

## **Модуль 1, задача 1.**

Решить линейное уравнение второго порядка с частными производными

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + \\ + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y),$$

удовлетворяющее заданным условиям.

### **Схема действий:**

- определить тип уравнения;
- составить характеристическое уравнение, найти общие интегралы,
- сделать замену переменных, преобразовать производные и привести уравнение к каноническому виду;
- найти решение полученного канонического уравнения, удовлетворяющее заданным условиям;
- сделать проверку.

### **Литература:**

А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, Уравнения математической физики, гл.1, §1.

- 1)  $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} = 0, \quad u|_{y=0} = 3x^2, \quad u_y|_{y=0} = x;$
- 2)  $u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - \sin x u_y = 0, \quad u|_{x=0} = y^2, \quad u_x|_{x=0} = 1;$
- 3)  $u_{xx} - 2xu_{xy} + x^2u_{yy} - u_y = 0, \quad u|_{x=0} = y^2, \quad u_x|_{x=0} = y;$
- 4)  $u_{xx} - 2xu_{xy} + x^2u_{yy} - u_x + (x - 1)u_y = 0, \quad u|_{x=0} = y, \quad u_x|_{x=0} = y^2;$
- 5)  $y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} + u_x = 0, \quad u|_{y=0} = x^3, \quad u_y|_{y=0} = -x;$
- 6)  $y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} + (y + 1)u_x + u_y = 0, \quad u|_{y=0} = -x, \quad u_y|_{y=0} = \sin x;$
- 7)  $y^2u_{xx} + 2yu_{xy} + u_{yy} + (1 - y)u_x - u_y = 0, \quad u|_{y=0} = x^2, \quad u_y|_{y=0} = x;$
- 8)  $u_{xx} + 2x^2u_{xy} + x^4u_{yy} + 2xu_y = 0, \quad u|_{x=0} = y, \quad u_x|_{x=0} = y^2;$
- 9)  $u_{xx} + 2x^2u_{xy} + x^4u_{yy} + u_x + (x^2 + 2x)u_y = 0, \quad u|_{x=0} = y^2, \quad u_x|_{x=0} = y;$
- 10)  $u_{xx} + 2x^2u_{xy} + x^4u_{yy} - u_x + (2x - x^2)u_y = 0, \quad u|_{x=0} = \sin y, \quad u_x|_{x=0} = y;$
- 11)  $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_x - u_y = 0, \quad u|_{x=0} = y, \quad u_x|_{x=0} = 0;$
- 12)  $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_x - u_y = 0, \quad u|_{x=0} = y^2/6, \quad u_x|_{x=0} = y;$
- 13)  $u_{xx} + 2 \sin x u_{xy} + \sin^2 x u_{yy} + \cos x u_y = 0, \quad u|_{x=0} = y^2, \quad u_x|_{x=0} = y^3;$
- 14)  $u_{xx} + 2 \sin x u_{xy} + \sin^2 x u_{yy} + u_x + (\cos x + \sin x)u_y = 0, \quad u|_{x=0} = y, \quad u_x|_{x=0} = y^2;$
- 15)  $u_{xx} + 2 \sin x u_{xy} + \sin^2 x u_{yy} - u_x + (\cos x - \sin x)u_y = 0, \quad u|_{x=0} = y^2, \quad u_x|_{x=0} = y;$
- 16)  $u_{xx} - 2 \cos x u_{xy} - (3 + \sin^2 x)x + u_{yy} + \sin x u_y = 0, \quad u|_{x=0} = y, \quad u_x|_{x=0} = y^2;$
- 17)  $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} + u_x + (1 - \cos x - \sin x)u_y = 0, \quad u|_{x=0} = y, \quad u_x|_{x=0} = 0;$
- 18)  $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} + u_x - (\sin x - \cos x - 1)u_y = 0, \quad u|_{x=0} = 3y, \quad u_x|_{x=0} = 5;$
- 19)  $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - 2u_x - (2 \sin x + 2 - \cos x)u_y = 0, \quad u|_{x=0} = \frac{y^2}{2}, \quad u_x|_{x=0} = 1;$
- 20)  $y^2u_{xx} - 2yu_{xy} + u_{yy} - \frac{1}{y}u_y = 0, \quad u|_{y=1} = x, \quad u_y|_{y=1} = x^2;$
- 21)  $y^2u_{xx} - 2yu_{xy} + u_{yy} + u_x - \frac{1}{y}u_y = 0, \quad u|_{y=1} = x^2, \quad u_y|_{y=1} = x;$

$$22) \ y^2 u_{xx} - 2y u_{xy} + u_{yy} - u_x = 0, \quad u|_{y=1} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2, \quad u_y|_{y=1} = 0;$$

$$23) \ -x u_{xx} + 4x^3 u_{yy} + (1 - 4x^2) u_x + 8x^3 u_y = 0, \quad u|_{x=1} = y^2, \quad u_x|_{x=1} = 3;$$

$$24) \ -x u_{xx} + 4x^3 u_{yy} + (1 + x^2) u_x + 2x^3 u_y = 0, \quad u|_{x=1} = y^2, \quad u_x|_{x=1} = 0;$$

$$25) \ -x u_{xx} + 9x^5 u_{yy} + 2(1 + x^3) u_x + 6x^5 u_y = 0, \quad u|_{x=1} = 2y, \quad u_x|_{x=1} = 0;$$

$$26) \ -x u_{xx} + 9x^5 u_{yy} + 2(1 - 3x^3) u_x + 18x^5 u_y = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u_x|_{x=1} = y;$$

$$27) \ y^4 u_{xx} + 2y^2 u_{xy} + u_{yy} - \frac{2}{y} u_y = 0, \quad u|_{y=0} = \frac{x^3}{3}, \quad u_y|_{y=0} = 2;$$

$$28) \ 4y^2 u_{xx} + 2(1 - y^2) u_{xy} - u_{yy} - \frac{4y}{1+y^2} u_x + \frac{2y}{1+y^2} u_y = 0, \quad u|_{y=1} = x, \quad u_y|_{y=1} = 0;$$