Теорвер и Матстат Севастьянова Бориса Николаевича (мат стат нет),
13/02/2025
Задача де Мере
Сколько раз нужно подбросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью хотя бы $\frac{1}{2}$ выпало 6+6?

Колмогоровский подход

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$
Ω - множество элементарных исходов,
$\mathcal{A}$ - система подмножеств Ω, является σ-алгеброй.
Элементы $\mathcal{A}$ - события.
$\omega \in \Omega$ - элементарный исход.
Если $\omega \in A$ - ω благоприятствует A
$\varnothing$ - невозможное событие.
Ω - достоверное событие
$A \subset B$ - событие A влечёт событие B
$A \backslash B$ - разность событий
$A + B = A \cup B$ - сумма собыьтий
$A \cdot B = A \cap B$

P - мера на $\mathcal{A}$, из аксиоматики колмогорова:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A+B) = P(A) + P(B)$ - A и B называются независимыми.
   Примеры:
   Классическая вероятностная модель:

$$\Omega \in X \ - \ \text{Конечное множество}$$
$$\mathcal{A} = 2^X \ - \ \text{система всех подмножеств}$$
$$P(A \in \Omega) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{Общее число исходов}}$$

   Пример, поясняющий пример:

$$\Omega = \{(i, j), \substack{i = \overline{1, 6} \\ j = \overline{1, 6}}\}$$

   Задача де Мере
   n - подбрасываемая

$$\Omega = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_{36}, j_{36})\}$$
$$|\Omega| = 36^n$$
$$A = \{\text{Хотя бы 1 раз выпало 6+6}\}$$
$$\overline{A} = \Omega \backslash A \ - \ \text{Противоположное событие}$$
$$\Omega = \overline{A} + A$$
$$\overline{A} = \{\text{Ни разу не выпало 6+6}\}$$
$$|\overline{A}| = 35^n$$
$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$$
$$P(\overline{A}) = \left(\frac{35}{36}\right)^n$$
$$\left(\frac{35}{36}\right)^n < \frac{1}{2}$$
$$n \ln\left(\frac{35}{36}\right) < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$n > \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{35}{36}\right)} \approx 24, \dots$$

Вычисление вероятностей в класс схеме - комбинаторная задача

Правила комбинаторики:

1. Правило суммы.

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow \# A \cup B = \# A + \# B$$

2. Правило произведения.

$$\# A \times B = \# A \cdot \# B$$

1. Перестановки в множестве с мощностью n:

$$P_n = n!$$

2. Размещения на m мест в множестве с мощностью n:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

3. Сочетания из n элементов по m мест

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k+1}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

4. Имеются элементы n типов

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$$
$$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n}$$

5. Размещения с повторениями

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

6. Сочетания с повторениями

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Пример:

$$\text{Имеется n неразличимых шаров, m различимых ящиков, так чтобы все ящики были заняты}$$
$$n \le m$$
$$\cdots | \cdot\cdot | \cdot | \cdot\cdot\cdot\cdot | \cdot$$
$$\text{n-1 граница разделит точки на n частей}$$

Модель геометрической вероятности

$$\Omega \ - \ \text{Измеримая геометрическая фигура} \to \exists \ \text{mes}(\Omega)$$
$$\mathcal{A} \ - \ \text{измеримые подмножества}$$
$$P(A \in \mathcal{A}) = \frac{\text{mes}(A)}{\text{mes}(\Omega)}$$

Основные теоремы вероятности

7. $A \subset B \Rightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$ (См 3 аксиому и определение разности)
8. $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$ - P - это мера
9. $\forall A \ \ 0 \le P(A) \le 1$ т.к. $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \le P(\Omega) = 1$
10. Теорема сложения: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ - это мера
11. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ (см 1 св-во)
12. Теорема непрерывности: $B_{n+1} \subset B_n \subset \dots \subset B_2 \subset B_1 \wedge \cap_i B_i = \varnothing \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$ - это мера

20/02/2025

Примеры вероятностных моделей.

Класс модель $\to$ Гипергеометрическая модель

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω - конечное множество

$\mathcal{A}$ - все подмножества

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

n_1 - предметов 1 типа

n_2 - предметов 2 типа

Выберем m прдеметов без возвращения $m \leq n_1, m \leq n_2$

A_k - среди вынутых предметов $k\ -$ 1-го типа, $(m-k) -$ 2-го типа.

$|A_k| = C_{n_1}^k - C_{n_2}^{m-k}$

$C_{n_1}^k$ - выбрано предметов 1 типа

$$P(A_k) = \frac{C_{n_1}^k C_{n_2}^{m-k}}{C_{n_1+n_2}^m}$$

Обощение

Имеются предметы l типов в количетсвах $n_1, n_2, \ldots, n_l$ выберем m предметов.

$$P(A_{k_1, k_2, \ldots, k_l}) = \frac{C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} \cdots C_{n_l}^{k_l}}{C_{n_1+n_2+\cdots+nl}^m}$$

Модель геометрических вероятностей.

Геометрическая вероятность.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω - измеримое множество

$\mathcal{A}$ - измеримые подмножества

$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

Пример:

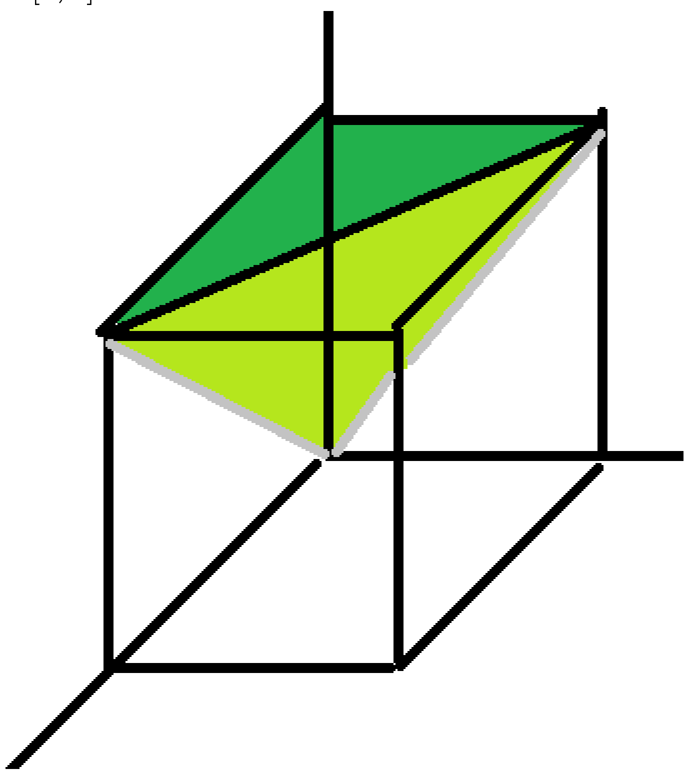
Датчик случаёных чисел.

Запускаем его 3 раза. Получаем 3 числа: $x,\ y,\ z\ \in [0,1]$

$P(z > x + y) = ?$

$\omega = (x, y, z) -$ точка

$\Omega = [0, 1]^3$



$$P(z > x + y) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}$$

Парадокс Бертрана

В круге наугод выбирается хорда x. $P(x > R\sqrt{3}) =?$

Парадокс в том, что в зависимости от способа выбора случайной хорды, ответ меняется.

Первый способ:

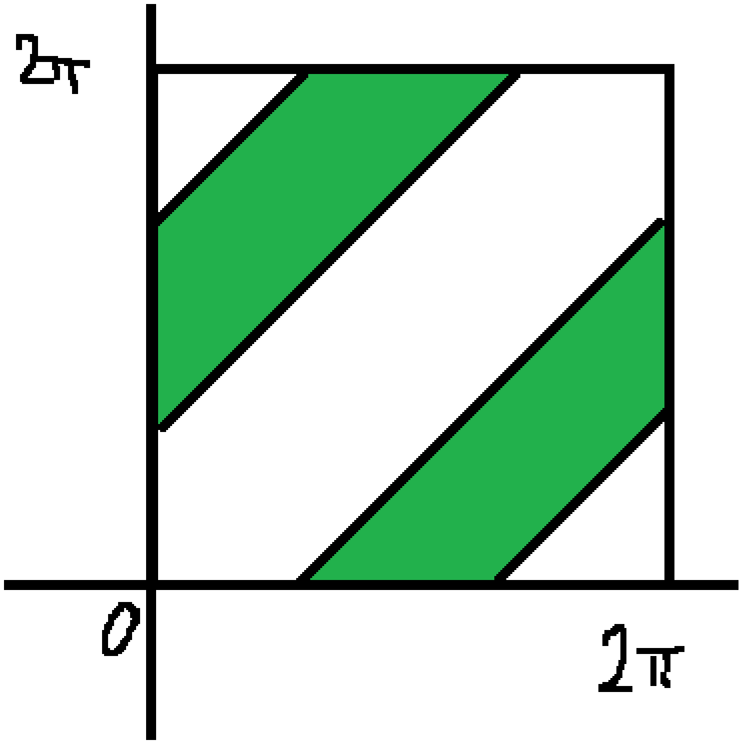
A - произвольная точка.

B - произвольная точка

$x = [A, B]$

$\Omega = [0, 2\pi]^2$

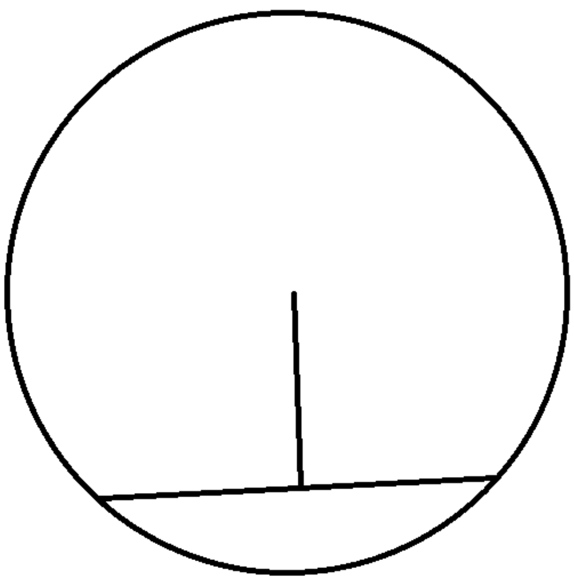
$$\frac{2\pi}{3} < |x - y| < \frac{4\pi}{3}$$

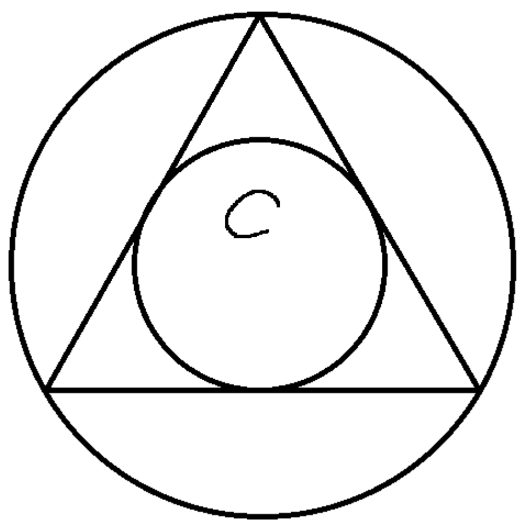


$$P(x > R\sqrt{3}) = \frac{S(C)}{S(\Omega)} = \frac{S(C)}{(2\pi)^2}$$

Второй способ:

Хорда отождествляется с её серединой





$$P(C) = \frac{S(C)}{S(\Omega)} = \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{(2\pi)^2} = \frac{1}{4}$$

Третий способ:

Хорда на диаметре.

Абсолютно непрерывная вероятностная модель

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$
$\Omega = \mathbb{R}$
$\mathcal{A} = B$ - борелевская σ-алгебра

1. $P(A) = \int_A p(x)dx$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$
3. цел: $p(x) \geq 0$

   Пример: гауссовская плотность

$$P_{a.\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{a,\sigma}(x)dx = \begin{vmatrix} \frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = y \\ dx = dy\sigma\sqrt{2} \end{vmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{8\pi}\sigma} e^{-y^2}\sigma\sqrt{2}dy = 1$$

$$\int_{b_1}^{b_2} p_{a,\sigma}(x)dx = \begin{vmatrix} \frac{x-a}{\sigma} = y \\ dx = \sigma dy \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{b_1-a}{\sigma}}^{\frac{b_2-a}{\sigma}} e^{-y^2}dy = \varphi\left(\frac{b_2-a}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{b_1-a}{\sigma}\right)$$

Условные вероятности.

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Пояснение: n опытов, фиксируем события A.
n_A - наступило А
n_B - наступило В
n_{AB} - наступило А и В

$$\frac{n_A}{n} \approx P(A)$$
$$\frac{n_{AB}}{n_B} \approx P(A|B)$$
$$\frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}} \approx \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Формула умножения

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Пример
В урне имеется a белых и b чёрных шаров. Вынимаем 2 шара. Вычисляем вероятность того, что оба вынутых шара белые.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{C_{a+b}^2}{C_{a+b}^2} = \frac{a! \cdot 2! \cdot (a+b-2)!}{(a-2)! \cdot 2!(a+b)!} = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$

Событие равносильно следующей совокупности событий:

Достали белый шар, а потом достали второй белый шар

$$P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1}$$

Условное вероятностное пространство

$B, P(B) > 0$

$(\Omega, \mathcal{A}, P) \to (B, \mathcal{A}_B, P_B)$

$\mathcal{A}_B = \mathcal{A} \cap B$ - сужение алгебры $\mathcal{A}$ на B.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} \geq 0$$

$$P_B(B) = 1$$

$$A_1 \cap A_B = \varnothing$$
$$P_B(A_1 + A_2) = \tfrac{P((A_1+A_2)B)}{P(B)} = \tfrac{P(A_1B+A_2B)}{P(B)} = \tfrac{P(A_1B)+P(A_2B)}{P(B)} = P_B(A_1) + P_B(A_2)$$

Теорема умножения

$P(A_1, A_2, \ldots, A_n) > 0 \implies$

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_{n-1} \ldots A_3A_2A_1)$$

Формулы полной вероятности и Байеса

$$H_1, H_2, \ldots, H_l \text{ - полная группа событий} \Leftrightarrow$$
$$P(H_i) > 0$$
$$H_i \cap H_j = \delta_{ij}$$
$$\sum_i H_i = \Omega$$

Теорема о полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{l} P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

$$A = A\Omega = A \sum_i H_i = \sum_i AH_i$$

Пример:

5 белых и 3 черных шара

вынимаем 1 шар и перекладываем в корзину с 2 белыми и 2 черными шарами

Вынимаем шар, какой цвет?

$$H_1 \text{ - переложен белый}$$
$$H_2 \text{ - переложен чёрный}$$
$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{21}{40}$$

$$\mathcal{H} = \{H_i\} \text{ - полная группа событий}$$
$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{i=1}^{l} P(A|H_i) \cdot P(H_i)}$$
$$P(H_i) \text{ - априорные вероятности}$$
$$P(H_i|A) \text{ - апостериорные вероятности}$$

МК1

$$\text{7 белых, 5 черных, 4 красных}$$
$$7 + 5 + 4 = 16$$
$$\frac{4}{16} + \frac{12}{16} \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{15} < \frac{1}{2}$$
$$\frac{5}{16} + \frac{11}{16} \cdot \frac{5}{15} = \frac{15}{48} + \frac{11}{48} = \frac{26}{48} > \frac{24}{48}$$