Учебники:
Тензорное счисление. Ю.И. Димитриенко издание 2001 года, синий учебник

Основы тензорного исчисления

10/02/2025

Тензорная алгебра. Пространство, сопряжённое с линейным пространством.
Правило расстановки индексов.
Объекты могут иметь нижние (ковариантные) индексы, верхние (контрвариантные) и смешанные (например δ^i_k)
Сравнивать, складывать, приравнивать можно только объекты с одинаковыми индексами (должно совпадать их число, обозначение и расположение (вверху/внизу)).

$$(a_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$(b_i) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$
$$a_i + b_i$$

Задание 2. Нахождение компонент матрицы при помощи формулы связи с компонентами других матриц в том же базисе.
В операциях умножения обычного (, скалярного и векторного, тензорного) повтооряющиеся индексы должны располагаться один вверху, один внизу.

$$x^i \epsilon_i = \sum_{i=1}^{3} x^i \epsilon_i = x^1 \epsilon_1 + x^2 \epsilon_2 + x^3 \epsilon_3$$

Пример.
Найти компоненты матрицы C^i, если $C^i = a^{ij} b_j$

$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$(b_j) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$C^i = a^{ij} b_j$$
$$C^1 = a^{11}b_1 + a^{12}b_2 + a^{13}b_3 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 4$$
$$C^2 = a^{21}b_1 + a^{22}b_2 + a^{23}b_3 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 5$$
$$C^3 = a^{31}b_1 + a^{32}b_2 + a^{33}b_3 = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 14$$

$$C^i = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$d^i = ? d^i = a^{ij} \cdot b_{jk} \cdot C^k$$
$$(a^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(b_{jk}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(C^k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned} d^i = a^{ij}(b_{j1}C^1 + b_{j2}C^2 + b_{j3}C^3) = \\ a^{ij}b_{j1}C^1 + a^{ij}b_{j2}C^2 + a^{ij}b_{j3}C^3 = \\ a^{i1}b_{11}C^1 + a^{i2}b_{21}C^1 + a^{i3}b_{31}C^1 + \\ a^{i1}b_{12}C^2 + a^{i2}b_{22}C^2 + a^{i3}b_{32}C^2 + \\ a^{i1}b_{13}C^3 + a^{i2}b_{23}C^3 + a^{i3}b_{33}C^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^i = a^{i1}(b_{11}C^1 + b_{12}C^2 + b_{13}C^3) + \\ a^{i2}(b_{21}C^1 + b_{22}C^2 + b_{23}C^3) + \\ a^{i3}(b_{31}C^1 + b_{32}C^2 + b_{33}C^3) = \\ a^{i1}(1 + 0 + 1 \cdot 7) + a^{i2}(3 + 7) + a^{i3}(1) = \\ 8a^{i1} + 10a^{i2} + a^{i3} \Rightarrow (d^i) = \begin{pmatrix} 9 \\ 26 \\ 39 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Нахождение метрической матрицы некоторого базиса.

Фундаментальная матрица - это матрица, которая ищется следующим образом: $g_{ij} = e_i \cdot e_j$

Базис ортогональный $\Leftrightarrow i \neq j \rightarrow e_i e_j = 0$

Ортонормированный $g_{ij} = \delta_{ij}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Метрическую матрицу можно найти через компоненты $\overline{Q}_i^j$

$e_i = \overline{Q}_i^j \overline{e}_j$

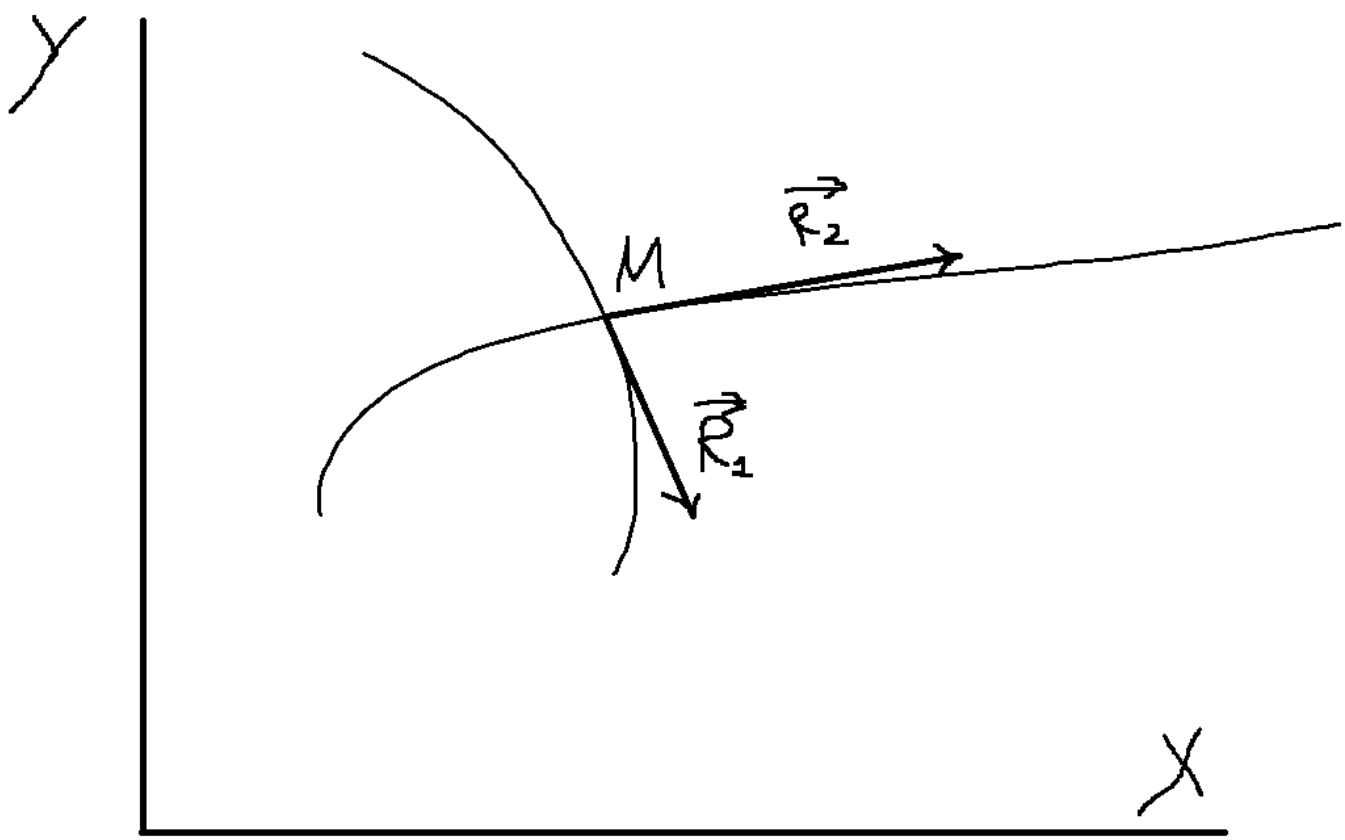
$$g_{ij} = e_i e_j = \overline{Q}_i^k \overline{e}_k \overline{Q}_j^l \overline{e}_l = \overline{Q}_i^k \overline{Q}_j^l \overline{e}_k \overline{e}_l = \overline{Q}_i^k \overline{Q}_j^l \delta_{kl}$$

$$e_i, \overline{Q}_i^j, \overline{e}_i$$
$$e_i = Q_i^j$$
$$Q_i^j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$g_{11} = e_1 e_1 = 2$$
$$g_{12} = e_1 e_2 = 1$$
$$g_{13} = e_1 e_3 = 1$$
$$g_{21} = g_{12} = 1$$
$$g_{22} = e_2 e_2 = 1$$
$$g_{23} = e_2 e_3 = 1$$
$$g_{33} = e_3 e_3 = 2$$
$$\Rightarrow (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g_{ij} = Q_i^k Q_j^l \delta_{kl} g_{11} = Q_1^k Q_1^l \delta_{kl} = Q_1^1 Q_1^1 \delta_{11} + Q_1^1 Q_1^2 \delta_{12} + Q_1^1 Q_1^3 \delta_{13} +$$
$$Q_1^1 Q_1^2 \delta_{21} + Q_1^2 Q_1^2 \delta_{22} + Q_1^2 Q_1^3 \delta_{23} +$$
$$Q_1^1 Q_1^3 \delta_{31} + Q_1^3 Q_1^2 \delta_{32} + Q_1^3 Q_1^3 \delta_{33} =$$
$$Q_1^1 Q_1^1 + + Q_1^2 Q_1^2 + Q_1^3 Q_1^3$$
$$g_{ij} = \sum_{n=1}^{3} Q_i^n Q_j^n$$

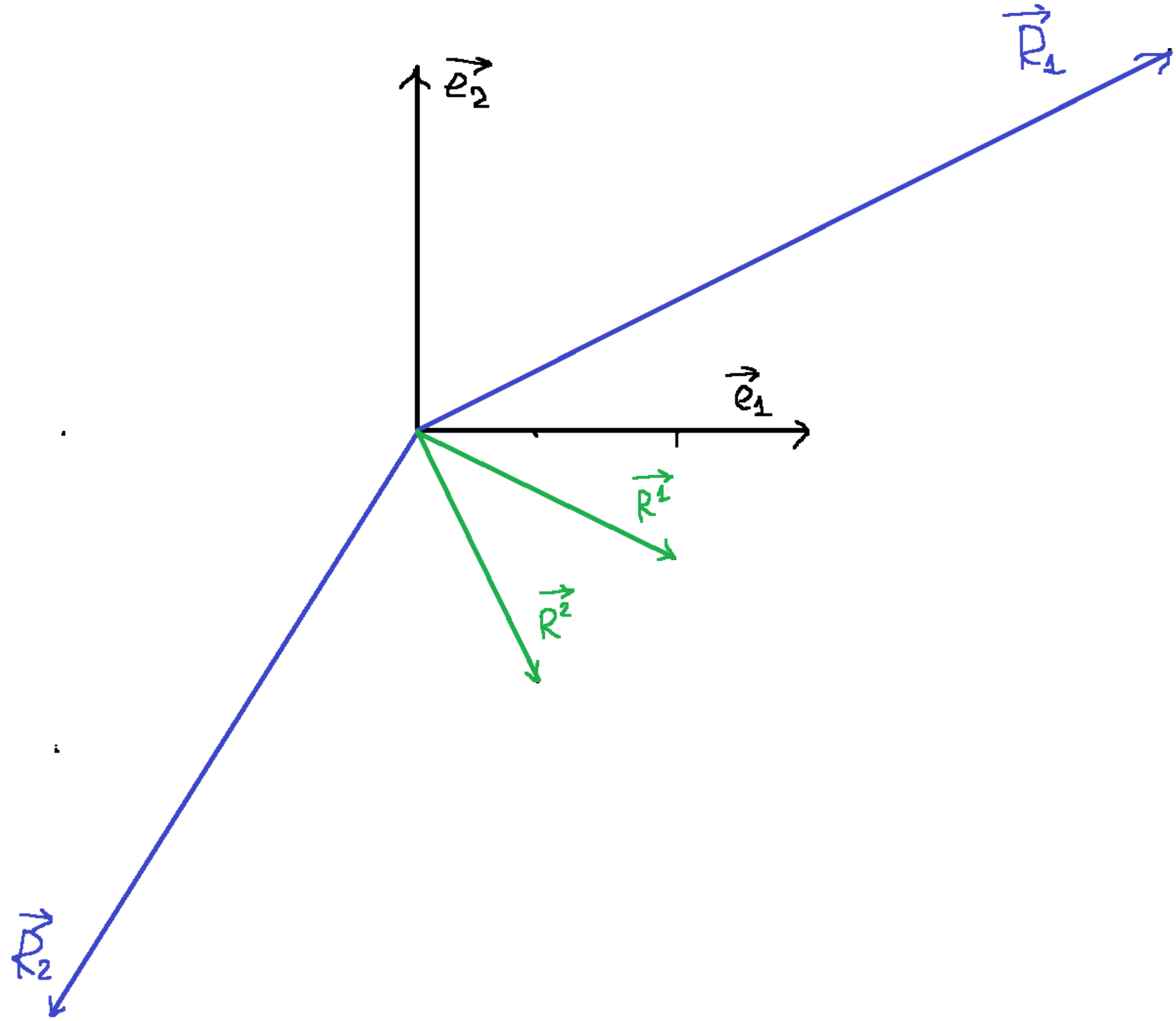
17/02/2025

Криволинейная система координат в точке M.



$$x^1 \equiv x,\ x^2 \equiv y$$
$$X^1 \equiv X,\ X^2 \equiv Y$$
$$\begin{cases} x^1 = x = X^2 + \frac{1}{Y} \\ x^2 = y = X - 2\ln Y \end{cases}$$
$M(X, Y) \to M(1, 1)$ - криволинейные координаты точки
$$\vec{a} = \{1, -1\}$$
$$1) Q^I_J = \frac{\partial x^I}{\partial X^J}$$
$$Q^1_1 = \frac{\partial x}{\partial X} = 2X(M) = 2$$
$$Q^1_2 = \frac{\partial x}{\partial Y} = -\frac{1}{Y^2}(M) = -1$$
$$Q^2_1 = \frac{\partial y}{\partial X} = 1(M) = 1$$
$$Q^2_2 = \frac{\partial y}{\partial Y} = -\frac{2}{Y}(M) = -2 \implies$$
$$Q^I_J = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$
$$Q = \det(Q^I_J) = -3$$
$$P^I_J = \frac{\partial X^I}{\partial x^J},\ P = Q^{-1}$$
$$P^I_J = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$
$$P = -\frac{1}{3}$$
$$PQ = 1$$
$$P^I_J Q^J_K = \delta^I_K$$
$$P^1_J Q^J_1 = P^1_1 Q^1_1 + P^1_2 Q^2_1 = 1$$
$$P^1_J Q^J_2 = P^1_1 Q^1_2 + P^1_2 Q^2_2 = 0$$
$$P^2_J Q^J_1 = P^2_1 Q^1_1 + P^2_2 Q^2_1 = 0$$
$$P^2_J Q^J_2 = P^2_1 Q^1_2 + P^2_2 Q^2_2 = 1$$
Определить базисные орты
$$\vec{R}_J = Q^I_J \vec{e_I}$$
$$\begin{cases} \vec{R}_1 = Q^I_1 \vec{e_I} = Q^1_1 \vec{e_1} + Q^2_1 \vec{e_2} = 2\vec{e_1} + 1\vec{e_2} \\ \vec{R}_2 = Q^I_2 \vec{e_I} = Q^1_2 \vec{e_1} + Q^2_2 \vec{e_2} = -1\vec{e_1} - 2\vec{e_2} \end{cases}$$
Определить компоненты метрической матрицы
$$g_{IJ} = \vec{R}_I \cdot \vec{R}_J$$
$$\begin{cases} g_{11} = \vec{R}_1 \cdot \vec{R}_1 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5 \\ g_{12} = g_{21} = \vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2 = -2 - 2 = -4 \\ g_{22} = \vec{R}_2 \cdot \vec{R}_2 = 5 \end{cases}$$
$$g_{IJ} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$
$$g^{IJ} = (g_{IJ})^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$
$$g^{IJ} g_{JK} = \delta^I_K$$
$$1) \vec{R}^I = g^{IJ} \vec{R}_J$$
$$\vec{R}^1 = g^{1J} \vec{R}_J = g^{11} \vec{R}_1 + g^{12} \vec{R}_2 = \frac{5}{9}\vec{R}_1 + \frac{4}{9}\vec{R}_2 = \frac{5}{9}(2\vec{e_1} + \vec{e_2}) + \frac{4}{9}(-\vec{e_1} - 2\vec{e_2}) = \frac{2}{3}\vec{e_1} - \frac{1}{3}\vec{e_2}$$
Аналогично, $\vec{R}^2 = \frac{1}{3}\vec{e_1} - \frac{2}{3}\vec{e_2}$

Рисунок на миллиметровке!



$$\vec{R}^I \vec{R}_J = \delta^I_J$$

$$\vec{R}^1 \vec{R}_1 = \left(\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2\right)(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

$$\vec{a} = a^I \vec{e}_I,\ a^I = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a = a^I \vec{e}_I = a^I P^J_I \vec{R}_J = a_I Q^I_J \vec{R}^J$$

$$\text{Пусть } a = b^I \vec{R}_J = b_J \vec{R}^J \implies$$

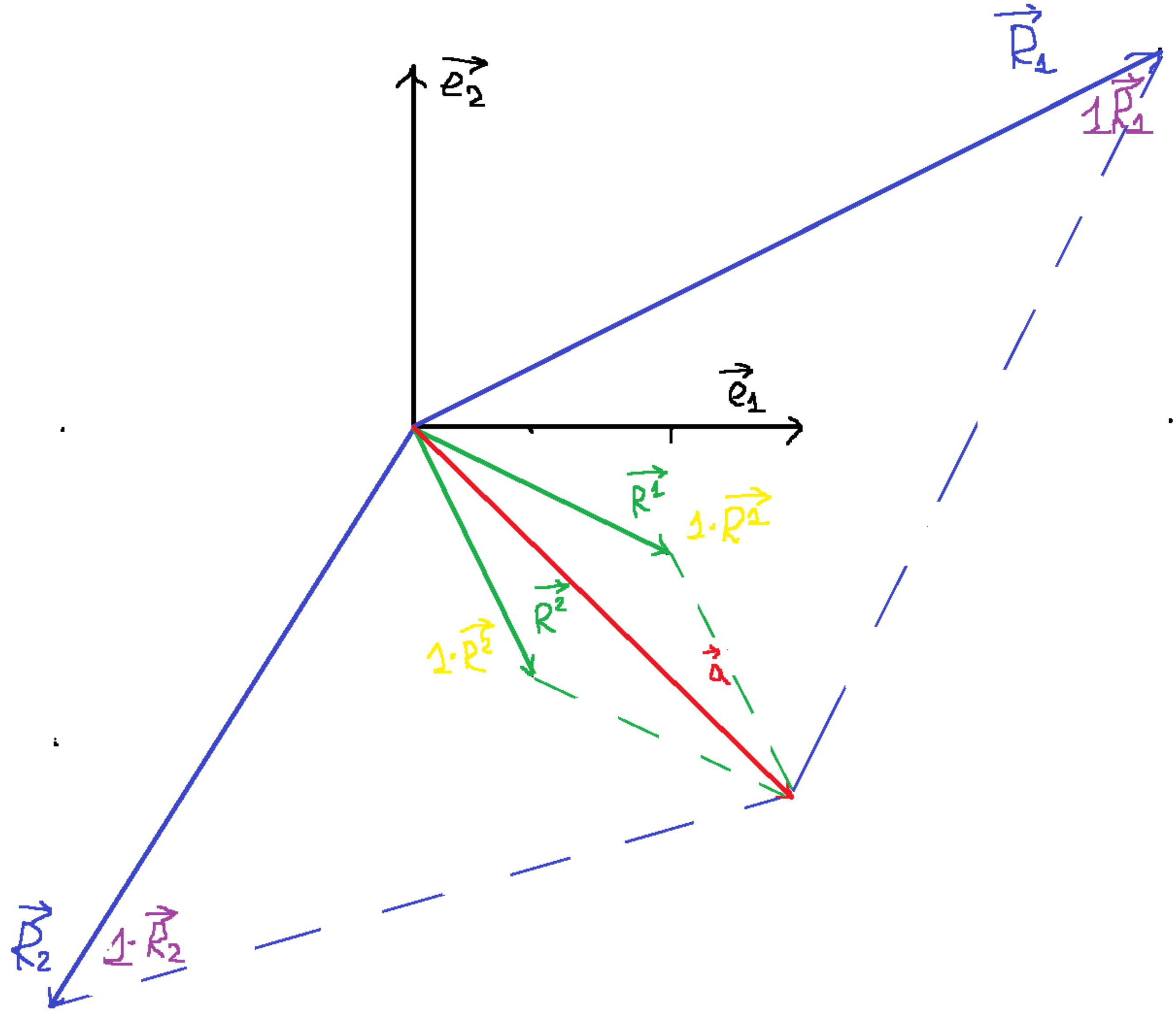
$$b^J = a^I P^J_I, b_J = a_I Q^I_J$$

$$b^I = P^I_J a^J$$

$$\begin{cases} b^1 = P^1_J a^J = P^1_1 a^1 + P^1_2 a^2 = \frac{2}{3} \cdot 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)(-1) = 1 \\ b^2 = P^2_J a^J = P^2_1 a^1 + P^2_2 a^2 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)(-1) = 1 \\ b_1 = Q^I_1 a_I = Q^1_1 a_1 + Q^2_1 a_2 = 2 \cdot 1 + 1(-1) = 1 \\ b_2 = Q^I_2 a_I = Q^1_2 a_1 + Q^2_2 a_2 = (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 1 \end{cases}$$

$$\vec{a} = \vec{R}^1 + \vec{R}^2$$

$$\vec{a} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2$$



$$g_{IJ} = Q^K_I Q^L_J \delta_{KL},\ g^{IJ} = P^I_K P^J_L \delta^{KL}$$

24/02/2025

2 раздел. 1 Пункт.

\begin{gather} \vec{R^I}\vec{R_{J}}=\delta^I_{J}\\ \vec{R^1}\vec{R_{1}}=\left(\frac{2}{3}\vec{e_{1}}-\frac{1}{3}\vec

$$\begin{gathered} g_{ij} = \vec{R}_i \cdot \vec{R}_j, g^{ij} = \vec{R}^i \cdot \vec{R}^j \\ \vec{R}^i \cdot \vec{R}^j = (g^{ik}\vec{R}_k) \cdot (g^{jl}\vec{R}_l) = g^{ik}g^{jl}(\vec{R}_k \cdot \vec{R}_l) = \\ = g^{ik}(g^{jl}g_{kl}) = g^{ik}\delta^j_k = g^{ij} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \vec{R}_i = g_{ij}\vec{R}^i \\ \vec{R}_i = \delta^k_i \vec{R}_k = g_{ij}g^{ik}\vec{R}_k = g_{ij}\vec{R}^j \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} a^i = \vec{a} \cdot \vec{R}^i \\ \vec{a} \cdot \vec{R}^i = a_j \vec{R}_j \cdot \vec{R}_i = a_j \delta^j_i = a_i \end{gathered}$$

$$\vec{R}^i \cdot \vec{R}_j = \delta^i_j$$
$$\vec{R}^i \cdot \vec{R}_j = (\vec{R}_k g^{ik}) \cdot \vec{R}_j = g^{ik} \vec{R}_k \cdot \vec{R}_j = g^{ik} g_{jk} = \delta^i_j$$
$$\vec{R}^i \cdot \vec{R}_j = \vec{R}^i \cdot (g_{jk} \vec{R}^k) = g_{jk} \vec{R}^i \cdot \vec{R}^k = g_{jk} g^{ik} = \delta^i_j$$

Переход от декартового базиса к криволинейному Vs от криволинейного к декартовому

$$\vec{R}_i = Q^j_i \vec{e}_j \Leftrightarrow \vec{e}_j = P^i_j \vec{R}_i$$
$$\vec{R}^i = P^i_j \vec{e}^j \Leftrightarrow \vec{e}^j = Q^j_i \vec{R}^i$$

03/03/2025

Векторное произведение.

Векторное произведение $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Исправить дома

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sqrt{g} \varepsilon_{ijk} a^i b^j \vec{R}^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \varepsilon^{lmn} a_l b_m \vec{R}_n$$
$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, \text{есть совпадающие индексы} \\ 1, \text{чётная перестановка} \\ -1, \text{нечётная перестановка} \end{cases}$$
$$[\vec{e}_k, \vec{e}_l] = \varepsilon_{klm} \vec{e}_m$$
$$[\vec{e}_3, \vec{e}_2] = \varepsilon_{321} \vec{e}_1 = -\vec{e}_1$$
$$[\vec{e}_k, \vec{e}_l] \cdot \vec{e}_n = \varepsilon_{klm} (\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n) \text{ - смешанное произведение}$$
$$\varepsilon_{klm} (\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n) = \sum \varepsilon_{klm} \delta_{mn} = ?$$
$$\varepsilon_{ijk} = \left([\vec{e}_i, \vec{e}_j], \vec{e}_k \right)$$
$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$$
$$\underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{B} \cdot \underbrace{\varepsilon^{lmn}}_{C} = \begin{vmatrix} \delta^l_i & \delta^m_i & \delta^n_i \\ \delta^l_j & \delta^m_j & \delta^n_j \\ \delta^l_k & \delta^m_k & \delta^n_k \end{vmatrix}$$
$$\det A = \det B \cdot \det C$$
$$\det(B \cdot C) = \det B \cdot \det C$$
$$\det(A^T) = \det A \implies$$
$$B \cdot C^T = \begin{pmatrix} \delta^1_i & \delta^2_i & \delta^3_i \\ \delta^1_j & \delta^2_j & \delta^3_j \\ \delta^1_k & \delta^2_k & \delta^3_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta^1_l & \delta^1_m & \delta^1_n \\ \delta^2_l & \delta^2_m & \delta^2_n \\ \delta^3_l & \delta^3_m & \delta^3_n \end{pmatrix}$$
$$(B \cdot C^T)^1_1 = \delta^1_i \delta^1_l + \delta^2_i \delta_{l2} + \delta_{i3} \delta_{l3} = \sum \delta_{ip} \delta_{lp} = \delta_{il}$$

Одинарная свёртка

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ilm} = \delta^l_j\delta^m_k - \delta^l_k\delta^m_j$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ilm} = \begin{vmatrix} \delta^i_i & \delta^l_i & \delta^m_i \\ \delta^i_j & \delta^l_j & \delta^m_j \\ \delta^i_k & \delta^l_k & \delta^m_k \end{vmatrix} = \delta^i_i\delta^l_j\delta^m_k + \delta^l_i\delta^m_j\delta^i_k + \delta^m_i\delta^i_j\delta^l_k - (\delta^m_i\delta^l_j\delta^i_k + \delta^i_i\delta^m_j\delta^l_k + \delta^l_i\delta^i_j\delta^m_k) =$$

$$= \cancelto{\cancelto{1}{3}}{\delta^i_i}\,\delta^l_j\delta^m_k + \cancel{\delta^l_k\delta^m_j} + \cancel{\delta^m_j\delta^l_k} - \cancel{\delta^m_k\delta^l_j} - \cancel{\delta^l_j\delta^m_k} - \cancelto{\cancelto{1}{3}}{\delta^i_i}\,\delta^m_j\delta^l_k =$$

$$= \delta^l_j\delta^m_k - \delta^m_j\delta^l_k$$

Двойная свёртка

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijl} = 2\delta^l_k$$

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijl} = \delta^j_j\delta^l_k - \delta^j_k\delta^l_k = 3\delta^l_k - \delta^l_k = 2\delta^l_k$$

Тройная свёртка

\begin{gather} \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk}=6\\ \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{ijk}=2\delta^k_{k}=2\cdot 3=6 \end{gat

4.

$$\vec a \times \vec b = -\vec b \times \vec a$$

$$\vec a \times \vec b = \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}a_ib_j\vec R_k = -\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{jik}b_ja_i\vec R_k = -\vec b \times \vec a$$

5.

$$\vec R^k = \frac{1}{2\sqrt{g}}\varepsilon^{nmk}\vec R_n \times \vec R_m$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g}}\varepsilon^{nmk}\vec R_n \times \vec R_m =$$

$$\vec R_n = \delta^j_n\vec R_j$$

$$\vec R_m = \delta^i_m\vec R_i$$

$$= \frac{1}{2\cancel{\sqrt{g}}}\varepsilon^{nmk}\left(\cancel{\sqrt{g}}\,\underbrace{\varepsilon_{jil}\delta^j_n\delta^i_m}_{\varepsilon_{nml}}\vec R^l\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon^{nmk}\cdot\varepsilon_{nml}\vec R^l = \frac{1}{2}\cdot 2\delta^k_l\vec R^l = \vec R^k$$

$$\vec R_k = \sqrt{g}_2\varepsilon_{nmk}\vec R^n \times \vec R^m$$

$$\frac{\sqrt{g}}{2}\varepsilon_{nmk}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\underbrace{\varepsilon^{jil}\delta^n_j\delta^m_i}_{\varepsilon^{nml}}\vec R_l\right) =$$

$$\vec R^n = \delta^n_j\vec R^j$$

$$\vec R^m = \delta^m_i\vec R^i$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_{nmk}\varepsilon^{nml}\vec R_l = \frac{1}{2}\cdot 2\delta^l_k\vec R_l = \vec R_k$$

6.

$$\vec R^i \times \vec R^j = \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}\vec R_k$$

$$\vec R^i = \delta^i_l\vec R^l$$

$$\vec R^j = \delta^j_m\vec R^m$$

$$\vec R^i \times \vec R^j = \frac{1}{\sqrt{g}}\underbrace{\varepsilon^{lmk}\delta^i_l\delta^j_m}_{\varepsilon^{ijk}}\vec R_k = \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}\vec R_k$$

7.

$$
\begin{gathered}
\vec{R}_i \times \vec{R}^i = \vec{0} \\
\vec{R}_i \times g^{ij}\vec{R}_j = g^{ij}\vec{R}_i \times \vec{R}_j = \\
\vec{R}_i = \delta_i^k \vec{R}_k \\
\vec{R}_j = \delta_j^l \vec{R}_l \\
= g^{ij}(\sqrt{g}\varepsilon_{klm}\delta_i^k\delta_j^l\vec{R}^n) = \\
= \sqrt{g}(\underbrace{g^{ig}\delta_i^k\delta_j^l}_{g^{kl}}) \cdot \varepsilon_{klm}\vec{R}^m = \\
= \sqrt{g}\ \cancelto{0}{g^{kl}\varepsilon_{klm}}\ \vec{R}^m = \vec{0}
\end{gathered}
$$

8.

$$
\begin{gathered}
\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \\
(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}a_i b_j\right)c_k = \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}a_i b_j c_k \\
(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{ijk}c_i a_j\right)b_k = \frac{1}{\sqrt{g}}a_j b_k c_i = \\
\dots \\
= \frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{kij}a_i b_j c_k
\end{gathered}
$$

10/03/2025

$$
\begin{gathered}
\vec{a} \cdot \overleftrightarrow{T} = a^k\vec{R}_k \cdot (T^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j) = \\
\vec{a} = a^k\vec{R}_k \\
\overleftrightarrow{T} = T^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j \\
= a^k T^{ij}(\vec{R}_k \cdot \vec{R}_i) \otimes \vec{R}_j = a^k T^{ij} g_{ki}\vec{R}_j = \\
= \underbrace{a^k T_k{}^i}_{c^j}\vec{R}_j
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\vec{b} = \overleftrightarrow{T} \cdot \vec{a} = (T^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j)(a^k\vec{R}_k) = \\
= T^{ij}a^k\vec{R}_i \otimes (\vec{R}_j \cdot \vec{R}_k) = T^{ij}a^k g_{jk}\vec{R}_i = \\
= \underbrace{T^{ij}a_j}_{b^i}\vec{R}_i
\end{gathered}
$$

$$
\overleftrightarrow{C} = \overleftrightarrow{A} \cdot \overleftrightarrow{B} = (A^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j)(B^{kl}\vec{R}_k \otimes \vec{R}_l) = A^{ij}B^{kl}g_{jk}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_l
$$

1. Показать, что $\vec{a} \cdot \overleftrightarrow{A} = \overleftrightarrow{A}^T \cdot \vec{a}$

   `\begin{gather} \vec{a}=a^k\vec{R}_{k};\ \overleftrightarrow{A}=A^{ij}\vec{R}_{i}\otimes \vec{R}_{j}; \ \overleftrigh`

`\end{gather}$$`

Почему...

$$\left(\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{B}\right)^T = \overleftrightarrow{B}^T\,\overleftrightarrow{A}^T$$

$$\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{B} = \left(A^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j\right)\left(B^{kl}\vec{R}_k \otimes \vec{R}_l\right) = A^{ij}B^{kl}g_{jk}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_l = A^{ij}B_j{}^l\vec{R}_i \otimes \vec{R}_l =$$

$$= C^{il}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_l$$

$$\left(\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{B}\right)^T = C^{li}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_l$$

$$\overleftrightarrow{B}^T\,\overleftrightarrow{A}^T = \left(B^{lk}\vec{R}_k \otimes \vec{R}_l\right)\left(A^{ji}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j\right) =$$

$$= B^{lk}A^{ji}g_{li}\vec{R}_k \otimes \vec{R}_j = A^{ji}B_i{}^k\vec{R}_k \otimes \vec{R}_j$$

Почему...

$$\overleftrightarrow{A}\left(\overleftrightarrow{B}\,\overleftrightarrow{C}\right) = \left(\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{B}\right)\overleftrightarrow{C}$$

$$\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{B} = (A^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j)(B^{kl}\vec{R}_k \otimes \vec{R}_l) = A^{ij}B^{kl}g_{jk}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_l =$$

$$= A^{ij}B_j{}^l\vec{R}_i \otimes \vec{R}_l$$

$$(\overleftrightarrow{A}\,\overleftrightarrow{B})\overleftrightarrow{C} = (A^{ij}B_j{}^l\vec{R}_i \otimes \vec{R}_l)(C^{mn}\vec{R}_m \otimes \vec{R}_n) =$$

$$= A^{ij}B_j{}^lC^{mn}g_{jm}\vec{R}_i \otimes R_n = B^{kl}C_l{}^n\vec{R}_k \otimes \vec{R}_n$$

$$\overleftrightarrow{A}\,(\overleftrightarrow{B}\,\overleftrightarrow{C}) = (A^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j)B^{kl}$$

24/03/2025

Подготовка к рк:

11

12

13

17

23

Тензорное исчисление

Задание 20

Любой тензор можно представить в виде суммы симметричного и кососимметричного тензора

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}; \overline{T} = T^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, \vec{e}_i - \text{ортонормированный базис}$$

$$T_S^{ij}, T_a^{ij} = ?$$

$$T_s^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} + T^{ji}); T_A^{ij} = \frac{1}{2}(T^{ij} - T^{ji})$$

$$T_S^{11} = \frac{1}{2}(T^{11} + T^{11}) = 1$$

$$T_S^{12} = \frac{1}{2}(T^{12} + T^{21}) = -1$$

$$T_S^{21} = \frac{1}{2}(T^{21} + T^{12}) = -1$$

$$T_S^{22} = 2$$

$$T_A^{11} = \frac{1}{2}(T^{11} - T^{11}) = 0$$

$$T_A^{12} = \frac{1}{2}(T^{12} - T^{21}) = 4$$

$$T_A^{21} = \frac{1}{2}(T^{21} - T^{12}) = -4$$

$$T_A^{22} = 0$$

$$T_S^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T^{ij_A} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Векторное произведение

$$\overline{T} \times \vec{a}; \vec{a} \times \overline{T}$$

$$\overline{T} \times \vec{a} = (T^{ij}\vec{R}_i \otimes \vec{R}_j) \times (a^k \vec{R}_k) =$$

$$\sqrt{g}\varepsilon_{lmn}\delta_j^l\delta_k^m\vec{R}^n = \sqrt{g}\varepsilon_{jkn}\vec{R}^n$$

$$= \sqrt{g}\varepsilon_{jkn}T^{ij}a^k\vec{R}_i \otimes \vec{R}^n$$

$$\vec{a} \times \overline{T} = \sqrt{g}\varepsilon_{rin}T^{ij}a^k\vec{R}^n \otimes \vec{R}_j$$

Пусть заданы $\vec{a} = a^i\vec{e}_i; \overline{T} = T^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$

Найти: $\vec{a} \times \overline{T}$

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; a^i = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_{ij} = \delta_{ij}$$

$$\vec{a} \times \overline{T} = (a^i\vec{e}_i) \times (T^{jk}\vec{e}_j \otimes \vec{e}_k) =$$

$$= a^iT^{jk}\vec{e}_i \times \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k = a^iT^{jk}\cancel{\sqrt{g}}^1\varepsilon_{ijl}\vec{e}^l \otimes \vec{e}_k = \overline{A}$$

$$\overline{A} = A_l^k\vec{e}^l \otimes \vec{e}_k$$

$$A_l^k = a^iT^{jk}\varepsilon_{ijl}$$

$$A_1^1 = \varepsilon_{ij1}a^iT^{j1} = \varepsilon_{231}a^2T^{31} + a_{321}a^3T^{21} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 0$$

$$A_1^2 = \varepsilon_{ij1}a^iT^{j2} = \varepsilon_{231}a^2T^{32} + \varepsilon_{321}a^3T^{22} = \quad 2 \cdot 0 - 1 \cdot -4 = 4$$

$$A_1^3 = \varepsilon_{ij1}a^iT^{j3} = \varepsilon_{231}a^2T^{33} + \varepsilon_{321}a^3T^{23} = \qquad 2 \cdot -1 - 1 \cdot -2 = 0$$

$$A_2^1 = \varepsilon_{ij2}a^iT^{j1} = \varepsilon_{312}a^3T^{11} + \varepsilon_{132}a^1T^{31} = -3$$

$$\ldots$$

$$A_3^3 = -4 - 2 = -6$$

Задание 23

Дифференциальные характеристики цилиндрических координат

1. Задано линейное преобразование декартовых координат

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
$$T = T^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$$
$$T^{ji} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$
$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, T^{ji} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \end{pmatrix}, T^i_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, T^j_i = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$
$$T_{ij} = (\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \end{pmatrix})$$
$$T_{ji} = (\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \end{pmatrix})$$

21/04/2025

Вторник 925 15:55

~~Написать программу, которая сворачивает тензор?~~

Задание 29

Найдём ковариантные, контрвариантные, смешанные компоненты этого поля в базисах r_i, r^i:

$$T = T^{ij} r_i \otimes r_j = T_{ij} r^i \otimes r^j = T_i{}^j r^i \otimes r_j$$
$$T_{ij} = T^{kl} g_{ik} g_{jl}$$
$$\frac{\partial T}{\partial X^k} = \frac{\partial}{\partial X^k}(T^{ij} r_i \otimes r_j) = \frac{\partial T^{ij}}{\partial X^k} r_i \otimes r_j + T^{ij} \frac{\partial r_i}{\partial X^k} \otimes r_j + T^{ij} r_i \otimes \frac{\partial r_j}{\partial X^k}$$
$$\frac{\partial r_i}{\partial X^k} = \Gamma^j_{ik} r_j$$
$$\frac{\partial r^i}{\partial X^k} = -\Gamma^i_{jk} r^j$$

Задание 33

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{a}) = \vec{\nabla} \varphi \otimes \vec{a} + \varphi \vec{\nabla} \otimes \vec{a}$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \operatorname{div} \vec{a}$$
$$\text{Докажем, что } \vec{\nabla}_k (\varphi \vec{a}^j) = \left(\vec{\nabla}_k \varphi \right) \cdot \vec{a}^j + \varphi \cdot (\vec{\nabla}_k \vec{a}^j)$$
$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial X^k} = \frac{\partial \vec{a}^i \vec{R}_i}{\partial X^k} = \frac{\partial \vec{a}^i}{\partial X^k} \vec{R}_i + \vec{a}^i \frac{\partial \vec{R}_i}{\partial X^k}$$

$$\nabla_k a^j = \frac{\partial a^j}{\partial X^k} + a^i \Gamma^j_{ik}$$
$$\nabla_k (\varphi a^j) = \frac{\partial (\varphi a^j)}{\partial X^k} + \varphi a^i \Gamma^j_{ik} = \frac{\partial \varphi}{\partial X^k} a^j + \varphi \left[\frac{\partial a^i}{\partial X^k} + a^i \Gamma^j_{ik} \right] = (\nabla_k \varphi) a^j + \varphi (\nabla_k a^j)$$

$$\nabla \otimes (\varphi T) = \nabla\varphi \otimes T + \varphi\nabla \otimes T$$
$$\nabla\otimes = R^k \otimes \frac{\partial}{\partial X^k}$$
$$\nabla \otimes (\varphi T) = R^k \otimes \frac{\partial}{\partial X^k}(\varphi T) = R^k \otimes \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X^k}T + \varphi\frac{\partial T}{\partial X^k}\right) = R^k \otimes \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X^k}T\right) + R^k \otimes \left(\varphi\frac{\partial T}{\partial X^k}\right) =$$
$$= \left(R^k\frac{\partial\varphi}{\partial X^k}\right) \otimes T + \varphi\left(R^k \otimes \frac{\partial T}{\partial X^k}\right) = \nabla\varphi \otimes T + \varphi\nabla \otimes T$$

Символы Кристофеля:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial X^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial X^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^l}\right)$$

$$\frac{\partial\vec{R}_i}{\partial X^j} = \Gamma^k_{ij}\vec{R}_k$$

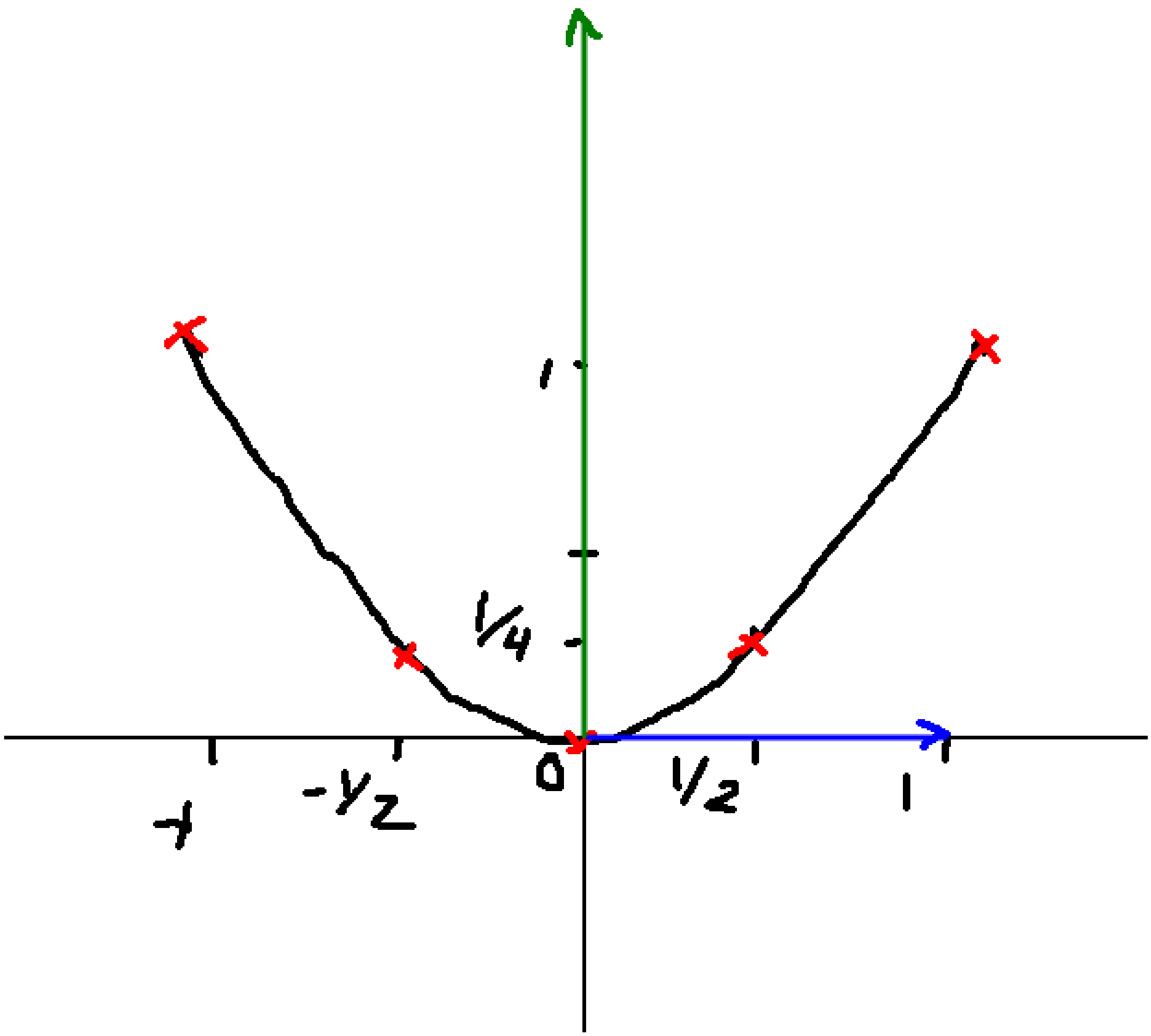
$$\frac{\partial\vec{R}^k}{\partial X^j} = -\Gamma^k_{ij}\vec{R}^i$$

$$\Gamma_{ijk} = g_{kl}\Gamma^l_{ij}$$

$$\nabla_k a^j = \frac{\partial a^j}{\partial x^k} + a^i\Gamma^j_{ik}$$
$$\nabla_k a_j = \frac{\partial a_j}{\partial x^k} - a_i\Gamma^i_{jk}$$

28/04/2025

Дифференциальная геометрия плоской кривой



$$y = x^2$$
$$\begin{cases} x = \xi \\ y = \xi^2 \end{cases}$$
$$\xi \in [\xi_{\min} = -1, \xi_{\max} = 1]$$
$$M \text{ при } \xi = \frac{\xi_{\min} + \xi_{\max}}{2} = 0 \Rightarrow M(0,0)$$
$$\begin{array}{ccc} \xi & x & y \\ \xi_1 = -1 & -1 & 1 \\ \xi_2 = -0.5 & -0.5 & 0.25 \\ \xi_3 = 0.5 & -0.5 & 0.25 \\ \xi_4 = 1 & 1 & 0.25 \end{array}$$
$$s'_\xi = \sqrt{{x'_\xi}^2 + {y'_\xi}^2} = \sqrt{1 + 4\xi^2}$$
$$\tfrac{dx}{d\xi} = 1 \quad \tfrac{dy}{d\xi} = 2\xi$$
$$s = \int_{\xi_{\min}}^{\xi} \frac{ds}{d\xi} d\xi = \int_{\xi_{\min}}^{\xi} \sqrt{1 + 4\xi^2} d\xi$$
$$\frac{dx^i}{ds}:$$
$$\tfrac{dx}{ds} = \tfrac{x'_\xi}{s'_\xi} = \tfrac{1}{\sqrt{1+4\xi^2}}$$
$$\tfrac{dy}{ds} = \tfrac{y'_\xi}{s'_\xi} = \tfrac{2\xi}{\sqrt{1+4\xi^2}}$$
$$\xi = 0 \Rightarrow M' = (1,0)$$

Проверка:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix}$$
$$|\vec{t}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}^2\right) + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{1+4\xi^2} + \frac{4\xi^2}{1+4\xi^2}} = 1$$
$$\vec{t}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\left(\frac{dx}{ds}\right)'_\xi}{s'_\xi} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(1+4\xi^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 8\xi \cdot \frac{1}{\sqrt{1+4\xi^2}} = -\frac{4\xi}{(1+4\xi^2)^2}$$
$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{2\sqrt{1+4\xi^2} - \frac{2\xi}{2\sqrt{1+4\xi^2}} \cdot 8\xi}{(1+4\xi^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2 + 8\xi^2 - 8\xi^2}{(1+4\xi^2)^2} = \frac{2}{(1+4\xi^2)^2}$$
$$M'' = (0,2)$$

Вектор кривизны:

$$\vec{k} = \frac{d^2\vec{x}}{ds^2}$$
$$|\vec{k}| = \frac{2}{(1+4\xi^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$R = \frac{1}{k} = \frac{(1+4\xi^2)^{\frac{3}{2}}}{2}$$
$$\vec{\nu} = R \cdot \vec{k}$$

$$s_\xi = \sqrt{1+4\xi^2} \Rightarrow s_{\xi\xi} = \frac{1}{2\sqrt{1+4\xi^2}} \cdot 8\xi = \frac{4\xi}{\sqrt{1+4\xi^2}}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\xi \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_s = \frac{1}{\sqrt{1+4\xi^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2\xi \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{\xi\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{x}_{ss} = \frac{1}{(1+4\xi^2)^2} \begin{pmatrix} -4\xi \\ 2 \end{pmatrix}$$

Построить графики $s(\xi)$, $k(\xi)$ при $\xi \in [\xi_{\min}, \xi_{\max}]$

Часть 2. Геометрия пространственных кривых

$$\begin{cases} x = a\cos\xi \\ y = a\sin\xi \\ z = b\xi \end{cases}$$

$a > 0, b > 0$ $s(\xi) = ?, k = ?, \tau = ?$

$$s'_\xi = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \left(\frac{d}{d\xi} x^i \right)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$s = \int_0^\xi s'_\xi d\xi = \sqrt{a^2+b^2}\xi$$

$$\vec{x}_\xi = \begin{pmatrix} -a\sin\xi \\ a\cos\xi \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_s = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{pmatrix} -a\sin\xi \\ a\cos\xi \\ b \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_{\xi\xi} = \begin{pmatrix} -a\cos\xi \\ -a\sin\xi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_{ss} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} -a\cos\xi \\ -a\sin\xi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{x}_s| = 1$$

$$|\vec{k}| = \frac{a}{a^2+b^2} \Rightarrow R = \frac{a^2+b^2}{a}$$

$$\vec{x}_{\xi\xi\xi} = \begin{pmatrix} a\sin\xi \\ -a\cos\xi \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}_{sss} = \frac{1}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} a\sin\xi \\ -a\cos\xi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau = R^2 \det\left(\frac{d^\alpha \vec{x}}{ds^\alpha} \right) = R^2 \left| \ldots \right|$$