13/02/2025

Уравнение второго порядка от 2 переменных
Уравнение, линейное относительно старших производных:
Линейное уравнение второго порядка:

b_1	u_x
b_2	u_y
a_{11}	u_{xx}
$2a_{12}$	u_{xy}
a_{22}	u_{yy}

Убедиться, что результат будет линейным

$$A_{11}u_{\xi\xi} + 2A_{12}u_{\xi\eta} + A_{22}u_{\eta\eta} + B_1u_\xi + B_2u_\eta = F$$

$$A_{11} = 0 \Leftrightarrow a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0$$
$$\xi(x,y)\ -\ \text{частное решение} \implies \dots$$

Утверждение 1

$$\xi(x,y)\ -\ \text{частное решение} \Leftrightarrow \xi(x,y) = C\ -\ \text{Общий интеграл следующего ОДУ:}$$
$$\text{ОДУ: } a_{11}dy^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}dx^2 = 0$$

Доказательство:

$$\Rightarrow)\ a_{11}\left(-\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\xi_x}{\xi_y}\right) + a_{22} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y}|_{y=y(x,C)}\ -\ \text{Производная неявной функции}$$
$$\Leftarrow)\ \xi(x,y) = C\ -\ \text{Общий интеграл}$$
$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} =$$
$$= a_{11}\left(-\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 - 2a_{12}\cdot -\frac{\xi_x}{\xi_y} + a_{22} = 0$$

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0\ -\ \text{Характеристическое уравнение}$$
$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$
$$\text{Решение интегральных уравнений будем называть характеристиками}$$
$$\xi(x,y) = C \text{ и } \eta(x,y) = C\ -\ \text{независимые} \implies$$
$$\Delta > 0\ -\ \text{гиперболическое}$$
$$\Delta = 0\ -\ \text{параболическое}$$
$$\Delta < 0\ -\ \text{эллиптическое}$$

Задача: Доказать, что

$$A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

1. Гиперболические уравнения

$$a_{11}u_{xx} + F(x, u, \dots) = 0$$

$$a) u_{\xi\xi} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0, \tilde{F} = -\frac{F}{2A_{12}}$$

$$б) \begin{cases} \xi = \alpha + \beta \\ \eta = \alpha - \beta \end{cases}, \begin{cases} \alpha = \frac{\xi+\eta}{2} \\ \beta = \frac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$$

$$u_\xi = u_\alpha \alpha_\xi + u_\beta \beta_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta)$$

$$u_\eta = \dots = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta)$$

$$u_{\xi\eta} = \dots = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$$

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + G(\alpha, \boldsymbol{\beta}, \dots) = 0$$

Доказать, что $A_{22} = 0$

2) Параболические уравнения

$$\begin{cases} \xi(x, y) = C \\ \eta(x, y) = C \ - \ \text{независима от } \xi \end{cases}$$

$$\text{Доказать: } A_{11} = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0$$

$$A_{12} = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0$$

$$A_{22} = \dots$$

$$u_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0, \tilde{F} = -\frac{F}{A_{22}}$$

3. Эллиптические уравнения

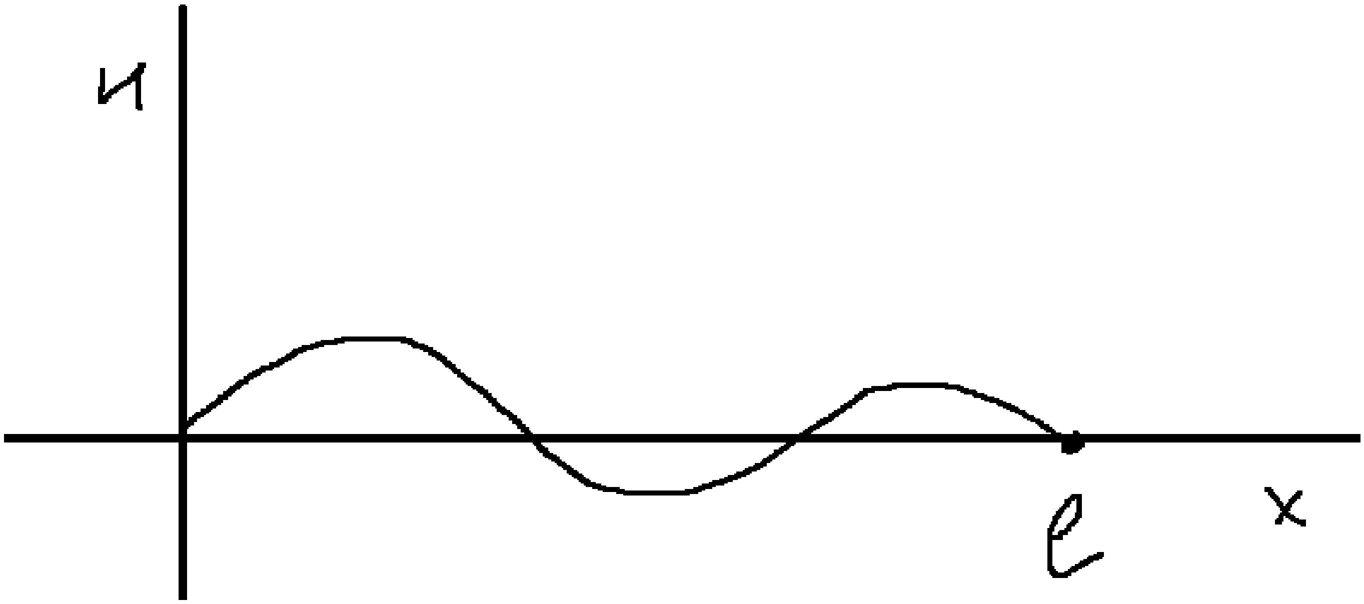
$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + F(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0$$

20/02/2025

Уравнение колебаний на отрезке. Метод разделения переменных

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \ 0 < x < l, t > 0, \\ \text{Граничные условия} \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$f(x, t)$ - плотность мощности воздействия на струну



Перейдём к вспомогательной задаче. Будет искать её решение в виде $z(x,t) = T(t)X(x)$

$$\begin{cases} z_{tt} = a^2 z_{xx}, \ \ 0 < x < l, t > 0 \\ z|_{x=0} = z|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$T''X = a^2 T X''$$

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad T(t)X(0) = T(t)X(l) = 0$$

$$\begin{cases} -X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

X - нетривиальное решение

$$-\frac{d^2}{dt^2} : X \to -X''$$

1) Априорная оценка знака λ

$$\mathcal{A} : L \to L$$

$$\mathcal{A} \subseteq L$$

$-\dfrac{d^2}{dx^2}$ - дважды непрерывно дифференцируемый оператор

$$-X'' - \lambda X = 0$$

$$\int_0^l (-X''X - \lambda X^2) dx = 0$$

$$\cancelto{0}{-X'X|_0^l} + \int_0^l (X')^2 dx - \lambda \int_0^l X^2 dx = 0$$

$$\int_0^l (X')^2 dx - \lambda \int_0^l X^2 dx = 0,$$

Теорема о сохранении знака непрерывной функции:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : 0 < |x - x_0)| < \delta \Rightarrow |x^2(r) - x_0^2| < \varepsilon$$

$$\implies \int_0^l X^2 dx > 0 \implies \lambda \geq 0$$

Пусть $\lambda = 0 \implies$

$\displaystyle\int_0^l (x')^2 dx = 0 \implies X'(x) = 0 \Rightarrow X = C \Rightarrow X = 0$ - тривиальное решение

Где-то в решении использовалась теорема Гильберта-Шмидта

$$\lambda > 0 :$$

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x, \ A^2 + B^2 \neq 0$$

$$X(0) = A = 0 \Rightarrow B \neq 0$$

$$X(l) = B \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \implies$$

$$\lambda = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$X(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \ n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x),$$

Проверить систему на ортогональность:

$$\int_0^l \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) = C \cdot \delta_m^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'' X_n = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n X_n'' + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) \sim \varphi(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x) \sim \psi(x)$$

$$\begin{cases} T_n'' + a^2 \lambda_n T_n = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_n(0) = \varphi_n \\ T_n'(0) = \psi_n \end{cases}$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx$$

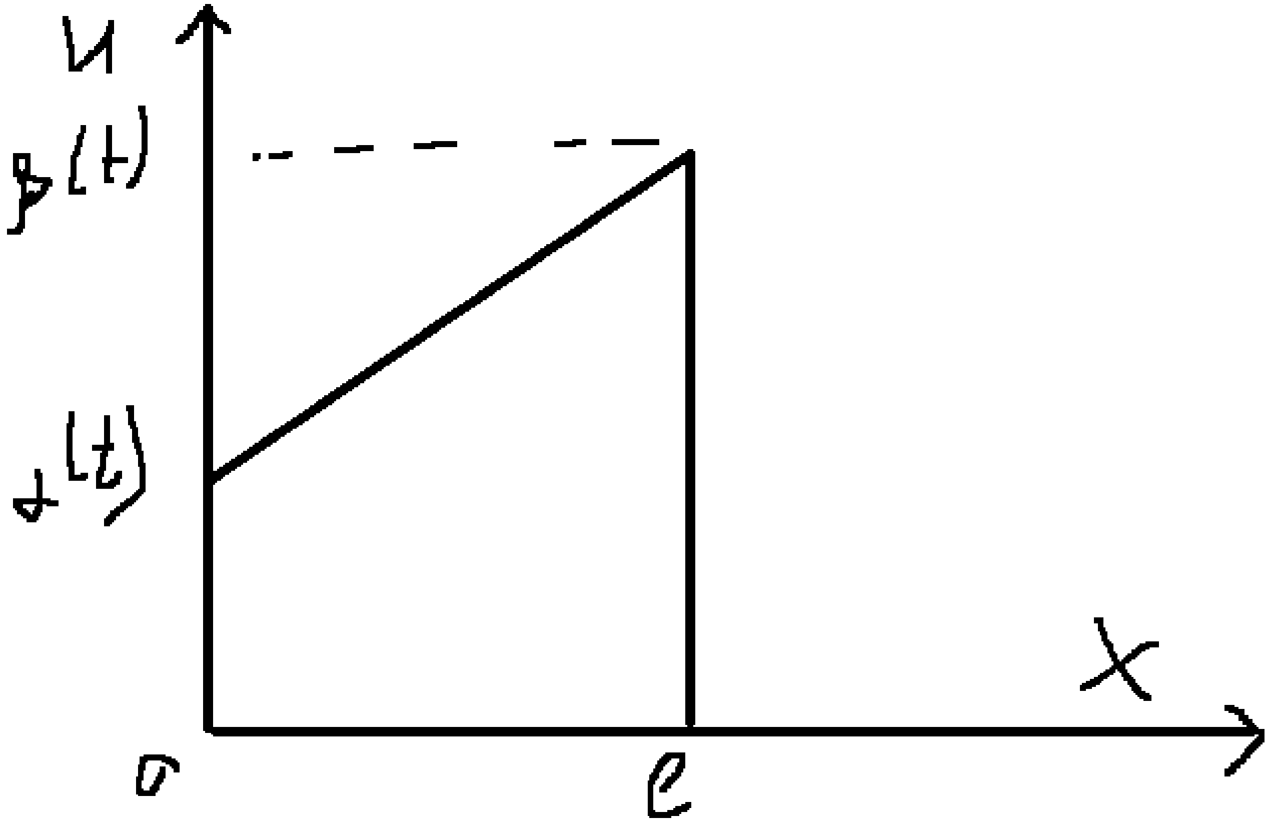
$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx$$

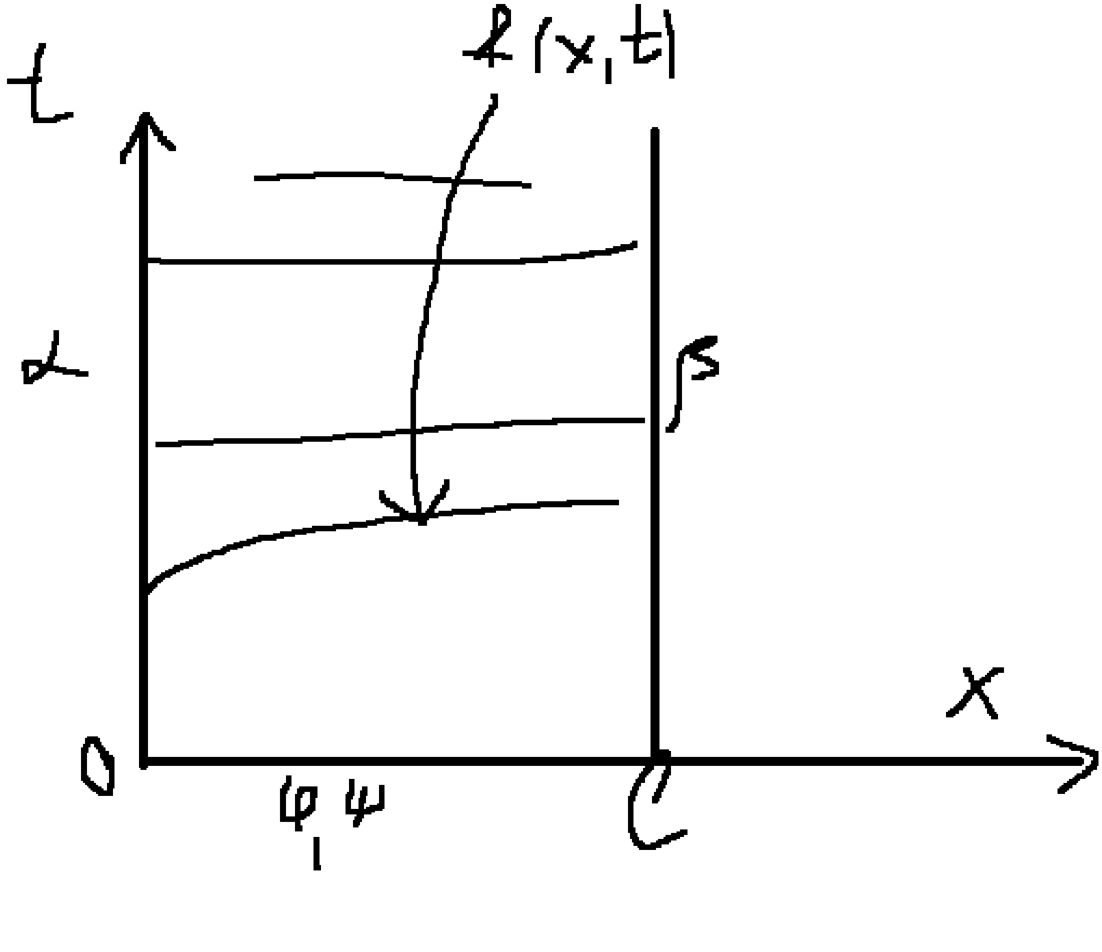
$$\psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u|_{x=0} = \alpha(t) \\ u|_{x=l} = \beta(t) \\ u|_{t=0} = \varphi(t) \\ u_t|_{t=0} = \psi(t) \end{cases}$$

$$u = v + A(t)x + B(t)$$

$$\mathcal{B}u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \mathcal{B}v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$


u
β(t)
α(t)
x
0
l


f(x,t)
t
α
β
x
0
φ,ψ
l

$$\begin{cases} A(t)\cdot 0 + B(t) = \alpha(t) \\ A(t)\cdot l + B(t) = \beta(t) \end{cases}$$

$$A(t)x + B(t) = \alpha(t) + \frac{x}{l}(\beta(t) - \alpha(t))$$

$$u_t = v_t + A'(t)x + B'(t)$$

$$u_{tt} = v_{tt} + A''(t)x + B''(t)$$

$$u_x = v_x + A(t)$$

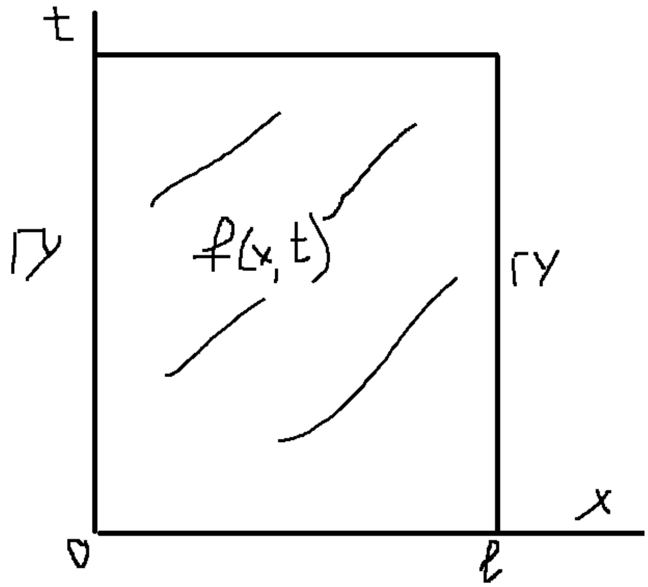
$$u_{xx} = v_{xx}$$

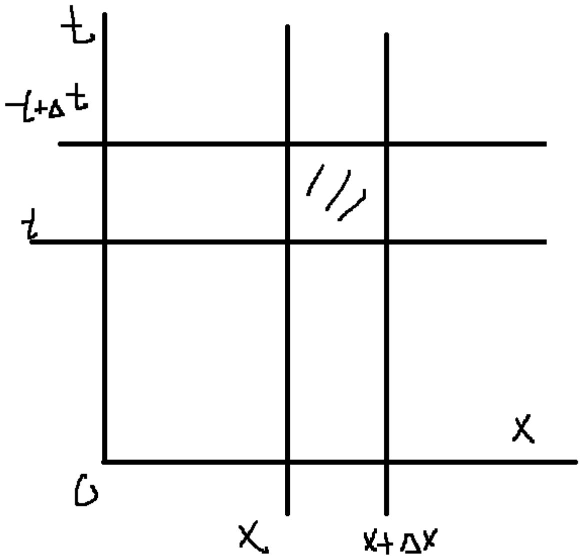
$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t) = -A''x - B'' \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0 \\ v|_{t=0} = \varphi' - A(0)x - B(0) \\ v_t|_{t=0} = \psi - A'(0)x - B'(0) \end{cases}$$

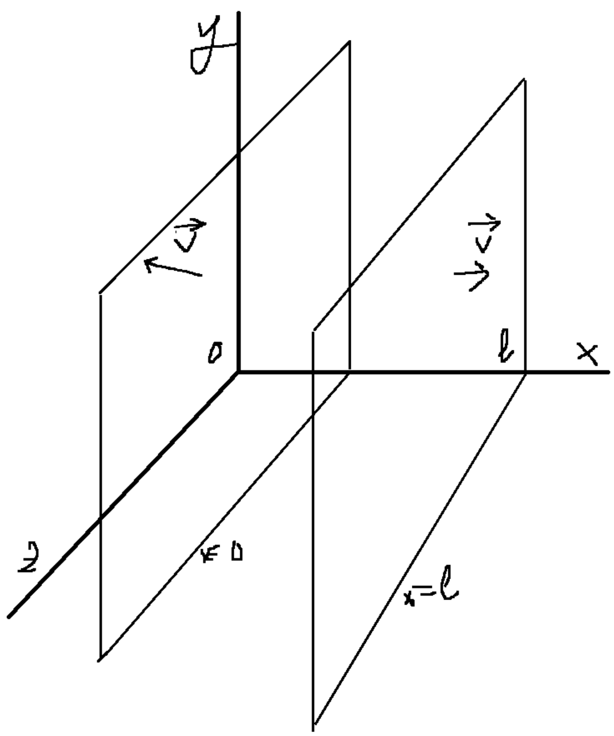
27/02/2025

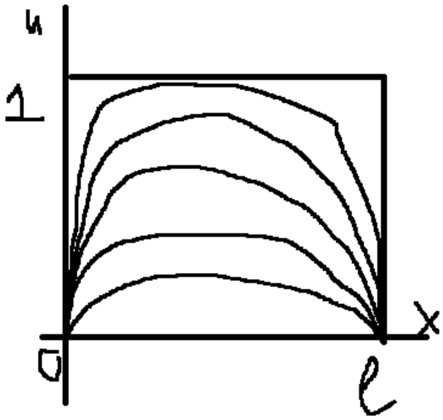
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \text{ - уравнение теплопроводности} \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

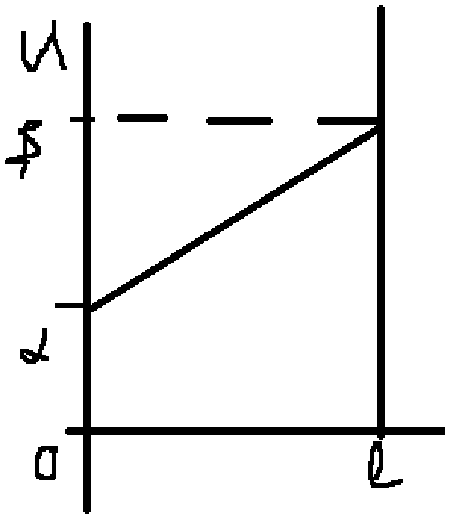
Вспомогательная задача




t
t+Δt
t
0
X
x
x+Δx


y
0
l
x
z
x=0
x=l





$$\begin{cases} C = \frac{\beta - \alpha}{l} \\ D = \alpha \end{cases}$$
$$u_{xx} = 0$$
$$u = Cx + D$$

Вспомогательная задача

$$\begin{cases} z_t = a^2 z_{xx}, 0 < x < l, t > 0 \\ z_x|_{x=0} = z_x|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$z(x,t) = T(t)X(x)$$
$$T'X = a^2TX''$$
$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$
$$z_x(0,t) = T(t)0 \equiv 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow X(l) = 0 \text{ - противоречие}$$
$$\begin{cases} -X'' - \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(l) = 0 \end{cases}$$

Что-то про априорную оценку

$$\int_0^l (-X''X - \lambda X^2)dX = 0$$
$$\underbrace{-X'X|_0^l}_{>0} + \underbrace{\int_0^l X'^2 dx}_{\geq 0} - \lambda \underbrace{\int_0^l X^2 dX}_{\geq 0} = 0$$
$$X \not\equiv 0$$
$$1)\lambda = 0 \Rightarrow X \equiv 1 \Rightarrow$$
$$-X'' = 0$$
$$X = Ax + B$$
$$X' = A = 0 \Rightarrow B \neq 0$$
$$1)\lambda > 0$$
$$2)y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$
$$y'(x) = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$
$$y(0) = B\sqrt{\lambda} = 0, \lambda \neq 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow A \neq 0$$
$$y'(l) = \underbrace{A\sqrt{\lambda}}_{\neq 0}\underbrace{\sin\sqrt{\lambda}l}_{=0} = 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{\lambda}l = \pi k, \lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2, k \in \mathbb{Z}_{>0}$$
$$\begin{cases} \lambda_n = \left(\frac{\pi(n-1)}{l}\right)^2 \\ X_n = \cos\left(\frac{\pi(n-1)x}{l}\right), n \in \mathbb{Z}_{>0} \end{cases}$$
$$n - \frac{1}{2}?$$
$$\alpha X'(l) + \beta X(l) = 0$$

Ищем решение вида $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'X_n = a^2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(-\lambda_n X_n) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n$$
$$\varphi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x)$$
$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n$$
$$C_n = \frac{(f, X_n)}{(X_n, X_n)}$$
$$\begin{cases} T_n' + a^2\lambda_n T_n = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n, n \in \mathbb{Z}_{>0} \end{cases}$$

Задать вопрос, что делать, если f_n ЛНЗ с общим решением?

$$\begin{cases} -X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases}$$

Дома: доказать, что λ больше 0, и что

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$
$$X'(x) = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$
$$X(0) = A = 0 \Rightarrow B \neq 0$$
$$X'(l) = B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = \pi\left(n - \frac{1}{2}\right)$$
$$\lambda_n = \left(\frac{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}{l}\right)$$
$$X_n = \sin\left(\frac{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)x}{l}\right)$$
$$X(x) = \sin\sqrt{\lambda}x$$

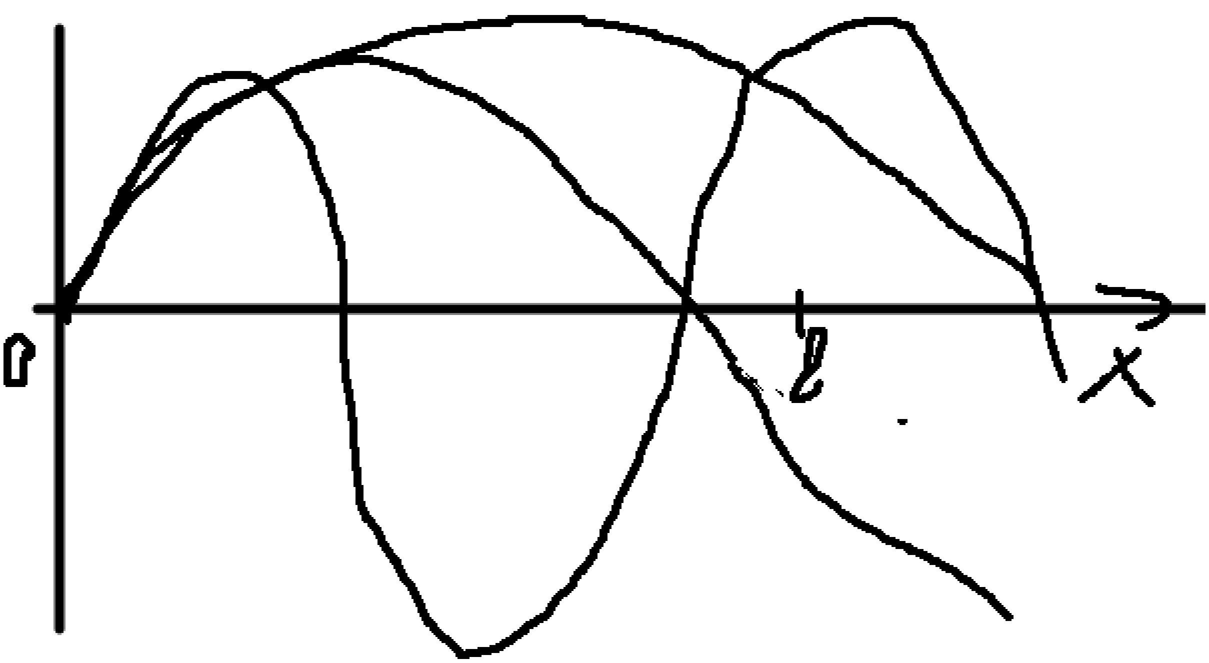
$$\begin{cases} -X'' - \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$
$$X(x) = \sin\sqrt{\lambda}(l - x)$$
$$\begin{cases} -X'' - \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(2\pi)X'(0) = X'(2\pi) \end{cases}$$
$$X(x + 2\pi k) = X(x)$$

Очевидно, что решение периодическое

Автономное уравнение - уравнение, которое не зависит от x.

06/03/2025

$$-y'' - \lambda y = 0$$
$$\lambda > 0:$$
$$y = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$
$$y = \sin\sqrt{\lambda}x$$
$$\text{Теорема Штурма}$$



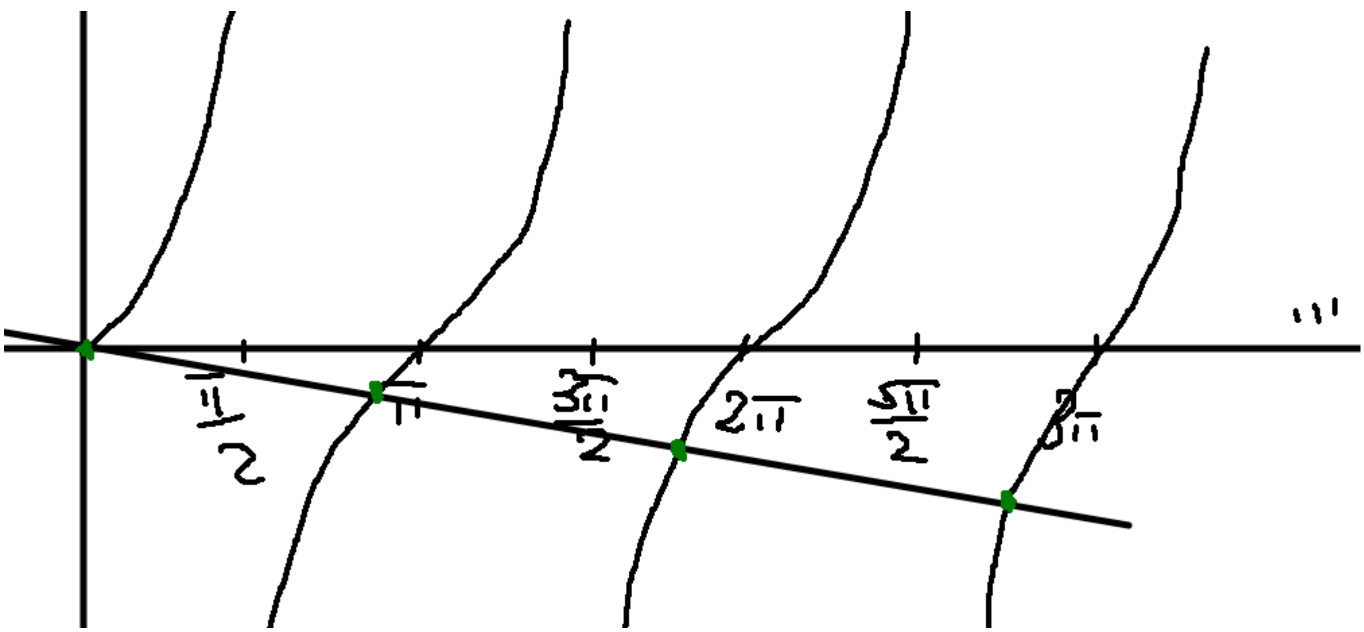
$$D:\ y(0)=y(l)=0$$
$$N:\ y'(0)=y'(l)=0$$

$$\begin{cases}-y''-\lambda y=0\\ y(0)=0\\ y'(l)+\sigma y(l)=0\end{cases}$$

$$\int_0^l(-y''-\lambda y)dy=-y'y|_0^l+\int_0^l y'^2dx-\lambda\int_0^l y^2dx=0$$

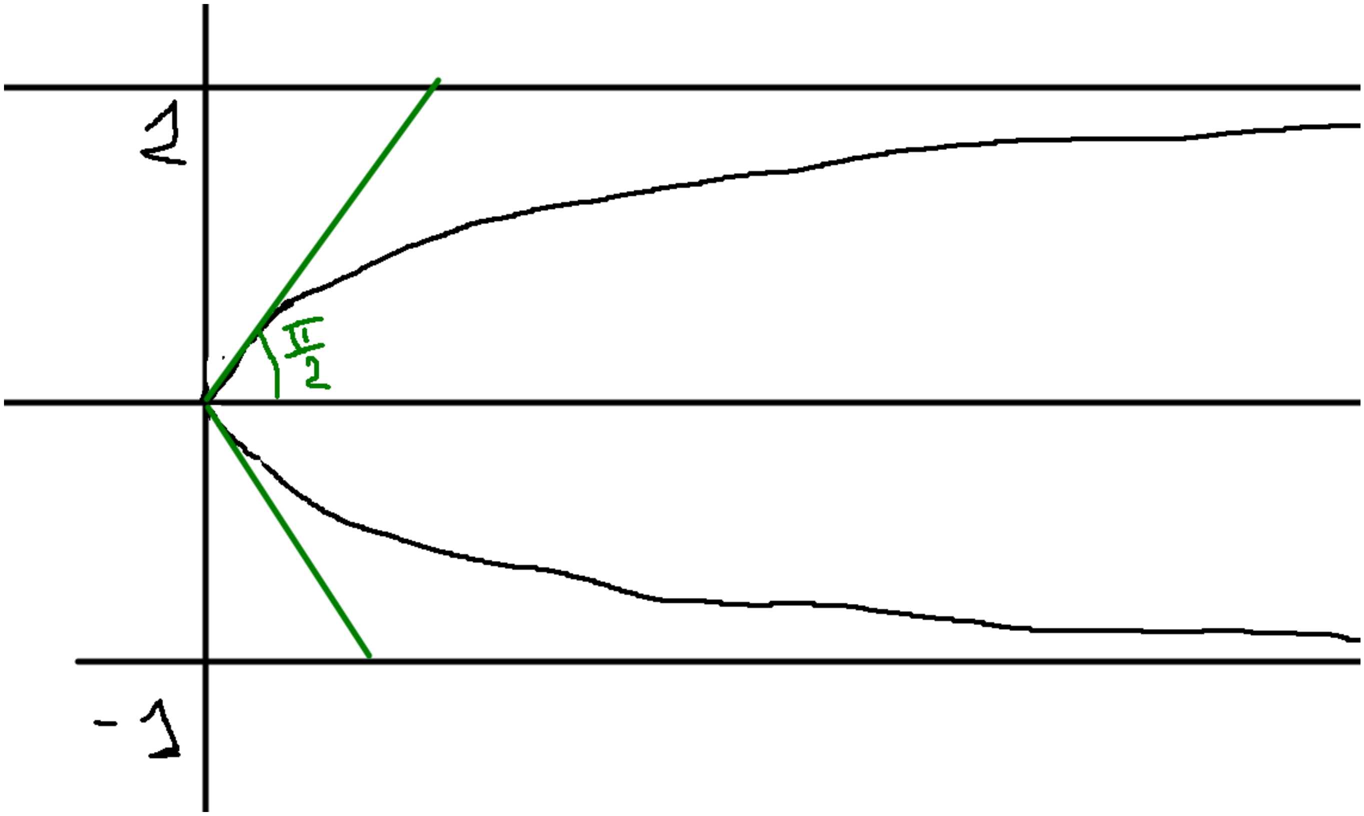
$$\underbrace{\sigma y^2(l)}_{\geq 0}+\underbrace{\int_0^l y'^2dx}_{\geq 0}-\lambda\underbrace{\int_0^l y^2dx}_{>0}=0\Rightarrow\lambda>0\ (\text{если }\lambda\neq 0)$$

$$y(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$$
$$y'(x)=-A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$
$$A=0$$
$$B\neq 0,\ \text{пусть } B=1$$
$$y=\sin\sqrt{\lambda}x$$
$$\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l+\sigma\sin\sqrt{\lambda}l=0$$
$$\sqrt{\lambda}=\mu$$
$$\mu=-\sigma tg\,\mu l$$
$$t=\mu l$$
$$tg\,t=-\frac{t}{\sigma l}$$



$$\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)<t_n<\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda<0:\ y=A\,\text{ch}\,\sqrt{-\lambda}x+B\,\text{sh}\,\sqrt{-\lambda}x$$
$$y(0)=0\Rightarrow A=0,B\neq 0,B=1$$
$$y=\ \text{sh}\,\sqrt{-\lambda}x$$
$$y'=\sqrt{-\lambda}\,\text{ch}\,\sqrt{-\lambda}x$$
$$\sqrt{-\lambda}x=z$$
$$z\,\text{ch}\,z+\sigma l\,\text{sh}\,z=0$$
$$\text{th}\,z=-\frac{z}{\sigma l}$$



27/03/2025

Ненужное про курсовую:

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = 0, x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} \pm r^2 \left(\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} \varphi ds\right)\varphi = 0 \end{cases}$$

$$u \in H^2(\Omega), u|_{\partial\Omega} \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega), \dots$$

$$\text{Вместо 2 строки :}$$

$$u|_{\partial\Omega} + t\left(\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v}\varphi ds\right)\varphi = 0$$

$$t > 0 \Rightarrow \lambda_j > 0$$

$$t < 0 \Rightarrow ?$$

$$t = t_{\text{критическое}} : \lambda = 0$$

$$-y'' - \lambda y = 0$$

$$\lambda < 0 \Rightarrow \cos\sqrt{\lambda}x, \sin\sqrt{\lambda}x$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow 1, x$$

$$\lambda > 0 \Rightarrow \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}x, \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}x$$

Про ряды Фурье:

$$-y'' - \lambda y = 0, \quad 0 < x < l$$

$$y(0) = y(l) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \sin\frac{\pi n x}{l}, n = 1, 2, \dots$$

$$y'(0) = y'(l) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi(n-1)}{l}\right)^2, \cos\frac{\pi(n-1)x}{l}, n = 1, 2, \dots$$

$$y'(0) = y(l) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)}{l}\right)^2, \lambda_1 = 0, y_1(x) \equiv 1, \cos\left(\frac{\pi\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{l}\right), n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{cases} -y'(0) + \sigma_1 y(0) = 0 \\ y'(l) + \sigma_2 y(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow (-u'', v) = \int_0^l (-u'')v dx = \dots = \int_0^l u(-v'')dx$$

Задача Феодосьева не может при своем решении использовать теорему Гильберта-Шмидта

$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = 0 \\ y(0) = y(2\pi) \\ y'(0) = y'(2\pi) \end{cases} \Rightarrow \lambda_n = n^2 (\text{на самом деле } \lambda_n = n^2 - 1)$$

$$y_0^{(C)}(x) = 1$$
$$y_n^{(a)} = \cos nx$$
$$y_n^{(b)} = \sin nx$$

Проверить ортогональность всех указанных систем

Собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны

Пусть у нас собственные значения λ_m и λ_n

$$(Ae_m, e_n) = (e_m, Ae_n)$$

$$\lambda_m(e_m, e_n) = \lambda_n(e_m, e_n) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_m = \lambda_n \\ e_m \perp e_n \end{array}\right.$$

Система

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$$

Полностью определены на отрезке

$$\varphi_j[a, b] \to \mathbb{R}$$
$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0, i \neq j$$
$$(\varphi_i, \varphi_i) = \|\varphi_i\|^2$$

Доказать, что нормы $\|y_n\|^2 = \frac{l}{2}$

Пример 1)...

Пример 2) Полиндромы Лежандра на $[-1, 1]$

Родрига?

$$P_0(x) \equiv 1$$
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n), n = 1, 2, \dots; \text{ (Формула Родрига)}$$

Они ортогональны. Проверяем

$$(P_m, P_n) \sim \int_{-1}^1 \frac{d^m}{dx^m}((x^2-1)^m) \cdot \frac{d}{dx^n}((x^2-1)^n)dx$$
$$\int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)x^m dx, m < n$$

Интегрируем по частям

$$\int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)x^m dx = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((x^2-1)^n)x^m|_{-1}^1 -$$
$$-m\int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}((x^2-1)^n)x^{m-1}dx = \dots = \dots$$

На дом: показать, что выражение до интеграла = 0.

$$= C\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n \cdot 1dx = C_2 \cdot \frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^2-1)^n|_{-1}^{1} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n \right)^2 dx =$$

$$\int_{-1}^{1} u^{(n)}u^{(n)}dx = u^{(n)} \cancelto{0}{u^{(n-1)}} - \int_{-1}^{1} u^{(n-1)}u^{(n+1)}dx = \ldots =$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^{1} u \cdot u^{(2n)}dx = (-1)^n(2n)! \int_{-1}^{1} (1-x)^n(1+x)^n dx =$$

$$u^{(2n)} = (2n)!$$

$$= \frac{(-1)^n(2n)!}{n+1}\left(\cancelto{0}{(1-x)^n(1+x)^{n+1}|_{-1}^{1}} + n\int_{-1}^{1} (1-x)^{n-1}(1+x)^{n+1}dx \right) = \ldots =$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{(2n)!n!}{\frac{(2n)!}{n!}} \int_{-1}^{1} (1+x)^{2n}dx = (-1)^n(n!)^2 \cdot \frac{2^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$$

03/04/2025

$$\varphi_{1,2} : [a,b] \to \mathbb{R}, \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = 0$$

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

$$\{\varphi_j\} - \text{ ортогональные}$$

$$-y'' - \lambda y = 0 - \text{ порождают такие последовательности} \qquad -(py')' + qy - \lambda y = 0$$

$$\mathcal{B}y = 0$$

$$y(0) = 0,\ y'(l) = 0, \ldots$$

Сводим периодическую задачу к задаче Коши

$$f \sim \sum C_k e_k(x) - \text{ разложение } f \text{ по ортогональной системе}$$

$$(e_i, e_j) = 0 \Leftrightarrow i \neq j$$

$$a_k = \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)} = \frac{(f, e_k)}{\|e_k\|}$$

$$f = \sum_j C_j e_j | e_k$$

Минимизация квадратичного уклонения

Неравенство Бесселя

$$e_j : [a,b] \to \mathbb{R} - \text{ортогональная последовательность}$$

$$j = 1, 2, \ldots$$

$$f \to C_1e_1(x) + C_2e_2(x) + \ldots + C_ne_n(x)$$

Многочлен n-го порядка по ортогональной системе e_j

$$\|f - (C_1e_1 + \ldots + C_ne_n)\| \to \min$$

$$(f-\alpha_1 e_1, e_2)=0$$
$$\left\|f-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\cdot e_j\right\|^2=\int_a^b\left(f(x)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j e_j(x)\right)^2dx=\int_a^b f^2(x)dx-2\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\int_a^b f(x)e_j(x)dx+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2\int_a^b e_j^2(x)dx=\|f\|^2-\sum_j C_j^2\|e_j\|^2+\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j-C_j)^2\|e_j\|^2\to\min\Rightarrow$$
$$\alpha_j=C_j$$
$$\|f-\sum_{j=1}^{n}C_j e_j\|=0$$

Пример:

нечётная на $(-\pi,\pi)$

$C_j:1,\cos x,\cos 2x,\dots$

Наилучшее квадратичное уклонение обеспечивает многочлен Фурье.

При этом $\left\|f-\sum_{j=1}^{n}C_je_j\right\|^2=\|f\|^2-\sum_{j=1}^{n}C_j^2\|e_j\|^2$

Тождество Бесселя или теорема Пифагора

Неравенство Бесселя: $\sum_{j=1}^{n}C_j\|e_j\|^2\le\|f\|^2$

Равенство Парсеваля - свойство полноты

Для тригонометрической системы:

$$1,\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right),\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)$$
$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{i=1}^{n}a_i^2+b_i^2\le\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx$$

$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{\pi kx}{l}\right)dx\to 0$$
$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right)dx\to 0$$
$$f(x)-\text{кусочно гладкая}$$

Теорема: Если функция f непрерывная и кусочно гладкая и у неё совпадают значения на концах $f(-l)=f(l)$. Тогда её тригонометрический ряд Фурье

$$f\sim S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{+\infty}a_k\cos\left(\frac{\pi kx}{l}\right)+b_k\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right)$$
$$a_0=\int_{-l}^{l}f(x)dx$$
$$a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{\pi kx}{l}\right)dx$$
$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{\pi kx}{l}\right)dx$$

Сходится к функции f равномерно

Теорема 2:

Пусть функция $f:[-l,l]\to\mathbb{R}$

$f,f',\dots,f^{(m)}$ - непрерывны на $[-l,l]$

$f^{(m+1)}$ - кусочно непрерывна на $[-l, l]$
Тогда

$$a_k, b_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right), k \to \infty$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} |k|^{\gamma}(|a_k| + |b_k|) < \infty, \gamma \le m$$

Пример:
а)
signum
б)
модуль
в)
sin

10/04/2025

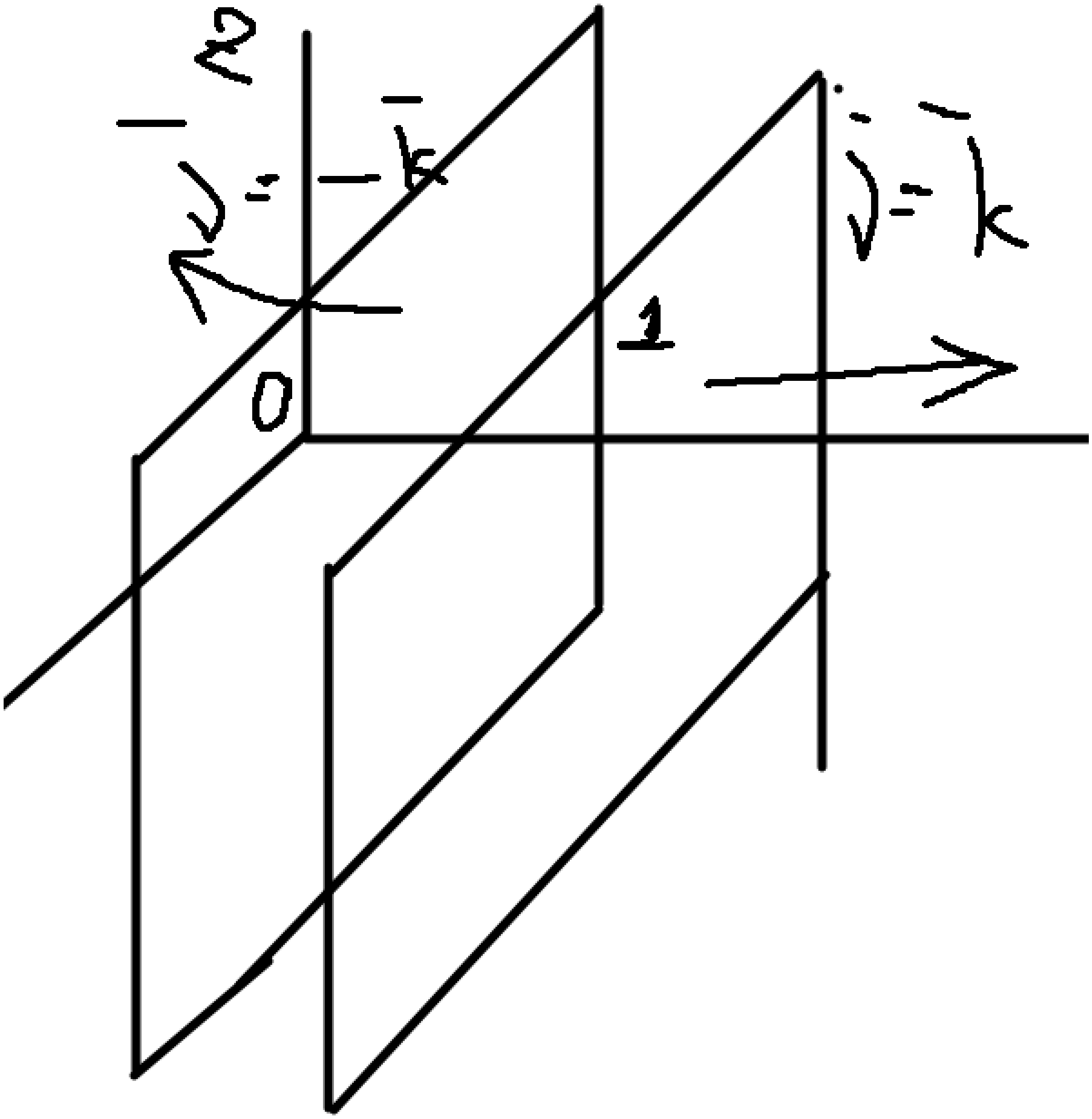
По курсовой:

$$D_{t\varphi} \begin{cases} -y'' - \lambda y = 0 \\ y \in D_{t\varphi} \end{cases}$$
$$\begin{cases} y(0) + t(-\alpha y'(0) + \beta y'(1))\alpha = 0 \\ y(1) + t(-\alpha y'(0) + \beta y'(1))\beta = 0 \end{cases}$$
$$t(P\cos t - Q) = \pm\frac{\sin t}{t}$$
$$P = \alpha^2 + \beta^2, Q = 2\alpha\beta$$
$$t > 0 \Rightarrow \ldots \lambda > 0$$
$$t = t_{\text{критическое}} : \lambda_1(t_{\text{критическое}}) = 0$$
$$t < t_{\text{критическое}} : \lambda_1 < 0$$
$$y = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

Минусы при α идут из многомерной ситуации

$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = 0 \\ w|_{\partial\Omega} + t\left(\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi ds\right)\varphi = 0 \end{cases}$$

Из-за возможного несовпадения областей определения симметричности недостаточно для того, чтобы оператор был самосопряжённым.
С таким набором условий мы можем получить дискретный набор собственных значений



$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \pm \frac{\partial u}{\partial x}$$

Теорема 2

$$f[-l,l] \to \mathbb{R}$$
$$f, f', \dots, f^{(m)} - \text{непрерывны}$$
$$f(l) = f(-l)$$
$$f'(l) = f'(-l)$$
$$\dots$$
$$f^{(m)}(-l) = f^{(m)} = l$$
$$f^{(m+1)} - \text{кусочно непрерывная} \Rightarrow$$
$$a_k, b_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right), k \to \infty$$

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right) \end{pmatrix} dx$$
$$\wedge$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m(|a_k| + |b_k|) \text{ - сходится}$$

Доказательство:

$$a_k = \int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{\pi k x}{l}\right)dx = \frac{1}{l}\cdot\frac{l}{\pi k}\int_{-l}^{l} f(x) d\sin\frac{\pi k x}{l} =$$
$$= \frac{1}{\pi k}\cdot f(x)\,\cancelto{0}{\sin\frac{\pi k x}{l}}\quad |_{-l}^{l} - \frac{1}{\pi k}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{\pi k x.}{l}dz = -\frac{l}{\pi k}b_k', \text{ где}$$
$$b_k' = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{\pi k x}{l}dx$$
$$= -\frac{l}{\pi k}\cdot\frac{l}{\pi k}a_k'' = \ldots = \pm\frac{l^{m+1}}{(\pi k)^{m+1}}\int_{-l}^{l} f^{(m+1)}(x)e_{k(x)}dx, \text{где}$$
$$e_k(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi k x}{l} \to C_k^{(m+1)} = a_k^{(m+1)} \\ \sin\frac{\pi k x}{l} \to C_k^{(m+1)} = b_k^{(m+1} \end{cases}$$
$$= \pm\frac{l^{m+1}}{(\pi k)^{m+1}}C_k^{m+1}$$

Для b_k аналогично

$$|a_k| + |b_k| = \frac{l^{m+1}}{(\pi k)^{m+1}}(|a_k^{(m+1)}| + |b_k^{(m+1)}|)$$
$$a_k, b_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right), k \to \infty$$
$$|a_k| + |b_k| = \frac{l^{m+1}}{(\pi k)^{m+1}}(|a_k^{(m+1)}| + |b_k^{(m+1)}|)| \cdot k^m$$
$$k^m(|a_k| + |b_k|) = C\cdot\left(\frac{|a_k^{(m+1)}|}{k} + \frac{|b_k^{(m+1)}|}{k}\right) \le \frac{C}{2}\left(|a_k^{(m+1)}| + \frac{1}{k^2} + |b_k^{(m+1)}| + \frac{1}{k^2}\right) =$$
$$= \frac{C}{2}\left(|a_k^{(m+1)}| + |b_k^{(m+1)}| + \frac{2}{k^2}\right)$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m(|a_k + |b_k||) \le \frac{|a_0^{(m+1)}|^2}{2} + C\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k^{(m+1)}|^2 + |b_k^{(m+1)}|^2) + C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2} \le C\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}|f^{(m+1)}|^2dx + C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^2}$$

Переформулировать теорему 2 для периодических продолжений

Полнота ортогональной системы