Пример 1

Докажите, что оценка $\hat{\alpha} = X_{(1)}$ (первый элемент порядковой статистики) неизвестного параметра α, построенная по выборке $X_1, X_2, \ldots X_n$ из распределения с плотностью $p(x,\alpha) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ e^{\alpha - x} & x \geq \alpha \end{cases}$, является асимптотически несмещенной и состоятельной.

Решение. Функция распределения выборки $F(x,\alpha) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ 1 - e^{\alpha - x} & x \geq \alpha \end{cases}$,

Математическое ожидание $M\xi = \int\limits_{\alpha}^{+\infty} x e^{\alpha - x}\, dx = \int\limits_{0}^{+\infty} (u+\alpha) e^{-u}\, du = \alpha$

По теореме плотность случайной величины $X_{(1)}$

$$p_{X_{(1)}}(x) = n\left[1 - F(x)\right]^{n-1} F'(x) = n\left[1 - F(x)\right]^{n-1} p(x),$$

Найдём мат ожидание, если оно стремится к параметру α, то оценка будет асимптотически несмещенной

$$MX_{(1)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot n\left(1 - F(x)\right)^{n-1} p(x) dx = \int\limits_{\alpha}^{+\infty} x \cdot n\left(e^{\alpha - x}\right)^{n-1} e^{\alpha - x}\, dx =$$

$$n\int\limits_{\alpha}^{+\infty} x e^{n(\alpha - x)}\, dx = \begin{Bmatrix} u = x - \alpha \\ du = dx \end{Bmatrix} = n\int\limits_{0}^{+\infty} (u+\alpha) e^{-nu}\, du$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} nu \cdot e^{-nu}\, du + \alpha \int\limits_{0}^{+\infty} n e^{-nu}\, du = \frac{1}{n}\Gamma(2) + \alpha = \alpha + \frac{1}{n} \to \alpha$$

$$M\left(X_{(1)}\right)^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot n\left(1 - F(x)\right)^{n-1} p(x) dx = \int\limits_{\alpha}^{+\infty} x^2 \cdot n\left(e^{\alpha - x}\right)^{n-1} e^{\alpha - x}\, dx =$$

$$n\int\limits_{\alpha}^{+\infty} x^2 e^{n(\alpha - x)}\, dx = \begin{Bmatrix} u = x - \alpha \\ du = dx \end{Bmatrix} = n\int\limits_{0}^{+\infty} (u+\alpha)^2 e^{-nu}\, du$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} nu^2 \cdot e^{-nu}\, du + 2\alpha \int\limits_{0}^{+\infty} nue^{-nu}\, du + \alpha^2 \int\limits_{0}^{+\infty} ne^{-nu}\, du =$$

$$= \frac{1}{n^2}\Gamma(3) + \frac{2\alpha}{n}\Gamma(2) + \alpha^2 = \frac{2}{n^2} + \frac{2\alpha}{n} + \alpha^2.$$

$$DX_{(1)} = \frac{2}{n^2} + \frac{2\alpha}{n} + \alpha^2 - \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \to 0$$

По теореме 2 статистика $X_{(1)}$ является состоятельной оценкой параметра α.

Пример 2

Дана выборка объема n из распределения Парето с плотностью

$p(x,\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\theta}\left(\frac{\theta}{x}\right)^3 & x \ge \theta \\ 0 & x < \theta \end{cases}$. В качестве оценки неизвестного параметра θ используется $X_{(1)}$.

Докажите, что эта оценка является асимптотически несмещенной.

Функция распределения выборки $F(x,\alpha) = \begin{cases} 0 & x < \theta \\ 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^2 & x \ge \theta \end{cases}$,

По теореме плотность случайной величины $X_{(1)}$

$$p_{X_{(1)}}(x) = n\left[1 - F(x)\right]^{n-1} F'(x) = n\left[1 - F(x)\right]^{n-1} p(x),$$

Найдём мат ожидание, если оно стремится к параметру α, то оценка будет асимптотически несмещенной

$$MX_{(1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot n\left(1 - F(x)\right)^{n-1} p(x)dx = \int_{\theta}^{+\infty} x \cdot n\left(\left(\frac{\theta}{x}\right)^2\right)^{n-1} \frac{2}{\theta}\left(\frac{\theta}{x}\right)^3 dx =$$

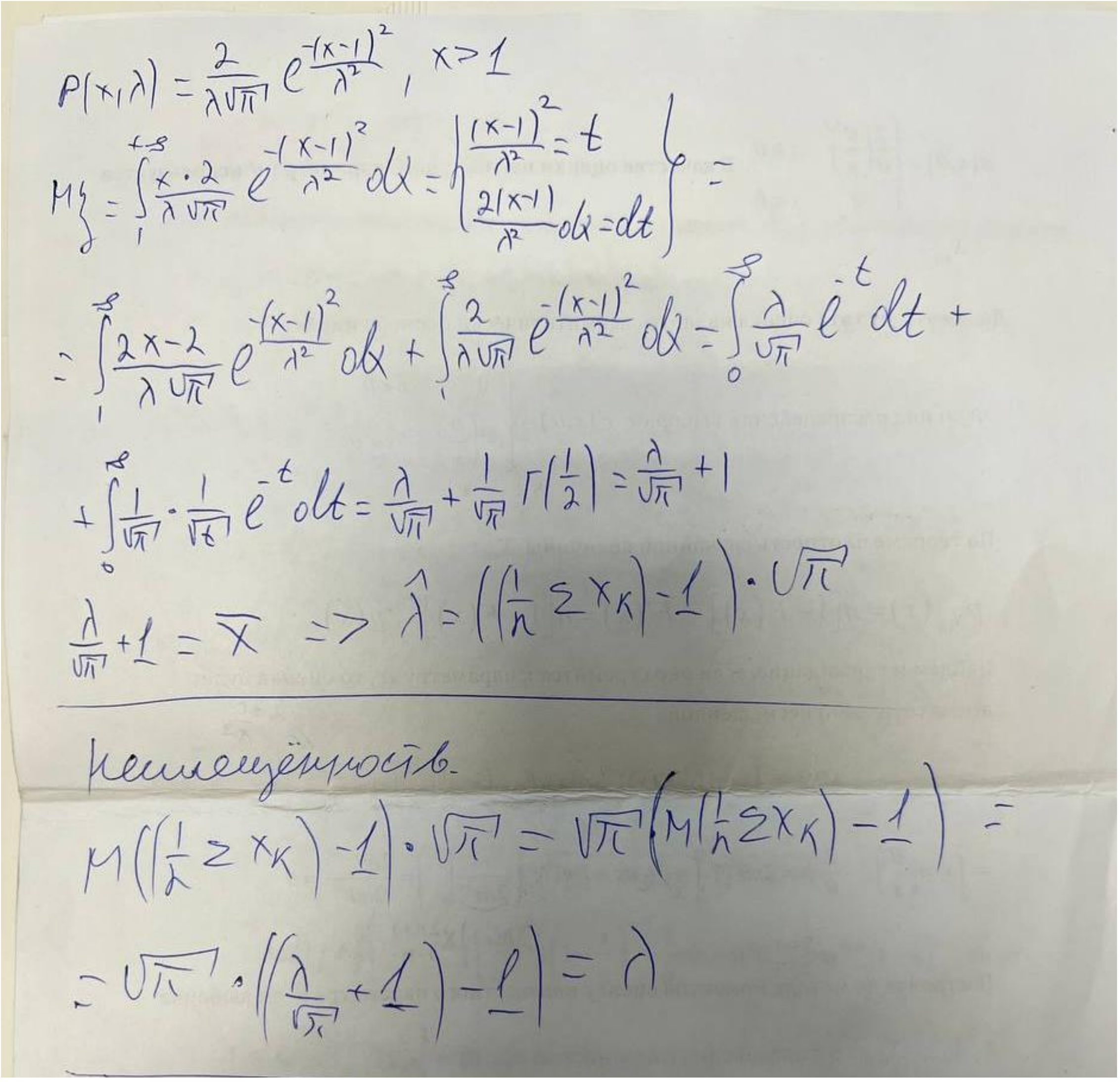
$$= \int_{\theta}^{+\infty} x \cdot n\left(\frac{\theta^{2n+1}}{x^{2n+1}}\right)\frac{2}{\theta} dx = 2n\theta^{2n} \int_{\theta}^{+\infty} \frac{1}{x^{2n}} dx =$$

$$= 2n\theta^{2n}\left(\left.\frac{x^{-2n+1}}{(-2n+1)}\right|_{\theta}^{+\infty}\right) = \frac{2n\theta^{2n}\theta^{-2n+1}}{(2n-1)} = \frac{2n}{(2n-1)}\theta \to \theta$$

Пример 3

Постройте по методу моментов оценку неизвестного параметра θ по выборке $X_1, X_2, \ldots . X_n$ из распределения с плотностью $p(x,\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\lambda\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{\theta^2}} & x > 1 \\ 0 & x \le 1 \end{cases}$.

Ответ. $\hat{\lambda} = \sqrt{\pi}(\overline{X} - 1)$.



$$p(x,\lambda) = \frac{2}{\lambda\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{\lambda^2}}, \quad x > 1$$

$$M\xi = \int_1^{+\infty} \frac{x \cdot 2}{\lambda\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{\lambda^2}} dx = \left| \begin{matrix} \frac{(x-1)^2}{\lambda^2} = t \\ \frac{2(x-1)}{\lambda^2} dx = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{2x-2}{\lambda\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{\lambda^2}} dx + \int_1^{\infty} \frac{2}{\lambda\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{\lambda^2}} dx = \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} e^{-t} dt +$$

$$+ \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} + 1$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} + 1 = \overline{X} \Rightarrow \hat{\lambda} = \left(\left(\frac{1}{n} \sum x_k\right) - 1\right) \cdot \sqrt{\pi}$$

Несмещённость.

$$M\left(\left(\frac{1}{n} \sum x_k\right) - 1\right) \cdot \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}\left(M\left(\frac{1}{n} \sum x_k\right) - 1\right) =$$

$$= \sqrt{\pi} \cdot \left(\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} + 1\right) - 1\right) = \lambda$$

Пример 4

Постройте оценки по методу моментов для параметров α и λ по выборке $X_1, X_2, \ldots . X_n$ из гамма-распределения с плотностью $p(x,\alpha,\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$.

Ответ. $\hat{\lambda} = \frac{\overline{X}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2 - \overline{X}^2}$, $\hat{\alpha} = \frac{\overline{X}^2}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2 - \overline{X}^2}$

Выборочная функция распределения

Определение 5. Выборочной функцией распределения называется

$$\hat{F}_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I(x-X_k),\ x\in\mathbb{R},\ I(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases},$$

То есть $\hat{F}(x)=\frac{m}{n}$, если ровно m наблюденных значений меньше x.

$\hat{F}_n(x)$ - статистика (при каждом x), то есть функция от выборки

Свойства эмпирической функции распределения.

1. $0\le \hat{F}_n(x)\le 1$

2. $\hat{F}_n(x)\underset{n\to-\infty}{\to}0$, $\hat{F}_n(x)\underset{n\to+\infty}{\to}1$

3. $\hat{F}_n(x)$ не убывает

4. $\hat{F}_n(x)$ непрерывна слева

Теорема 3. Если взята выборка объема n из генеральной совокупности, имеющей функцию распределения $F(x)$, то $F_n(x)$ дискретная случайная величина, закон распределения которой имеет вид:

$$P\left(F_n(x)=\frac{k}{n}\right)=C_n^k\left(F(x)\right)^k\left(1-F(x)\right)^{n-k},\ k=0,1,\ldots,n$$

Следствия.

1. $MF_n(x)=M\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I(x-X_k)\right]=\frac{1}{n}M\left[\sum_{k=1}^{n}I(x-X_k)\right]=\frac{1}{n}np=F(x)$

2. $DF_n(x)=D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I(x-X_k)\right]=\frac{1}{n^2}D\left[\sum_{k=1}^{n}I(x-X_k)\right]=\frac{1}{n^2}npq=\frac{F(x)\left(1-F(x)\right)}{n}$

3. Если $X_1,X_2,\ldots X_n,\ldots.$ – выборка неограниченного объема, то $F_n(x)\xrightarrow{P}F(x)$.

Сравнение оценок.

Определение. Если $\hat{\theta} = f_1(X_1, X_2, \ldots X_n)$ и $\tilde{\theta} = f_2(X_1, X_2, \ldots X_n)$ – две несмещенные оценки параметра θ, и $D\hat{\theta} < D\tilde{\theta}$. Тогда оценка $\hat{\theta}$ *называется более эффективной*, чем оценка $\tilde{\theta}$.

Пример 5

Смысл свойств (кратко):

Несмещённость: Отсутствие систематической ошибки в методике измерения. В среднем — попадём в цель.

Состоятельность: Уверенность, что увеличение объёма данных (больше смен, больше дней наблюдений) приведёт к увеличению точности оценки.

Эффективность: Выбор метода, который даёт самый точный результат при фиксированном объёме данных, минимизируя "разброс" оценок.

На заводе по производству подшипников автоматическая линия должна выпускать изделия с целевым диаметром μ мм. Из-за случайных колебаний температуры и износа оборудования диаметры готовых подшипников колеблются.

Для контроля качества начальник целя рассматривает два способа оценки среднего диаметра партии:

1. Среднее арифметическое: $\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, где X_i — диаметр \`i\`-го случайно отобранного подшипника.
2. Усечённое среднее: $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n-2}(X_{(2)} + X_{(3)} + \ldots + X_{(n-1)})$, где $X_{(1)}$ — самый маленький подшипник в выборке, а $X_{(n)}$ — самый большой. То есть, мы отбрасываем самое маленькое и самое большое наблюдение и усредняем оставшиеся.

Несмещённость:

Предположим, производственный процесс отлажен и распределение диаметров является симметричным относительно μ. Будут ли оценки $\hat{\mu}_1$ и $\hat{\mu}_2$ несмещёнными в этом случае?

Даёт ли метод отбрасывания экстремальных значений систематическое смещение в оценке целевого диаметра?

Эффективность:

Предположим, в процессе иногда случаются значительные выбросы из-за временного сбоя (например, один подшипник из ста имеет сильное отклонение). Какая оценка, по вашему мнению, будет более эффективной (иметь меньшую дисперсию) в такой ситуации? Почему?

Какой метод контроля качества обеспечит более стабильные и предсказуемые результаты и лучше защищён от случайного брака в выборке?

Состоятельность:

Являются ли обе оценки состоятельными? Что будет с ними при стремлении объёма выборки (количества измеряемых подшипников) к бесконечности?

Практический смысл: Если мы начнём проводить тотальный контроль всех подшипников без исключения, обе оценки приведут нас к истинному значению μ?

$X_1, ..., X_n$ — случайная выборка диаметров подшипников.

$E[X_i] = \mu$, $D[X_i] = \sigma^2$ (процесс отлажен, но есть случайные колебания).

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n-2}(X_{(2)} + X_{(3)} + ... + X_{(n-1)})$ (усечённое среднее, без min и max).

$$M[\hat{\mu}_1] = M[\bar{X}] = M[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu.$$

является несмещённой оценкой для μ.

Данная проверка сложнее. Упрощающее предположение: распределение диаметров симметрично относительно μ. При симметричном распределении математические ожидания крайних порядковых статистик также симметричны:

$E[X_{(1)}] = \mu - a$, $E[X_{(n)}] = \mu + a$ (для некоторого $a > 0$).

Тогда математическое ожидание суммы всех наблюдений можно выразить так:

$$M[\sum_{i=1}^{n} X_i] = M[X_{(1)} + X_{(2)} + \ldots + X_{(n)}] = M[X_{(1)}] + M[X_{(n)}] + M[\sum_{i=2}^{n-1} X_i] =$$
$$= (\mu - a) + (\mu + a) + M[\sum_{i=2}^{n-1} X_i] = 2\mu + M[\sum_{i=2}^{n-1} X_{(i)}].$$

С другой стороны, $M[\sum_{i=1}^{n} X_i] = n\mu$.

Приравниваем: $n\mu = 2\mu + M[\sum_{i=2}^{n-1} X_i]$

$$M[\sum_{i=2}^{n-1} X_i] = n\mu - 2\mu = (n-2)\mu$$

Следовательно,

$$M[\hat{\mu}_2] = M[\frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n-1} X_i] = \frac{1}{n-2} M[\sum_{i=2}^{n-1} X_i] = \frac{1}{n-2} \cdot (n-2)\mu = \mu .$$

Вывод: При симметричном распределении $\hat{\mu}_2$ также является несмещённой оценкой для μ.

2. Проверка на состоятельность

Согласно Закону Больших Чисел (ЗБЧ), выборочное среднее сходится по вероятности к математическому ожиданию: $\bar{X} \xrightarrow[n\to\infty]{P} \mu$.

Вывод: $\hat{\mu}_1$ является состоятельной оценкой.

Для $\hat{\mu}_2$:

При увеличении объёма выборки n до бесконечности, доля отбрасываемых наблюдений (2 наблюдения) стремится к нулю: $\frac{2}{n} \to 0$. Оценка $\hat{\mu}_2$ использует почти все данные, и её поведение также подчиняется ЗБЧ. Формально, можно показать, что разность между $\hat{\mu}_1$ и $\hat{\mu}_2$ стремится к нулю.

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}(X_{(1)} + X_{(n)} + \sum_{i=2}^{n-1} X_i)$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=2}^{n-1} X_i = \frac{n}{n-2} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n-1} X_i$$

Разность: $\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}(X_{(1)} + X_{(n)}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n-2})\sum_{i=2}^{n-1} X_i$. Поскольку $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$ имеют ограниченные дисперсии, а множитель $\frac{1}{n} \to 0$, вся разность сходится к нулю. Следовательно, $\hat{\mu}_2$ ведёт себя так же, как и $\hat{\mu}_1$.

Вывод: $\hat{\mu}_2$ является состоятельной оценкой.

3. Сравнение эффективности

Эффективность сравнивается для несмещённых оценок. Мы установили, что обе оценки несмещённы (при симметрии).

Дисперсия $\hat{\mu}_1$: $D[\hat{\mu}_1] = D[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$.

Дисперсия $\hat{\mu}_2$: Точное вычисление дисперсии усечённого среднего сложно и зависит от распределения. Однако, можно дать качественную оценку. Усечённое среднее специально создано для того, чтобы уменьшить дисперсию в присутствии выбросов. Предположим, в выборке есть один подшипник с сильным отклонением (брак). В оценке $\hat{\mu}_1$ этот бракованный подшипник окажет сильное влияние на среднее. В оценке $\hat{\mu}_2$ этот подшипник с большой вероятностью окажется $X_{(1)}$ или $X_{(n)}$ и будет отброшен. Следовательно, $\hat{\mu}_2$ будет гораздо меньше подвержна этому выбросу.

В условиях, когда возможны значительные отклонения от нормы (тяжёлые "хвосты" у распределения), дисперсия усечённого среднего меньше, чем дисперсия обычного среднего. Значит, $\hat{\mu}_2$ более эффективна, чем $\hat{\mu}_1$, в такой ситуации.

Обе оценки являются несмещёнными и состоятельными. Однако усечённое среднее ($\hat{\mu}_2$) более робастно (устойчиво) к выбросам и в условиях реального производства, где возможен брак, является более эффективной оценкой. Его использование даёт более стабильные и надёжные результаты при контроле качества.

Пример 6

Финансовый аналитик хочет оценить среднюю доходность (μ) акций некоторой компании. Доходность — это случайная величина с неизвестной дисперсией (σ^2).

У него есть два предложения:

1. Обычное среднее: $\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, где X_i — доходность за `i`-й день.

2. Взвешенное среднее: $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n+1}(X_1 + 2X_2 + 3X_3 + ... + nX_n)$. Чем позже дата, тем больший вес придаётся наблюдению (подразумевается, что последние данные более релевантны).

Несмещённость:

Является ли оценка $\hat{\mu}_2$ несмещённой для μ? Является ли несмещённой оценка $\hat{\mu}_1$?

Склонна ли стратегия, ставящая на последние данные, систематически завышать или занижать истинную ожидаемую доходность?

Является ли оценка $\hat{\mu}_2$ состоятельной? Устремится ли она к истинному значению μ, если аналитик будет собирать данные за всё большее количество дней (`n → ∞`)?

Если аналитик будет использовать взвешенную оценку $\hat{\mu}_2$ долгие годы, получит ли он в итоге верное представление о средней доходности актива?

В какой реальной ситуации оценка $\hat{\mu}_2$ может оказаться полезнее, чем $\hat{\mu}_1$, несмотря на её формальные недостатки? (Подсказка: если средняя доходность μ со временем не постоянна, а медленно дрейфует — это называется "нестационарный процесс").

Практический смысл: Свойства "несмещённость" и "состоятельность" критически зависят от предположения о постоянстве оцениваемого параметра. В реальном мире это предположение часто нарушается.

$X_1, ..., X_n$ — доходность актива за последовательные дни.

$M[X_i] = \mu$, $D[X_i] = \sigma^2$ (предполагается, что процесс стационарен).

Оценка 1: $\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Оценка 2: $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n+1}(1 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + ... + n \cdot X_n)$

1. Проверка на несмещённость

$M[\hat{\mu}_1] = M[\bar{X}] = \mu$. Вывод: $\hat{\mu}_1$ — несмещённая.

$$M[\hat{\mu}2] = M[\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} i \cdot [X_i] = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} i \cdot M[X_i] = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} i \cdot \mu = \frac{\mu}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} i\,.$$

Сумма первых n натуральных чисел: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Подставляем:

$$E[\hat{\mu}_2] = \frac{\mu}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{\mu n}{2}.$$

Вывод: $E[\hat{\mu}_2] = \frac{n}{2}\mu \neq \mu$ (для $n > 2$). Оценка $\hat{\mu}_2$ является смещённой. Её смещение : $(\hat{\mu}_2) = M[\hat{\mu}_2] - \mu = \frac{n}{2}\mu - \mu = \mu(\frac{n}{2} - 1)$.

Смещение растёт с ростом объёма выборки n, что является крайне нежелательным свойством.

Мы выяснили, что $E[\hat{\mu}_2] = \frac{n}{2}\mu$. При $n \to \infty$ математическое ожидание оценки стремится к бесконечности (если $\mu > 0$) или к минус бесконечности (если $\mu < 0$). Оценка не сходится к истинному параметру μ ни по вероятности, ни в каком-либо другом смысле.

Вывод: $\hat{\mu}_2$ является несостоятельной оценкой. Это делает её совершенно непригодной для использования при большом объёме данных.

Формальный анализ показывает, что $\hat{\mu}_2$ — плохая оценка для постоянного параметра μ. Однако в реальности финансовые рынки часто нестационарны: средняя доходность μ может медленно меняться во времени (дрейфовать).

В этом случае последние данные действительно несут больше информации о текущем значении доходности, чем старые. Оценка $\hat{\mu}_1$, усредняющая все данные с одинаковым весом, будет слишком "медленной" и будет отставать от изменений рынка.

Оценка $\hat{\mu}_2$, хотя и несостоятельная для постоянного μ, может лучше отслеживать изменение. Её формальный недостаток (большие веса на последние наблюдения) становится практическим преимуществом. Более того, можно модифицировать оценку, чтобы она была состоятельной для меняющегося параметра, например, использовать экспоненциальное сглаживание с весами, затухающими в прошлое ($w_i = \lambda^{n-i}$), где сумма весов равна 1. Оценка $\hat{\mu}_2$ является грубым и неудачным аппроксимацией этой идеи.

$\hat{\mu}_1$ является несмещённой, состоятельной и эффективной (по теореме Гаусса-Маркова при нормальности ошибок).

$\hat{\mu}_2$ является смещённой и несостоятельной, её использование недопустимо.

Для отслеживания меняющейся средней доходности (μ_t меняется со временем t):

$\hat{\mu}_1$ непригодна, так как слишком инертна.

Идея, заложенная в $\hat{\mu}_2$ (учёт релевантности свежих данных), верна, но сама оценка реализована плохо. Следует использовать более сложные модели (скользящие средние, модели с изменяющейся волатильностью, GARCH), которые формально корректно определяют веса для разных моментов времени.