Теорвер и Матстат Севастьянова Бориса Николаевича (мат стат нет),
13/02/2025
Задача де Мере
Сколько раз нужно подбросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью хотя бы $\frac{1}{2}$ выпало 6+6?

Колмогоровский подход

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$
Ω - множество элементарных исходов,
$\mathcal{A}$ - система подмножеств Ω, является σ-алгеброй.
Элементы $\mathcal{A}$ - события.
$\omega \in \Omega$ - элементарный исход.
Если $\omega \in A$ - ω благоприятствует A
$\varnothing$ - невозможное событие.
Ω - достоверное событие
$A \subset B$ - событие A влечёт событие B
$A \backslash B$ - разность событий
$A + B = A \cup B$ - сумма собыьтий
$A \cdot B = A \cap B$

P - мера на $\mathcal{A}$, из аксиоматики колмогорова:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$ - A и B называются независимыми.
   Примеры:
   Классическая вероятностная модель:

$$\Omega \in X \ - \ \text{Конечное множество}$$
$$\mathcal{A} = 2^X \ - \ \text{система всех подмножеств}$$
$$P(A \in \Omega) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{Общее число исходов}}$$

   Пример, поясняющий пример:

$$\Omega = \{(i, j), \substack{i = \overline{1,6} \\ j = \overline{1,6}}\}$$

   Задача де Мере
   n - подбрасываемая

$$\Omega = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_{36}, j_{36})\}$$
$$|\Omega| = 36^n$$
$$A = \{\text{Хотя бы 1 раз выпало 6+6}\}$$
$$\overline{A} = \Omega \backslash A \ - \ \text{Противоположное событие}$$
$$\Omega = \overline{A} + A$$
$$\overline{A} = \{\text{Ни разу не выпало 6+6}\}$$
$$|\overline{A}| = 35^n$$
$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$$
$$P(\overline{A}) = \left(\frac{35}{36}\right)^n$$
$$\left(\frac{35}{36}\right)^n < \frac{1}{2}$$
$$n \ln\left(\frac{35}{36}\right) < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$n > \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{35}{36}\right)} \approx 24, \ldots$$

Вычисление вероятностей в класс схеме - комбинаторная задача

Правила комбинаторики:

1. Правило суммы.

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow \#A \cup B = \#A + \#B$$

2. Правило произведения.

$$\#A \times B = \#A \cdot \#B$$

3. Перестановки в множестве с мощностью n:

$$P_n = n!$$

   Это число биекций множества в себя. Для каждого отображения "порядок" важен - именно за счёт него отображения и отличаются.

4. Размещения на m мест в множестве с мощностью n:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

   Число инъекций множества размером m в исходное множество. Для каждого отображения важен порядок - отображения различаются или из-за порядка, или из-за элементов без прообраза.

5. Сочетания из n элементов по m мест

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k+1}$$

$$\begin{matrix} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{matrix}$$

Число инъекций множества размером m в исходное множество, не учитывающее порядок элементов. Каждое отображение однозначно определяется делением элементов исходного множества на те, для которых есть, и для которых нет прообраза.

6. Имеются элементы n типов
   На множестве мощностью m введено разбиение.

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$$
$$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n}$$

7. Размещения с повторениями

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

   Число отображений m в n. Порядок важен. Т.к. повторения, то отображения не обязаны быть инъективными.

8. Сочетания с повторениями

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

   Число отображений m в n, неучитывающее порядок. Отображение однозначно задаётся делением исходного множества на элементы без прообраза и элементы с ним.
   Пример:

$$\text{Имеется n неразличимых шаров, m различимых ящиков, так чтобы все ящики были заняты}$$
$$n \leq m$$
$$\cdots|\cdot\cdot|\cdot|\cdot\cdot\cdot\cdot|\cdot$$
$$\text{n-1 граница разделит точки на n частей}$$

   Модель геометрической вероятности

$$\Omega \ - \ \text{Измеримая геометрическая фигура} \to \exists\, \mathrm{mes}(\Omega)$$
$$\mathcal{A} \ - \ \text{измеримые подмножества}$$
$$P(A \in \mathcal{A}) = \frac{\mathrm{mes}(A)}{\mathrm{mes}(\Omega)}$$

   Основные теоремы вероятности

9. $A \subset B \Rightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$ (См 3 аксиому и определение разности)
10. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ - P - это мера
11. $\forall A \;\; 0 \leq P(A) \leq 1$ т.к. $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(\Omega) = 1$
12. Теорема сложения: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ - это мера
13. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ (см 1 св-во)
14. Теорема непрерывности: $B_{n+1} \subset B_n \subset \dots \subset B_2 \subset B_1 \wedge \cap_i B_i = \varnothing \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$ - это мера

20/02/2025

Примеры вероятностных моделей.

Класс модель

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω - конечное множество

$\mathcal{A}$ - все подмножества

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Гипергеометрическая модель

n_1 - предметов 1 типа

n_2 - предметов 2 типа

Выберем m предметов без возвращения $m \leq n_1, m \leq n_2$

A_k - среди вынутых предметов k $-$ 1-го типа, $(m-k)$ $-$ 2-го типа.

$|A_k| = C_{n_1}^k \cdot C_{n_2}^{m-k}$

$C_{n_1}^k$ - выбрано предметов 1 типа

$$P(A_k) = \frac{C_{n_1}^k C_{n_2}^{m-k}}{C_{n_1+n_2}^m}$$

Обобщение

Имеются предметы l типов в количествах $n_1, n_2, \ldots, n_l$ выберем m предметов.

$$P(A_{k_1,k_2,\ldots,k_l}) = \frac{C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} \ldots C_{n_l}^{k_l}}{C_{n_1+n_2+\cdots+nl}^m}$$

Модель геометрических вероятностей.

Геометрическая вероятность.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω - измеримое множество

$\mathcal{A}$ - измеримые подмножества

$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

Пример:

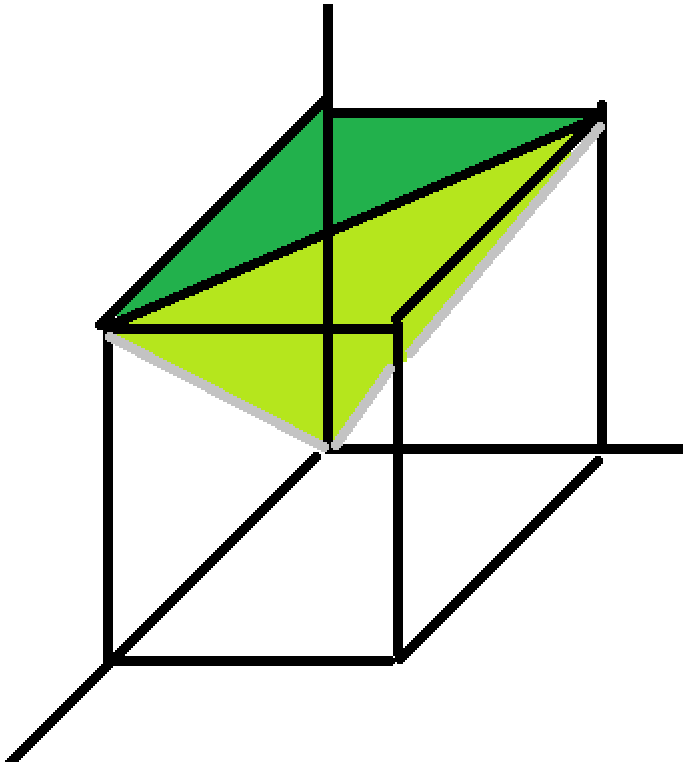
Датчик случаёных чисел.

Запускаем его 3 раза. Получаем 3 числа: $x,\ y,\ z\ \in [0,1]$

$P(z > x + y) = ?$

$\omega = (x, y, z) -$ точка

$\Omega = [0,1]^3$



$$P(z > x + y) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}$$

Парадокс Бертрана

В круге наугад выбирается хорда x. $P(x > R\sqrt{3}) = ?$

Парадокс в том, что в зависимости от способа выбора случайной хорды, ответ меняется.

Первый способ:

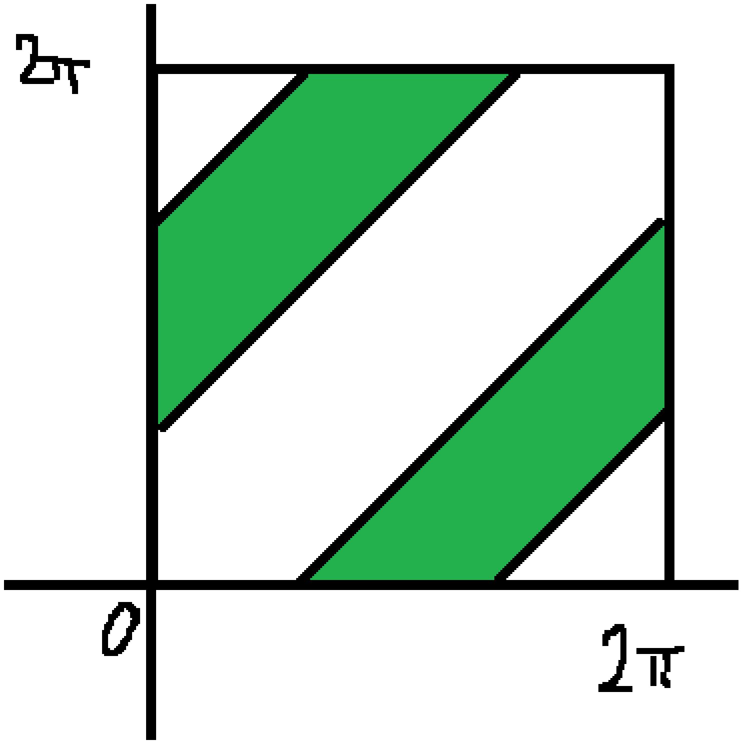
A - произвольная точка.

B - произвольная точка

$x = [A, B]$

$\Omega = [0, 2\pi]^2$

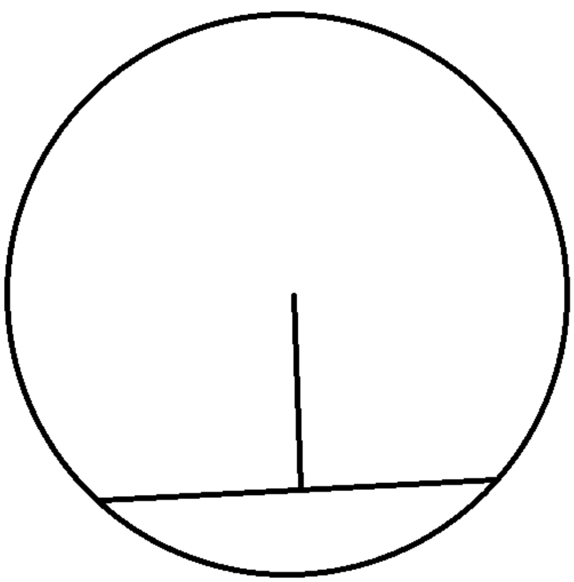
$$\frac{2\pi}{3} < |x - y| < \frac{4\pi}{3}$$

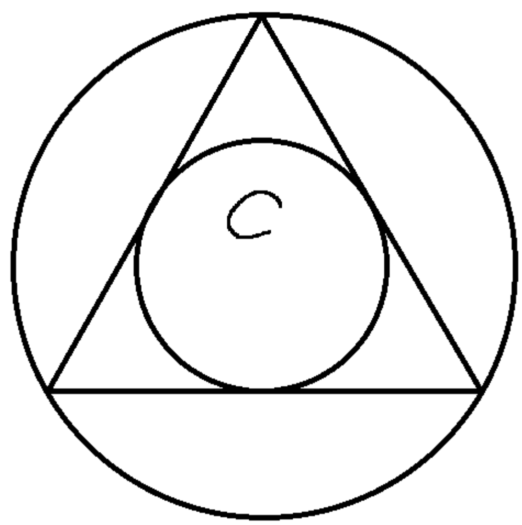


$$P(x > R\sqrt{3}) = \frac{S(C)}{S(\Omega)} = \frac{S(C)}{(2\pi)^2}$$

Второй способ:

Хорда отождествляется с её серединой





$$P(C) = \frac{S(C)}{S(\Omega)} = \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{(2\pi)^2} = \frac{1}{4}$$

Третий способ:

Хорда на диаметре.

Абсолютно непрерывная вероятностная модель

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$\Omega = \mathbb{R}$

$\mathcal{A} = B$ - борелевская σ-алгебра

1. $P(A) = \int_A p(x)dx$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$
3. цел: $p(x) \geq 0$

Пример: гауссовская плотность

$$P_{a.\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{a,\sigma}(x)dx = \begin{vmatrix} \frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = y \\ dx = dy\sigma\sqrt{2} \end{vmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{8\pi}\sigma} e^{-y^2} \sigma\sqrt{2}dy = 1$$

$$\int_{b_1}^{b_2} p_{a,\sigma}(x)dx = \begin{vmatrix} \frac{x-a}{\sigma} = y \\ dx = \sigma dy \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{b_1-a}{\sigma}}^{\frac{b_2-a}{\sigma}} e^{-y^2} dy = \varphi\left(\frac{b_2-a}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{b_1-a}{\sigma}\right)$$

Условные вероятности.

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Пояснение: n опытов, фиксируем события A.

n_A - наступило A

n_B - наступило B

n_{AB} - наступило A и B

$$\frac{n_A}{n} \approx P(A)$$
$$\frac{n_{AB}}{n_B} \approx P(A|B)$$
$$\frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}} \approx \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Формула умножения

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Пример

В урне имеется a белых и b чёрных шаров. Вынимаем 2 шара. Вычисляем вероятность того, что оба вынутых шара белые.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{C_a^2}{C_{a+b}^2} = \frac{a! \cdot 2! \cdot (a+b-2)!}{(a-2)! \cdot 2!(a+b)!} = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$

Событие равносильно следующей совокупности событий:

Достали белый шар, а потом достали второй белый шар

$$P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1}$$

Условное вероятностное пространство

$B, P(B) > 0$

$(\Omega, \mathcal{A}, P) \to (B, \mathcal{A}_B, P_B)$

$\mathcal{A}_B = \mathcal{A} \cap B$ - сужение алгебры $\mathcal{A}$ на B.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} \geq 0$$

$$P_B(B) = 1$$

$$A_1 \cap A_B = \varnothing$$
$$P_B(A_1 + A_2) = \frac{P((A_1+A_2)B)}{P(B)} = \frac{P(A_1B+A_2B)}{P(B)} = \frac{P(A_1B)+P(A_2B)}{P(B)} = P_B(A_1) + P_B(A_2)$$

Теорема умножения

$P(A_1, A_2, \ldots, A_n) > 0 \implies$

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_{n-1} \ldots A_3A_2A_1)$$

Формулы полной вероятности и Байеса

$$H_1, H_2, \ldots, H_l \text{ - полная группа событий} \Leftrightarrow$$
$$P(H_i) > 0$$
$$H_i \cap H_j = \delta_{ij}$$
$$\sum_i H_i = \Omega$$

Теорема о полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{l} P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

$$A = A\Omega = A \sum_i H_i = \sum_i AH_i$$

Пример:

5 белых и 3 черных шара

вынимаем 1 шар и перекладываем в корзину с 2 белыми и 2 черными шарами

Вынимаем шар, какой цвет?

$$H_1 \text{ - переложен белый}$$
$$H_2 \text{ - переложен чёрный}$$
$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{21}{40}$$

$$\mathcal{H} = \{H_i\} \text{ - полная группа событий}$$
$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{i=1}^{l} P(A|H_i) \cdot P(H_i)}$$
$$P(H_i) \text{ - априорные вероятности}$$
$$P(H_i|A) \text{ - апостериорные вероятности}$$

МК1

$$\text{7 белых, 5 черных, 4 красных}$$
$$7 + 5 + 4 = 16$$
$$\frac{4}{16} + \frac{12}{16} \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{15} < \frac{1}{2}$$
$$\frac{5}{16} + \frac{11}{16} \cdot \frac{5}{15} = \frac{15}{48} + \frac{11}{48} = \frac{26}{48} > \frac{24}{48}$$

06/03/2025

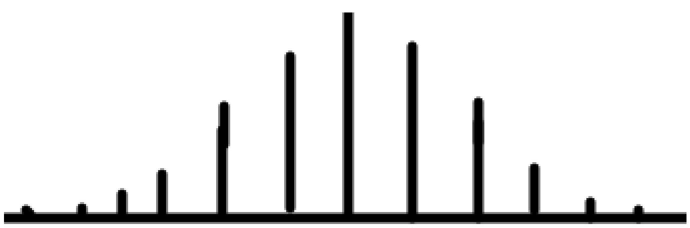
Предельные теоремы в схеме Бернулли

Схема Бернулли

$$\omega = (0, 1, \dots, 0, 1) \text{ - последовательность 0 и 1}$$
$$P(\omega) = p^k(1-p)^{n-k},\ p \text{ - вероятность}$$
$$p_n^k = P(\underbrace{\mu}_{\text{число успехов}} = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$
$$p_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$\text{Пример: 3 шара с возвращениями}$$

Наиболее вероятное число успехов

$$k : p_n^k = \ \max$$
$$q = 1-p$$
$$p_n^k \ \text{ vs } \ p_n^{k+1} \Leftrightarrow \frac{n!}{p!(n-k)!} p^k q^{n-k} \ \text{ vs } \ \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} q^{n-k-1} \Leftrightarrow$$
$$k+q \ \text{ vs } \ np$$
$$1)\ k+1 < np \Rightarrow k+n < np \Rightarrow p_n^k < p_n^{k+1}$$
$$2)\ k > np \Rightarrow k+q > np \Rightarrow p_n^k > p_n^{k+1}$$



Пример:

$$n_1 \quad - \quad p_1 = 0.8 \quad \text{ - вероятность попадания первого}$$
$$n_2 \quad - \quad p_2 = 0.6 \quad \text{ - вероятность попадания второго}$$

Одновременно производят 15 выстрелов. Найти вероятное число залпов, когда оба выстрела попадут.

$$p = p_1 p_2 = 0.48$$
$$np = 15 \cdot 0.48 = 7.2$$
$$p_n^k < p_m^{k+1},\ \ k+1 < np \Rightarrow k = \overline{0,7}$$
$$p_n^k > p_n^{k+1},\ \ k > np \Rightarrow k = \overline{8,15}$$
$$p_{15}^7 \ \text{ vs } \ p_{15}^8$$

Теорема 1 (локальная Муавра-Лапласа)

Пусть в схеме Бернулли $\sqrt{npq} \gg 1$, тогда

$$p_n^k \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} \exp\left(-\frac{(k-np)^2}{2npq}\right)$$

равномерно по $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \in [a,b]$

$$p_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

$$k = np + x\sqrt{npk} \text{ - бесконечно большая}$$

$$n-k = nq - x\sqrt{npk} \text{ - бескольнечно большая}$$

$$p_n^k \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi(n-k)}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} p^k q^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{(np)^k (nq)^{n-k}}{k^k (n-k)^{n-k}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}}\left(\frac{np}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} = A$$

$$\ln A = -k \ln\left(\frac{np + x\sqrt{npq}}{np}\right) - (n-k)\ln\left(\frac{nq - x\sqrt{npk}}{nq}\right) =$$

$$= -k\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (n-k)\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \approx$$

$$\approx (np + x\sqrt{npk})\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}x^2\frac{q}{np} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) -$$

$$\left(nq - x\sqrt{npq}\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2}{2}\frac{p}{nq} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) =$$

$$= \cancel{-x\sqrt{npq}} - x^2 q + \frac{1}{2}x^2 q + o(1) + \cancel{x\sqrt{npq}} + \frac{x^2}{2} - x^2 p + o(1) =$$

$$= -\frac{x^2}{2}(q+p) + o(1) = -\frac{x^2}{2} + o(1)$$

$$\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} = \sqrt{\frac{n}{(np + x\sqrt{npq})(np - x\sqrt{npk})}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\left(p + x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\left(q - x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{npk}}$$

Теорема 2 (интегральная теорема Муавра-Лапласа)

$$\sum_{k=k_1}^{k_2-1} p_n^k = \int_{\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Предельная теорема Пуассона:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}} np = a \Rightarrow P_n^m \underset{n\to\infty}{\to} \frac{a^m}{m!}e^{-a}$$

27/03/2025

Коллоквиум: 19.04 8:30 922 л.

Характеристика случайного вектора:

$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_m \end{pmatrix}$

$M\vec{\xi} = \begin{pmatrix} M\xi_1 \\ M\xi_2 \\ \dots \\ M\xi_m \end{pmatrix}$ - вектор математического ожидания

Ковариационная матрица:

$$\Sigma = (\sigma_{ij})$$
$$\sigma_{ij} = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = M(\xi_i - M\xi_i)(\xi_j - M\xi_j)$$
$$\sigma_{ii} = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_i) = M * \xi_i - M\xi_i)^2$$
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$
$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$$
$$\text{Вычисление } \operatorname{cov}(\xi, \eta):$$
$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \sum_k \sum_j (x_k - M\xi)(y_j - M\eta) \cdot P \begin{pmatrix} \xi = x_k \\ \eta = y_j \end{pmatrix}$$
$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M\xi\eta - M\xi M\eta = \sum_k \sum_j x_k \cdot y_j P(\xi = x_k, \eta = y_j) - M\xi M\eta$$

Свойства ковариации:

1. $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \operatorname{cov}(\eta, \xi)$
2. $\operatorname{cov}(\alpha\xi, \eta) = \alpha \operatorname{cov}(\xi, \eta)$
3. $\operatorname{cov}(\xi_1 + \xi_2, \eta) = \operatorname{cov}(\xi_1, \eta) + \operatorname{cov}(\xi_2, \eta)$
4. $\operatorname{cov}(\xi, \xi) \geq 0$
   $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = 0 \Leftrightarrow P(\xi = M\xi) = 1$

Доказательство:

$$\operatorname{cov}(\xi_1 + \xi_2, \eta) = M(\xi_1 + \xi_2 - M(\xi_1 + \xi_2))(\eta - M\eta) =$$
$$= M((\xi_1 - M\xi_1) + (\xi_2 - M\xi_2))(\eta - M\eta) =$$
$$= M(\xi_1 - M\xi_1)(\eta - M\eta) + M(\xi_2 - M\xi_2)(\eta - M\eta) =$$
$$= \operatorname{cov}(\xi_1, \eta) + \operatorname{cov}(\xi_2, \eta)$$

$$\begin{pmatrix} \eta \geq 0 \\ M\eta = 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P(\eta = 0) = 1 \Bigg) \Rightarrow (D(\eta) = 0 \Rightarrow P(\eta = 0) = 1)$$
$$0 = M\eta = \sum_{\omega \in \Omega} \underbrace{\eta(\omega)}_{\geq 0} \underbrace{P(\omega)}_{\geq 0} \Rightarrow (\eta(\omega) \neq 0 \Rightarrow P(\omega) = 0) \Rightarrow$$
$$P(\eta > 0) = 0 \Rightarrow P(\eta = 0) = 1$$

Пример:

Имеется урна, в которой m_1 белых шаров, m_2 чёрных, m_3 красных.

Из этой урны с возвращением вынимается n шаров.

ξ - число белых шаров среди вынутых

η - число черных шаров среди вынутых

$$P(\xi = k, \eta = j)$$

Элементарный исход - это последовательность длины m, где на каждом месте находится или белый, или черный, или красный шар

(, , , , ...)
m

$$\alpha = \frac{N_1}{N_1+N_2+N_3}$$
$$\beta = \frac{N_2}{N_1+N_2+N_3}$$
$$\gamma = \frac{N_3}{N_1+N_2+N_3}$$
$$P(\omega) = \alpha^k \cdot \beta^j \cdot \gamma^{m-k-j} \cdot \underbrace{C_m^k}_{\text{выбираем места для белых}} \cdot \underbrace{C_{m-k}^j}_{выбираемчерные} = \frac{m!}{k!j!(m-k-j)!}\alpha^k\beta^j\gamma^{(m-k-j)}$$

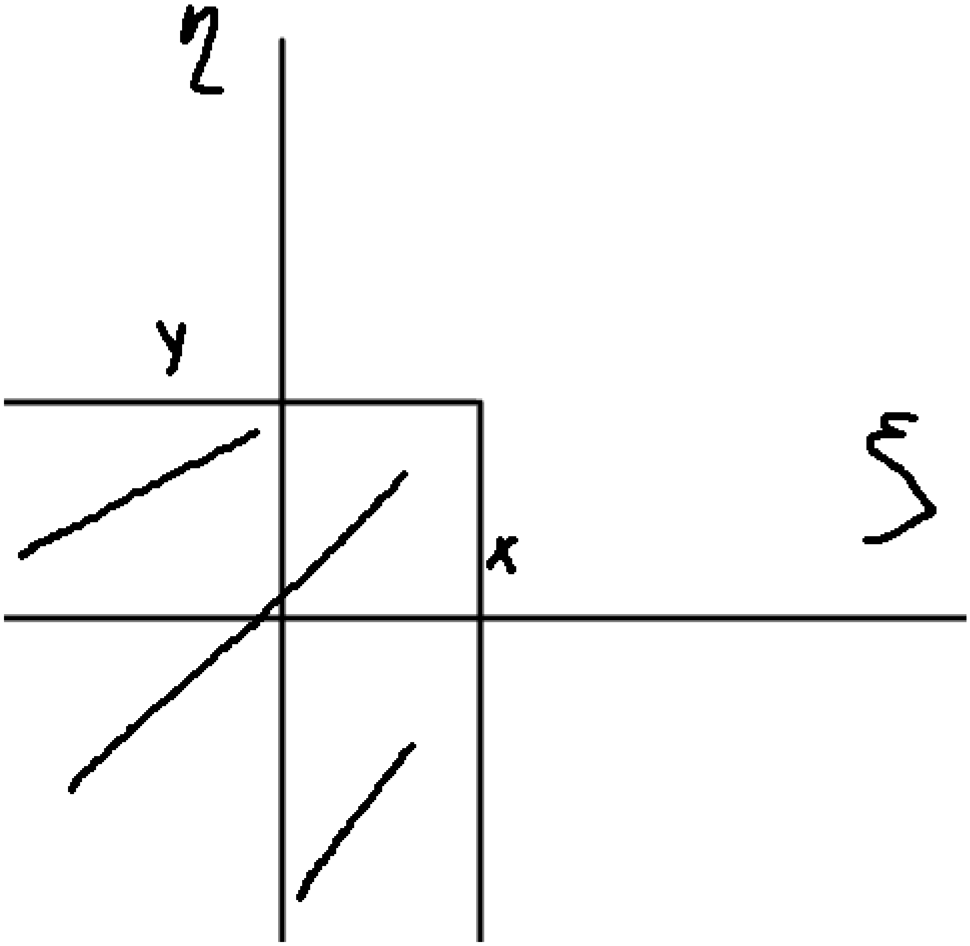
Находим характеристики $M\xi, M\eta, D\xi, D\eta, \operatorname{cov}(\xi,\eta)$

$$\xi = \xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_m - \text{количество шаров при } m \text{ вытаскиваниях}$$
$$M\xi = M\xi_1 + M\xi_2 + \ldots + M\xi_m = m\alpha$$
$$\xi_i : \begin{cases} 1, \text{ с вероятностью } \alpha \\ 0, 1-\alpha \end{cases}$$
$$\eta = \eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_m$$
$$M\eta = m\beta$$
$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = \operatorname{cov}(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_m, \eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_m) = \sum_{i=j=1}^{m} \operatorname{cov}(\xi_i,\eta_i) + \sum_{i\neq j} \operatorname{cov}(\xi_i,\eta_j) =$$
$$\operatorname{cov}(\xi_i,\eta_i) = M\xi_i\eta_i - M\xi_i M\eta_i = -\alpha\beta$$
$$P(\xi_i\eta_i = 0) = 1$$
$$i \neq j: \operatorname{cov}(\xi_i,\eta_j) = M\xi_i\eta_j - M\xi_i M\eta_j = \alpha\beta - \alpha\beta = 0 \xi_i\eta_j = \begin{cases} 1, \alpha\beta \\ 0, 1-\alpha\beta \end{cases}$$
$$P(\xi_i = 1, \eta_j = 1) = P(\xi_i = 1)P(\eta_j = 1)$$
$$= -m\alpha\beta$$

Закон распределения случайного вектора

Функция распределения

$$F_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \ldots, \xi_m < x_m)$$
$$m = 2: \quad F_{\xi\eta}(x,y) = P(\xi < x, \eta < y)$$



Свойства:

$$0 \le F_{\xi\eta}(x,y) \le 1$$
$$\lim_{x \to -\infty} F_{\xi,\eta}(x,y) = 0$$
$$\lim_{\eta \to -\infty} F_{\xi\eta}(x,y) = 0$$
$$\lim_{x,y \to +\infty} F_{\xi\eta}(x,y) = 1$$
$$\lim_{x \to \infty} F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\eta}(y)$$
$$F_{\xi\eta}(x,y) \text{ непрерывна слева по каждому аргументу}$$
$$\forall h_1 \ge 0 \forall h_2 \ge 0 \Delta_{h_1 h_2} F_{\xi\eta}(x,y) \ge 0$$
$$\Delta_{h_2} F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\xi\eta}(x, y+h_2) - F_{\xi,\eta}$$
$$\Delta_{h_1 h_2} F_{\xi\eta}(x,y) = F_{\xi\eta}(x+h_1, y+h_2) - F_{\xi\eta}(x+h_1, y) - F_{\xi\eta}(x, y+h_2) + F_{\xi\eta}(x,y)$$

Последнее можно представить графически - утверждение эквивалентно тому, что площадь прямоугольника со сторонами h_1 и h_2 > 0.

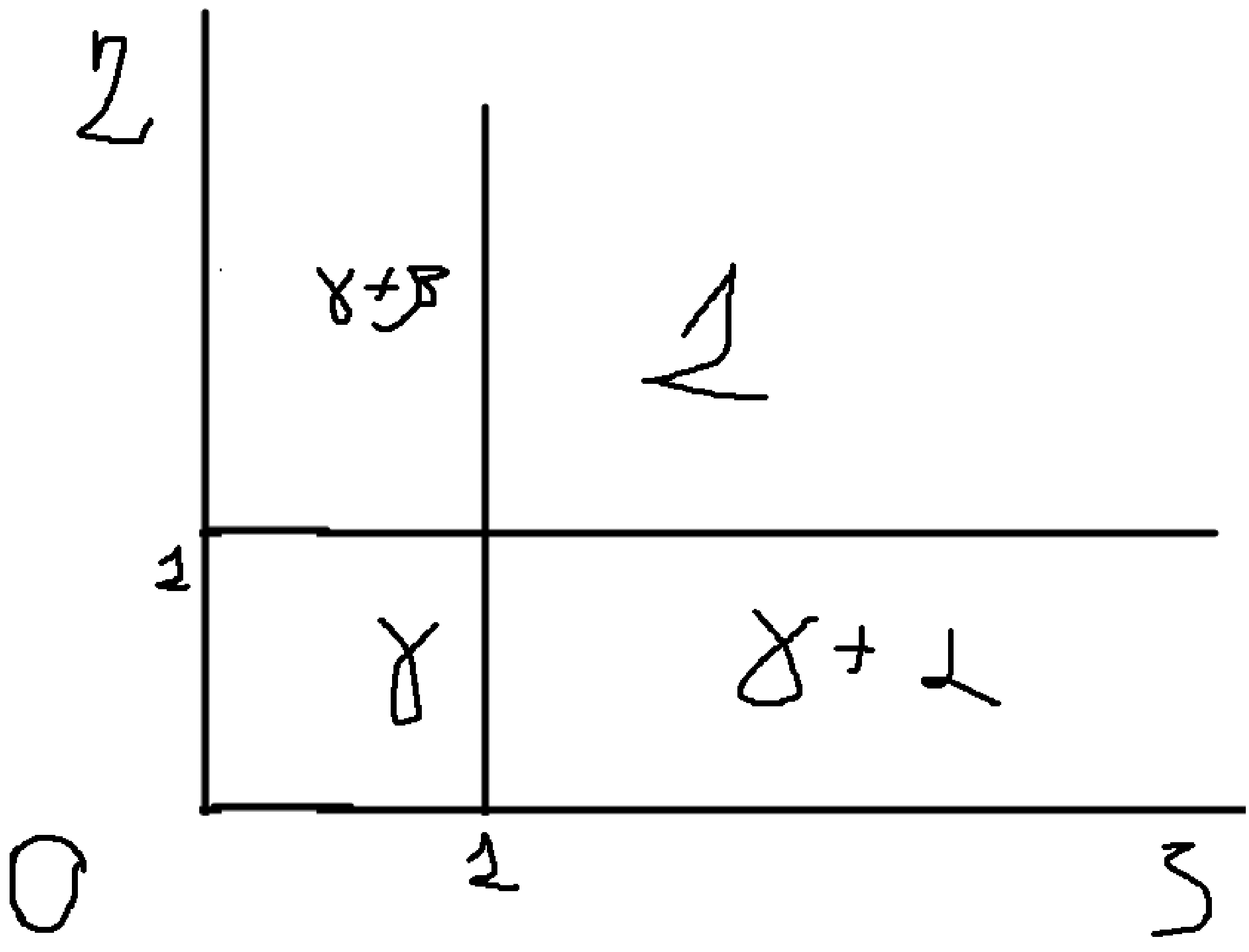
Если свойства от 1 до 6 выполняются, то любая функция может быть представлена как функция распределения случайной величины.

Пример:
Прошлая схема, вытаскиваем 1 шар
ξ - число белых шаров (или 0, или 1)
η - число черных

$\xi \backslash \eta$	**0**	**1**
0	γ	β
1	α	0

$$F_{\xi\eta}(x,y) = P(\xi < x, \eta < y)$$

График:



Неравенство Коши-Буняковского:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) \le \sqrt{\operatorname{cov}(\xi,\xi)}\sqrt{\operatorname{cov}(\eta,\eta)} = \sqrt{D_\xi D_\eta} \Rightarrow$$
$$-1 \le \frac{\operatorname{cov}(\eta,\xi)}{\sqrt{D_\xi}\sqrt{D_y}} \le 1 - \text{ коэффициент корреляции}$$
$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0 - \ \xi \text{ и } \eta \text{ некоррелированные величины}$$
$$\text{Если } \xi \text{ и } \eta \text{ некоррелированные, то}$$
$$D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta + \cancelto{0}{2\operatorname{cov}(\xi,\eta)}$$

Независимость случайных величин

Случайные величины ξ и η независимые, если

$$\forall k, j\ P(\xi = x_k, \eta = y_j) = P(\xi = x_k) \cdot P(\eta = y_j)$$

или

Разбиения

$$\Omega = (\xi = x_1) + (\xi = x_2) + \ldots + (\xi = x_m)$$
$$\omega = (\eta = y_1) + (\eta = y_2) + \ldots + (\eta = y)l$$

или

Алгебры $\mathcal{A}_\xi$ и $\mathcal{A}_\eta$ независимы

$$P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = P(\xi \in B_1)P(\eta \in B_2)$$

а значит

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x)P(\eta < y)$$

$$F_{\xi\eta}(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)$$

Теорема

$$(F_{\xi\eta}(x, y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y)) \Rightarrow \xi \text{ и } \eta \text{ независимы}$$

$$\begin{gathered}
P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(x_i \leq \xi < x_i + \varepsilon, y_j \leq \eta < y_j + \varepsilon) = \\
= F_{\xi\eta}(x_i + \varepsilon, y_j + \varepsilon) - F_{\xi\eta}(x_i + \varepsilon, y_j) - F_{\xi\eta}(x_i, t_j + \varepsilon) + F(x_i, y_j) = \\
F_\xi(x_i + \varepsilon)F_\eta(y_j + \varepsilon) - F_\xi(x_i + \varepsilon)F_\eta(y_j) - F_\xi(x)F_\eta(y_j + \varepsilon) + F_\xi(x)F_\eta(y_j) = \\
= (F_\xi(x_i + \varepsilon) - F_\xi(x_i))(F_\eta(y_j + \varepsilon) - F_\eta(y_j)) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j)
\end{gathered}$$

Если ξ и η независимы, то они некоррелированны.

$$\begin{gathered}
\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \sum_i \sum_j (x_i - M\xi)(y_j - M\eta) \cdot P(\xi = x_i, \eta = y_j) = \\
= \sum_i \sum_j (x_i - M\xi)P(\xi = x) \cdot (y_j - M\eta)P(\eta = y_j) = \\
= \sum_i (x_i - M\xi)P(\xi = x) \cdot \sum_j (y_j - M\eta)P(\eta = y_j) = \\
= (M\xi - M\xi)(M\eta - M\eta) = 0
\end{gathered}$$

Пример

$\xi \backslash \eta$	**-1**	**0**	**1**	$P(\xi = i)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
-1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$P(\eta = j)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{5}{12}$	1

$P(\xi = 1, \eta = 0) = 0 \neq P(\xi = 1)P(\eta = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

ξ и η зависимы

$$M\xi\eta = 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + (-1)(-1) \cdot \frac{1}{4} = 0$$
$$M\xi = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$$
$$M\eta = (-1) \cdot \frac{5}{12} + 0 \cdot \frac{2}{12} + 1 \cdot \frac{5}{12} = 0$$

Зависимы и некоррелированы
Теорема о свёртке
Если ξ и η независимы, то $P(\xi+\eta=k)=\sum_j P(\xi=j)P(\eta=k-j)$
$P(\xi+\eta=k)=\sum_j P(\xi+\eta=k,\xi=j)$

Пусть есть 2 Пуассоновские величины
$\xi \sim P(\lambda)$
$\eta \sim P(\mu)$
$P(\xi+\eta=k)=\sum_{j=0}^k P(\xi=j,\eta=k-k)=\sum_{j=0}^k P(\xi=j)P(\eta=k-j)$

$$=\sum_{k=0}^{k}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}\cdot\frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!}e^{-\mu}k!=\frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^k}{k!}\sim P(\lambda+k)$$

03/04/2025

Геометрический смысл коэффициентов корреляции.

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)-\text{скалярное произведение}$$

ξ и η некоррелируют $\Rightarrow M(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)=0\Leftrightarrow \xi-M\xi\perp\eta-M\eta$
$(\Omega,\mathcal{A},P)$
$\xi(\omega)=\begin{pmatrix}\xi(\omega_1)\\ \xi(\omega_2)\\ \dots\\ \xi(\omega_n)\end{pmatrix}$
$\hat{\eta}=\alpha\xi+\beta$
$\eta-\hat{\eta}\perp_1\leftrightarrow M((\eta-\hat{\eta})1)=0$
$\eta-\hat{\eta}\perp\xi\leftrightarrow M((\eta-\hat{\eta})\xi)=0$

$$\begin{cases}M(\eta-\alpha\xi-\beta)=0\\ M(\eta\xi-\alpha\xi\xi-\beta\xi)=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\alpha=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{D\xi}$$

$$\beta=M\eta-\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{D\xi}M\xi$$

$$\hat{\eta}=\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{D\xi}\xi+M\eta-\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{D\xi}M\xi$$

$$\hat{\eta}=M\eta-\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{D\xi}(\xi-M\xi)-\text{уравнение линейной регрессии}$$

$$D(\eta-\hat{\eta})=D\left(\eta-M\eta-\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{D\xi}(\xi-M\xi)\right)=$$

$$=M\left(\eta-M\eta-\frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{D\xi}(\xi-M\xi)\right)^2=$$

$$=M\left((\eta-M\eta)^2-\frac{2\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{D\xi}(\eta-M\eta)(\xi-M\xi)+\frac{\operatorname{cov}^2(\xi,\eta)}{(D\xi)^2}(\xi-M\xi)^2\right)=$$

$$=D\eta-\frac{2\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{D\xi}\operatorname{cov}(\xi,\eta)+\frac{\operatorname{cov}^2(\xi,\eta)}{(D\xi)\cancel{^2}}\cancel{D\xi}=D\eta-\frac{\operatorname{cov}^2(\xi,\eta)}{D\xi}=$$

$$=D\eta(1-r^2_{\xi,\eta})$$

$$r_{\xi,\eta}-\text{коэффициент корреляции}$$

$$r_{\xi,\eta} = \pm 1 \Rightarrow \begin{matrix} D(\eta - \hat{\eta}) = 0 \\ M(\eta - \hat{\eta}) = 0 \end{matrix} \Rightarrow P(\hat{\eta} = \eta) = 1 \Rightarrow \eta = \alpha\xi + \beta$$
$$r_{\xi,\eta} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} D\hat{\eta} = 0 \\ D(\eta - \hat{\eta}) = D\eta \end{matrix} \Rightarrow \hat{\eta} = \text{const} = M\eta \Rightarrow P(\hat{\eta} = M\eta) = 1$$
$$r_{\xi,\eta} - \text{мера линейной зависимости между } \xi \text{ и } \eta$$

Про коэффициент детерминации нам не рассказали.

Условный закон распределения

Условным законом распределения ξ при условии $\beta = x_k$ называется набор значений η и условных вероятностей $P(\eta = y_j | \xi = x_k)$

Распределение 3 шаров по 3 корзинам
ξ - число шаров в 1 корзине
η - число шаров в 2 корзине

$\xi \backslash \eta$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	0
2	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	0
3	$\frac{1}{27}$	0	0	0

$\eta \backslash i$	**0**	**1**	**2**	**3**		
$P(\eta = j, \xi = 0)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$M(\eta \vert \xi = 0) = \frac{3}{2}$	$D(\eta \vert \xi = 0) = \frac{3}{4}$
$P(\eta = j, \xi = 1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$M(\eta \vert \xi = 1) = 1$	$D(\eta \vert \xi = 1) = \frac{1}{2}$
$P(\eta = j, \xi = 2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$M(\eta \vert \xi = 2) = \frac{1}{2}$	$D(\eta \vert \xi = 2) = \frac{1}{4}$
$P(\eta = j, \xi = 3)$	1	0	0	0	$M(\eta \vert \xi = 3) = 0$	$D(\eta \vert \xi = 3) = 0$

Условное математическое ожидание:

$$M(\eta | \xi = x_k) = \sum_j y_j P(y = y_j | \xi = x_k)$$

Условная дисперсия:

$$D(\eta | \xi = x_k) = M(\eta - M(\eta | \xi = x_k))^2$$
$$M(\eta | \xi = x_k) = \varphi(\xi)$$

Условное математическое ожидание как случайная величина:
$M(\eta | \xi) = \varphi(\xi)$

k	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
$P(\eta \vert \xi = k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

(строка в первой таблице)

$M\varphi(\xi) = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{27} + 1 \cdot \frac{12}{27} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{27} + 0 \cdot \frac{1}{27} = 1$

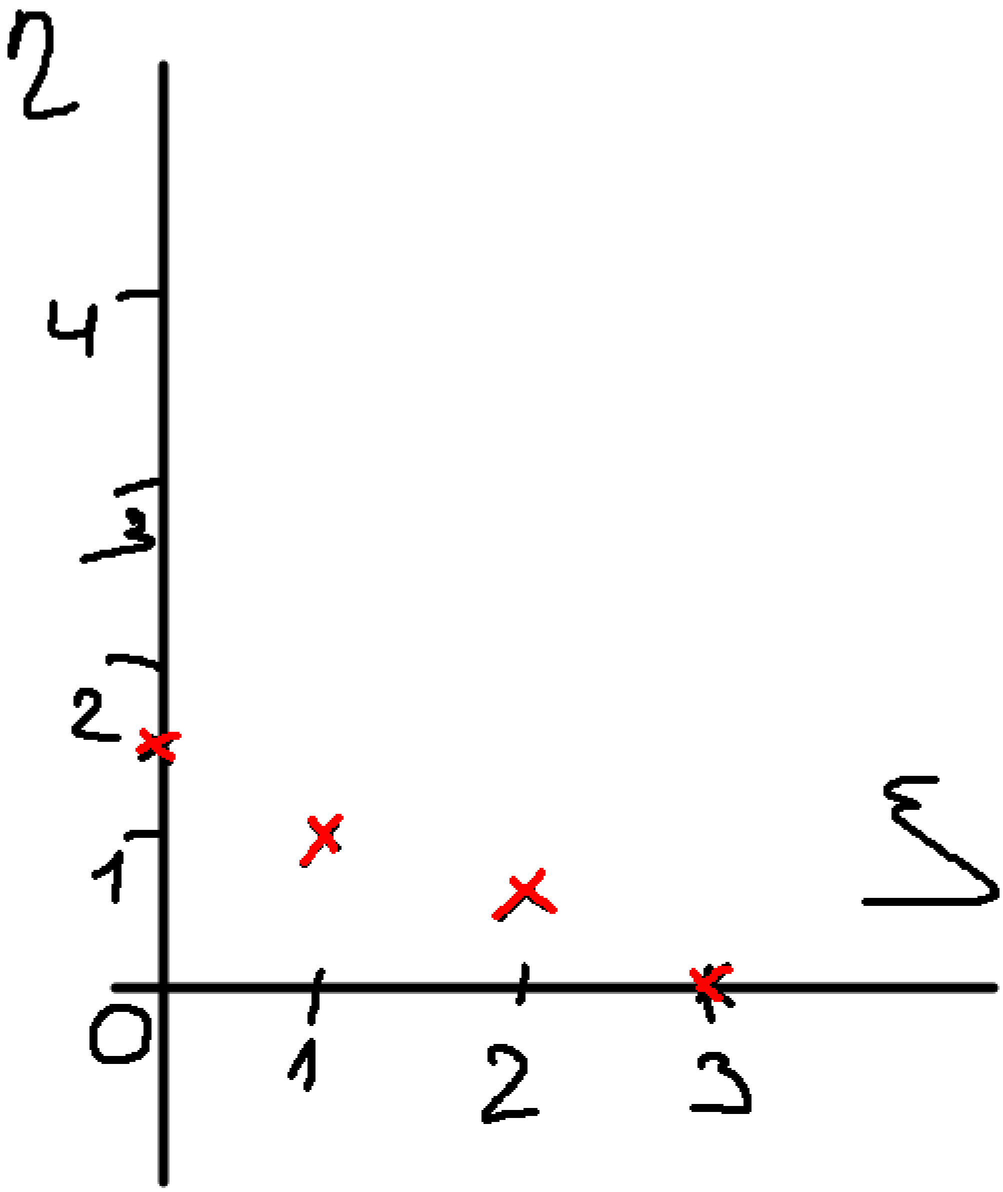
Теорема:

Математическое ожидание от условного математического ожидания равно безусловному математическому ожиданию

$$M(M(\eta|\xi)) = M\eta$$

$$M(M(\eta|\xi)) = \sum_k M(\eta|\xi = x_k) \cdot P(\xi = x_k) =$$
$$= \sum_k \sum_j y_j \cdot P(\eta = y_j|\xi = x_k) \cdot P(\xi = x_k) =$$
$$= \sum_k \sum_j y_j P(\eta = y_j, \xi = x_k) =$$
$$= \sum_j y_j P(\eta = y_j) = M\eta$$

Условное математическое ожидание $M(\eta, \xi)$ - регрессия η на ξ



Если $\eta = \varphi(\xi) = \alpha\xi + \beta$, то ξ и η связаны линейной корреляционной зависимостью
$\hat{\eta} = M\eta + \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{D\xi}(\xi - M\xi)$
$\hat{\eta} = 1 + \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}(\xi - 1) = 1 - \frac{1}{2}(\xi - 1) = \frac{3}{2} - \frac{\xi}{2}$
Можно доказать, что $\min_g M(\eta - g(\xi))^2 = M(\eta - \varphi(\xi))^2$

Неравенство Чебышёва, закон больших чисел Чебышёва

Неравенство

$$\exists M\xi \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \left(P(|\xi| > \varepsilon) \le \frac{M(\xi)}{\varepsilon}\right)$$
$$|\xi| = |\xi| \cdot I(|\xi| > \varepsilon) + |\xi| \cdot I(|\xi| \le \varepsilon) \ge |\xi| I(|\xi| > \varepsilon) > \varepsilon I(|\xi| > \varepsilon)$$
$$M(\xi) > M(\varepsilon I(|\xi| > \varepsilon)) = \varepsilon P(|\xi| > \varepsilon) \text{ делим на } \varepsilon \text{ и получаем неравенство}$$

$$\exists D\xi \Rightarrow \left(P(|\xi - M\xi| < \varepsilon) \le \frac{D\xi}{\varepsilon^2}\right)$$
$$\text{Подставляем вместо } \xi \ \ \xi - M\xi$$
$$P(|\xi - M\xi| > \varepsilon) = P(|\xi - M\xi|^2 > \varepsilon^2) \le \frac{M(\xi - M\xi)^2}{\varepsilon^2} = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Следствие:
$\forall\varepsilon > 0 \ P(|\xi - M\xi| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$

Закон больших чисел Чебышёва (збч)

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n - \text{последовательность независимых случайных величин, таких что } D\xi_i \le C$$
$$\Rightarrow P\left(\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{n} - \frac{M\xi_1 + M\xi_2 + \ldots + M\xi_n}{n}\right| \ge \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

$$\zeta_n = \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \ldots + \zeta_n}{n}$$
$$M\zeta_n = \frac{M\zeta_1 + M\zeta_2 + \ldots + M\zeta_n}{n}$$
$$P(|\zeta_n - M\zeta_n| > \varepsilon) \le \frac{D\zeta_n}{\varepsilon^2}$$
$$D\zeta_n = D\left(\frac{1}{n}(\zeta_1 + \ldots + \zeta_n)\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D\zeta_i = \frac{C}{n}$$

$$M\xi_i = a\forall i$$
$$\forall\varepsilon > 0 P\left(\left|\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} - a\right| \ge \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$
$$\xi_i = \mu_i - \text{число успехов в } i\text{-м испытании Бернулли,} \mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$$
$$P\left(\left|\frac{\mu}{n} - p\right| \ge \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

10/04/2025

Производящая функция

$$M\xi_i^{[r_1]}\xi_j^{[r_2]} = \frac{\partial^{(r_1+r_2)}}{\partial z_i^{r_1}\partial z_j^{r_2}}\psi_\xi(z_1, \ldots, z_m)$$
$$\text{Производящая функция последовательности:}$$
$$\sum a_n z^n \to \{a_n\}$$

Производящая функция $\psi_\xi(z)$ целочисленной случайной величины ξ называется

$$\psi_\xi(z) = \sum_n p_n z^n$$

где $p_n = P(\xi = n)$

$$\psi_\xi(z) = Mz^\xi$$

Пример:
Биномиальное распределение:

$$\xi \sim B(n,p)$$
$$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$$
$$\psi_\xi(z) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} z^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pz)^k q^{n-k} = (pz+q)^n$$

Пуассон:

$$\xi \sim P_0(\lambda)$$
$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$
$$\psi_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda l} z^k = e^{\lambda(z-1)}$$

Геометрический:
(число неудач до первого успеха в схеме Бернулли)

$$p(\xi = k) = q^k p$$
$$\psi_\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q^k p z^k = \frac{p}{1-qz}$$

Свойства:

1. $\psi_\xi(z)$ определено на $(-1, 1]$

$$|p_k z^k| \le p_k$$
$$\sum p_k = 1 \Rightarrow \sum p_k z^k \text{ сходится на } (-1,1]$$

2. $\psi_\xi(1) = 1$

$$\sum p_k = 1$$

3. $p_k = P(\xi = k) = \frac{1}{k!}\psi_\xi^{(k)}(0)$
4. $M\xi = \psi'_\xi(1)$

$$\psi'_\xi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k z^{k-1}$$
$$\psi'_\xi(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = M\xi$$

5. $M\xi^{[r]} = \psi_\xi^{(r)}(1)$
   [r] - факториальный момент

$$\xi^{[r]} = \xi(\xi-1)\dots(\xi-r+1)$$

$$D\xi = M\xi^{[2]} + M\xi - (M\xi)^2 \Rightarrow$$

$$D\xi = \psi''_\xi(1) + \psi'_\xi(1) - (\psi'_\xi(1))^2$$

Теорема (свойство мультипликативности)

Если $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ - независимые целочисленные случайные величины с производящими функциями $\psi_{\xi_1}, \psi_{\xi_2}, \dots, \psi_{\xi_n}$ соответственно, то

$$\psi_{\xi_1+\xi_2+\dots++\xi_n}(z) = \psi_{\xi_1}(z) \cdot \psi_{\xi_2}(z) \cdot \dots \cdot \psi_{\xi_n}(z)$$

$$\psi_\rho(z) = Mz^\rho = Mz^{\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n} = M(z^{\xi_1} z^{\xi_2} \cdot \dots \cdot z^{\xi_n})$$

матожидание от произведения независимых величин равно произведению

Пример:

Выбираются 3 цифры от 0 до 9

$$P\left(\sum = k\right) = ?$$

$$\xi - \text{выбор цифры. Дискретный равномерный закон}$$
$$P(\xi = k) = \frac{1}{10}$$
$$\psi_\xi = \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9} z^9 = \frac{1}{10} \cdot \frac{1-z^{10}}{1-z}$$
$$\Sigma = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$
$$\psi_\Sigma(z) = \frac{1}{10^3}\left(\frac{1-z^{10}}{1-z}\right)^3 = \frac{1}{10^3} \cdot (1 - 3z^{10} + 3z^{20} - z^{30})(1 + 3z + 6z^2 + \dots + C_{k+2}^k z^k + \dots)$$
$$p_k = \begin{matrix} 0 \le k \le 9 & C_{k+2}^k \\ 10 \le k \le 19 & 1 \cdot C_{k+2}^k - 3 \cdot C_{k-8}^{k-10} \\ 20 \le k \le 27 & 1 \cdot C_{k+2}^k - 3C_{k-8}^{k-10} + 3C_{k-18}^{k-20} \end{matrix}$$

ξ_1, ξ_2 - независимые, распределены по пуассоновскому закону

$$\xi_1 = P_0(\lambda)$$
$$\xi_2 = P_0(\mu)$$
$$\psi_{\xi_1} = e^{\lambda(z-1)}$$
$$\psi_{\xi_2} = e^{\mu(z-1)}$$
$$\psi_{\xi_1+\xi_2} = e^{(\lambda+\mu)(z-1)} \sim P_0(\lambda+\mu)$$

ξ_1, ξ_2 - геометрический закон и независимы

$$\psi_{\xi_1+\xi_2}(z) = \left(\frac{p}{1-qz}\right)^2 = \frac{p^2}{q}\left(\frac{1}{1-qz}\right)' = \frac{p^2}{q}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(qz)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} p^2(k+1)q^k z^k$$
$$p(\xi_1+\xi_2) = p^2(k+1)q^k$$

Теорема о непрерывности:

Пусть

$$p_k^{(r)}, k \in \mathbb{N}_0 - r\text{-й закон распределения}$$

С производящими функциями $\psi^{(r)}(z)$. Тогда:

$$\exists \lim_{r\to\infty} p_k^{(r)} = p_k, \forall k \in \mathbb{N}_0 \Leftrightarrow \forall z \in [0,1) \exists \lim_{r\to\infty} \psi^{(r)}(z) = \psi(z)$$

Пример:

$$\xi^{(r)} - \mathcal{B}\left(r, p_r = \frac{a}{r}\right)$$

$$\psi^{(r)}(z) = (p_r z + q)^r = \left(1 + \frac{a}{r}(z-1)\right)^r \overset{r\to\infty}{\to} \exp\left(\lim_{r\to\infty} \frac{a}{r}(z-1)\cdot r\right) = e^{a(z-1)} \sim P_0(a)$$

$$\Rightarrow$$

$$|\psi^{(r)}(z) - \psi(z)| = \left|\sum_{k=0}^{\infty}(p_k^{(r)} - p_k)z^k\right| = \left|\sum_{k=0}^{N-1}(p_k^{(r)} - p_k)z^k\right| + \left|\sum_{k=N}^{\infty}(p_k^{(r)} - p_k)z^k\right| \le$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)\ \frac{z^N}{1-z} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \le \sum_{k=0}^{N-1}|p_k^{(r)} - p_k| + \sum_{k=N}^{\infty} z^k = N\cdot\frac{\varepsilon}{2N} + \frac{z^N}{1-z} < \varepsilon$$

$$p_l^{(r)} \underset{r\to\infty}{\to} p_k$$

$$\exists r(\varepsilon) |p_k^{(r)} - p_k| < \frac{\varepsilon}{2N}$$

$$\Leftarrow$$

$$0 \le p_k^r \le 1 \to r_1 \qquad p_0^{(r_1)} \to p_r$$

$$0 \le p_1^{(r_1)} \le 1 \to r_2 \quad p_1^{(r_1)} \to p_1$$

$$\begin{array}{cccc}
0 & 1 & 2 & 3 \\
p_0^{(1)} & p_1^{(1)} & p_2^{(1)} & \\
p_0^{(2)} & p_2^{(2)} & p_2^{(2)} & \\
\dots & \dots & \dots & \\
p_? & & &
\end{array}$$

Берём диагональ (столбцы - подпоследовательности)

$$p_k^{(r)} \to p_k \ \forall k = 0, 1, \dots$$
$$\psi^{(r)}(z) \to \psi(z)$$

То такие частичные пределы единственны

$$\xi \sim \psi_\xi(z) \quad \eta = 2\xi - 1 \quad \psi_\eta(z) = ?$$

$$\psi_\eta(z) = Mz^\eta = M^{2\xi-1} = z^{-1}M(z^2)^\xi = z^{-1}\psi_\xi(z^2)$$

Общее определение случайной величины

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Функция $\xi(\omega)$ - случайная величина, если $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\omega : \xi(\omega) < x) \in \mathcal{A}$

$$P(\xi < x) = F_\xi(x) - \text{ функция распределения случайной величины}$$

Свойства:

$$0 \le F_\xi(x) \le 1$$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$$
$$F_\xi(x) \text{ непрерывна слева}$$
$$\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0, \lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$$

$$A_n = (-\infty, -n) \qquad \cap_n A_n = \varnothing$$
$$\Rightarrow \text{по теореме непрерывности} \qquad \lim_{n\to\infty} P(A_n = 0)$$
$$\lim_{n\to\infty} F_\xi(-n) = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} F_\xi(x) - F_\xi\left(x - \frac{1}{n}\right) = 0$$

Вероятность принять значение в борелевском множестве:

$$P(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$$
$$P(\xi \ge b) = 1 - F_\xi(b)$$
$$P(\xi = b) = F_\xi(b+0) - F_\xi(b)$$

Вывод: с помощью функции распределения однозначно определяются вероятности борелевских множеств.

$$P_\xi([a, b)) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$$

$\mathcal{B}$ - конечные объединения $[a_i, b_i)$
Мера P_ξ определена на $\mathcal{B}_0$

$$(\Omega, \mathcal{A}, P) \xrightarrow{\xi} (R, \mathcal{B}, P_\xi)$$

Плотность распределения p_ξ :

$$P(a \le \xi \le b) = \int_a^b p_\xi(x)dx$$
$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x p_\xi(y)dy$$

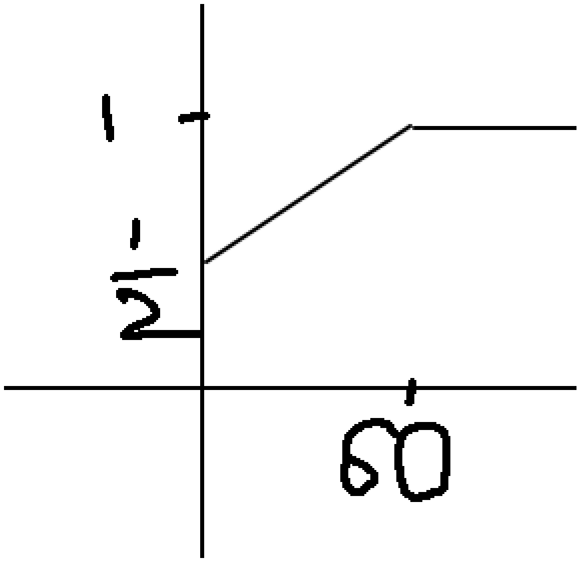
Абсолютно непрерывная случайная величина
x - точка непрерывности - $\exists F'_\xi(x) = p_\xi(x)$

05/05 - экзамен

24/04/2025

Дополнительная лекция
220 л 06/06 15:55

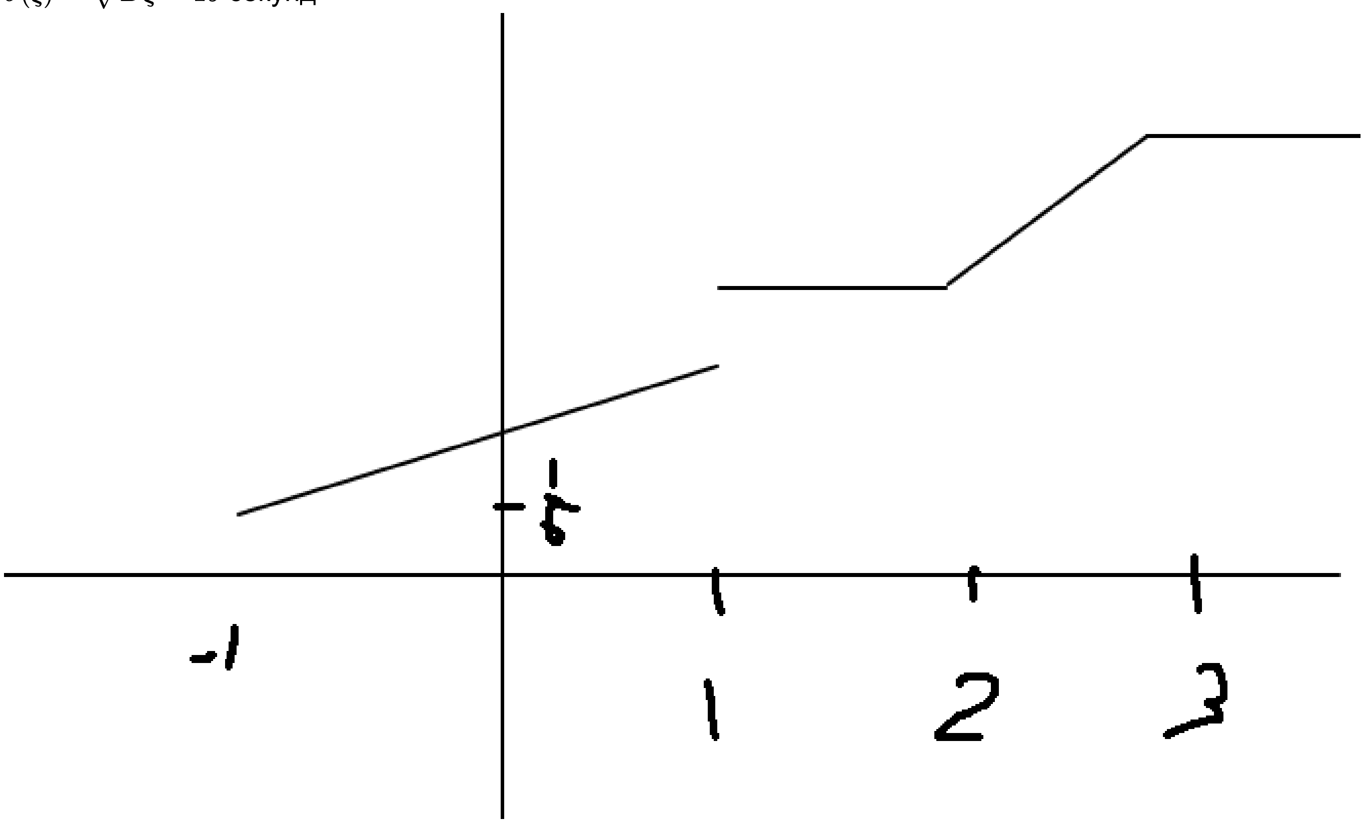
$$M\xi = \int_{\mathbb{R}} x dF_\xi(x)$$



$M\xi = 0 \cdot \frac{1}{2} + \int_0^{60} x \cdot \frac{1}{120} dx = 15$ секунд

$M\xi^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 dF_\xi(x) = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + \int_0^{60} x^2 \cdot \frac{1}{120} dx = 600$

$\sigma(\xi) = \sqrt{D\xi} \approx 19$ секунд



$M\xi = (-1) \cdot \frac{1}{6} + \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1}{6} dx + 1 \cdot \frac{1}{6} + \dots$

Другой пример - мат.ожидание канторовой лестницы.

$M(\xi + 1 - \xi) = 1 \Rightarrow M\xi = \frac{1}{2}$

$M\xi = \int_0^1 x dK(x) = \int_0^{\frac{1}{3}} xd\left(\frac{1}{2}K(3x)\right) + \int_{\frac{2}{3}}^1 xd\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}K(3x-2)\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{4}{3} dK(y) + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y + \frac{2}{3}\right) dK(y) = \frac{1}{3}M\xi + \frac{1}{3}$

Пример: $\xi \sim N(a, \sigma)$ $p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$ - стандартная Гауссовская случайная величина.

$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a + \sigma y) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = a + 0$

$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2\sigma^2 \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} yd\left(e^{\left(-\frac{y^2}{2}\right)}\right) =$

$= -\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(\cancel{ye^{-\frac{y^2}{2}}} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right)$

Законы распределения функции от случайной величины

$\left.\begin{matrix} \xi \sim p_\xi(x) \\ \eta = g(x) \end{matrix}\right] p_\eta(y) = ?$

Пример

$\eta = \xi$ $\xi \sim N(0,1)$ $p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Алгоритм:

1) $F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(g(\xi) < y) = \int_{g(x)<y} p_\xi(x)dx$

2) $p_\xi(y) = \frac{d}{dy} F_\eta(y)$

\begin{gather} F_{\xi ^2}(y)=P(\xi^2<y)=\begin{cases} y\leq 0 & =0 \\ y>0 & =P(-\sqrt{ y }<\xi<\sqrt{ y })=F_{\xi}(\sqrt{ y

Теорема 2

Если в условиях теоремы 1 g имеет l участков строгой монотонности, то

$$P_\eta(y) = \sum_{k=1}^{l} P_\xi(g_k^{-1}(y)|(g_k^{-1}(y))')$$

g_k соответствует k-му участку монотонности

Многомерные случайные величины

$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \dots \\ \xi^m \end{pmatrix}$ - случайная величина, если $\forall x^i \in \mathbb{R}$ $(\xi^i < x^i) \in \mathcal{A}$

$F_\xi(\vec{x}) = P(\xi^i < x^i)$

$(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}^m, F_{\vec{\xi}})$

$\vec{\xi}$ - абсолютно непрерывный вектор, если

$\exists p_{\vec{\xi}}(x) \geq_0$

$\int_{\mathbb{R}^m} p_{\vec{\xi}}(\vec{x})d\vec{x} = 1$ и

$$F_{\vec{\xi}}(x) = \int_{-\infty}^{x^1} \int_{-\infty}^{x^2} \dots \int_{-\infty}^{x^m} p_{\vec{\xi}}(\vec{y})d\vec{y}$$

Примеры:

1. Аналог ...

$\vec{\xi} \sim R(D), D \subset \mathbb{R}^m$

равномерное распределение в D

$p_\xi(\vec{x}) =$

2. Гауссовский случайный вектор

$$N(A, \Sigma)$$
$$A = \begin{pmatrix} a^1 \\ \dots \\ a^m \end{pmatrix}$$
$$\Sigma - \text{симметрическая непрерывная положительно определённая матрица}$$
$$\vec{\xi} - \text{Гауссовский вектор с параметрами } A, \Sigma \Leftrightarrow p_{\vec{\xi}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(X-A)^T\Sigma^{-1}(X-A)^2\right)$$

квадратичная форма

Пример

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$
$$P_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}((x+1)^2 - 2(x+1)(y-2) + 2(y-2)^2)\right)$$
$$\Sigma^{-1} = (\dots)$$

Теорема

Если $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ xi^2 \\ \dots \xi^m \end{pmatrix}$ - абсолютно непрерывный случайный вектор с плотностью $p_{\vec{\xi}}(\vec{x})$, то

$$p_{\xi^1}(x^1) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} p_{\vec{\xi}}(\vec{x}) dx^2 \dots dx^m$$
$$p_{\xi^1,\xi^2}(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^{m-2}} p_{\vec{\xi}}(\vec{x}) dx^3 \dots dx^m$$
$$m = 2$$
$$F_\xi(x) = F_{\xi\eta}(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi\eta}(u,v) dv\right) du$$
$$p_{\vec{\xi}}(\vec{x}) = \frac{d}{dx} F_{\xi\eta}(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi\eta}(\vec{x}, v) dv$$

Пример

$$(\xi, \eta) \sim R(D), D : x^2 + y^2 \le a^2$$
$$p_{\xi\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2}, & x^2 + y^2 \le a^2 \\ 0, & \dots \end{cases}$$
$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi\eta}(x,y) dy = \begin{cases} |x| \ge a & = 0 \\ |x| < a & = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{1}{\pi a^2} dx = \frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2 - x^2} \end{cases}$$

Закон полуэллипса

компоненты Гауссовского закона распределены по гауссовскому закону

Теорема (первое свойство Гауссовского закона)

Если $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \dots \\ \xi^m \end{pmatrix}$ - гауссовский вектор, то

Любая подпоследовательность $\left(\xi^1, \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^3 \end{pmatrix}\right)$ тоже гауссовская

$$m = 2$$
$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2}} \exp\left(-\frac{\sigma_{22}x^2 - 2\sigma_{12}xy + \sigma_{11}y^2}{2(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)}\right) dy =$$
$$= \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{11}}\right)}{2\pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma_{11}\left(y - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}x\right)^2}{2(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)}\right) d\left(y - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11}}x\right) \cdot \frac{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2}}{\sqrt{\sigma_{11}}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{11}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{11}}\right)$$