Теорвер и Матстат Севастьянова Бориса Николаевича (мат стат нет),
13/02/2025
Задача де Мере
Сколько раз нужно подбросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью хотя бы $\frac{1}{2}$ выпало 6+6?

Колмогоровский подход

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$
Ω - множество элементарных исходов,
$\mathcal{A}$ - система подмножеств Ω, является σ-алгеброй.
Элементы $\mathcal{A}$ - события.
$\omega \in \Omega$ - элементарный исход.
Если $\omega \in A$ - ω благоприятствует А
$\varnothing$ - невозможное событие.
Ω - достоверное событие
$A \subset B$ - событие А влечёт событие В
$A \backslash B$ - разность событий
$A + B = A \cup B$ - сумма собыьтий
$A \cdot B = A \cap B$

P - мера на $\mathcal{A}$, из аксиоматики колмогорова:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$ - А и В называются независимыми.
   Примеры:
   Классическая вероятностная модель:

$$\Omega \in X \ - \ \text{Конечное множество}$$
$$\mathcal{A} = 2^X \ - \ \text{система всех подмножеств}$$
$$P(A \in \Omega) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{число благоприятных исходов}}{\text{Общее число исходов}}$$

   Пример, поясняющий пример:

$$\Omega = \{(i,j), \substack{i = \overline{1,6} \\ j = \overline{1,6}}\}$$

   Задача де Мере
   n - подбрасываемая

$$\Omega = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_{36}, j_{36})\}$$
$$|\Omega| = 36^n$$
$$A = \{\text{Хотя бы 1 раз выпало 6+6}\}$$
$$\overline{A} = \Omega \backslash A \ - \ \text{Противоположное событие}$$
$$\Omega = \overline{A} + A$$
$$\overline{A} = \{\text{Ни разу не выпало 6+6}\}$$
$$|\overline{A}| = 35^n$$
$$1 = P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$$
$$P(\overline{A}) = \left(\frac{35}{36}\right)^n$$
$$\left(\frac{35}{36}\right)^n < \frac{1}{2}$$
$$n \ln\left(\frac{35}{36}\right) < \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$n > \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{35}{36}\right)} \approx 24, \ldots$$

Вычисление вероятностей в класс схеме - комбинаторная задача

Правила комбинаторики:

1. Правило суммы.

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow \#A \cup B = \#A + \#B$$

2. Правило произведения.

$$\#A \times B = \#A \cdot \#B$$

1. Перестановки в множестве с мощностью n:

$$P_n = n!$$

2. Размещения на m мест в множестве с мощностью n:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

3. Сочетания из n элементов по m мест

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k+1}$$

$$\begin{matrix} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{matrix}$$

4. Имеются элементы n типов

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$$
$$P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}{k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n}$$

5. Размещения с повторениями

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

6. Сочетания с повторениями

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^{m} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Пример:

$$\text{Имеется n неразличимых шаров, m различимых ящиков, так чтобы все ящики были заняты}$$
$$n \leq m$$
$$\cdots|\cdot\cdot|\cdot|\cdot\cdot\cdot\cdot|\cdot$$
$$\text{n-1 граница разделит точки на n частей}$$

Модель геометрической вероятности

$$\Omega \; - \; \text{Измеримая геометрическая фигура} \to \exists \, \mathrm{mes}(\Omega)$$
$$\mathcal{A} \; - \; \text{измеримые подмножества}$$
$$P(A \in \mathcal{A}) = \frac{\mathrm{mes}(A)}{\mathrm{mes}(\Omega)}$$

Основные теоремы вероятности

7. $A \subset B \Rightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$ (См 3 аксиому и определение разности)
8. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ - P - это мера
9. $\forall A \;\; 0 \leq P(A) \leq 1$ т.к. $A \subset \Omega \Rightarrow P(A) \leq P(\Omega) = 1$
10. Теорема сложения: $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$ - это мера
11. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ (см 1 св-во)
12. Теорема непрерывности: $B_{n+1} \subset B_n \subset \dots \subset B_2 \subset B_1 \land \cap_i B_i = \varnothing \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 0$ - это мера

20/02/2025

Примеры вероятностных моделей.

Класс модель $\rightarrow$ Гипергеометрическая модель

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω - конечное множество

$\mathcal{A}$ - все подмножества

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

n_1 - предметов 1 типа

n_2 - предметов 2 типа

Выберем m прдеметов без возвращения $m \leq n_1, m \leq n_2$

A_k - среди вынутых предметов $k\ -$ 1-го типа, $(m-k) -$ 2-го типа.

$|A_k| = C_{n_1}^k - C_{n_2}^{m-k}$

$C_{n_1}^k$ - выбрано предметов 1 типа

$$P(A_k) = \frac{C_{n_1}^k C_{n_2}^{m-k}}{C_{n_1+n_2}^m}$$

Обощение

Имеются предметы l типов в количетсвах $n_1, n_2, \ldots, n_l$ выберем m предметов.

$$P(A_{k_1, k_2, \ldots, k_l}) = \frac{C_{n_1}^{k_1} C_{n_2}^{k_2} \ldots C_{n_l}^{k_l}}{C_{n_1+n_2+\cdots+nl}^m}$$

Модель геометрических вероятностей.

Геометрическая вероятность.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω - измеримое множество

$\mathcal{A}$ - измеримые подмножества

$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

Пример:

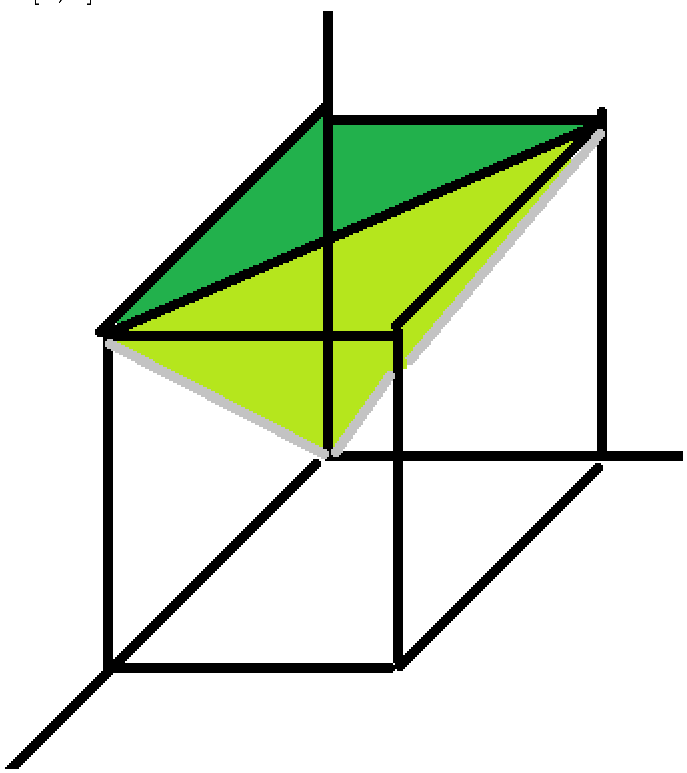
Датчик случаёных чисел.

Запускаем его 3 раза. Получаем 3 числа: $x,\ y,\ z\ \in [0, 1]$

$P(z > x + y) = ?$

$\omega = (x, y, z) -$ точка

$\Omega = [0,1]^3$



$$P(z > x + y) = \frac{V(A)}{V(\Omega)} = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}$$

Парадокс Бертрана

В круге наугод выбирается хорда x. $P(x > R\sqrt{3}) = ?$

Парадокс в том, что в зависимости от способа выбора случайной хорды, ответ меняется.

Первый способ:

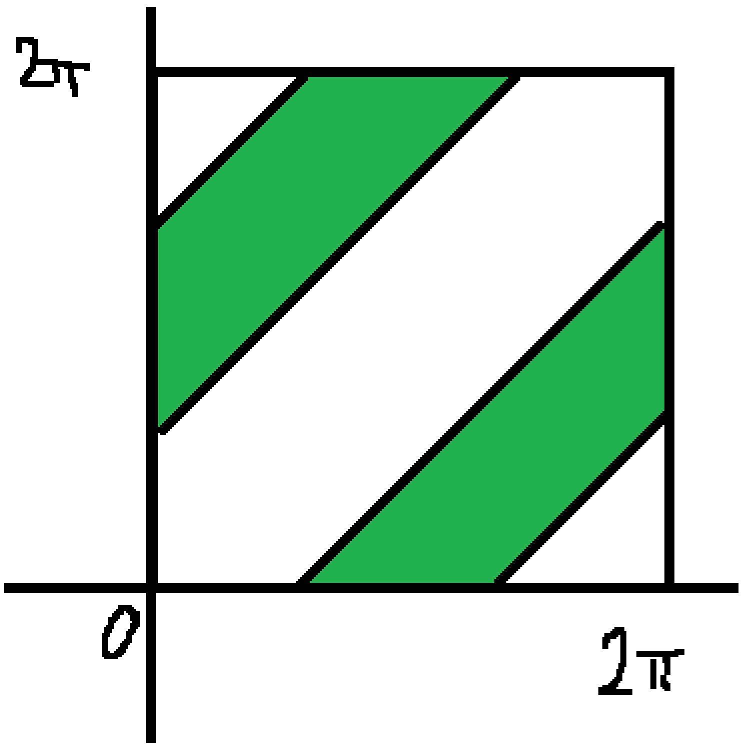
A - произвольная точка.

B - произвольная точка

$x = [A, B]$

$\Omega = [0, 2\pi]^2$

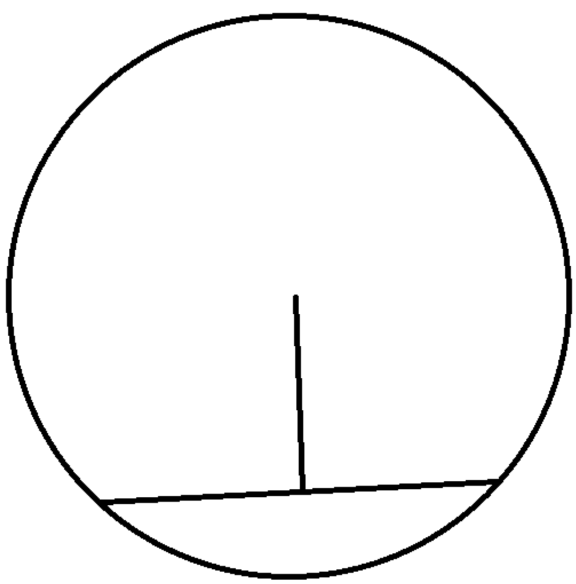
$$\frac{2\pi}{3} < |x - y| < \frac{4\pi}{3}$$

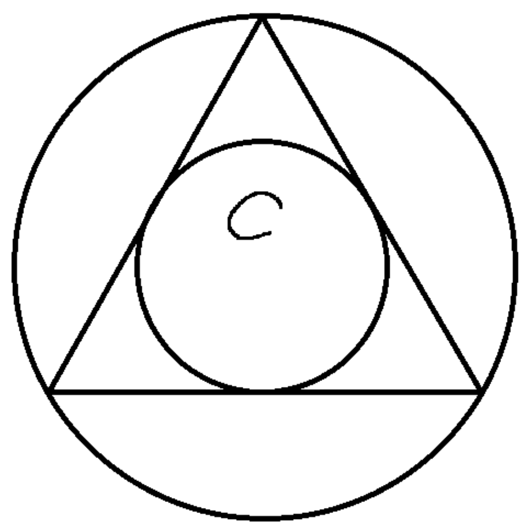


$$P(x > R\sqrt{3}) = \frac{S(C)}{S(\Omega)} = \frac{S(C)}{(2\pi)^2}$$

Второй способ:

Хорда отождествляется с её серединой





$$P(C) = \frac{S(C)}{S(\Omega)} = \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{(2\pi)^2} = \frac{1}{4}$$

Третий способ:

Хорда на диаметре.

Абсолютно непрерывная вероятностная модель

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$
$\Omega = \mathbb{R}$
$\mathcal{A} = B$ - борелевская σ-алгебра

1. $P(A) = \int_A p(x)dx$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$
3. цел: $p(x) \geq 0$

   Пример: гауссовская плотность

$$P_{a.\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_{a,\sigma}(x)dx = \begin{vmatrix} \frac{x-a}{\sqrt{2}\sigma} = y \\ dx = dy\sigma\sqrt{2} \end{vmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{8\pi}\sigma} e^{-y^2} \sigma\sqrt{2}dy = 1$$

$$\int_{b_1}^{b_2} p_{a,\sigma}(x)dx = \begin{vmatrix} \frac{x-a}{\sigma} = y \\ dx = \sigma dy \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{b_1-a}{\sigma}}^{\frac{b_2-a}{\sigma}} e^{-y^2}dy = \varphi\left(\frac{b_2-a}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{b_1-a}{\sigma}\right)$$

Условные вероятности.

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Пояснение: n опытов, фиксируем события A.
n_A - наступило A
n_B - наступило B
n_{AB} - наступило A и B

$$\frac{n_A}{n} \approx P(A)$$
$$\frac{n_{AB}}{n_B} \approx P(A|B)$$
$$\frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}} \approx \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Формула умножения

$$P(AB) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Пример
В урне имеется a белых и b чёрных шаров. Вынимаем 2 шара. Вычисляем вероятность того, что оба вынутых шара белые.

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{C_{a+b}^2}{C_{a+b}^2} = \frac{a! \cdot 2! \cdot (a+b-2)!}{(a-2)! \cdot 2!(a+b)!} = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$

Событие равносильно следующей совокупности событий:

Достали белый шар, а потом достали второй белый шар

$$P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1}$$

Условное вероятностное пространство

$B, P(B) > 0$

$(\Omega, \mathcal{A}, P) \to (B, \mathcal{A}_B, P_B)$

$\mathcal{A}_B = \mathcal{A} \cap B$ - сужение алгебры $\mathcal{A}$ на B.

$$P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} \geq 0$$

$$P_B(B) = 1$$

$$A_1 \cap A_B = \varnothing$$
$$P_B(A_1 + A_2) = \tfrac{P((A_1+A_2)B)}{P(B)} = \tfrac{P(A_1B+A_2B)}{P(B)} = \tfrac{P(A_1B)+P(A_2B)}{P(B)} = P_B(A_1) + P_B(A_2)$$

Теорема умножения

$P(A_1, A_2, \ldots, A_n) > 0 \implies$

$$P(A_1, A_2, \ldots, A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_2A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_{n-1} \ldots A_3A_2A_1)$$

Формулы полной вероятности и Байеса

$$H_1, H_2, \ldots, H_l \text{ - полная группа событий} \Leftrightarrow$$
$$P(H_i) > 0$$
$$H_i \cap H_j = \delta_{ij}$$
$$\sum_i H_i = \Omega$$

Теорема о полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{l} P(A|H_i) \cdot P(H_i)$$

$$A = A\Omega = A \sum_i H_i = \sum_i AH_i$$

Пример:

5 белых и 3 черных шара

вынимаем 1 шар и перекладываем в корзину с 2 белыми и 2 черными шарами

Вынимаем шар, какой цвет?

$$H_1 \text{ - переложен белый}$$
$$H_2 \text{ - переложен чёрный}$$
$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{21}{40}$$

$$\mathcal{H} = \{H_i\} \text{ - полная группа событий}$$
$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\sum_{i=1}^{l} P(A|H_i) \cdot P(H_i)}$$
$$P(H_i) \text{ - априорные вероятности}$$
$$P(H_i|A) \text{ - апостериорные вероятности}$$

МК1

$$\text{7 белых, 5 черных, 4 красных}$$
$$7+5+4=16$$
$$\frac{4}{16} + \frac{12}{16} \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{15} < \frac{1}{2}$$
$$\frac{5}{16} + \frac{11}{16} \cdot \frac{5}{15} = \frac{15}{48} + \frac{11}{48} = \frac{26}{48} > \frac{24}{48}$$

06/03/2025

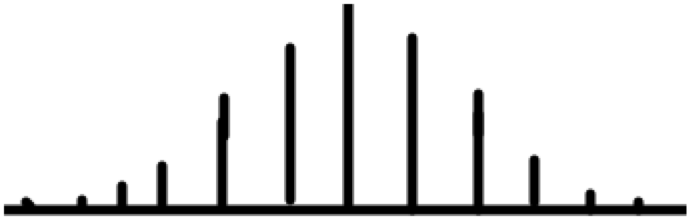
Предельные теоремы в схеме Бернулли

Схема Бернулли

$$\omega = (0, 1, \ldots, 0, 1) \text{ - последовательность 0 и 1}$$
$$P(\omega) = p^k(1-p)^{n-k},\ p \text{ - вероятность}$$
$$p_n^k = P(\underbrace{\mu}_{\text{число успехов}} = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$
$$p_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$
$$\text{Пример: 3 шара с возвращениями}$$

Наиболее вероятное число успехов

$$k : p_n^k = \max$$
$$q = 1-p$$
$$p_n^k \text{ vs } p_n^{k+1} \Leftrightarrow \frac{n!}{p!(n-k)!} p^k q^{n-k} \text{ vs } \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} q^{n-k-1} \Leftrightarrow$$
$$k+q \text{ vs } np$$
$$1)\ k+1 < np \Rightarrow k+n < np \Rightarrow p_n^k < p_n^{k+1}$$
$$2)\ k > np \Rightarrow k+q > np \Rightarrow p_n^k > p_n^{k+1}$$



Пример:

$$\begin{array}{lll} n_1 & - & p_1 = 0.8 \quad \text{- вероятность попадания первого} \\ n_2 & - & p_2 = 0.6 \quad \text{- вероятность попадания второго} \end{array}$$

Одновременно производят 15 выстрелов. Найти вероятное число залпов, когда оба выстрела попадут.

$$p = p_1 p_2 = 0.48$$
$$np = 15 \cdot 0.48 = 7.2$$
$$p_n^k < p_m^{k+1},\ \ k+1 < np \Rightarrow k = \overline{0,7}$$
$$p_n^k > p_n^{k+1},\ \ k > np \Rightarrow k = \overline{8,15}$$
$$p_{15}^7 \ \text{ vs } \ p_{15}^8$$

Теорема 1 (локальная Муавра-Лапласа)
Пусть в схеме Бернулли $\sqrt{npq} \gg 1$, тогда

$$pn^k \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

равномерно по $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} \in [a,b]$

$$p_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

$k = np + x\sqrt{npk}$ - бесконечно большая

$n - k = nq - x\sqrt{npk}$ - бескольнечно большая

$$p_n^k \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi(n-k)}\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}} p^k q^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \frac{(np)^k (nq)^{n-k}}{k^k (n-k)^{n-k}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} \left(\frac{np}{k}\right)^k \cdot \left(\frac{nq}{n-k}\right)^{n-k} = A$$

$$\ln A = -k \ln\left(\frac{np + x\sqrt{npq}}{np}\right) - (n-k)\ln\left(\frac{nq - x\sqrt{npk}}{nq}\right) =$$

$$= -k \ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) - (n-k)\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right) \approx$$

$$\approx (np + x\sqrt{npk})\left(x\sqrt{\frac{q}{np}} - \frac{1}{2}x^2\frac{q}{np} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) -$$

$$\left(nq - x\sqrt{npq}\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}} - \frac{x^2}{2}\frac{p}{nq} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) =$$

$$= \cancel{-x\sqrt{npq}} - x^2 q + \frac{1}{2}x^2 q + o(1) + \cancel{x\sqrt{npq}} + \frac{x^2}{2} - x^2 p + o(1) =$$

$$= -\frac{x^2}{2}(q+p) + o(1) = -\frac{x^2}{2} + o(1)$$

$$\sqrt{\frac{n}{k(n-k)}} = \sqrt{\frac{n}{(np + x\sqrt{npq})(np - x\sqrt{npk})}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\left(p + x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\left(q - x\sqrt{\frac{pq}{n}}\right)}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{npk}}$$

Теорема 2 (интегральная теорема Муавра-Лапласа)

$$\sum_{k=k_1}^{k_2-1} p_n^k = \int_{\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$$1 = P(4) + P(1) \cdot (P(2) + P(3))$$

0 на i месте означает, что iый элемент отказал, а 1, что работал безотказно

не 3, но работал

или 4

или 1 и 2

1000

0001

1101

0100

5 белых, 6 красных, 8 черных 5+6+8=19

3 шара без возвращения

бчк:

$$\frac{5 \cdot 6 \cdot 8}{19 \cdot 18 \cdot 17}$$

$$\frac{8}{19} \text{ vs}$$

чбк бкч

568 565