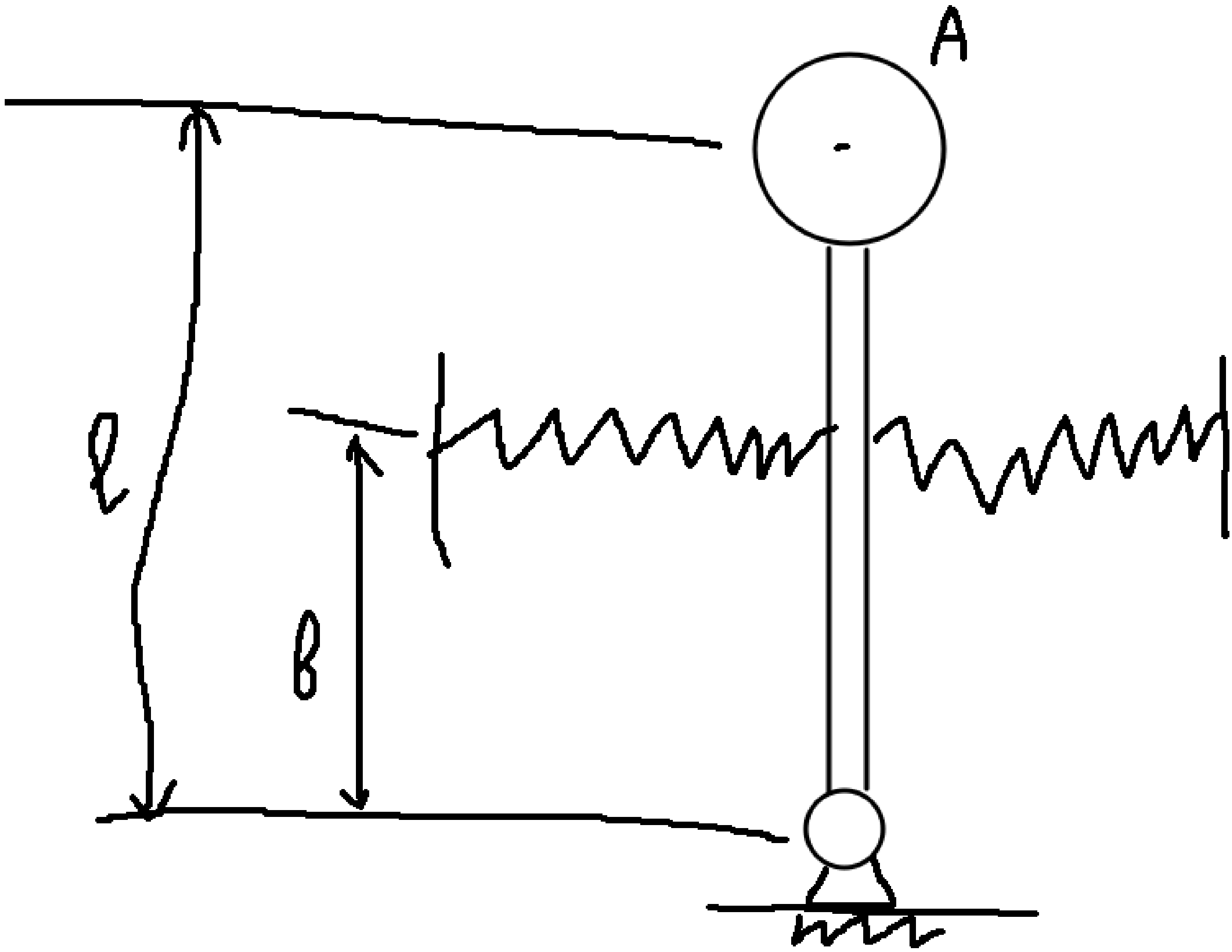
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Критерии устойчивости:

при $q = 0$

1. $\frac{dU}{dq} = 0$
2. $\frac{d^2U}{dq^2} > 0$

$U_{упр} = \frac{1}{2} C_{упр} \varphi^2$



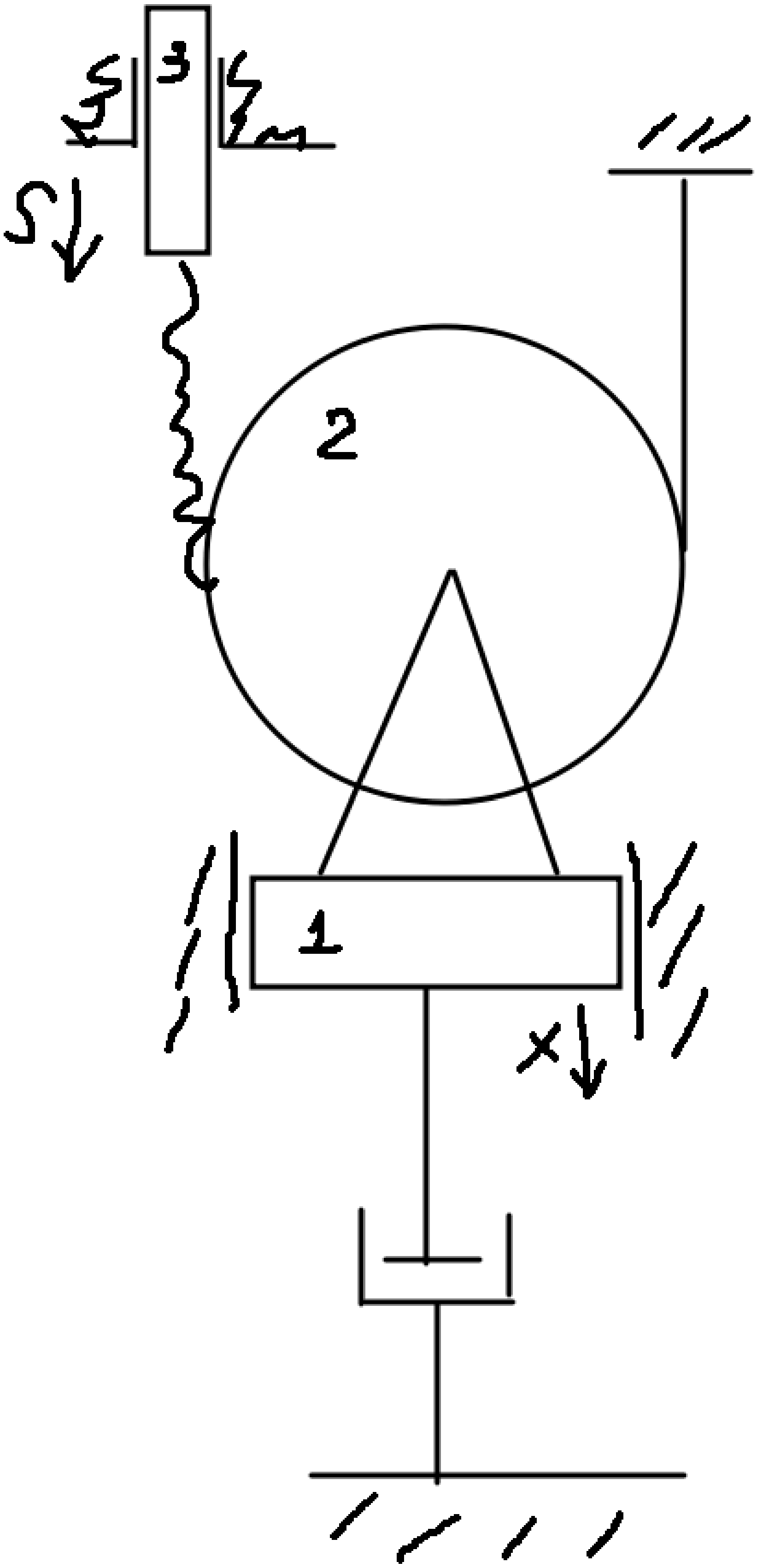
$$A, m, l, b, C_{упр}$$

$$U = U(m\vec{g}) + U(\text{упр})$$
$$U(m\vec{g}) = mgl(\cos\varphi - 1) \approx -mgl\frac{\varphi^2}{2}$$
$$U(\text{упр}) = 2\frac{1}{2}C_{\text{упр}}(b\varphi)^2$$
$$U = \left(C_{\text{упр}}b^2 - \frac{mgl}{2}\right)\varphi^2$$
$$C_{\text{упр}} > \frac{mgl}{2b^2}$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \omega = \sqrt{\frac{c}{a}}$$
$$U = \frac{1}{2}cq^2$$
$$c = 2C_{\text{упр}}b^2 - mgl$$
$$T = \frac{1}{2}a\dot{q}^2$$
$$T = \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$$
$$a = ml^2$$
$$\omega = \sqrt{\frac{2C_{\text{упр}}b^2 - mgl}{ml^2}}$$

$m_1 = 6\text{кг}, C_{\text{упр}} = 4800\frac{\text{Н}}{\text{м}}, \mu = 480\frac{\text{Нс}}{\text{м}}, S = S_0 \sin pt, S_0 = 0.004\text{м}$

$\omega, D(\text{резонанс } (\omega = p))$

$$i = 2, q_1 = S, q_2 = x$$
$$U = U(m\vec{g}) + U(\text{упр})$$
$$U(m\vec{g}) = -gx(m_1 + m_2)$$
$$U(\text{упр}) = \frac{1}{2}C_{\text{упр}}(2x - S + \lambda_{\text{ст}})^2 - \frac{1}{2}C_{\text{упр}}\lambda_{\text{ст}}^2$$
$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{(m_1 + m_2)g}{2C_{\text{упр}}}$$


3
S
2
1
x