13/02/2025

Уравнение второго порядка от 2 переменных

Уравнение, линейное относительно старих производных:

Линейное уравнение второго порядка:

b_1	u_x
b_2	u_y
a_{11}	u_{xx}
$2a_{12}$	u_{xy}
a_{22}	u_{yy}

Убедиться, что результат будет линейным

$$A_{11}u_{\xi\xi} + 2A_{12}u_{\xi\eta} + A_{22}u_{\eta\eta} + B_1u_\xi + B_2u_\eta = F$$

$$A_{11} = 0 \Leftrightarrow a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 = 0$$
$$\xi(x,y) \ - \ \text{частное решение} \implies \dots$$

Утверждение 1

$$\xi(x,y) \ - \ \text{частное решение} \Leftrightarrow \xi(x,y) = C \ - \ \text{Общий интеграл следующего ОДУ:}$$
$$\text{ОДУ: } a_{11}dy^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}dx^2 = 0$$

Доказательство:

$$\Rightarrow)\ a_{11}\left(-\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\xi_x}{\xi_y}\right) + a_{22} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\xi_x}{\xi_y}|_{y=y(x,C)} \ - \ \text{Производная неявной функции}$$
$$\Leftarrow)\ \xi(x,y) = C \ - \ \text{Общий интеграл}$$
$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} =$$
$$= a_{11}\left(-\frac{\xi_x}{\xi_y}\right)^2 - 2a_{12} \cdot -\frac{\xi_x}{\xi_y} + a_{22} = 0$$

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0 \ - \ \text{Характеристическое уравнение}$$
$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$
$$\text{Решение интегральных уравнений будем называть характеристиками}$$
$$\xi(x,y) = C \text{ и } \eta(x,y) = C \ - \ \text{независимые} \implies$$
$$\Delta > 0 \ - \ \text{гиперболическое}$$
$$\Delta = 0 \ - \ \text{параболическое}$$
$$\Delta < 0 \ - \ \text{эллиптическое}$$

Задача: Доказать, что

$$A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})$$
$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

1. Гиперболические уравнения

$$a_{11}u_{xx} + F(x,u,\ldots) = 0$$
$$a) u_{\xi\xi} + \tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0, \tilde{F} = -\frac{F}{2A_{12}}$$
$$б) \begin{cases} \xi = \alpha + \beta \\ \eta = \alpha - \beta \end{cases}, \begin{cases} \alpha = \frac{\xi+\eta}{2} \\ \beta = \frac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$$
$$u_\xi = u_\alpha \alpha_\xi + u_\beta \beta_\xi = \frac{1}{2}(u_\alpha + u_\beta)$$
$$u_\eta = \cdots = \frac{1}{2}(u_\alpha - u_\beta)$$
$$u_{\xi\eta} = \cdots = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$$
$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} + G(\alpha, \boldsymbol{\beta}, \ldots) = 0$$

Доказать, что $A_{22} = 0$

2. Параболические уравнения

$$\begin{cases} \xi(x,y) = C \\ \eta(x,y) = C \ - \ \text{независима от } \xi \end{cases}$$
$$\text{Доказать: } A_{11} = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)^2 = 0$$
$$A_{12} = (\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y)(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y) = 0$$
$$A_{22} = \ldots$$
$$u_{\eta\eta} + \tilde{F}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0, \tilde{F} = -\frac{F}{A_{22}}$$

3. Эллиптические уравнения

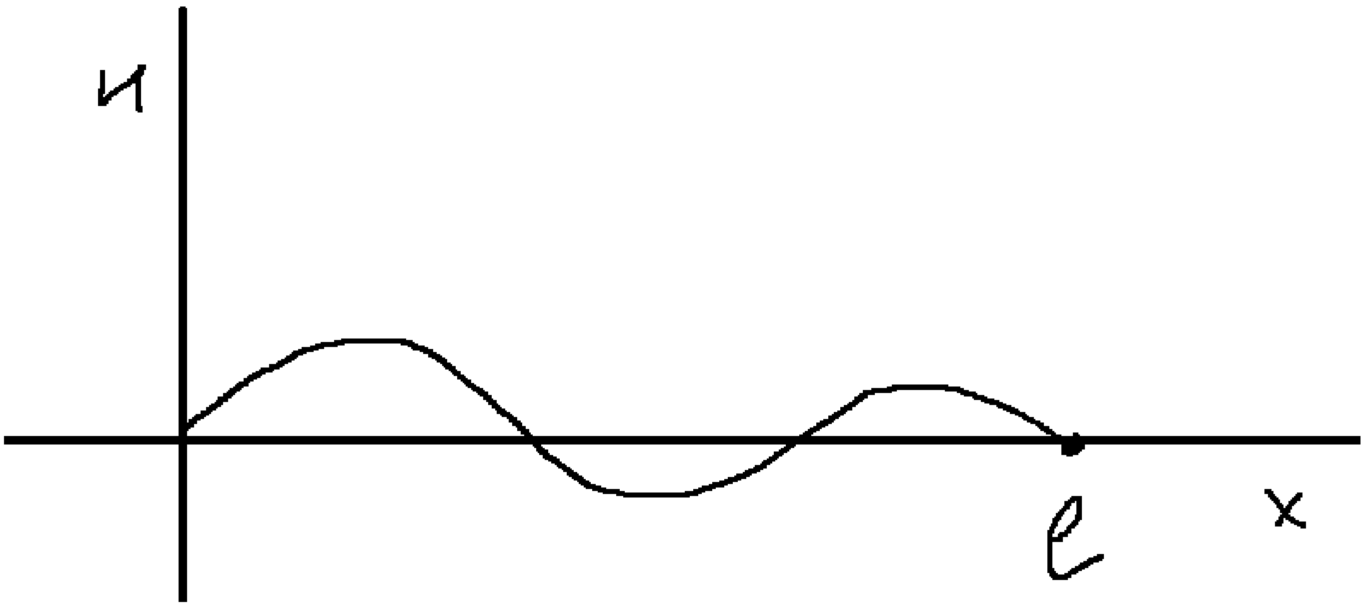
$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + F(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0$$

20/02/2025

Уравнение колебаний на отрезке. Метод разделения переменных

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ 0 < x < l, t > 0, \\ \text{Граничные условия} \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

$f(x,t)$ - плотность мощности воздействия на струну



Перейдём к вспомогательной задаче. Будет искать её решение в виде $z(x,t) = T(t)X(x)$

$$\begin{cases} z_{tt} = a^2 z_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\ z\big|_{x=0} = z\big|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$T''X = a^2 TX''$$

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \quad T(t)X(0) = T(t)X(l) = 0$$

$$\begin{cases} -X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

X - нетривиальное решение

$$-\frac{d^2}{dt^2} : X \to -X''$$

1) Априорная оценка знака λ

$$\mathcal{A} : L \to L$$

$$\mathcal{A} \subseteq L$$

$-\dfrac{d^2}{dx^2}$ - дважды непрерывно дифференцируемый оператор

$$-X'' - \lambda X = 0$$

$$\int_0^l (-X''X - \lambda X^2)dx = 0$$

$$\cancelto{0}{-X'X\big|_0^l} + \int_0^l (X')^2 dx - \lambda \int_0^l X^2 dx = 0$$

$$\int_0^l (X')^2 dx - \lambda \int_0^l X^2 dx = 0,$$

Теорема о сохранении знака непрерывной функции:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : 0 < |x - x_0)| < \delta \Rightarrow |x^2(r) - x_0^2| < \varepsilon$$

$$\implies \int_0^l X^2 dx > 0 \implies \lambda \geq 0$$

Пусть $\lambda = 0 \implies$

$\displaystyle\int_0^l (x')^2 dx = 0 \implies X'(x) = 0 \Rightarrow X = C \Rightarrow X = 0$ - тривиальное решение

Где-то в решении использовалась теорема Гильберта-Шмидта

$$\lambda > 0 :$$

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x, \ A^2 + B^2 \neq 0$$

$$X(0) = A = 0 \Rightarrow B \neq 0$$

$$X(l) = B\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda}l = 0 \implies$$

$$\lambda = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$X(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \ n \in \mathbb{Z}_{>0}$$

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x),$$

Проверить систему на ортогональность:

$$\int_0^l \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) = C \cdot \delta_m^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'' X_n = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n X_n'' + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$$

$$n=1 \qquad n=1 \qquad n=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) \sim \varphi(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x) \sim \psi(x)$$

$$\begin{cases} T_n'' + a^2\lambda_n T_n = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n \\ T_n'(0) = \psi_n \end{cases}$$

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx$$

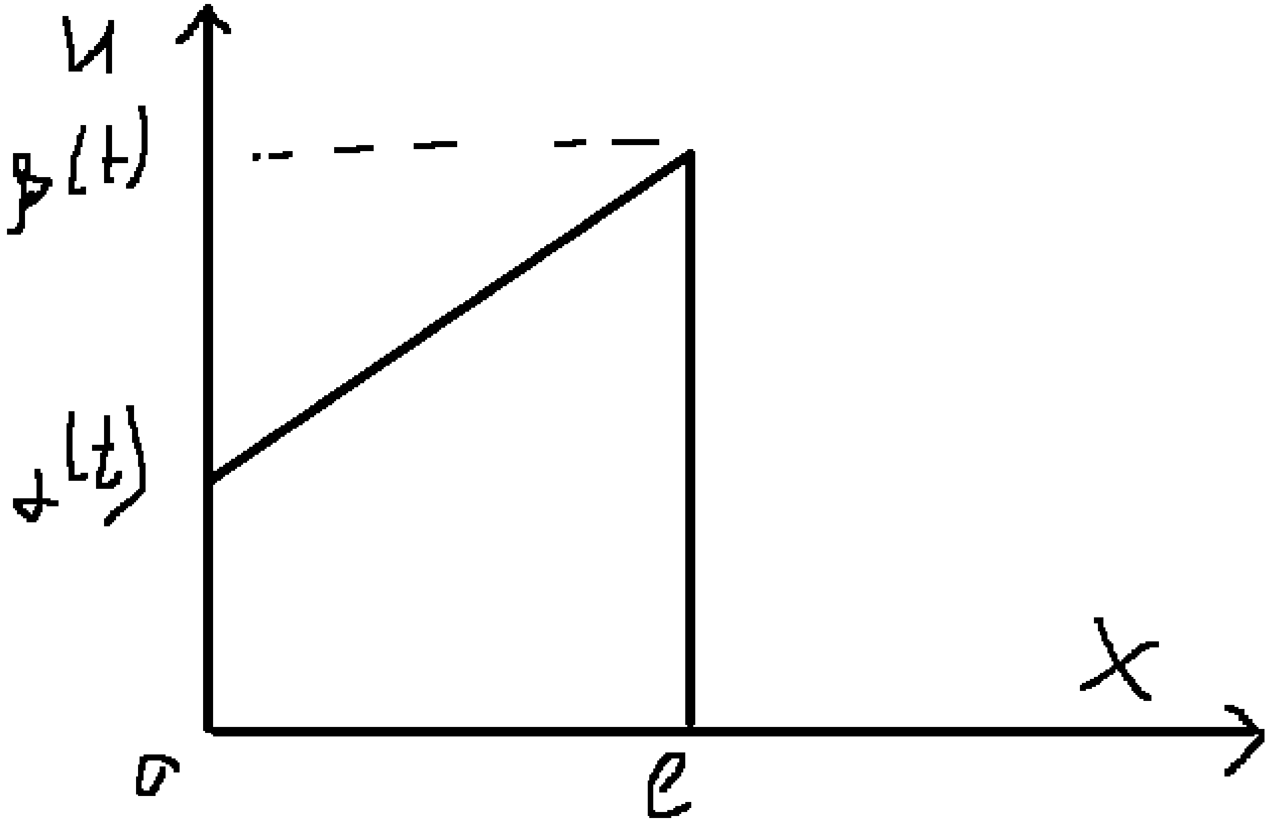
$$\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx$$

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx$$

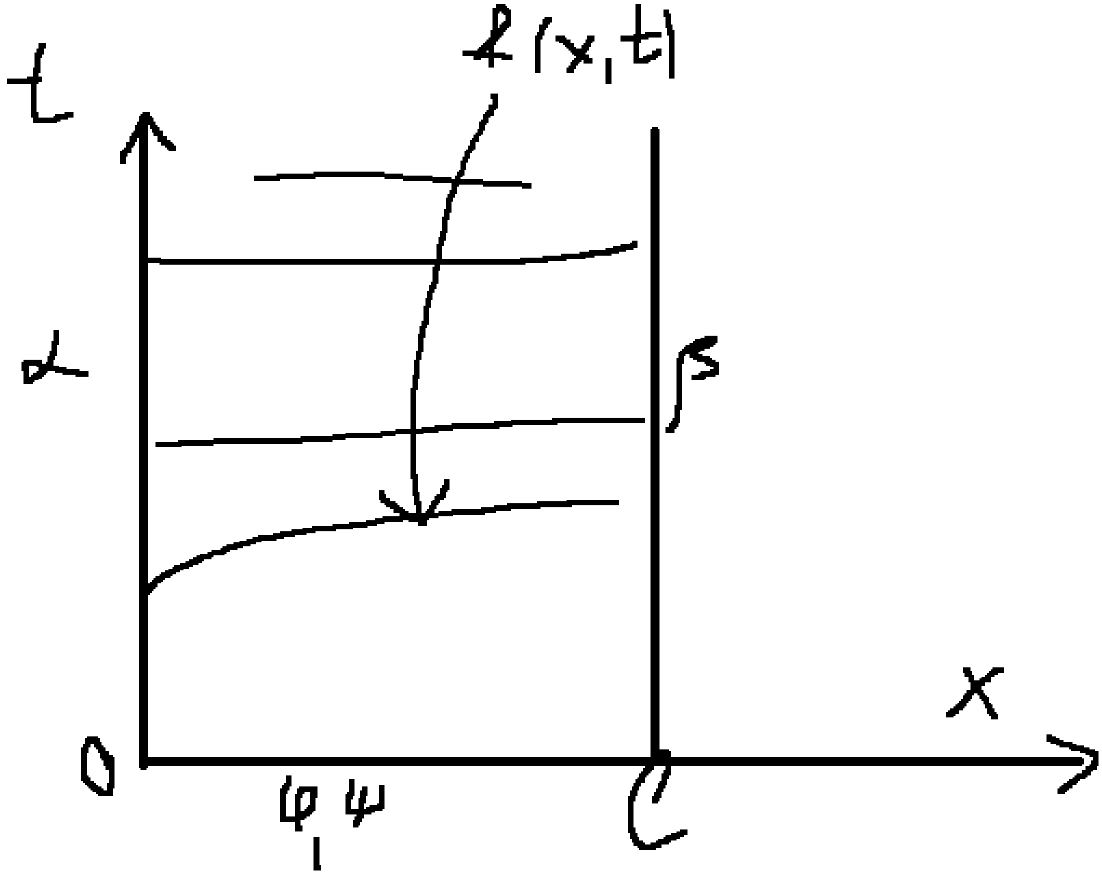
$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \\ u|_{x=0} = \alpha(t) \\ u|_{x=l} = \beta(t) \\ u|_{t=0} = \varphi(t) \\ u_t|_{t=0} = \psi(t) \end{cases}$$

$$u = v + A(t)x + B(t)$$

$$\mathcal{B}u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \mathcal{B}v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



u
β(t)
α(t)
x
0
l



f(x,t)
t
α
β
x
0
φ, ψ
l

$$\begin{cases} A(t)\cdot 0 + B(t) = \alpha(t) \\ A(t)\cdot l + B(t) = \beta(t) \end{cases}$$

$$A(t)x + B(t) = \alpha(t) + \frac{x}{l}(\beta(t) - \alpha(t))$$

$$u_t = v_t + A'(t)x + B'(t)$$

$$u_{tt} = v_{tt} + A''(t)x + B''(t)$$

$$u_x = v_x + A(t)$$

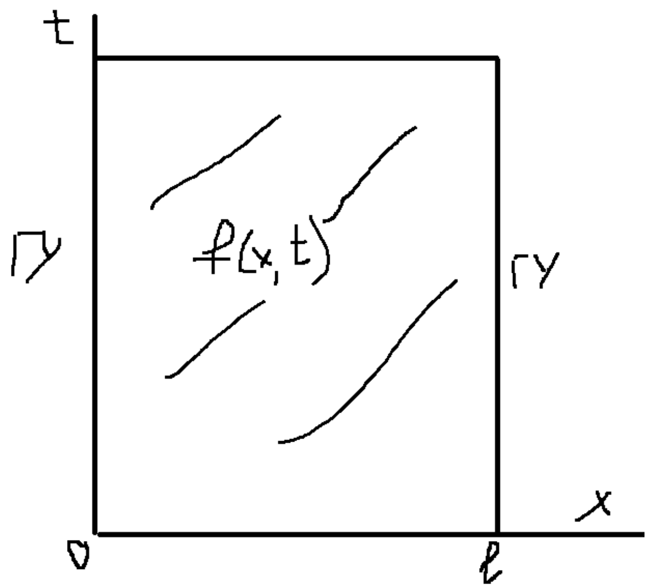
$$u_{xx} = v_{xx}$$

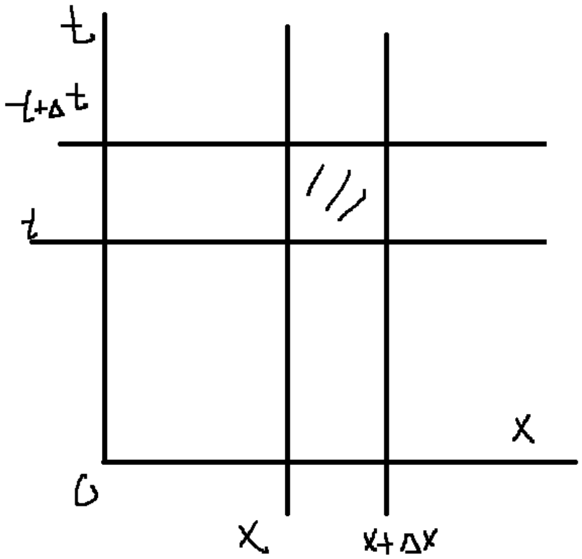
$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + f(x,t) = -A''x - B'' \\ v|_{x=0} = v|_{x=l} = 0 \\ v|_{t=0} = \varphi' - A(0)x - B(0) \\ v_t|_{t=0} = \psi - A'(0)x - B'(0) \end{cases}$$

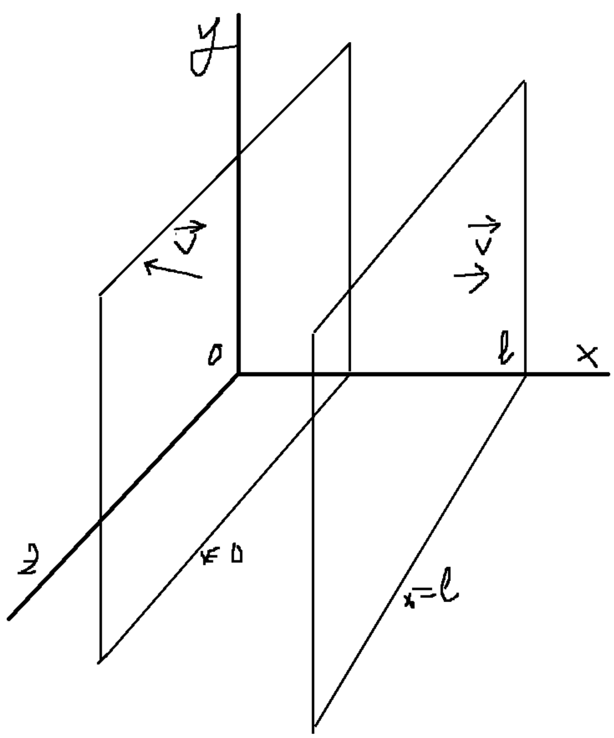
27/02/2025

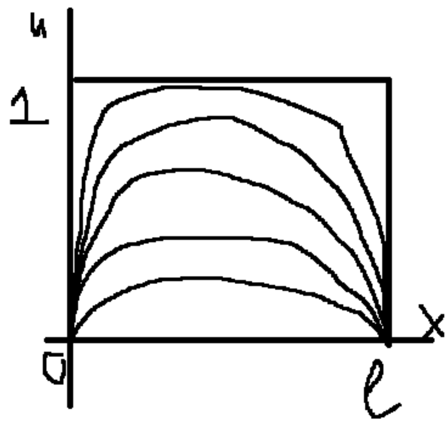
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \text{ - уравнение теплопроводности} \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

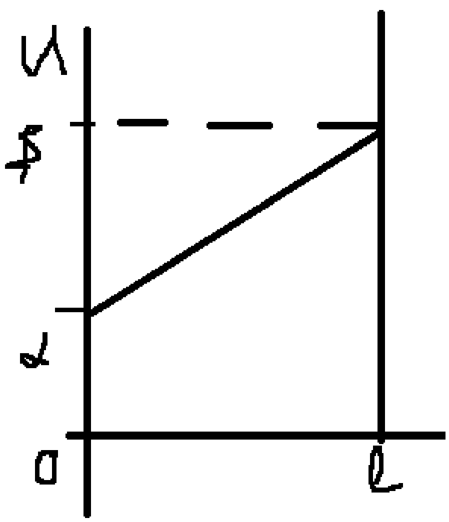
Вспомогательная задача




t
t+Δt
t
x
0
x
x+Δx


y
0
l
x
z
x=0
x=l





$$\begin{cases} C = \frac{\beta-\alpha}{l} \\ D = \alpha \end{cases}$$
$$u_{xx} = 0$$
$$u = Cx + D$$

Вспомогательная задача

$$\begin{cases} z_t = a^2 z_{xx}, 0 < x < l, t > 0 \\ z_x|_{x=0} = z_x|_{x=l} = 0 \end{cases}$$

$$z(x,t)=T(t)X(x)$$
$$T'X=a^2TX''$$
$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda$$
$$z_x(0,t)=T(t)0\equiv 0\Rightarrow X(0)=0\Rightarrow X(l)=0 \text{ - противоречие}$$
$$\begin{cases}-X''-\lambda X=0\\ X'(0)=X'(l)=0\end{cases}$$
Что-то про априорную оценку
$$\int_0^l(-X''X-\lambda X^2)dX=0$$
$$\underbrace{-X'X|_0^l}_{>0}+\underbrace{\int_0^l X'^2dx}_{\geq 0}-\lambda\underbrace{\int_0^l X^2dX}_{\geq 0}=0$$
$$X\not\equiv 0$$
$$1)\lambda=0\Rightarrow X\equiv 1\Rightarrow$$
$$-X''=0$$
$$X=Ax+B$$
$$X'=A=0\Rightarrow B\neq 0$$
$$1)\lambda>0$$
$$2)y(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$$
$$y'(x)=-A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$
$$y(0)=B\sqrt{\lambda}=0,\lambda\neq 0\Rightarrow B=0\Rightarrow A\neq 0$$
$$y'(l)=\underbrace{A\sqrt{\lambda}}_{\neq 0}\underbrace{\sin\sqrt{\lambda}l}_{=0}=0$$
$$\Rightarrow\sqrt{\lambda}l=\pi k,\lambda_k=\left(\frac{\pi k}{l}\right)^2,k\in\mathbb{Z}_{>0}$$
$$\begin{cases}\lambda_n=\left(\frac{\pi(n-1)}{l}\right)^2\\ X_n=\cos\left(\frac{\pi(n-1)x}{l}\right),n\in\mathbb{Z}_{>0}\end{cases}$$
$$n-\frac{1}{2}?$$
$$\alpha X'(l)+\beta X(l)=0$$

Ищем решение вида $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n' X_n = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(-\lambda_n X_n) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n$$

$$\varphi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x)$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n$$

$$C_n = \frac{(f, X_n)}{(X_n, X_n)}$$

$$\begin{cases} T_n' + a^2 \lambda_n T_n = f_n(t) \\ T_n(0) = \varphi_n, n \in \mathbb{Z}_{>0} \end{cases}$$

Задать вопрос, что делать, если f_n ЛНЗ с общим решением?

$$\begin{cases} -X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases}$$

Дома: доказать, что λ больше 0, и что

$$X(x) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x$$
$$X'(x) = -A\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x + B\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x$$
$$X(0) = A = 0 \Rightarrow B \neq 0$$
$$X'(l) = B\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} l = \pi \left(n - \frac{1}{2}\right)$$
$$\lambda_n = \left(\frac{\pi \left(n - \frac{1}{2}\right)}{l}\right)$$
$$X_n = \sin \left(\frac{\pi \left(n - \frac{1}{2}\right) x}{l}\right)$$
$$X(x) = \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$\begin{cases} -X'' - \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{cases}$$
$$X(x) = \sin \sqrt{\lambda}(l - x)$$
$$\begin{cases} -X'' - \lambda X = 0 \\ X'(0) = X(2\pi) X'(0) = X'(2\pi) \end{cases}$$
$$X(x + 2\pi k) = X(x)$$

Очевидно, что решение периодическое

Автономное уравнение - уравнение, которое не зависит от x.

06/03/2025

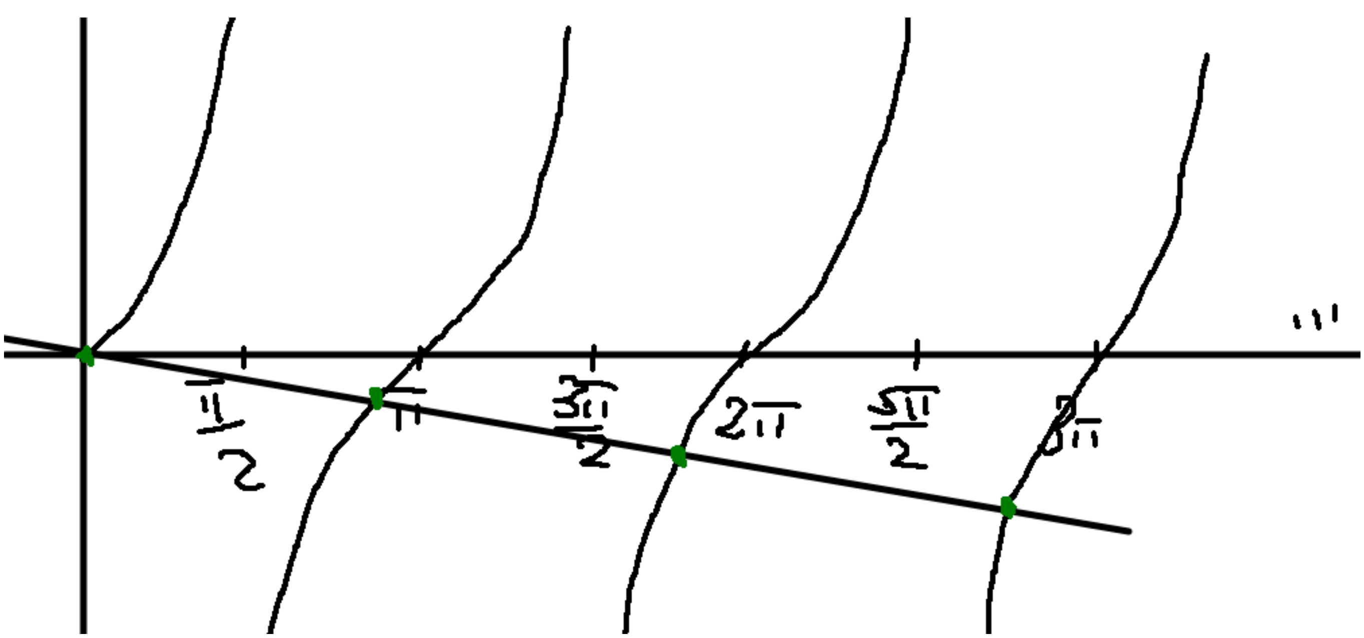
$$-y'' - \lambda y = 0$$
$$\lambda > 0:$$
$$y = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$
$$y = \sin\sqrt{\lambda}x$$

Теорема Штурма

“Pasted image 20250306133238.png” не может быть найдена.

$$D:\ y(0) = y(l) = 0$$
$$N:\ y'(0) = y'(l) = 0$$

$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(l) + \sigma y(l) = 0 \end{cases}$$
$$\int_0^l (-y'' - \lambda y)dy = -y'y|_0^l + \int_0^l y'^2 dx - \lambda\int_0^l y^2 dx = 0$$
$$\underbrace{\sigma y^2(l)}_{\geq 0} + \underbrace{\int_0^l y'^2 dx}_{\geq 0} - \lambda\underbrace{\int_0^l y^2 dx}_{>0} = 0 \Rightarrow \lambda > 0 \text{ (если } \lambda \neq 0)$$
$$y(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$
$$y'(x) = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$
$$A = 0$$
$$B \neq 0,\ \text{пусть } B = 1$$
$$y = \sin\sqrt{\lambda}x$$
$$\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + \sigma\sin\sqrt{\lambda}l = 0$$
$$\sqrt{\lambda} = \mu$$
$$\mu = -\sigma tg\ \mu l$$
$$t = \mu l$$
$$tg\ t = -\frac{t}{\sigma l}$$



$$\pi\left(n-\frac{1}{2}\right) < t_n < \pi\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda < 0: \; y = A \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda} x + B \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} x$$
$$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0, B \neq 0, B = 1$$
$$y = \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} x$$
$$y' = \sqrt{-\lambda} \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda} x$$
$$\sqrt{-\lambda} x = z$$
$$z \operatorname{ch} z + \sigma l \operatorname{sh} z = 0$$
$$\operatorname{th} z = -\frac{z}{\sigma l}$$