

# CÁLCULO DIFERENCIAL

Tecnología en Desarrollo de Software  
Facultad de Ingeniería

# Sesión 2.

# OPERACIONES CON FUNCIONES

Docente: María Isabel García

# Operaciones con funciones

Dos funciones se pueden combinar mediante las cuatro conocidas operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división.

## Combinaciones aritméticas

Si  $f$  y  $g$  son dos funciones, entonces la **suma**  $f + g$ , la **diferencia**  $f - g$ , el **producto**  $fg$  y el **cociente**  $f/g$  se definen como sigue:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{siempre que } g(x) \neq 0.$$

# Operaciones con funciones

## **Dominio de una combinación de funciones**

Si el dominio de  $f(x)$  es el conjunto  $X_1$  y el dominio de  $g(x)$  es el conjunto  $X_2$ , entonces:

- El dominio de  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) - g(x)$  y  $f(x)g(x)$  es la intersección  $X_1 \cap X_2$ .
- El dominio de  $f(x)/g(x)$  es el conjunto  $\{x|x \in X_1 \cap X_2, g(x) \neq 0\}$ .

# Operaciones con funciones

## Ejemplo 1:

Dadas las funciones  $f(x) = x^2 + 4x$  y  $g(x) = x^2 - 9$ . Sabemos que  $\text{Dom } f = (-\infty, \infty)$  y  $\text{Dom } g = (-\infty, \infty)$ , entonces:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 + 4x) + (x^2 - 9) = 2x^2 + 4x - 9$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 + 4x) - (x^2 - 9) = 4x + 9$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = (x^2 + 4x)(x^2 - 9) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 36x$$

Además:

$$\begin{aligned}\text{Dom } (f + g) &= \text{Dom } (f - g) = \text{Dom } (fg) = (-\infty, \infty) \cap (-\infty, \infty) \\ &= (-\infty, \infty)\end{aligned}$$

## Operaciones con funciones

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 9}$$

$$\text{Dom}(f/g) = \{x | x \in X_1 \cap X_2, g(x) \neq 0\}$$

$$\text{Dom}(f/g) = \{x | x \in (-\infty, \infty) \cap (-\infty, \infty), g(x) \neq 0\}$$

$$x^2 - 9 = 0 \quad \text{si} \quad x = 3 \text{ y } x = -3$$

$$\text{Por lo tanto, el Dom}(f/g) = (-\infty, -3) \cap (-3, 3) \cup (3, \infty)$$

$$= \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

# Operaciones con funciones

## Ejemplo 2:

Dadas las funciones  $f(x) = \sqrt{1-x}$  y  $g(x) = \sqrt{x+2}$ . Sabemos que  $\text{Dom } f = (-\infty, 1]$  y  $\text{Dom } g = [-2, \infty)$ , entonces:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+2}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x+2}$$

$$\begin{aligned}(fg)(x) &= f(x)g(x) = (\sqrt{1-x})(\sqrt{x+2}) = \sqrt{(1-x)(x+2)} \\ &= \sqrt{2-x-x^2}\end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned}\text{Dom } (f + g) &= \text{Dom } (f - g) = \text{Dom } (fg) = (-\infty, 1] \cap [-2, \infty) \\ &= [-2, 1]\end{aligned}$$

# Composición de funciones

## Composición de funciones

Si  $f$  y  $g$  son dos funciones, la **composición** de  $f$  y  $g$ , representada por  $f \circ g$ , es la función definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

La **composición** de  $g$  y  $f$ , representada por  $g \circ f$ , es la función definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$



## Composición de funciones

Ejemplo: si  $f(x) = x^2 + 3x - 1$  y  $g(x) = 2x^2 + 1$  hallar

a)  $(f \circ g)(x)$

b)  $(g \circ f)(x)$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = (2x^2 + 1)^2 + 3(2x^2 + 1) - 1 \\&= 4x^4 + 4x^2 + 1 + 6x^2 + 3 - 1 \\&= 4x^4 + 10x^2 + 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = 2(x^2 + 3x - 1)^2 + 1 \\&= 2(x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1) + 1 \\&= 2x^4 + 12x^3 + 14x^2 - 12x + 3\end{aligned}$$

$$f \circ g \neq g \circ f$$

## Composición de funciones

Ejercicios: dadas las funciones  $f(x) = e^x + 3$ ,  $g(x) = \frac{2x^2+1}{1-x}$ ,  $h(x) = \sqrt{2x+7}$ , y  $m(x) = \cos x$  hallar

- a)  $(f \circ g)(x)$
- b)  $(g \circ f)(x)$
- c)  $(f \circ h)(x)$
- d)  $(m \circ f)(x)$
- e)  $(g \circ m \circ h)(x)$
- ...

# Composición de funciones

Ejercicio: dada la siguiente función

$$f(x) = \frac{\ln(\cos(3x - 1))}{5x}$$

Es evidente que se trata de una función compuesta. ¿Podría identificar cuántas y cuáles son dichas funciones?



INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA  
**COLEGIO MAYOR DEL CAUCA**



**Autoevaluación**  
**ES EVOLUCIÓN**

Somos Institución de Educación Superior Pública sujeta a inspección y vigilancia por MinEducación

Claustro de la Encarnación, Carrera 5 # 5 - 40 / Edificio Bicentenario, Carrera 7 # 2-34 /  
Casa Obando, Calle 3 # 6-52 / Sede Zona Norte, Barrio La Ximena, Carrera 6 # 46N-44

Pbx: (+57-2) 8333390 - (+57-2) 8333208 - (+57-2) 8333216

[www.unimayor.edu.co](http://www.unimayor.edu.co)