Determinación aproximada de los ceros Aun cuando sea obvio que la gráfica de una función $y = f(x)$ tenga intersecciones con el eje x, no siempre es posible resolver la ecuación $f(x) = 0$. De hecho, es *imposible* resolver exactamente algunas ecuaciones; a veces lo mejor que se puede hacer es **aproximar** los ceros de la función. Una forma de hacerlo es trazar una gráfica muy exacta de f.

En la sección 6.5 veremos otra forma de aproximar los ceros de una función

EJEMPLO 8 Intersecciones con los ejes

Con ayuda de un graficador, la gráfica de la función $f(x) = x^3 - x + 4$ se ve en la **FIGURA 5.1.8**. De $f(0) = 4$, se observa que el punto de intersección con el eje y es $(0, 4)$. Como se ve en la figura, parece que hay una sola intersección con el eje x, cuya abscisa puede ser -1.7 o -1.8. Sin embargo, no hay forma de determinar con exactitud las raíces de la ecuación $x^3 - x + 4 = 0$. Sin embargo, se puede calcular aproximadamente, o *aproximar* la raíz real de esta ecuación con ayuda de la función *find root* de una calculadora graficadora o un programa de álgebra para computadora. De este modo se ve que $x \approx -1.796$, por lo que la abscisa al origen aproximada es $(-1.796, 0)$. Para comprobar, obsérvese que el valor de la función

$$f(-1.796) = (-1.796)^3 - (-1.796) + 4 \approx 0.0028$$

es cercano a cero. ≡

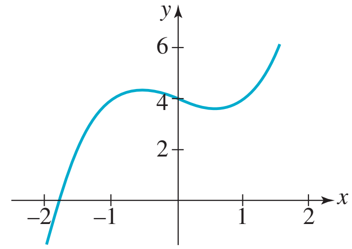

FIGURA 5.1.8 Abscisa al origen aproximada del ejemplo 8

Notas del aula

Al trazar la gráfica de una función nunca debe graficar muchos puntos a mano. Es algo que hacen bien las calculadoras graficadoras o las computadoras. Por otra parte, nunca debe dependerse de una calculadora para obtener una gráfica. Créalo o no, hay profesores que no permiten usar calculadoras graficadoras en los exámenes. En general, no hay objeción al empleo de calculadoras o computadoras como auxiliares para comprobar los problemas de tarea, pero en la clase, los profesores quieren ver el fruto de la mente de sus alumnos, es decir, su capacidad para analizar. Por ello, le recomendamos desarrollar su destreza para trazar gráficas, hasta el punto de poder bosquejar rápidamente, a mano, una función, al tener una familiaridad básica con los tipos de funciones, y graficando un mínimo de puntos bien escogidos. Las transformaciones que se estudian en la próxima sección también ayudan a trazar una gráfica.

5.1 Ejercicios

Las respuestas a los problemas impares seleccionados comienzan en la página RESP-11.

En los problemas 1 a 6, calcule los valores indicados de la función.

1. Si $f(x) = x^2 - 1$; $f(-5)$, $f(-\sqrt{3})$, $f(3)$ y $f(6)$

2. Si $f(x) = -2x^2 + x$; $f(-5)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(2)$ y $f(7)$

3. Si $f(x) = \sqrt{x + 1}$; $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$ y $f(5)$

4. Si $f(x) = \sqrt{2x + 4}$; $f(-\frac{1}{2})$, $f(\frac{1}{2})$, $f(\frac{5}{2})$ y $f(4)$

5. Si $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$; $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ y $f(\sqrt{2})$

6. Si $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 2}$; $f(-\sqrt{2})$, $f(-1)$, $f(0)$ y $f(\frac{1}{2})$

En los problemas 7 y 8 determine

$$f(x),\ f(2a),\ f(a^2),\ f(-5x),\ f(2a + 1) \text{ y } f(x + h)$$

de la función dada f, y simplifique todo lo posible.

7. $f(\quad) = -2(\quad)^2 + 3(\quad)$

8. $f(\quad) = (\quad)^3 - 2(\quad)^2 + 20$

9. ¿Para qué valores de x es $f(x) = 6x^2 - 1$ igual a 23?

10. ¿Para qué valores de x es $f(x) = \sqrt{x - 4}$ igual a 4?

En los problemas 11 a 20, determine el dominio de la función f.

11. $f(x) = \sqrt{4x - 2}$

12. $f(x) = \sqrt{15 - 5x}$

13. $f(x) = \dfrac{10}{\sqrt{1 - x}}$

14. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x - 1}}$

15. $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x(x - 3)}$

16. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 10x + 25}$

18. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 4x - 12}$

19. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$

20. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 1}$

En los problemas 21 a 26, use el método de la tabla de signos para determinar el dominio de la función f.

21. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

22. $f(x) = \sqrt{x(4 - x)}$

23. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$

24. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 10}$

25. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3 - x}{x + 2}}$

26. $f(x) = \sqrt{\dfrac{5 - x}{x}}$

En los problemas 27 a 30, determine si la gráfica que muestra la figura es la de una función.

27.

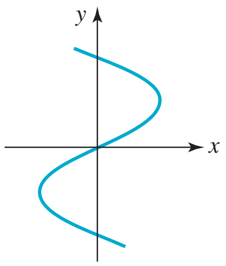

FIGURA 5.1.9 Gráfica del problema 27

28.

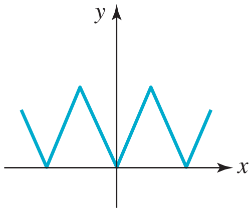

FIGURA 5.1.10 Gráfica del problema 28

29.

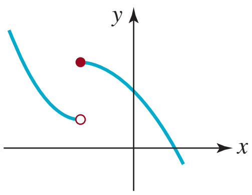

FIGURA 5.1.11 Gráfica del problema 29

30.

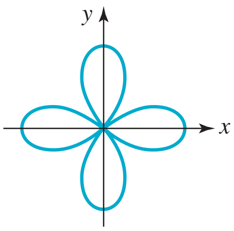

FIGURA 5.1.12 Gráfica del problema 30

En los problemas 31 a 34 use la gráfica de la función f que se ve en la figura para determinar su dominio y su rango.

31.

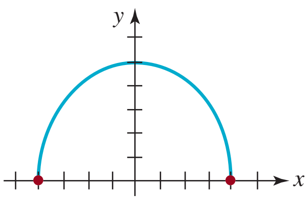

FIGURA 5.1.13 Gráfica del problema 31

32.

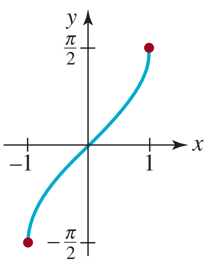

FIGURA 5.1.14 Gráfica del problema 32

33.

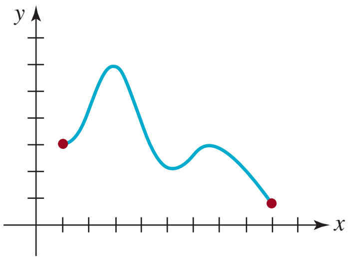

FIGURA 5.1.15 Gráfica del problema 33

34.

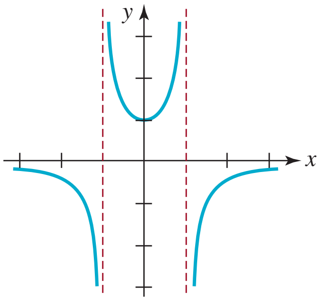

FIGURA 5.1.16 Gráfica del problema 34

En los problemas 35 a 42, determine los ceros de la función dada f.

35. $f(x) = 5x + 6$

36. $f(x) = -2x + 9$

37. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

38. $f(x) = x^2 - 2x - 1$

39. $f(x) = x(3x - 1)(x + 9)$

40. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

41. $f(x) = x^4 - 1$

42. $f(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2}$

En los problemas 43 a 50, calcule las intersecciones con los ejes coordenados, si las hay, de la gráfica de la función indicada f. No trace la gráfica.

43. $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$

44. $f(x) = x^2 - 6x + 5$

45. $f(x) = 4(x - 2)^2 - 1$

46. $f(x) = (2x - 3)(x^2 + 8x + 16)$

47. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 16}$

48. $f(x) = \dfrac{x(x + 1)(x - 6)}{x + 8}$

49. $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$

50. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2x - 3}$

En los problemas 51 y 52, encuentre dos funciones $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ definidas por la ecuación indicada. Determine el dominio de las funciones f_1 y f_2.

51. $x = y^2 - 5$

52. $x^2 - 4y^2 = 16$

En los problemas 53 y 54, use la gráfica de la función f que se ve en la figura para estimar los valores de $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(3)$. Aproxime la intersección con el eje y.

53.

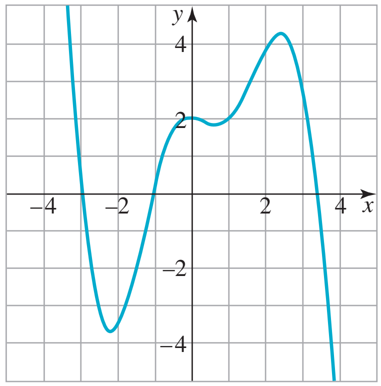

FIGURA 5.1.17 Gráfica del problema 53

54.

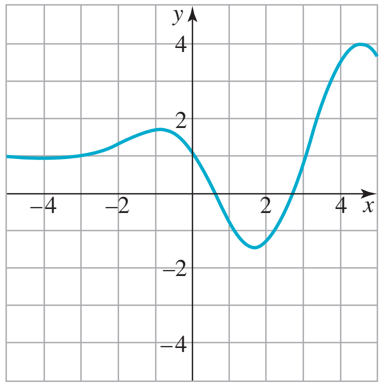

FIGURA 5.1.18 Gráfica del problema 54

En los problemas 55 y 56, use la gráfica de la función f que muestra la figura para estimar los valores de $f(-2)$, $f(-1.5)$, $f(0.5)$, $f(1)$, $f(2)$ y $f(3.2)$. Aproxime las intersecciones con el eje x.

55.

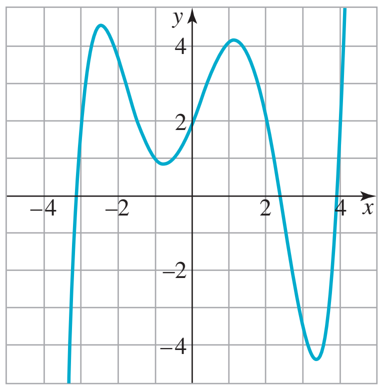

FIGURA 5.1.19 Gráfica del problema 55

56.

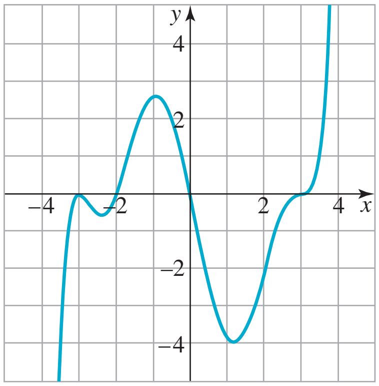

FIGURA 5.1.20 Gráfica del problema 56

57. Función factorial En el estudio de las matemáticas, algunas de las funciones con las que se encontrará tienen como dominio el conjunto de los enteros positivos n. La función factorial $f(n) = n!$ se define como el producto de los primeros n enteros positivos, esto es,

$$f(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

a) Calcule $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$ y $f(7)$.
b) Demuestre que $f(n+1) = f(n) \cdot (n+1)$.
c) Simplifique $f(n+2)/f(n)$.

58. Una función de suma Otra función de un entero positivo n expresa la suma de los primeros n enteros positivos elevados al cuadrado:

$$S(n) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

a) Calcule el valor de la suma $1^2 + 2^2 + \cdots + 99^2 + 100^2$.
b) Calcule n tal que $300 < S(n) < 400$. [*Pista:* use una calculadora].

Para la discusión

59. Deduzca la ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo dominio sea ***a***) $[3, \infty)$, ***b***) $(3, \infty)$.

60. Deduzca la ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo rango sea ***a***) $[3, \infty)$, ***b***) $(3, \infty)$.

61. ¿Cuál es el único punto que puede ser tanto una intersección con el eje x como una con el eje y en la gráfica de la función $y = f(x)$?

62. Considere la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$. Después de factorizar el denominador y cancelar el factor común, escribimos $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$. Explique: ¿está $x = 1$ dentro del dominio de $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$?

5.2 Simetría y transformaciones

Introducción En esta sección describiremos dos ayudas para trazar gráficas de función en forma rápida y exacta. Si usted determina antes que la gráfica de una función tiene alguna *simetría*, entonces puede disminuir el trabajo a la mitad. Además, el trazo de una gráfica de una función aparentemente complicada se acelera si se reconoce que en realidad la gráfica que se pide es una *transformación* de la gráfica de una función más sencilla. Esta última ayuda de graficado se basa en los conocimientos anteriores del lector acerca de las gráficas de algunas funciones básicas.

Funciones potencia Una función que tenga la forma

$$f(x) = x^n$$

donde n representa un número real, se llama **función potencia**. El dominio de una función potencia depende de la potencia n. Por ejemplo, ya se ha visto, en la sección 5.1, que para $n = 2$, $n = \frac{1}{2}$ y $n = -1$, respectivamente, que:

- el dominio de $f(x) = x^2$ es el conjunto R de los números reales, o sea $(-\infty, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ es el conjunto R de los números reales, excepto $x = 0$.