Учебники:
Тензорное счисление. Ю.И. Димитриенко издание 2001 года, синий учебник

Основы тензорного исчисления

10/02/2025

Тензорная алгебра. Пространство, сопряжённое с линейным пространством.
Правило расстановки индексов.
Объекты могут иметь нижние (ковариантные) индексы, верхние (контрвариантные) и смешанные (например δ^i_k)
Сравнивать, складывать, приравнивать можно только объекты с одинаковыми индексами (должно совпадать их число, обозначение и расположение (вверху/внизу)).

$$(a_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$(b_i) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$
$$a_i + b_i$$

Задание 2. Нахождение компонент матрицы при помощи формулы связи с компонентами других матриц в том же базисе.
В операциях умножения обычного (, скалярного и векторного, тензорного) повтооряющиеся индексы должны располагаться один вверху, один внизу.

$$x^i \epsilon_i = \sum_{i=1}^{3} x^i \epsilon_i = x^1 \epsilon_1 + x^2 \epsilon_2 + x^3 \epsilon_3$$

Пример.
Найти компоненты матрицы C^i, если $C^i = a^{ij} b_j$

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$(b_j) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$C^i = a^{ij} b_j$$
$$C^1 = a^{11}b_1 + a^{12}b_2 + a^{13}b_3 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 4$$
$$C^2 = a^{21}b_1 + a^{22}b_2 + a^{23}b_3 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 5$$
$$C^3 = a^{31}b_1 + a^{32}b_2 + a^{33}b_3 = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14$$

$$C^i = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$d^i = ?d^i = a^{ij} \cdot b_{jk} \cdot C^k$$
$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(b_{jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(C^k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$
$$d^i = a^{ij}(b_{j1}C^1 + b_{j2}C^2 + b_{j3}C^3) =$$
$$a^{ij}b_{j1}C^1 + a^{ij}b_{j2}C^2 + a^{ij}b_{j3}C^3 =$$
$$a^{i1}b_{11}C^1 + a^{i2}b_{21}C^1 + a^{i3}b_{31}C^1 +$$
$$a^{i1}b_{12}C^2 + a^{i2}b_{22}C^2 + a^{i3}b_{32}C^2 +$$
$$a^{i1}b_{13}C^3 + a^{i2}b_{23}C^3 + a^{i3}b_{33}C^3$$

$$d^i = a^{i1}(b_{11}C^1 + b_{12}C^2 + b_{13}C^3) +$$
$$a^{i2}(b_{21}C^1 + b_{22}C^2 + b_{23}C^3) +$$
$$a^{i3}(b_{31}C^1 + b_{32}C^2 + b_{33}C^3) =$$
$$a^{i1}(1 + 0 + 1 \cdot 7) + a^{i2}(3 + 7) + a^{i3}(1) =$$
$$8a^{i1} + 10a^{i2} + a^{i3} \Rightarrow (d^i) = \begin{pmatrix} 9 \\ 26 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Нахождение метрической матрицы некоторого базиса.

Фундаментальная матрица - это матрица, которая ищется следующим образом:

$g_{ij} = e_i \cdot e_j$

Базис ортогональный $\Leftrightarrow i \neq j \to e_i e_j = 0$

Ортонормированный $g_{ij} = \delta_{ij}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Метрическую матрицу можно найти через компоненты $\overline{Q}_i^j$

$e_i = \overline{Q}_i^j \overline{e}_j$

$$g_{ij} = e_i e_j = \overline{Q}_i^k \overline{e}_k \overline{Q}_j^l \overline{e}_l = \overline{Q}_i^k \overline{Q}_j^l \overline{e}_k \overline{e}_l = \overline{Q}_i^k \overline{Q}_j^l \delta_{kl}$$

$$e_i, \overline{Q}_i^j, \overline{e}_i$$

$$e_i = Q_i^j$$

$$Q_i^j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{11} = e_1 e_1 = 2$$

$$g_{12} = e_1 e_2 = 1$$

$$g_{13} = e_1 e_3 = 1$$

$$g_{21} = g_{12} = 1$$

$$g_{22} = e_2 e_2 = 1$$

$$g_{23} = e_2 e_3 = 1$$

$$g_{33} = e_3 e_3 = 2$$

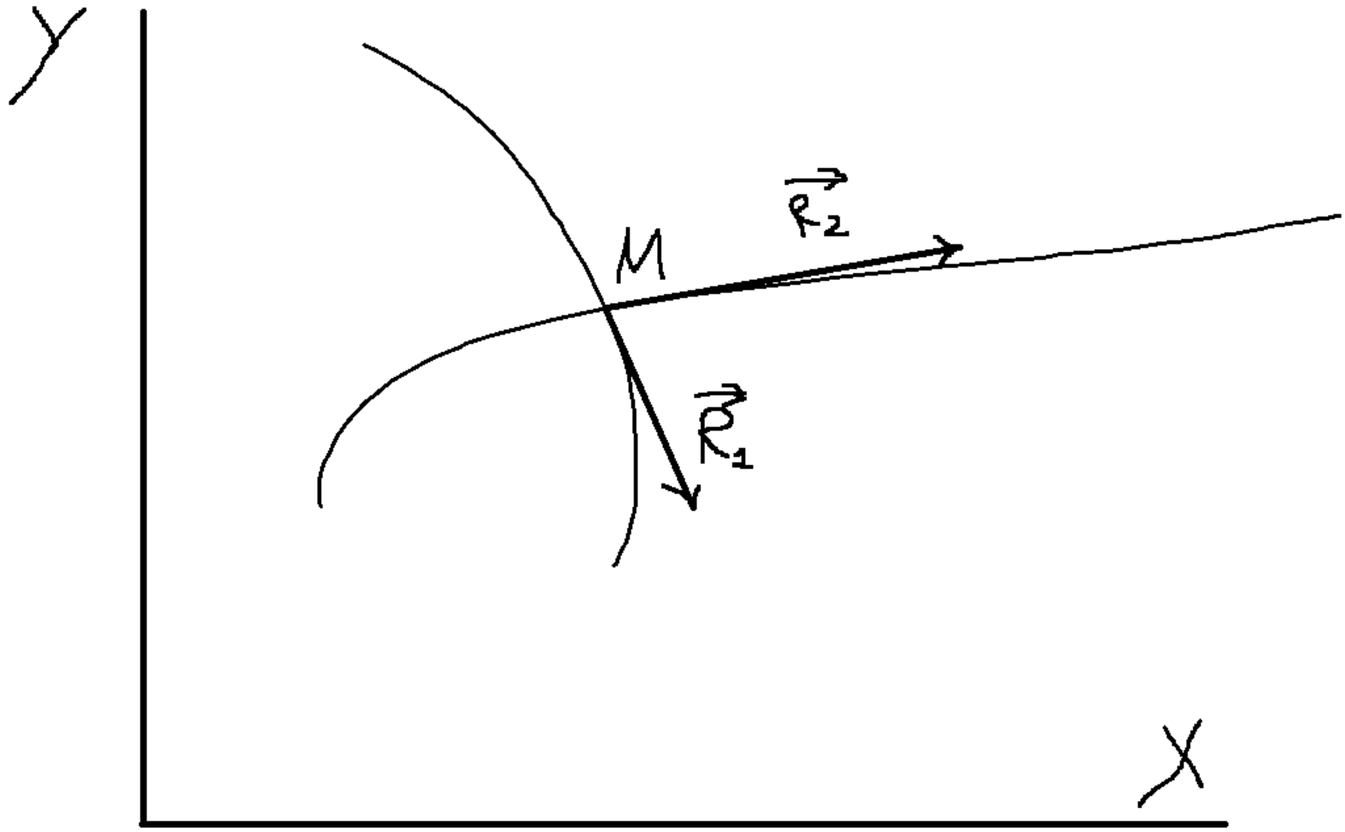
$$\Rightarrow (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g_{ij} = Q_i^k Q_j^l \delta_{kl} g_{11} = Q_1^k Q_1^l \delta_{kl} = Q_1^1 Q_1^1 \delta_{11} + Q_1^1 Q_1^2 \delta_{12} + Q_1^1 Q_1^3 \delta_{13} +$$
$$Q_1^1 Q_1^2 \delta_{21} + Q_1^2 Q_1^2 \delta_{22} + Q_1^2 Q_1^3 \delta_{23} +$$
$$Q_1^1 Q_1^3 \delta_{31} + Q_1^3 Q_1^2 \delta_{32} + Q_1^3 Q_1^3 \delta_{33} =$$
$$Q_1^1 Q_1^1 + + Q_1^2 Q_1^2 + Q_1^3 Q_1^3$$

$$g_{ij} = \sum_{n=1}^{3} Q_i^n Q_j^n$$

17/02/2025

Криволинейная система координат в точке M.



$$x^1 \equiv x,\ x^2 \equiv y$$
$$X^1 \equiv X,\ X^2 \equiv Y$$
$$\begin{cases} x^1 = x = X^2 + \frac{1}{Y} \\ x^2 = y = X - 2\ln Y \end{cases}$$
$M(X,Y) \to M(1,1)$ - криволинейные координаты точки
$$\vec{a} = \{1,-1\}$$
$$1) Q^I_J = \frac{\partial x^I}{\partial X^J}$$
$$Q^1_1 = \frac{\partial x}{\partial X} = 2X(M) = 2$$
$$Q^1_2 = \frac{\partial x}{\partial Y} = -\frac{1}{Y^2}(M) = -1$$
$$Q^2_1 = \frac{\partial y}{\partial X} = 1(M) = 1$$
$$Q^2_2 = \frac{\partial y}{\partial Y} = -\frac{2}{Y}(M) = -2 \implies$$
$$Q^I_J = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$Q = \det(Q^I_J) = -3$$
$$P^I_J = \frac{\partial X^I}{\partial x^J},\ P = Q^{-1}$$
$$P^I_J = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
$$P = -\frac{1}{3}$$
$$PQ = 1$$
$$P^I_J Q^J_K = \delta^I_K$$
$$P^1_J Q^J_1 = P^1_1 Q^1_1 + P^1_2 Q^2_1 = 1$$
$$P^1_J Q^J_2 = P^1_1 Q^1_2 + P^1_2 Q^2_2 = 0$$
$$P^2_J Q^J_1 = P^2_1 Q^1_1 + P^2_2 Q^2_1 = 0$$
$$P^2_J Q^J_2 = P^2_1 Q^1_2 + P^2_2 Q^2_2 = 1$$
Определить базисные орты
$$\vec{R}_J = Q^I_J \vec{e}_I$$
$$\begin{cases} \vec{R}_1 = Q^I_1 \vec{e}_I = Q^1_1 \vec{e}_1 + Q^2_1 \vec{e}_2 = 2\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 \\ \vec{R}_2 = Q^I_2 \vec{e}_I = Q^1_2 \vec{e}_1 + Q^2_2 \vec{e}_2 = -1\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 \end{cases}$$
Определить компоненты метрической матрицы
$$g_{IJ} = \vec{R}_I \cdot \vec{R}_J$$
$$\begin{cases} g_{11} = \vec{R}_1 \cdot \vec{R}_1 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5 \\ g_{12} = g_{21} = \vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2 = -2 - 2 = -4 \\ g_{22} = \vec{R}_2 \cdot \vec{R}_2 = 5 \end{cases}$$
$$g_{IJ} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$
$$g^{IJ} = (g_{IJ})^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

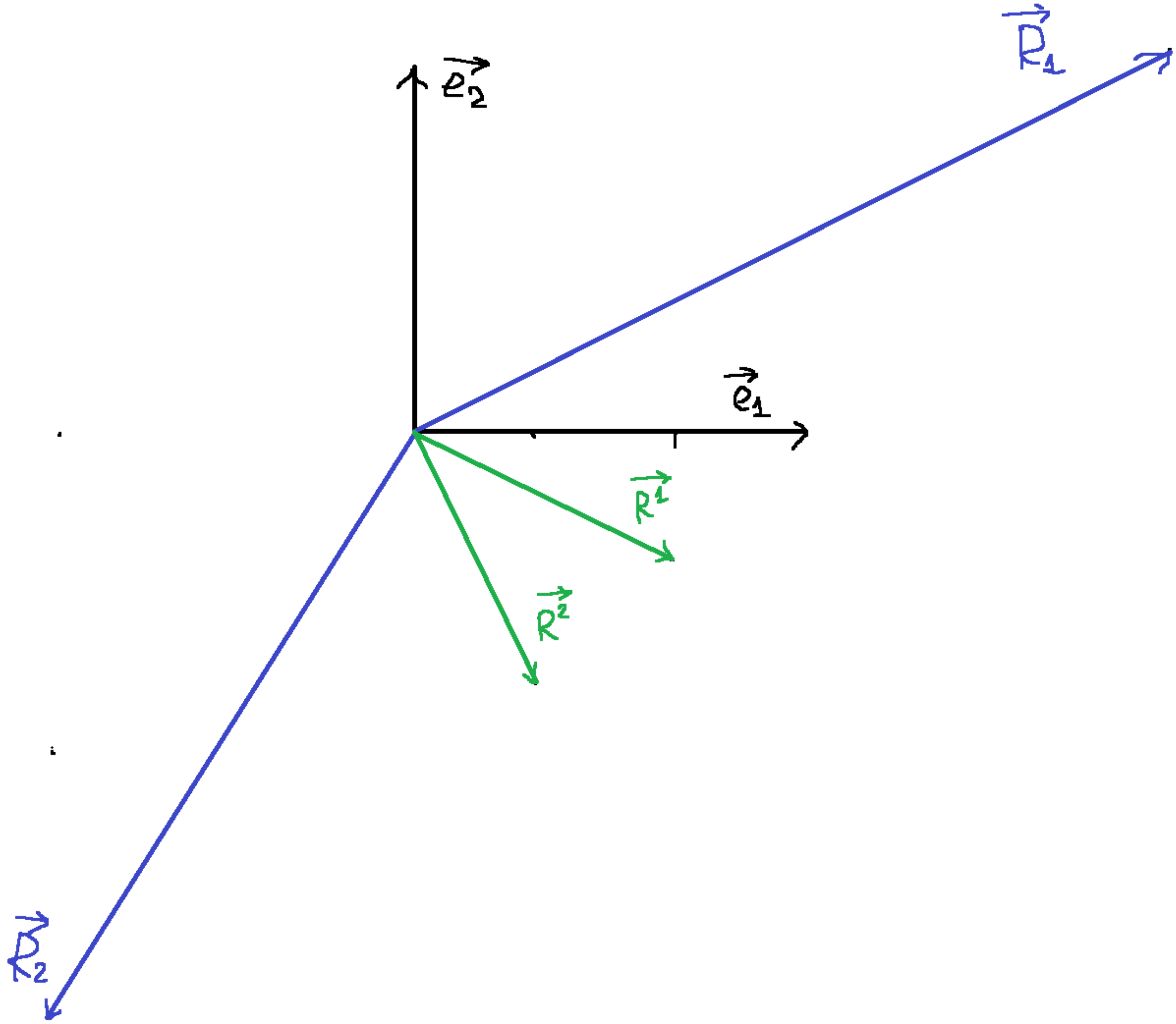
$$g^{IJ}g_{JK} = \delta^I_K$$

$$1)\vec{R}^I = g^{IJ}\vec{R}_J$$

$$\vec{R}^1 = g^{1J}\vec{R}_J = g^{11}\vec{R}_1 + g^{12}\vec{R}_2 = \frac{5}{9}\vec{R}_1 + \frac{4}{9}\vec{R}_2 = \frac{5}{9}(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \frac{4}{9}(-\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2) = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2$$

$$\text{Аналогично, } \vec{R}^2 = \frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_2$$

Рисунок на миллиметровке!



$$\vec{R}^I\vec{R}_J = \delta^I_J$$

$$\vec{R}^1\vec{R}_1 = \left(\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2\right)(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

$$\vec{a} = a^I\vec{e}_I,\ a^I = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a = a^I\vec{e}_I = a^I P^J_I \vec{R}_J = a_I Q^I_J \vec{R}^J$$

$$\text{Пусть } a = b^I\vec{R}_J = b_J\vec{R}^J \implies$$

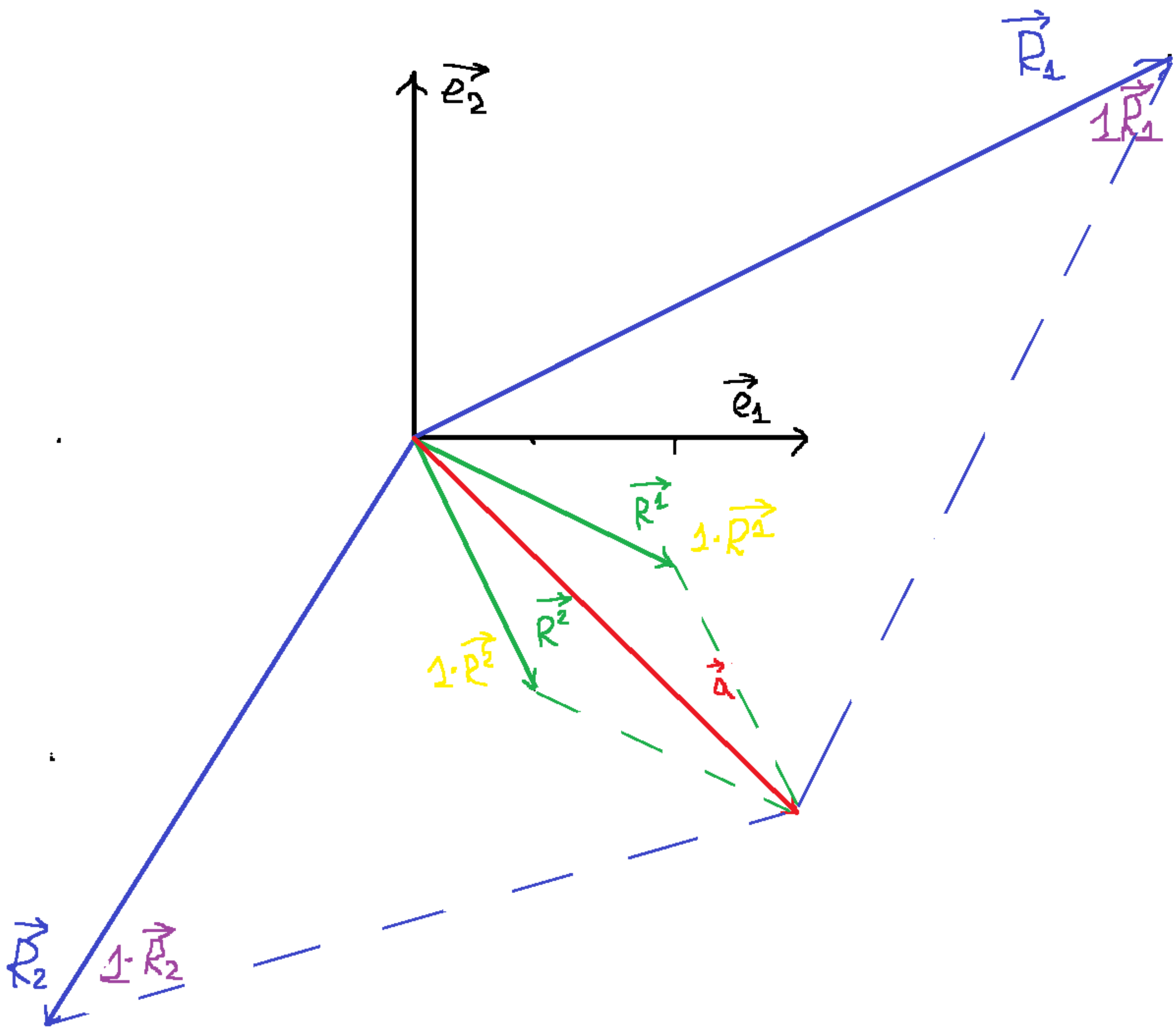
$$b^J = a^I P^J_I, b_J = a_I Q^I_J$$

$$b^I = P^I_J a^J$$

$$\begin{cases} b^1 = P^1_J a^J = P^1_1 a^1 + P^1_2 a^2 = \frac{2}{3}\cdot 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)(-1) = 1 \\ b^2 = P^2_J a^J = P^2_1 a^1 + P^2_2 a^2 = \frac{1}{3}\cdot 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)(-1) = 1 \\ b_1 = Q^I_1 a_I = Q^1_1 a_1 + Q^2_1 a_2 = 2\cdot 1 + 1(-1) = 1 \\ b_2 = Q^I_2 a_I = Q^1_2 a_1 + Q^2_2 a_2 = (-1)\cdot 1 + (-2)\cdot(-1) = 1 \end{cases}$$

$$\vec{a} = \vec{R}^1 + \vec{R}^2$$

$$\vec{a} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$$



$$g_{IJ} = Q^K_I Q^L_J \delta_{KL},\ g^{IJ} = P^I_K P^J_L \delta^{KL}$$

24/02/2025

2 раздел. 1 Пункт.

\begin{gather} \vec{R^I}\vec{R_{J}}=\delta^I_{J}\\ \vec{R^1}\vec{R_{1}}=\left(\frac{2}{3}\vec{e_{1}}-\

$$\begin{gathered} g_{ij} = \vec{R}_i \cdot \vec{R}_j, g^{ij} = \vec{R}^i \cdot \vec{R}^j \\ \vec{R}^i \cdot \vec{R}^j = (g^{ik}\vec{R}_k) \cdot (g^{jl}\vec{R}_l) = g^{ik}g^{jl}(\vec{R}_k \cdot \vec{R}_l) = \\ = g^{ik}(g^{jl}g_{kl}) = g^{ik}\delta^j_k = g^{ij} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \vec{R}_i = g_{ij}\vec{R}^i \\ \vec{R}_i = \delta^k_i \vec{R}_k = g_{ij}g^{ik}\vec{R}_k = g_{ij}\vec{R}^j \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} a^i = \vec{a} \cdot \vec{R}^i \\ \vec{a} \cdot \vec{R}^i = a_j\vec{R}_j \cdot \vec{R}_i = a_j\delta^j_i = a_i \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \vec{R}^i \cdot \vec{R}_j = \delta^i_j \\ \vec{R}^i \cdot \vec{R}_j = (\vec{R}_k g^{ik}) \cdot \vec{R}_j = g^{ik}\vec{R}_k \cdot \vec{R}_j = g^{ik}g_{jk} = \delta^i_j \\ \vec{R}^i \cdot \vec{R}_j = \vec{R}^i \cdot (g_{jk}\vec{R}^k) = g_{jk}\vec{R}^i \cdot \vec{R}^k = g_{jk}g^{ik} = \delta^i_j \end{gathered}$$

Переход от декартового базиса к криволинейному Vs от криволинейного к декартовому

$$\begin{gathered} \vec{R}_i = Q^j_i \vec{e}_j \Leftrightarrow \vec{e}_j = P^i_j \vec{R}_i \\ \vec{R}^i = P^i_j \vec{e}^j \Leftrightarrow \vec{e}^j = Q^j_i \vec{R}^i \end{gathered}$$

03/03/2025

Векторное произведение.

Векторное произведение $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Исправить дома

$$\vec{a}\times\vec{b}=\sqrt{g}\varepsilon_{ijk}a^i b^j \vec{R}^k=\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{lmn}a_l b_m \vec{R}_n$$

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}0, \text{есть совпадающие индексы}\\ 1, \text{чётная перестановка}\\ -1, \text{нечётная перестановка}\end{cases}$$

$$[\vec{e}_k,\vec{e}_l]=\varepsilon_{klm}\vec{e}_m$$

$$[\vec{e}_3,\vec{e}_2]=\varepsilon_{321}\vec{e}_1=-\vec{e}_1$$

$$[\vec{e}_k,\vec{e}_l]\cdot\vec{e}_n=\varepsilon_{klm}(\vec{e}_m\cdot\vec{e}_n) \text{ - смешанное произведение}$$

$$\varepsilon_{klm}(\vec{e}_m\cdot\vec{e}_n)=\sum\varepsilon_{klm}\delta_{mn}=?$$

$$\varepsilon_{ijk}=\big([\vec{e}_i,\vec{e}_j],\vec{e}_k\big)$$

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{vmatrix}\delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3}\\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3}\\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3}\end{vmatrix}$$

$$\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{B}\cdot\underbrace{\varepsilon^{lmn}}_{C}=\begin{vmatrix}\delta_i^l & \delta_i^m & \delta_i^n\\ \delta_j^l & \delta_j^m & \delta_j^n\\ \delta_k^l & \delta_k^m & \delta_k^n\end{vmatrix}$$

$$\det A=\det B\cdot\det C$$

$$\det(B\cdot C)=\det B\cdot\det C$$

$$\det(A^T)=\det A \implies$$

$$B\cdot C^T=\begin{pmatrix}\delta_i^1 & \delta_i^2 & \delta_i^3\\ \delta_j^1 & \delta_j^2 & \delta_j^3\\ \delta_k^1 & \delta_k^2 & \delta_k^3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\delta_l^1 & \delta_m^1 & \delta_n^1\\ \delta_l^2 & \delta_m^2 & \delta_n^2\\ \delta_l^3 & \delta_m^3 & \delta_n^3\end{pmatrix}$$

$$(B\cdot C^T)_1^1=\delta_i^1\delta_l^1+\delta_i^2\delta_{l2}+\delta_{i3}\delta_{l3}=\sum\delta_{ip}\delta_{lp}=\delta_{il}$$

Одинарная свёртка

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ilm}=\delta_j^l\delta_k^m-\delta_k^l\delta_j^m$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ilm}=\begin{vmatrix}\delta_i^i & \delta_i^l & \delta_i^m\\ \delta_j^i & \delta_j^l & \delta_j^m\\ \delta_k^i & \delta_k^l & \delta_k^m\end{vmatrix}=\delta_i^i\delta_j^l\delta_k^m+\delta_i^l\delta_j^m\delta_k^i+\delta_i^m\delta_j^i\delta_k^l-(\delta_i^m\delta_j^l\delta_k^i+\delta_i^i\delta_j^m\delta_k^l+\delta_i^l\delta_j^i\delta_k^m)=$$

$$=\cancelto{\cancelto{1}{3}}{\delta_i^i}\delta_j^l\delta_k^m+\cancel{\delta_k^l\delta_j^m}+\cancel{\delta_j^m\delta_k^l}-\cancel{\delta_k^m\delta_j^l}-\cancel{\delta_j^l\delta_k^m}-\cancelto{\cancelto{1}{3}}{\delta_i^i}\delta_j^m\delta_k^l=$$

$$=\delta_j^l\delta_k^m-\delta_j^m\delta_k^l$$

Двойная свёртка

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijl}=2\delta_k^l$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijl}=\delta_j^j\delta_k^l-\delta_k^j\delta_k^l=3\delta_k^l-\delta_k^l=2\delta_k^l$$

Тройная свёртка

\begin{gather} \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk}=6\\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk}=2\delta^k_{k}=2\cd

4.

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}a_i b_j \vec{R}_k = -\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{jik}b_j a_i \vec{R}_k = -\vec{b}\times\vec{a}$$

5.

$$\vec{R}^k = \frac{1}{2\sqrt{g}}\varepsilon^{nmk}\vec{R}_n\times\vec{R}_m$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\varepsilon^{nmk}\vec{R}_n\times\vec{R}_m =$$

$$\vec{R}_n = \delta_n^j \vec{R}_j$$

$$\vec{R}_m = \delta_m^i \vec{R}_i$$

$$= \frac{1}{2\cancel{\sqrt{g}}}\varepsilon^{nmk}\left(\cancel{\sqrt{g}}\underbrace{\varepsilon_{jil}\delta_n^j\delta_m^i}_{\varepsilon_{nml}}\vec{R}^l\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{nmk}\cdot\varepsilon_{nml}\vec{R}^l = \frac{1}{2}\cdot 2\delta_l^k\vec{R}^l = \vec{R}^k$$

$$\vec{R}_k = \sqrt{g}_2\varepsilon_{nmk}\vec{R}^n\times\vec{R}^m$$

$$\frac{\sqrt{g}}{2}\varepsilon_{nmk}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\underbrace{\varepsilon^{jil}\delta_j^n\delta_i^m}_{\varepsilon^{nml}}\vec{R}_l\right) =$$

$$\vec{R}^n = \delta_j^n\vec{R}^j$$

$$\vec{R}^m = \delta_i^m\vec{R}^i$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{nmk}\varepsilon^{nml}\vec{R}_l = \frac{1}{2}\cdot 2\delta_k^l\vec{R}_l = \vec{R}_k$$

6.

$$\vec{R}^i\times\vec{R}^j = \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}\vec{R}_k$$

$$\vec{R}^i = \delta_l^i\vec{R}^l$$

$$\vec{R}^j = \delta_m^j\vec{R}^m$$

$$\vec{R}^i\times\vec{R}^j = \frac{1}{\sqrt{g}}\underbrace{\varepsilon^{lmk}\delta_l^i\delta_m^j}_{\varepsilon^{ijk}}\vec{R}_k = \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}\vec{R}_k$$

7.

$$
\begin{gathered}
\vec{R}_i \times \vec{R}^i = \vec{0} \\
\vec{R}_i \times g^{ij}\vec{R}_j = g^{ij}\vec{R}_i \times \vec{R}_j = \\
\vec{R}_i = \delta_i^k \vec{R}_k \\
\vec{R}_j = \delta_j^l \vec{R}_l \\
= g^{ij}(\sqrt{g}\varepsilon_{klm}\delta_i^k\delta_j^l\vec{R}^n) = \\
= \sqrt{g}(\underbrace{g^{ig}\delta_i^k\delta_j^l}_{g^{kl}}) \cdot \varepsilon_{klm}\vec{R}^m = \\
= \sqrt{g}\, \cancelto{0}{g^{kl}\varepsilon_{klm}} \vec{R}^m = \vec{0}
\end{gathered}
$$

8.

$$
\begin{gathered}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{b} \\
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}a_i b_j\right)c_k = \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}a_i b_j c_k \\
(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}c_i a_j\right)b_k = \frac{1}{\sqrt{g}}a_j b_k c_i = \\
\dots \\
= \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{kij}a_i b_j c_k
\end{gathered}
$$

10/03/2025

$$
\begin{gathered}
\vec{a} \cdot \overleftrightarrow{T} = a^k\vec{R}_k \cdot (T^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j) = \\
\vec{a} = a^k\vec{R}_k \\
\overleftrightarrow{T} = T^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j \\
= a^k T^{ij}(\vec{R}_k \cdot \vec{R}_i) \otimes \vec{R}_j = a^k T^{ij} g_{ki}\vec{R}_j = \\
= \underbrace{a^k T_k{}^i}_{c^j}\vec{R}_j \\
\vec{b} = \overleftrightarrow{T} \cdot \vec{a} = (T^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j)(a^k\vec{R}_k) = \\
= T^{ij}a^k\vec{R}_i \otimes (\vec{R}_j \cdot \vec{R}_k) = T^{ij}a^k g_{jk}\vec{R}_i = \\
= \underbrace{T^{ij}a_j}_{b^i}\vec{R}_i
\end{gathered}
$$

$$
\overleftrightarrow{C} = \overleftrightarrow{A} \cdot \overleftrightarrow{B} = (A^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j)(B^{kl}\vec{R}_k \otimes \vec{R}_l) = A^{ij}B^{kl}g_{jk}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_l
$$

1. Показать, что $\vec{a} \cdot \overleftrightarrow{A} = \overleftrightarrow{A}^T \cdot \vec{a}$

   \begin{gather} \vec{a}=a^k\vec{R}_{k};\ \overleftrightarrow{A}=A^{ij}\vec{R}_{i}\otimes \vec{R}_{j

\end{gather}$$

Почему...

$$\left(\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{B}\right)^T = \overleftrightarrow{B}^T\,\overleftrightarrow{A}^T$$

$$\begin{gathered}
\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{B} = \left(A^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j\right)\left(B^{kl}\vec{R}_k \otimes \vec{R}_l\right) = A^{ij}B^{kl}g_{jk}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_l = A^{ij}B_j{}^l\vec{R}_i \otimes \vec{R}_l = \\
= C^{il}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_l \\
\left(\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{B}\right)^T = C^{li}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_l \\
\overleftrightarrow{B}^T\,\overleftrightarrow{A}^T = \left(B^{lk}\vec{R}_k \otimes \vec{R}_l\right)\left(A^{ji}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j\right) = \\
= B^{lk}A^{ji}g_{li}\vec{R}_k \otimes \vec{R}_j = A^{ji}B_i{}^k\vec{R}_k \otimes \vec{R}_j
\end{gathered}$$

Почему...

$$\overleftrightarrow{A}\left(\overleftrightarrow{B}\,\overleftrightarrow{C}\right) = \left(\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{B}\right)\overleftrightarrow{C}$$

$$\begin{gathered}
\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{B} = (A^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j)(B^{kl}\vec{R}_k \otimes \vec{R}_l) = A^{ij}B^{kl}g_{jk}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_l = \\
= A^{ij}B_j{}^l\vec{R}_i \otimes \vec{R}_l \\
(\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{B})\overleftrightarrow{C} = (A^{ij}B_j{}^l\vec{R}_i \otimes \vec{R}_l)(C^{mn}\vec{R}_m \otimes \vec{R}_n) = \\
= A^{ij}B_j{}^lC^{mn}g_{jm}\vec{R}_i \otimes R_n = B^{kl}C_l{}^n\vec{R}_k \otimes \vec{R}_n \\
\overleftrightarrow{A}(\overleftrightarrow{B}\,\overleftrightarrow{C}) = (A^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j)B^{kl}
\end{gathered}$$