INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
COLEGIO MAYOR DEL CAUCA

CÁLCULO DIFERENCIAL

Tecnología en Desarrollo de Software

Facultad de Ingeniería

Sesión 4. INTRODUCCIÓN AL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Docente: María Isabel García

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
COLEGIO MAYOR DEL CAUCA

Introducción gráfica a los límites de funciones

Dada la siguiente función

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$$

Observe que esta función no está definida para $x = 1$, esto es, $f(1)$ no existe. Sin embargo la función está definida para cualquier otro número real.

Se investigarán los valores de la función cuando x se aproxima a 1, pero sin llegar a ser 1.

Introducción gráfica a los límites de funciones

x	$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
0	3
0,25	3,5
0,5	4
0,75	4,5
0,9	4,8
0,99	4,98
0,999	4,998
0,9999	4,9998
0,99999	4,99998

x	$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
2	7
1,75	6,5
1,5	6
1,25	5,5
1,1	5,2
1,01	5,02
1,001	5,002
1,0001	5,0002
1,00001	5,00002

Observe que en las dos tablas conforme x se aproxima cada vez más a 1, $f(x)$ se acerca más y más a 5.

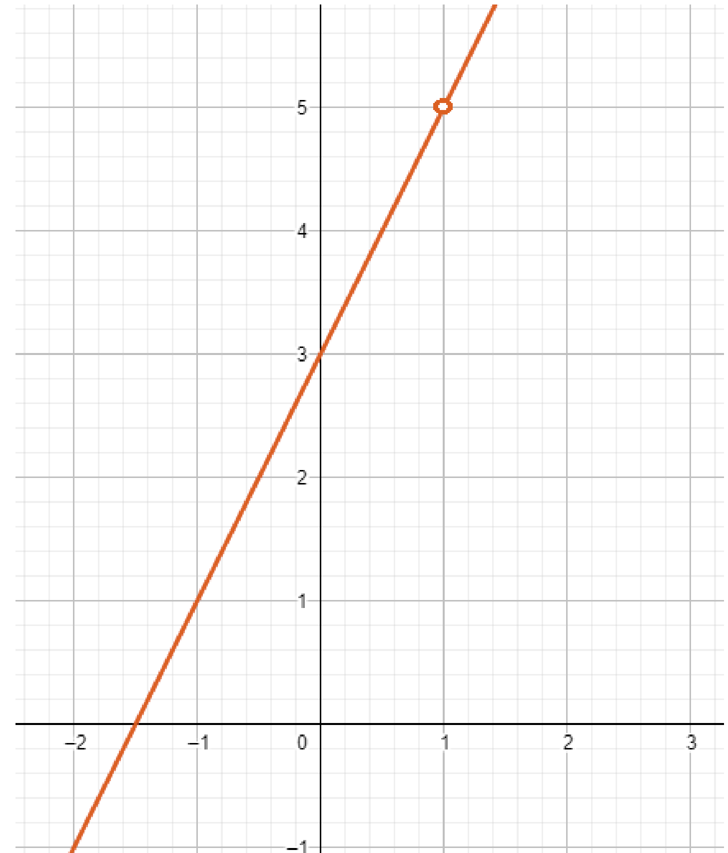
Introducción gráfica a los límites de funciones

Observe que si se factoriza el numerador

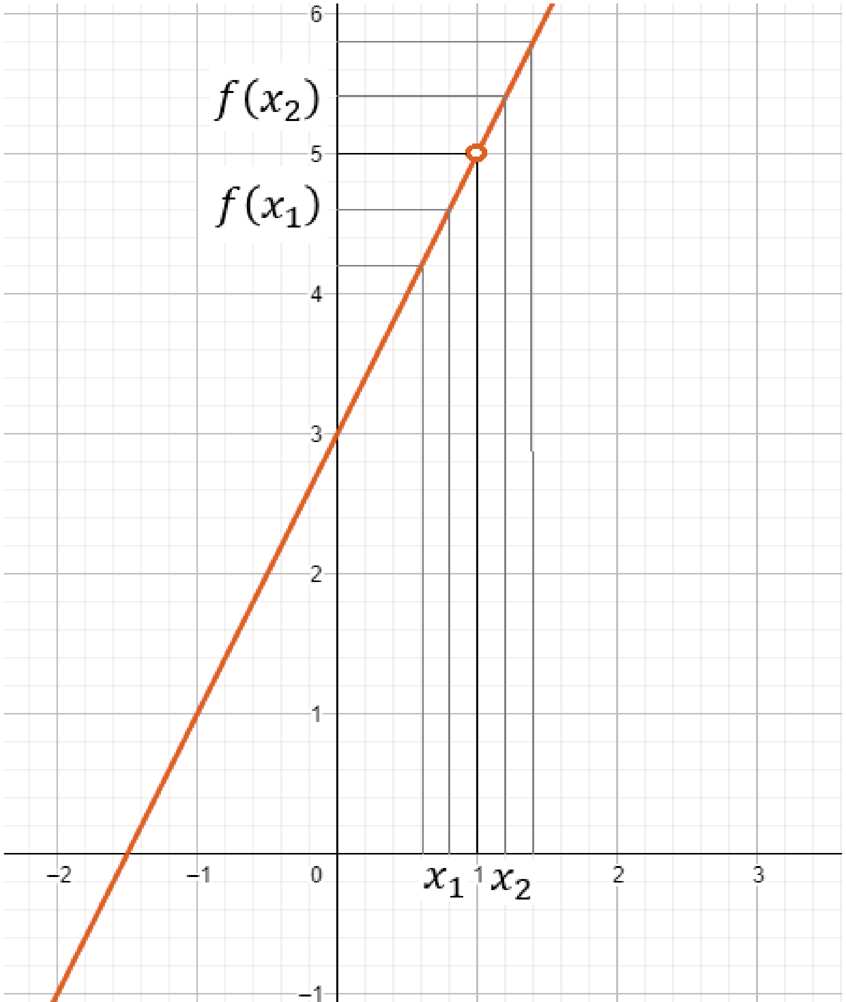
$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$$

$$f(x) = 2x + 3$$

Su gráfica es una recta que no está definida para $x = 1$.



Introducción gráfica a los límites de funciones



x	$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
0	3
0,25	3,5
0,5	4
0,75	4,5
0,9	4,8
0,99	4,98
0,999	4,998
0,9999	4,9998
0,99999	4,99998

x	$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
2	7
1,75	6,5
1,5	6
1,25	5,5
1,1	5,2
1,01	5,02
1,001	5,002
1,0001	5,0002
1,00001	5,00002

Definición intuitiva de límite

Sea f una función definida en cada número de algún intervalo que contiene a a, excepto posiblemente al número a mismo. El límite de $f(x)$ conforme x se aproxima a a es L, lo que se escribe como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Donde la notación $x \to a$ se lee "x tiende a a".

Si al aproximar x lo suficientemente cerca de un numero a (sin ser a) tanto del lado izquierdo como del derecho, $f(x)$ se aproxima a un numero L, entonces el limite cuando x tiende al numero a es L.

https://www.fisicalab.com/apartado/calculo-limite-funcion-punto

Límite lateral por la izquierda

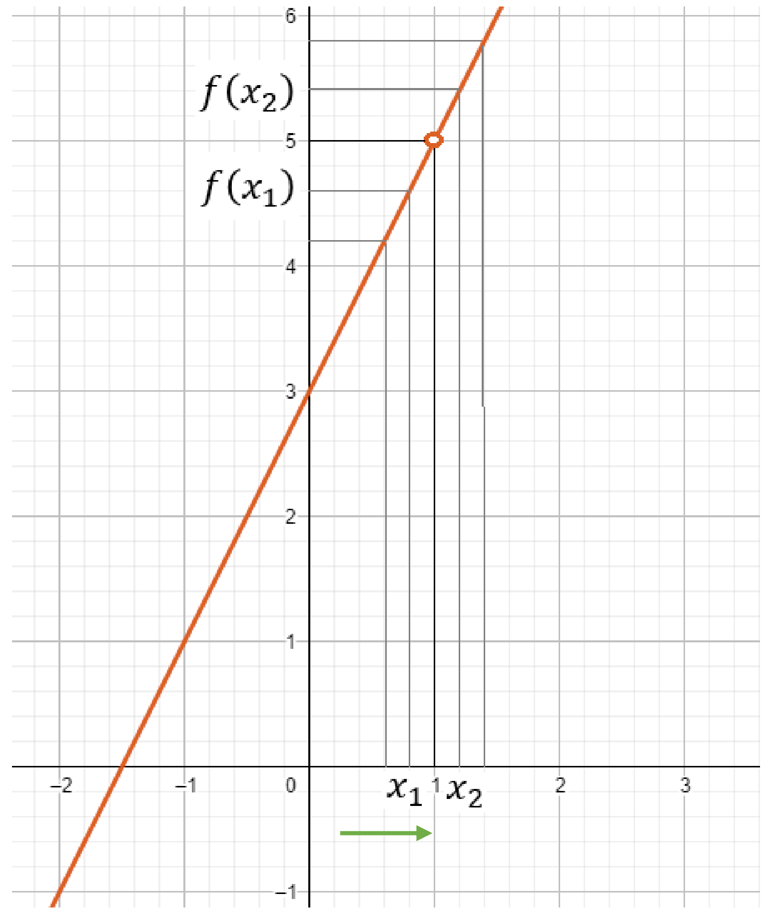
Para decir que: "tiende a a por la izquierda" se utiliza $x \to a^{-}$

$$\lim_{x \to a^{-}} f(x) = L$$

Para el ejemplo anterior:

$$\lim_{x \to 1^{-}} f(x) = 5$$

x	$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
0	3
0,25	3,5
0,5	4
0,75	4,5
0,9	4,8
0,99	4,98
0,999	4,998
0,9999	4,9998
0,99999	4,99998



Límite lateral por la derecha

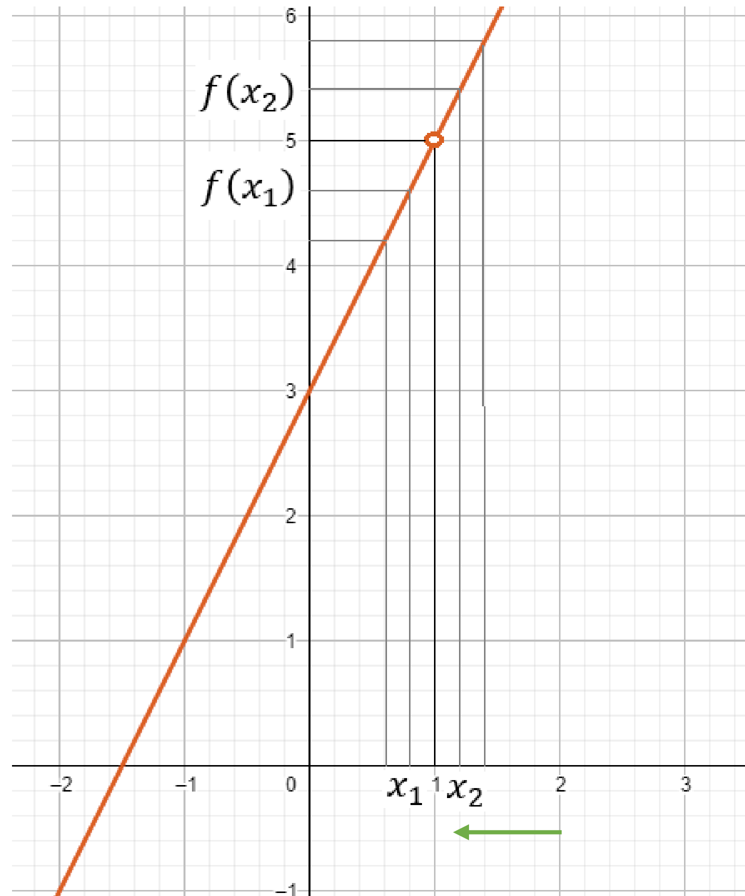
Para decir que: "tiende a a por la derecha" se utiliza $x \to a^+$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Para el ejemplo anterior:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 5$$

x	$f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
2	7
1,75	6,5
1,5	6
1,25	5,5
1,1	5,2
1,01	5,02
1,001	5,002
1,0001	5,0002
1,00001	5,00002



Límites laterales

Si los limites laterales existen y tienden a un mismo número L entonces el limite cuando tiende al número a es L.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L \text{ entonces } \lim_{x \to a} f(x) = L$$

Para que el limite exista no se necesita que la función este definida para el numero a, basta que este definida para valores muy cercanos.

Por ejemplo:

La función $f(x) = \frac{2x^2+x-3}{x-1}$ no está definida para en $x = 1$, pero $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$

Ejemplo 1:

Sea la función $f(x) = x^2 + 3x - 1$. Analicemos el límite cuando x se aproxima al número -2.

Note que en este caso, la función sí está definida en $x = -2$.

$$f(-2) = (-2)^2 + 3(-2) - 1 \qquad \Rightarrow \qquad f(-2) = -3$$

x	$f(x) = x^2 + 3x - 1$
-3	-1
-2,75	-1,6875
-2,5	-2,25
-2,25	-2,6875
-2,1	-2,89
-2,01	-2,9899
-2,001	-2,998999
-2,0001	-2,99989999
-2,00001	-2,99999

x	$f(x) = x^2 + 3x - 1$
-1	-3
-1,25	-3,1875
-1,5	-3,25
-1,75	-3,1875
-1,9	-3,09
-1,99	-3,0099
-1,999	-3,000999
-1,9999	-3,00009999
-1,99999	-3,00001

Entonces:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = -3$$

También:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2) = -3$$

Prueba gráfica del ejemplo 1

$$f(x) = x^2 + 3x - 1$$

$$f(-2) = -3$$

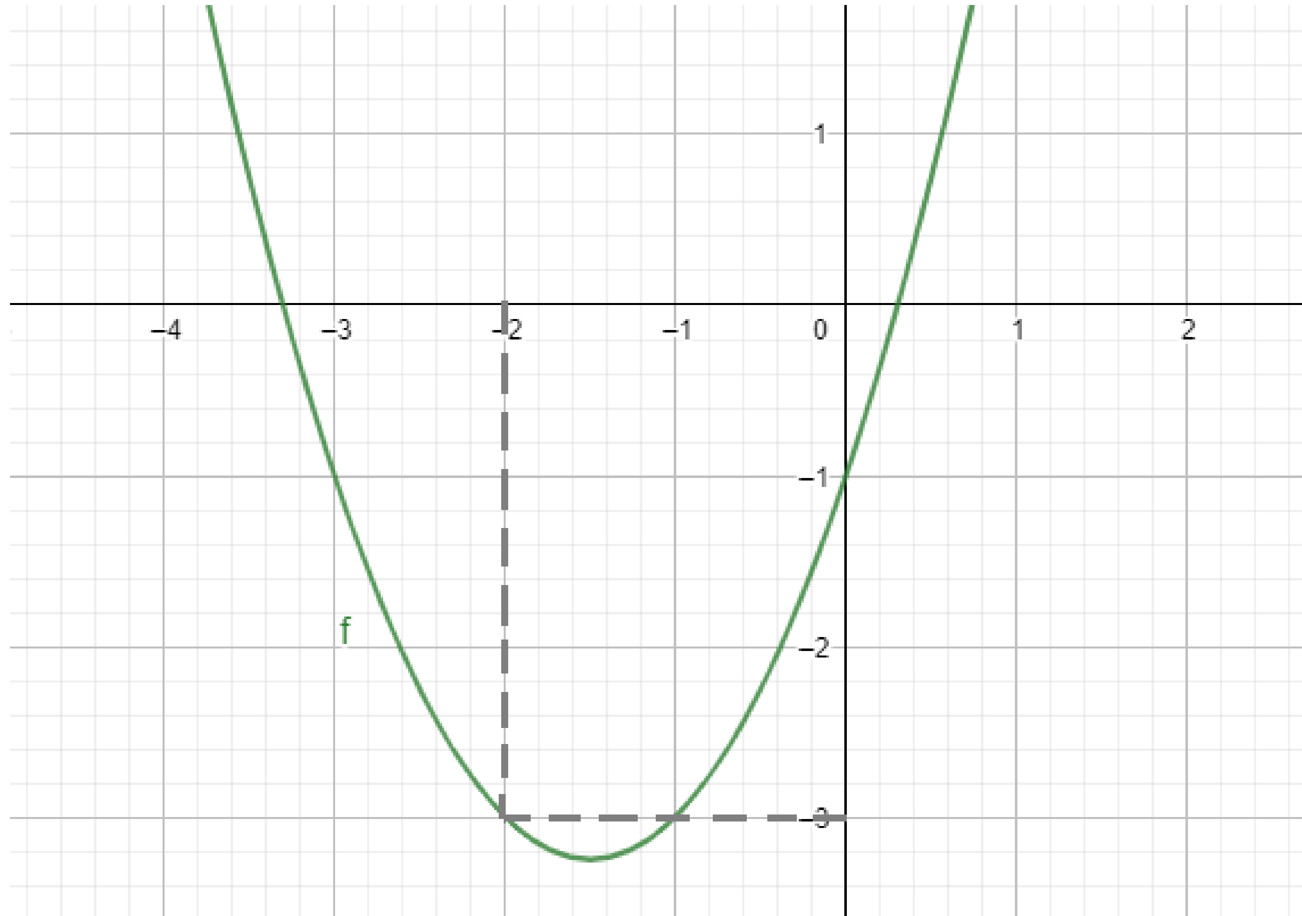
Como:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -3$$

Entonces

$$\lim_{x \to -2} f(x) = -3$$



Ejemplo 2:

Sea la función $g(x) = 4e^{3x} + 1$. Analicemos el límite cuando x se aproxima a cero.

Note que en este caso la función $g(x)$ está definida en cero.

$$g(0) = 4e^{3(0)} + 1 \quad \Rightarrow \quad g(0) = 4(1) + 1 \quad \Rightarrow \quad g(0) = 5$$

x	$g(x) = 4e^{3x} + 1$
-1	1,19914846
-0,75	1,42159719
-0,5	1,89252105
-0,25	2,88946664
-0,1	3,96327315
-0,01	4,88178217
-0,001	4,98801799
-0,0001	4,99880018
-0,00001	4,99988

x	$g(x) = 4e^{3x} + 1$
1	81,3420742
0,75	38,9509173
0,5	18,9267481
0,25	9,46799813
0,1	6,39943474
0,01	5,1218181
0,001	5,01201801
0,0001	5,00120018
0,00001	5,00012

Entonces:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 5$$

También:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$$
$$= 5$$

Prueba gráfica del ejemplo 2

$$g(x) = 4e^{3x} + 1$$

$$g(0) = 5$$

Como:

$$\lim_{x \to 0^-} 4e^{3x} + 1 \ = 5$$

$$\lim_{x \to 0^+} 4e^{3x} + 1 \ = 5$$

Entonces

$$\lim_{x \to 0} 4e^{3x} + 1 \ = 5$$

Ejercicios:

Utilizando una tabla de valores muy cercanos al valor que tiende el límite, calcular:

a) $\lim_{x \to 1} x^2 - 3x + 1$

b) $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}$

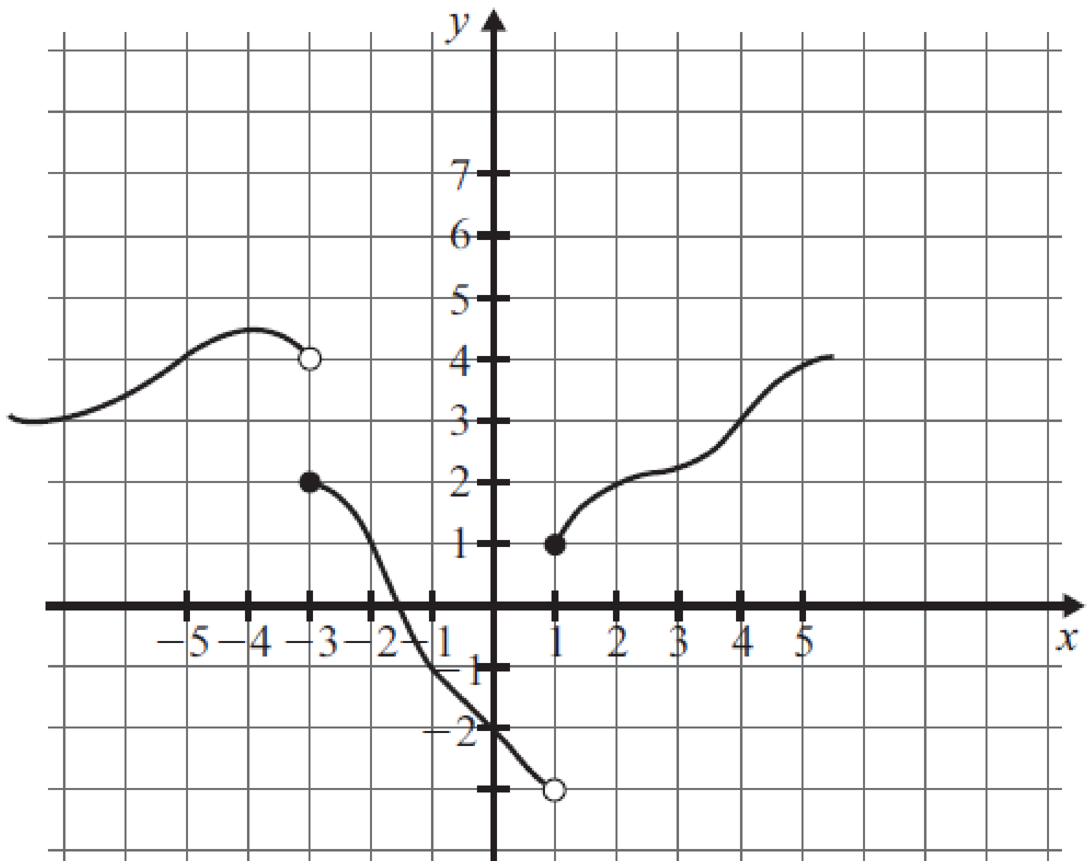
d) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\operatorname{sen} x}$

e) $\lim_{x \to -1} \sqrt{x + 4}$

Límite de funciones: Análisis gráfico

Dada una función $f(x)$ cuya gráfica es la que se muestra a continuación



Determinar:

$$\lim_{x \to -5} f(x)$$

$$\lim_{x \to -3} f(x)$$

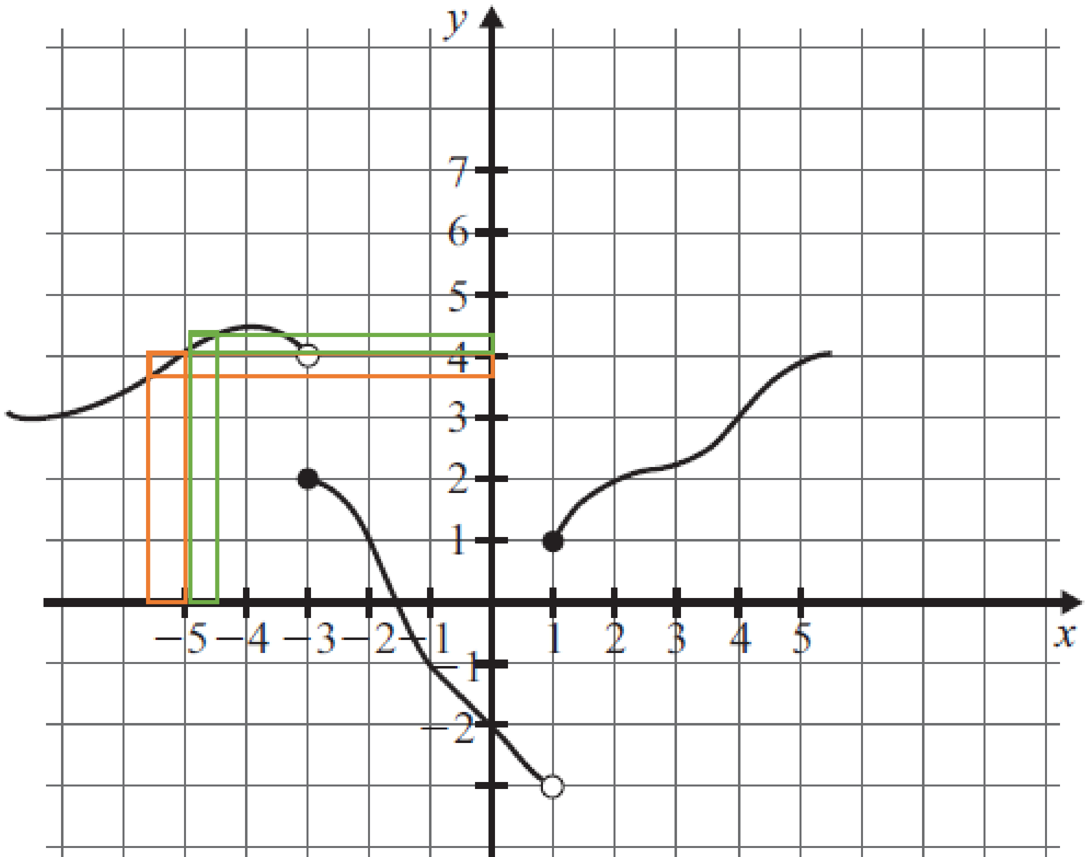
$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

$$\lim_{x \to 4} f(x)$$

Límite de funciones: Análisis gráfico

Para determinar $\lim_{x \to -5} f(x)$, se analizan los límites laterales, esto es:



$$\lim_{x \to -5^-} f(x) = 4$$

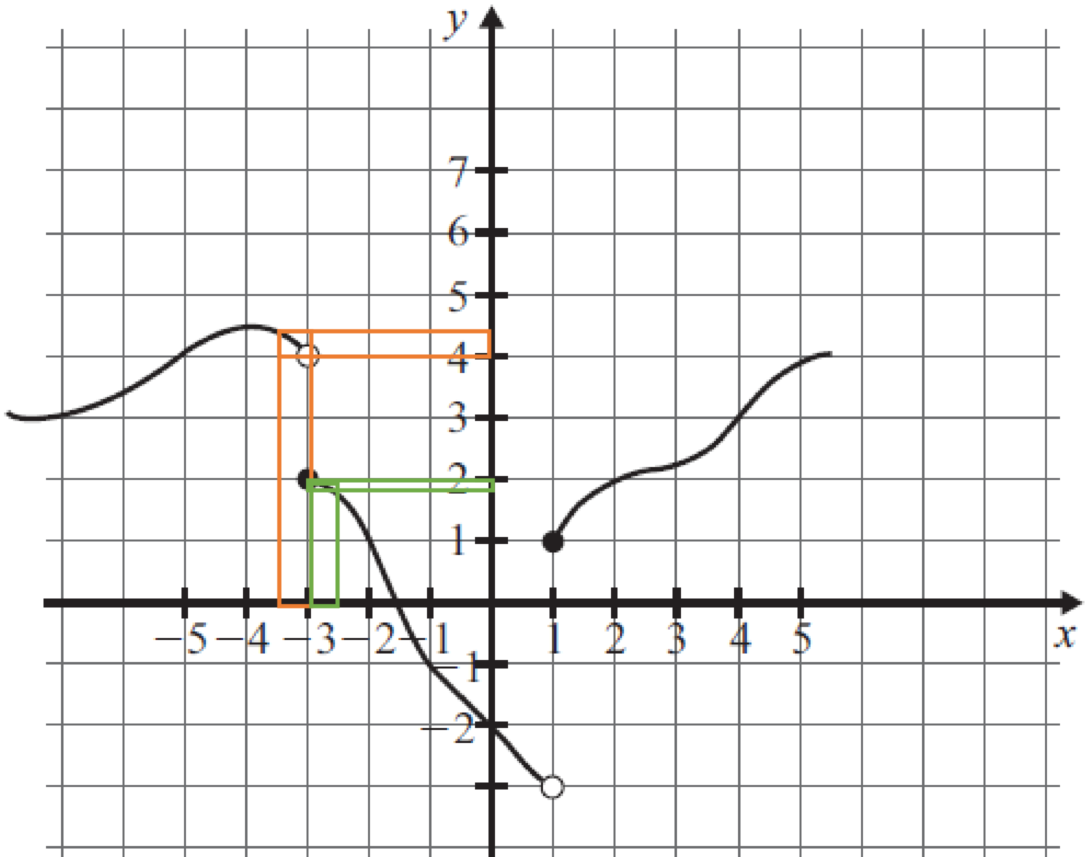
$$\lim_{x \to -5^+} f(x) = 4$$

Como los límites laterales son iguales, entonces

$$\lim_{x \to -5} f(x) = 4$$

Límite de funciones: Análisis gráfico

Para determinar $\lim_{x \to -3} f(x)$, se analizan los límites laterales, esto es:



$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = 4$$

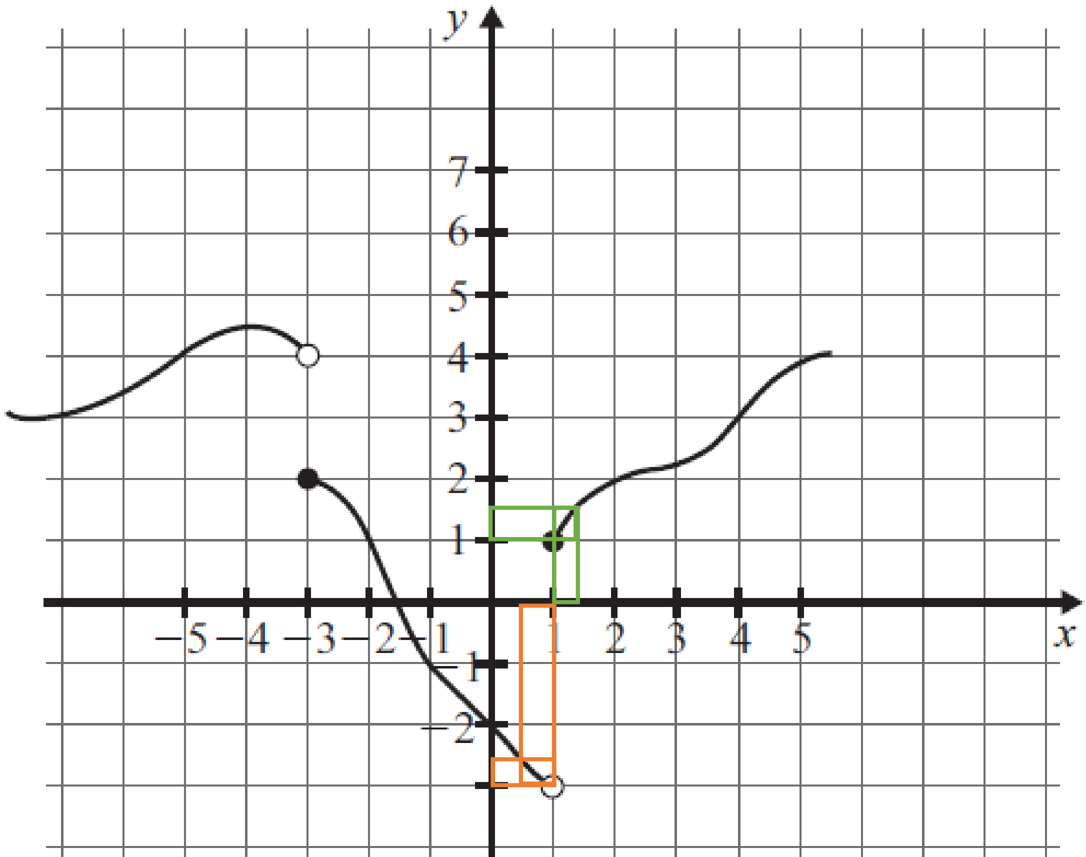
$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = 2$$

Como los límites laterales no son iguales, entonces diremos que el límite no existe.

$$\lim_{x \to -3} f(x) \text{ No existe}$$

Límite de funciones: Análisis gráfico

Para determinar $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, se analizan los límites laterales, esto es:



$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -3$$

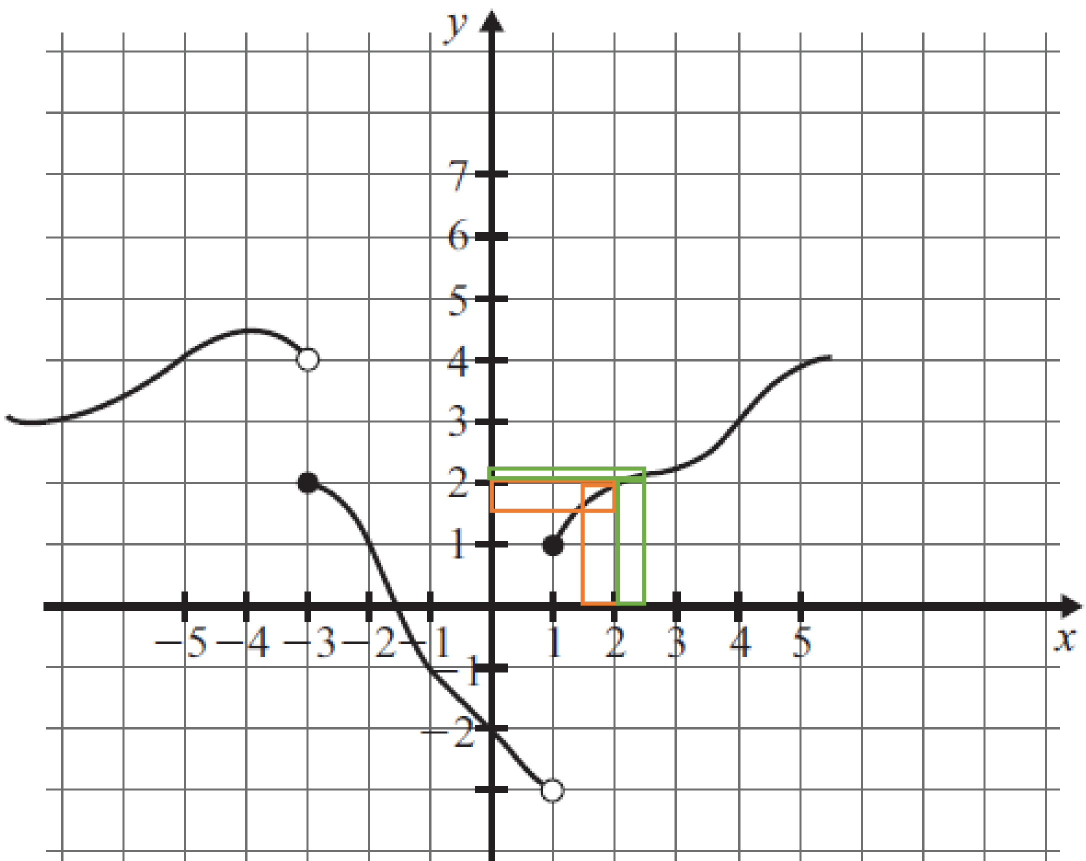
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$$

Como los límites laterales no son iguales, entonces diremos que el límite no existe.

$$\lim_{x \to 1} f(x) \text{ No existe}$$

Límite de funciones: Análisis gráfico

Para determinar $\lim_{x \to 2} f(x)$, se analizan los límites laterales, esto es:



$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$$

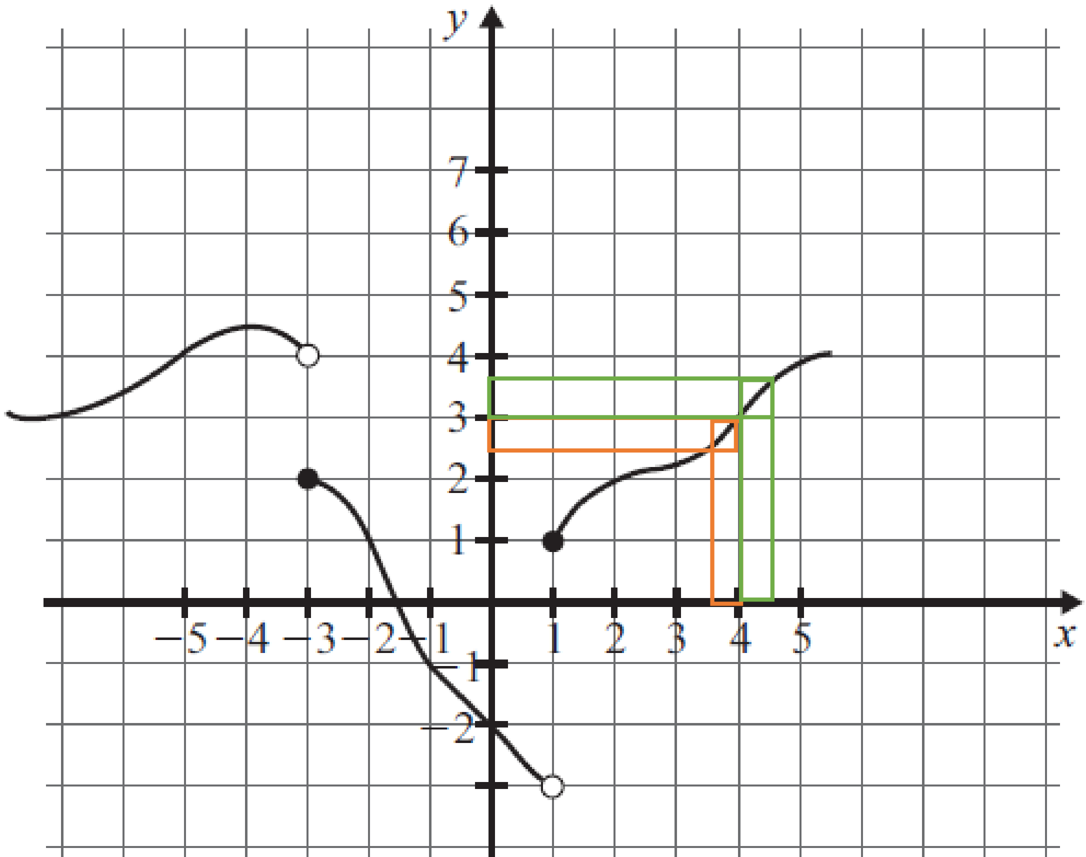
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$$

Como los límites laterales son iguales, entonces

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2$$

Límite de funciones: Análisis gráfico

Para determinar $\lim_{x \to 4} f(x)$, se analizan los límites laterales, esto es:



$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 3$$

Como los límites laterales son iguales, entonces

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 3$$

Teoremas

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones, c es una constante y n un número real, entonces

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$

2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$

3. $\lim\limits_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$

4. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

5. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

6. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ con $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

7. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x) \right]^n$

Ejercicios:

Utilice los teoremas anteriores para calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 5}(3x-7)$

b) $\lim_{x\to 2}(x^2+2x-1)$

c) $\lim_{z\to -2}(z^3+8)$

d) $\lim_{y\to -1}(y^3-2y^2+3y-4)$

e) $\lim_{x\to 3}\frac{4x-5}{5x-1}$

f) $\lim_{t\to 2}\frac{t^2-5}{2t^3+6}$

g) $\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{8x+1}{x+3}}$

h) $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{\frac{x^2-3x+4}{2x^2-x-1}}$

i) $\lim_{x\to 7}\frac{x^2-49}{x-7}$

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
COLEGIO MAYOR DEL CAUCA

Autoevaluación
ES EVOLUCIÓN

Somos Institución de Educación Superior Pública sujeta a inspección y vigilancia por MinEducación

Claustro de la Encarnación, *Carrera 5 # 5 - 40 /* Edificio Bicentenario, *Carrera 7 # 2-34 /*
Casa Obando, *Calle 3 # 6-52 /* Sede Zona Norte, *Barrio La Ximena, Carrera 6 # 46N-44*
Pbx: (+57-2) 8333390 - (+57-2) 8333208 - (+57-2) 8333216
www.unimayor.edu.co