

Задание 1

Условие:

$$f(z) = \frac{1}{z(z+2)}, z_0 = -1$$

Решение:

Т.к. -2 и 0 симметричны относительно -1, необходимо рассмотреть 2 области

$$z - z_0 = q \\ f(z) = \frac{1}{(z+1-1)(z+1+1)} = \frac{1}{(q-1)(q+1)} = \frac{1}{q^2-1} = -\frac{1}{1-q^2}$$

$$t = q^2 \\ f(z) = -\frac{1}{1-t} = -\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} -t^n = \sum_{n=0}^{\infty} -q^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} -(z+1)^{2n}$$

Для $|z+1| > 1$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{(q-1)(q+1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{q-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+q} = \\ \frac{1}{q-a} &= \frac{\frac{1}{q}}{1-\frac{a}{q}} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{1-\frac{a}{q}} = \frac{1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{q}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{q^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{q^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{q^{n+1}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{q^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{(z+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+1)^{2(n+1)}} \end{aligned}$$

Задание 2

Условие:

$$f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z^2}$$

Решение:

Особые точки:

$$z = 0 : \lim_{z \rightarrow 0} z^3 \cos \frac{1}{z^2} = \cancel{\neq}$$

$$z^3 \cos \frac{1}{z^2} = z^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{z^2}\right)^{2n}}{(2n)!} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)! z^{4n}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)! z^{4n-3}}$$

$$c_{-1} = -1 \cdot \frac{1}{2!} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Res}_{z=0} f = -\frac{1}{2}$$

$$z = \infty : \text{т.к. сумма всех вычетов равна 0, то } \operatorname{Res}_{z=\infty} f = \frac{1}{2}$$

Очевидно, что бесконечность - это полюс 3-его порядка

Задание 3

Условие:

$$y = -x$$

$$w = \frac{z+1}{z-1}$$

Решение:

$$w(z-1) = z+1$$

$$(u+vi)(x+yi-1) = x+yi+1$$

$$ux - u - vy + i(vx - v + uy) = x + 1 + iy$$

$$\begin{cases} ux - u - vy = x + 1 \\ vx - v + uy = y \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ux - u + vx = x + 1 \\ vx - v - ux = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(u+v-1) = 1+u \\ x(v-u+1) = v \end{cases} \Rightarrow (1+u)(v-u+1) = v(u+v-1) \Rightarrow$$

$$v - \cancel{u} + 1 - \cancel{uv} - u^2 + \cancel{u} = \cancel{vu} + v^2 - v$$

$$1 = u^2 + v^2 - 2v$$

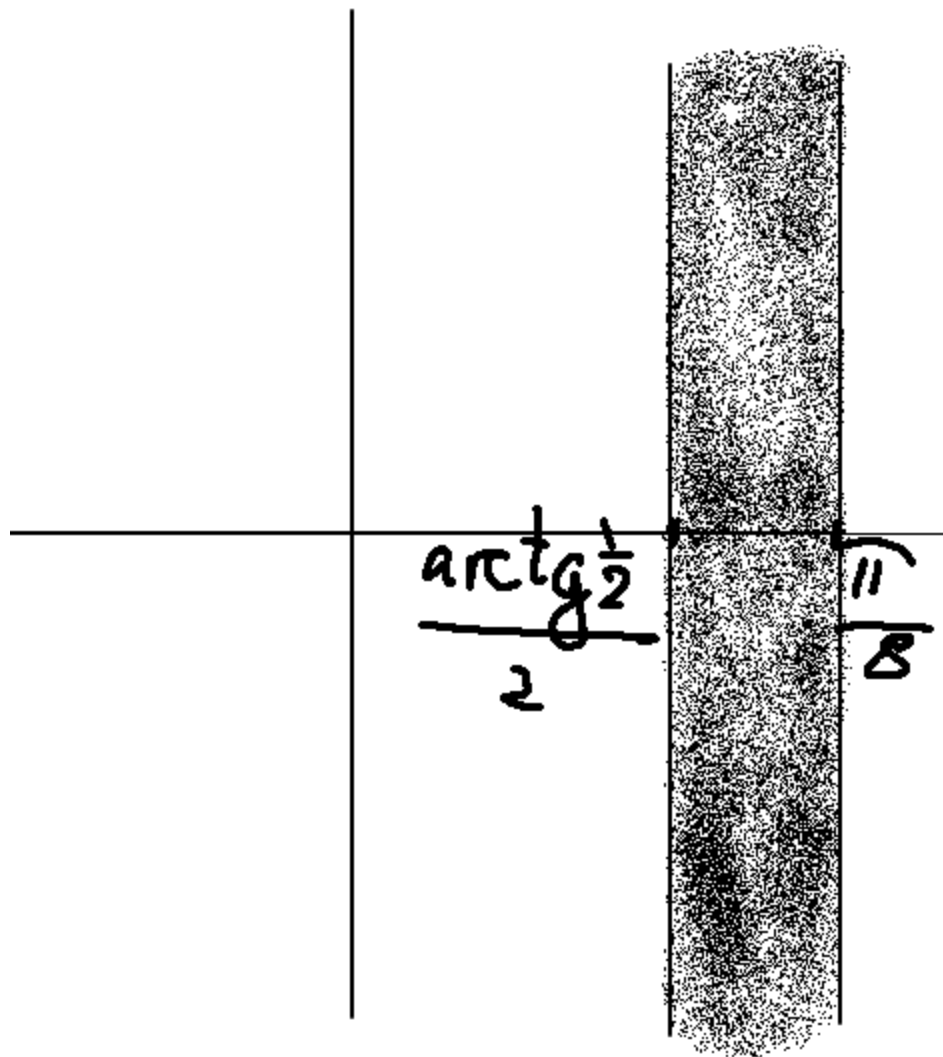
$$2 = u^2 + (v-1)^2 - \text{окружность}$$

Задание 4

Условие:

$$\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2}}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{8}, \quad \omega = \operatorname{tg} z$$

Решение:



$w = \operatorname{tg} z = \frac{e^{2iz} - 1}{i(e^{2iz} + 1)}$ — композиция линейной, экспоненты и дробно-линейной:

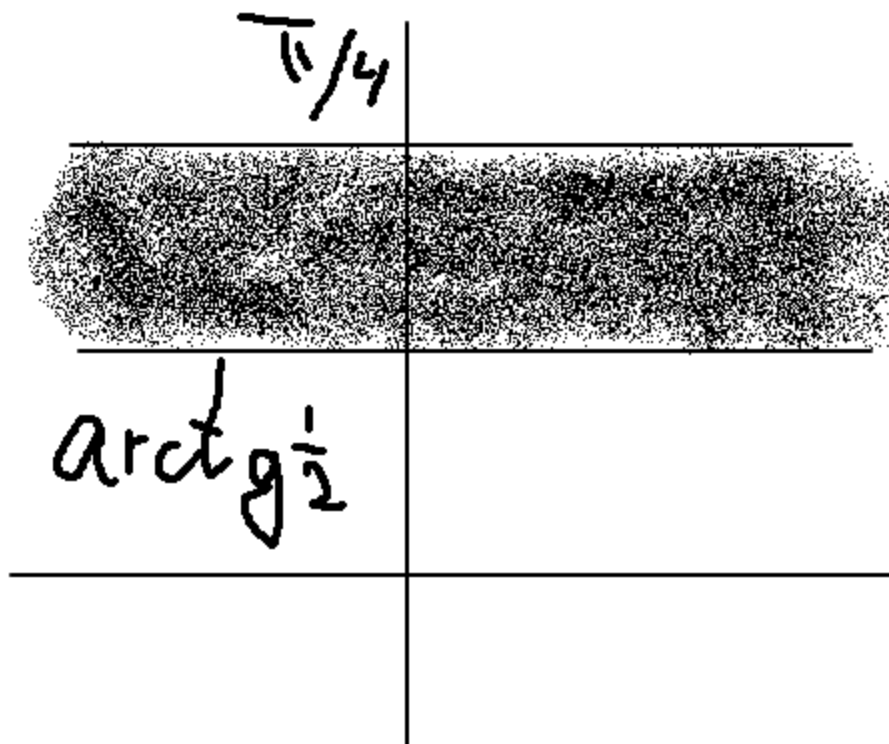
$$w_1 = 2iz$$

$$w_2 = e^{w_1}$$

$$w = -i \cdot \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1}$$

$w_1 : i$ повернёт полосу относительно $(0,0)$ против часовой на $\frac{\pi}{2}$

2 "растянет" в 2 раза \Rightarrow



$w_1 :$

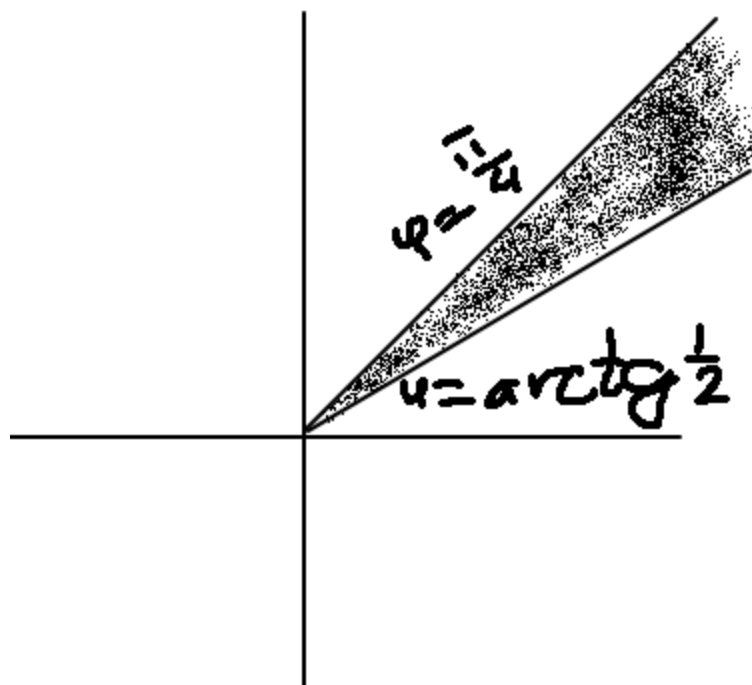
$$\arctg \frac{1}{2} \leq \operatorname{Im} w_1 \leq \frac{\pi}{4}$$

$w_2 :$

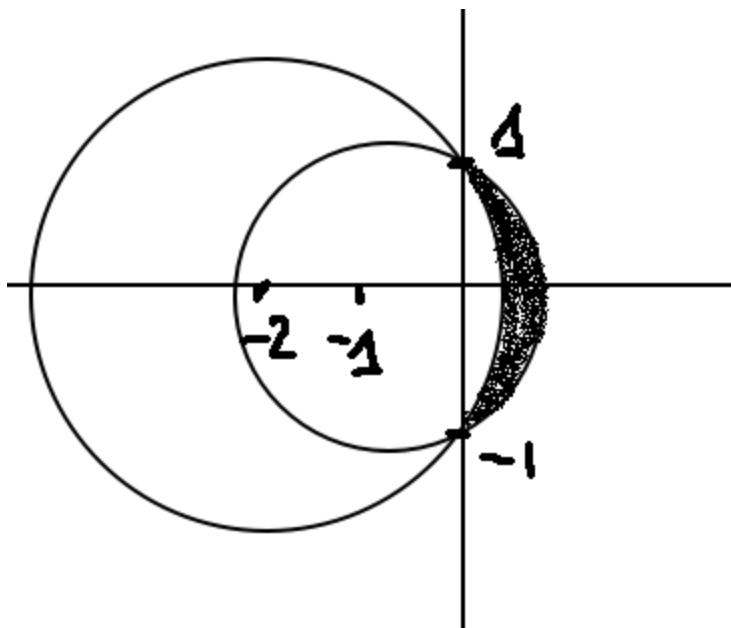
$$w_2 = \exp(w_1) = \exp(\operatorname{Re} w_1 + i \operatorname{Im} w_1) = \exp(\operatorname{Re} w_1) \cdot \exp(i \operatorname{Im} w_1)$$

w_2 задаёт угол с следующим условием:

$$\arctg \frac{1}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$



$$\begin{aligned}
 w &= -i \frac{w_2 - 1}{w_2 + 1} \\
 w_2 w + w &= -i w_2 + i \\
 w_2(w + i) &= i - w \\
 w_2 &= \frac{i - w}{i + w} \\
 r(\cos \varphi + i \sin \varphi) &= \frac{i - x - iy}{i + x + iy} \\
 r \cos \varphi + ir \sin \varphi &= \frac{(-x + i(1 - y))(x - i(y + 1))}{x^2 + (y + 1)^2} \\
 r \cos \varphi + ir \sin \varphi &= \frac{-x^2 + 1 - y^2}{x^2 + (y + 1)^2} + i \frac{x - xy + x + xy}{x^2 + (y + 1)^2} \\
 \begin{cases} r \cos \varphi = \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + (y + 1)^2} \\ r \sin \varphi = \frac{2x}{x^2 + (y + 1)^2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{2x}{\sin \varphi} \geq 0 \\ \frac{1 - x^2 - y^2}{\cos \varphi} \geq 0 \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{2x}{1 - x^2 - y^2} \end{cases} \begin{matrix} \sin \varphi > 0 \\ \cos \varphi > 0 \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \frac{2x}{1 - x^2 - y^2} \leq 1 \\ x \geq 0 \\ 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \\
 \begin{cases} x \geq 0 \\ 1 - x^2 - y^2 \leq 4x \\ 2x \leq 1 - x^2 - y^2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x + 2)^2 + y^2 \geq 5 = \sqrt{5}^2 \\ (x + 1)^2 + y^2 \leq 2 = \sqrt{2}^2 \end{cases}
 \end{aligned}$$



Ответ: $\begin{cases} \operatorname{abs}(w + 2) \geq \sqrt{5} \\ \operatorname{abs}(w + 1) \leq \sqrt{2} \end{cases}$

Предыдущие попытки:

$$\begin{aligned}
 y &= \alpha x \\
 \begin{cases} xu + u - \alpha xv = \alpha x \\ \alpha xu + xv + v + x = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x(u - \alpha v - \alpha) = -u \\ x(\alpha u + v + 1) = 1 - v \end{cases} \Rightarrow \\
 (1 - v)(u - \alpha v - \alpha) &= -u(\alpha u + v + 1) \\
 u - \cancel{\alpha v} - \alpha \cancel{-\alpha v} + \alpha v^2 + \alpha v &= -\alpha u^2 - \cancel{\alpha v} - u \\
 \alpha v^2 + \alpha u^2 + 2u &= \alpha \\
 v^2 + \left(u + \frac{1}{\alpha}\right)^2 &= 1 + \frac{1}{\alpha^2} \\
 \alpha = 1: v^2 + (u + 1)^2 &= 2 \\
 \alpha = \frac{1}{2}: v^2 + (u + 2)^2 &= 5
 \end{aligned}$$

$$\omega = \operatorname{tg}(x + yi)$$

$$\begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2}}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{8} \\ \omega = \operatorname{tg}(x + iy) \\ \omega = u + vi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2}}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{8} \\ u + vi = \frac{\sin(x+yi)}{\cos(x+iy)} = \frac{\sin x \operatorname{ch} y + \cos x \operatorname{sh} y \cdot i}{\cos x \operatorname{ch} y - \sin x \operatorname{sh} y \cdot i} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{th} y \cdot i}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{th} y \cdot i} \end{cases} \Rightarrow$$

$$(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{th} y \cdot i)(u + vi) = \operatorname{tg} x + \operatorname{th} y \cdot i$$

$$u + \operatorname{tg} x \operatorname{th} y v + i(v - \operatorname{tg} x \operatorname{th} y u) = \operatorname{tg} x + \operatorname{th} y i$$

$$\begin{cases} u + \operatorname{tg} x \operatorname{th} y v = \operatorname{tg} x \\ v - \operatorname{tg} x \operatorname{th} y u = \operatorname{th} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = \operatorname{tg} x + \operatorname{th} y \\ u - v + \operatorname{tg} x \operatorname{th} y (\operatorname{tg} x + \operatorname{th} y) = \operatorname{tg} x - \operatorname{th} y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x \operatorname{th} y (\operatorname{tg} x + \operatorname{th} y) \\ v = \operatorname{th} y + \operatorname{tg} x \operatorname{th} y (\operatorname{tg} x + \operatorname{th} y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \in R \\ \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2}}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{8} \\ u = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x \operatorname{th} y (\operatorname{tg} x + \operatorname{th} y) \\ v = \operatorname{th} y + \operatorname{tg} x \operatorname{th} y (\operatorname{tg} x + \operatorname{th} y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta \in [-1, 1] \\ \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2}}{2} \right) \leq \xi \leq \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \\ u = \xi - \xi \theta (\xi + \theta) \\ v = \theta + \xi \theta (\xi + \theta) \end{cases}$$

$$\eta = \operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg}(\xi))$$

$$\xi = \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{arctg} \eta}{2} \right)$$

$$\begin{cases} -1 \leq \theta \leq 1 \\ \frac{1}{2} \leq \eta \leq 1 \\ u = \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{arctg} \eta}{2} \right) - \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} \eta}{2} \theta \left(\operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} \eta}{2} + \theta \right) \\ v = \theta + \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} \eta}{2} \theta \left(\operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} \eta}{2} + \theta \right) \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$(1 - t^2)p = 2t$$

$$t^2 + \frac{2}{p}t - 1 = 0$$

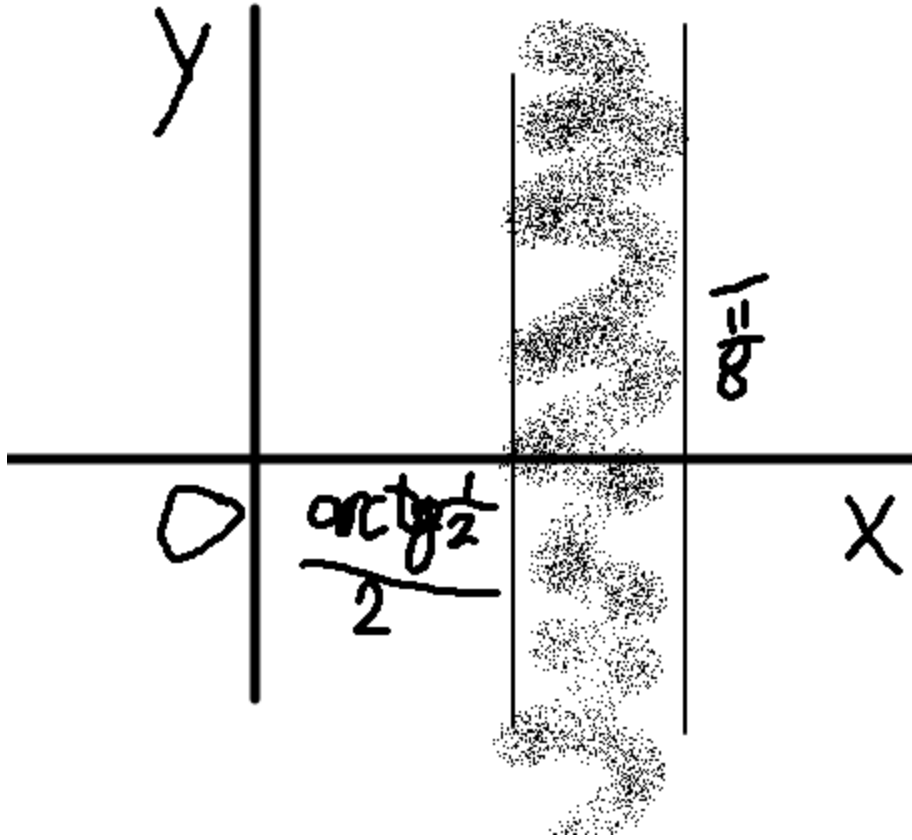
$$\frac{D}{4} = \frac{1}{p^2} + 1 = \frac{1 + p^2}{p^2}$$

$$t = -\frac{1 \pm \sqrt{1 + p^2}}{p} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4}} - 1}{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} - 2$$

$$\frac{\sqrt{1 + 1} - 1}{1} = \sqrt{2} - 1$$

$$\begin{cases} -1 \leq \theta \leq 1 \\ \sqrt{5} - 2 \leq \xi \leq \sqrt{2} - 1 \\ u = \xi - \xi \theta (\xi + \theta) \\ v = \theta + \xi \theta (\xi + \theta) \end{cases}$$



Из графических соображений понятно, что образ искомого множества лежит между кривыми, которые являются образами его границы.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta i) = \frac{\sin(\alpha) \cos(\beta i) + \sin(\beta i) \cos(\alpha)}{\cos(\alpha) \cos(\beta i) - \sin(\alpha) \sin(\beta i)} = \frac{\sin \alpha \operatorname{ch} \beta + \cos \alpha \operatorname{sh} \beta i}{\cos \alpha \operatorname{ch} \beta - \sin \alpha \operatorname{sh} \beta i} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{th} \beta i}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{th} \beta i}$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2}}{2} + yi \right) = \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2}}{2} \right) + \operatorname{th} yi}{1 - \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2}}{2} \right) \operatorname{th} yi} = u + vi$$

$$T = \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2}}{2} \right), \theta = \operatorname{th} y$$

$$\frac{T + \theta i}{1 - T\theta i} = u + vi \Rightarrow T + \theta i = u + T\theta v + i(v - T\theta u)$$

$$\begin{cases} u + \theta T v = T \\ v - \theta T u = \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = \theta + T \\ u - v = -2\theta T(\theta + T) + T - \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = T - \theta T(\theta + T) \\ v = \theta + \theta T(\theta + T) \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$(1 - t^2)p = 2t$$

$$t^2 + \frac{2}{p}t - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = \frac{1}{p^2} + 1 = \frac{1 + p^2}{p^2}$$

$$t = -\frac{1 \pm \sqrt{1 + p^2}}{p} \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{4}} - 1}{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} - 2$$

$$\frac{\sqrt{1 + 1} - 1}{1} = \sqrt{2} - 1$$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} u + \theta T v = T \\ v - \theta T u = \theta \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{T-u}{T v} \\ \theta = \frac{v}{1+T u} \end{cases} \Rightarrow (T-u)(1+T u) = T v^2 \\
T - u + T^2 u - T u^2 &= T v^2 \\
T v^2 + T u^2 + (1 - T^2) u &= T \\
v^2 + u^2 + 2 \cdot \frac{1 - T^2}{2T} u + \frac{(1 - T^2)^2}{4T^2} &= T + \frac{(1 - T^2)^2}{4T^2} \\
v^2 + \left(u + \frac{1 - T^2}{2T} \right)^2 &= T + \frac{(1 - T^2)^2}{4T^2} \\
T = \sqrt{5} - 2 : T^2 = 9 - 4\sqrt{5} & \\
v^2 + \left(u + \frac{-8 + 4\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 4} \right)^2 &= \sqrt{5} - 2 + 2^2 \\
v^2 + (u + 2)^2 = \sqrt{5} + 2 & \\
T = \sqrt{2} - 1 : T^2 = 3 - 2\sqrt{2} & \\
v^2 + \left(u + \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 2} \right)^2 &= \sqrt{2} - 1 + 1^2 \\
v^2 + (u + 1)^2 = \sqrt{2} &
\end{aligned}$$

2 окружности с центрами в $(-2, 0)$ и $(-1, 0)$ и радиусами $\sqrt{\sqrt{5} + 2}$ и $\sqrt{\sqrt{2}}$.

Задание 5

Условие:

$$\omega = \operatorname{Artg} z$$

$$z_0 = \frac{4}{3}i$$

Решение:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} \omega &= \frac{\sin \omega}{\cos \omega} = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{i(e^{i\omega} + e^{-i\omega})} \\
e^{i\omega} &= q, \operatorname{tg} w = t \\
t &= \frac{q - \frac{1}{q}}{i\left(q + \frac{1}{q}\right)} \\
it\left(q + \frac{1}{q}\right) &= q - \frac{1}{q} \\
q(it - 1) + \frac{1}{q}(it + 1) &= 0 \\
q^2 &= -\frac{it + 1}{it - 1} \\
q &= \left(-\frac{it + 1}{it - 1}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{i\omega} \\
\omega &= \frac{1}{i} \left(\operatorname{Ln} \left(\left(-\frac{it + 1}{it - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) \\
t &= \frac{4}{3}i \Rightarrow \\
\omega &= \frac{1}{i} \left(\operatorname{Ln} \left(\left(-\frac{1 - \frac{4}{3}}{-1 - \frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \right) \right) = \\
&= -i \operatorname{Ln} \left[\left(-\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}} \right] = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \left(-\frac{1}{7}\right) = \\
l &= \operatorname{Ln} \left(-\frac{1}{7}\right) = \ln \left(\frac{1}{7}\right) + \pi i + 2\pi k i, k \in \mathbb{Z} \\
&= -\frac{i}{2}(-\ln 7 + \pi i + 2\pi k i) = \frac{\ln 7}{2}i + \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Прошлые попытки:

$$\begin{aligned}
\omega &= \operatorname{Artg} z_0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \omega = z_0 \\
\begin{cases} \omega = u + vi \\ z_0 = \frac{4}{3}i \end{cases} &\Rightarrow \operatorname{tg}(u + vi) = \frac{4}{3}i \\
\frac{\sin(u) \cos(vi) + \sin(vi) \cos(u)}{\cos(u) \cos(vi) - \sin(u) \sin(vi)} &= \frac{\operatorname{tg} u + \operatorname{th} vi}{1 - \operatorname{tg} u \operatorname{th} vi} = \frac{4}{3}i \\
\operatorname{tg} u + \operatorname{th} vi &= \frac{4}{3} \operatorname{tg} u \operatorname{th} v + \frac{4}{3}i \\
\begin{cases} \operatorname{tg} u = \frac{4}{3} \operatorname{tg} u \operatorname{th} v \\ \operatorname{th} v = \frac{4}{3} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} u \left(\frac{16}{9} - 1\right) = 0 \\ \operatorname{th} v = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} u = 0 \\ \operatorname{th} v = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ v = \operatorname{arth} \left(\frac{4}{3}\right) \end{cases}
\end{aligned}$$

Задание 6

Условие:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z - 2 + 2i)^n}{3^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Решение:

$$\begin{aligned}
 q &= z - 2 + 2i \\
 &\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|q|^n}{3^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\
 a_n &= \frac{|q|^n}{3^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\
 \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{|q|^{n+1}}{3^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \cdot \frac{3^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{|q|^n} = \frac{|q|}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} \cdot \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n+1}}\right)^n = \frac{|q|}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} \cdot \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^n = \\
 &= \frac{|q|}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{(n^2 + 2n) \cdot \frac{1}{n+2}} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{|q|}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} \cdot e^{\frac{1}{n+2}} = \frac{|q|}{3} \Rightarrow |q| < 3 - \text{область абсолютной сходимости}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |q| &= 3 : \\
 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\
 b_n &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow \text{не сходится даже условно}$$

$$\begin{aligned}
 3^2 &= 9 \\
 2^2 + 2^2 &= 8 < 9 \\
 3^2 + 0 &= 9 \\
 3^2 + 1^2 &> 9
 \end{aligned}$$

Задание 7

Условие:

$$\oint_{|z|=8} \frac{\sin z}{z^4(z+4i)} dz$$

Решение:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4(z + 4i)}$$

Особые точки:

$$z = 0 - \text{полюс } n = 3$$

$$z = -4i - \text{полюс } n = 1$$

$$\oint_L f(z) dz = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z=\infty} f$$

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f :$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{1}{z + 4i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4i)^n}{z^{n+1}}$$

$$f = \frac{1}{z^4} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4i)^n}{z^{n+1}} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f = -z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^4} \cdot \frac{(-4i)^m}{z^{m+1}} =$$

$$2n+1-4-(m+1) = -1 \Rightarrow 2n-3-m = 0 \Rightarrow m = 2n-3 \Rightarrow \min(n) = 2$$

$$= -z \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^4} \cdot \frac{(-4i)^{2n-3}}{z^{2n-2}} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+5)!} \cdot (-4i)^{2n+1} =$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} -4i \cdot \cancel{(-1)^n} \cancel{(-1)^{2n}} \cancel{i^{2n}} \cancel{(-1)^n} \cdot \frac{4^{2n}}{(2n+5)!} = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{2n+1}}{(2n+5)!} =$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \operatorname{sh} 4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{2n+1}}{(2n+1)!} = 4 + \frac{4^3}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sh} 4 - 4 - \frac{32}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{2n+5}}{(2n+5)!} = 4^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{2n+1}}{(2n+5)!}$$

$$= \frac{i}{4^4} \left(\operatorname{sh} 4 - 4 - \frac{32}{3} \right) = i \left(\frac{\operatorname{sh} 4}{256} - \frac{11}{64 \cdot 3} \right)$$

$$\oint_L f(z) dz = -2\pi i i \left(\frac{\operatorname{sh} 4}{256} - \frac{11}{64 \cdot 3} \right) = 2\pi \left(\frac{\operatorname{sh} 4}{256} - \frac{11}{64 \cdot 3} \right)$$

Прошлые попытки:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res} f &= \frac{1}{6} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\sin z}{z + 4i} \right)''' \\
a' &= \cos z \\
a'b &= z \cos z + 4i \cos z \\
b' &= 1 \\
ab' &= \sin z \\
a'b - ab' &= z \cos z + 4i \cos z - \sin z \\
&\left(\frac{z \cos z + 4i \cos z - \sin z}{z^2 + 8iz - 16} \right)'' \\
a' &= \cos z - z \sin z - 4i \sin z - \cos z = -z \sin z - 4i \sin z \\
a'b &= -z^3 \sin z - 12iz^2 \sin z + 48z \sin z + 16 \sin z \\
b' &= 2z + 8i \\
ab' &= 2z^2 \cos z + 16iz \cos z - 32 \cos z - 2z \sin z - 8i \sin z \\
a'b - ab' &= -z^3 \sin z - 12iz^2 \sin z - 2z^2 \cos z + 50z \sin z - 16iz \cos z + (16 + 8i) \sin z + 32 \cos z \\
&\left(\frac{-z^3 \sin z - 12iz^2 \sin z - 2z^2 \cos z + 50z \sin z - 16iz \cos z + (16 + 8i) \sin z + 32 \cos z}{z^4 + 16iz^3 - 96z^2 - 256iz + 256} \right) \\
a' &= \cancel{-3z^2 \sin z} - \cancel{z^3 \cos z} - \cancel{24iz \sin z} - \cancel{12iz^2 \cos z} - \cancel{4z \cos z} + \cancel{2z^2 \cos z} + \cancel{50 \sin z} + \cancel{50z \cos z} \\
&\quad - \cancel{16i \cos z} + \cancel{16iz \sin z} + \cancel{(16 + 8i) \cos z} - \cancel{32 \sin z} = \\
&\quad (0)z^3 \sin z + (-1)z^3 \cos z + (-3)z^2 \sin z + (-12i + 2)z^2 \cos z + \\
&\quad (-24i + 16i)z \sin z + (-4 + 50)z \cos z + (50 - 32) \sin z + (-16i + 16 + 8i) \cos z = \\
&\quad \cancel{-z^3 \cos z} - \cancel{3z^2 \sin z} + \cancel{(-12i + 2)z^2 \cos z} + (-24i + 16i)z \sin z + 46z \cos z + 18 \sin z + (16 - 8i) \cos z \\
a'b &= \\
&\quad (-1)z^7 \cos z + \quad \quad \quad (0)z^7 \sin z + \\
&\quad (-16i - 12i + 2)z^6 \cos z + \quad \quad \quad (-3)z^6 \sin z + \\
&\quad (+96 - 192i^2 + 32i + 46)z^5 \cos z + \quad \quad \quad (-48i - 24i + 16)z^5 \sin z + \\
&\quad (+256i + 1152i - 192 + 736i_1 6 - 8i)z^4 \cos z + \quad \quad \quad (288 - 384i^2 + 256i + 18)z^4 \sin z + \\
&\quad (-256 + 3072i^2 - 512i - 4416 + 256i - 128i^2)z^3 \cos z + \quad \quad \quad (768i + 2304i - 1536 + 288i)z^3 \sin z + \\
&\quad (-3072i + 512 - 11776i - 1536 + 768i)z^2 \cos z + \quad \quad \quad (-768 + 6144i^2 - 4096i - 1728)z^2 \sin z + \\
&\quad (11776 - 4096i + 2048i^2)z \cos z + \quad \quad \quad (-6144i + 4096 - 4608i)z \sin z + \\
&\quad (4096 - 2048i) \cos z + \quad \quad \quad (4608) \sin z = \\
&\quad = -z^7 \cos z + \quad \quad \quad 0 + \\
&\quad (2 - 28i)z^6 \cos z + \quad \quad \quad -3z^6 \sin z + \\
&\quad (334 + 32i)z^5 \cos z + \quad \quad \quad (16 - 72i)z^5 \sin z + \\
&\quad (-176 + 2136i)z^4 \cos z + \quad \quad \quad (690 + 256i)z^4 \sin z + \\
&\quad (-7616 - 256i)z^3 \cos z + \quad \quad \quad (-1536 + 3360i)z^3 \sin z + \\
&\quad (-1024 - 14080i)z^2 \cos z + \quad \quad \quad (-8640 - 4096i)z^2 \sin z + \\
&\quad (9728 - 4096)z \cos z + \quad \quad \quad (4096 - 10752)z \sin z + \\
&\quad (4096 - 2048) \cos z + \quad \quad \quad 4608 \sin z
\end{aligned}$$

.....

Задание 8

Условие:

$$\int_C \begin{cases} t \in [0, \pi] \\ x = \pi - t \\ y = t \end{cases} \cos \bar{z} dz$$

Решение:

$$\begin{aligned}
\int_{C: \begin{cases} t \in [0, \pi] \\ x = \pi - t \\ y = t \end{cases}} \cos \bar{z} dz &= \int_0^\pi \cos(\pi - t - ti)(-1 + i) dt = \\
& \quad z = \pi - t + it \\
& \quad \bar{z} = \pi - t - ti \\
& \quad dz = (-1 + i) dt \\
& \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \\
&= - \int_0^\pi \cos((1 + i)t) \frac{-1 + i}{i + 1} d((1 + i)t) = - \frac{-1 + i}{i + 1} (\sin((1 + i)\pi) - 0) = \frac{(1 - i)(i - 1)}{2} (-i \operatorname{sh} \pi) = \\
& \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \\
& \quad \sin(i\alpha) = i \operatorname{sh} \alpha \\
& \quad = \operatorname{sh} \pi
\end{aligned}$$

Задание 9

Условие:

$$\int_{C: \text{ первая часть эллипса } |z-3-6i|+|z-3+2i|=10} (\bar{z} - 3 + 2i) dz$$

Решение:

$$\begin{aligned}
&\text{Фокусы эллипса: } z_1 = 3 + 6i, z_2 = 3 - 2i \\
&c = \frac{|z_1 - z_2|}{2} = 4 \\
&a = 7 - 6 + 4 = 5, b = \sqrt{a^2 - c^2} = 3 \\
&\begin{cases} x = 3 + 3 \cos t \\ y = 2 + 5 \sin t \end{cases} \\
&\text{Первая часть} \Rightarrow t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\
&z = 3 + 3 \cos t + i(2 + 5 \sin t) \\
&\bar{z} - 3 + 2i = 3 \cos t - i(5 \sin t) \\
&dz = (-3 \sin t + 5i \cos t) dt \\
&\int_C f(z, \bar{z}) dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos t - 5 \sin ti)(-3 \sin t + 5 \cos ti) dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-9 \cos t \sin t + 25 \sin t \cos t + i(15 \sin^2 t + 15 \cos^2 t)] dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin(2t) d(2t) + \frac{15\pi}{2} i = 8 + \frac{15\pi}{2} i
\end{aligned}$$

Задание 10

Условие:

$$\int_{C: \text{ -верхняя половина окружности } |z-3i|=5} (z\bar{z} + i) dz$$

Решение:

$$\begin{aligned}
C: \begin{cases} x = 5 \cos t & z = 5 \cos t + (3 + 5 \sin t)i \\ y = 3 + 5 \sin t \Rightarrow dz = (-5 \sin t + 5 \cos t i) dt \\ t \in [0, \pi] & z\bar{z} = 25 + 9 + 30 \sin t \end{cases} \\
\int_C (z\bar{z} + i) dz = \int_0^\pi (34 + 30 \sin t + i)(-5 \sin t + 5 \cos t i) dt = \\
= \int_0^\pi [-170 \sin t - 5 \cos t - 150 \sin^2 t + i(170 \cos t - 5 \sin t + 150 \sin t \cos t)] dt = \\
= -340 + 0 - 75\pi + i(0 - 10 + 0) = -75\pi - 340 - 10i \\
\int_0^\pi \sin^2 t dt = \frac{\pi}{2} \\
\int_0^\pi \sin t \cos t dt = 0
\end{aligned}$$

Ответ: $-75\pi - 340 - 10i$

Задание 11

Условие:

$$\int_{\frac{\pi}{3} \rightarrow \ln 5} z \operatorname{sh} z dz$$

Решение:

$$\begin{aligned}
(z \operatorname{ch} z)' &= \operatorname{ch} z + z \operatorname{sh} z \\
(z \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z)' &= \operatorname{ch} z + z \operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = z \operatorname{sh} z \\
\int_C z \operatorname{sh} z dz &= z \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z \Big|_{\frac{i\pi}{3}}^{\ln 5} = \ln 5 \cdot \frac{e^{\ln 5} + e^{-\ln 5}}{2} - \frac{e^{\ln 5} - e^{-\ln 5}}{2} - \frac{i\pi}{3} \operatorname{ch} \left(\frac{i\pi}{3} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{i\pi}{3} \right) = \\
&= \ln 5 \cdot \frac{1}{2} \left(5 + \frac{1}{5} \right) - \frac{1}{2} \left(5 - \frac{1}{5} \right) - \frac{i\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\
&= \frac{\ln 5}{2} \left(\frac{26}{5} \right) - \frac{12}{5} + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \right)
\end{aligned}$$