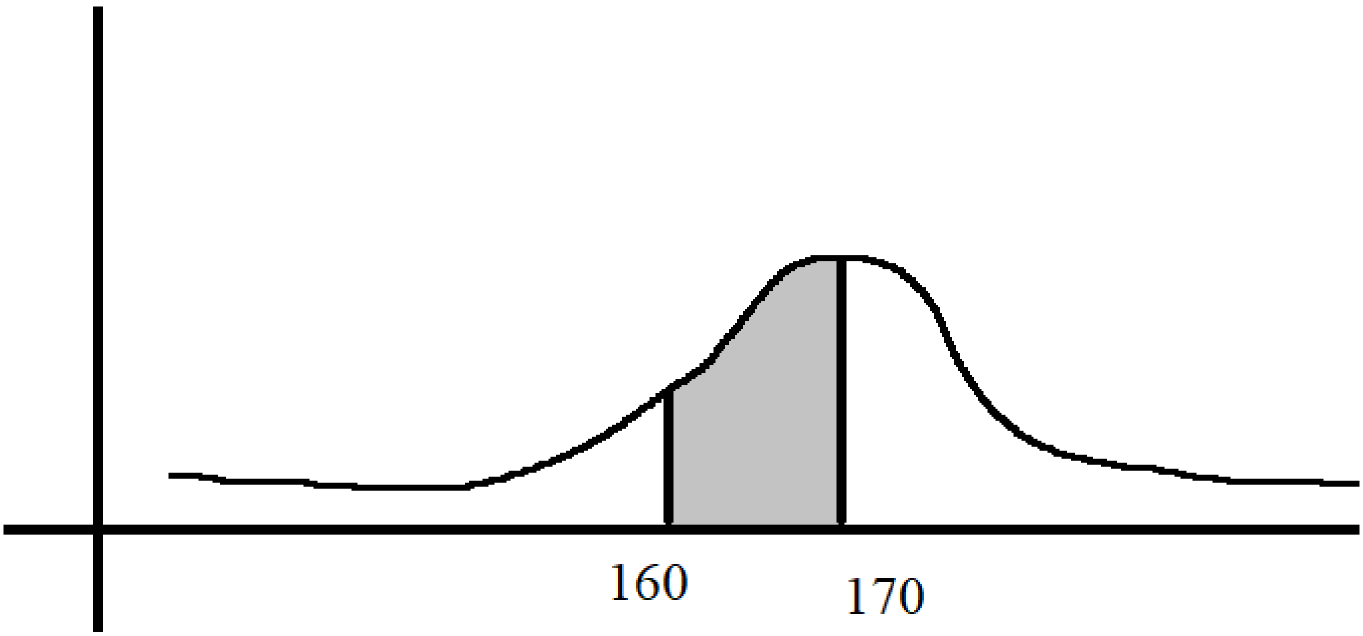
Кирилл Михайлович 89060399998

13/02/2025

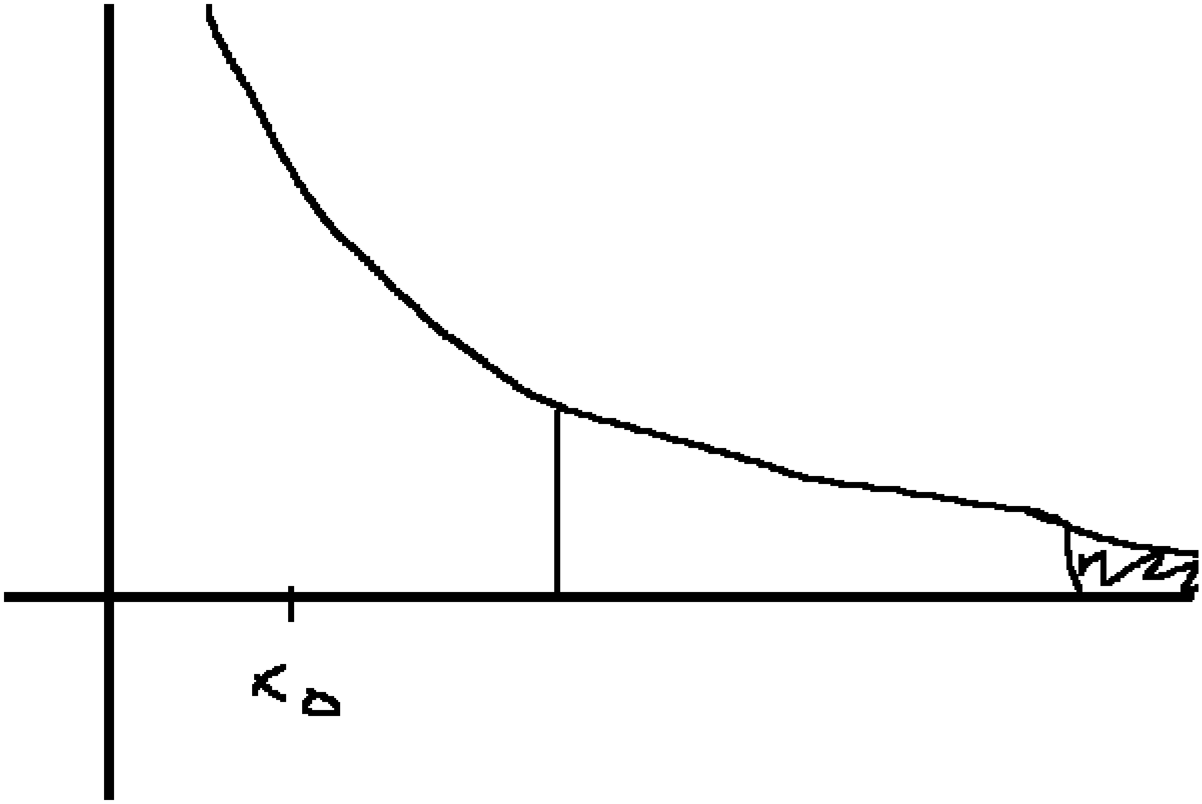
Дискретная случайная величина:
Эксперимент, различные значения
Грань кубика

x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Непрерывная:
Рост человека:



Вероятность - это площадь. Наапример, $P(160 < \xi < 170)$
Вероятность принять конкретное значение 0.
Доход населения (закон Парето):



лстм?
эконофизика
эконометрика (ранхигс?)
Задачи по комбинаторике в матанализе

1. Правило суммы
   Сколько существует способов поставить белопольного слона на шахматную доску так, чтобы он держал по боем больше 10 полей

7	**0**	**7**	**0**	**7**	**0**	**7**	**0**
0	9	0	9	0	9	0	7
7	0	11	0	11	0	9	0
0	9	0	13	0	11	0	7
7	0	11	0	13	0	9	0
0	9	0	11	0	11	0	7
7	0	9	0	9	0	9	0
0	7	0	7	0	7	0	7

8
Кружки: математический, английский, спортивный

М	**150**
А	80
С	110
МА	40
МС	70
АС	60
МАС	21
0	14

$\#(M \cup A \cup C \cup n_0) = 14 + 150 + 80 + 110 - 40 - 70 - 60 + 21 = 354 - 170 + 21 = 184 + 21 = 205$

Правило произведения
Сколько 4значных чётных чисел можно составить из 7 цифр, если цифры могут повторяться
6*7*7*4=24*49=24*(50-1)=1200-24=1176
0/[2/4/6]

$$\begin{array}{cc} 0 - 1 & [2,4,6] - 3 \\ 6 * 5 * 4 & 5 * 5 * 4 \end{array}$$

3. Перестановки
   $P_n = n!$
   Сколькими способами n книг на полку, чтобы m книг стояли рядом

$$(n-m+1)!m!$$

4. Перестановки с повторениями

$$A\ -\ \text{множество из } n \text{ элементов, где } k_1, k_2, \ldots, k_m \text{ - элементов каждого типа}$$
$$n! = P(k_1, k_2, \ldots, k_n) \cdot \prod_{i=1}^{n} k_i! \Leftrightarrow P(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} k_i!}$$

   Сколько "слов" можно составить из слова параллелограмм

п	**1**
а	3
р	2
л	3
е	1

п	**1**
о	1
г	1
м	2

$$\frac{14!}{3!3!2!2!}$$

20/02/2025

Размещения
$A = \{a_i\}$
Составим **упорядоченные** наборы из m элементов ($m \leq n$)

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Сочетания - **неупорядоченные**

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

Выпишем все упорядоченные наборы по 2 элемента (A_4^2)

$$a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_2a_1, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_1, a_3a_2, a_3a_4, a_4a_1, a_4a_2, a_4a_3$$

12

$$A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$$

14 юношей, 15 девушек, 20 билетов. Сколько вариантов распределить билеты так, чтобы юноши и девушки чередовались?

$$\text{2 случая: В начале юноша / в начале девушка}$$
$$\text{1 случай: В начале юноша}$$
$$A_{14}^{10} \cdot A_{15}^{10}$$
$$\text{2 случай аналогичен}$$
$$n = 2 \cdot A_{14}^{10} \cdot A_{15}^{10}$$

6значные числа, делящиеся на 5, чтобы ни одна цифра не повторялась.
В конце или есть 0, или его нет.
Есть 0: $A_9^5 = \frac{9!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 15120$
Если в конце не 0, то это 5.

$$8 \cdot A_8^4 = 8 \cdot \frac{8!}{4!} = 13440$$

$$n = 13440 + 15120 = 28560$$

Размещения с повторениями

$$\{a_i\}_1^n$$

Составим упорядоченное множество из m элементов, где элементы могут повторяться

$$\bar{A}_n^m = n^m$$

Сколько "слов" 3хсимвольных можно составить из тире и точки? - 2^3
Сочетания:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$$

Выпишем сочетания

$$a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_2a_3, a_2a_4, a_3a_4$$

6

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

4 белых, 3 красных
а) число способов вытащить 2 одинаковых шара

$$C_4^2 + C_3^2 = 6 + 3 = 9$$

$$C_n^1 = n$$

б) число способов вытащить 2 шара разного цвета
Гипергеометрическая схема
1б 1к

$$C_4^1 \cdot C_3^1 = 4 \cdot 3 = 12$$

Сочетания с повторениями:
Сколько способов существует набрать 10 пирожных 3 видов: наполеон, медовик, птичье молоко

$$\underbrace{\cdots}_{н}|\underbrace{\cdots\cdot}_{м}|\underbrace{\cdots}_{п}$$

Число способов поставить палки вместо точек. C_{12}^2
Могла быть другая задача: сколько способов поставить палки между точками C_9^2

$$\overline{C_n^m} = C_{m+n-1}^{n-1}$$

Классическая модель

$$(\Omega, \mathcal{A}, P)$$
$$\Omega - \text{множество элементарных исходов}$$
$$\mathcal{A} \text{ - алгебра событий}$$
$$P \text{ - вероятность (мера)}$$

Подбрасываем игральный кубик

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$\mathcal{A} : A \in \mathcal{A} \implies \overline{A} \in \mathcal{A}$$
$$B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}, A \cap B \in \mathcal{A}$$
$$\Omega, \varnothing \in \mathcal{A}$$

$2^{\mathcal{A}}$ - является алгеброй

$$A = \{\text{чётное число очков}\}$$
$$B = \{\text{нечётное число очков}\}$$
$$\mathcal{A} = \{A, B, \varnothing, \Omega\}$$

$$P \geq 0$$
$$0 \leq P(A) \leq 1$$
$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Классическая модель

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

В урне 10 красных, 7 синих и 6 чёрных шаров. Каковы вероятность события A= "выбраны 1 красный, 2 синих, 3 чёрных", если равновероятно выбираются 6 шаров.

$$A = \{1\text{к, } 2\text{с, } 3\text{ч}\}$$
$$\#\Omega = C_{23}^{6}$$
$$\#A = C_{10}^{1} \cdot C_{7}^{2} \cdot C_{6}^{3}$$
$$P(A) = \frac{C_{10}^{1} \cdot C_{7}^{2} \cdot C_{6}^{3}}{C_{23}^{6}}$$

Сколько должно быть студентов в группе, чтобы с веротностью большей $\frac{1}{2}$ хотя бы у двух совпадёт день рождения.

r - число студентов

A - хотя бы 2 родились в 1 день

Хотя бы $\rightarrow$ разумно перейти к обратному

$\overline{A}$ - все в разные дни

$$\#\Omega = 365^r$$
$$\overline{A} = A_{365}^r$$
$$P(\overline{A}) = \frac{A_{365}^r}{365^r}$$
$$P(A) = 1 - \frac{A_{365}^r}{365^r} = 1 - \frac{365!}{(365-r)!365^r} > \frac{1}{2}$$
$$P(A(23)) \approx 0.507$$

27/03/2025

Дискретный случайный вектор

$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ - случайный вектор

3 шара случайным образом распределяются по 3 корзинам.

ξ - число шаров в первой корзине

η - число шаров во второй корзине

$\eta \backslash \xi$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	0
2	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	0
3	$\frac{1}{27}$	0	0	0

$P(\xi = 0, \eta = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$
$P(\xi = 1, \eta = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot C_3^1 = \frac{3}{27}$
$P(\xi = 1, \eta = 1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 = \frac{6}{27}$

Найдём распределение компонент:

ξ :

x_i	**0**	**1**	**2**	**3**
P_i	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

P_i - сумма значений в i+1 столбце

$$M\xi = 1$$
$$M\xi^2 = \frac{45}{27}$$
$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{18}{27}$$

$\eta:$

y_j	**0**	**1**	**2**	**3**
P_j	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

P_j - сумма значений в j+1 строке

Ковариация:
$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi\eta) - M\xi M\eta$
$\mathrm{cov}(\xi, \xi) = D_\xi$
$M(\xi\eta) = \sum_i \sum_j x_i y_j P(\xi = x_i, \eta = y_j)$
$= \frac{6}{27} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{3}{27} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{3}{27} \cdot 2 \cdot 1 = \frac{18}{27}$
$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \frac{18}{27} - 1 \cdot 1 = -\frac{1}{3}$
$\rho_{\xi\eta} = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D_\xi}\sqrt{D_\eta}} = -\frac{\frac{1}{3}}{\frac{18}{27}} = -\frac{1}{2}$

Свойства числовых характеристик

1. $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$
2. $M(\alpha\xi) = \alpha M(\xi)$
3. $M(\alpha) = \alpha$
4. $D_\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) = M(\xi^2) - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 = M(\xi^2) - (M\xi)^2$
5. $D\alpha = M(\alpha^2) - (M\alpha)^2 = 0$
6. $D(\alpha\xi) = M(\alpha^2\xi^2) - (M\alpha\xi)^2 = \alpha^2 D\xi$
7. $D(\xi + \eta) = M(\xi + \eta)^2 - (M\xi + M\eta)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2 + M\eta^2 - (M\eta)^2 + 2M(\xi\eta) - 2M\xi M\eta = D\xi$
   Если случайные величины независимы, то $\rho_{\xi\eta} = 0 = \mathrm{cov}(\xi, \eta)$. Обратное утверждение неверно.
   Условие независимости случайных величин.
   $$\forall i, j: \quad P(\xi = xi, \eta = yj) = P(\xi = xi)P(\eta = yj)$$
8. $\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \mathrm{cov}(\eta, \xi)$
9. $\mathrm{cov}(\xi + \eta, \zeta) = \mathrm{cov}(\xi, \zeta) + \mathrm{cov}(\eta, \zeta)$
10. $\mathrm{cov}(\alpha\xi, \eta) = \alpha\mathrm{cov}(\xi, \eta)$
11. $\mathrm{cov}(\xi, \xi) = D\xi \geq 0$
    cov - это скалярное произведение в пространстве случайных величин.

$\rho_{\xi\eta} = \frac{\text{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\text{cov}(\xi,\eta)}\sqrt{\text{cov}(\xi,\eta)}}$ - "косинус" угла между случайными величинами

$-1 \leq \rho_{\xi,\eta} \leq 1$

12) $\text{cov}(\alpha + \xi, \eta) = \text{cov}(\xi, \eta) + M(\alpha\eta) - (M\alpha)M(\eta) = \text{cov}(\xi, \eta)$

13) $D(\xi + \alpha) = D\xi$

Пример:

Зависимость между оценками по кратным интегралам и термехом:

$$\begin{gathered} \xi - \text{кратные интегралы} \\ \eta - \text{термех} \\ 3,3 - 7 \\ 3,4 - 1 \\ 3,5 - 0 \\ 4,3 - 27 \\ 4,4 - 9 \\ 4,5 - 0 \\ 5,3 - 19 \\ 5,4 - 24 \\ 5,5 - 13 \\ n = 100 \end{gathered}$$

$\xi \backslash \eta$	**3**	**4**	**5**
3	0.07	0.27	0.19
4	0.01	0.09	0.24
5	0	0	0.13

ξ:

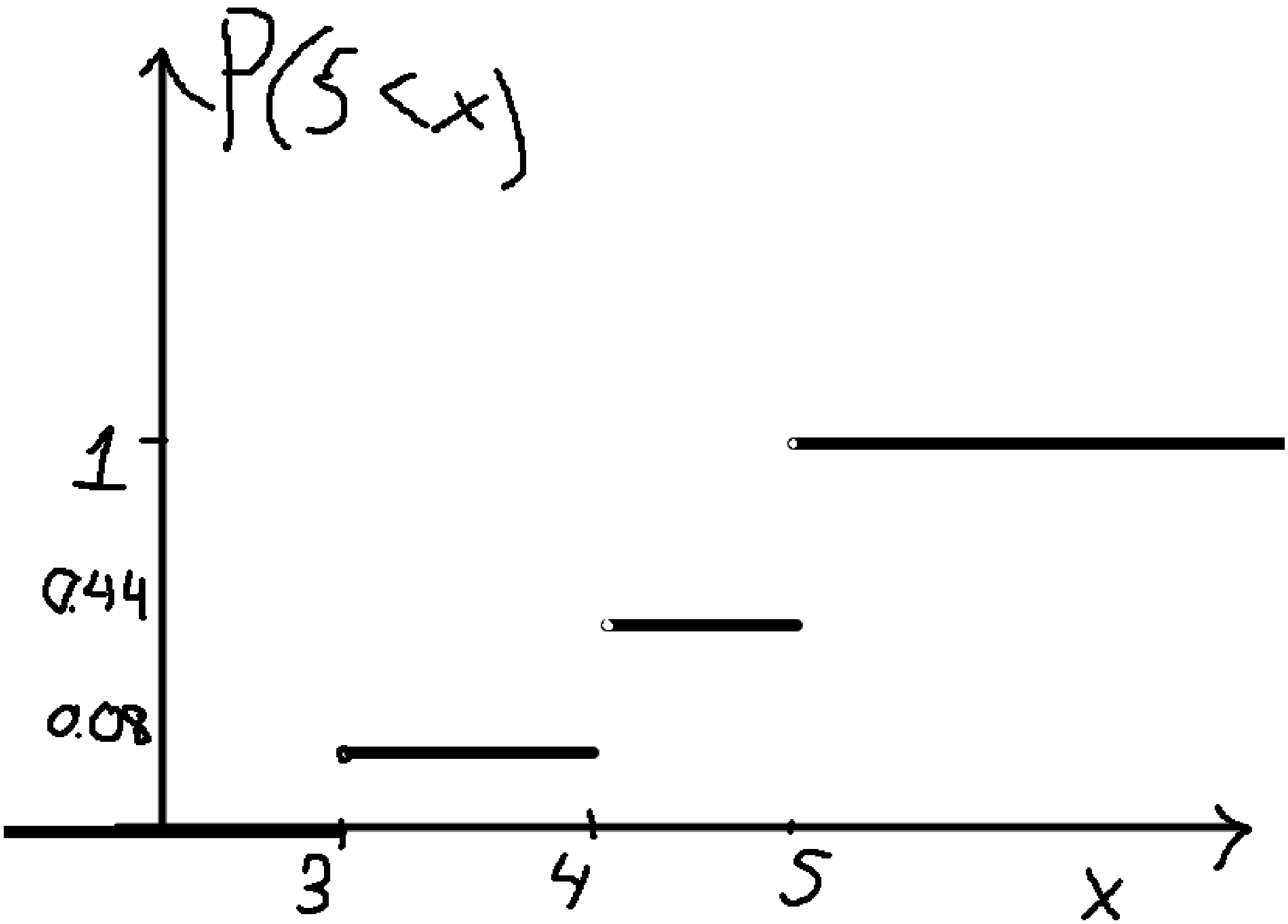
x_i	**3**	**4**	**5**
P_i	0.08	0.36	0.56

η:

y_j	**3**	**4**	**5**
P_j	0.53	0.34	0.13

$$M\xi = 4.48$$
$$D\xi = 0.41$$
$$M\eta = 3.6$$
$$D\eta = 0.5$$
$$\text{cov}(\xi, \eta) = 0.2$$
$$\rho_{\xi\eta} = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} = 0.45$$

$F_\xi(x) = P(\xi < x)$



$F(x+0) - F(x) = P(\xi = x)$
$P(\alpha \le \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3 \\ 0.08, & 3 < x \le 4 \\ 0.44, & 4 < x \le 5 \\ 1, & 5 < x \end{cases}$$

10 апреля РК

#конец