Задание 1

Условие:

$$z_1 = 7 + i$$
$$z_2 = 3 - 3i$$

Найти:

$$z_1\overline{z_2}^2$$

Расчёты:

$$\overline{z_2} = 3 + 3i$$
$$\overline{z_2}^2 = 9 - 9 + 18i = 18i$$
$$z_1\overline{z_2}^2 = 7 \cdot 18i - 18 = -18 + 126i$$

Задание 2

Условие:

$$z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$
$$z_2 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$$

Найти:

$$\frac{\overline{z_2}}{z_1}$$

Расчёты:

$$\frac{\overline{z_2}}{z_1} = \frac{\overline{z_2} \cdot \overline{z_1}}{z_1\overline{z_1}} = \frac{\overline{z_1 \cdot z_2}}{\mathrm{Re}^2 z_1 + \mathrm{Im}^2 z_1}$$
$$\mathrm{Re}^2 z_1 + \mathrm{Im}^2 z_1 = 2 + 2 = 4$$
$$z_1 z_2 = \sqrt{2}(-1 + i)\sqrt{8}(1 - i) = 4(-1 + 1 + i(1 + 1)) = 8i$$
$$\overline{z_1 z_2} = -8i$$
$$\frac{\overline{z_2}}{z_1} = -\frac{8i}{4} = -2i$$

Задание 3

Условие:

$$z = 2 - 2i$$

Найти:

$$\sqrt[3]{z^4}$$

Расчёты:

$$z = re^{i\varphi}$$
$$\arg(2-2i) = -\frac{\pi}{4}$$
$$\mathrm{abs}(2-2i) = \sqrt{4+4} = 2^{3/2}$$
$$z = 2^{3/2}\exp\left(-\frac{\pi}{4}i\right)$$
$$z^4 = 2^6\exp(-\pi i)$$
$$\overline{z^4} = 2^6\exp(\pi i)$$
$$\sqrt[3]{\overline{z^4}} = 2^2\exp\left(\frac{\pi i}{3} + \frac{2\pi k}{3}\right),\ k \in \{0,1,2\}$$

Задание 4

Условие:

$$\begin{cases} |z-1-i| \le 1 \\ \mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z > 2 \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Решение:

$$|z-1-i| = 1 \text{ - окружность радиуса 1 и с центром в (1,i)}$$
$$|z-1-i| \le 1 \text{ - круг}$$
$$\mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z = 2$$
$$z = w + vi \Rightarrow w + v = 2 \text{ - прямая}$$
$$\mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z > 2 \Leftrightarrow w + v > 2 \text{ - полуплоскость}$$
$$\text{прямая } w + v = 2 \text{ - граница, (0,0) в ней не лежит}$$
$$\arg z = a \text{ - луч, с началом в (0,0) и углом } a \text{ к оси } x$$
$$\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2} - \text{сектор, расположенный между такими углами}$$

Пример z нашёл графически в nomotex. Почему-то представление полулоскости $\mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z > 2$ в виде развёрнутого угла с центром в (2,0) nomotex не принял, а с представлением в виде этого же угла с центром в (0,2) принял...

Задание 5

Условие:

$$w = \mathrm{ctg}(z)$$
$$z_0 = \frac{\pi}{4} + 2i$$

Расчёты:

$$w(z_0) = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 2i\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2i\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2i\right)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2i) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2i)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2i) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2i)} = \frac{\mathrm{ch}\,2 - i\,\mathrm{sh}\,2}{\mathrm{ch}\,2 + i\,\mathrm{sh}\,2} = \frac{\mathrm{ch}^2\,2 - \mathrm{sh}^2\,2 - 2\,\mathrm{ch}\,2\,\mathrm{sh}\,2 \cdot i}{\mathrm{ch}^2\,2 + \mathrm{sh}^2\,2} =$$
$$= \frac{1}{\mathrm{ch}^2\,2 + \mathrm{sh}^2\,2} - \frac{2\,\mathrm{ch}\,2\,\mathrm{sh}\,2}{\mathrm{ch}^2\,2 + \mathrm{sh}^2\,2}i$$

Задание 6

Условие:

$$w = \ln(1 + \overline{z})$$

Решение:

$$z = x + iy,\ w = u + vi$$
$$u + vi = \ln(1 + x - iy)$$
$$\exp(u + vi) = e^u(\cos v + i\sin v) = 1 + x - iy$$
$$\begin{cases} e^u \cos v = 1 + x \\ e^u \sin v = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} v = -\frac{y}{1+x} \\ e^{2u} = y^2 + (1+x)^2 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\mathrm{Im} z = \operatorname{arctg}\left(-\frac{y}{1+x}\right)$$
$$\mathrm{Re} z = \frac{\ln(y^2 + (1+x)^2)}{2}$$

Из того, что $w = f(z, \overline{z})$, а не $w = f_2(z)$ уже следует неаналитичность, а значит и отсутствие производной, но докажу это через условие Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{1}{y^2 + (1+x)^2} \cdot 2(1+x) = \frac{1+x}{y^2 + (1+x)^2}$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{(1+x)^2}} \cdot -\frac{1}{1+x} = -\frac{1+x}{y^2 + (1+x)^2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$$

Задание 7

Условие:

$$u(x, y) = \sin(y) \cdot \operatorname{ch}(x)$$

Решение:

$$\text{Проверка на гармоничность:}$$
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin y \operatorname{ch} x \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin y \operatorname{ch} x \end{cases} \Rightarrow \text{гармонична} \Rightarrow \exists f : u = \sin y \operatorname{ch} x$$
$$f'_z = u_x + v_x i = u_x - u_y i = \sin(y)\operatorname{sh}(x) - \cos(y)\operatorname{ch}(x) i$$
$$\text{Используя теорему об единственности:}$$
$$f'_z(x, 0) = -\operatorname{ch} x\, i \Rightarrow f'_z(z) = -\operatorname{ch} z \cdot i \Rightarrow f(z) = -i \operatorname{sh} z + C$$
$$C = C_1 + C_2 i$$
$$\mathrm{Re} f(0) = 0 = C_1 \Rightarrow f(z) = -i \operatorname{sh} z + Ci$$
$$\text{Проверка:}$$
$$-i\operatorname{sh}(x + yi) = -i(\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(yi) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(yi)) = -i(\operatorname{sh} x \cos y + \operatorname{ch} x \cdot i \sin y) = \operatorname{ch} x \sin y - \operatorname{sh} x \cos y\, i$$