10/02/2025

Механические колебания

Самый простой тип - гармонические колебания.

Колебания по следующему закону: $\xi = \xi_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$
Рассматриваем "1D" (одна степень свободы) механическую систему, в которой отстутствуют "силы трения" (т.е. выполняется ЗСЭ (закон сохранения энергии)).
$E = const$, $E = K + V$
K - связано с скоростью, V - с положением
Для материальной точки: $K = \frac{mV^2}{2}$, $U = U(\vec{r})$

Рассмотрим отклонения системы от положения равновесия.
В точке равновесия $U(\vec{r}) = min$

$$U(r) = U(r_0) + \frac{d}{dr}U(r_0)(r - r_0) + \frac{d^2}{dr^2}U(r_0)\frac{(r-r_0)^2}{2} + \dots$$

$\frac{d}{dr}U(r_0) = 0$, т.к. экстремум
Выберем $U(r_0) = 0 \Rightarrow U(r) \ = \frac{d^2}{dr^2}U(r_0)\frac{(r-r_0)^2}{2} \Rightarrow U = C\frac{\xi^2}{2}$

$$U_{упр} = \frac{kx^2}{2}$$

$$E = \frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = Const$$

Если $V = 0 \Rightarrow x = x_{max}$
Если $x = 0 \Rightarrow V = V_{max}$

$$\Rightarrow E = \frac{mV_{max}^2}{2} = \frac{kx_{max}^2}{2}$$

$$\frac{m\dot{x}^2}{2E} + \frac{kx^2}{2E} = 1$$

$$\frac{dx}{dt} = V_{max}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_{max}}\right)^2}$$

$$\int \frac{d\left(\frac{x}{x_{max}}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{x_{max}}\right)^2}} = \int \frac{V_{max}}{x_{max}}dt$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{x_{max}}\right) = \frac{V_{max}}{x_{max}}t + const$$

$$x(t) = X_{max}\sin\left(\frac{V_{max}}{X_{max}}t + \varphi\right)$$

$$(*) \Rightarrow \frac{V_{max}^2}{X_{max}^2} = \frac{k}{m}$$

$$\frac{V_{max}}{X_{max}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$$

ω_0 - частота гармонических колебаний

$$X = X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Начальные условия

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ V(0) &= V_0 \\ x_0 &= X_{max}\sin(\varphi) \\ V_0 &= \omega_0 X_{max}\cos(\varphi) \end{aligned}$$

Энергетический способ нахождения собственных частот.

Если система описывается соотношением $E = \frac{\alpha\dot{q}^2}{2} + \frac{\beta q^2}{2}$, где q - некоторая координата, а $\dot{q}$ - "скорость", то

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{\beta}{\alpha} \\ E &= \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \\ \alpha = m,\ \beta = k,\ q = x,\ \dot{q} &= \dot{x} = V \end{aligned}$$

Физический маятник

$$\begin{aligned} \varphi &\ll 1 \\ E &= K + U \\ U &= mgh_C \end{aligned}$$

h_C - высота центра масс

$$\begin{aligned} h_C &= l_C - l_C\cos\varphi \\ &= l_C(1 - \cos\varphi) \\ \varphi &\ll_1 \\ \cos\varphi &= 1 - \frac{\varphi^2}{2} \\ U &= mgl_C\frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

r - расстояние до оси вращения z

$$dK = \frac{dmV^2}{2} = \frac{dm(\omega r)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}(r^2 dm)$$

ω одинакова для всех точек тела

$$K = \int_{V_0} \frac{\omega^2}{2} r^2 dm = \frac{\omega^2}{2} \int_{V_0} r^2 dm = \frac{\omega^2}{2} I_z$$

$$\omega = \dot{\varphi} \Rightarrow K = \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} \Rightarrow$$

$$E = \frac{I_z\dot{\varphi}^2}{2} + mgl_C\frac{\varphi^2}{2}$$

$$dI_z = dmx^2$$

$$\frac{dm}{M} = \frac{dx}{l} \Rightarrow dm = \frac{M}{l}dx$$

$$I_z = \int_0^{l/2} \frac{M}{l}x^2 dx = 2\int_0^{l/2} \frac{M}{l}x^2 dx = \frac{Ml^2}{12}$$

Теорема Гюйгенса-Штейнера

$$z' \parallel z$$

$$I_{z'} = I_{z,C}$$

$$I_{z,0} = I_{z,C} + ma^2$$

Её применение

$$I_{z_1} = I_{z_1,C} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{3}$$

$$l_C = \frac{l}{2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{mgl_C}{I_z} = \frac{mg\frac{l}{2}}{\frac{ml^2}{3}} = \frac{3}{2}\frac{g}{l}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{g}{l}}$$

$$\vec{F_{упр}} = -k\vec{x}$$

$$F_x = -kx$$

$$F_x = m\ddot{x}$$

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0$$

$\vec{x}$ - смещение от положения покоя

Подставляем $x = e^{\lambda t}$

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$$
$$x'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$$
$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{k}{m} e^{\lambda t} = 0$$
$$e^{\lambda t}\left(\lambda^2 + \frac{k}{m}\right) = 0$$
$$\lambda^2 = -\frac{k}{m}$$
$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\tilde{x_1} = e^{i\omega_0 t}$$
$$\tilde{x_2} = e^{-i\omega_0 t}$$
$$x = C^i \tilde{x}_i$$
$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega t}}{2}$$
$$\sin(i\omega_0 t) = \frac{e^i \omega_0 t - e^{-i\omega_0 t}}{2i} x = A\sin\lambda t + B\cos\lambda t$$
$$X_{max} = \sqrt{A^2 + B^2}$$
$$x = X_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Если уравнение динамики приводит к соотношению $q'' + \omega_0^2 q = 0$, то это гармонические колебания

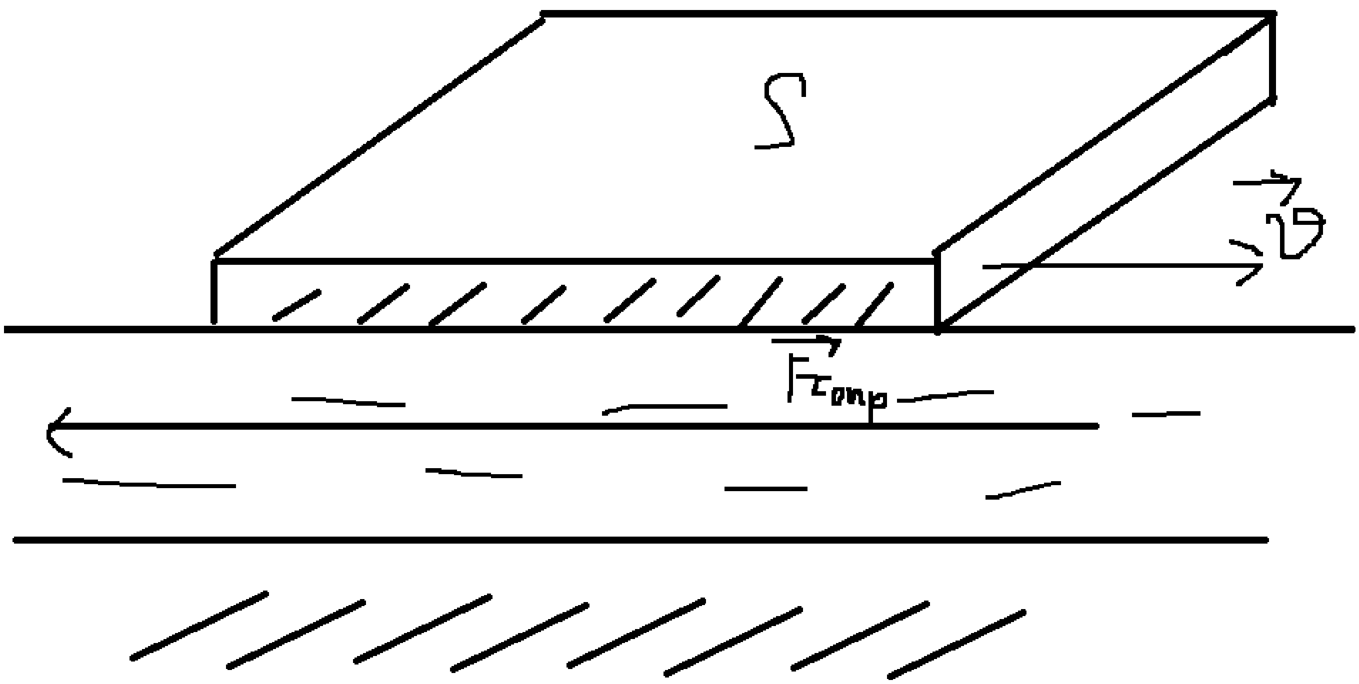
Пример

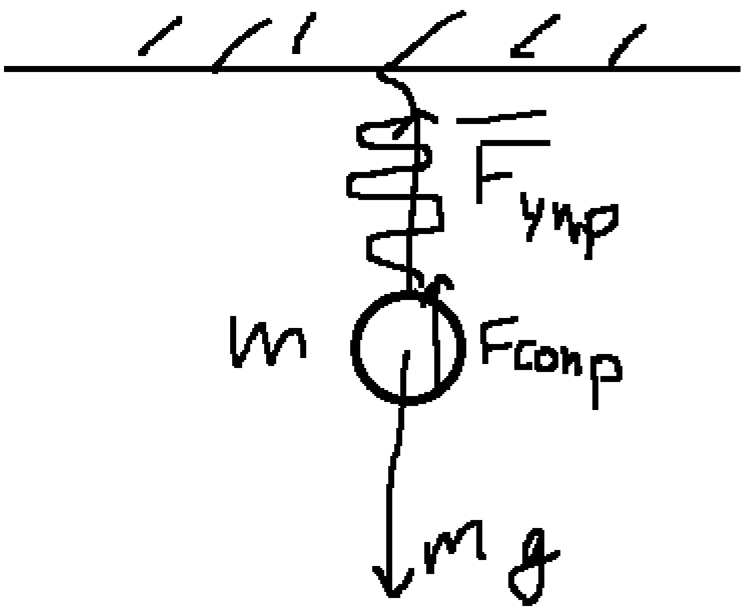
$$F = \Delta m g$$
$$\Delta m = \rho \Delta V$$
$$\Delta V = S \cdot 2x$$
$$F = \rho 2xSg$$
$$mx'' = -2\rho Sgx$$
$$x'' + \frac{2\rho Sg}{m} x = 0$$
$$\alpha = \omega 0^2$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\rho Sg}{m}} = \sqrt{\frac{2g}{l}}$$

17/02/2025

Затухающие колебания

$$\vec{F_{\text{упр}}} = -k\vec{x}$$
$$\text{Сила сопротивления}$$
$$\vec{F_{\text{сопр}}} = -\frac{\eta S}{\delta}\vec{v} = -C\vec{v}$$





$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F_{упр}} + \vec{F_{сопр}}$$
$$m\ddot{x} = -kx - C\dot{x}$$
$$\ddot{x} + \frac{C}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Leftrightarrow$$

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ - дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$x - e^{\lambda t}$$
$$\dot{x} - \lambda e^{\lambda t}$$
$$\ddot{x} - \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2) = 0$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$
$$D = 4\beta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\beta^2 - \omega_0^2)$$

Рассмотрим только случай $\omega_0^2 \gg \beta$ (слабое затухание)

$$\implies D < 0 \Rightarrow \sqrt{D} = \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$\omega_{\text{зк}} = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - частота (свободных) затухающих колебний

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega_{\text{зк}}$$

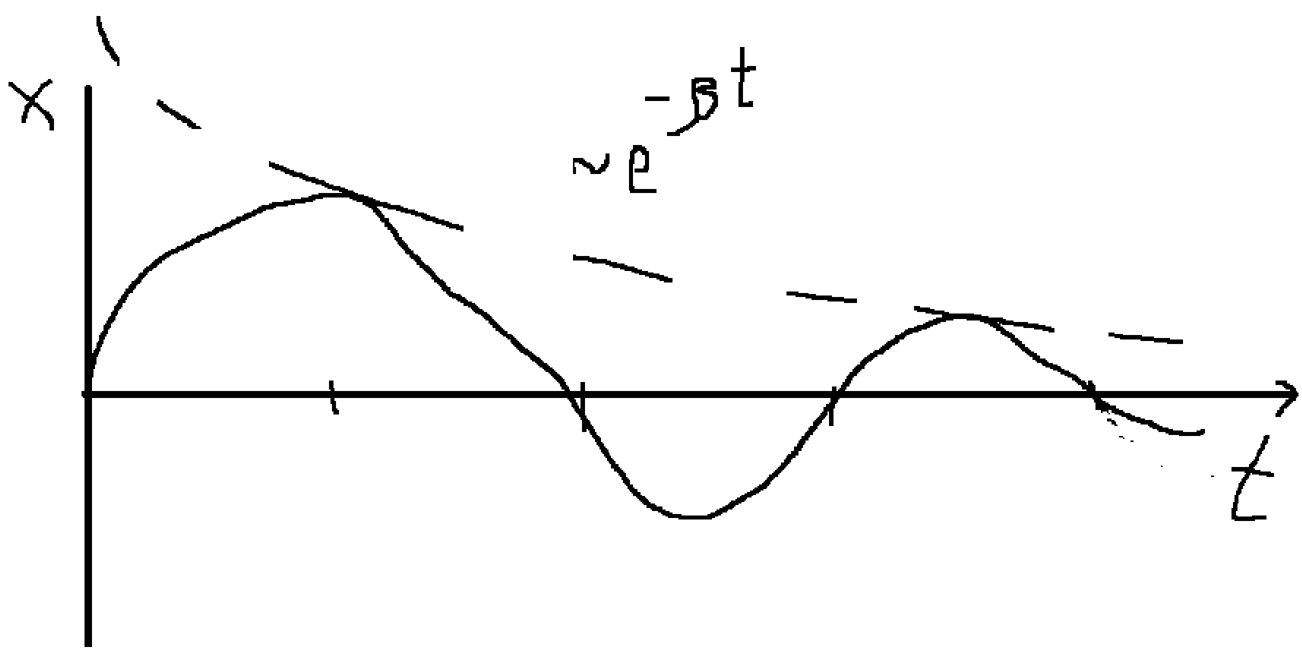
Общее решение

$$x(t) = A_1 e^{(-\beta + i\omega_{\text{зк}})t} + A_2 e^{(-\beta - i\omega_{\text{зк}})t} =$$
$$= e^{-\beta t}(A_1 e^{i\omega_{\text{зк}} t} + A_2 e^{-i\omega_{\text{зк}} t})$$

Может быть представлено в виде

$$A\sin(\omega_{\text{зк}} t + \varphi)$$
$$x(t) = Ae^{-\beta t}\sin(\omega_{\text{зк}} t + \varphi)$$

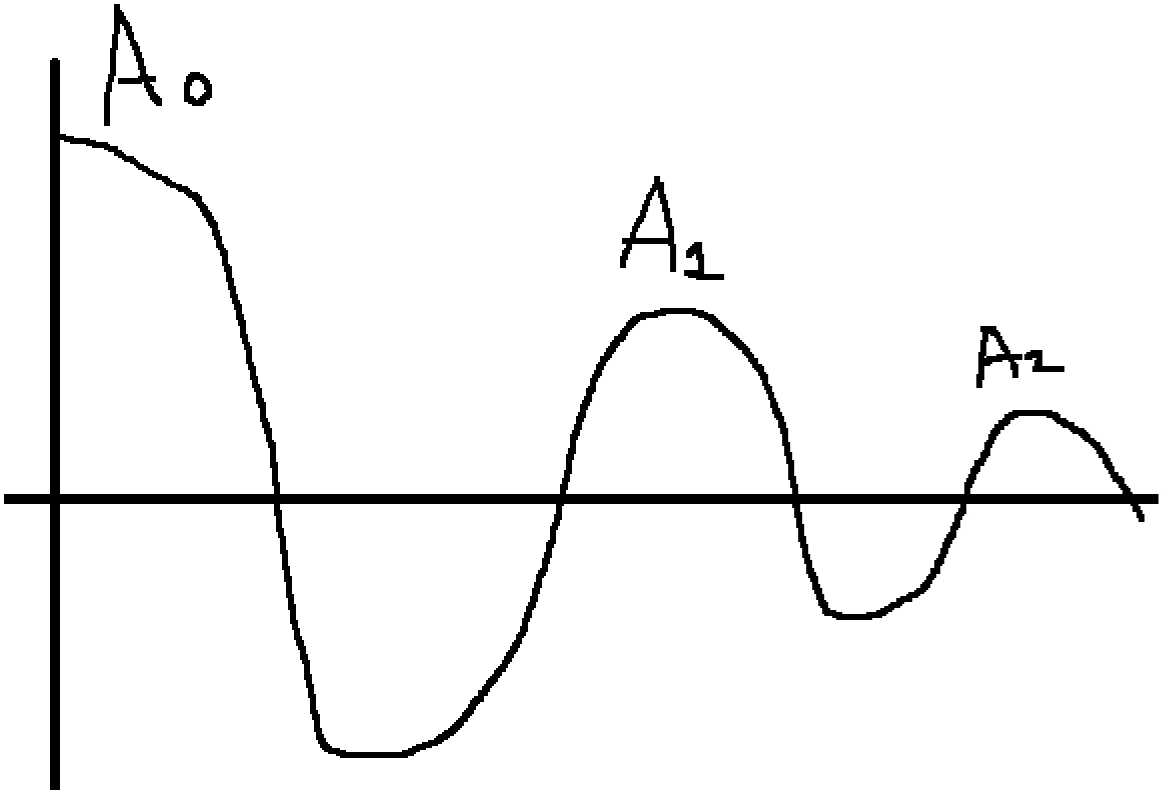
$$\varphi = 0$$



$$\varphi = \frac{\pi}{2} \implies x(t) = Ae^{-\beta t}\cos\omega_{\text{зк}} t$$

Рассмотрим $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos\omega_{\text{зк}} t$$



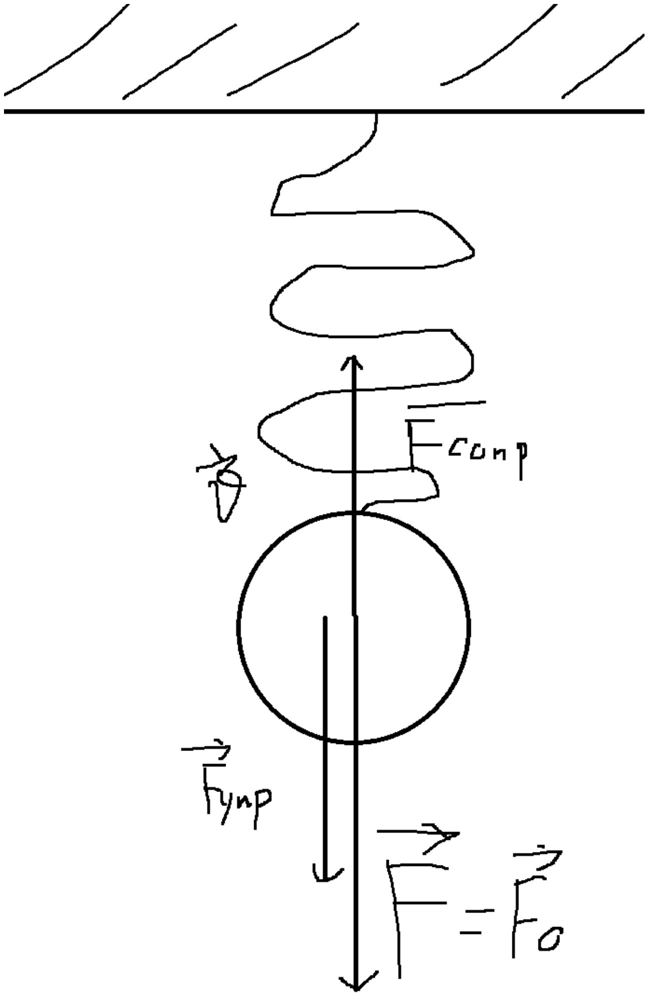
Рассмотрим точки максимального отклонения

$$\dot{x} = A_0 e^{-\beta t}(-\beta \cos \omega_{\text{зк}} t - \omega_{\text{зк}} \sin \omega_{\text{зк}} t) \approx$$
$$\omega_0 \gg \beta \implies \omega_{\text{зк}} \gg \beta$$
$$\approx -A_0 e^{-\beta t} \omega_{\text{зк}} \sin \omega_{\text{зк}} t$$

Точки $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответствуют фазе $\omega_{\text{зк}} t = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$$A_n = A_0 e^{-\beta T_{\text{зк}} n}$$
$$T_{\text{зк}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{зк}}}$$
$$\omega = 2\pi\nu, \omega = \frac{2\pi}{T}, \nu = \frac{1}{T}$$
$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = e^{\beta T_{\text{зк}}} \text{ - дискриминант затухания}$$
$$\ln\left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right) = \beta T_{\text{зк}}$$
$$\text{логарифмический дискриминант затухания}$$

Вынужденные колебания с учётом затухания


Fсопр
Fупр
F = Fо

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F_{\text{сопр}}} + \vec{F_{\text{упр}}} + \vec{F}$$

ω - частота вынуждающей силы

$$m\ddot{x} = -kx - C\dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{C}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos \omega t$$

$$\frac{C}{m} = 2\beta, \frac{k}{m} = \omega_0^2, \frac{F_0}{m} = f_0$$

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

$$x(t) = x_{\text{однородное}}(t) + x_{\text{частное неоднородного}}(t)$$

$$x_{однородное} = Ae^{-\beta t}\sin(\omega_{\text{зк}} t + \varphi) \quad (1)$$

В соотн (1) A и φ определяются начальные условия

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

С течением времени $(t \to \infty)$

$$|x_{\text{общ,о}}(t)| \to 0$$

Поэтому частное решение $x_{\text{ч}}(t)$ ищем в виде

$$x = A(\omega)\cos(\omega t + \psi(\omega))$$

$A(\omega)$ - амплитуда

$\psi(\omega)$ - смещение

Частное реешние найдём методов комплексных рядов

$$f_0 \cos \omega t = \mathrm{Re}(f_0 e^{i\omega t})$$

$$x(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \psi(\omega)) =$$

$$= \mathrm{Re}(A(\omega)e^{i\psi(\omega)} \cdot e^{i\omega t}) =$$

$$\begin{cases} \overline{A} = A(\omega)e^{i\psi(\omega)} \\ \overline{x} = A(\omega)e^{i\psi(\omega)} \cdot e^{i\omega t} \end{cases}$$

$$= \mathrm{Re}(\overline{x})$$

$$\dot{\overline{x}} = \overline{A}(\omega) \cdot i\omega e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\overline{x}} = \overline{A}(\omega)(-\omega^2)e^{i\omega t}$$

$$e^{i\omega t}\overline{A}(\omega)(-\omega^2 + 2\beta i\omega + \omega_0^2) = f_0 e^{-i\omega t}$$

$$\overline{A}(\omega) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\beta i\omega}$$

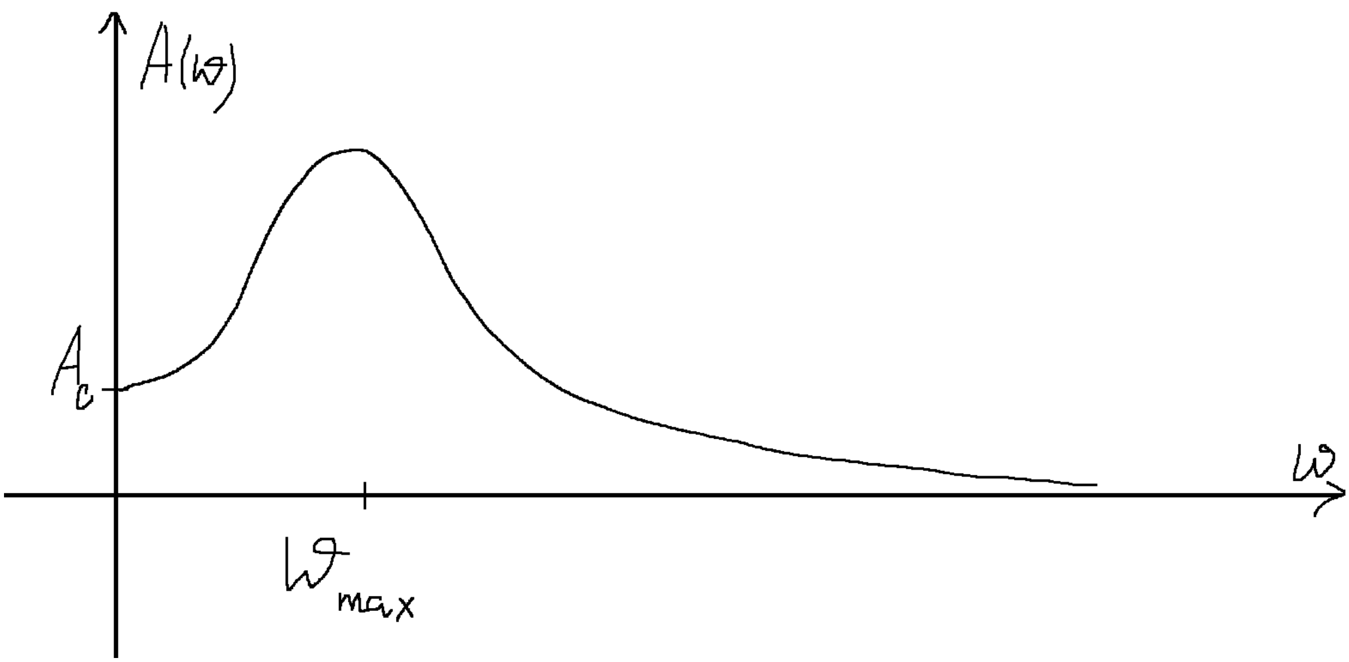
$$A(\omega) = |\overline{A}(\omega)|$$

$$A(\omega) = |\overline{A}(\omega)| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Исследуем при какой частоте $\omega_{\max}$ $A = A_{\max}$:

$$min \qquad \xi(\omega) = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2$$
$$z = \omega^2$$
$$\xi(z) = (z - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 z =$$
$$\frac{d\xi}{dz} = 0 \implies 2(z - \omega_0^2) + 4\beta^2 = 0$$
$$z_{\max} = \omega_0^2 - 2\beta^2$$
$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega_{\text{зк}}^2 - \beta^2}$$

$$A(0) = \frac{f_0}{\omega_0^2}$$



Резонанская кривая aka Амплитудно-частотная харатеристика

$$\omega \gg \omega_0$$
$$A(\omega) \approx \frac{f_0}{\omega^2}$$
$$A(0) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m}} = \frac{F_0}{k} = X_{\text{статическое}}$$
$$F = -kx \quad |\frac{F}{k}| = x$$
$$A_{\max} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - 2\beta^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^2(\omega_0^2 - \beta^2)}} = \frac{f_0}{2\beta\omega_{\text{зк}}}$$
$$\Gamma = \frac{A(\omega_{max})}{A(0)} \text{ - добротность колебаний системы}$$
$$\Gamma = \frac{f_0}{2\beta\omega_{\text{зк}}} : \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{\omega_0^2}{2\beta\omega_{\text{зк}}} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\delta}$$
$$\beta \ll \omega_0 \Rightarrow \omega_{\text{зк}}, \qquad \omega_{\max} \approx \omega_0$$

17/02/2025 2

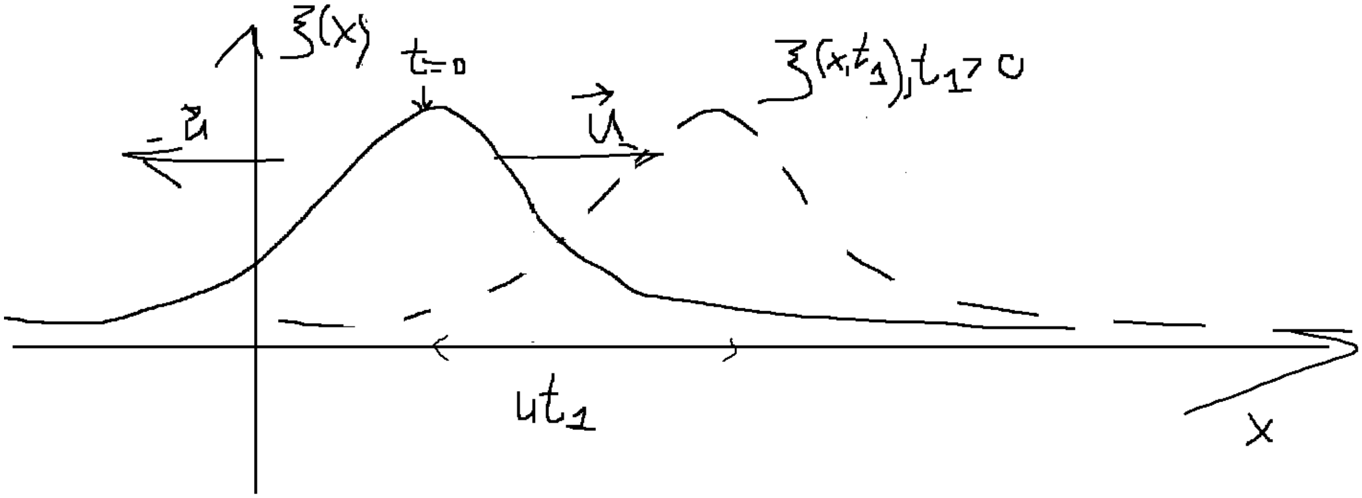
Упругие волны

Волна - распространение некоторого возмущения в среде

Возмущение - отклонение некоторого свойства среды от равновесного

Фронт волны - поверхность, докуда дошло возмущение

Волновая поверхность - множество точек, в которых волна имеет одинаковую фазу (состояние)



$$\xi(x, t_1) = \xi(x - ut_1)$$

$$\psi = x - ut \frac{\partial}{\partial t}\xi(x - ut) = \frac{d\xi}{d\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{ud\xi}{d\psi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\xi(x - ut) = \frac{d\xi}{d\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{d\xi}{d\psi}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi = -u\frac{d}{d\psi}\left(\frac{d\xi}{d\psi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial t} = u^2\frac{d^2\xi}{d\psi^2}$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{d}{d\psi}\left(\frac{d\xi}{d\psi}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{d^2\xi}{d\psi^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi = 0$$

Было выведено дифференциальное волновое уравнение (одномерное)

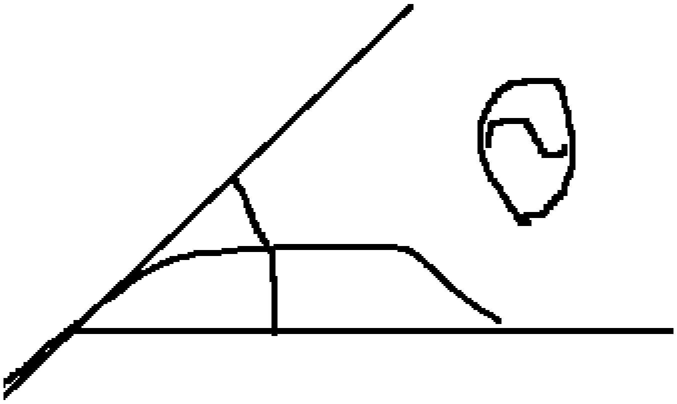
Пример:

Волна в натянутой струне.

Упрощения:

1. Струна не сопротивляется изгибу

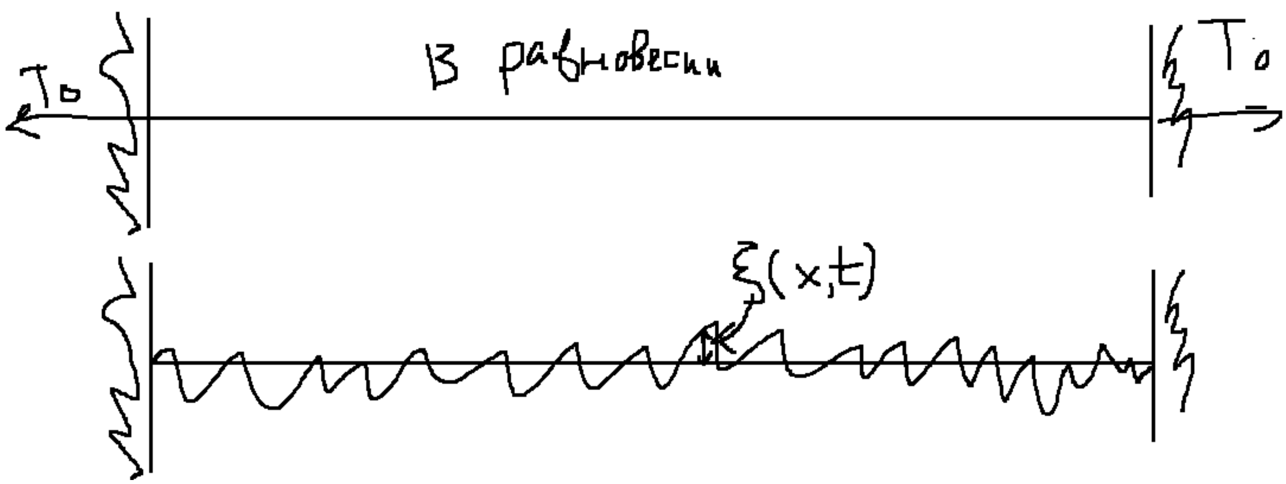
2. Углы, образованные струной с осью x малы



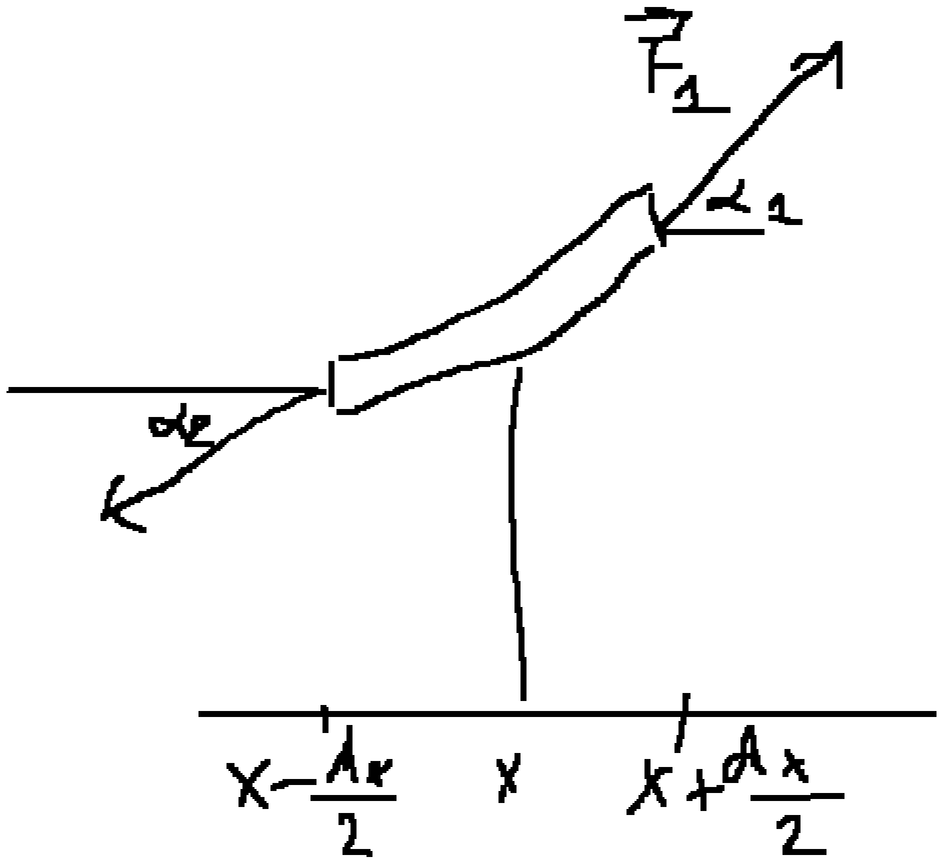
$\theta \ll 1$

3. Натяжение струны при возмущении остаётсся постоянным

$$\vec{T_0} = const$$



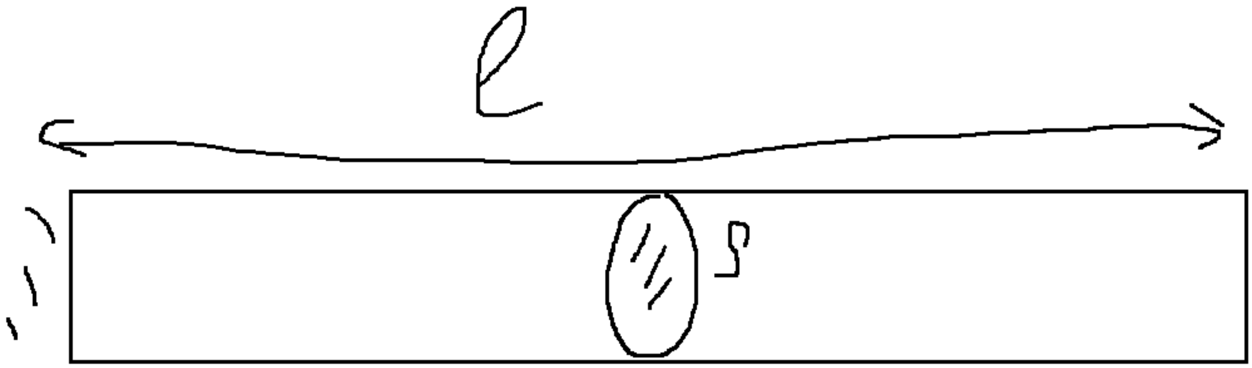
Рассмотрим малую участок струны длиной dx

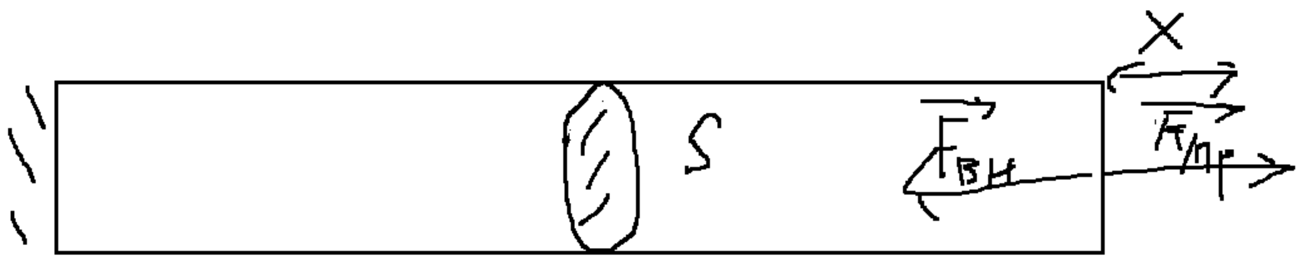


$\vec{F}_1$
α_1
α_2
$x-\frac{dx}{2}$
x
$x+\frac{dx}{2}$

$$dm\,\dot{\vec{v}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2,\ |\vec{F}_i| = T_0$$
$$F_y = T_0\sin\alpha_1 - T_0\sin\alpha_2 = T_0(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)$$
$$\alpha_1 = \theta_1$$
$$\alpha_2 = \pi + \theta_2$$
$$F_y = T_0(\sin\theta_1 - \sin(\theta_2)) =$$
$$\theta \ll 1 \implies tg(\theta) \approx \sin(\theta)$$
$$tg(\theta) = \frac{\partial\xi}{\partial x}$$
$$F_{1,y} = T_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)x + \frac{dx}{2}$$
$$F_{2,y} = T_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)x - \frac{dx}{2}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\xi\right)_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\xi\right)\frac{dx}{2} =$$
$$= F_y = T_0\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}|_{x+\frac{dx}{2}} - \frac{\partial\xi}{\partial x}|_{x-\frac{dx}{2}}\right) =$$
$$= T_0\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi\right)dx$$
$$dm = \rho_l dx,\ \dot{V}_y = \ddot{\xi}$$
ρ_l - линейная плотность струны
$$\rho_l dx\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi = T_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi dx$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi - \frac{1}{\frac{T_0}{\rho_l}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi = 0$$
$$u^2 = \frac{T_0}{\rho_l} \implies u = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_l}}$$ - фазовая скорость волны

Упругие волны стержня



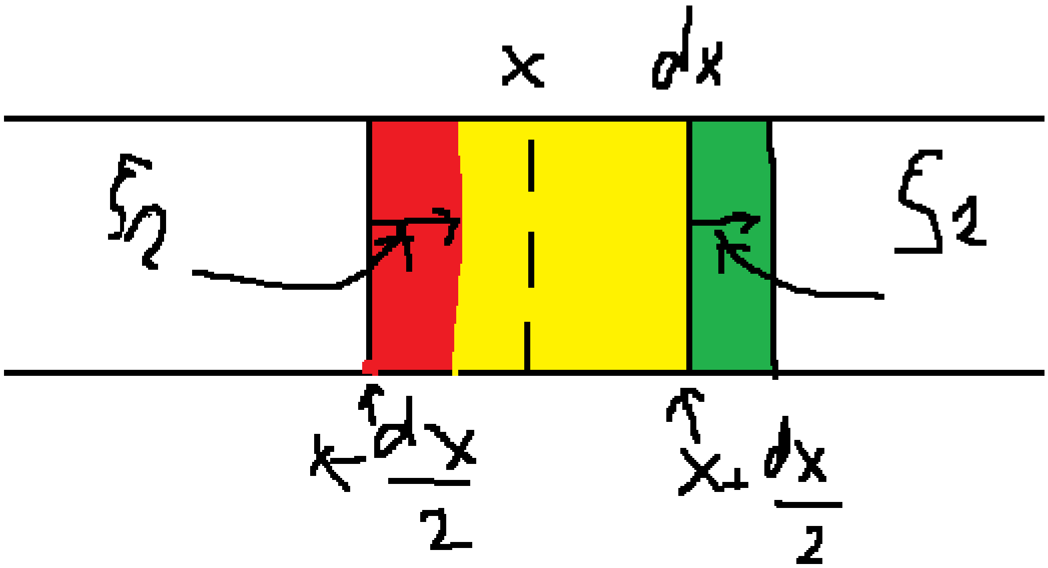


$$F_{\text{упр}} = -kx$$
$$\frac{F_{\text{упр}}}{S} = -\frac{kx}{S}$$
$$\sigma_x = -\frac{C}{S}x$$
$$k \sim \frac{S}{l}$$
$$k = \frac{ES}{l}$$
$$x \sim l$$

$\varepsilon = \dfrac{x}{l}$ - относительная деформация

E - модуль Юнга - характеристика материала

$\sigma_x = -E\varepsilon$ - механическое напряжение



$$\varepsilon = ?$$

Начальная длина - dx

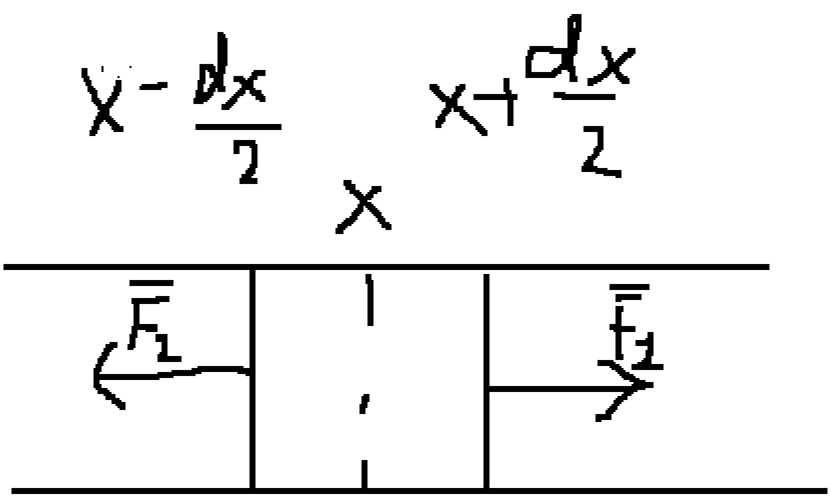
Конечная длина - $dx + \xi_1 - \xi_2$

Деформация - $\xi_1 - \xi_2$

$$\xi_1 = \xi\left(x + \frac{dx}{2}\right), \quad \xi_2 = \xi\left(x - \frac{dx}{2}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{\xi\left(x + \frac{dx}{2}\right) - \xi\left(x - \frac{dx}{2}\right)}{dx} =$$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial x}\xi dx}{dx} = \frac{\partial}{\partial x}\xi$$



$$dm \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi = F_x^\Sigma$$
$$F_x^\Sigma = F_1 - F_2 = SE\varepsilon_1 - SE\varepsilon_2 = SE\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\xi\right)|_{x+\frac{dx}{2}} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\xi\right)|_{x-\frac{dx}{2}}\right) = SE\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi dx$$
$$\rho S dx \frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi = SE\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi dx$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\xi - \frac{1}{E/\rho}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi = 0$$

В струне - поперечные волны (смещение перпендикулярно распространению)
В стержне - продольные волны (смещение параллельно распространению, вдоль распространения)

Синусоидальные плоские волны

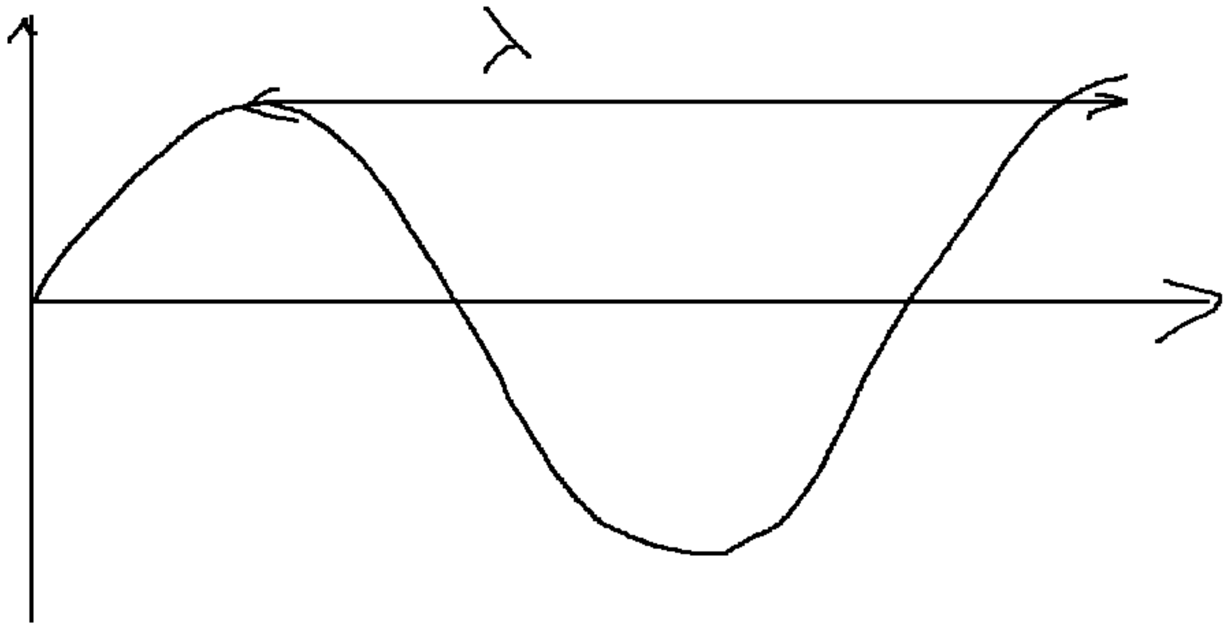
Пусть при $x = 0$

$$\xi(0,t) = \xi^\wedge(t) = A\sin\omega t$$
$$\xi(x,t) = ?$$
$$\text{Знаем } \xi(x,t) = \xi(x - ut) \implies$$
$$\xi(0,t) = \xi(-ut)$$

$$A\sin\omega t = A\sin(\alpha(-ut))$$
$$x = 0 \quad A\sin(k(x - ut)) =$$
$$= A\sin(\omega t + kx)$$
$$\text{фаза} = \omega = const \Rightarrow$$
$$d(\text{фаза}) =$$
$$\omega dt + kdx = 0$$
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\omega}{k}$$

$$\xi - \sin$$
$$-\alpha u = \omega$$
$$\alpha = -\frac{\omega}{u}$$
$$\text{Переобозначим } \alpha \equiv k \text{ - волновое число}$$

$$A\sin(\omega t - kx)$$
$$\lambda \text{ - длина волны}$$

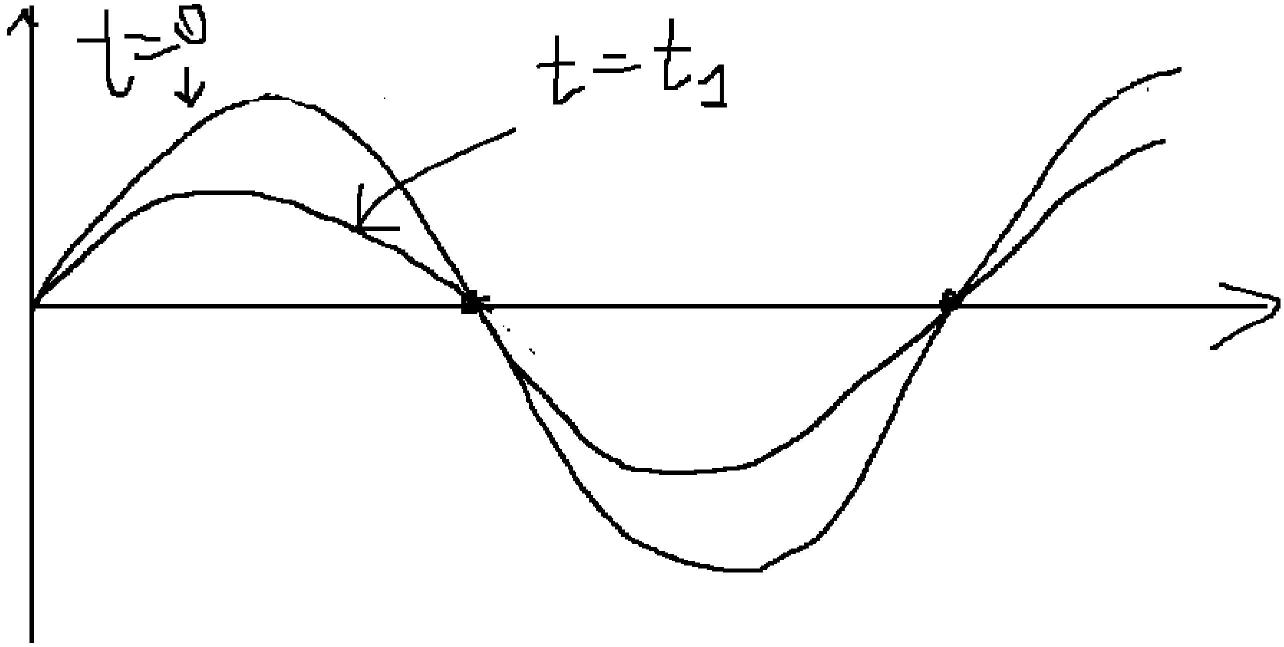


$$k\lambda = 2\pi$$
$$\omega T = 2\pi$$

Стоячие волны

Имеются 2 волны с одинаковой амплитудой, бегущие навстречу друг другу.

$$\xi_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$
$$\xi_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$$
$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos(\omega t)\cos(kx) =$$
$$= [2A\cos(kx)]\cos\omega t$$



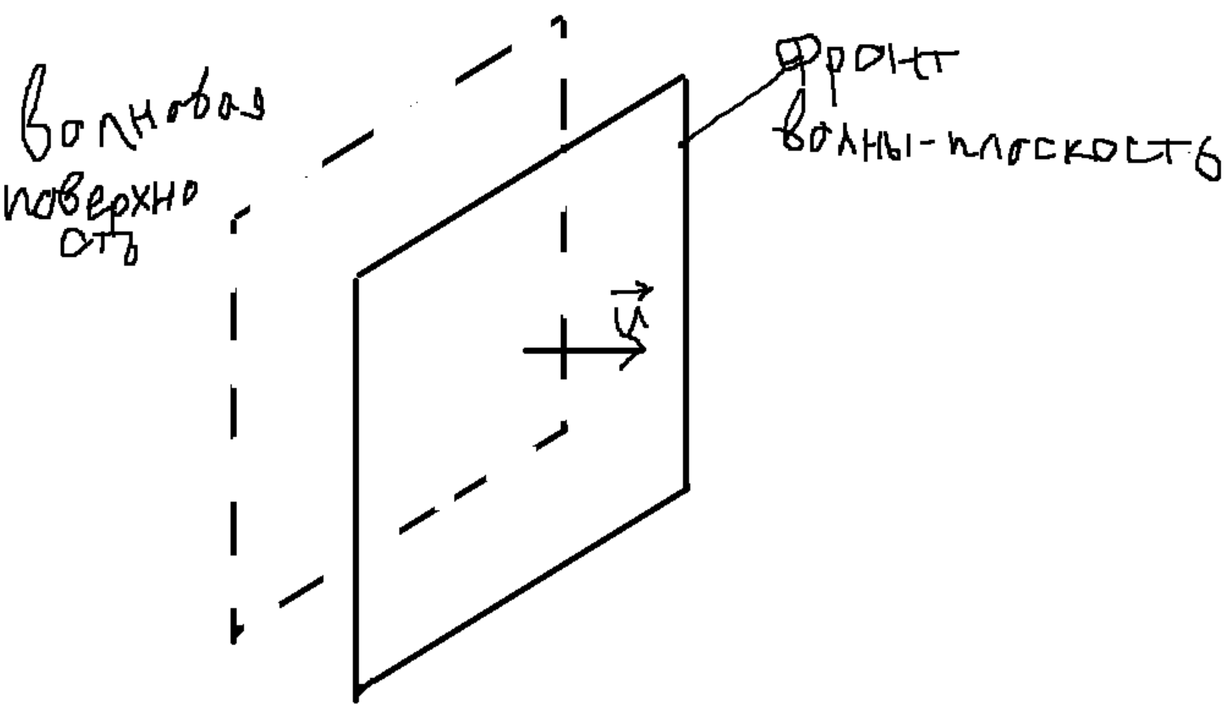
24/02/2025

Волны в пространстве

1D Волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \implies \text{ соответствует}$$

Плоская волна, распространяющаяся параллельно оси 'X'



В 3D случае:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2 \text{ - оператор Лапласа в ДК}$$

$$\nabla^2 \xi - \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi = 0$$

∇ - набла (дифференциальный оператор Гамильтона)

$$\text{В (x,y,z) } \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$$

$$\text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a}$$

$$\text{grad } f = \nabla(f)$$

$$\nabla^2 f = \text{ div (grad } f)$$

Решение 3D волнового уравнения в виде плоских волн:

$$\xi(x, y, z, t) = \xi_x(x - ut) + \xi_y(y - ut) + \xi_z(z - ut) + \ldots$$

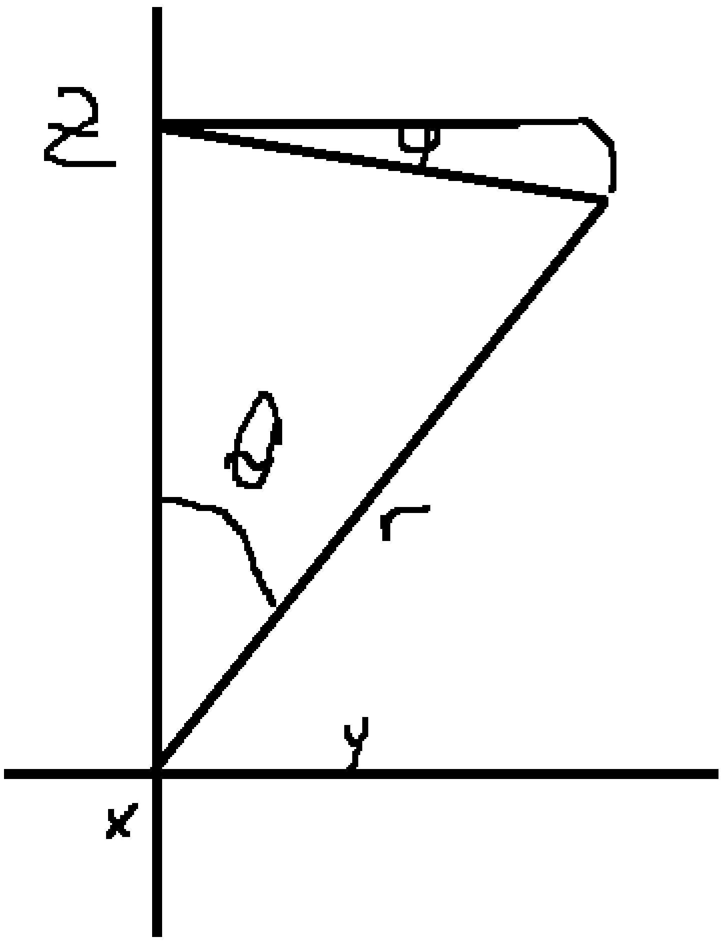
???

Решение 3D волнового уравнения в виде сферических волн

Имеем решение в виде $\xi = \xi(r, t)$

Найдём выражение для ∇_r^2 в сферической системе координат для случая, когда $f = f(r)$

$$\nabla_r^2 = \text{ div (grad } f(r))$$



$$\text{grad } f(r) = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \vec{e_r}$$
$$\text{grad } \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e_r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e_\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{e_\varphi}$$
$$\text{div } \vec{a} = \lim_{d_{\max} \to 0} \frac{\oint_{S_0} \vec{a} d\vec{S}}{V_0}$$

Для упрощения, рассмотрим бесконечно малый элемент объёмав сферических координатах

$$\text{grad } f(r) = \vec{a}(r)$$
$$"\oint_{dS_0} \vec{a} d\vec{S}" = a(r+dr) dS_\perp(r+dr) - a(r) dS_\perp(r) =$$

$$dS_\perp(r+dr) = (r+dr) d\theta \cdot (r+dr) \sin \theta d\varphi = (r+dr)^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$
$$dS_\perp(r) = r d\theta r \sin \theta d\varphi = r^2 \sin \theta d\varphi$$

$$= \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a) dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$dV_0 = dr\, rd\theta\, r\sin\theta d\varphi = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\oint_{dS_0}\vec{a}d\vec{S}}{dV_0} = \frac{\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a)\ \cancel{dr\sin\theta d\theta d\varphi}}{r^2\ \cancel{dr\sin\theta d\theta d\varphi}} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a)$$

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\xi}{\partial r}\right) - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi = 0$$

$$\frac{1}{r^2}(r^2\xi'_r)'_r = \frac{1}{r^2}(2r\xi'_r + r^2\xi''_{rr}) = \frac{2}{r}\xi'_r + \xi''_{rr} = \frac{1}{r}(2\xi'_r r + \xi''_{rr}) =$$

$$= \frac{1}{r}(\xi'_r + \xi'_r + r\xi''_{rr}) = \frac{1}{r}(\xi'_r + (r\xi'_r)'_r) = \frac{1}{r}(\xi + r\xi'_r)'_r = \frac{1}{r}(r\xi)''_{rr} \implies$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\xi) - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\xi = 0$$

$$r \neq 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\xi) - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\xi) = 0$$

$$r\xi = f$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(f) - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(f) = 0 \implies$$

$$\xi(r,t) = \frac{f(r,t)}{r}$$

Общее решение: $f(r,t) = f(r-ut)$

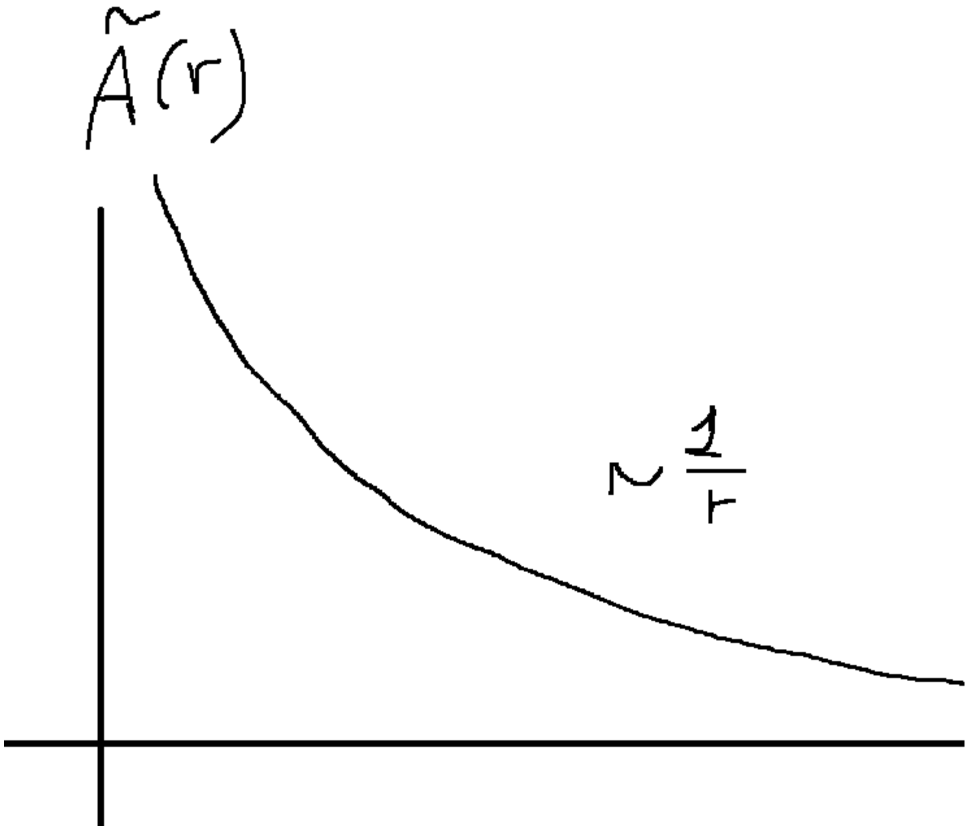
$$\xi(r,t) = \frac{f(r-ut)}{r}$$

Знак минус указывается на то, что волна распространяется от центра. (Расходящиеся от центра волны).

Синусоидальные сферические волны

$$\xi(r,t) = \frac{A_0\cos(\omega t - kr)}{r} = \tilde{A}(r)\cos(\omega t - kr)$$

$$\tilde{A}(r) = \frac{A_0}{r}$$



Энергия упругой волны

Рассмотрим малый объём dV упругой среды.

$$dK = \frac{dmV^2}{2}$$
$$\vec{V} = \frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}$$
$$dm = \rho dV$$
$$dK = \frac{\rho dV\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2}{2} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 dV$$
$\omega_K = \dfrac{dK}{dV}$ - объемная плотность энергии

Потенциальная энергия сжатия (растяжения) стержня
$$d\omega_K = \frac{\rho}{2}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)$$
$$U_{\text{упр}} = \frac{kx^2}{2}$$
$$k = \frac{ES}{l}$$
$x = \varepsilon l$, где ε - относительная деформация
$$U_{\text{упр}} = \frac{\frac{ES}{l}\varepsilon^2 l^2}{2} = \frac{E\varepsilon^2}{2}\rho l$$
$$\omega_V = \frac{U_{\text{упр}}}{V} = \frac{E\varepsilon^2}{2},\ \varepsilon = \frac{\partial\xi}{\partial x} \Rightarrow$$
Объёмная плотность полной потенциальной энергии
$$\omega_U = \frac{E}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2$$
$\omega = \omega_K + \omega_V$ - объёмная плотность полной энергии в упругой (продольной) волне
$$\omega = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + \frac{E}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2$$

Рассмотрим случай плоской синусоидальной волны

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = -A\omega\sin(\omega t - kx)$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = Ak\sin(\omega t - kx)$$
$$w = \frac{A^2\sin^2(\omega t - kx)}{2}[\rho\omega^2 + Ek^2]$$
$$\xi = A\cos(\underbrace{\omega t - kx}_{\text{фаза}})$$

Найдём скорость движения поверхности постоянной фазы

$$\text{фаза} = \omega t - kx = const$$
$$d\ \text{фаза} = \omega dt - kdx = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = u$$
$$u_{\text{ср}} = \frac{\omega}{k}$$

$$w = \frac{A^2 \sin^2(\omega t - kx)}{2}\left[1 + \cancelto{u^2}{\frac{E}{\rho}} \cancelto{\frac{1}{u^2}}{\left(\frac{k}{\omega}\right)^2}\right]$$

Для стержня сплошной среды:

$$u_{\text{п}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \Rightarrow u^2 = \frac{E}{\rho}$$

$$w = A^2\omega^2\rho\sin^2(\omega t - kx)$$
$$< w >= \lim_{T\to\infty} \frac{\int_0^\infty w(t)dt}{T}$$
$$< w >= A^2\omega^2\rho < \sin^2(\omega t - kx) >=$$

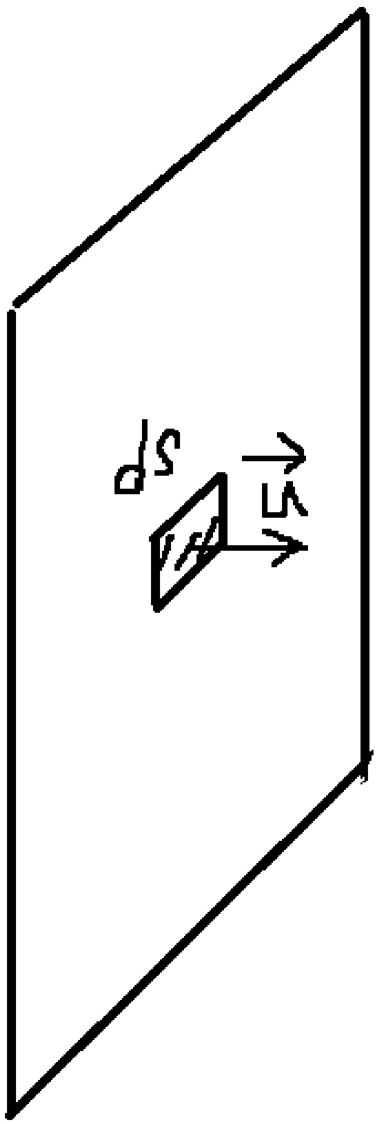
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$< \sin^2\alpha > + < \cos^2\alpha >= 1$$
$$< \sin^2\alpha >=< \cos^2\alpha >\Rightarrow< \sin^2\alpha >= \frac{1}{2}$$

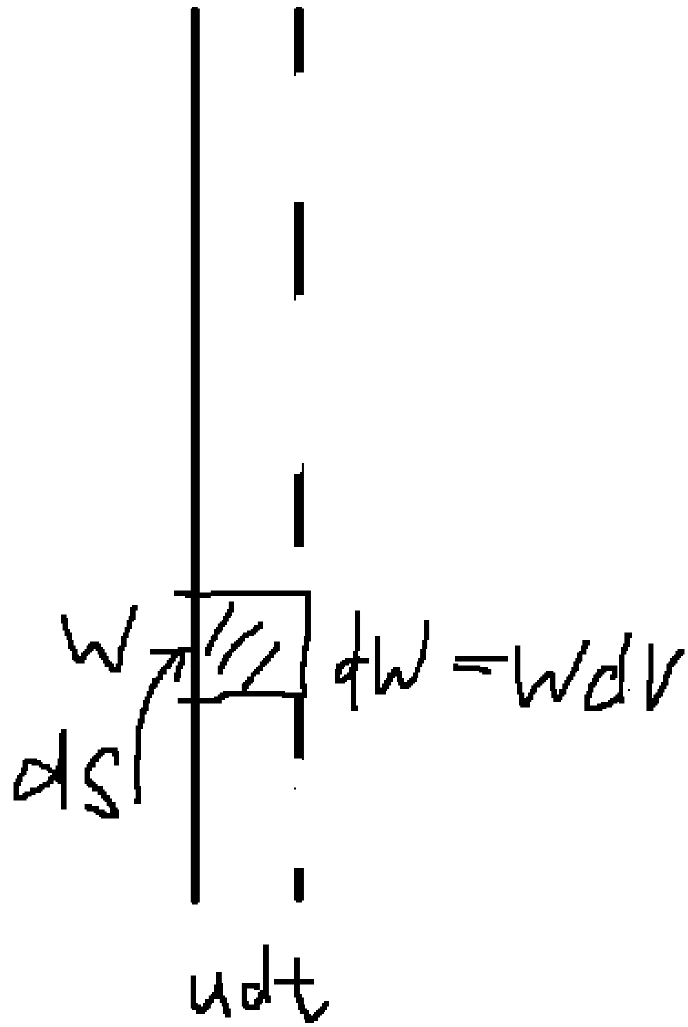
$$< w >= \frac{A^2\omega^2\rho}{2}$$

???

Перенос энергии упругой волны

Вектор Умова





$$dW = W\,dV$$
$$dV = dS\,u\,dt$$
$$dW = W\,dS\,u\,dt$$

$\vec{J_W}$ - плотность потока энергии

$$|\vec{J_W}| = \frac{dW}{dSdt}\left[\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}\right]$$
$$\vec{J_W} = w\vec{u}$$

03/03/2025

Термодинамика и молекулярная физика

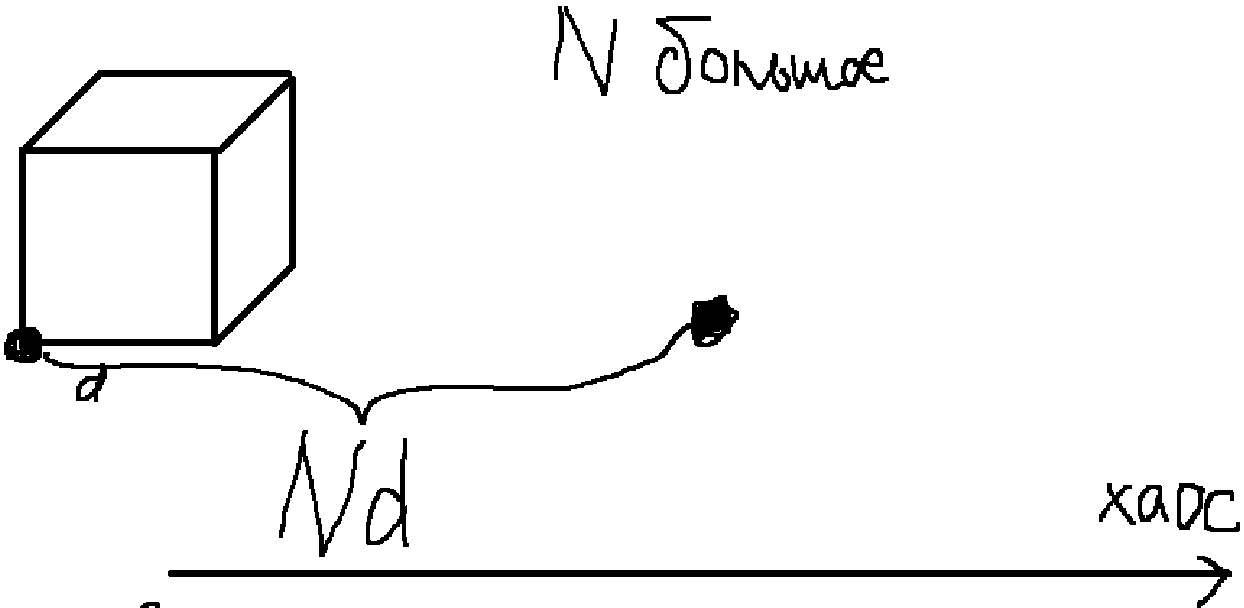
Книга: ДВ Сивухин Общий курс Физики том 2.

Макроскопические системы состоят из огромного числа молекул (10^{23}).

Динамическое описание макросистем невозможно по следующим причинам:

1. Мы не знаем точного закона взаимодействия атомов и молекул макросистемы.
2. Мы не знаем начальные условия для всех молекул.
3. Физически невозможно записать такое количество уравнений и такое количество начальных условий.
   Комментарий: Даже если б мы могли получить решение для всех молекул, будет непонятно, что с этой информацией делать.
   Для описания макросистем (равновесных и квазиравновесных состояний) существует 2 подхода:
   1 подход: Феноменологическая (аксиоматическая термодинамика).
   Основана на небольшом числе постулатов (аксиом), выведенных из огромного экспериментального материала.
   В рамках своей применимости предсказания термодинамики очень точны.
   Недостаток: сильная абстрактность понятий и отсутствие каких-либо сведений о механизме происходящих процессов.
   Для придания большей наглядности используют простейшие представления молекулярно-кинетической теории (МКТ далее).
   2 подход: Статистическая физика.
   Позволяет зная микроскопическое устройство системы найти среднее значение всех основных термодинамических величин.
   Использует математический аппарат теории вероятностей и математической статистики.

Подход Больцмана-Максвелла.
Вещество существует при не очень высоких температурах в 3 основных агрегатных состояниях: твёрдое тело (кристалл), жидкость, газ.
В целом, вещество нейтрально.



твёрдое тело → жидкость → газ

твёрдое тело	жидкость	газ
1) Дальний порядок	1) Ближний порядок	1) Нет упорядоченности
2) Сильное взаимодействие между атомами	2) Сильное взаимодействие молекул (атомов)	2) Слабое взаимодействие

В теоретической механике и физике твёрдое тело - это разные понятия.
Например, в английском это отражено. Solid state и Rigid body.

Идеальный газ

Уравнение состояния идеального газа

Оно же Уравнение Менделеева-Клайперона)

$$PV = \nu RT$$

ν - число молей газа [моль]
$R \approx 8.3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ - универсальная газовая постоянная

1 моль вещества содержит $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$ атомов (или молекул)
$N_A = [\frac{1}{\text{моль}}]$

$$P = \frac{\nu}{V} RT = \underbrace{\frac{\nu N_A}{V}}_{n} \cdot \underbrace{\frac{R}{N_A}}_{k_B \text{ - постоянная Больцмана}} \cdot T$$

$$P = n k_B T$$

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.

Разобъём молекулы по скоростным группам $(v_{x_i}, v_{x_i} + \Delta v_x)$, где $\Delta v_x \ll v_x$.

$$n_i \text{ - концентрация молекул с скоростью } \in (v_{x_i}, v_{x_i} + \Delta v_x)$$

Найдём сколько молекул ударится о площадку ΔS за время Δt.

$$\Delta N = n_i \Delta V_i$$
$$\Delta V_i = v_{x_i} \Delta t \Delta S \Rightarrow$$
$$\Delta N = v_{x_i} \Delta t \Delta S n_i$$

Эти частицы передадут стенке импульс

$$\Delta p_x^{\text{стенки}} = 2m_0 v_{x_i} \cdot \Delta N_i = 2m_0 n_i v_{x_i}^2 \Delta S \Delta t$$

Подразумевается, что $v_{x_i} > 0$

Суммарный импульс, переданный стенке

$$\Delta p_{\sum,x}^{\text{стенки}} = \sum_i p_{x,i}^{\text{стенки}} = 2m_0 \sum_i n_i v_{x,i}^2 \Delta S \Delta t$$

По второму закону Ньютона

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} \Rightarrow F_{\text{стенки},x} = \frac{\Delta p_{\sum,x}^{\text{стенки}}}{\Delta t} \Rightarrow$$
$$P = \frac{F_{\text{стенки}}}{\Delta S} = \frac{\Delta p_{\sum,x}^{\text{стенки}}}{\Delta S \Delta t}$$
$$P = 2m_0 \sum_i n_i v_{x,i}^2$$
$$< v_x^2 >= \sum_k P_k v_{x,k}^2, \text{ где}$$

P_k - вероятность значения $v_{x,k}^2$

$$P_k = \frac{n_k}{n}, \text{ где}$$

n_k - концентрация, соотвествующая $v_x^2 = v_{x,k}^2$

$$v_{x,i}^2 = -v_{x,i}^2$$
$$n_k = \begin{cases} +v_{x,k} \\ -v_{x,k} \end{cases}$$
$$\begin{matrix} n_i \\ v_{x,k} > 0 \end{matrix} \Rightarrow n_i = \frac{1}{2} n_i^{\pm} \Rightarrow$$
$$\sum_i n_i v_{x,i}^2 = \frac{1}{2} \sum_i n_i^{\pm} v_{x,i}^2 =$$
$$= \frac{n}{2} \sum_i \frac{n_i}{n} v_{x,i}^2 =$$
$$= \frac{n}{2} \sum_i P_i v_{x,i}^2 = \frac{n}{2} < v_x^2 >$$

$$P = m_0 n < v_x^2 >$$
$$< v^2 >=< v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 >=< v_x^2 > + < v_y^2 > + < v_z^2 >\Rightarrow$$
$$< v_x^2 >= \frac{1}{3} < v^2 >\Rightarrow$$
$$P = \frac{2}{3} n < E_{\text{пост}} >$$

03/03/2025 2

$$P = nkT \Rightarrow < E_{поступательное} >= \frac{3}{2}kT$$

$$< \frac{mv_x^2}{2} > + < \frac{mv_y^2}{2} > + < \frac{mv_z^2}{2} >= \frac{3}{2}kT$$

$$< \frac{mv_x^2}{2} >= \frac{kT}{2}$$

Теорема о равномерном распределении энергии по степеням свободы:
На 1 степень свободы в среднем приходится энергия $\frac{kT}{2}$.

$$< E >= \frac{ikT}{2}$$

Тип молекулы	**Число степеней свободы**	**Средняя энергия**	**Энергия 1 моля**	$C_V = \frac{dU_{моль}}{dT}$	C_P	γ
1-атомная (He, Ar)	3	$\frac{3}{2}kT$	$\frac{3}{2}RT$	$\frac{3}{2}R$	$\frac{5}{2}R$	$\frac{5}{3}$
2-атомная жёсткая (O_2, H_2)	5	$\frac{5}{2}kT$	$\frac{5}{2}RT$	$\frac{5}{2}R$	$\frac{7}{2}R$	$\frac{7}{5}$
3х и более атомная жёсткая нелинейная, O_3, H_2O	6	$\frac{6}{2}kT$	$\frac{6}{2}RT$	$3R$	$4R$	$\frac{4}{3}$

Следующий раздел

Первое начало термодинамики

Количество теплоты - энергия, переданная системе путём теплообмена.
Теплообмен - процесс передачи энергии без совершения макроскопической работы.
3 механизма передачи тепла:
Теплопроводность, конвекция и излучение.
Проводность - металлическая ложка в кипятке обжигает пальцы.
Конвекция - горячая вода в кастрюле всплывает. Холодный воздух опускается.
Излучение - ночью холоднее чем днём.
Внутренняя энергия - суммарная энергия всех входящих в систему атомов и молекул за минусом кинетической и потенциальной энергии как целого.
Если балон с газом поднять на Эверест, то внутренняя энергия напрямую от этого не поменяется.
Одно и то же состояние системы можно достичь за счёт работы или за счёт теплоты.

Предположим, у нас имеется объём жидкости, который мы хотим нагреть до какой-то температуры.

Первый способ:

Опускаем электическую спираль с включённым током в воду и ждём.

$dU = \delta Q, \ \delta A = 0$

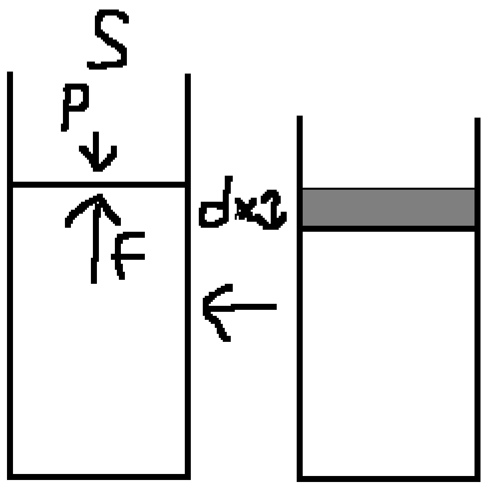
Второй способ:

Опускаем в воду миксер и перемешиваем.

$dU = -\delta A = +\delta A^{\text{внешняя}}$

$\Delta U = U_{\text{конечное}} - U_{\text{начальное}}$

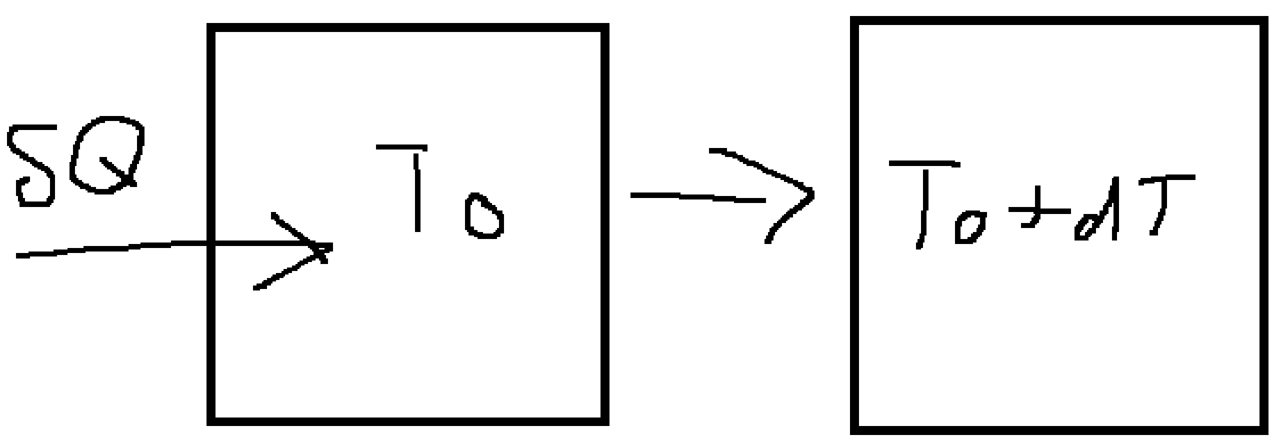
Работа газа против внешнего давления



$$\delta A = \vec{F} d\vec{x} = PSdx = PdV$$
$$\delta A = PdV$$

Теплоёмкость идеального газа

$$C = \frac{\delta Q}{dT} \left[\frac{\text{Дж}}{\text{К}} \right]$$



Теплоёмкость газа зависит от процессов теплопередачи.

Возьмём 1 моль газа.

$$C = \frac{\delta Q}{\nu dT} = \left[\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}\right]$$

Для 1 моля уравнение состояния будет иметь вид

$$PV = RT$$

Возьмём изохорный процесс ($V = const$) $\Rightarrow$

$$\delta A = pdV = 0 \Rightarrow$$
$$\delta Q_V = dU \Rightarrow C_V = \frac{\delta Q_V}{dT} = \frac{dU}{dT}$$
$$\text{Для идеального газа } U = U(T) \Rightarrow$$
$$dU = C_V dT$$

Смотрим на столбец таблицы с C_V и идём дальше

Изобарный процесс ($P = const$) $\Rightarrow$

$$\delta Q = dU + PdV =$$
$$PV = RT$$
$$d(PV) = d(RT)$$
$$PdV = RdT$$
$$= C_V dT + RdT = (C_V + R)dT$$

$$C_P = C_V + R \text{ - формула Майера}$$

Курьёзы:

Изотермический процесс ($T = const$) $\Rightarrow dT = 0$

$$\delta Q = \cancelto{0}{C_V dT} + PdV$$
$$\delta Q = PdV$$
$$C_T = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{\delta Q}{0} = \infty$$

Адиабатический процесс ($\delta Q = 0$)

Происходит либо в хорошо теплоизолированной системе, либо процесс происходит настолько быстро, что теплообмен не играет существенной роли (взрыв).

$$C_{\text{адиабатический}} = \frac{\delta Q}{dT} = 0$$

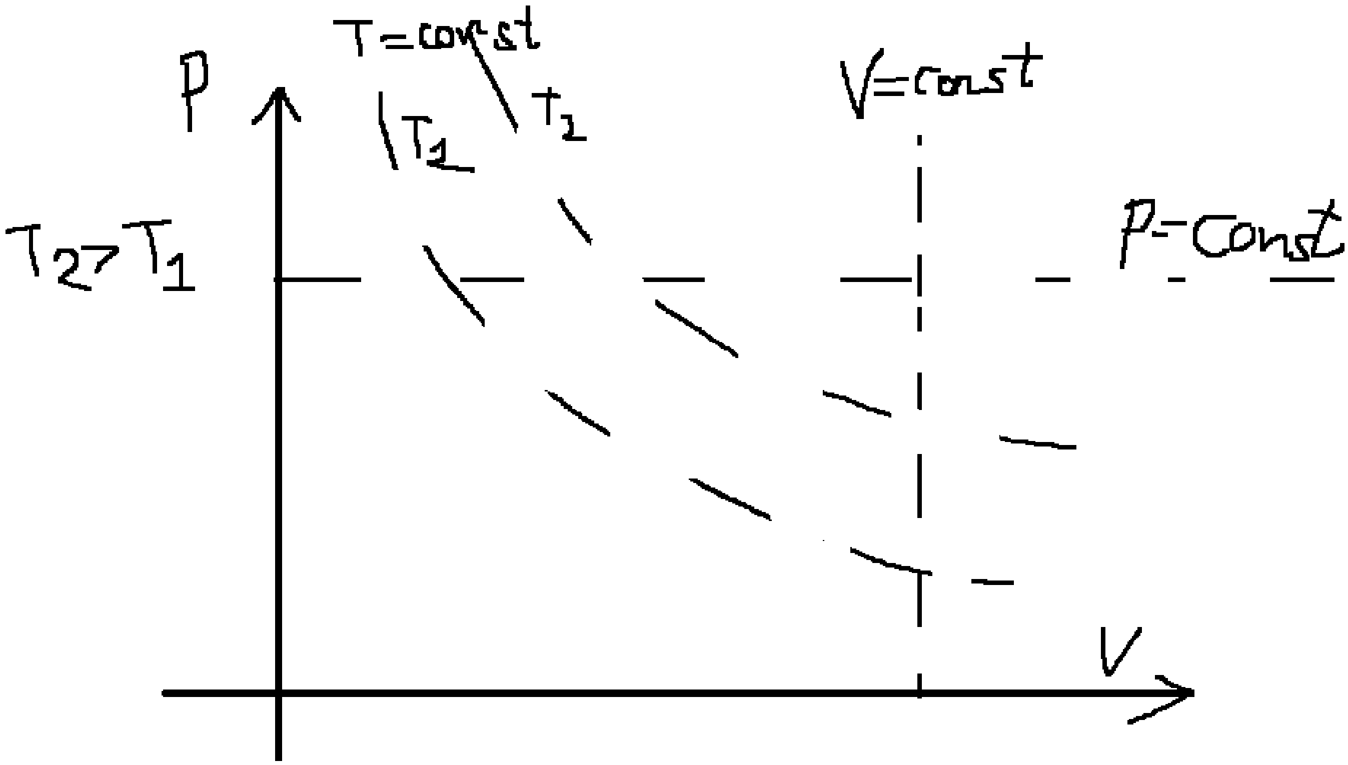
$$0 = C_V dT + PdV$$

Если сжать шину, то она нагреется.

Уравнение адиабаты.

$$\delta Q = 0 \Rightarrow dU + \delta A = 0$$
$$C_V dT + PdV = 0$$
$$PV = RT$$
$$d(PV) = d(RT)$$
$$PdV + VdP = RdT$$
$$dT = \frac{1}{R}(PdV + VdP)$$
$$\frac{C_V}{R}(PdV + VdP) + PdV = 0$$
$$\underbrace{(C_V + R)}_{C_P}PdV + C_V VdP = 0$$
$$C_P PdV + C_V VdP = 0$$
$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} \text{ - показатель адиабаты}$$
$$\gamma PdV + VdP = 0$$
$$\gamma\frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0$$
$$\gamma \ln V + \ln P = const$$
$$\ln(V^\gamma P) = const$$
$$PV^\gamma = const \text{ - уравнение адиабаты в } (P, V)$$

См. последний столбец таблицы.



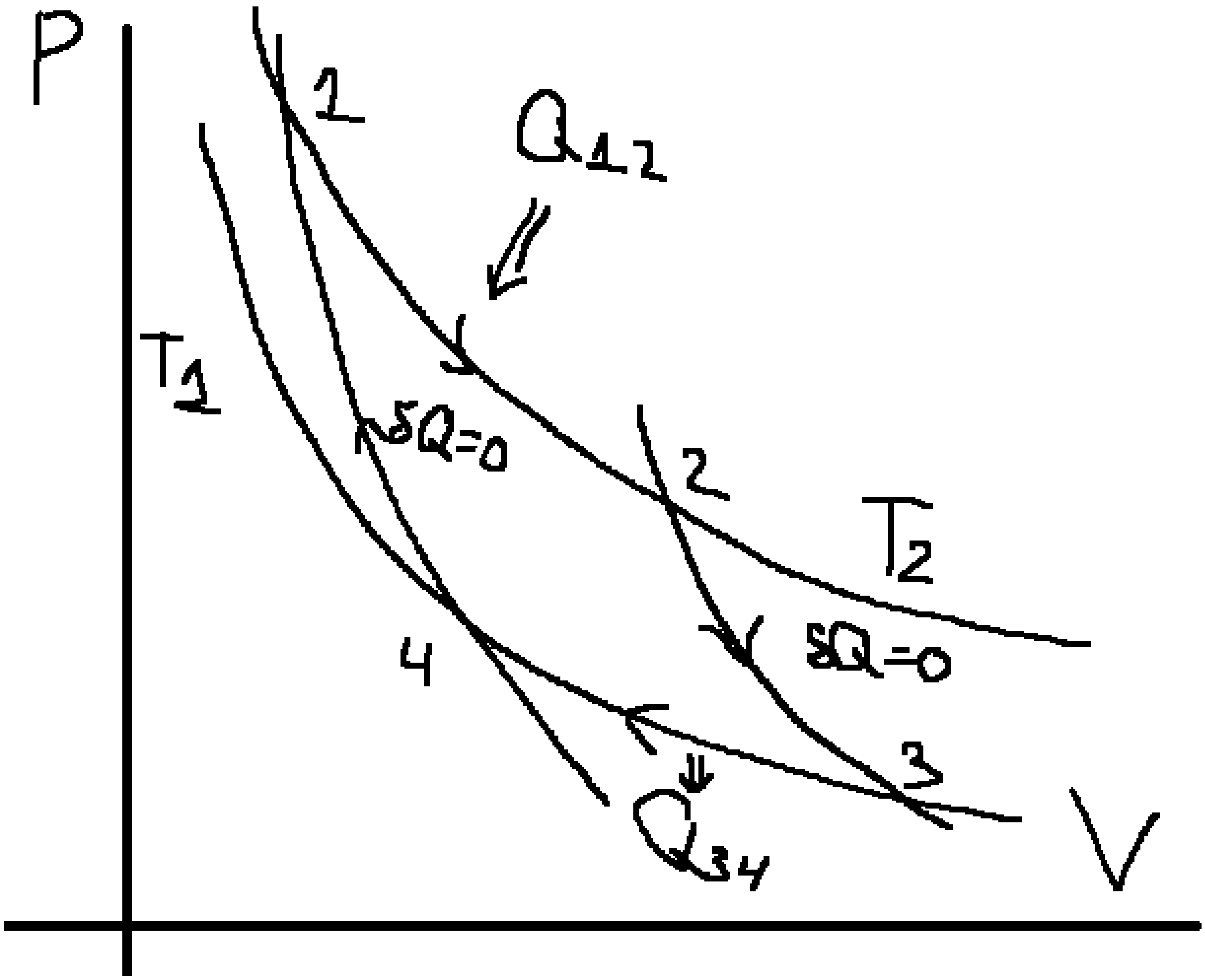
$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} > 1 \Rightarrow P = \frac{const}{V^\gamma}$$

Процесс, у которого начальное и конечное состояние совпадают, называют циклическим.

$\delta U = 0$

Поэтому в круговом процессе $Q = A$

цикл Карно



Уравнение адиабаты в (V, T):

$$PV^{\gamma} = const$$
$$PV = RT$$
$$P = \frac{RT}{V} \implies P \sim \frac{T}{V}$$
$$\frac{T}{V}V^{\gamma} = const \Rightarrow$$
$$TV^{\gamma-1} = const$$

КПД:

$$\eta = \frac{A}{Q_{полученное}}$$