

10/02/2025

Механические колебания

Самый простой тип - гармонические колебания.

Колебания по следующему закону: $\xi = \xi_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$

Рассматриваем "1D" (одна степень свободы) механическую систему, в которой отсутствуют "силы трения" (т.е. выполняется ЗСЭ (закон сохранения энергии)).

$$E = const, E = K + V$$

K - связано с скоростью, V - с положением

Для материальной точки: $K = \frac{mV^2}{2}$, $U = U(\vec{r})$

Рассмотрим отклонения системы от положения равновесия.

В точке равновесия $U(\vec{r}) = min$

$$U(r) = U(r_0) + \frac{d}{dr}U(r_0)(r - r_0) + \frac{d^2}{dr^2}U(r_0)\frac{(r - r_0)^2}{2} + \dots$$

$\frac{d}{dr}U(r_0) = 0$, т.к. экстремум

Выберем $U(r_0) = 0 \Rightarrow U(r) = \frac{d^2}{dr^2}U(r_0)\frac{(r-r_0)^2}{2} \Rightarrow U = C\frac{\xi^2}{2}$

$$U_{ynp} = \frac{kx^2}{2}$$

$$E = \frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = Const$$

Если $V = 0 \Rightarrow x = x_{max}$

Если $x = 0 \Rightarrow V = V_{max}$

$$\Rightarrow E = \frac{mV_{max}^2}{2} = \frac{kx_{max}^2}{2}$$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2E} + \frac{kx^2}{2E} = 1$$

$$\frac{dx}{dt} = V_{max} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_{max}}\right)^2}$$

$$\int \frac{d\left(\frac{x}{x_{max}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_{max}}\right)^2}} = \int \frac{V_{max}}{x_{max}} dt$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{x_{max}}\right) = \frac{V_{max}}{x_{max}}t + const$$

$$x(t) = X_{max} \sin\left(\frac{V_{max}}{X_{max}}t + \varphi\right)$$

$$(*) \Rightarrow \frac{V_{max}^2}{X_{max}^2} = \frac{k}{m}$$

$$\frac{V_{max}}{X_{max}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$$

ω_0 - частота гармонических колебаний

$$X = X_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Начальные условия

$$x(0) = x_0$$

$$V(0) = V_0$$

$$x_0 = X_{max} \sin(\varphi)$$

$$V_0 = \omega_0 X_{max} \cos(\varphi)$$

Энергетический способ нахождения собственных частот.

Если система описывается соотношением $E = \frac{\alpha \dot{q}^2}{2} + \frac{\beta q^2}{2}$, где q - некоторая координата, а \dot{q} - "скорость", то

$$\omega_0^2 = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$E = \frac{m \dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$$

$$\alpha = m, \beta = k, q = x, \dot{q} = \dot{x} = V$$

Физический маятник

$$\varphi \ll 1$$

$$E = K + U$$

$$U = mgh_C$$

h_C - высота центра масс

$$h_C = l_C - l_C \cos \varphi$$

$$= l_C(1 - \cos \varphi)$$

$$\varphi \ll 1$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

$$U = mgl_C \frac{\varphi^2}{2}$$

r - расстояние до оси вращения z

$$dK = \frac{dmV^2}{2} = \frac{dm(\omega r)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}(r^2 dm)$$

ω одинакова для всех точек тела

$$K = \int_{V_0} \frac{\omega^2}{2} r^2 dm = \frac{\omega^2}{2} \int_{V_0} r^2 dm = \frac{\omega^2}{2} I_z$$

$$\omega = \dot{\varphi} \Rightarrow K = \frac{I \dot{\varphi}^2}{2} \Rightarrow$$

$$E = \frac{I_z \dot{\varphi}^2}{2} + mgl_C \frac{\varphi^2}{2}$$

$$dI_z = dm x^2$$

$$\frac{dm}{M} = \frac{dx}{l} \Rightarrow dm = \frac{M}{l} dx$$

$$I_z = \int_0^{l/2} \frac{M}{l} x^2 dx = 2 \int_0^{l/2} \frac{M}{l} x^2 dx = \frac{Ml^2}{12}$$

Теорема Гюйгенса-Штейнера

$$z' \parallel z$$

$$I_{z'} = I_{z,C}$$

$$I_{z,0} = I_{z,C} + ma^2$$

Её применение

$$I_{z_1} = I_{z_1,C} + M \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{3}$$

$$l_C = \frac{l}{2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{mgl_C}{I_z} = \frac{mg \frac{l}{2}}{\frac{ml^2}{3}} = \frac{3}{2} \frac{g}{l}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{g}{l}}$$

$$\vec{F}_{ypp} = -k\vec{x}$$

$$F_x = -kx$$

$$F_x = m\dot{x}$$

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

\vec{x} - смещение от положения покоя

Подставляем $x = e^{\lambda t}$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \lambda e^{\lambda t} \\
x'' &= \lambda^2 e^{\lambda t} \\
\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{k}{m} e^{\lambda t} &= 0 \\
e^{\lambda t} \left(\lambda^2 + \frac{k}{m} \right) &= 0 \\
\lambda^2 &= -\frac{k}{m} \\
\lambda &= \pm i \sqrt{\frac{k}{m}} \\
\tilde{x}_1 &= e^{i\omega_0 t} \\
\tilde{x}_2 &= e^{-i\omega_0 t} \\
x &= C^i \tilde{x}_i \\
\cos(\omega_0 t) &= \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}}{2} \\
\sin(i\omega_0 t) &= \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} x = A \sin \lambda t + B \cos \lambda t \\
X_{max} &= \sqrt{A^2 + B^2} \\
x &= X_{max} \sin(\omega_0 t + \varphi)
\end{aligned}$$

Если уравнение динамики приводит к соотношению $q'' + \omega_0^2 q = 0$, то это гармонические колебания

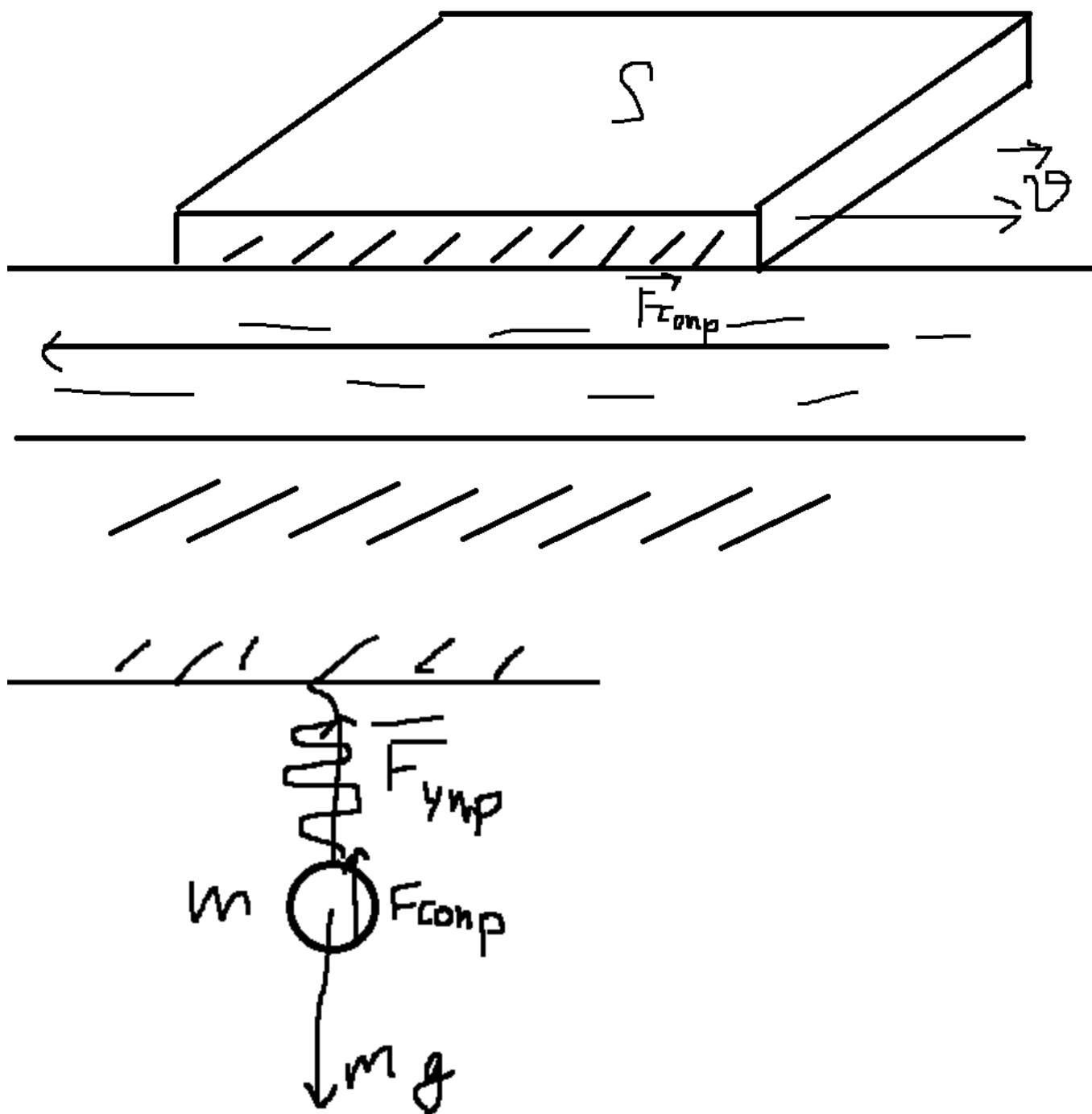
Пример

$$\begin{aligned}
F &= \Delta m g \\
\Delta m &= \rho \Delta V \\
\Delta V &= S \cdot 2x \\
F &= \rho 2x S g \\
m x'' &= -2\rho S g x \\
x'' + \frac{2\rho S g}{m} x &= 0 \\
\alpha &= \omega_0^2 \\
\omega_0 &= \sqrt{\frac{2\rho S g}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}
\end{aligned}$$

17/02/2025

Затухающие колебания

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{\text{упр}} &= -k\vec{x} \\
\text{Сила сопротивления} \\
\vec{F}_{\text{сопр}} &= -\frac{\eta S}{\delta} \vec{v} = -C\vec{v}
\end{aligned}$$



$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}}$$

$$m\ddot{x} = -kx - C\dot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{C}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Leftrightarrow$$

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ - дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\begin{aligned}x - e^{\lambda t} \\ \dot{x} - \lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{x} - \lambda^2 e^{\lambda t}\end{aligned}$$

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2) = 0$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$D = 4\beta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\beta^2 - \omega_0^2)$$

Рассмотрим только случай $\omega_0^2 \gg \beta$ (слабое затухание)

$$\Rightarrow D < 0 \Rightarrow \sqrt{D} = \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$\omega_{\text{зк}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - частота (свободных) затухающих колебаний

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega_{\text{зк}}$$

Общее решение

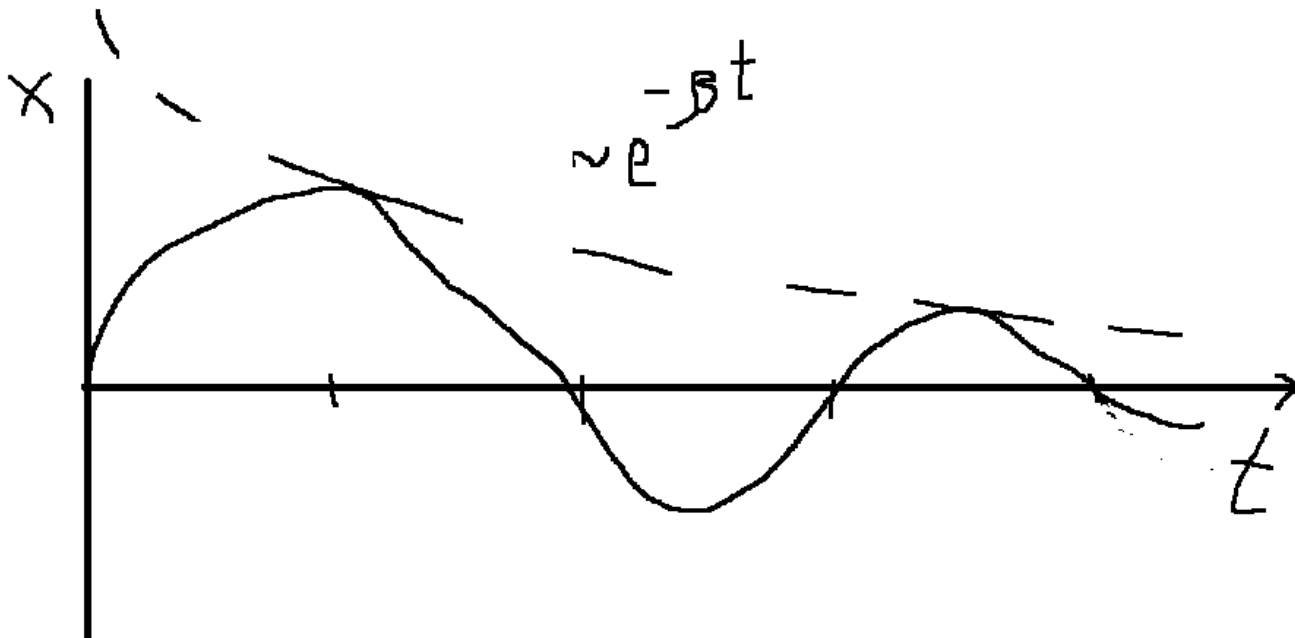
$$\begin{aligned}x(t) &= A_1 e^{(-\beta + i\omega_{\text{зк}})t} + A_2 e^{(-\beta - i\omega_{\text{зк}})t} = \\ &= e^{-\beta t} (A_1 e^{i\omega_{\text{зк}}t} + A_2 e^{-i\omega_{\text{зк}}t})\end{aligned}$$

Может быть представлено в виде

$$A \sin(\omega_{\text{зк}}t + \varphi)$$

$$x(t) = A e^{-\beta t} \sin(\omega_{\text{зк}}t + \varphi)$$

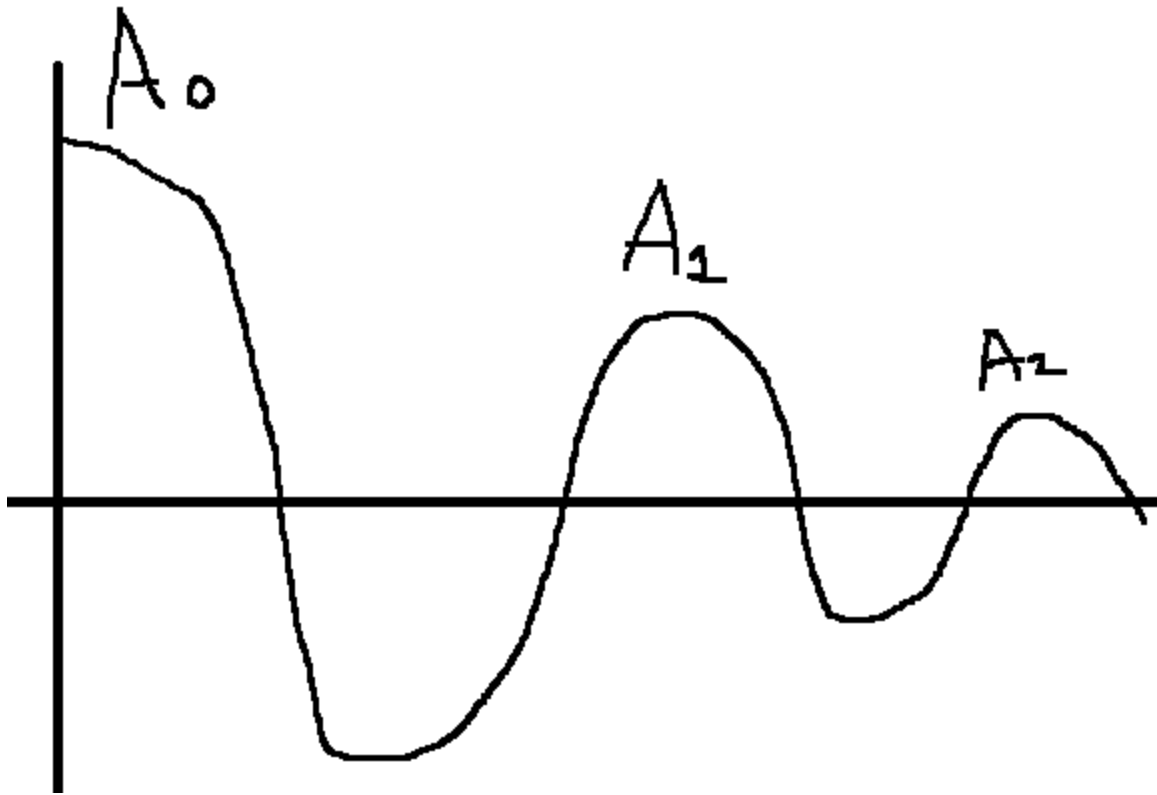
$$\varphi = 0$$



$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x(t) = A e^{-\beta t} \cos \omega_{\text{зк}}t$$

Рассмотрим $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos \omega_{\text{зк}}t$$



Рассмотрим точки максимального отклонения

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_0 e^{-\beta t} (-\beta \cos \omega_{\text{зк}} t - \omega_{\text{зк}} \sin \omega_{\text{зк}} t) \approx \\ &\omega_0 \gg \beta \implies \omega_{\text{зк}} \gg \beta \\ &\approx -A_0 e^{-\beta t} \omega_{\text{зк}} \sin \omega_{\text{зк}} t\end{aligned}$$

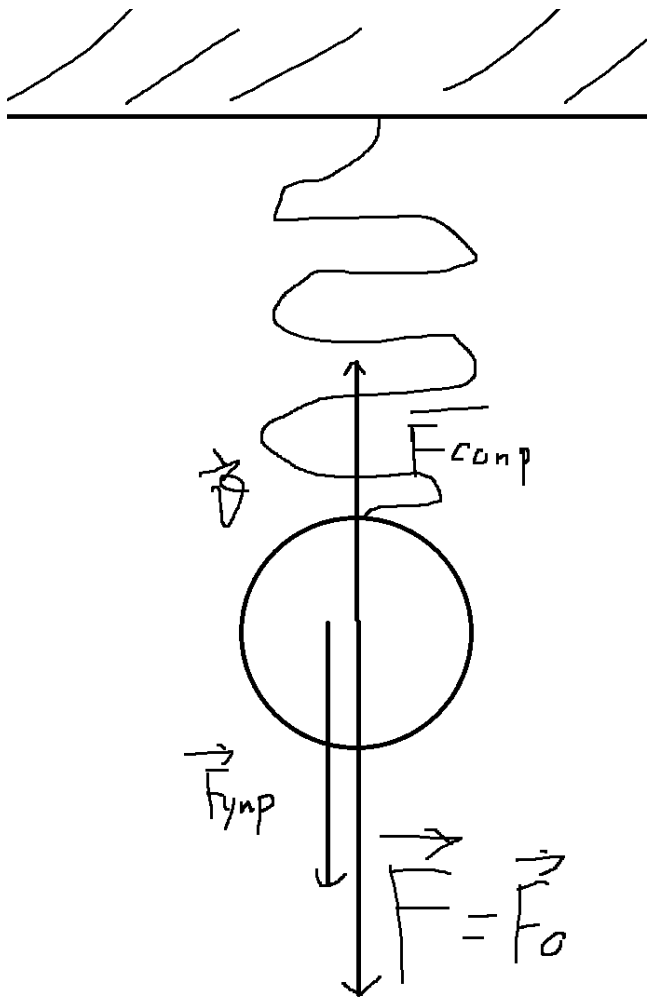
Точки $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ соответствуют фазе $\omega_{\text{зк}} t = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}A_n &= A_0 e^{-\beta T_{\text{зк}} n} \\ T_{\text{зк}} &= \frac{2\pi}{\omega_{\text{зк}}} \\ \omega &= 2\pi\nu, \omega = \frac{2\pi}{T}, \nu = \frac{1}{T} \\ \frac{A_n}{A_{n+1}} &= e^{\beta T_{\text{зк}}} - \text{дискриминант затухания}\end{aligned}$$

$$\ln \left(\frac{A_n}{A_{n+1}} \right) = \beta T_{\text{зк}}$$

логарифмический дискриминант затухания

Вынужденные колебания с учётом затухания



$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}_{\text{сопр}} + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}$$

ω - частота вынуждающей силы

$$m\ddot{x} = -kx - C\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{C}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

$$\frac{C}{m} = 2\beta, \frac{k}{m} = \omega_0^2, \frac{F_0}{m} = f_0$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

$$x(t) = x_{\text{однородное}}(t) + x_{\text{частное неоднородного}}(t)$$

$$x_{\text{однородное}} = Ae^{-\beta t} \sin(\omega_{\text{зк}} t + \varphi) \quad (1)$$

В соотн (1) A и φ определяются начальными условиями

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

С течением времени ($t \rightarrow \infty$)

$$|x_{\text{общ,о}}(t)| \rightarrow 0$$

Поэтому частное решение $x_{\text{ч}}(t)$ ищем в виде

$$x = A(\omega) \cos(\omega t + \psi(\omega))$$

$A(\omega)$ - амплитуда

$\psi(\omega)$ - смещение

Частное решение найдём методом комплексных рядов

$$f_0 \cos \omega t = \text{Re}(f_0 e^{i\omega t})$$

$$x(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \psi(\omega)) =$$

$$= \text{Re}(A(\omega) e^{i\psi(\omega)} \cdot e^{i\omega t}) =$$

$$\begin{cases} \overline{A} = A(\omega) e^{i\psi(\omega)} \\ \overline{x} = A(\omega) e^{i\psi(\omega)} \cdot e^{i\omega t} \end{cases}$$

$$= \text{Re}(\overline{x})$$

$$\dot{\overline{x}} = \overline{A}(\omega) \cdot i\omega e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\overline{x}} = \overline{A}(\omega)(-\omega^2) e^{i\omega t}$$

$$e^{i\omega t} \overline{A}(\omega)(-\omega^2 + 2\beta i\omega + \omega_0^2) = f_0 e^{-i\omega t}$$

$$\overline{A}(\omega) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta i\omega}$$

$$A(\omega) = |\overline{A}(\omega)|$$

$$A(\omega) = |\overline{A}(\omega)| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$$

Исследуем при какой частоте ω_{max} $A = A_{\text{max}}$:

$$\min_{z = \omega^2} \xi(\omega) = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2$$

$$z = \omega^2$$

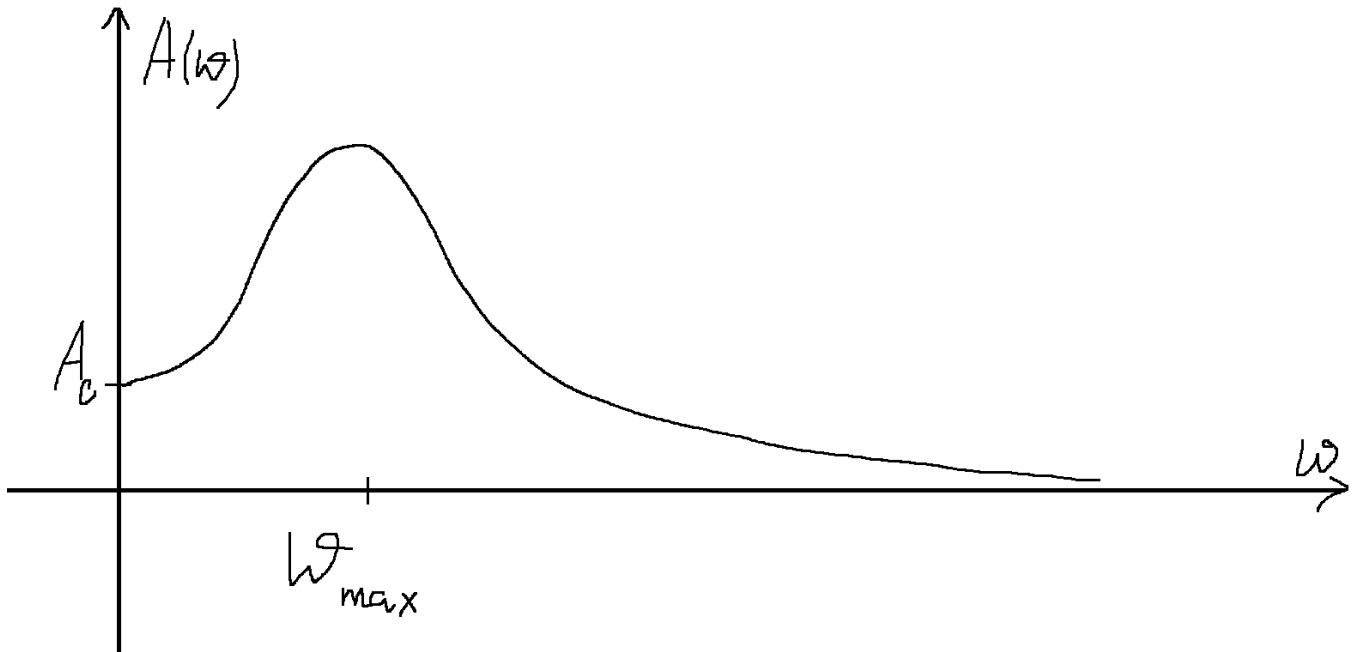
$$\xi(z) = (z - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 z =$$

$$\frac{d\xi}{dz} = 0 \implies 2(z - \omega_0^2) + 4\beta^2 = 0$$

$$z_{\max} = \omega_0^2 - 2\beta^2$$

$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega_{\text{зк}}^2 - \beta^2}$$

$$A(0) = \frac{f_0}{\omega_0^2}$$



Резонансная кривая aka Амплитудно-частотная харатеристика

$$\omega \gg \omega_0$$

$$A(\omega) \approx \frac{f_0}{\omega^2}$$

$$A(0) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m}} = \frac{F_0}{k} = X_{\text{статическое}}$$

$$F = -kx \quad \left| \frac{F}{k} \right| = x$$

$$A_{\max} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - 2\beta^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^2(\omega_0^2 - \beta^2)}} = \frac{f_0}{2\beta\omega_{\text{зк}}}$$

$$\Gamma = \frac{A(\omega_{\max})}{A(0)} - \text{добротность колебаний системы}$$

$$\Gamma = \frac{f_0}{2\beta\omega_{\text{зк}}} : \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{2\beta\omega_{\text{зк}}} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\delta}$$

$$\beta \ll \omega_0 \Rightarrow \omega_{\text{зк}}, \quad \omega_{\max} \approx \omega_0$$

17/02/2025 2

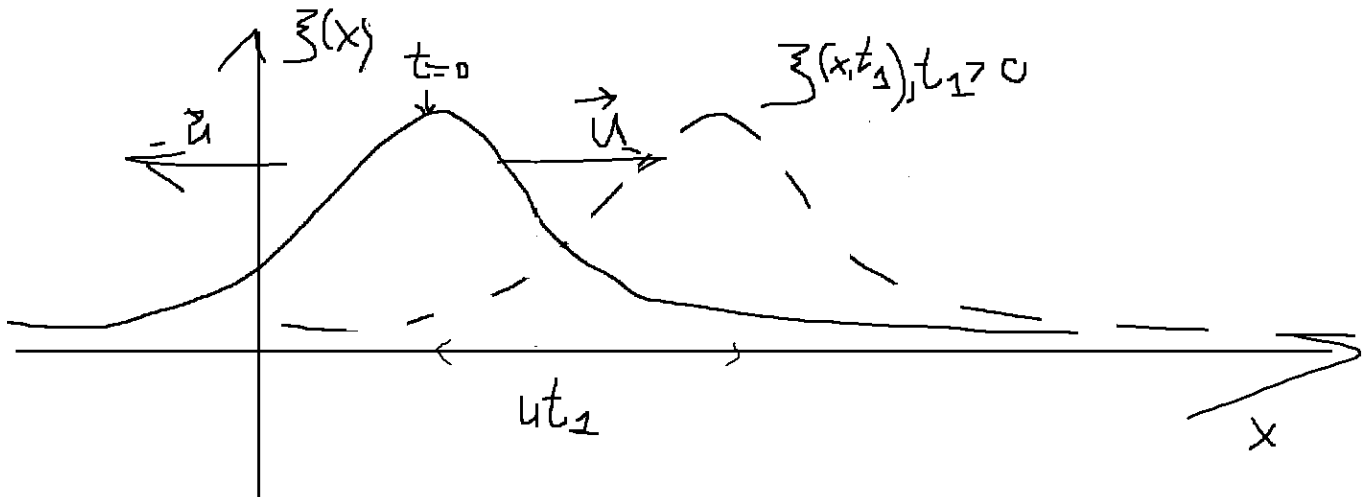
Упругие волны

Волна - распространение некоторого возмущения в среде

Возмущение - отклонение некоторого свойства среды от равновесного

Фронт волны - поверхность, докуда дошло возмущение

Волновая поверхность - множество точек, в которых волна имеет одинаковую фазу (состояние)



$$\xi(x, t_1) = \xi(x - ut_1)$$

$$\psi = x - ut \quad \frac{\partial}{\partial t} \xi(x - ut) = \frac{d\xi}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -u \frac{d\xi}{d\psi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \xi(x - ut) = \frac{d\xi}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{d\xi}{d\psi}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi = -u \frac{d}{d\psi} \left(\frac{d\xi}{d\psi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} = u^2 \frac{d^2 \xi}{d\psi^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{d}{d\psi} \left(\frac{d\xi}{d\psi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{d^2 \xi}{d\psi^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi = 0$$

Было выведено дифференциальное волновое уравнение (одномерное)

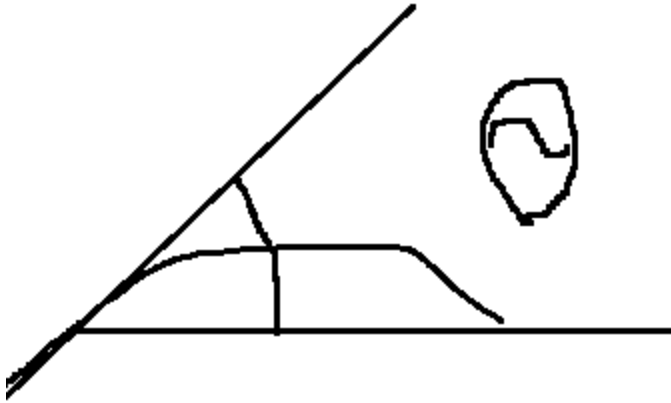
Пример:

Волна в натянутой струне.

Упрощения:

1. Струна не сопротивляется изгибу

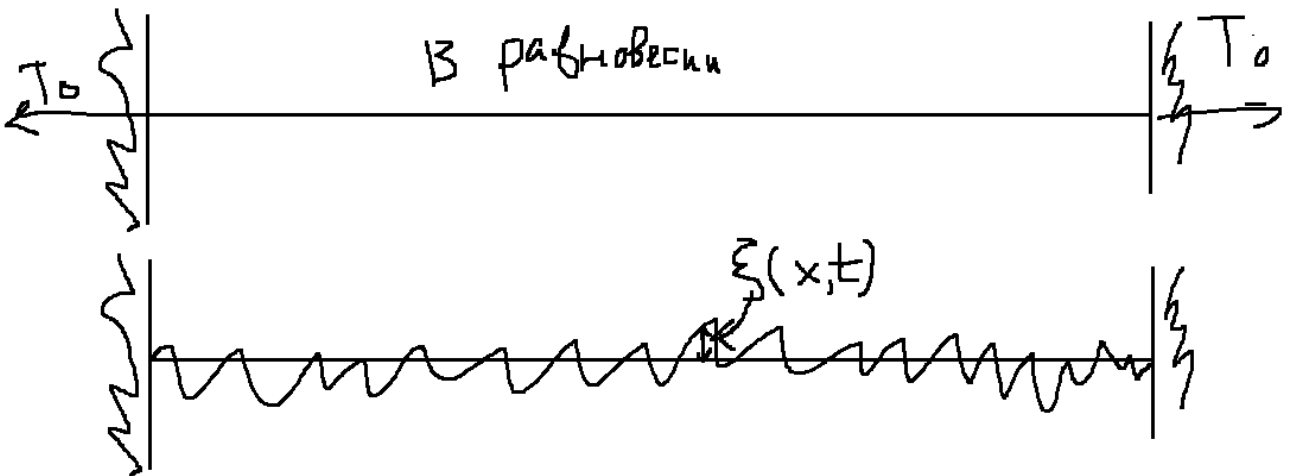
2. Углы, образованные струной с осью x малы



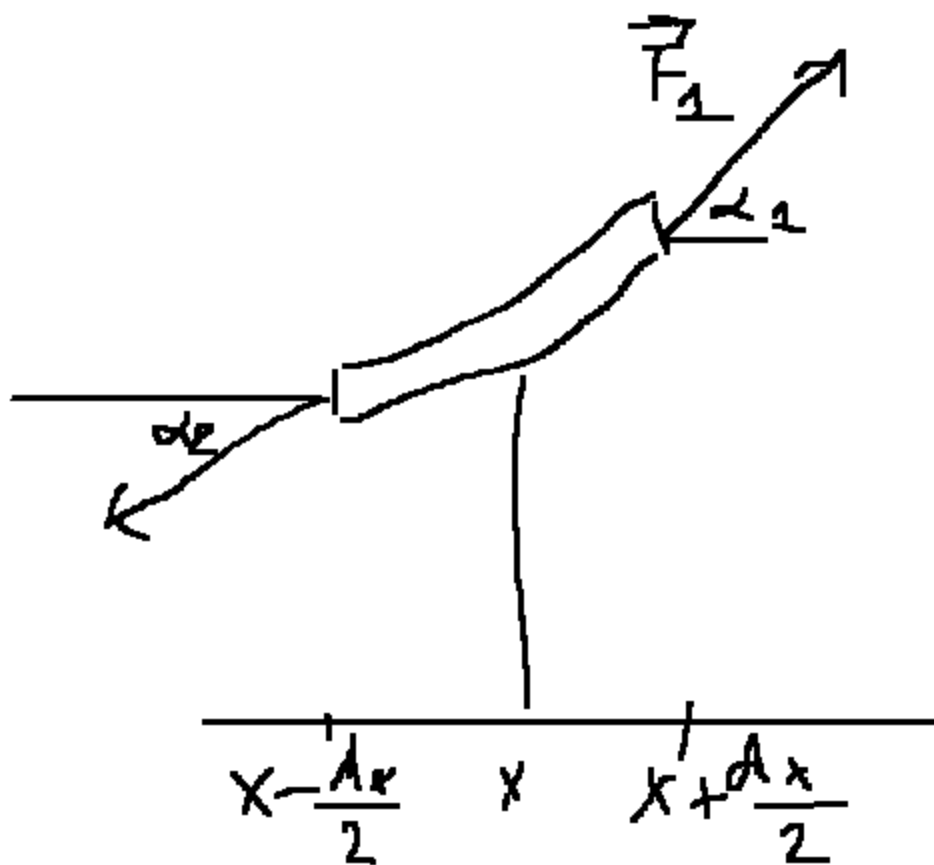
$$\theta \ll 1$$

3. Натяжение струны при возмущении остаётся постоянным

$$\vec{T}_0 = \text{const}$$



Рассмотрим малую участок струны длиной dx



$$dm \vec{v} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad |\vec{F}_i| = T_0$$

$$F_y = T_0 \sin \alpha_1 - T_0 \sin \alpha_2 = T_0(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2)$$

$$\alpha_1 = \theta_1$$

$$\alpha_2 = \pi + \theta_2$$

$$F_y = T_0(\sin \theta_1 - \sin(\theta_2)) =$$

$$\theta \ll 1 \implies \operatorname{tg}(\theta) \approx \sin(\theta)$$

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$F_{1,y} = T_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x + \frac{dx}{2}$$

$$F_{2,y} = T_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x - \frac{dx}{2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \xi \right)_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \xi \right) \frac{dx}{2} =$$

$$= F_y = T_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x+\frac{dx}{2}} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x-\frac{dx}{2}} \right) =$$

$$= T_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi \right) dx$$

$$dm = \rho_l dx, \quad \dot{V}_y = \ddot{\xi}$$

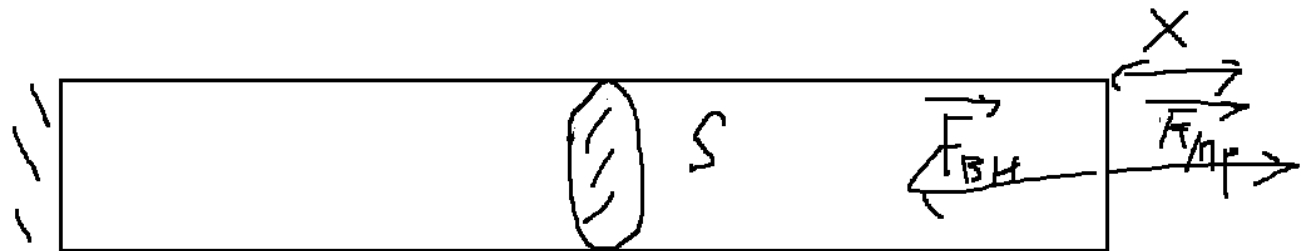
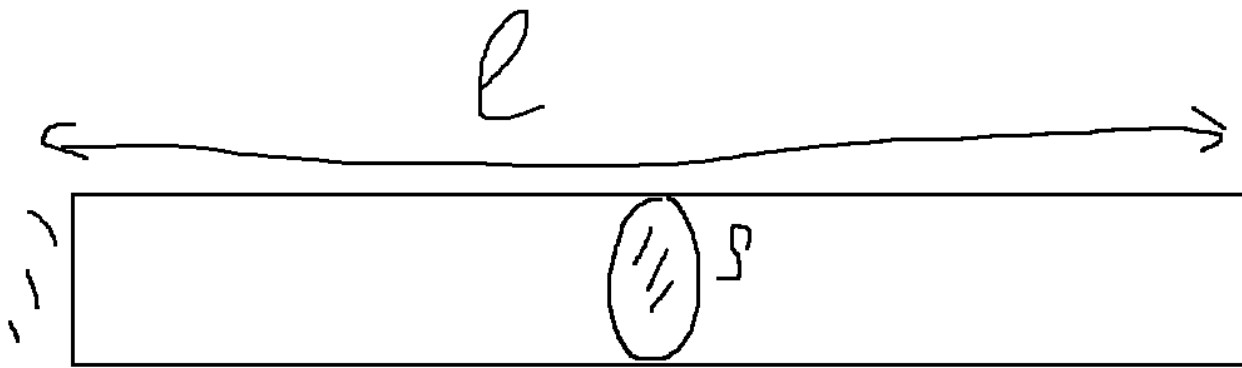
ρ_l - линейная плотность струны

$$\rho_l dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi = T_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi dx$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi - \frac{1}{\frac{T_0}{\rho_l}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi = 0$$

$$u^2 = \frac{T_0}{\rho_l} \implies u = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_l}} - \text{фазовая скорость волны}$$

Упругие волны стержня



$$F_{\text{упр}} = -kx$$

$$\frac{F_{\text{упр}}}{S} = -\frac{kx}{S}$$

$$\sigma_x = -\frac{C}{S}x$$

$$k \sim \frac{S}{l}$$

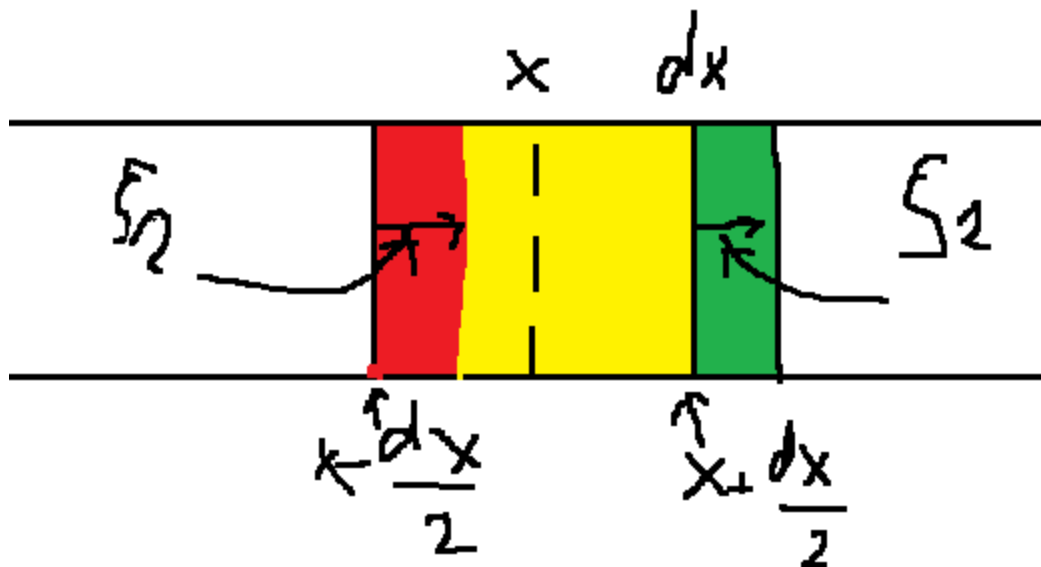
$$k = \frac{ES}{l}$$

$$x \sim l$$

$$\varepsilon = \frac{x}{l} \text{ - относительная деформация}$$

E - модуль Юнга - характеристика материала

$$\sigma_x = -E\varepsilon \text{ - механическое напряжение}$$



$$\varepsilon = ?$$

Начальная длина - dx

Конечная длина - $dx + \xi_1 - \xi_2$

Деформация - $\xi_1 - \xi_2$

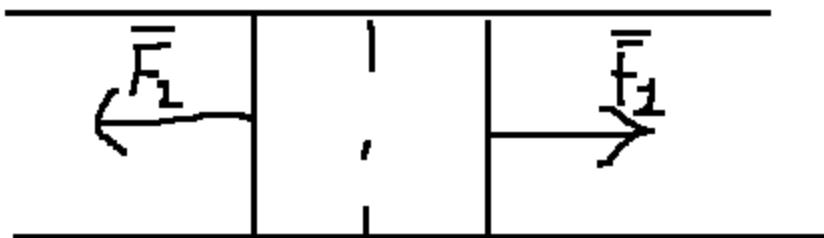
$$\xi_1 = \xi \left(x + \frac{dx}{2} \right), \quad \xi_2 = \xi \left(x - \frac{dx}{2} \right)$$

$$\varepsilon = \frac{\xi \left(x + \frac{dx}{2} \right) - \xi \left(x - \frac{dx}{2} \right)}{dx} =$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial x} \xi dx}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} \xi$$

$$x - \frac{dx}{2} \quad x + \frac{dx}{2}$$

x



$$dm \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi = F_x^\Sigma$$

$$F_x^\Sigma = F_1 - F_2 = SE\varepsilon_1 - SE\varepsilon_2 = SE \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} \xi \right) \Big|_{x+\frac{dx}{2}} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \xi \right) \Big|_{x-\frac{dx}{2}} \right) = SE \frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi dx$$

$$\rho S dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi = SE \frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi dx$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi - \frac{1}{E/\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi = 0$$

В струне - поперечные волны (смещение перпендикулярно распространению)

В стержне - продольные волны (смещение параллельно распространению, вдоль распространения)

Синусоидальные плоские волны

Пусть при $x = 0$

$$\xi(0, t) = \xi^{\wedge}(t) = A \sin \omega t$$

$$\xi(x, t) = ?$$

Знаем $\xi(x, t) = \xi(x - ut) \implies$

$$\xi(0, t) = \xi(-ut)$$

$$A \sin \omega t = A \sin(\alpha(-ut))$$

$$x = 0 \quad A \sin(k(x - ut)) =$$

$$= A \sin(\omega t + kx)$$

$$\text{фаза} = \omega = \text{const} \Rightarrow$$

$$d(\text{фаза}) =$$

$$\omega dt + k dx = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{k}$$

$$\xi - \sin$$

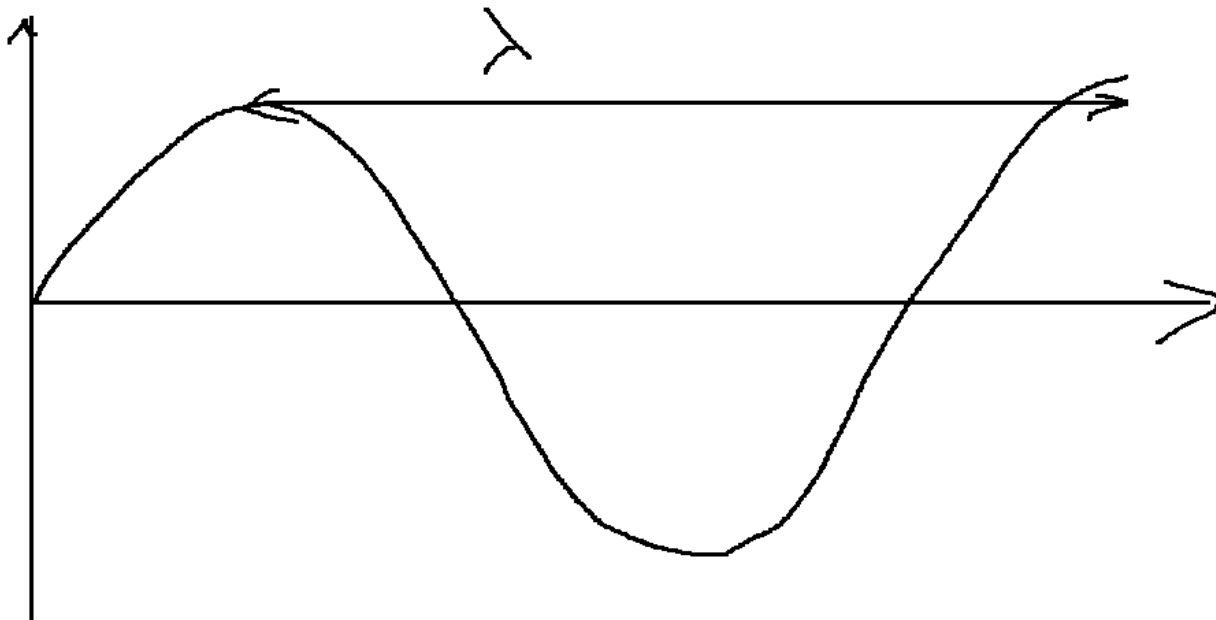
$$-\alpha u = \omega$$

$$\alpha = -\frac{\omega}{u}$$

Переобозначим $\alpha \equiv k$ - волновое число

$$A \sin(\omega t - kx)$$

λ - длина волны



$$k\lambda = 2\pi$$

$$\omega T = 2\pi$$

Стоячие волны

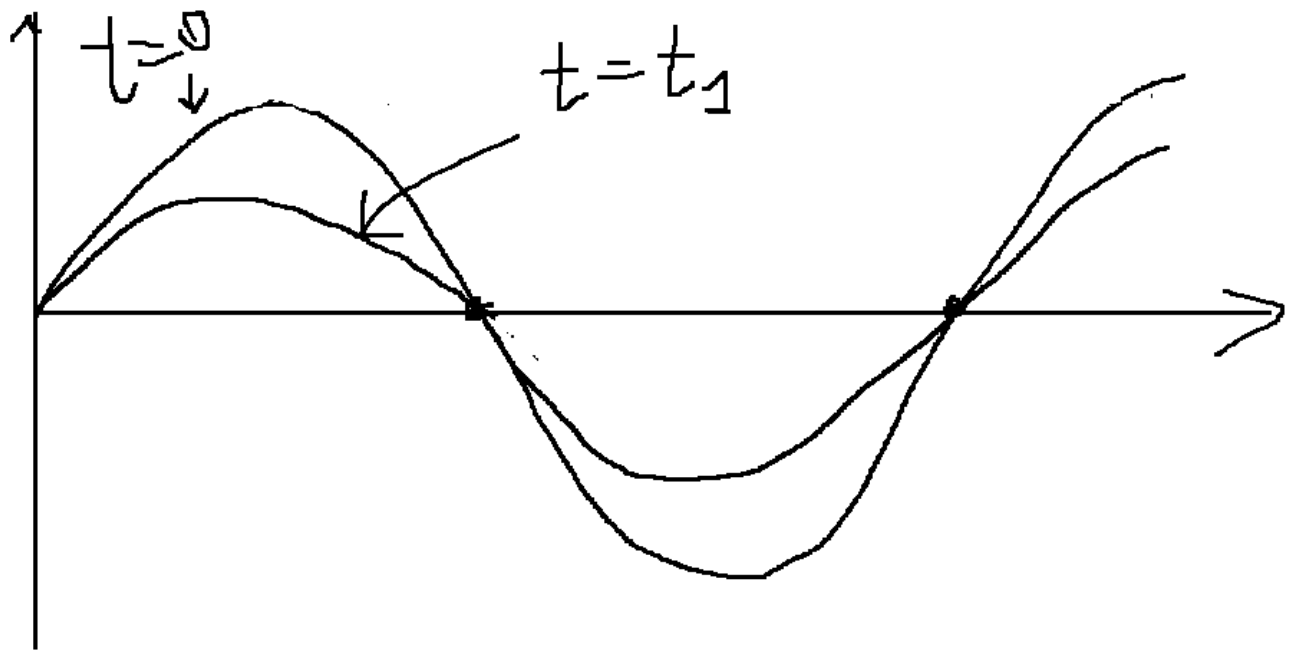
Имеются 2 волны с одинаковой амплитудой, бегущие навстречу друг другу.

I волна

II волна



$$\begin{aligned}\xi_1(x, t) &= A \cos(\omega t - kx) \\ \xi_2(x, t) &= A \cos(\omega t + kx) \\ \xi &= \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos(\omega t) \cos(kx) = \\ &= [2A \cos(kx)] \cos \omega t\end{aligned}$$



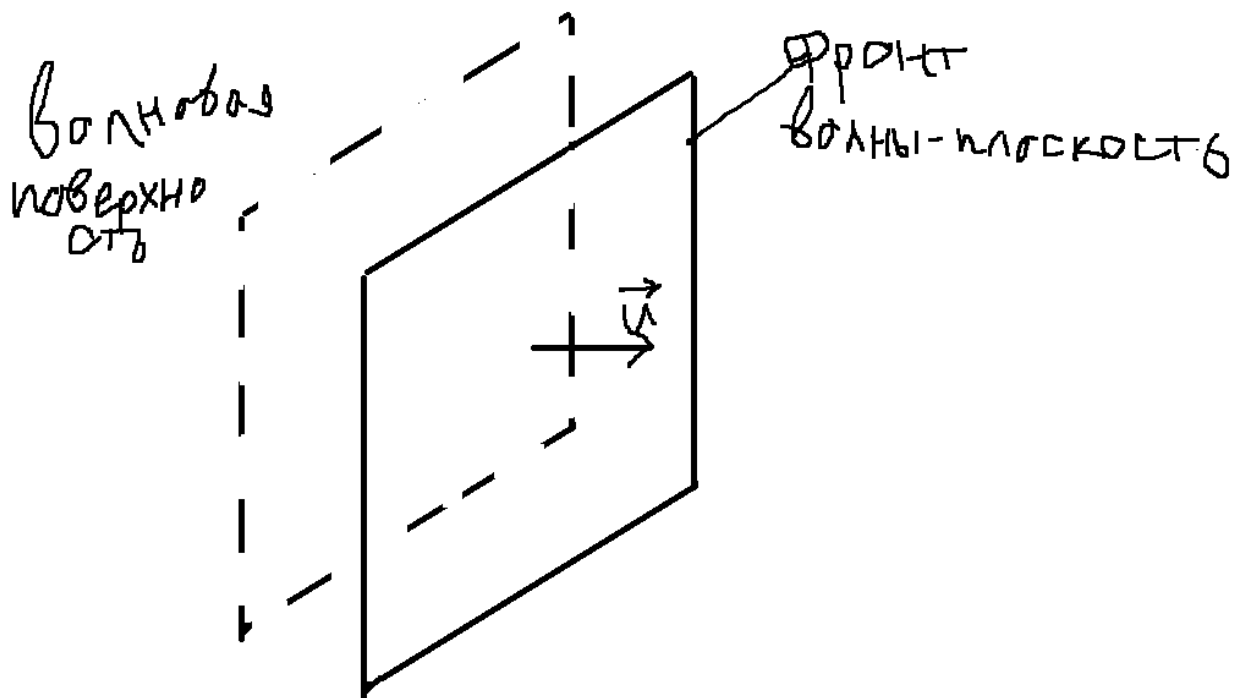
24/02/2025

Волны в пространстве

1D Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \text{соответствует}$$

Плоская волна, распространяющаяся параллельно оси 'X'



В 3D случае:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 - \text{оператор Лапласа в ДК}$$

$$\nabla^2 \xi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi = 0$$

∇ - набла (дифференциальный оператор Гамильтона)

$$\text{В } (x, y, z) \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$$

$$\text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$$

$$\text{grad } f = \nabla(f)$$

$$\nabla^2 f = \text{div} (\text{grad } f)$$

Решение 3D волнового уравнения в виде плоских волн:

$$\xi(x, y, z, t) = \xi_x(x - ut) + \xi_y(y - ut) + \xi_z(z - ut) + \dots$$

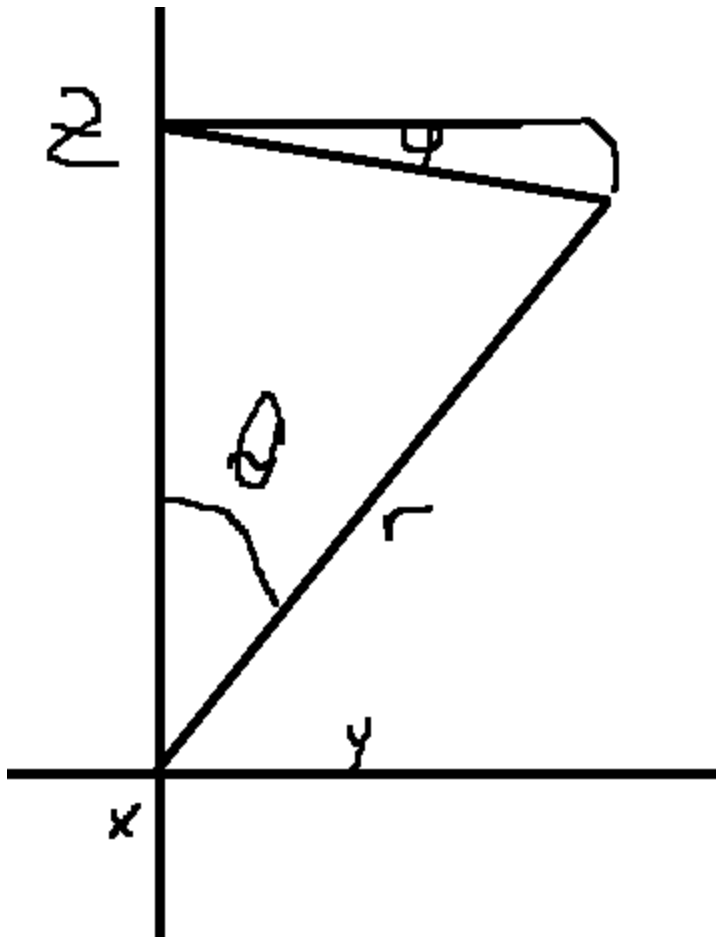
???

Решение 3D волнового уравнения в виде сферических волн

Имеем решение в виде $\xi = \xi(r, t)$

Найдём выражение для ∇_r^2 в сферической системе координат для случая, когда $f = f(r)$

$$\nabla_r^2 = \text{div} (\text{grad } f(r))$$



$$\text{grad } f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \vec{e}_r$$

$$\text{grad } \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\text{div } \vec{a} = \lim_{d_{\max} \rightarrow 0} \frac{\oint_{S_0} \vec{a} d\vec{S}}{V_0}$$

Для упрощения, рассмотрим бесконечно малый элемент объёма в сферических координатах

$$\text{grad } f(r) = \vec{a}(r)$$

$$\oiint_{dS_0} \vec{a} d\vec{S} = a(r+dr) dS_\perp(r+dr) - a(r) dS_\perp(r) =$$

$$dS_\perp(r+dr) = (r+dr) d\theta \cdot (r+dr) \sin \theta d\varphi = (r+dr)^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$dS_\perp(r) = r d\theta r \sin \theta d\varphi = r^2 \sin \theta d\varphi$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a) dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$dV_0 = dr \, r d\theta \, r \sin \theta d\varphi = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\oint_{dS_0} \vec{a} d\vec{S}}{dV_0} = \frac{\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a) \, \cancel{dr \sin \theta d\theta d\varphi}}{r^2 \, \cancel{dr \sin \theta d\theta d\varphi}} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 a)$$

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \xi}{\partial r} \right) - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi = 0$$

$$\frac{1}{r^2} (r^2 \xi'_r)' = \frac{1}{r^2} (2r \xi'_r + r^2 \xi''_{rr}) = \frac{2}{r} \xi'_r + \xi''_{rr} = \frac{1}{r} (2\xi'_r r + \xi''_{rr}) =$$

$$= \frac{1}{r} (\xi'_r + \xi'_r + r \xi''_{rr}) = \frac{1}{r} (\xi'_r + (r \xi'_r)'_r) = \frac{1}{r} (\xi + r \xi'_r)'_r = \frac{1}{r} (r \xi)''_{rr} \implies$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \xi) - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi = 0$$

$$r \neq 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \xi) - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \xi) = 0$$

$$r \xi = f$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (f) - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (f) = 0 \implies$$

$$\xi(r, t) = \frac{f(r, t)}{r}$$

Общее решение: $f(r, t) = f(r - ut)$

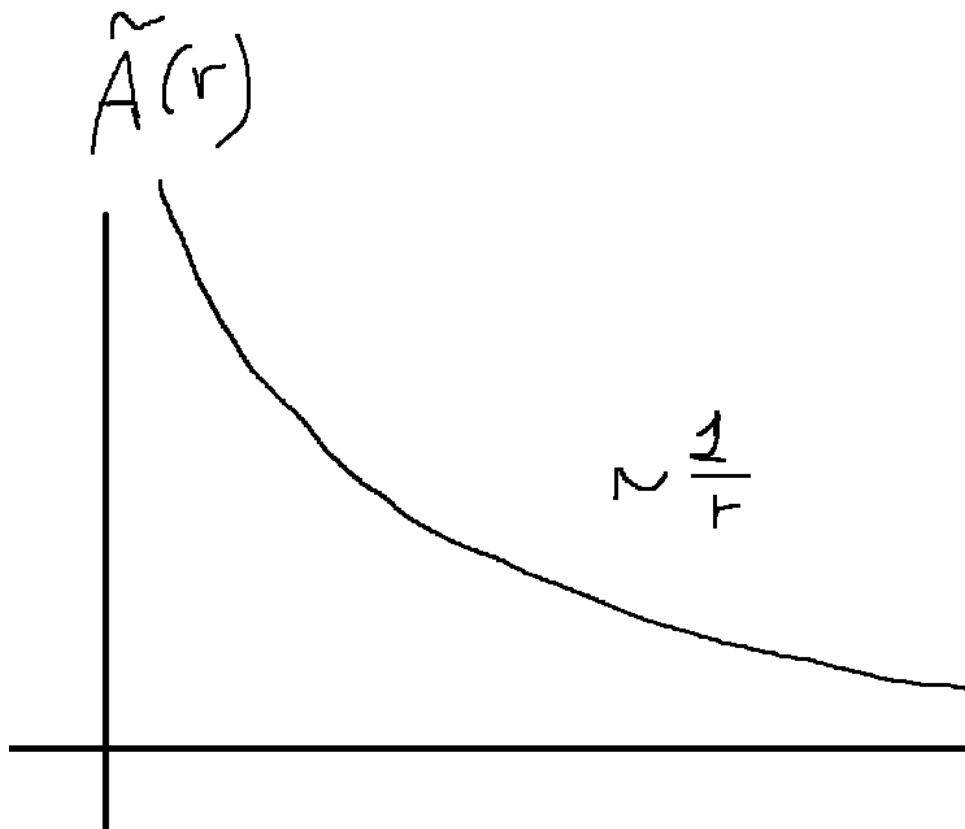
$$\xi(r, t) = \frac{f(r - ut)}{r}$$

Знак минус указывается на то, что волна распространяется от центра. (Расходящиеся от центра волны).

Синусоидальные сферические волны

$$\xi(r, t) = \frac{A_0 \cos(\omega t - kr)}{r} = \tilde{A}(r) \cos(\omega t - kr)$$

$$\tilde{A}(r) = \frac{A_0}{r}$$



Энергия упругой волны

Рассмотрим малый объем dV упругой среды.

$$dK = \frac{dmV^2}{2}$$

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}$$

$$dm = \rho dV$$

$$dK = \frac{\rho dV \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2}{2} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 dV$$

$$\omega_K = \frac{dK}{dV} - \text{объемная плотность энергии}$$

Потенциальная энергия сжатия (растяжения) стержня

$$d\omega_K = \frac{\rho}{2} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2$$

$$U_{\text{упр}} = \frac{kx^2}{2}$$

$$k = \frac{ES}{l}$$

$x = \varepsilon l$, где ε - относительная деформация

$$U_{\text{упр}} = \frac{\frac{ES}{l} \varepsilon^2 l^2}{2} = \frac{E \varepsilon^2}{2} \rho l$$

$$\omega_V = \frac{U_{\text{упр}}}{V} = \frac{E \varepsilon^2}{2}, \quad \varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow$$

Объёмная плотность полной потенциальной энергии

$$\omega_U = \frac{E}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$$

$\omega = \omega_K + \omega_V$ - объёмная плотность полной энергии в упругой (продольной) волне

$$\omega = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \frac{E}{2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2$$

Рассмотрим случай плоской синусоидальной волны

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -A\omega \sin(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = Ak \sin(\omega t - kx)$$

$$w = \frac{A^2 \sin^2(\omega t - kx)}{2} [\rho \omega^2 + Ek^2]$$

$$\xi = A \cos(\underbrace{\omega t - kx}_{\text{фаза}})$$

Найдём скорость движения поверхности постоянной фазы

$$\text{фаза} = \omega t - kx = \text{const}$$

$$d \text{ фаза} = \omega dt - k dx = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = u$$

$$u_{\text{ср}} = \frac{\omega}{k}$$

$$w = \frac{A^2 \sin^2(\omega t - kx)}{2} \left[1 + \frac{E}{\rho} \left(\frac{k}{\omega} \right)^2 \right]$$

Для стержня сплошной среды:

$$u_{\text{н}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow u^2 = \frac{E}{\rho}$$

$$w = A^2 \omega^2 \rho \sin^2(\omega t - kx)$$

$$\langle w \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T w(t) dt}{T}$$

$$\langle w \rangle = A^2 \omega^2 \rho \langle \sin^2(\omega t - kx) \rangle =$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\langle \sin^2 \alpha \rangle + \langle \cos^2 \alpha \rangle = 1$$

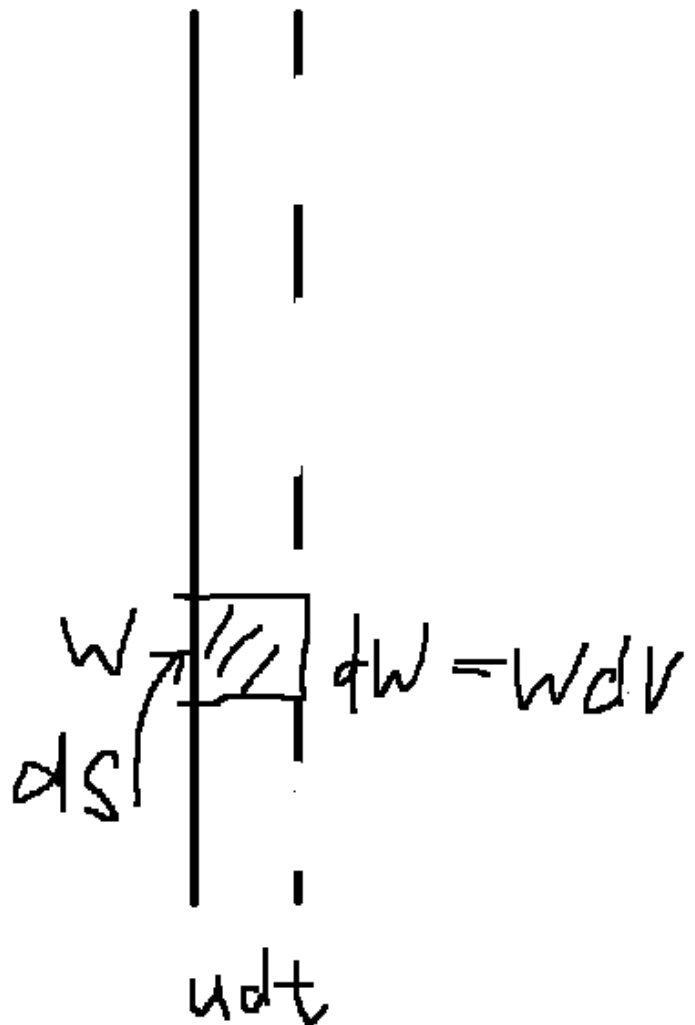
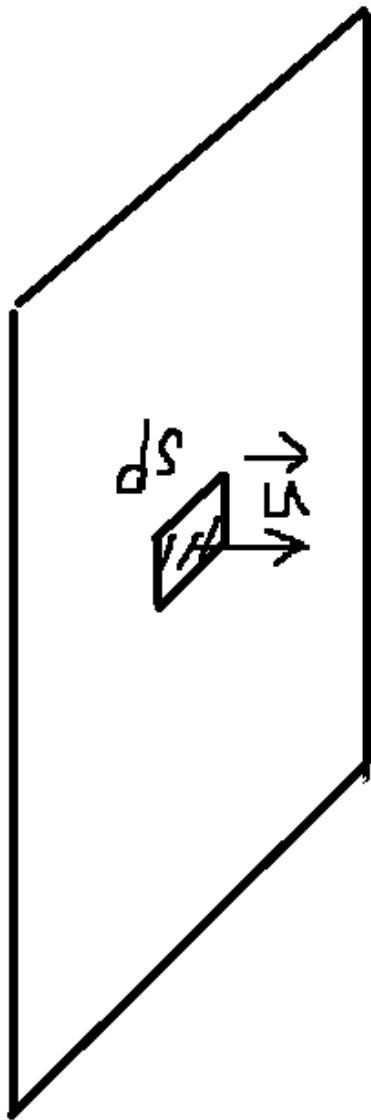
$$\langle \sin^2 \alpha \rangle = \langle \cos^2 \alpha \rangle \Rightarrow \langle \sin^2 \alpha \rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle w \rangle = \frac{A^2 \omega^2 \rho}{2}$$

???

Перенос энергии упругой волны

Вектор Умова



$$dW = W dV$$

$$dV = dS u dt$$

$$dW = W dS u dt$$

\vec{J}_W - плотность потока энергии

$$|\vec{J}_W| = \frac{dW}{dS dt} \left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right]$$

$$\vec{J}_W = w \vec{u}$$

03/03/2025

Термодинамика и молекулярная физика

Книга: ДВ Сивухин Общий курс Физики том 2.

Макроскопические системы состоят из огромного числа молекул (10^{23}).

Динамическое описание макросистем невозможно по следующим причинам:

1. Мы не знаем точного закона взаимодействия атомов и молекул макросистемы.
2. Мы не знаем начальные условия для всех молекул.
3. Физически невозможно записать такое количество уравнений и такое количество начальных условий.

Комментарий: Даже если бы мы могли получить решение для всех молекул, будет непонятно, что с этой информацией делать.

Для описания макросистем (равновесных и квазиравновесных состояний) существует 2 подхода:

1 подход: Феноменологическая (аксиоматическая термодинамика).

Основана на небольшом числе постулатов (аксиом), выведенных из огромного экспериментального материала.

В рамках своей применимости предсказания термодинамики очень точны.

Недостаток: сильная абстрактность понятий и отсутствие каких-либо сведений о механизме происходящих процессов.

Для придания большей наглядности используют простейшие представления молекулярно-кинетической теории (МКТ далее).

2 подход: Статистическая физика.

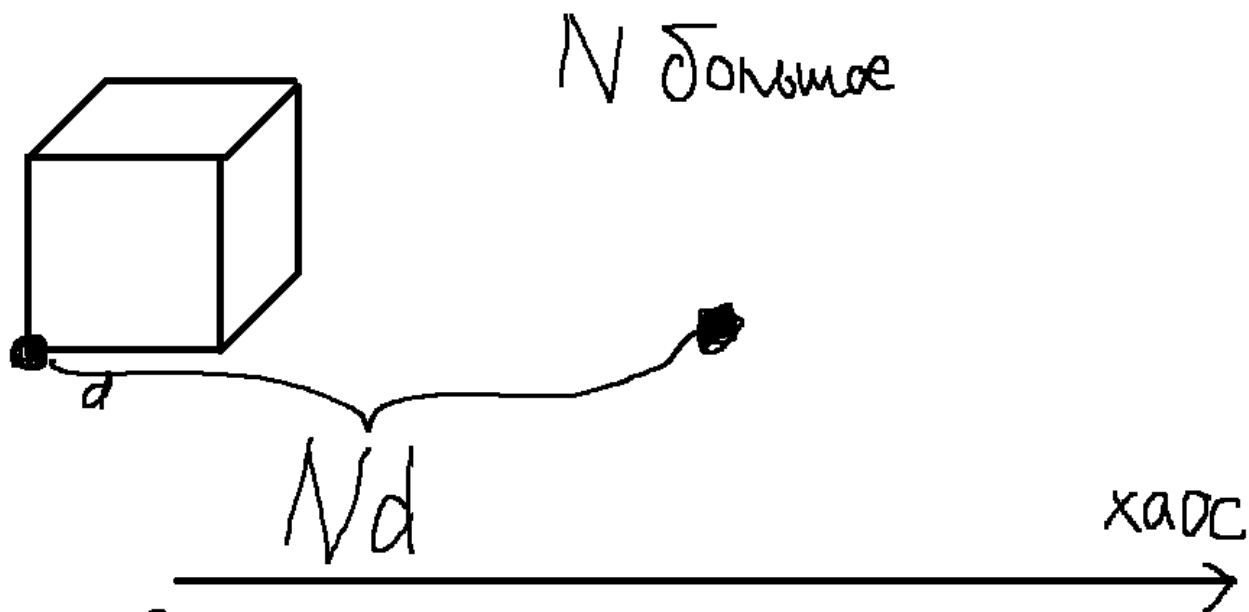
Позволяет зная микроскопическое устройство системы найти среднее значение всех основных термодинамических величин.

Использует математический аппарат теории вероятностей и математической статистики.

Подход Больцмана-Максвелла.

Вещество существует при не очень высоких температурах в 3 основных агрегатных состояниях: твёрдое тело (кристалл), жидкость, газ.

В целом, вещество нейтрально.



твёрдое
тело

→ жидкость → газ

1) Дальний
порядок

2) Сильное

взаимодействие
между атомами

1) Ближний
порядок

2) Сильное

взаимодействие
молекул
(атомов)

1) Нет упорядо-
ченности

2) Слабое вза-

имодействие

В теоретической механике и физике твёрдое тело - это разные понятия.
Например, в английском это отражено. Solid state и Rigid body.

Идеальный газ

Уравнение состояния идеального газа

Оно же Уравнение Менделеева-Клайперона)

$$PV = \nu RT$$

ν - число молей газа [моль]

$R \approx 8.3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ - универсальная газовая постоянная

1 моль вещества содержит $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$ атомов (или молекул)

$$N_A = \left[\frac{1}{\text{моль}} \right]$$

$$P = \frac{\nu}{V} RT = \underbrace{\frac{\nu N_A}{V}}_n \cdot \underbrace{\frac{R}{N_A}}_{k_B - \text{постоянная Больцмана}} \cdot T$$
$$P = nk_B T$$

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.

Разобьём молекулы по скоростным группам $(v_{x_i}, v_{x_i} + \Delta v_x)$, где $\Delta v_x \ll v_x$.

n_i - концентрация молекул с скоростью $\in (v_{x_i}, v_{x_i} + \Delta v_x)$

Найдём сколько молекул ударится о площадку ΔS за время Δt .

$$\begin{aligned}\Delta N &= n_i \Delta V_i \\ \Delta V_i &= v_{x_i} \Delta t \Delta S \Rightarrow \\ \Delta N &= v_{x_i} \Delta t \Delta S n_i\end{aligned}$$

Эти частицы передадут стенке импульс

$$\Delta p_x^{\text{стенки}} = 2m_0 v_{x_i} \cdot \Delta N_i = 2m_0 n_i v_{x_i}^2 \Delta S \Delta t$$

Подразумевается, что $v_{x_i} > 0$

Суммарный импульс, переданный стенке

$$\Delta p_{\sum, x}^{\text{стенки}} = \sum_i p_{x, i}^{\text{стенки}} = 2m_0 \sum_i n_i v_{x, i}^2 \Delta S \Delta t$$

По второму закону Ньютона

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p} \Rightarrow F_{\text{стенки}, x} = \frac{\Delta p_{\sum, x}^{\text{стенки}}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$P = \frac{F_{\text{стенки}}}{\Delta S} = \frac{\Delta p_{\sum, x}^{\text{стенки}}}{\Delta S \Delta t}$$

$$P = 2m_0 \sum_i n_i v_{x, i}^2$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \sum_k P_k v_{x, k}^2, \text{ где}$$

P_k - вероятность значения $v_{x, k}^2$

$$P_k = \frac{n_k}{n}, \text{ где}$$

n_k - концентрация, соответствующая $v_x^2 = v_{x, k}^2$

$$v_{x, i}^2 = -v_{x, i}^2$$

$$n_k = \begin{cases} +v_{x, k} \\ -v_{x, k} \end{cases}$$

$$n_i \Rightarrow n_i = \frac{1}{2} n_i^{\pm} \Rightarrow$$

$$\sum_i n_i v_{x, i}^2 = \frac{1}{2} \sum_i n_i^{\pm} v_{x, i}^2 =$$

$$= \frac{n}{2} \sum_i \frac{n_i}{n} v_{x, i}^2 =$$

$$= \frac{n}{2} \sum_i P_i v_{x, i}^2 = \frac{n}{2} \langle v_x^2 \rangle$$

$$P = m_0 n \langle v_x^2 \rangle$$

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle \Rightarrow$$

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \Rightarrow$$

$$P = \frac{2}{3} n \langle E_{\text{пост}} \rangle$$

03/03/2025 2

$$P = nkT \Rightarrow \langle E_{\text{поступательное}} \rangle = \frac{3}{2} kT$$

$$\langle \frac{mv_x^2}{2} \rangle + \langle \frac{mv_y^2}{2} \rangle + \langle \frac{mv_z^2}{2} \rangle = \frac{3}{2} kT$$

$$\langle \frac{mv_x^2}{2} \rangle = \frac{kT}{2}$$

Теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы:

На 1 степень свободы в среднем приходится энергия $\frac{kT}{2}$.

$$\langle E \rangle = \frac{ikT}{2}$$

Тип молекулы	Число степеней свободы	Средняя энергия	Энергия 1 моля	$C_V = \frac{dU_{\text{моль}}}{dT}$	C_P	γ
1-атомная (<i>He, Ar</i>)	3	$\frac{3}{2} kT$	$\frac{3}{2} RT$	$\frac{3}{2} R$	$\frac{5}{2} R$	$\frac{5}{3}$
2-атомная жёсткая (<i>O₂, H₂</i>)	5	$\frac{5}{2} kT$	$\frac{5}{2} RT$	$\frac{5}{2} R$	$\frac{7}{2} R$	$\frac{7}{5}$
3х и более атомная жёсткая нелинейная, <i>O₃, H₂O</i>	6	$\frac{6}{2} kT$	$\frac{6}{2} RT$	$3R$	$4R$	$\frac{4}{3}$

Следующий раздел

Первое начало термодинамики

Количество теплоты - энергия, переданная системе путём теплообмена.

Теплообмен - процесс передачи энергии без совершения макроскопической работы.

3 механизма передачи тепла:

Теплопроводность, конвекция и излучение.

Проводность - металлическая ложка в кипятке обжигает пальцы.

Конвекция - горячая вода в кастрюле всплывает. Холодный воздух опускается.

Излучение - ночью холоднее чем днём.

Внутренняя энергия - суммарная энергия всех входящих в систему атомов и молекул за минусом кинетической и потенциальной энергии как целого.

Если балон с газом поднять на Эверест, то внутренняя энергия напрямую от этого не поменяется.

Одно и то же состояние системы можно достичь за счёт работы или за счёт теплоты.

Предположим, у нас имеется объём жидкости, который мы хотим нагреть до какой-то температуры.

Первый способ:

Опускаем электрическую спираль с включённым током в воду и ждём.

$$dU = \delta Q, \delta A = 0$$

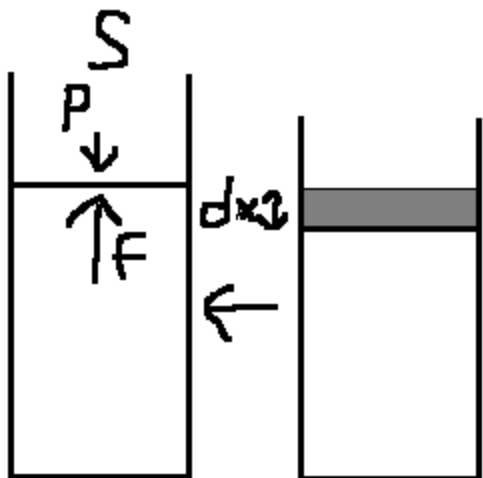
Второй способ:

Опускаем в воду миксер и перемешиваем.

$$dU = -\delta A = +\delta A^{\text{внешняя}}$$

$$\Delta U = U_{\text{конечное}} - U_{\text{начальное}}$$

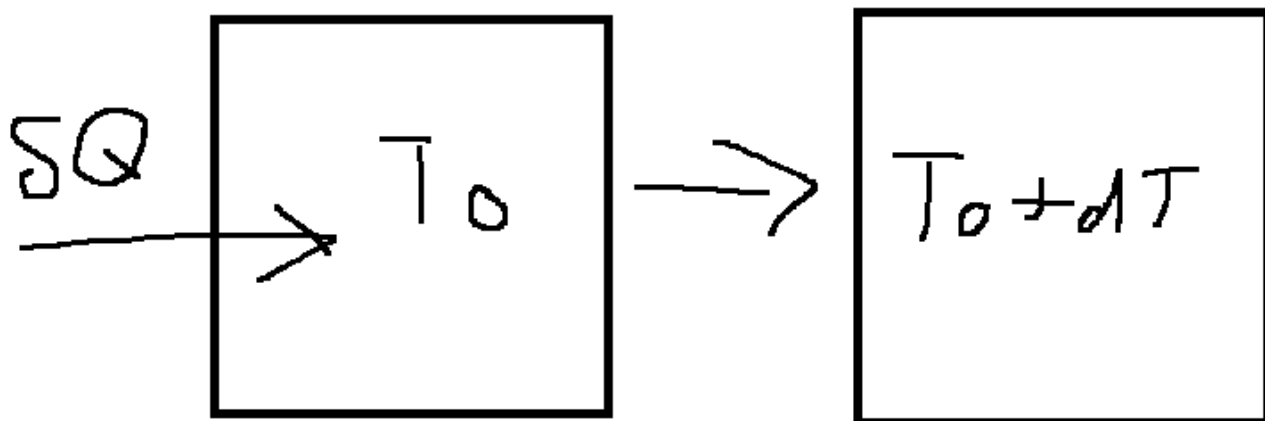
Работа газа против внешнего давления



$$\delta A = \vec{F} d\vec{x} = PSdx = PdV$$
$$\delta A = PdV$$

Теплоёмкость идеального газа

$$C = \frac{\delta Q}{dT} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{К}} \right]$$



Теплоёмкость газа зависит от процессов теплопередачи.

Возьмём 1 моль газа.

$$C = \frac{\delta Q}{\nu dT} = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \right]$$

Для 1 моля уравнение состояния будет иметь вид

$$PV = RT$$

Возьмём изохорный процесс ($V = \text{const}$) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \delta A = p dV &= 0 \Rightarrow \\ \delta Q_V = dU &\Rightarrow C_V = \frac{\delta Q_V}{dT} = \frac{dU}{dT} \\ \text{Для идеального газа } U &= U(T) \Rightarrow \\ dU &= C_V dT \end{aligned}$$

Смотрим на столбец таблицы с C_V и идём дальше

Изобарный процесс ($P = \text{const}$) \Rightarrow

$$\begin{aligned} \delta Q &= dU + P dV = \\ PV &= RT \\ d(PV) &= d(RT) \\ PdV &= RdT \\ &= C_V dT + RdT = (C_V + R) dT \end{aligned}$$

$$C_P = C_V + R - \text{формула Майера}$$

Курьёзы:

Изотермический процесс ($T = \text{const}$) $\Rightarrow dT = 0$

$$\begin{aligned} \delta Q &= \cancel{C_V dT}^0 + P dV \\ \delta Q &= P dV \\ C_T &= \frac{\delta Q}{dT} = \frac{\delta Q}{0} = \infty \end{aligned}$$

Адиабатический процесс ($\delta Q = 0$)

Происходит либо в хорошо теплоизолированной системе, либо процесс происходит настолько быстро, что теплообмен не играет существенной роли (взрыв).

$$\begin{aligned} C_{\text{адиабатический}} &= \frac{\delta Q}{dT} = 0 \\ 0 &= C_V dT + P dV \end{aligned}$$

Если сжать шину, то она нагреется.

Уравнение адиабаты.

$$\delta Q = 0 \Rightarrow dU + \delta A = 0$$

$$C_V dT + P dV = 0$$

$$PV = RT$$

$$d(PV) = d(RT)$$

$$P dV + V dP = R dT$$

$$dT = \frac{1}{R} (P dV + V dP)$$

$$\frac{C_V}{R} (P dV + V dP) + P dV = 0$$

$$\underbrace{(C_V + R)}_{C_P} P dV + C_V V dP = 0$$

$$C_P P dV + C_V V dP = 0$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} - \text{показатель адиабаты}$$

$$\gamma P dV + V dP = 0$$

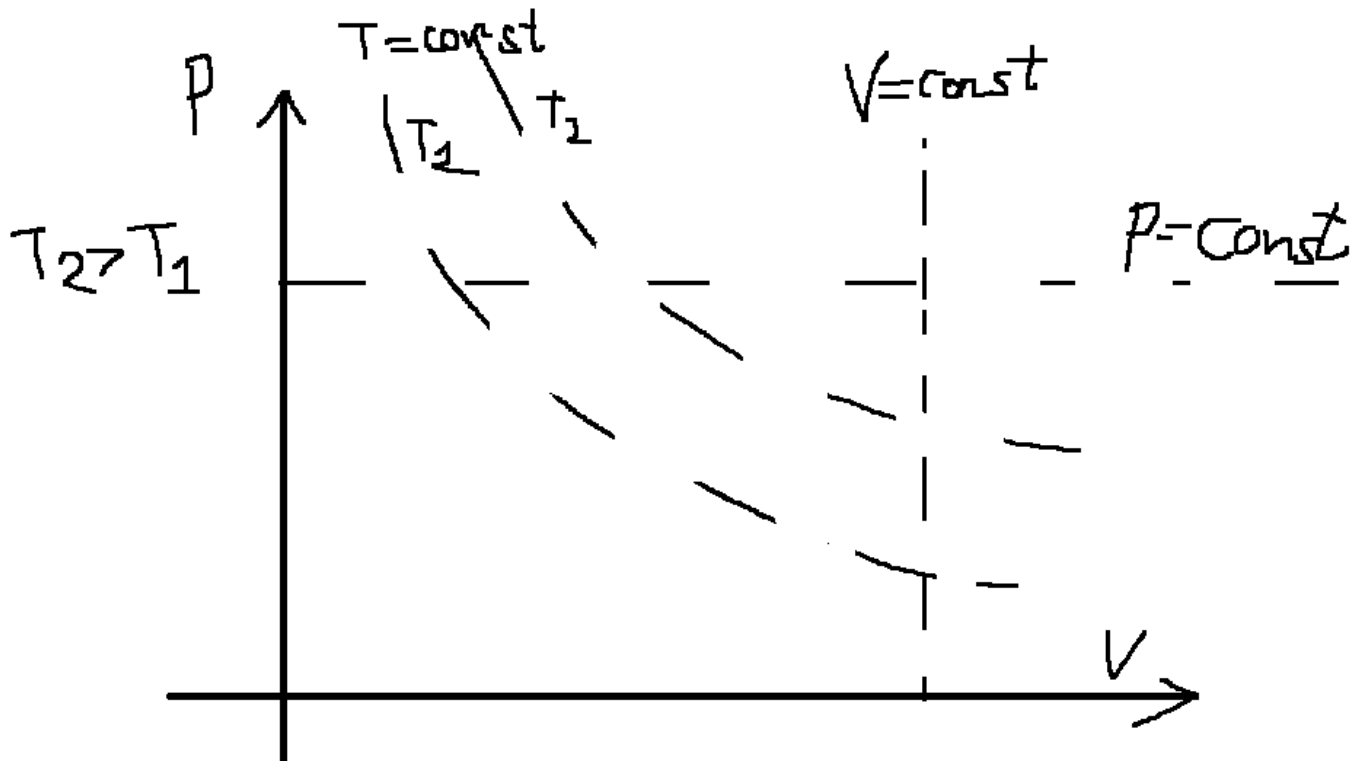
$$\gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$

$$\gamma \ln V + \ln P = \text{const}$$

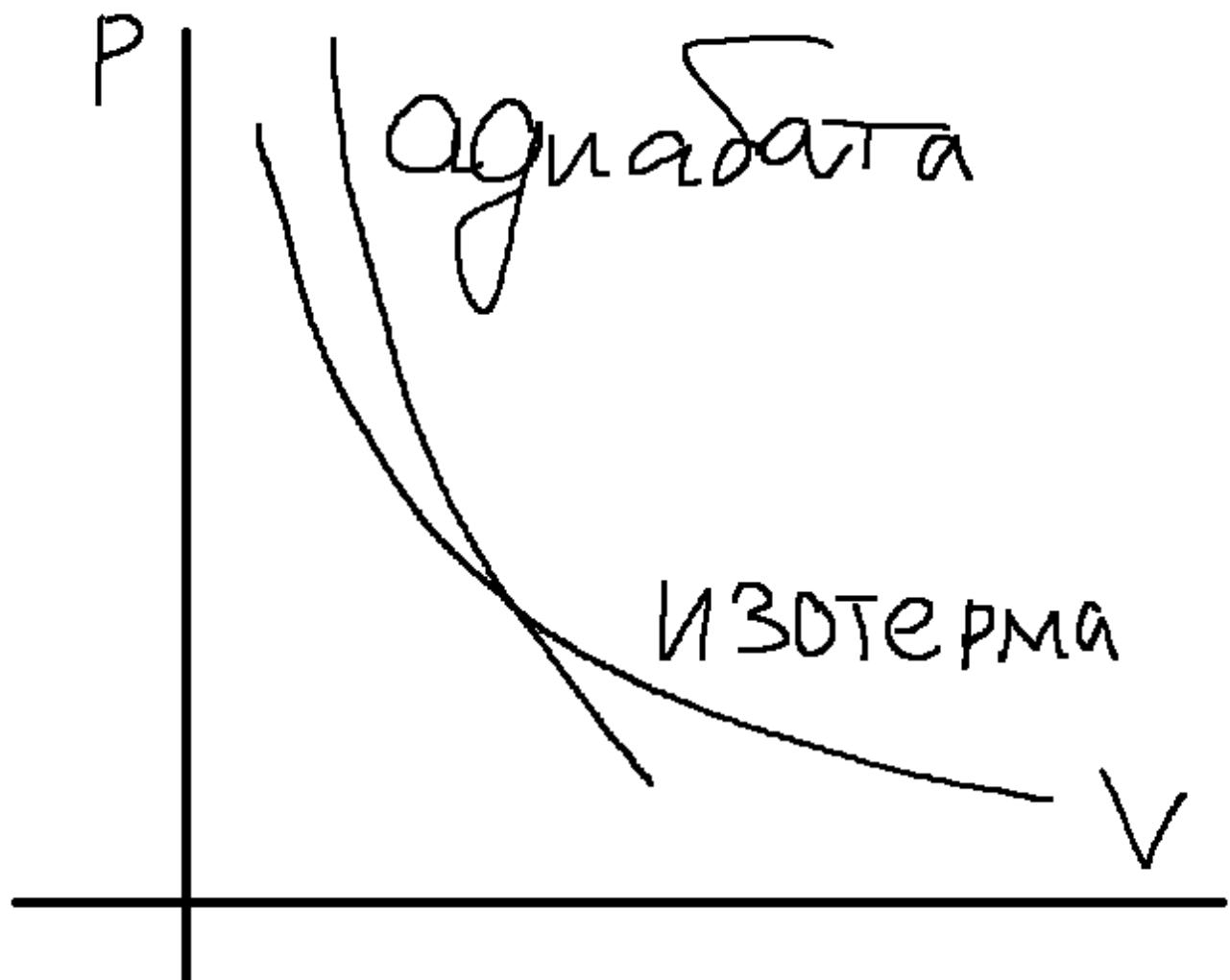
$$\ln(V^\gamma P) = \text{const}$$

$$PV^\gamma = \text{const} - \text{уравнение адиабаты в } (P, V)$$

См. последний столбец таблицы.



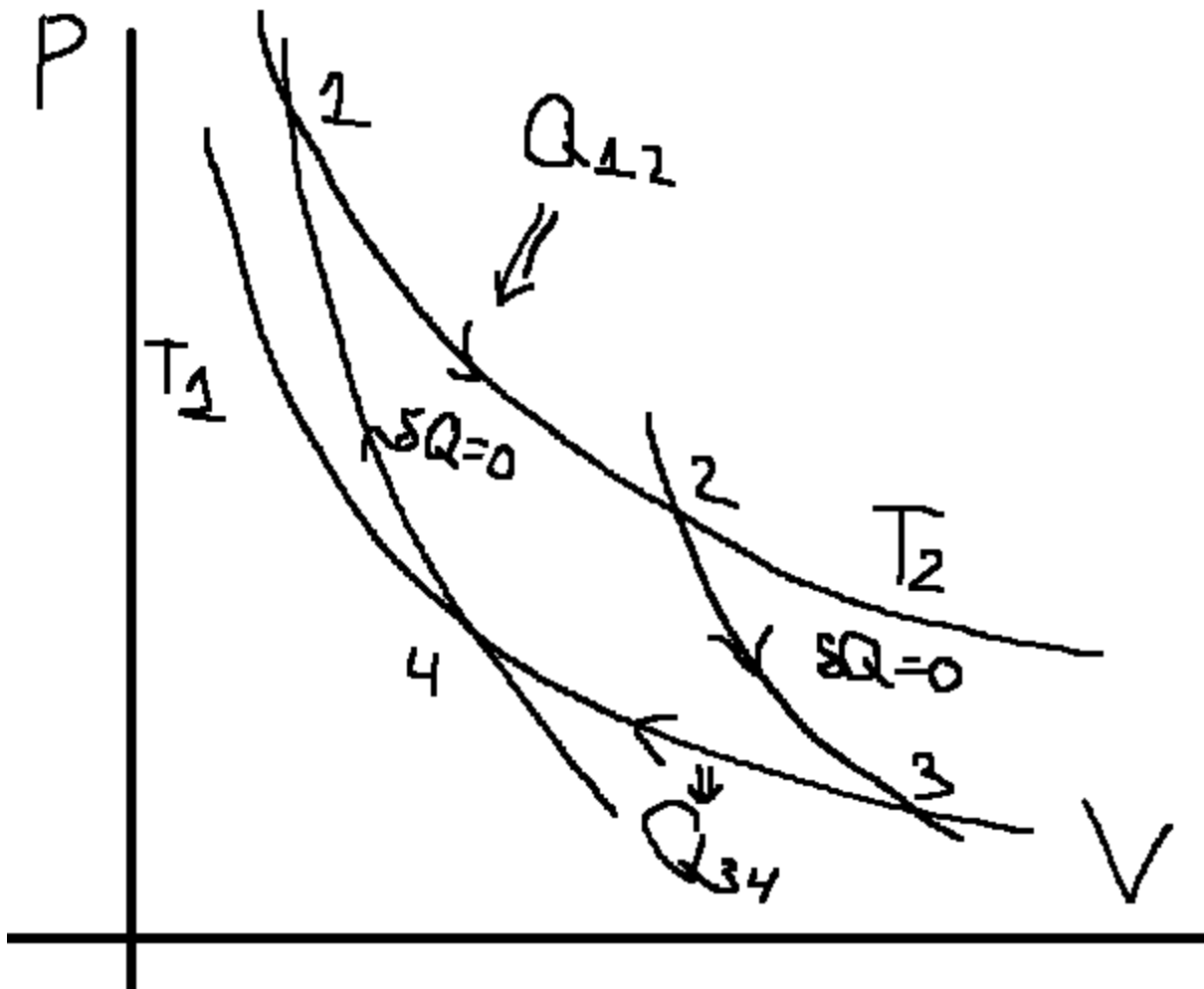
$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} > 1 \Rightarrow P = \frac{\text{const}}{V^\gamma}$$



Процесс, у которого начальное и конечное состояние совпадают, называют циклическим.

$$\delta U = 0$$

Поэтому в круговом процессе $Q = A$
цикл Карно



Уравнение адиабаты в (V, T) :

$$\begin{aligned}
 PV^\gamma &= \text{const} \\
 PV &= RT \\
 P &= \frac{RT}{V} \Rightarrow P \sim \frac{T}{V} \\
 \frac{T}{V} V^\gamma &= \text{const} \Rightarrow \\
 TV^{\gamma-1} &= \text{const}
 \end{aligned}$$

КПД:

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{полученное}}}$$

10/03/2025

Второе начало термодинамики

Формулировка Томпсона:

Невозможен процесс, **единственным результатом** которого будет превращение в работу теплоты, взятой от теплового резервуара с одной температурой.

Формулировка Клаузиуса:

Невозможен процесс, **единственным результатом** которого будет передача теплоты от холодного тела горячему.

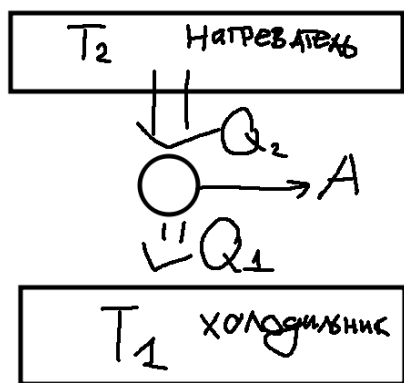
Теорема Карно:

Э.Ферми "Термодинамика".

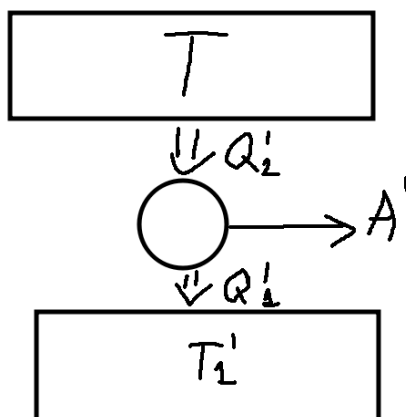
Обратимый процесс - проход через одни и те же стадии как в прямом, так и обратном направлении.

$$\frac{Q_1}{Q_2} \leq \frac{Q'_1}{Q'_2}$$

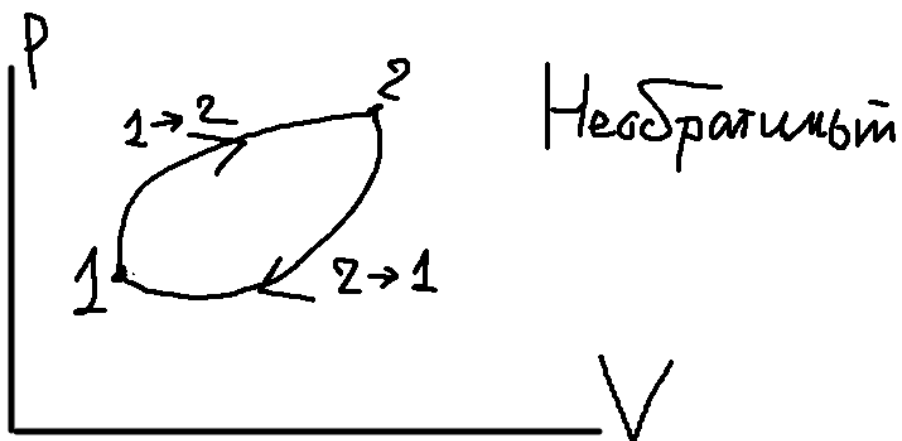
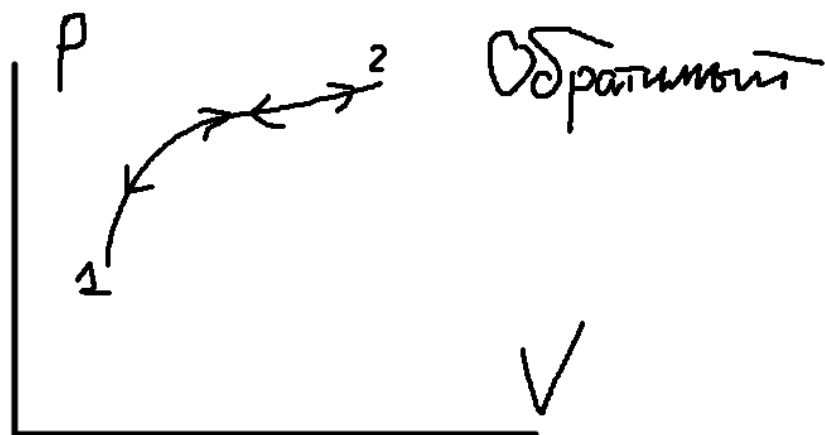
обратимая



произвольная



(Справа тоже T_2 , потом исправил)



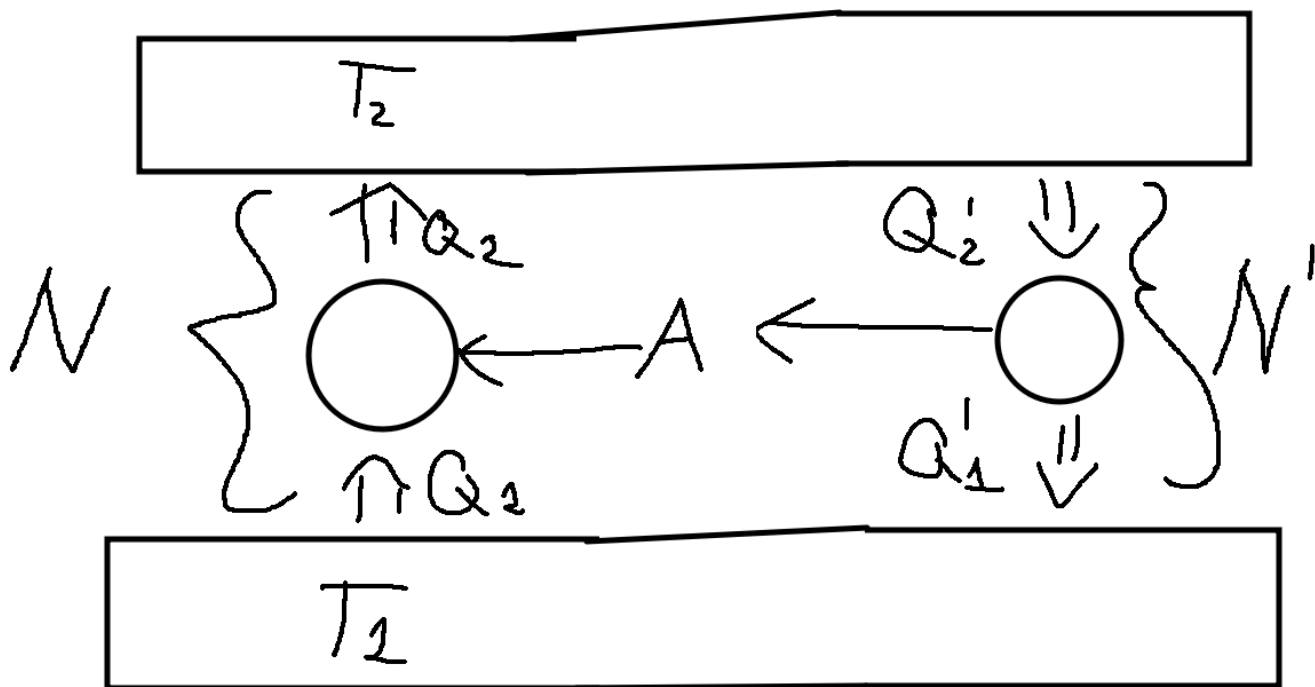
Возьмём N обратных циклов 1 машины и N' обычных циклов 2 машины таким образом, что

$$NQ_1 = N'Q'_1$$

Рассмотрим объединённую тепловую машину

N обратных "N1"

N' обратных "N2"



Q_Σ у резервуара с температурой T_1

$$Q_{(T_1)}^\Sigma = Q_1' N' - Q_1 N = 0$$

(Так подобрали, что один резервуар получил столько же тепла, сколько отдал)

$$A_{\text{цикла}} = N' Q_2' - N Q_2 = Q_{\text{цикла}}$$

Согласно второму началу термодинамики невозможно получить положительную работу, взяв теплоту от резервуара с одной температурой. \Rightarrow

$$A_{\text{цикла}} \leq 0$$

$$\begin{aligned} N' Q_2' - N Q_2 \leq 0 &\Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} \geq \frac{Q_2'}{Q_1'} \Leftrightarrow \frac{Q_1'}{Q_2'} \geq \frac{Q_1}{Q_2}, \text{ чТД} \\ N Q_1 &= N' Q_1' \end{aligned}$$

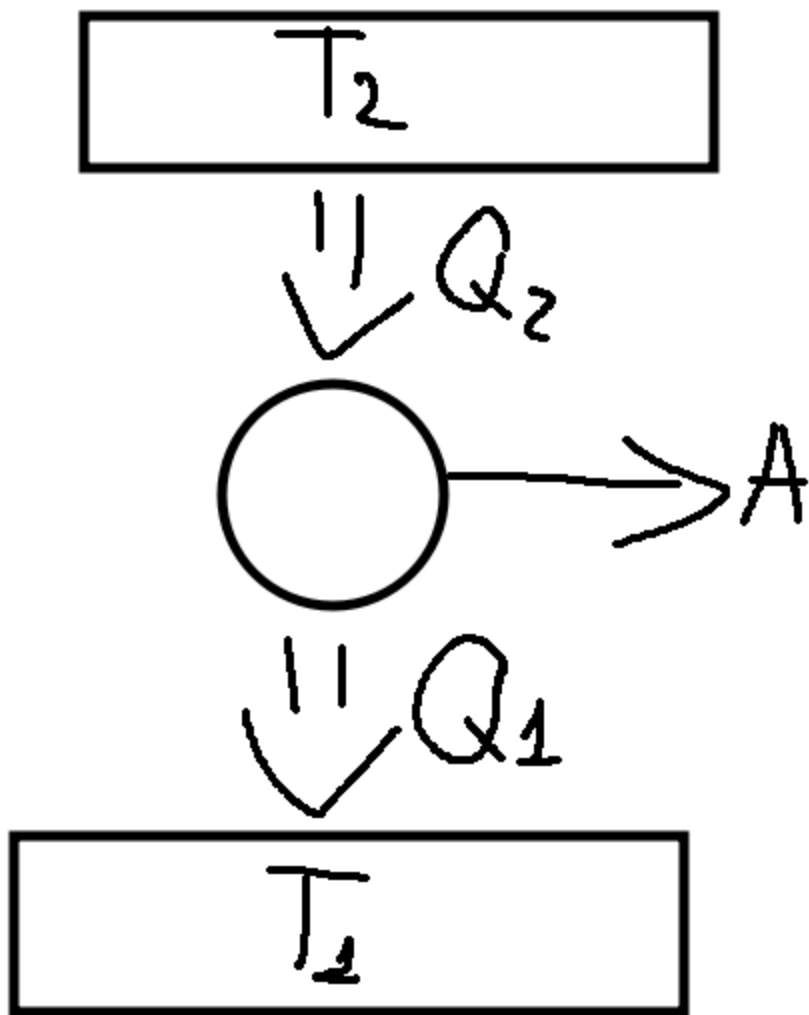
Если вторая машина тоже обратимая, то в доказательстве их можно поменять ролями и тогда мы получим

$$\frac{Q_2}{Q_1} \leq \frac{Q_2'}{Q_1'}$$

Из этого следует, что $\frac{Q_1'}{Q_2'} = \frac{Q_1}{Q_2}$

Если вторая машина необратима, то неравенство строгое.

Следствия из теоремы Карно:



$$\eta = \frac{A_{\text{цикла}}}{Q_{\text{нагревателя}}} = \frac{A}{Q_2}$$
$$A = A_{\text{цикла}} = Q_2 - Q_1$$
$$\eta = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$$

КПД обратимой машины выше КПД необратимой машины.

КПД всех обратимых машин, действующих между температурами T_2 и T_1 одинаков.

Отношение теплот Q_2 и Q_1 связано с температурами T_2 и T_1

Для обратимой машины:

$$\frac{Q_2}{Q_1} = f(T_2, T_1)$$

Выберем некоторую стандартную температуру T_0 .

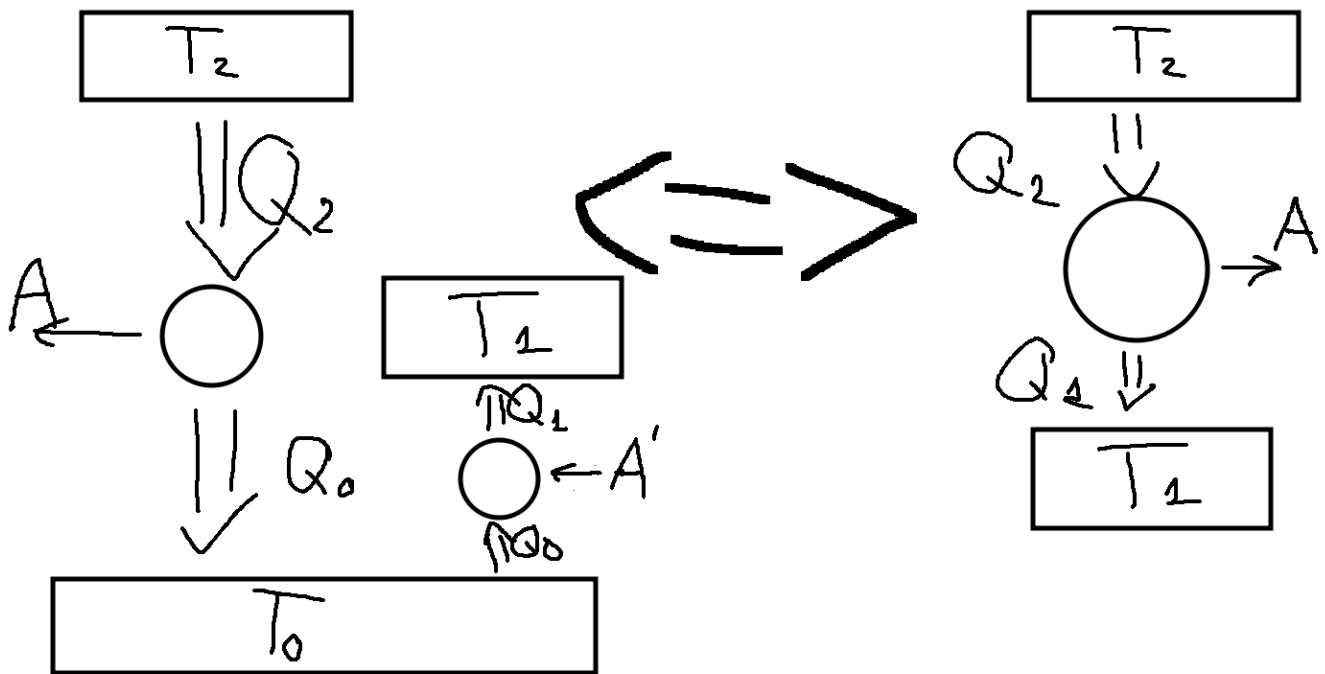
$$\frac{Q_2}{Q_0} = f(T_2, T_0)$$

$$\frac{Q_1}{Q_0} = f(T_1, T_0)$$

Поскольку T_0 фиксирована

$$\frac{Q_2}{Q_0} = f(T_2)$$

$$\frac{Q_1}{Q_0} = f(T_1)$$



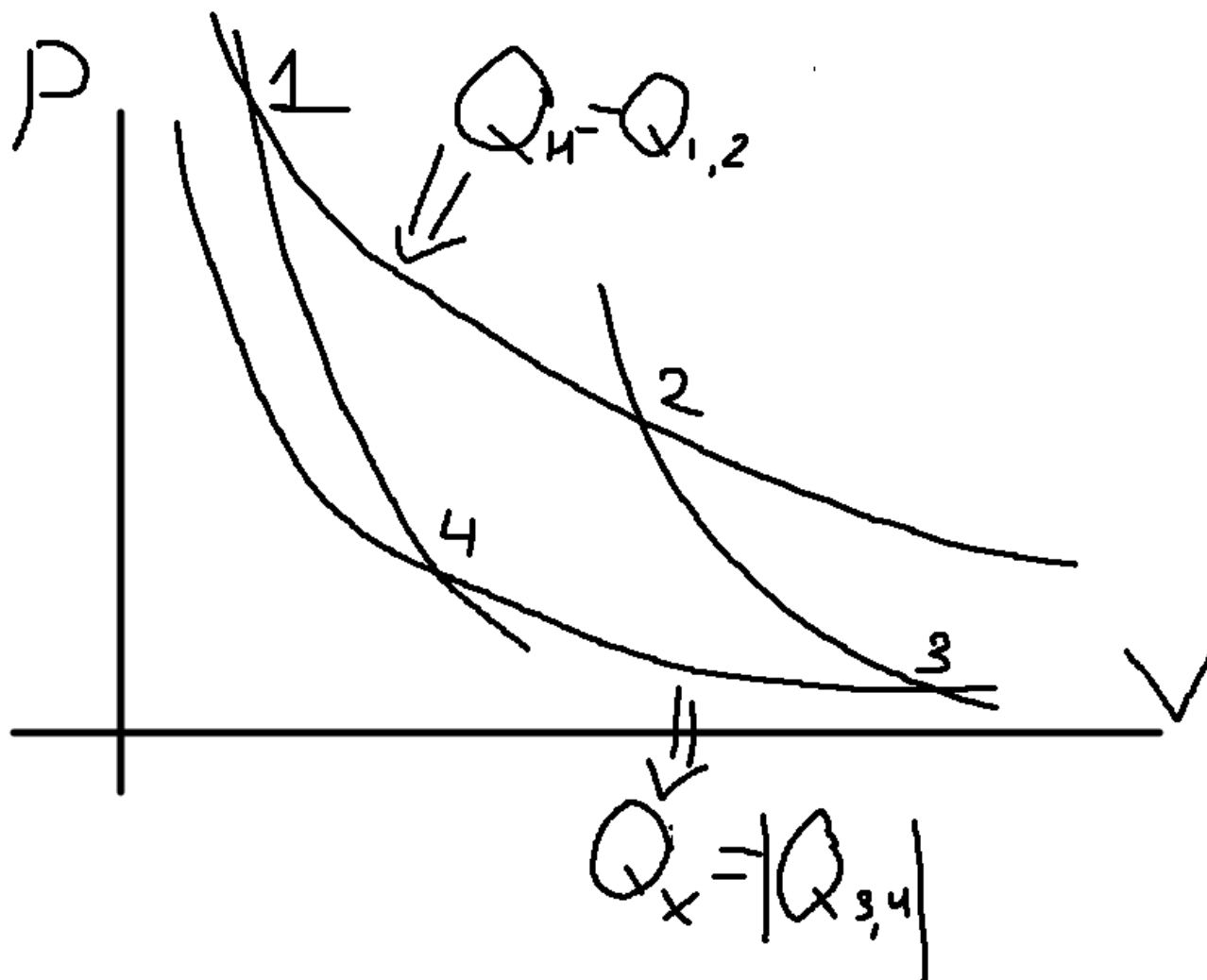
$$f(T_2, T_1) = \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{f(T_2)}{f(T_1)}$$

Абсолютная термодинамическая температура

Покажем, что в качестве $f(T)$ может быть выбрана температура идеального газового термометра.

Для этого рассмотрим цикл Карно



Q_H - тепло нагревателя

Q_X - тепло, полученное холодильником

$$\begin{aligned}
& 1 \rightarrow 2 \quad (T = \text{const} \Rightarrow dU = 0) \Rightarrow \delta Q = \delta A = PdV \\
& Q_{12} = \int_{V_1}^{V_2} P(V)dV = RT_2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT_2 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \\
& 3 \rightarrow 4 \quad (T = \text{const} \Rightarrow dU = 0) \quad \delta Q = \delta A = PdV \\
& |Q_{34}| = Q_{43} = RT_1 \int_{V_4}^{V_3} \frac{dV}{V} = RT_1 \ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right) \\
& \frac{Q_{\text{н}}}{Q_{\text{х}}} = \frac{\cancel{R} T_2 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)}{\cancel{R} T_1 \ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right)} \\
& 2 \rightarrow 3 - \text{адиабата} \Rightarrow PV^\gamma = \text{const} \\
& PV = RT \quad (1 \text{ моль}) \\
& P = \frac{RT}{V} \sim \frac{T}{V} \Rightarrow PV^\gamma \sim \left(\frac{T}{V} \right) V^\gamma = TV^{\gamma-1} \\
& \text{Уравнение адиабаты: } TV^{\gamma-1} = \text{const} \\
& T_2 V_2^{\gamma-1} = T_1 V_3^{\gamma-1} \\
& 1 \rightarrow 4 : \text{адиабата} \Rightarrow T_2 V_1^{\gamma-1} = T_1 V_4^{\gamma-1} \Rightarrow \\
& \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\gamma-1} \Rightarrow \\
& \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \Rightarrow \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = \ln \left(\frac{V_3}{V_4} \right) \Rightarrow \\
& \frac{Q_{\text{н}}}{Q_{\text{х}}} = \frac{T_2}{T_1}
\end{aligned}$$

Мы нашли КПД цикла Карно.