Колесников, Никитин,

Солодкая Елена Викторовна
Всё решает экзамен.

ДЗ1	ДЗ2	ДЗ3	ДЗ4

11/02/25

Динамика материальной точки

Основное уравнение динамики точки (.) в инерциальной системе отсчёта:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

В ДСК:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{k_x} \\ m\ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} F_{k_y} \\ m\ddot{z} = \sum_{k=1}^{n} F_{k_z} \end{cases}$$

Естественный способ задачи:

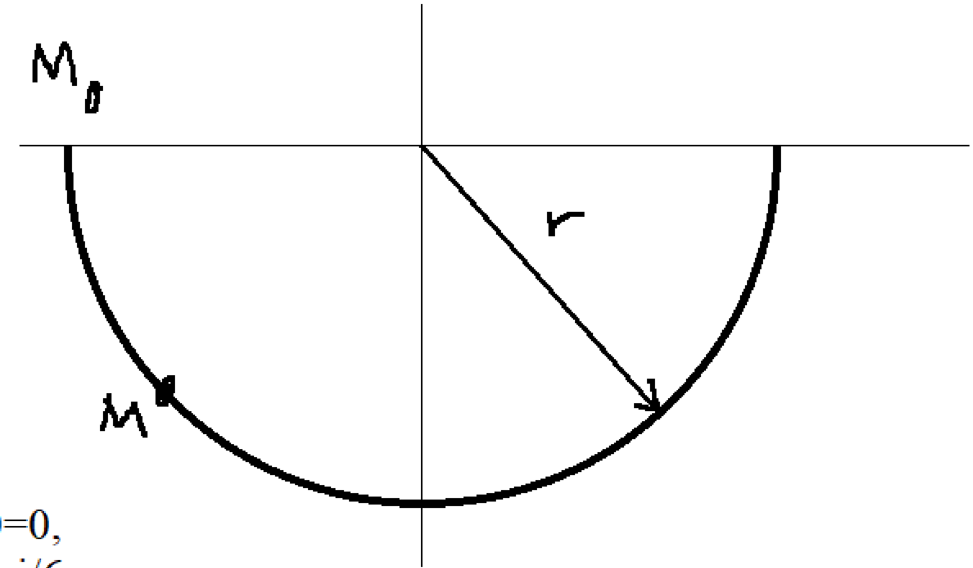
$$\begin{cases} ma^n = \sum_{k=1}^{n} F_{k_n} \\ ma^\tau = \sum_{k=1}^{n} F_{k_n} \end{cases}$$

$$a^n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$$

$$a^\tau = \ddot{s}(t) = \frac{dV_\tau}{dt}$$

+ граничные, начальные условия

Мещерский 27.65

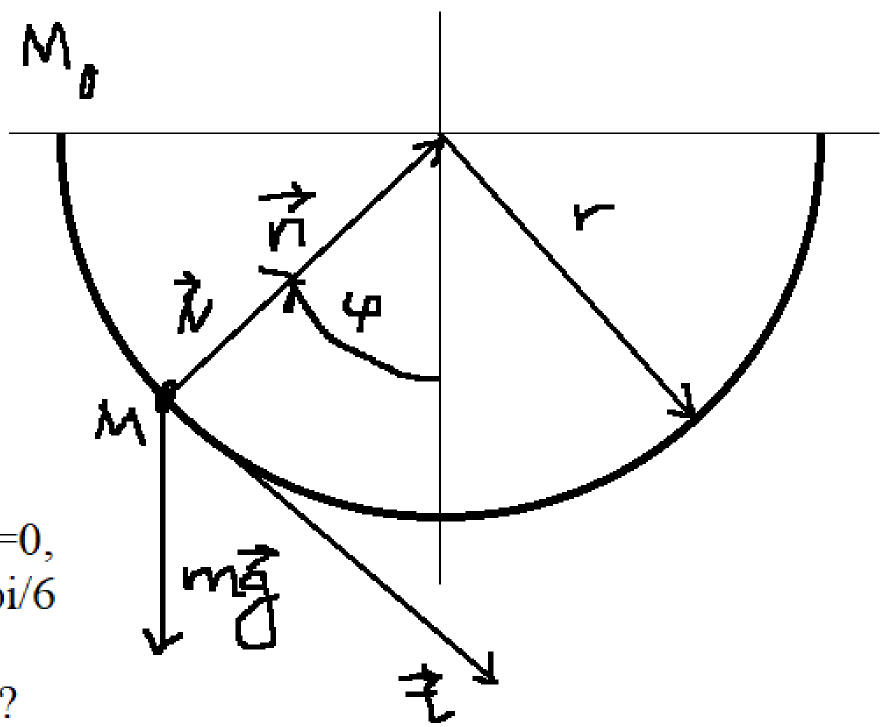


M, m

t0=0, phi0=pi/2, V0=0,
t=t1, phi1=phi(t1)=pi/6

V1=V(t1)=?, N(t1)=?

1. Естественный способ задания
2. Силы



M, m

t0=0, phi0=pi/2, V0=0,
t=t1, phi1=phi(t1)=pi/6

V1=V(t1)=?, N(t1)=?

3. $\vec{n} = \frac{\vec{F}}{m}$

4.

$$\tau : ma^{\tau} = \sum_{k=1}^{N} F_k^{\tau}$$

$$n : ma^{n} = \sum_{k=1}^{N} F_k^{n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\frac{dV_\tau}{dt} = mg\sin\varphi & (1) \\ \frac{mV^2}{r} = N - mg\cos\varphi & (2) \end{cases}$$

(1):

$$\frac{dV}{dt} = g\sin\varphi$$

$$dV = g\sin\varphi dt$$

$$V = \dot{\varphi} r$$

$$\ddot{\varphi} r = g\sin\varphi$$

$$\frac{dV}{dt} = g\sin\varphi$$

$$\frac{dV}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{d\varphi} = g\sin\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{V_\tau}{r}$$

$$\frac{dV}{d\varphi}\cdot -\frac{V}{r} = g\sin\varphi$$

$$\int_{V_0}^{V_1} VdV = -\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} rg\sin\varphi d\varphi \implies \frac{V_1^2}{2} = rg\cos\varphi|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}$$

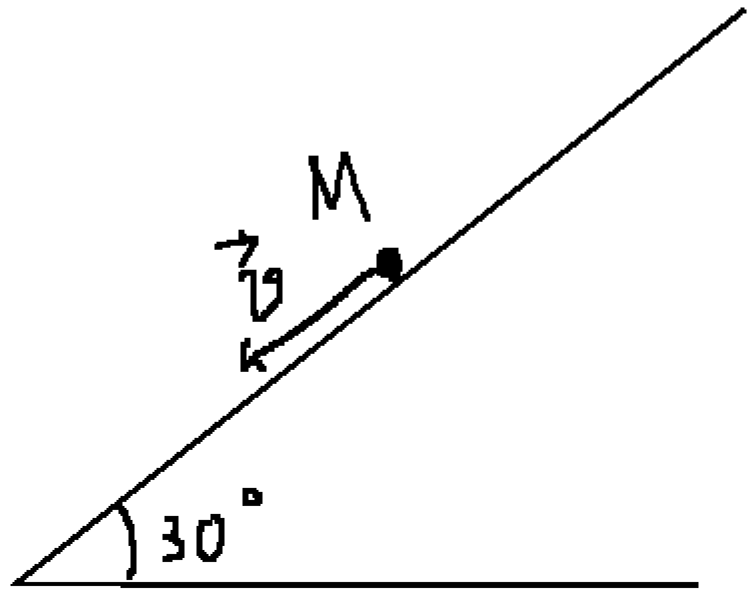
$$\frac{V_1^2}{2} = rg\frac{\sqrt{3}}{2} \implies$$

$$V_1 = \sqrt{rg}\sqrt[4]{6}$$

$$N = mg\cos\varphi_1 + m\frac{V_1^2}{2}$$

27.5

27.5



(·) M

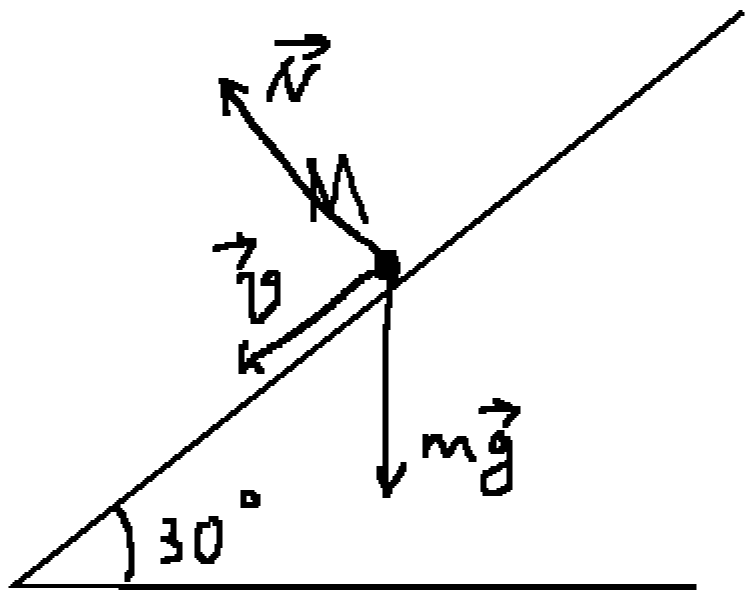
$t_0 = 0,\ V(0) = 2$ м/с

$S_M(t_1) = 9{,}6$ м

$t_1 = ?$

5. ДСК

6. Силы: $m\vec{g}$



7.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$x : ma_x = \sum_{k=1}^{N} F_{kx}$$

$$y : ma_y = \sum_{k=1}^{N} F_{ky}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin(30^o) \\ m\ddot{y} = mg\cos(30^o) + N \end{cases} \Longrightarrow \ddot{x} = \frac{g}{2}$$

Решаем:

$$\ddot{x} = \frac{g}{2}$$

$$x = \frac{gt^2}{4} + V_0 t + x_0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{gt^2}{4} + 2t \Longrightarrow$$

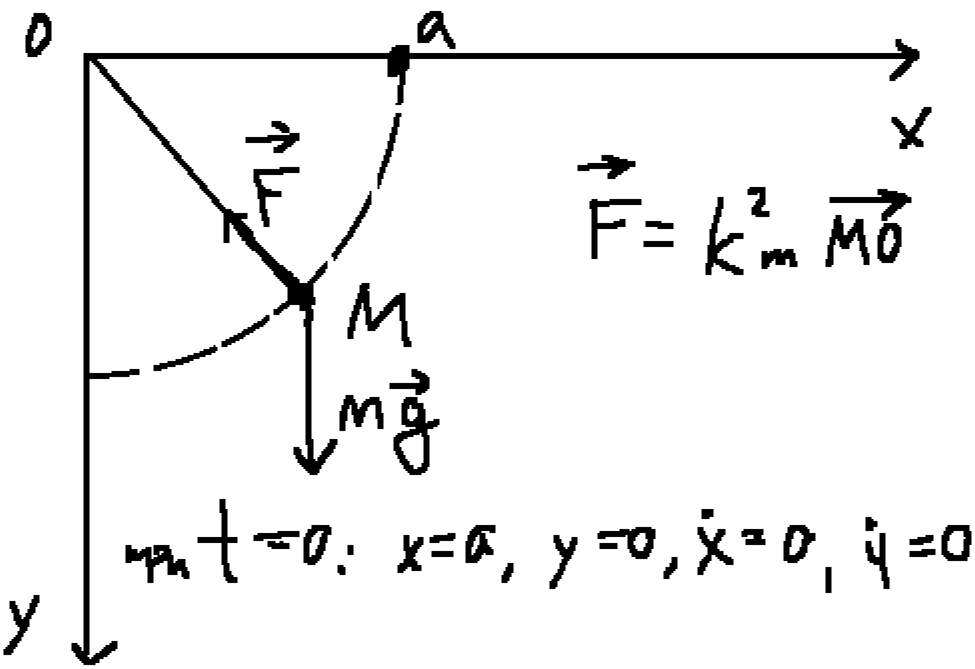
$$9.6 = \frac{gt_1^2}{4} + 2t_1 \Longrightarrow$$

$$t_1 = 1.6$$

Эта же задача с сопротивлением по закону $\vec{R} = -\mu V \vec{V}$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{mg}{2} - \mu\dot{x}^2 \\ m\ddot{y} = mg\frac{\sqrt{3}}{2} - \mu\dot{y}^2 \end{cases} \leftrightarrow m\frac{dV}{dt} = m\frac{g}{2} - \mu V^2$$

$$m\frac{dV}{dt}\frac{dl}{dl} = m\frac{g}{2} - \mu V^2$$
$$mV\frac{dV}{dl} = \frac{mg}{2} - \mu V^2$$
$$m\frac{dV^2}{dl} = mg - 2\mu V^2$$
$$q = V^2$$
$$m\frac{dq}{dl} = mg - 2\mu q$$



$x(t) = ?$ $y(t) = ?$

1. ДСК
2. силы: $\vec{F}$, $m\vec{g}$
3. $$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$
$$\begin{cases} m\ddot{x} = -F\cos\alpha \\ m\ddot{y} = mg - F\sin\alpha \end{cases} \implies \begin{cases} m\ddot{x} = -k^2 mx \\ m\ddot{y} = mg - k^2 my \end{cases} \implies$$
$$\begin{cases} \ddot{x} + k^2 x = 0 \\ \ddot{y} + k^2 y = g \end{cases} \implies \begin{cases} x = a\cos(kt) \\ y = C_1\sin(kt) + C_2\cos(kt) + C_3 \end{cases} \implies y = C_4\sin(kt) + C_5\cos(kt) + \frac{g}{k^2}$$

18/02/2025

Динамика материальной точки в неинерциальной системе отсчёта.

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

$$\vec{a} = \vec{a^r} + \vec{a^e} + \vec{a^\kappa}$$

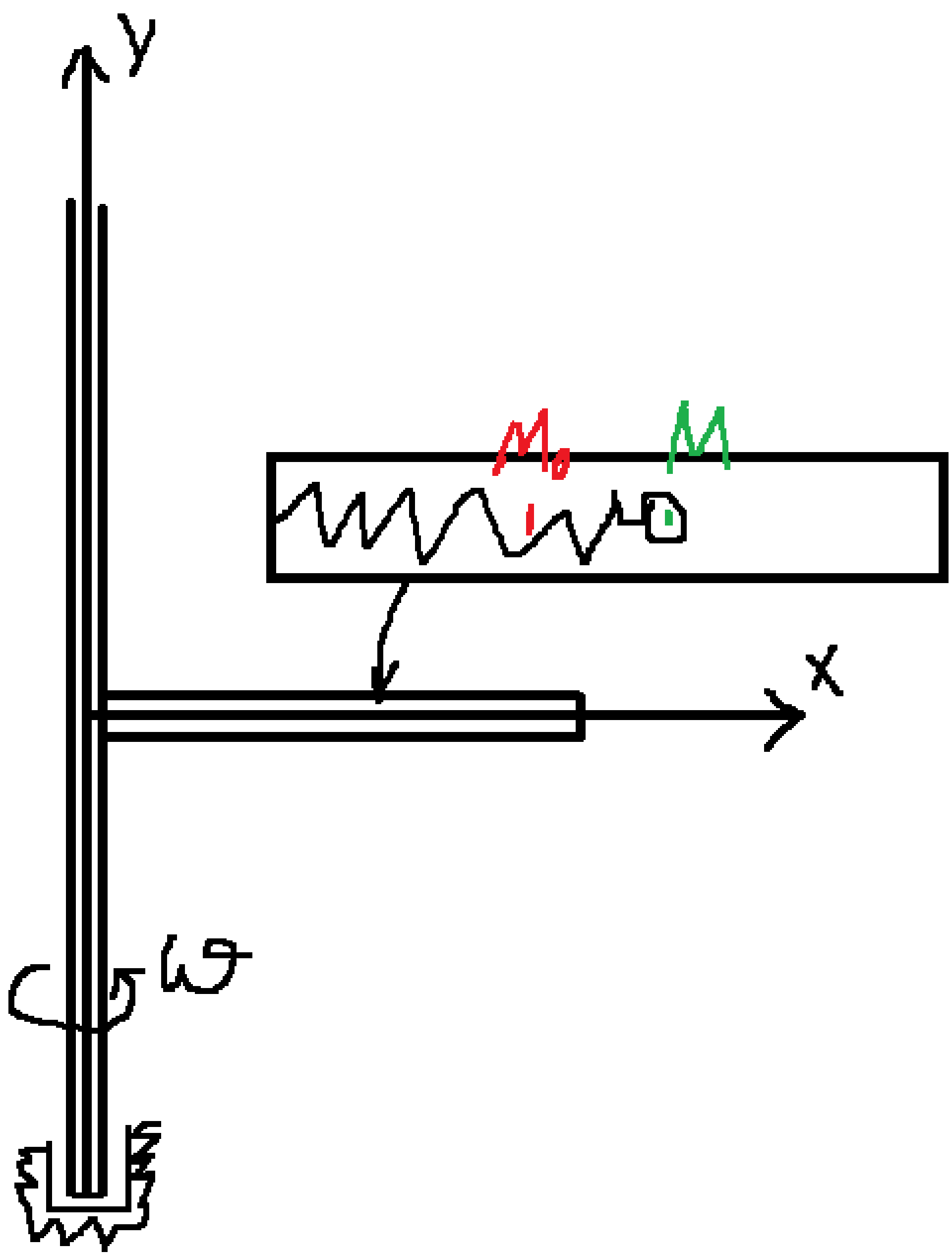
$$m\vec{a^r} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i - m\vec{a^e} - m\vec{a^\kappa}$$

$\vec{\Phi^e} = -m\vec{a^e}$ - Переносная сила инерции

$\vec{\Phi^\kappa} = -m\vec{a^\kappa}$ - сила инерции Кориолиса

$$m\vec{a^r} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i + \vec{\Phi^e} + \vec{\Phi^\kappa}$$

$$\vec{a_\kappa} = 2\vec{\omega_e} \times \vec{V_r}$$



Дано:

$\omega = const,\ C$ - жёсткость пружины, $t_0 = 0,\ x(0) = l,\ V_r(0) = 0$

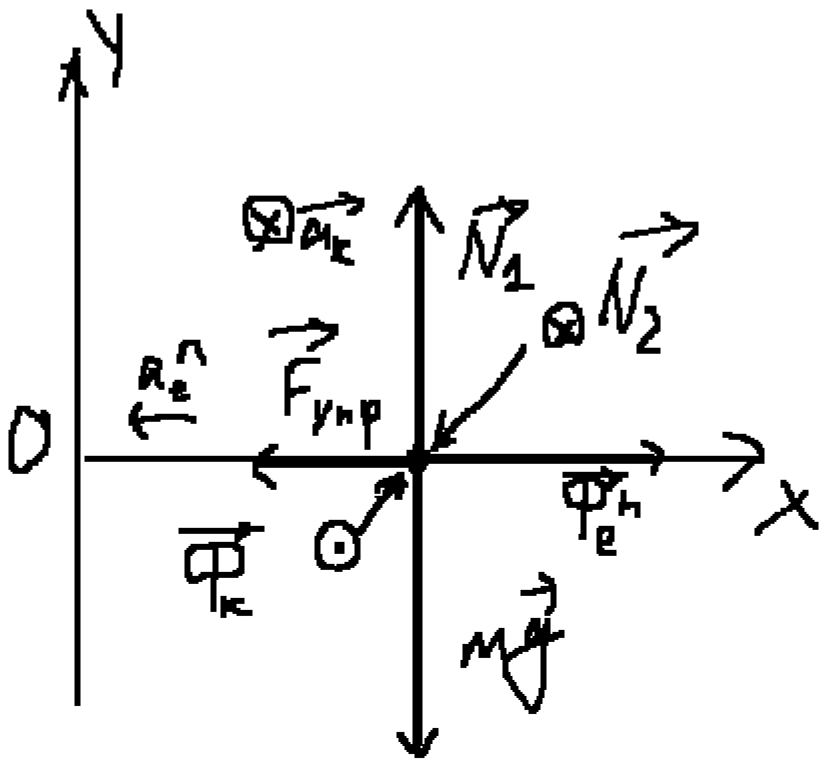
Решение:

$$\vec{\Phi}^e = -\vec{a^e},\ \vec{\Phi}_к = -m\vec{a}_к$$

$$\vec{a^e} = \vec{a_e^n} + \vec{a_e^\tau}$$

$$\omega_e = const \Rightarrow \vec{a_e^\tau} = 0$$

$$\vec{a}_к = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$$



$$3.\ m\vec{a^r} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i + \vec{\Phi}^e + \vec{\Phi}^к$$

$$\begin{cases} ma_x^r = -F_{упр} + \Phi_e^n \\ ma_z^r = N_1 - mg \\ ma_y^r = \Phi_к - N_2 \end{cases}$$

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$$

$$F_{упр} = C(x-l)$$

$$\Phi_e^n = ma_e^n = m\omega^2 x \text{ (x - расстояние от оси вращения)}$$

$$\Longrightarrow$$

$$m\ddot{x} = -C(x-l) + m\omega^2 x$$

$$\ddot{x} + x\left(\frac{C}{m} - \omega^2\right) = \frac{C}{m}l,\ \frac{C}{m} = k^2$$

$$\ddot{x} + (k^2 - \omega^2)x = k^2 l$$

$$x = x_{\text{общее однородное}} + x_{\text{частное неоднородное}}$$

$$\ddot{x} = \lambda^2$$

$$\lambda^2 = -(k^2 - \omega^2)$$

$$1.\ k^2 - \omega^2 > 0$$

$$x_{\text{общее однородное}} = C_1 \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + C_2 \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2}t)$$

$$x_{\text{частное неоднородное}} = A \implies A = \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2}$$

$$x = C_1 \sin(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + C_2 \cos(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2}$$

Находим константы

$$x(0) = l \implies C_2 + \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2} = l \implies C_2 = l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \implies C_1 = 0$$

$$x = \left(l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2}\right)\cos(\sqrt{\omega^2 - k^2}t) + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2} 2.\ k^2 - \omega^2 < 0$$

$$x_{\text{общее однородное}} = C_1 e^{\sqrt{k^2-\omega^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{k^2-\omega^2}t}$$

$$x = C_1 e^{\sqrt{k^2-\omega^2}t} + C_2 e^{-\sqrt{k^2-\omega^2}t} + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2}$$

Находим константы

$$x(0) = l \implies C_1 + C_2 = l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2}$$

$$\dot{x}(0) = 0 \implies C_1 = C_2 = \frac{1}{2}\left(l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2}\right)$$

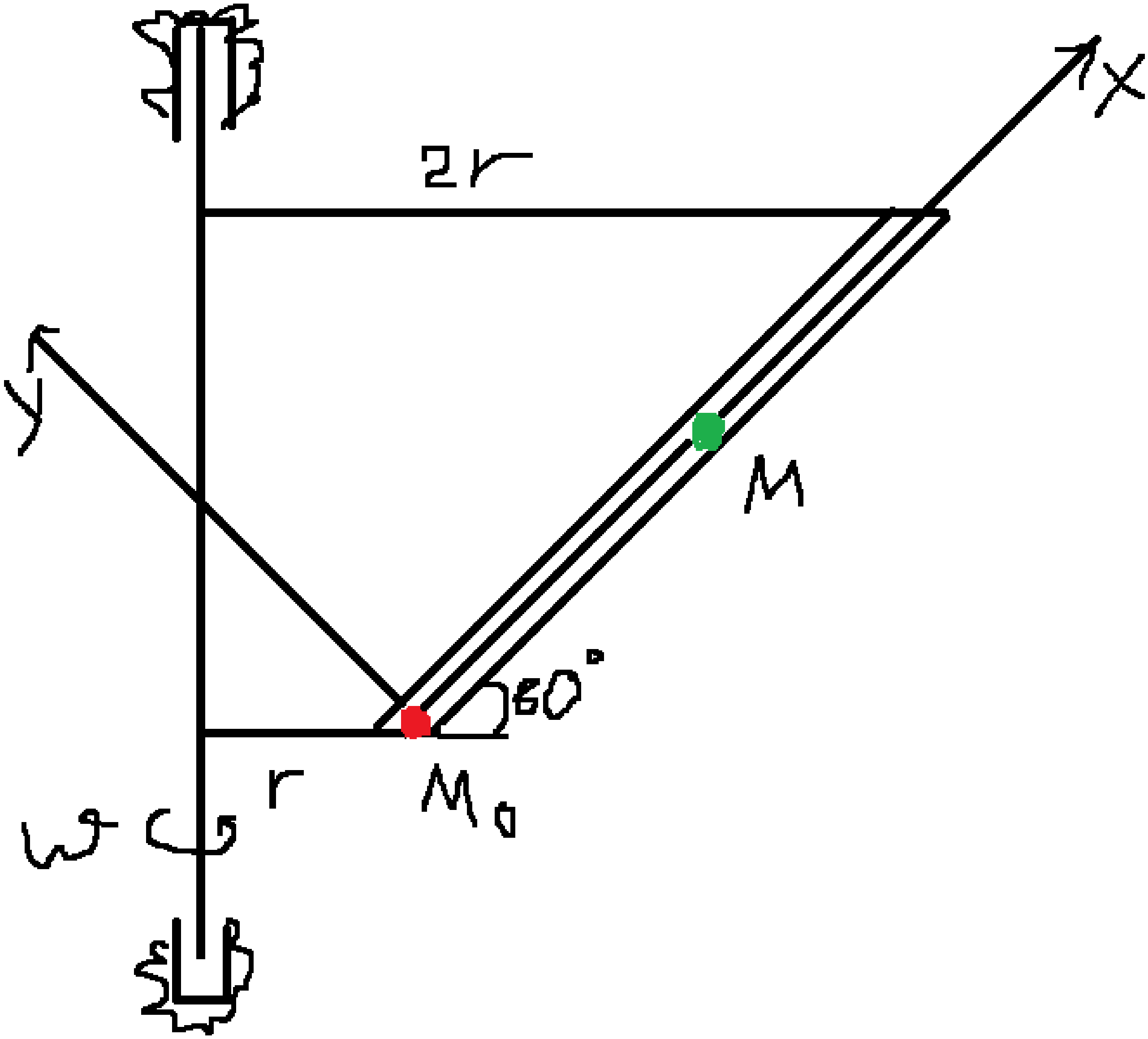
$$x = \frac{1}{2}\left(l - \frac{k^2 l}{k^2 - \omega^2}\right)(e^{\sqrt{k^2-\omega^2}t} + e^{-\sqrt{k^2-\omega^2}t}) + \frac{k^2/l}{k^2 - \omega^2}$$

1 Домашнее задание можно делать, варианты согласно списку

На след неделю

Динамика материальной точки

Колесников



Дано:

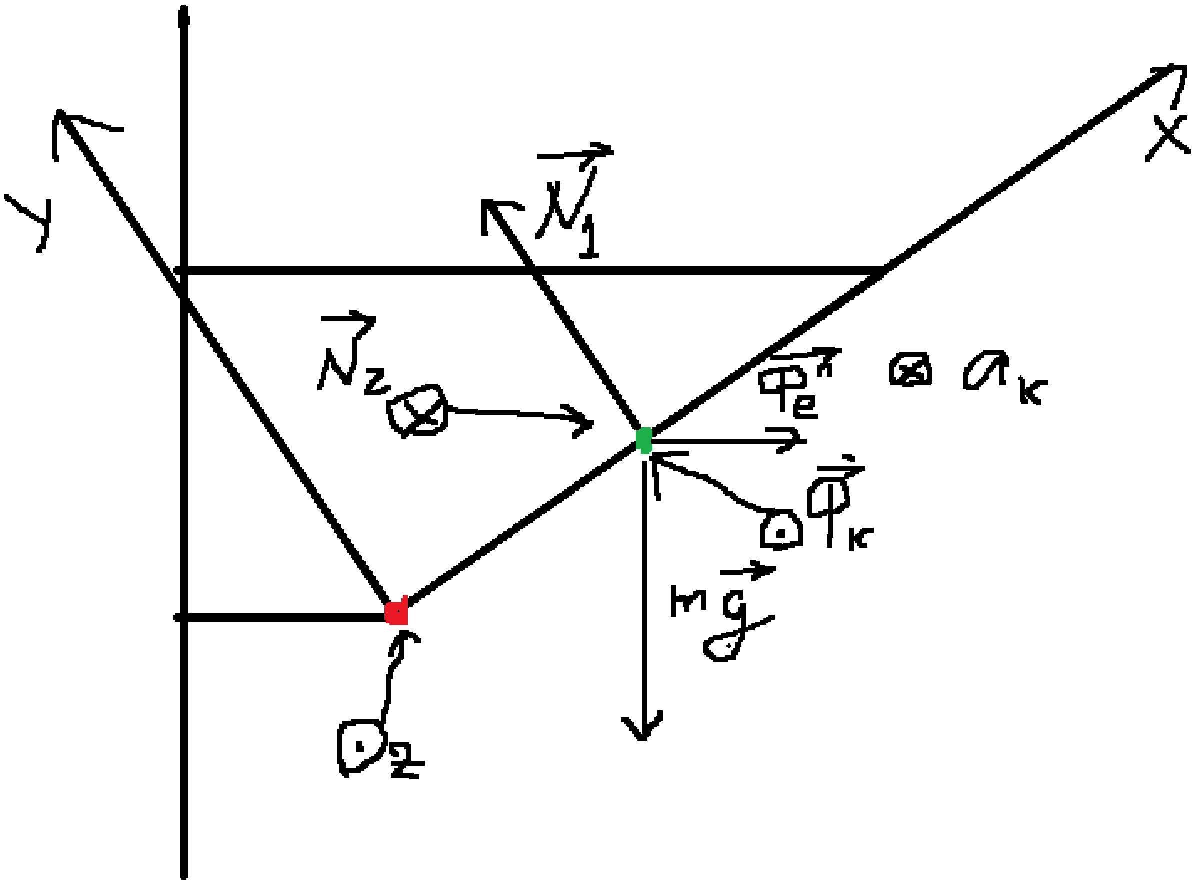
$$t_0 = 0, V_r(0) = 0$$

Найти:

$$\omega_{\min} = ?(V_r > 0)$$

$$t = t_1, \omega = 2\omega_{\min}, Vr(t_1) = ?$$

Решение:



$$\vec{a_e} = \vec{a_{e^n}} + \cancel{\vec{a_e^\tau}}$$

$$\vec{\Phi}_{\text{к}} = -m\vec{a}_{\text{к}}$$

$$\vec{\Phi}_e = -m\vec{a_e} = -m\vec{a_{e^n}}$$

$$m\vec{a_r} = \sum \vec{F_i} + \vec{\Phi}_{\text{к}} + \vec{\Phi}_e$$

$$\begin{cases} m\vec{a_x} = -mg\cos\frac{\pi}{6} + \Phi_e^n\cos\frac{\pi}{3} \\ m\vec{a_y} = -mg\sin\frac{\pi}{6} - \Phi_e^n\sin\frac{\pi}{3} \\ m\vec{a}z = 0 = \Phi_{\text{к}} - N_2 \end{cases}$$

$$\ddot{x} = -g\frac{\sqrt{3}}{2} + \omega^2\left(R + \frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\ddot{x} + \omega^2\left(R + \frac{1}{2}x\right)$$

$$\sum F_{kx} + \Phi_{ex} = 0 \implies \omega_{min}$$

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{g\sqrt{3}}{R}}$$

$$\ddot{x} = \frac{dV_r}{dt} = \frac{dV_r}{dt}\cdot\frac{dx}{dx} = \frac{dV_r}{dx}\cdot V_r$$

$$\ddot{x} - \frac{1}{4}\omega^2 x - \frac{1}{2}\omega^2 R + g\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

25/02/2025

Общие теоремы динамики механической системы.

Уравнения движения центра масс. Теорема об изменении количества движения.

Координаты центра масс:

$$x_C = \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n \cdot m_n}{\sum_{n=1}^{N} m_n} = \frac{\sum_{n=1}^{N} x_n \cdot m_n}{M}$$
$$y_C = \frac{\sum_{n=1}^{N} y_n \cdot m_n}{M}$$
$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{n=1}^{N} \vec{r}_n \cdot m_n}{M}$$

Для точки:

$$\vec{a} = \frac{F}{m} \Leftrightarrow m\vec{a} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k$$

$$M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(e)}, \text{ где } \vec{F}^e \text{ - внешние силы}$$

$$m\ddot{x}_C = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{kx}^{(e)}$$
$$m\ddot{y}_C = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{ky}^{(e)}$$

Частные случаи:

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{F}_{kx} = 0 \implies M\ddot{x}_C = 0$$
$$\text{Если при } t = 0 \text{ - покой, то}$$
$$\ddot{x}_C = 0 \implies \dot{x}_C = Const$$
$$+ \text{ начальные условия } \implies \dot{x}_C = 0$$
$$\implies x_C = Const$$

Количество движения (для точки)

$$\vec{Q} = m\vec{V}$$
$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{N} \vec{Q}_i$$
$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Теорема об изменении количества движения

Частные случаи:

$$\begin{cases} \frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^{N} F_{kx} = 0 \\ \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^{N} F_{ky} \end{cases} \implies \frac{dQ_x}{dt} = 0 \implies Q_x = const$$

Общие теоремы динамики работают в инерциальной системме отсчёта

$\vec{V}$ - абсолютная скорость

Дано:

$$\alpha = 60^o$$
$$m_2 = m_1 = m, m_3 = 2m$$
$$\varphi(t) = 2\varepsilon t^2$$
$$t = 0 \text{ - покой}$$

Найти:

$$x_4(t) = ?,\ a_4 = ?$$

Решение:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^e = 0 \Rightarrow Q_x = 0$$
$$\vec{V}(0) = 0$$
$$Q_x = Q_{x_1} + Q_{x_2} + Q_{x_3} + Q_{x_4}$$
$$V_A = V_B$$
$$Q_{x_1} = mV_A = mV_B$$
$$Q_{x_2} = mV_B$$
$$V_{Cx} \text{ - проекция абсолютной скорости центра масс на ось x}$$
$$Q_{x_3} = m_3 V_{Cx}$$
$$Q_{x_3} = m_3(-V_C^r \cdot \cos 60^o + V_C^{(e)})$$
$$V_K^r = |\dot{\varphi}| r = 4\varepsilon t r$$
$$V_C^r = 2\varepsilon t r$$
$$V_C^e = V_B$$
$$Q_{x_3} = m_3(V_B - \varepsilon t r)$$
$$Q_x = 2mV_B + 2m(V_B - \varepsilon t r) - mV_B = 0$$
$$V_B = \frac{8\varepsilon r}{5} t$$
$$x = \frac{8\varepsilon r}{5} \frac{t^2}{2} = \frac{4\varepsilon r}{5} t^2$$
$$V_C^r = 2\varepsilon r t$$
$$\frac{d}{dt}\left(2m \cdot 2\varepsilon t r \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = N - g(m_4 + 4m)$$
$$N = 2\sqrt{3} m \varepsilon r + g(m_4 + 4m)$$

“Drawing 2025-02-25 10.39.34.excalidraw” не может быть найдена.

Уравнение движения центра масс

“Drawing 2025-02-25 11.22.25.excalidraw” не может быть найдена.

Дано:

$$m_1, m_2, l_2 = 2l, m_3, \varphi = \omega t, \omega = const$$

Найти:

$$x_1(t)$$

Решение:

$$M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(e)}$$

$$\begin{matrix} Ma_{Cx} = 0 \\ \dot{x_C} = 0 \end{matrix} \implies x_C = const$$

$$x_C^1 = \frac{x_1 \cdot m_1 + x_2 \cdot m_2 + x_3 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_C^2 = \frac{(x_1 + x_1')m_1 + (x_2 + x_2')m_2 + (x_3 + x_3')m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$x_2' = x_1'$$

$$V_{Bx}^r = -l\omega \sin\varphi$$

$$S_{Bx}^r = l\cos\varphi$$

$$\nabla \circ (x) = (\nabla(f))(x)$$

11/03/2025

Общие теоремы динамики

$$M\vec{a}_C = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(\mathrm{e})} \text{ - уравнение движения центра масс}$$

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{F}_k^{(\mathrm{e})} \text{ - теорема об изменении количества движения}$$

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{F}_k^{(\mathrm{e})}) \text{ - Теорема об изменении кинематического момента}$$

$$\vec{K}_0 \text{ - кинематический момент системы}$$

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{F}$$

$$\vec{K}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{Q} \text{ для (.)}$$

$$\vec{K}_0 = \vec{K}_C^{(\mathrm{r})} + \vec{M}_0(\vec{Q}) \text{ для общего случая}$$

$$K_{OZ} = J_{OZ}\omega_Z \text{ - для вращательного движения}$$

$$J_{OZ} \text{ - момент инерции относительно OZ}$$

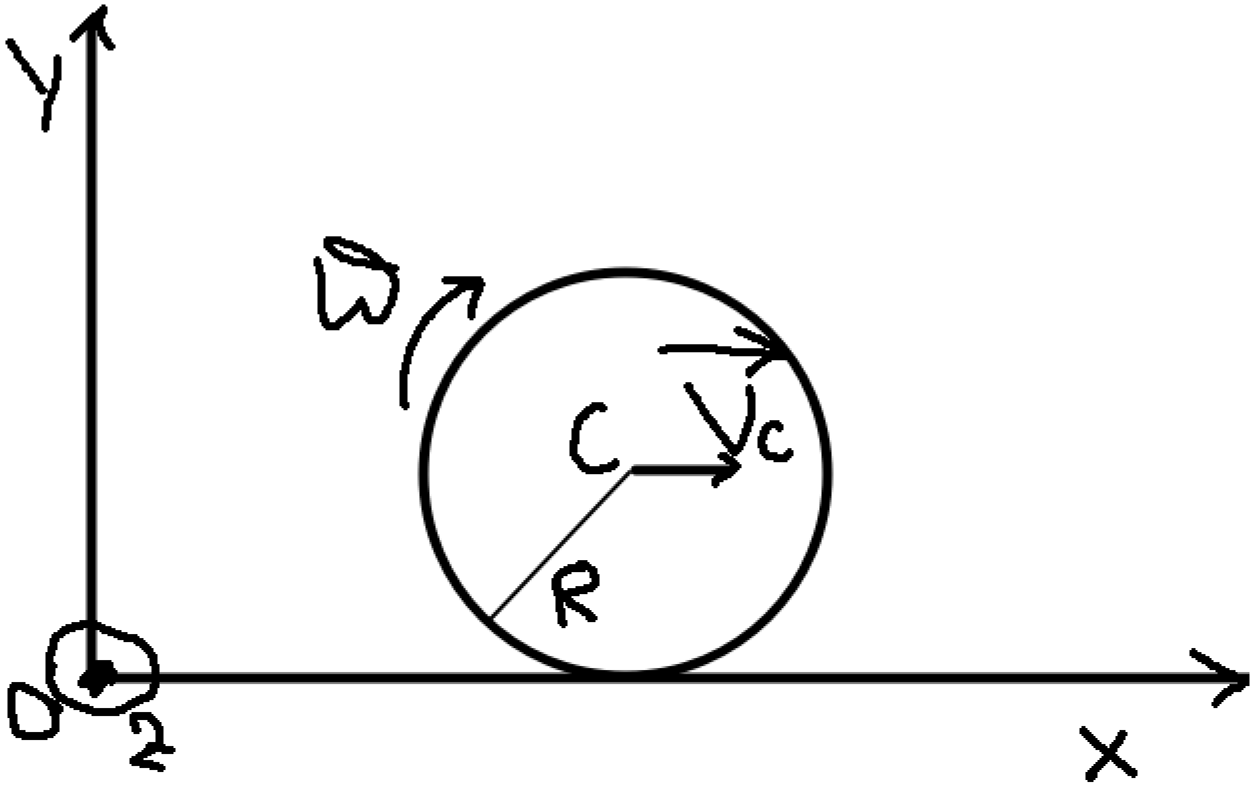
Теорема Гюйгенса-Штейнера

$$J_{AZ_1} = J_{OZ} + mR^2$$

Кольцо	$J_{OZ} = mR^2$
Стержень, центр	$J_{OZ} = \frac{ml^2}{12}$
Стержень, край	$J_{OZ_1} = \frac{ml^2}{3}$

Поступательное движение

Плоское движение: $\vec{K}_0 = \vec{K}_C^{(\mathrm{r})} + \vec{M}_0(\vec{Q})$



$$K_{OZ} = K_{CZ_1}^{(\mathrm{r})} + M_{OZ}(\vec{Q}) = -J_{CZ_1}\omega_{z_1} - RmV_C$$

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum \vec{M}_0(\vec{F}_k^{(\mathrm{e})})$$

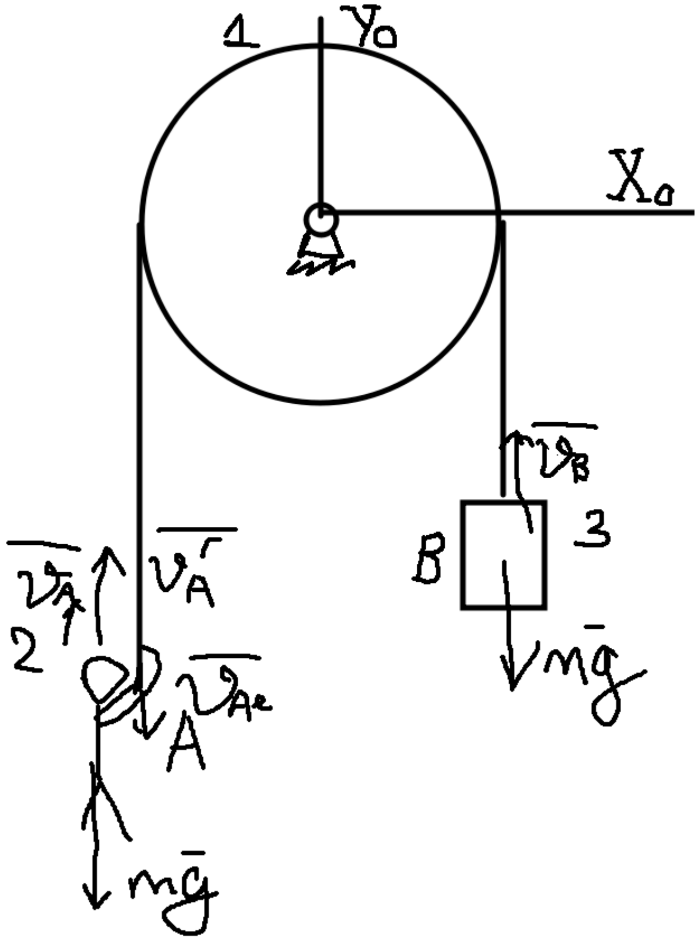
Дано:

$$1 - \text{невесомый блок}$$
$$m_2 = m_3 = m$$
$$V_A^r = u$$

Найти:

$$V_B$$

Решение:



$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{F}_k^{(e)})$$

$$\sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{F}_k^{(e)}) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dK_{OZ}}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$K_{OZ} = \text{const, т.к. при t=0 покой} \Rightarrow K_{OZ} = 0$$

$$\text{Поступательное движение:}$$

$$K_{OZ} = -mV_A R + mV_B R \Rightarrow V_B = V_A$$

$$V_A = V_A^{(r)} - V_A^{(e)} = u - V_B \Rightarrow$$

$$V_B = \frac{u}{2}$$

Платформа => Теорема об изменении кинетического момента

Дано:

$$1 - \text{платформа (диск)}$$

$$M, R$$

$$r - (.)A, m; OA = r$$

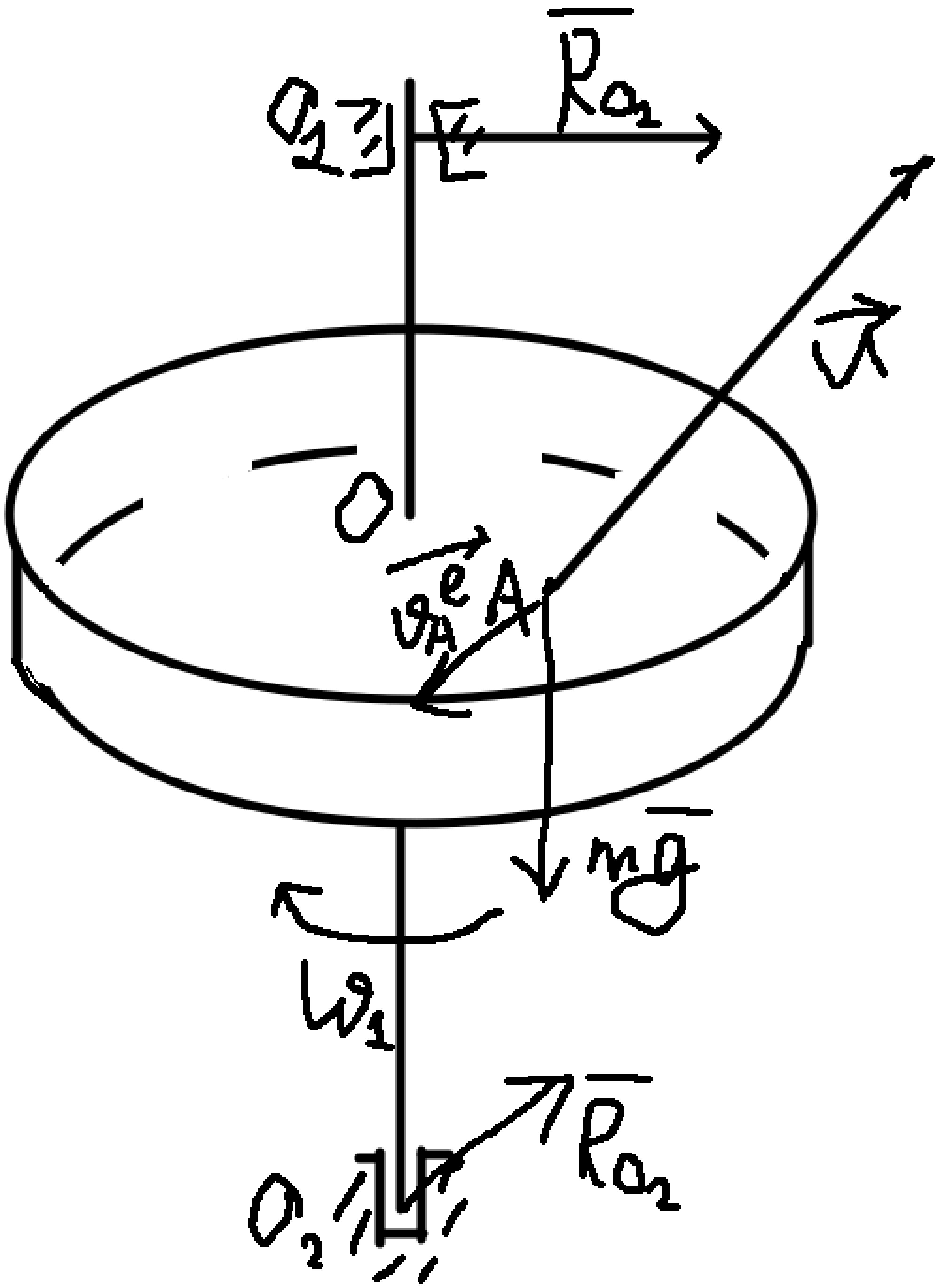
$$t = 0 \text{ - покой}$$

$$t = t_1, V_A^r = u$$

Найти:

$$\omega_1(t_1) = ?$$

Решение:



$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{F}_k^{(e)}); \frac{dK_{OZ}}{dt} = 0 \Rightarrow$$
$$K_{OZ} = \text{const}, K_{OZ} = 0, \text{т.к. } t = 0 \text{ покой}$$
$$K_{OZ} = -J_{OZ} * \omega_1 + mr(u - V_A^e) = -\frac{MR^2}{2}\omega_1 + mr(u - \omega_1 r) = 0 \Rightarrow$$
$$V_A^e = \omega_1 r$$
$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{mru}{mr^2 + \frac{MR^2}{2}}$$

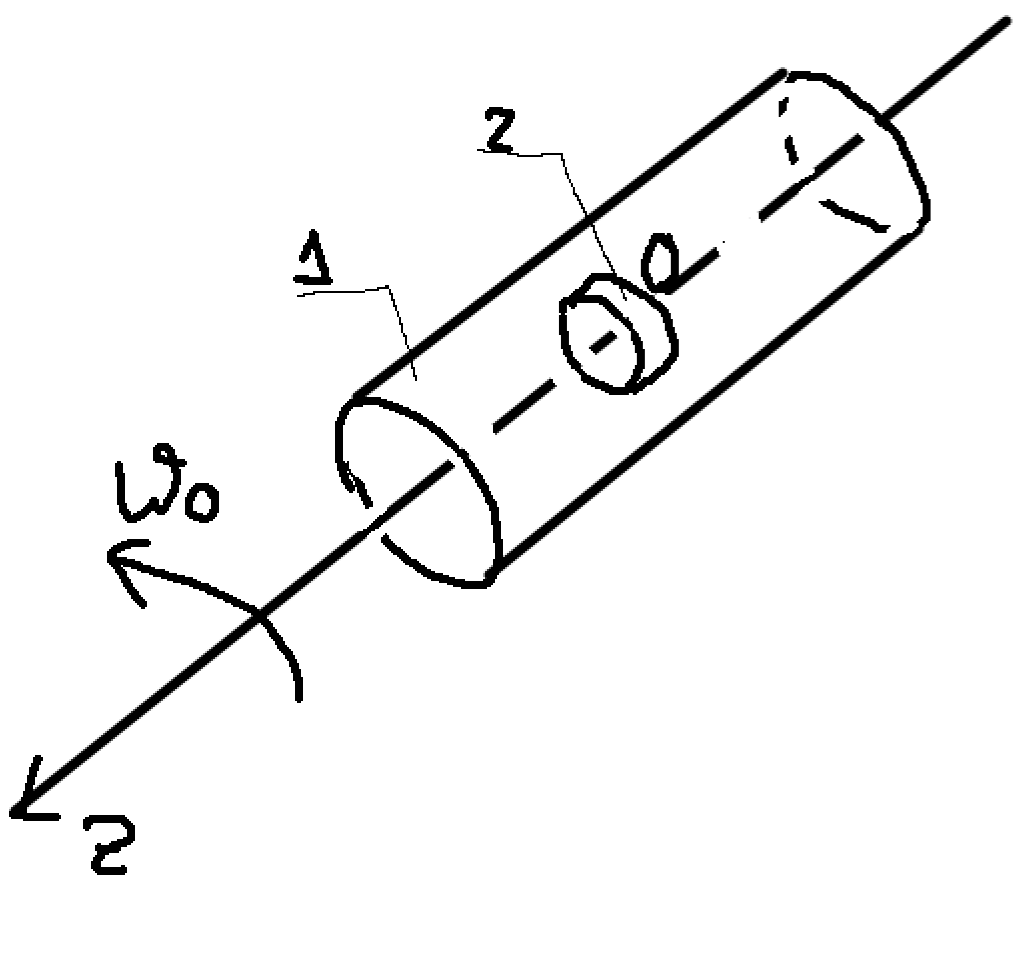
Дано:

$$t = 0; \omega_{\text{станции}} = \omega_0$$
$$J_{OZ}^{\text{станции}} = J_{OZ}$$
$$1 - \text{станция}$$
$$2 - \text{маховик}$$
$$t = 0, \omega_{r_1}^M = 0$$
$$t = t_1 + \omega_r^M > 0$$

Найти:

$$\omega^{\text{станции}}(t_1) = \frac{\omega_0}{2}, \omega_r^M(t_1) = ?$$

Решение:



$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{N} \vec{M}_0(\vec{F}_k^{(e)}) = 0 \Rightarrow \vec{K}_0 = \text{const}$$