INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
COLEGIO MAYOR DEL CAUCA

CÁLCULO DIFERENCIAL

Tecnología en Desarrollo de Software

Facultad de Ingeniería

Autoevaluación
ES EVOLUCIÓN

Sesión 5. LÍMITES INDETERMINADPS

Docente: María Isabel García

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
COLEGIO MAYOR DEL CAUCA

Límites indeterminados

Por los teoremas anteriormente vistos se tiene que para calcular el límite de una función $f(x)$ cuando $x \to a$ basta con reemplazar el valor de a en la función $f(x)$, esto es

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Siempre y cuando $f(a)$ no implique alguna ideterminación (una division por cero o la raíz par de un número negatio).

Si el límite de una función $f(x)$ cuando $x \to a$ da como resultado $\frac{c}{0}$ (una constante sobre cero) o $\frac{0}{0}$ (cero sobre cero), se dice que es un límite indeterminado.

Límites indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$

1. $$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{2x - 6} = \frac{(3)^2 - 9}{2(3) - 6} = \frac{9 - 9}{6 - 6} = \frac{0}{0}$$

2. $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x - 1}}{x^2 - 2x + 1} = \frac{\sqrt{1 - 1}}{(1)^2 - 2(1) + 1} = \frac{\sqrt{0}}{1 - 2 + 1} = \frac{0}{0}$$

3. $$\lim_{y \to 0} \frac{3y^2 + 5y^4}{2y^2 - 3y^4} = \frac{3(0)^2 + 5(0)^4}{2(0)^2 - 3(0)^4} = \frac{0}{0}$$

4. $$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} = \frac{\sqrt{(2)^2 + 5} - 3}{2 - 2} = \frac{\sqrt{9} - 3}{0} = \frac{0}{0}$$

En este tipo de límites usualmente se puede eliminar la indeterminación factorizando o racionalizando (de ser posible) la función, para después simplificarla y obtener el límite.

Recordar...

Casos de factorización:

a) Factor común	$ax^n + bx^{n-1} = x^{n-1}(ax+b)$
b) Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
c) Trinomio cuadrado perfecto	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
d) Trinomio de la forma	$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$
e) Suma o diferencia de cubos	$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Recordar…

Racionalización: Una expresión de la forma $\frac{c}{a \pm b}$ se racionaliza multiplicando al numerador y al denominador por el conjugado del denominador, esto es:

- Si el denominador es de la forma $a + b$, entonces el conjugado es $a - b$
- Si el denominador es de la forma $a - b$, entonces el conjugado es $a + b$

El producto de binomios conjugados es una diferencia de cuadrados:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Recordar…

Ejemplo 1: Racionalizar la expresión $\frac{3}{\sqrt{5}-2}$

El conjugado de $\sqrt{5}-2$ es $\sqrt{5}+2$. Así, al multiplicar tanto el numerador como el denominador se tiene que

$$\frac{3}{\sqrt{5}-2}\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}\right)=\frac{3(\sqrt{5}+2)}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\frac{3\sqrt{5}+6}{(\sqrt{5})^2-(2)^2}=\frac{3\sqrt{5}+6}{5-4}=3\sqrt{5}+6$$

Ejemplo 2: Racionalizar la expresión $\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$

El conjugado de $\sqrt{x}-\sqrt{5}$ es $\sqrt{x}+\sqrt{5}$. Así, al multiplicar tanto el numerador como el denominador se tiene que

$$\frac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}\right)=\frac{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}=\frac{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{(x-5)(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{x-5}$$

$$=\sqrt{x}+\sqrt{5}$$

Límites indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$

Ejemplo 1: Utilice la factorización o racionalización (según sea el caso) para calcular el siguiente límite:

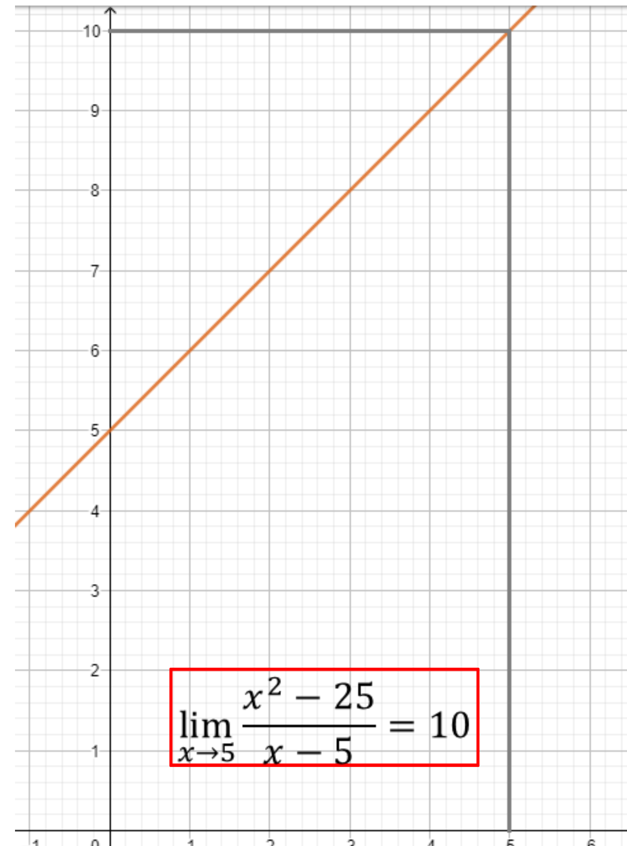
$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5} = \frac{(5)^2-25}{5-5} = \frac{0}{0}$$

Factorizando y simplificando la expresión

$$\frac{x^2-25}{x-5} = \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = x+5$$

Luego se tiene que

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to 5}(x+5) = 5+5 = 10$$



Límites indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$

Ejemplo 2: Utilice la factorización o racionalización (según sea el caso) para calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{4}-2}{4-4} = \frac{0}{0}$$

Racionalizando y simplificando la expresión

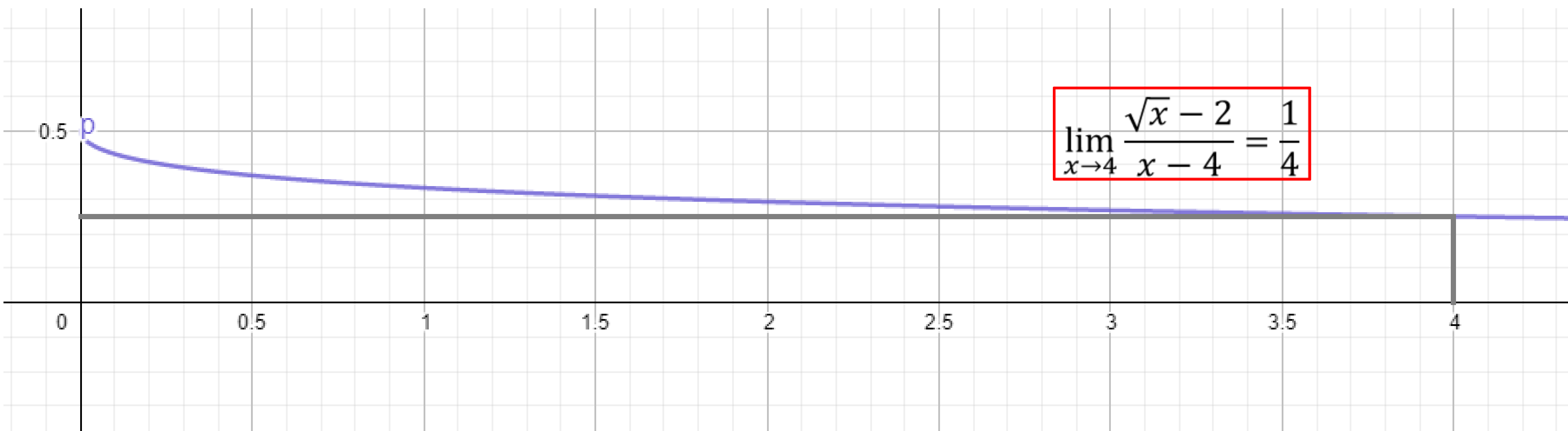
$$\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right) = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{(\sqrt{x})^2-2^2}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

Límites indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$

Luego se tiene que

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$



Ejercicios

Utilice la factorización o racionalización (según sea el caso) para calcular los siguientes límites. (Primero verifique si en efecto son límites indeterminados).

a) $\lim_{x \to 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7}$

b) $\lim_{x \to 3/2} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3}$

c) $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h + 2} - \sqrt{2}}{h}$

d) $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x + 5} - 2}{x + 1}$

e) $\lim_{z \to -5} \frac{z^2 - 25}{x - 5}$

f) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

g) $\lim_{y \to 1} \sqrt{\frac{y^2 - 9}{2y^2 + 7y + 3}}$

Límites indeterminados del tipo $\frac{c}{0}$

Ej: Determinar $\lim_{x \to 0} \frac{3}{x^2}$

x	$f(x) = \frac{3}{x^2}$
-1	3
-0,75	5,333333333
-0,5	12
-0,25	48
-0,1	300
-0,01	30000
-0,001	3000000
-0,0001	300000000
-0,00001	30000000000

x	$f(x) = \frac{3}{x^2}$
1	3
0,75	5,333333333
0,5	12
0,25	48
0,1	300
0,01	30000
0,001	3000000
0,0001	300000000
0,00001	30000000000

Límites indeterminados del tipo $\frac{c}{0}$

Por lo tanto $$\lim_{x \to 0} \frac{3}{x^2} = \infty$$

Se dice que el "límite tiende a infinito"

En este caso, basta con tomar un valor muy cercano a 0 por la izquierda y analizar el signo del resultado. De igual manera, tomar un valor muy cercano a 0 por la derecha y analizar el signo del resultado. Si el resultado es (+) entonces el límite tiende a ∞, pero si el resultado es (-) el límite tiende a $-\infty$.

x	$f(x) = \frac{3}{x^2}$
-1	3
-0,75	5,333333333
-0,5	12
-0,25	48
-0,1	300
-0,01	30000
-0,001	3000000
-0,0001	300000000
-0,00001	30000000000

x	$f(x) = \frac{3}{x^2}$
1	3
0,75	5,333333333
0,5	12
0,25	48
0,1	300
0,01	30000
0,001	3000000
0,0001	300000000
0,00001	30000000000

Límites indeterminados del tipo $\frac{c}{0}$

Si:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \text{ ó } -\infty$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \text{ ó } -\infty$$

Pero si:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ No existe}$$

Estos se conocen como Límites Infinitos.

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
COLEGIO MAYOR DEL CAUCA

Autoevaluación
ES EVOLUCIÓN

Somos Institución de Educación Superior Pública sujeta a inspección y vigilancia por MinEducación

Claustro de la Encarnación, *Carrera 5 # 5 - 40 /* Edificio Bicentenario, *Carrera 7 # 2-34 /*
Casa Obando, *Calle 3 # 6-52 /* Sede Zona Norte, *Barrio La Ximena, Carrera 6 # 46N-44*
Pbx: (+57-2) 8333390 - (+57-2) 8333208 - (+57-2) 8333216
www.unimayor.edu.co