Вариант 5, пункты б

1. Определить скорость v распространения волны в упругой среде, если разность фаз колебаний двух точек среды, отстоящих друг от друга на расстояние Δx, равна Δφ. Частота колебаний равна ω.

Дано:

$\Delta\varphi(\Delta x), \omega$

Найти:

v (распространения)

Решение:

$$\varphi = kx + \omega t + \varphi_0 \text{ - уравнение фазы волны}$$
$$k = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \text{const} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi\Delta x}{\Delta\varphi}$$
$$\text{Рассмотрим фронт волны: } \varphi = \text{const}$$
$$v = \frac{dx_{\text{фронта волны}}}{dt} = \text{const} \Rightarrow v = \frac{\lambda}{T}$$
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{const} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow$$
$$v = \frac{\lambda}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega\lambda}{2\pi} = \frac{2\pi\Delta x\omega}{2\pi\Delta\varphi} = \frac{\Delta x}{\Delta\varphi}\omega$$

Ответ: $v = \frac{\Delta x}{\Delta\varphi}\omega$

2. Газ находится в очень высоком цилиндрическом сосуде при температуре T . Считая поле тяжести однородным, найти среднее значение потенциальной энергии ⟨U ⟩ молекул газа. Масса одной молекулы m.

Дано:

$h \gg 1$ м

$T, \vec{g} = \overrightarrow{\text{const}}, m$

Найти:

$\langle U \rangle$

Решение:

Глупое решение:

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{mgh}{k_{\text{Б}}T}\right)$$
$$\langle U \rangle =$$

$$n = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{U_m}{k_Б T}\right) \text{ - функция распределения Больцмана}$$

h - проекция координаты частицы относительно "нулевой высоты"

$$\vec{g} = \overrightarrow{\text{const}} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{g} = \overrightarrow{\text{const}} \Rightarrow A = \int_{L:\widetilde{L_н L_к}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \int_{L:\widetilde{L_н L_к}} d\vec{l} = \vec{F}\vec{L} \Rightarrow$$

A зависит только от перемещения

$$U_m(h) = U_0 + A, \text{ где}$$

$U_0 -$ энергия "нулевой высоты"

A - работа силы тяжести по переносу частицы с "нулевой высоты" до h

$$A = \vec{F}\vec{L} = mgh$$

$$U_m = U_0 + mgh$$

$$U = n \cdot U_m$$

$$\langle U \rangle = \frac{1}{R}\int_0^R U(h)dh = \frac{1}{R}\int_0^R n_0 \exp\left(-\frac{U_0 + mgh}{k_Б T}\right)(U_0 + mgh)dh =$$

$$\int_0^R n_0 \exp\left(-\frac{U_0 + mgh}{k_Б T}\right)(U_0 + mgh)dh = n_0 \exp\left(-\frac{U_0}{k_Б T}\right)\int_0^R \exp\left(-\frac{mgh}{k_Б T}\right)(U_0 + mgh)dh =$$

$$\frac{mg}{k_Б T} = \lambda$$

$$= n_0 \exp\left(-\frac{U_0}{k_Б T}\right)\int_0^R U_0 \exp(-\lambda h) + mgh \exp(-\lambda h)dh =$$

$$= n_0 \exp\left(-\frac{U_0}{k_Б T}\right)\left(U_0 \int_0^R \exp(-\lambda h)dh - k_Б T \int_0^R -\lambda h \exp(-\lambda h)dh\right) =$$

$$= n_0 \exp\left(-\frac{U_0}{k_Б T}\right)\left(-\frac{U_0 \exp(-\lambda h)}{\lambda}|_0^R + \frac{k_Б T}{\lambda}\int_0^{-\lambda R} y e^y dy\right) =$$

$$= n_0 \exp\left(-\frac{U_0}{k_Б T}\right)\left(\frac{U_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda R}) + \frac{k_Б T}{\lambda}(e^y(y-1))|_0^{-\lambda R}\right) =$$

$$= n_0 \exp\left(-\frac{U_0}{k_Б T}\right)\left(\frac{U_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda R}) + \frac{k_Б T}{\lambda}(e^{-\lambda R}(e^{-\lambda R} - 1) + 1)\right)$$

$$= \frac{1}{R} n_0 \exp\left(-\frac{U_0}{k_Б T}\right)\left(\frac{U_0}{\lambda} + \frac{k_Б T}{\lambda}\right)$$

Ответ: