Домашняя работа №1-2.

Метод наименьших квадратов и модели регрессии

Метод наименьших квадратов (МНК)

На практике часто встречается задача решения невырожденной «переопределённой» СЛАУ:

$$\boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} = {}^{>}\boldsymbol{b} \quad \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j^i x^j = b^i,\ i=\overline{1,m}\Big), \tag{1}$$

где $m > n$, $\boldsymbol{A} = (a_j^i)_n^m \in L(\mathbb{R}; n, m)$ – матрица размера $m \times n$ (m строк, n столбцов) и ранга $\mathrm{rk}(\boldsymbol{A}) = n$, ${}^{>}\boldsymbol{b} = [b^1,...,b^m\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^m$ – вектор-столбец правой части СЛАУ, являющийся вектором стандартного арифметического m-мерного евклидова пространства ${}^{>}\mathbb{E}^m$.

Поскольку СЛАУ (1) «переопределена» (число уравнений m больше числа переменных n), система (1), как правило, несовместна. Поэтому в качестве её МНК-решения выбирают вектор ${}^{>}\boldsymbol{u} = [u^1, u^2,...,u^n\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^n$, на котором достигается минимум функционала $F: {}^{>}\mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ вида:

$$F({}^{>}\boldsymbol{x}) = \left\|\boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} - {}^{>}\boldsymbol{b}\right\|_e^2 = (\boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} - {}^{>}\boldsymbol{b})^T \cdot (\boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} - {}^{>}\boldsymbol{b}) = {}^{<}\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} - 2\,{}^{<}\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}^T\,{}^{>}\boldsymbol{b} + {}^{<}\boldsymbol{b}\cdot{}^{>}\boldsymbol{b}, \tag{2}$$

где ${}^{<}\boldsymbol{b} = \langle b^1,...,b^m] = ({}^{>}\boldsymbol{b})^T$ и ${}^{<}\boldsymbol{x} = \langle x^1,...,x^n] = ({}^{>}\boldsymbol{x})^T$ – векторы-строки, получающиеся транспонированием векторов-столбцов ${}^{>}\boldsymbol{b} = [b^1,...,b^m\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^m$ и ${}^{>}\boldsymbol{x} = [x^1,...,x^n\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^n$, соответственно.

Теорема 2.1 (о МНК-решении невырожденной СЛАУ). Если матрица $\boldsymbol{A}$ СЛАУ (1) является невырожденной, т.е. $\mathrm{rk}(\boldsymbol{A}) = n$, то функционал $F: {}^{>}\mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$, определённый формулой (2), достигает своего минимума на единственном векторе ${}^{>}\boldsymbol{u} = argmin\{F({}^{>}\boldsymbol{x}) : {}^{>}\boldsymbol{x} \in {}^{>}\mathbb{E}^n\} \in {}^{>}\mathbb{E}^n$, который является решением *нормальной для СЛАУ (1) системой*:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\,{}^{>}\boldsymbol{b}.\blacktriangleright \tag{3}$$

Определение 2.1 (МНК-решения невырожденной СЛАУ). Если матрица $\boldsymbol{A}$ СЛАУ (1) является невырожденной, то вектор-решение нормальной для СЛАУ (1) системы (3) называется *МНК-решением СЛАУ* (1).►

Модель линейной регрессии

Модель линейной регрессии описывает зависимость регрессора $Y \in \mathbb{R}$ от значений некоторых k факторов $z_1,...,z_k \in \mathbb{R}$. Согласно модели линейной регрессии, эта зависимость имеет вид:

$$Y = x_*^0 + z_1 x_*^1 + ... + z_k x_*^k + \varepsilon, \tag{4}$$

где ${}^{>}\boldsymbol{x}_* = [x_*^0, x_*^1,..., x_*^k\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$ – неизвестный *вектор параметров тренда* $\breve{Y}$ *модели* (4), имеющего вид:

$$\breve{Y} = x_*^0 + z_1 x_*^1 + ... + z_k x_*^k \tag{5}$$

и $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ – *случайная составляющая модели* (4), являющаяся нормально распределённой случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и неизвестным среднеквадратичным отклонением σ.

Для оценки неизвестных вектора тренда ${}^{>}\boldsymbol{x}_* = [x_*^0, x_*^1, ..., x_*^k\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$ и параметра σ случайной составляющей модели линейной регрессии (4) проводится эксперимент, в котором измеряются $m > k+1$ значений $y^1, ..., y^m \in \mathbb{R}$ регрессора модели (4) для m различных наборов ${}^{<}\mathbf{z}^1 = \langle z_1^1, ..., z_k^1], ..., {}^{<}\mathbf{z}^m = \langle z_1^m, ..., z_k^m] \in {}^{<}\mathbb{R}^k$ k факторов модели (4). После этого рассматривается СЛАУ:

$$\begin{cases} x^0 + z_1^1 \cdot x^1 + ... + z_k^1 \cdot x^k = y^1 = \breve{y}^1 + \varepsilon^1; \\ .... \\ x^0 + z_1^m x^1 + ... + z_k^m x^k = y^m = \breve{y}^m + \varepsilon^m; \end{cases} , \tag{6}$$

где $\varepsilon^1, ..., \varepsilon^m$ – m независимых реализаций случайной величины $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ и $\breve{y}^i \in \mathbb{R}$ – значение неизвестного тренда модели для набора ${}^{<}\mathbf{z}^i = \langle z_1^i, ..., z_k^i] \in {}^{<}\mathbb{R}^k$ k факторов модели (4) ($i = \overline{1,m}$). Введём обозначения:

$${}^{>}\boldsymbol{x} = [x^0, x^1, ..., x^k\rangle = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^k \end{pmatrix} \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}, \ {}^{>}\boldsymbol{y} = [y^1, ..., y^m\rangle = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} \in {}^{>}\mathbb{E}^m, \tag{7'}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & z_1^1 & \cdots & z_k^1 \\ 1 & z_1^2 & \cdots & z_k^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & z_1^m & \cdots & z_k^m \end{pmatrix}. \tag{7''}$$

Согласно обозначениям (7), СЛАУ (6) запишется в виде:

$$\boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} = {}^{>}\boldsymbol{y}, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{A} \in L(\mathbb{R}; k+1, m)$ – матрица размера $m \times (k+1)$ (m строк, $k+1$ столбцов) и предполагается, что $m > k+1$ и $\mathrm{rk}(\boldsymbol{A}) = k+1$.

В качестве оценки неизвестного вектора ${}^{>}\boldsymbol{x}_* = [x_*^0, x_*^1, ..., x_*^k\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$ параметров модели линейной регрессии (4) выбирается вектор ${}^{>}\boldsymbol{u} = [u^0, u^1, ..., u^k\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$, являющийся МНК-решением СЛАУ (8), т.е. решение нормальной для СЛАУ (8) системы:

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\,{}^{>}\boldsymbol{y}. \tag{9}$$

Кроме того, компонента $\breve{Y}^i$ ($i = \overline{1,m}$) вектора

$${}^{>}\breve{\boldsymbol{Y}} = [\breve{Y}^1, ..., \breve{Y}^m\rangle = \begin{pmatrix} \breve{Y}^1 \\ \vdots \\ \breve{Y}^m \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{u} \in {}^{>}\mathbb{E}^m \tag{10}$$

представляет оценку значения тренда модели (4) на наборе $^{<}\mathbf{z}^i = \langle z_1^i,...,z_k^i] \in {}^{<}\mathbb{R}^k$ k её факторов и величина $\hat{\sigma}^2$, для которой

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m-k-1}\sum_{i=1}^{m}(y^i - \breve{Y}^i)^2 \,, \tag{11}$$

является несмещённой и состоятельной оценкой для дисперсии случайной составляющей $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ этой модели.

Замечание 2.1. Подпрограмма «Регрессия», расположенная в разделе «Анализ данных» программы Excel, позволяет получить доверительные интервалы уровня значимости 5% для каждой компоненты вектора параметров тренда модели линейной регрессии (4), используя СЛАУ (8). Может возникнуть ситуация, когда оценки некоторых компонент этого вектора на заданном уровне значимости не отличаются от нуля. Тогда ту из этих компонент, оценка которой наименее отличается от нуля (согласно *t*-статистике), можно считать нулевой, если доверительный интервал для оценки этой компоненты содержит значение нуль. В результате следует рассматривать новую редуцированную модель линейной регрессии, в которой регрессор зависит от меньшего количества факторов. Рекурсивно повторяя такое сокращение факторов модели, приходят к приведённой модели линейной регрессии, в которой регрессор зависит от минимального количества факторов.►

Модель полиномиальной регрессии

Модель полиномиальной регрессии описывает зависимость регрессора $Y \in \mathbb{R}$ от значений одного фактора $t \in \mathbb{R}$. Согласно модели полиномиальной регрессии, эта зависимость имеет вид:

$$Y = x_*^0 + t \cdot x_*^1 + ... + t^k \cdot x_*^k + \varepsilon \,, \tag{12}$$

где $^{>}\boldsymbol{x}_* = [x_*^0, x_*^1,..., x_*^k\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$ – неизвестный *вектор параметров тренда* $\breve{Y}$ *модели* (12), имеющего вид:

$$\breve{Y} = x_*^0 + t \cdot x_*^1 + ... + t^k \cdot x_*^k \,, \tag{13}$$

и $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ – *случайная составляющая модели* (12), являющаяся нормально распределённой случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и неизвестным среднеквадратичным отклонением σ.

Для оценки неизвестных вектора тренда $^{>}\boldsymbol{x}_* = [x_*^0, x_*^1,..., x_*^k\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$ и параметра σ случайной составляющей модели $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ линейной регрессии (12) проводится эксперимент, в котором измеряются $m > k+1$ значений $y^1,..., y^m \in \mathbb{R}$ регрессора модели (12) для m попарно различных значений $t_1,...,t_m \in \mathbb{R}$ единственного фактора модели (12). После этого рассматривается СЛАУ:

$$\begin{cases} x^0 + t_1^1 \cdot x^1 + ... + t_1^k \cdot x^k = y^1 = \breve{y}^1 + \varepsilon^1; \\ .... \\ x^0 + t_m^1 \cdot x^1 + ... + t_m^k \cdot x^k = y^m = \breve{y}^m + \varepsilon^m; \end{cases} , \tag{14}$$

где $\varepsilon^1,...,\varepsilon^m$ – m независимых реализаций случайной величины $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ и $\breve{y}^i \in \mathbb{R}$ – значение неизвестного тренда модели для значения $t_i \in \mathbb{R}$ фактора модели (12) ($i=\overline{1,m}$). Введём обозначения:

$$^{>}\boldsymbol{x} = [x^0, x^1,..., x^k\rangle = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^k \end{pmatrix} \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}, \ ^{>}\boldsymbol{y} = [y^1,..., y^m\rangle = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} \in {}^{>}\mathbb{E}^{m}, \tag{15'}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^k \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & t_m & \cdots & t_m^k \end{pmatrix}. \tag{15''}$$

Согласно обозначениям (15), СЛАУ (14) запишется в виде:

$$\boldsymbol{A}{}^{>}\boldsymbol{x} = {}^{>}\boldsymbol{y}, \tag{16}$$

где $\boldsymbol{A} \in L(\mathbb{R}; k+1, m)$ – матрица размера $m \times (k+1)$ (m строк, $k+1$ столбцов) и предполагается, что $m > k+1$. Поскольку значения $t_1,...,t_m \in \mathbb{R}$ – попарно различны, $\mathrm{rk}(\boldsymbol{A}) = k+1$ (в матрице $\boldsymbol{A}$ есть квадратная подматрица размера $(k+1)\times(k+1)$ с ненулевым определителем Ван-дер-Монда).

В качестве оценки неизвестного вектора $^{>}\boldsymbol{x}_* = [x_*^0, x_*^1,..., x_*^k\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$ параметров модели линейной регрессии (12) выбирается вектор $^{>}\boldsymbol{u} = [u^0, u^1,..., u^k\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$, являющийся МНК-решением СЛАУ (16), т.е. решение нормальной для СЛАУ (8) системы:

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}{}^{>}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T {}^{>}\boldsymbol{y}. \tag{17}$$

Кроме того, компонента $\breve{Y}^i$ ($i=\overline{1,m}$) вектора

$$^{>}\breve{\boldsymbol{Y}} = [\breve{Y}^1,...,\breve{Y}^m\rangle = \begin{pmatrix} \breve{Y}^1 \\ \vdots \\ \breve{Y}^m \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}{}^{>}\boldsymbol{u} \in {}^{>}\mathbb{E}^m \tag{18}$$

представляет оценку значения тренда модели (12) для значения $t_i \in \mathbb{R}$ единственного её фактора и величина $\hat{\sigma}^2$, для которой:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m-k-1}\sum_{i=1}^{m}(y^i - \breve{Y}^i)^2, \tag{19}$$

является несмещённой и состоятельной оценкой для дисперсии случайной составляющей $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ этой модели.

<u>ЗАДАНИЕ 1-2.1</u>

Дана модель линейной регрессии:

$$Y = x_*^0 + z_1 x_*^1 + z_2 x_*^2 + z_3 x_*^3 + z_4 x_*^4 + z_5 x_*^5 + z_6 x_*^6 + \varepsilon. \tag{20}$$

Для оценки неизвестных вектора тренда ${}^{>}\boldsymbol{x}_{*} = [x_{*}^{0}, x_{*}^{1}, ..., x_{*}^{k}\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$ и параметра σ случайной составляющей $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ модели линейной регрессии (20) проводился эксперимент, в котором получены $m = 20$ значений $y^{1}, ..., y^{m} \in \mathbb{R}$ (см. *Таблицы 2* и *3*) регрессора модели (20) для m различных наборов ${}^{<}\mathbf{z}^{1} = \langle z_{1}^{1}, ..., z_{6}^{1}], ..., {}^{<}\mathbf{z}^{m} = \langle z_{1}^{m}, ..., z_{6}^{m}] \in {}^{<}\mathbb{R}^{6}$ (см. *Таблицу 4*) шести факторов модели (20).

Требуется получить оценки вектора тренда ${}^{>}\boldsymbol{x}_{*} = [x_{*}^{0}, x_{*}^{1}, ..., x_{*}^{k}\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$ и параметра σ случайной составляющей $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ модели линейной регрессии (20). Если возможно, редуцировать модель регрессии (20) до приведённой модели. Результаты расчётов проиллюстрировать графически, сопроводив их необходимыми комментариями.▶

Таблица 2 (N – номер фамилии студента в журнале, $\alpha = 0$, n – номер группы)

i	N=1 $y+\alpha$	N=2 $y+\alpha$	N=3 $y+\alpha$	N=4 $y+\alpha$	N=5 $y+\alpha$	N=6 $y+\alpha$	N=7 $y+\alpha$	N=8 $y+\alpha$	N=9 $y+\alpha$	N=10 $y+\alpha$	N=11 $y+\alpha$
1	21,34	21,88	21,1	20,75	20,23	19,45	19,1	19,99	20,11	19,87	18,85
2	18,16	18,57	17,79	15,93	20,77	19,99	18,13	20,4	18,75	18,39	17,77
3	19,83	17,7	19,36	17,57	19,18	20,83	19,04	18,71	19,18	18,71	18,57
4	18,98	19,58	21,1	20,2	19,12	20,64	19,74	21,24	18,94	21,06	21,85
5	19,54	18,62	17,72	20,51	17,57	16,67	19,46	15,75	18,57	16,75	17,64
6	18,8	20,36	17,55	19,27	20,84	18,04	19,76	19,59	20,22	18,96	18,5
7	20,45	21,31	21,62	21,06	19,31	19,62	19,07	20,48	20,73	21,9	20,24
8	15,16	16,56	17,12	17,16	14,92	15,48	15,52	16,88	14,9	16,86	17,48
9	15,97	15,21	16,05	15,74	15,317	16,15	15,85	15,39	15,71	15,79	15,92
10	16,05	18,08	16,68	17,81	17,09	15,68	16,81	17,72	17,29	17,92	17,44
11	17,68	18,97	16,26	18,46	20,56	17,85	20,05	19,14	19,47	18,06	18,63
12	17,64	19	18,71	16,09	18,89	18,6	15,98	19,96	19,17	20,24	17,05
13	19,28	19,72	19,66	21,19	18,07	18,01	19,55	18,45	17,85	18,23	19,93
14	18,36	18,29	15,63	17,81	20,66	18,01	20,19	17,94	20,24	17,52	17,46
15	18,57	19,02	17,28	17,22	19,43	17,69	17,63	18,14	20,65	19,37	16,34
16	16,08	15,13	16,27	16,21	14,97	16,12	16,05	15,16	16,01	16,21	16,24
17	19,41	18,62	17,7	20,19	20,34	19,43	21,91	18,64	17,86	16,16	20,21
18	17,89	18,43	18,63	16,35	19,75	19,94	17,66	20,48	19,52	20,26	18,4
19	18,31	20,75	19,7	19,11	18,96	17,91	17,32	20,35	18,36	19,76	18,72
20	18,19	18,36	17,54	17,07	18,43	17,61	17,14	17,78	20,5	19,85	16,49

Таблица 3 (N – номер фамилии студента в журнале, $\alpha = 0$, n – номер группы)

i	N=12 $y+\alpha$	N=13 $y+\alpha$	N=14 $y+\alpha$	N=15 $y+\alpha$	N=16 $y+\alpha$	N=17 $y+\alpha$	N=18 $y+\alpha$	N=19 $y+\alpha$	N=20 $y+\alpha$	N=21 $y+\alpha$	N=22 $y+\alpha$
1	18,67	17,89	19,15	18,37	18,02	18,91	18,56	17,77	20,12	18,47	19,01
2	17,57	16,79	17,77	16,99	15,13	17,41	15,55	14,78	16,83	19,03	19,44
3	15,95	17,6	18,21	19,87	18,08	17,75	15,95	17,61	18,38	19,85	17,73
4	19,37	20,88	17,97	19,48	18,58	20,08	19,18	20,7	20,14	19,68	20,28
5	17,57	16,67	17,6	16,7	19,49	15,78	18,57	17,67	16,75	15,7	14,78
6	20,34	17,53	19,25	16,44	18,16	17,99	19,71	16,91	16,58	17,07	18,62
7	18,96	19,27	19,76	20,07	19,52	20,93	20,38	20,69	20,65	18,65	19,51
8	15,95	16,51	13,93	14,49	14,54	15,89	15,94	16,49	16,15	14,51	15,91
9	14,11	14,95	14,74	15,58	15,27	14,82	14,51	15,35	15,08	15,18	14,42
10	17,87	16,47	16,32	14,92	16,04	16,95	18,08	16,67	15,71	14,71	16,75
11	20,37	17,66	18,5	15,8	18	17,09	19,29	16,58	15,29	16,88	18,17

12	16,37	16,08	18,2	17,91	15,29	19,27	16,65	16,36	17,74	17,63	18,99
13	19,02	18,96	16,88	16,82	18,35	17,26	18,79	18,73	18,69	17,04	17,48
14	19,14	16,49	19,27	16,62	18,8	16,55	18,72	16,07	14,66	17,04	16,97
15	17,11	15,37	19,68	17,94	17,89	18,4	18,34	16,6	16,31	16,72	17,17
16	14,136	15,27	15,04	16,18	16,12	15,24	15,17	16,31	15,3	15,15	14,19
17	20,15	19,24	16,89	15,97	18,46	15,19	17,67	16,75	16,73	18,46	17,67
18	17,23	17,43	18,55	18,75	16,47	19,29	17,01	17,2	17,66	18,97	19,51
19	18,79	17,75	17,39	16,35	15,76	18,79	18,2	17,15	18,73	16,94	19,38
20	16,33	15,52	19,53	18,71	18,24	18,88	18,41	17,59	16,57	16,64	16,81

Таблица 4

i	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
1	1,158574	1,194067	1,745872	1,566271	1,825556	1,942503
2	1,238868	1,913419	1,182653	1,044649	1,304209	1,924039
3	1,564043	1,561357	1,070589	1,778954	1,226447	1,824122
4	1,737266	1,798975	1,952239	1,752281	1,247871	1,54796
5	1,364544	1,03122	1,380596	1,688101	1,987396	1,058504
6	1,535295	1,742973	1,580401	1,063356	1,999237	1,425459
7	1,780725	1,306711	1,972594	1,68627	1,582629	1,767235
8	1,135044	1,139164	1,686178	1,220069	1,034577	1,019745
9	1,246498	1,114597	1,079653	1,333415	1,054445	1,156743
10	1,416456	1,349223	1,68038	1,003235	1,471908	1,095523
11	1,611866	1,972991	1,443953	1,014008	1,91699	1,182531
12	1,520585	1,427992	1,464156	1,011505	1,108341	1,981536
13	1,229896	1,304392	1,852107	1,705496	1,725639	1,21482
14	1,726829	1,866756	1,074984	1,09888	1,983154	1,256935
15	1,77279	1,363353	1,227454	1,076754	1,656758	1,675253
16	1,418256	1,072481	1,123447	1,438917	1,059481	1,080325
17	1,119724	1,947356	1,372631	1,635578	1,94058	1,112827
18	1,728446	1,802332	1,365001	1,184759	1,119633	1,880032
19	1,161107	1,359294	1,956206	1,143406	1,49144	1,688437
20	1,963561	1,271859	1,250008	1,19367	1,466262	1,624409

ЗАДАНИЕ 1-2.2

Дана модель полиномиальной регрессии:

$$Y = x_*^0 + t \cdot x_*^1 + t^2 \cdot x_*^2 + t^3 \cdot x_*^3 + \varepsilon\,. \tag{21}$$

Для оценки неизвестных вектора тренда ${}^{>}\boldsymbol{x}_* = [x_*^0, x_*^1, x_*^2, x_*^3\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^4$ и параметра σ случайной составляющей $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ модели полиномиальной регрессии (21) проводился эксперимент, в котором получены $m = 20$ значений $y^1,\ldots,y^m \in \mathbb{R}$ (см. *Таблицы 5* и *6*) регрессора модели (21) для m попарно различных значений $t_1,\ldots,t_m \in \mathbb{R}$ (см. *Таблицу 7*) единственного фактора модели (21). Требуется получить оценки вектора тренда ${}^{>}\boldsymbol{x}_* = [x_*^0, x_*^1, x_*^2, x_*^3\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^4$ и параметра σ случайной составляющей $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ модели полиномиальной регрессии (21). Результаты расчётов проиллюстрировать графически, сопроводив их необходимыми комментариями.▶

Таблица 5 (N – номер фамилии студента в журнале, $\alpha = 0$, n – номер группы)

i	N=1 $y+\alpha$	N=2 $y+\alpha$	N=3 $y+\alpha$	N=4 $y+\alpha$	N=5 $y+\alpha$	N=6 $y+\alpha$	N=7 $y+\alpha$	N=8 $y+\alpha$	N=9 $y+\alpha$	N=10 $y+\alpha$	N=11 $y+\alpha$
1	4,763	-1,05	-2,09	1,047	3,142	-3,15	4,191	-4,19	-5,23	-6,27	8,37
2	4,821	-1,01	-2,01	1,004	3,012	-3,02	4,017	-4,02	-5,04	-6,03	8,04
3	4,886	-0,97	-1,93	0,964	2,892	-2,9	3,858	-3,86	-4,82	-5,77	7,7
4	4,958	-0,93	-1,85	0,927	2,781	-2,79	3,709	-3,71	-4,65	-5,57	7,43
5	5,038	-0,9	-1,78	0,892	2,676	-2,68	3,569	-3,57	-4,46	-5,35	7,14
6	5,127	-0,86	-1,72	0,858	2,574	-2,58	3,433	-3,43	-4,3	-5,15	6,86
7	5,225	-0,83	-1,65	0,825	2,474	-2,48	3,3	-3,3	-4,13	-4,95	6,6
8	5,334	-0,8	-1,58	0,791	2,373	-2,38	3,165	-3,16	-3,96	-4,75	6,33
9	5,454	-0,76	-1,51	0,756	2,269	-2,27	3,027	-3,03	-3,79	-4,54	6,05
10	5,585	-0,73	-1,44	0,72	2,16	-2,17	2,881	-2,88	-3,61	-4,32	5,76
11	5,729	-0,69	-1,36	0,681	2,043	-2,05	2,726	-2,72	-3,41	-4,09	5,45
12	5,886	-0,64	-1,28	0,639	1,917	-1,92	2,557	-2,56	-3,2	-3,83	5,11
13	6,057	-0,6	-1,19	0,593	1,779	-1,78	2,373	-2,37	-2,97	-3,56	4,74
14	6,243	-0,55	-1,08	0,542	1,626	-1,63	2,169	-2,17	-2,72	-3,25	4,34
15	6,444	-0,49	-0,97	0,486	1,457	-1,46	1,944	-1,94	-2,43	-2,91	3,89
16	6,662	-0,43	-0,85	0,423	1,269	-1,27	1,693	-1,69	-2,12	-2,54	3,38
17	6,897	-0,36	-0,71	0,353	1,06	-1,07	1,415	-1,41	-1,77	-2,12	2,83
18	7,149	-0,28	-0,55	0,276	0,828	-0,83	1,105	-1,1	-1,39	-1,66	2,21
19	7,42	-0,2	-0,38	0,19	0,57	-0,58	0,762	-0,76	-0,96	-1,14	1,52
20	7,71	-0,1	-0,19	0,095	0,285	-0,29	0,381	-0,38	-0,48	-0,57	0,76

Таблица 6 (N – номер фамилии студента в журнале, $\alpha = 0$, n – номер группы)

i	N=12 $y+\alpha$	N=13 $y+\alpha$	N=14 $y+\alpha$	N=15 $y+\alpha$	N=16 $y+\alpha$	N=17 $y+\alpha$	N=18 $y+\alpha$	N=19 $y+\alpha$	N=20 $y+\alpha$	N=21 $y+\alpha$	N=22 $y+\alpha$
1	8,199	-4,94	5,35	-5,529	7,213	-7,21	8,344	7,7	-1,85	1,77	5,25
2	7,989	-4,73	5,09	-5,269	6,903	-6,9	7,994	8,17	-1,83	1,64	5,09
3	7,789	-4,53	4,85	-5,029	6,623	-6,62	7,674	8,69	-1,78	1,52	4,93
4	7,599	-4,34	4,63	-4,809	6,363	-6,36	7,384	9,26	-1,74	1,41	4,78
5	7,419	-4,16	4,42	-4,599	6,123	-6,12	7,104	9,91	-1,71	1,3	4,64
6	7,259	-4	4,22	-4,399	5,883	-5,88	6,824	10,62	-1,67	1,2	4,5
7	7,089	-3,83	4,02	-4,199	5,653	-5,65	6,564	11,4	-1,64	1,1	4,37
8	6,919	-3,66	3,82	-3,999	5,413	-5,41	6,294	12,27	-1,61	1	4,23
9	6,749	-3,49	3,61	-3,789	5,173	-5,17	6,014	13,23	-1,57	0,89	4,1
10	6,569	-3,31	3,39	-3,569	4,923	-4,92	5,724	14,28	-1,54	0,79	3,95
11	6,369	-3,11	3,16	-3,339	4,643	-4,64	5,414	15,43	-1,5	0,67	3,8
12	6,159	-2,9	2,9	-3,079	4,353	-4,35	5,074	16,69	-1,45	0,54	3,63
13	5,929	-2,67	2,63	-2,809	4,033	-4,03	4,704	18,06	-1,41	0,4	3,44
14	5,679	-2,42	2,32	-2,499	3,673	-3,67	4,304	19,54	-1,36	0,25	3,24
15	5,389	-2,13	1,98	-2,159	3,273	-3,27	3,854	21,16	-1,3	0,08	3,01
16	5,079	-1,82	1,61	-1,789	2,843	-2,84	3,344	22,9	-1,24	-0,11	2,76
17	4,729	-1,47	1,19	-1,369	2,353	-2,35	2,794	24,77	-1,17	-0,33	2,48
18	4,349	-1,09	0,73	-0,909	1,813	-1,81	2,174	26,79	-1,09	-0,55	2,174
19	3,919	-0,66	0,21	-0,389	1,213	-1,21	1,484	28,96	-1,01	-0,8	1,83
20	3,439	-0,18	-0,36	0,181	0,543	-0,54	0,724	31,28	-0,91	-1,09	1,45

Таблица 7

i	t
1	0,00
2	0,05
3	0,10
4	0,15
5	0,20
6	0,25
7	0,30
8	0,35
9	0,40
10	0,45
11	0,50
12	0,55
13	0,60
14	0,65
15	0,70
16	0,75
17	0,80
18	0,85
19	0,90
20	0,95