CÁLCULO DIFERENCIAL

Tecnología en Desarrollo de Software

Facultad de Ingeniería

Sesión 2. FUNCIONES ESPECIALES Y OPERACIONES

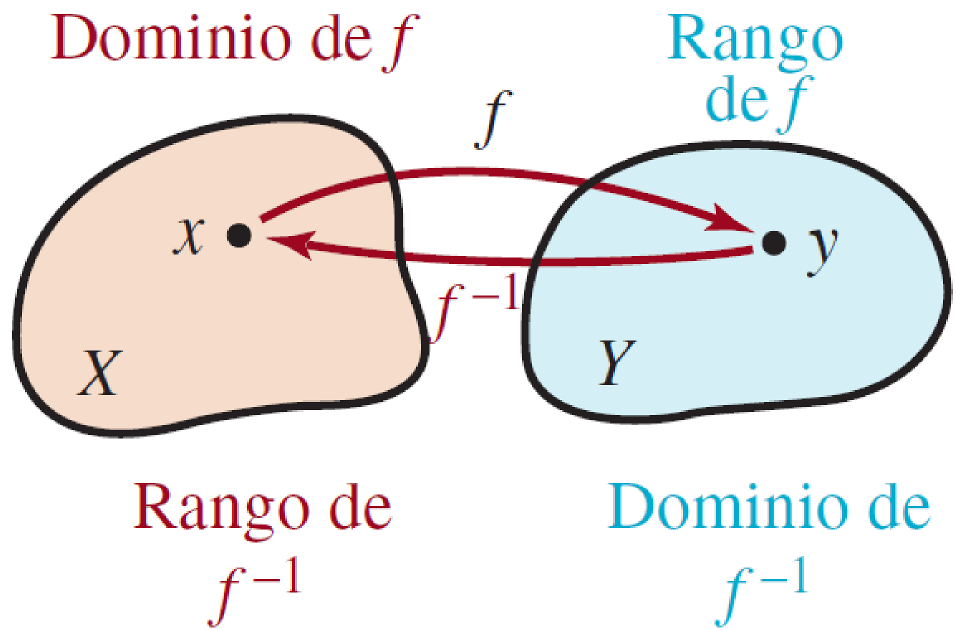
Docente: María Isabel García

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
COLEGIO MAYOR DEL CAUCA

Función inversa

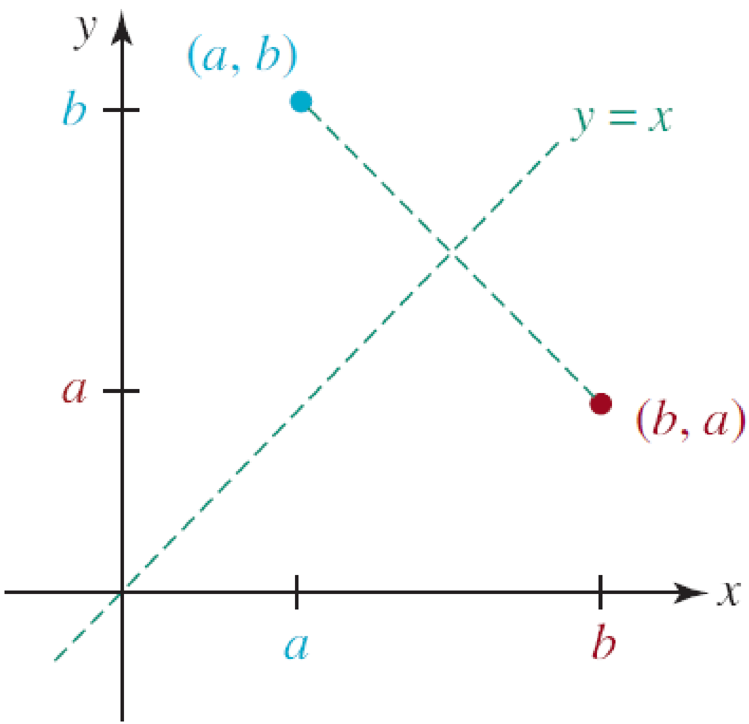
Sea f una función uno a uno con dominio X y rango Y. La **inversa** de f es la función f^{-1} cuyo dominio es Y y rango es X, para los cuales

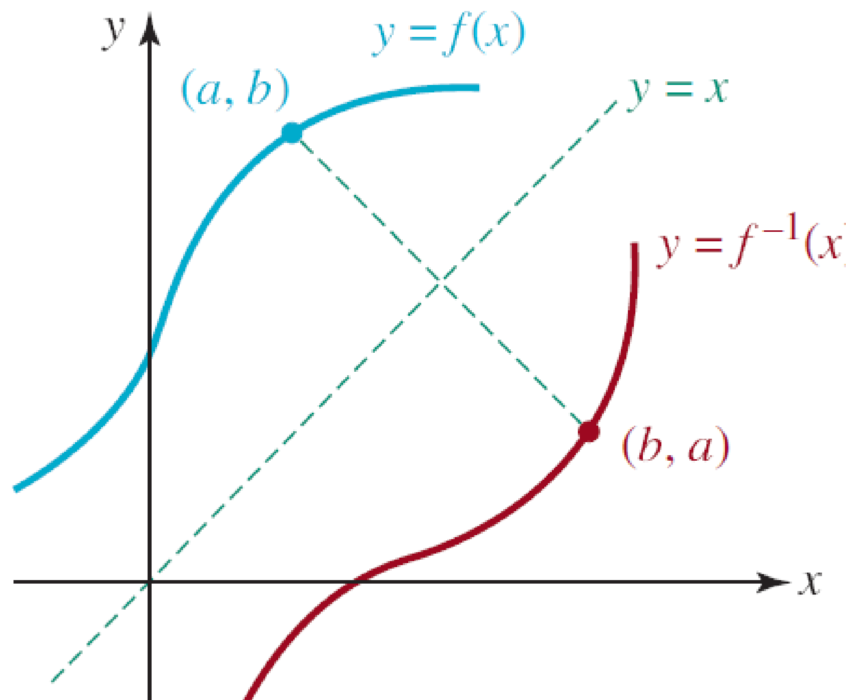
$$f^{-1}(y) = x$$



Función inversa

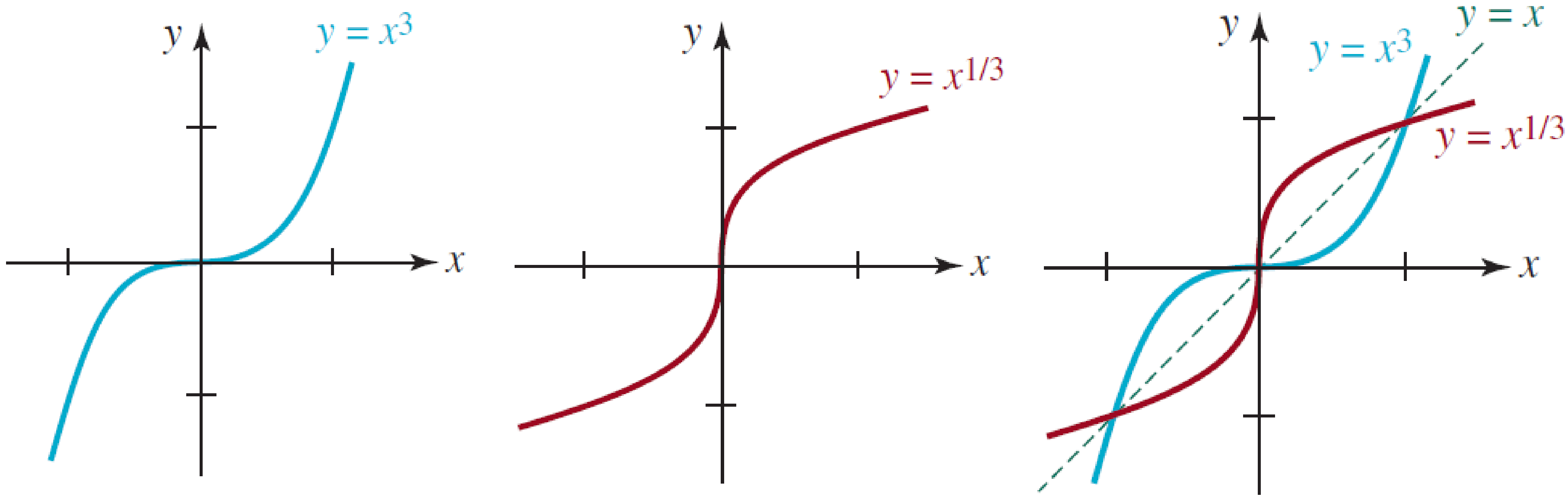
Las gráficas de f y f^{-1} son <u>reflexiones</u> uno del otro en la recta $y = x$, o que son simétricas con respecto a la recta $y = x$.





Función inversa

Ejemplo: sea $f = x^3$ entonces y $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$



Función inversa

$$f(x) = y \qquad\qquad f^{-1}(y) = x$$

Propiedades de las funciones inversas

i) Dominio de f^{-1} = rango de f.
ii) Rango de f^{-1} = dominio de f.
iii) $y = f(x)$ equivale a $x = f^{-1}(y)$.
iv) Una función inversa f^{-1} es uno a uno.
v) La inversa de f^{-1} es f, esto es, $(f^{-1})^{-1} = f$.
vi) La inversa de f es única.

Función inversa

Ejemplo: Determine la inversa de la función $f(x) = \frac{1}{2x-3}$

$$y = \frac{1}{2x-3} \Rightarrow x = \frac{1}{2y-3}$$

$$x(2y-3) = 1$$

$$2xy - 3x = 1$$

$$2xy = 1 + 3x$$

$$y = \frac{1+3x}{2x}$$

Función inversa

Ejercicios: Determine la inversa de las siguientes funciones

a) $f(x) = -2x + 6$

b) $f(x) = -2x + 1$

c) $f(x) = x^3 + 2$

d) $f(x) = 1 - x^3$

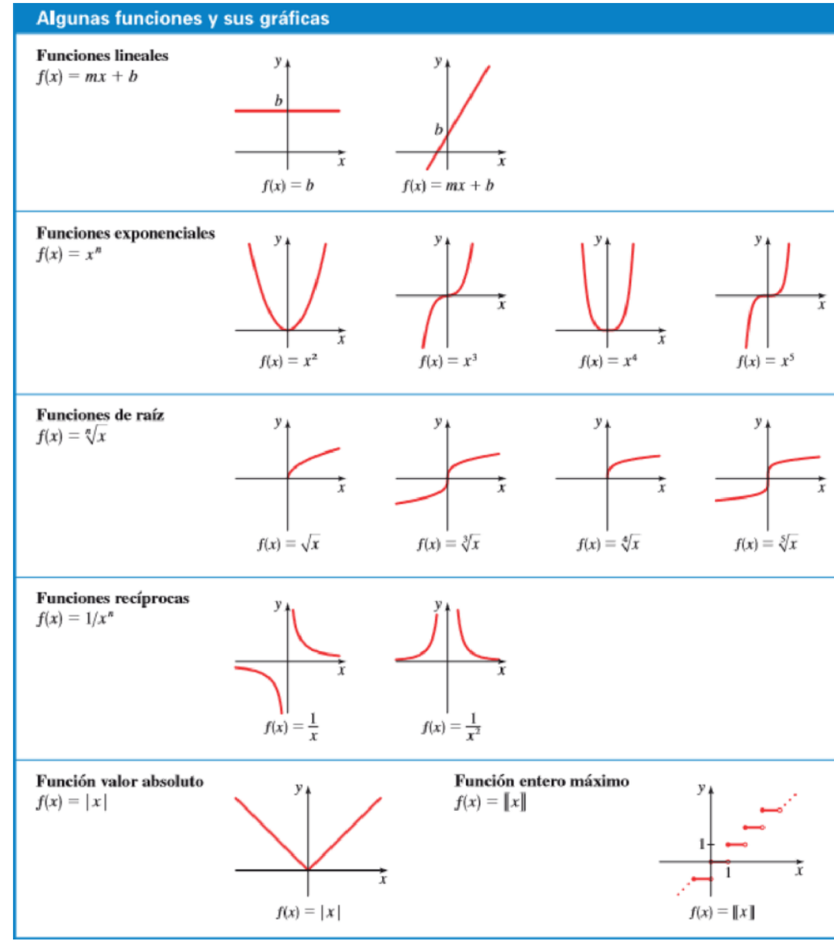
e) $f(x) = 2 - \sqrt{x}$

f) $f(x) = \sqrt{x - 7}$

Para cada caso, trace la gráfica de f y f^{-1} en el mismo plano cartesiano.

Funciones especiales

- Funciones polinómicas
- Funciones racionales
- Funciones exponenciales
- Funciones logarítmicas
- Funciones trigonométricas
- Función valor absoluto
- Funciones a trozos



Funciones Polinómicas

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dónde

- $n, n-1, \ldots \in \mathbb{N}$ (o n es un número entero No negative)
- n indica el grado del polinomio.
- $a_i \in \mathbb{R}$, y se conocen como Coeficientes
- x es la variable

Funciones Polinómicas

Si $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1 = 0$, pero $a_0 \neq 0$, se obtiene una función constante.

Función constante

Una **función constante** $y = f(x)$ es una que tiene la forma

$$f(x) = a$$

donde a es una constante.

- Su gráfica es una recta horizontal (paralela al $eje\ x$)
- Dom $f = \mathbb{R}$
- Ran $f = a$

Funciones Polinómicas

Si $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2 = 0$, pero $a_1 \neq 0$ y (a_0 puede o no cero), se obtiene una función lineal.

Función lineal

Una **función lineal** $y = f(x)$ es aquella que tiene la forma

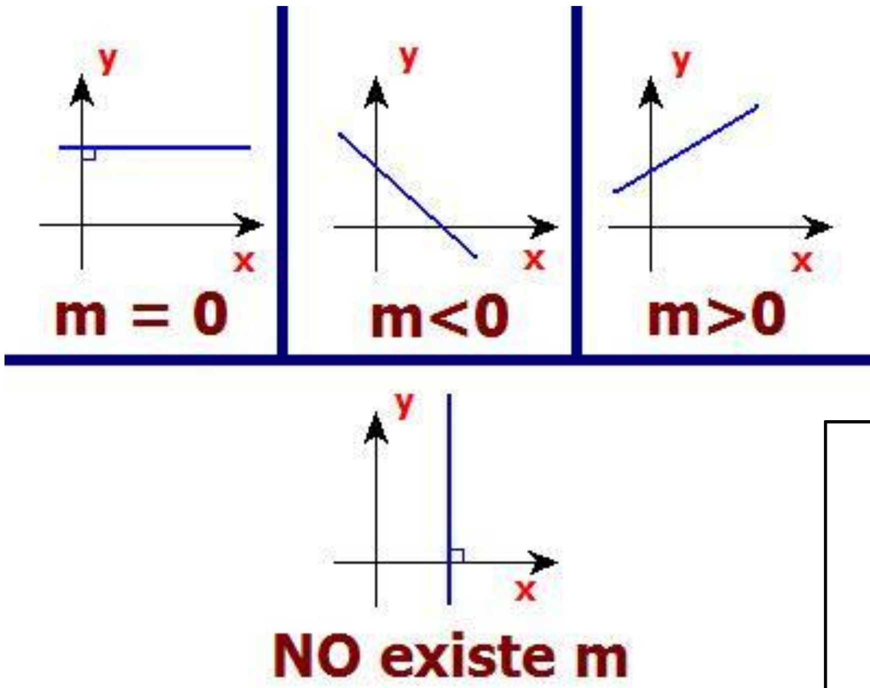
$$f(x) = ax + b$$

donde $a \neq 0$ y b son constantes.

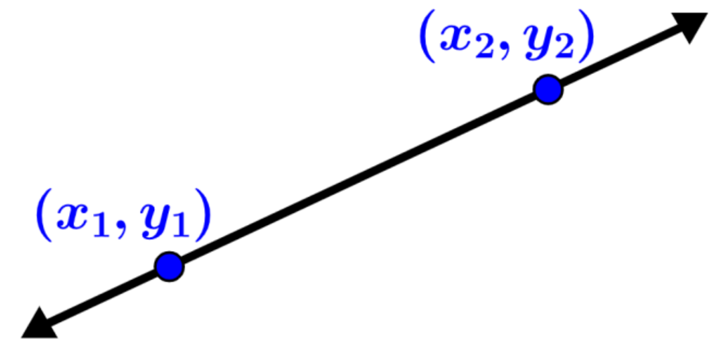
- Su gráfica es una recta no horizontal, cuya pendiente es a (el coeficiente de x).
- $Dom\, f = \mathbb{R}$
- $Ran\, f = \mathbb{R}$

Funciones Polinómicas

- Función lineal: $f(x) = mx + b$



Cálculo de la pendiente



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ecuación de la recta

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

Dónde (x_0, y_0) es un punto de la recta

Funciones Polinómicas

Ejercicio 1: Graficar la función lineal $f(x) = 2x - 3$

Ejercicio 2: Calcular la función lineal que pasa por los puntos $(1,2)$ y $(2,7)$

Ejercicio 3: Calcular el punto de corte de las siguientes funciones

$$f(x) = 11 - x$$
$$g(x) = 5x + 2$$

Grafique las funciones y verifique el punto de corte calculado.

Funciones Polinómicas

Rectas paralelas y perpendiculares:

- Dos rectas $y_1 = m_1x + b_1$ y $y_2 = m_2x + b_2$ son paralelas si $m_1 = m_2$.
- Dos rectas $y_1 = m_1x + b_1$ y $y_2 = m_2x + b_2$ son perpendiculares si $m_1m_2 = -1$.

Ejercicio: Determine cuáles de las rectas son paralelas y cuales perpendiculares

a) $3x - 5y + 9 = 0$

b) $5x = -3y$

c) $-3x + 5y = 2$

d) $3x + 5y + 4 = 0$

e) $-5x - 3y + 8 = 0$

f) $5x - 3y - 2 = 0$

Funciones Polinómicas

Si $a_n, a_{n-1}, \dots, a_3 = 0$, pero $a_2 \neq 0$ y (a_0 y a_1 pueden o no cero), se obtiene una función cuadrática.

Función cuadrática

Una **función cuadrática** $y = f(x)$ es una función que tiene la forma

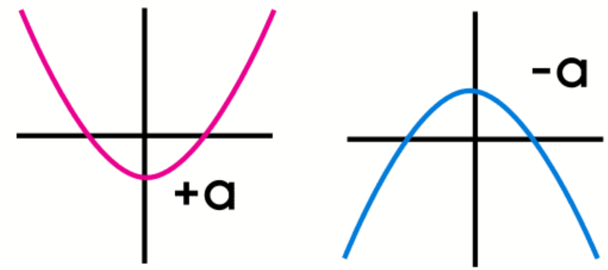
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

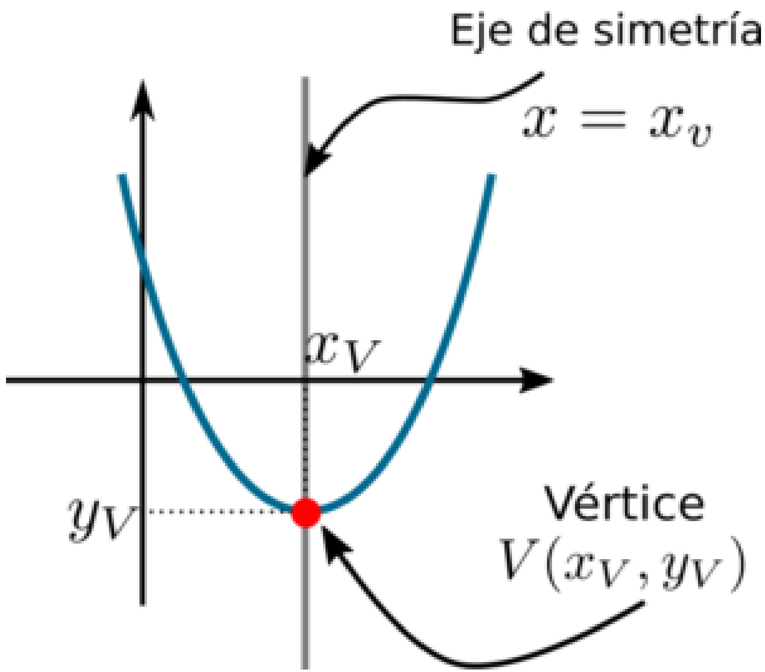
donde $a \neq 0$, b y c son constantes.

- Su gráfica es una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo
- Dom $f = \mathbb{R}$
- Ran $f =$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$

Funciones Polinómicas

- Función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$





Coordenadas del vértice

$$x_v = \frac{-b}{2a} \quad \text{y} \quad y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$$

Eje de simetría

$$x = x_v \quad \text{esto es} \quad x = \frac{-b}{2a}$$

Funciones Polinómicas

Ejercicio 4: Dada la función cuadrática $f(x) = -2x^2 + 3x$

a) Encuentre los puntos de intersección con los ejes coordenados.
b) Calcule el vértice de la parábola
c) Encuentre el eje de simetría
d) Con la información anterior, grafique la función.

Ejercicio 3: Calcular el punto de corte de las siguientes funciones

$$f(x) = 11 - x$$
$$g(x) = 2x^2 + x - 1$$

Grafique las funciones y verifique el punto de corte calculado.

Funciones racionales

Función racional

Una **función racional** $y = f(x)$ es una función que tiene la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

en donde P y Q son funciones polinomiales.

$$y = \frac{x}{x^2 + 5} \qquad y = \frac{\overbrace{x^3 - x + 7}^{\text{polinomio}}}{\underbrace{x + 3}_{\text{polinomio}}} \qquad y = \frac{1}{x} \qquad y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1}$$

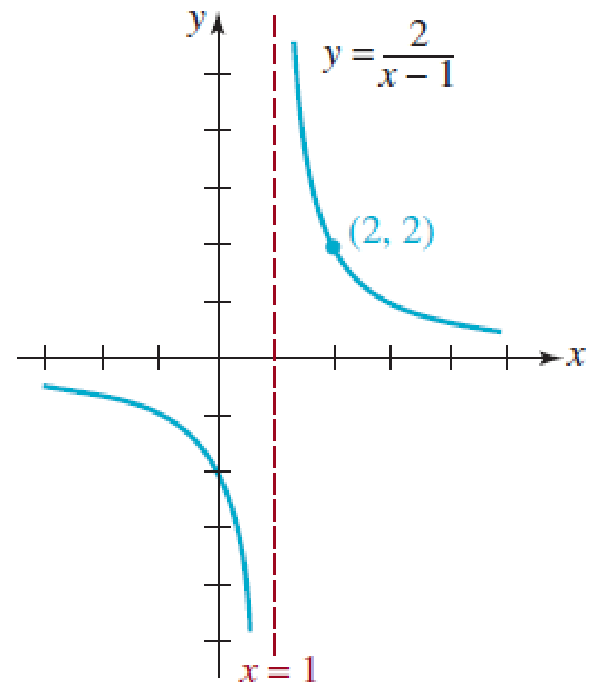
← no es un polinomio

Funciones racionales

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

El dominio de f se restringe a los valores de x para los cuales el denominador $Q(x) \neq 0$. Por ejemplo:

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$



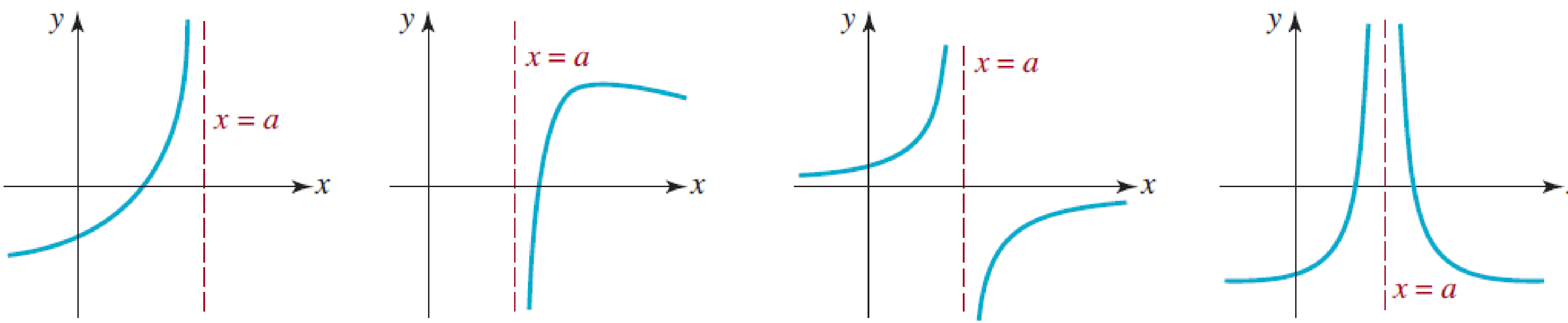
Entonces $\mathrm{Dom}\, f = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Ya que para $f(1)$ la función no está definida.

Funciones racionales

Asíntota vertical

Se dice que una recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la gráfica de una función f, si se cumple al menos una de las seis condiciones siguientes:

$$
\begin{array}{llll}
f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to a^{-} & & f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a^{-} \\
f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to a^{+} & & f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a^{+} \\
f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to a & & f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a
\end{array}
$$



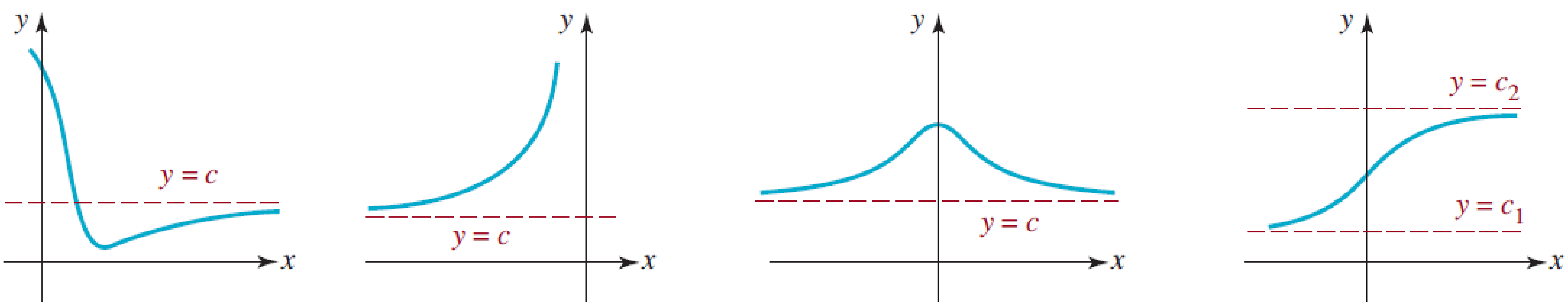
a) $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^{-}$ *b)* $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^{+}$ *c)* $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a^{-}$; $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to a^{+}$ *d)* $f(x) \to \infty$ cuando $x \to a$

Funciones racionales

Asíntota horizontal

Se dice que una recta $y = c$ es una **asíntota horizontal** de la gráfica de una función f, si

$$f(x) \to c \text{ cuando } x \to -\infty \quad \text{o si} \quad f(x) \to c \text{ cuando } x \to \infty.$$



a) $f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$

b) $f(x) \to c$ cuando $x \to -\infty$

c) $f(x) \to c$ cuando $x \to -\infty$
$f(x) \to c$ cuando $x \to \infty$

d) $f(x) \to c_1$ cuando $x \to -\infty$
$f(x) \to c_2$ cuando $x \to \infty$

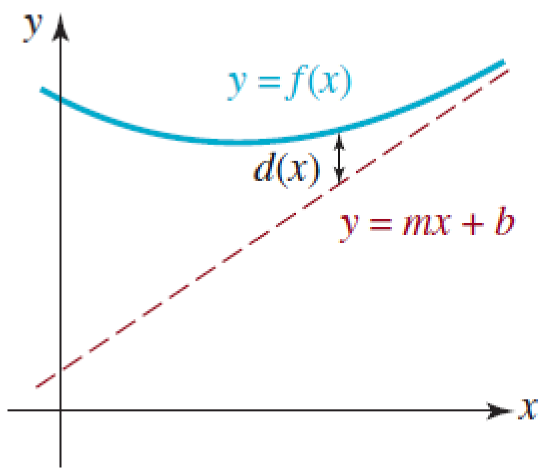
Funciones racionales

Asíntota oblicua

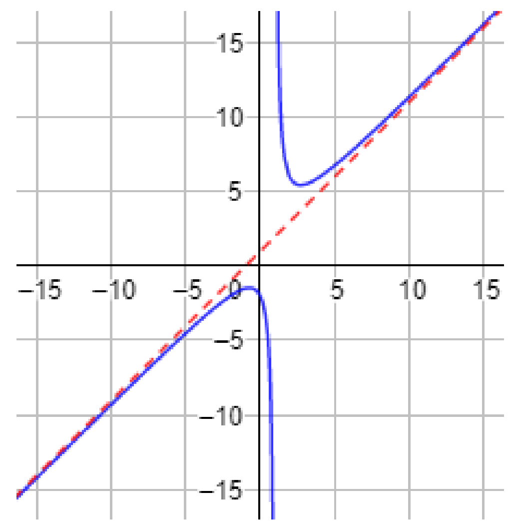
Se dice que una recta $y = mx + b$, $m \neq 0$, es una **asíntota inclinada**, o **asíntota oblicua**, de la gráfica de una función f, si

$$f(x) \to mx + b \text{ cuando } x \to -\infty$$

o bien $$f(x) \to mx + b \text{ cuando } x \to \infty$$



$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$$



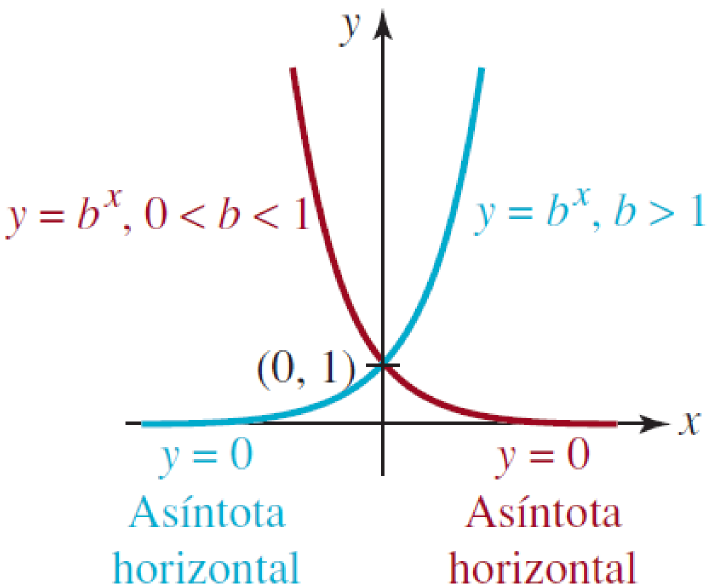
Funciones exponenciales

Función exponencial

Si $b > 0$ y $b \neq 1$, una **función exponencial** $y = f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = b^x$$

El número b se llama **base** y x se llama **exponente**.



Leyes de los exponentes

Si $a > 0$, $b > 0$ y x, x_1 y x_2 son números reales, entonces:

i) $b^{x_1} \cdot b^{x_2} = b^{x_1 + x_2}$

ii) $\dfrac{b^{x_1}}{b^{x_2}} = b^{x_1 - x_2}$

iii) $\dfrac{1}{b^x} = b^{-x}$

iv) $(b^{x_1})^{x_2} = b^{x_1 x_2}$

v) $(ab)^x = a^x b^x$

vi) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$

Funciones exponenciales

PROPIEDADES DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL

i) El dominio de f es el conjunto de los números reales, esto es, $(-\infty, \infty)$.

ii) El contradominio de f es el conjunto de los números reales positivos, esto es, $(0, \infty)$.

iii) La intersección con el eje y de f está en $(0, 1)$. La gráfica de f no tiene intersección con el eje x.

iv) La función f es creciente para $b > 1$ y es decreciente para $0 < b < 1$.

v) El eje x, esto es, $y = 0$, es una asíntota horizontal en la gráfica de f.

vi) La función f es continua en $(-\infty, \infty)$.

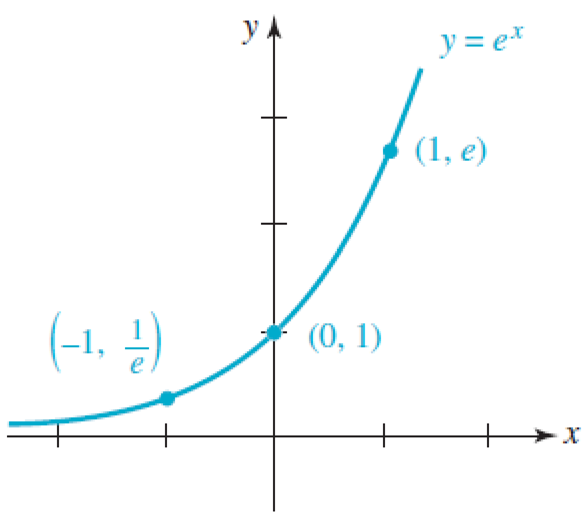
vii) La función f es uno a uno.

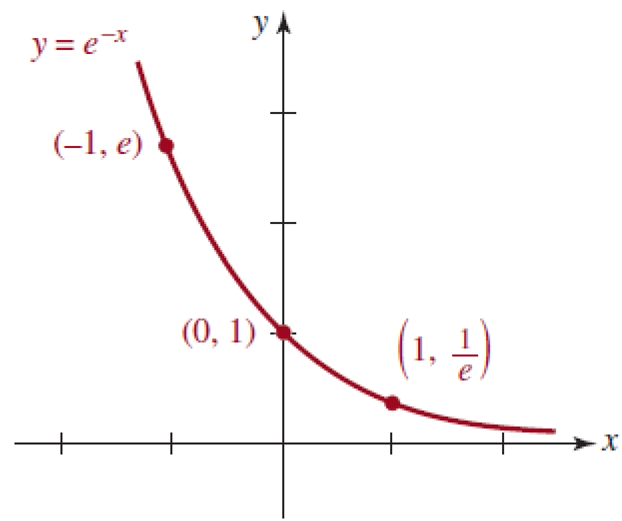
Funciones exponenciales

Cuando se escoge que la base de $y = b^x$ sea $b = e$ (Número de Euler), donde $e = 2{,}718281828459\ldots$, la función

$$y = e^x$$

Se denomina, **función exponencial natural**.





Funciones logarítmicas

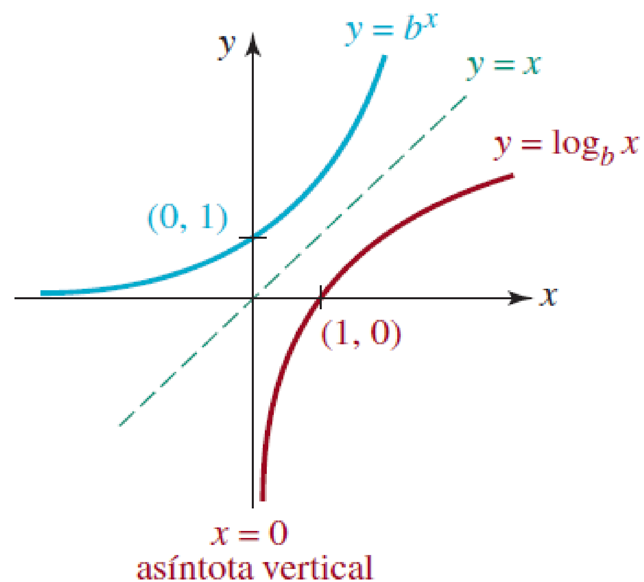
Función logarítmica

La **función logarítmica** con la base $b > 0$, $b \neq 1$, se define por

$$y = \log_b x \quad \text{si y sólo si} \quad x = b^y$$

La expresión logarítmica $y = \log_b x$ y la expresión $x = b^x$ son equivalentes.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_3 9 = 2$	$9 = 3^2$
$\log_8 2 = \frac{1}{3}$	$2 = 8^{1/3}$
$\log_{10} 0.001 = -3$	$0.001 = 10^{-3}$
$\log_b 5 = -1$	$5 = b^{-1}$



Funciones logarítmicas

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

i) El dominio de f es el conjunto de los números reales positivos, esto es, $(0, \infty)$.

ii) El contradominio de f es el conjunto de los números reales, esto es, $(-\infty, \infty)$.

iii) La intersección de f con el eje x está en $(1, 0)$. La gráfica de f no tiene intersección con el eje y.

iv) La función f es creciente para $b > 1$ y decreciente para $0 < b < 1$.

v) El eje y, esto es, $x = 0$, es asíntota vertical de la gráfica de f.

vi) La función f es continua en $(0, \infty)$.

vii) La función f es uno a uno.

Funciones logarítmicas

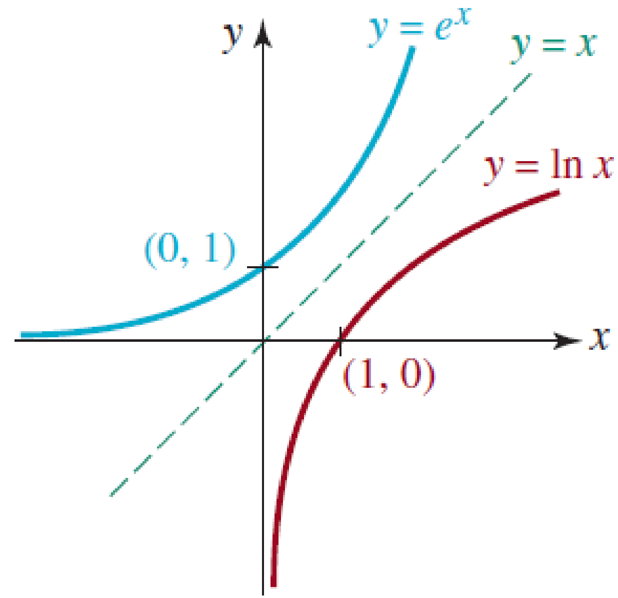
Los logaritmos con base $b = 10$ se llaman **logaritmos base 10** o **logaritmos comunes**, y a los logaritmos con base $b = e$ se les llama **logaritmos naturales**.

$$y = \ln n$$

$$\boxed{y = \ln x \quad \text{si y sólo si} \quad x = e^y}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \ln 1 = 0 & \text{ya que} & e^0 = 1 \\ \ln e = 1 & \text{ya que} & e^1 = e \end{array}}$$

$$\boxed{x = e^{\ln x} \quad \text{y} \quad y = \ln e^y}$$



Funciones logarítmicas

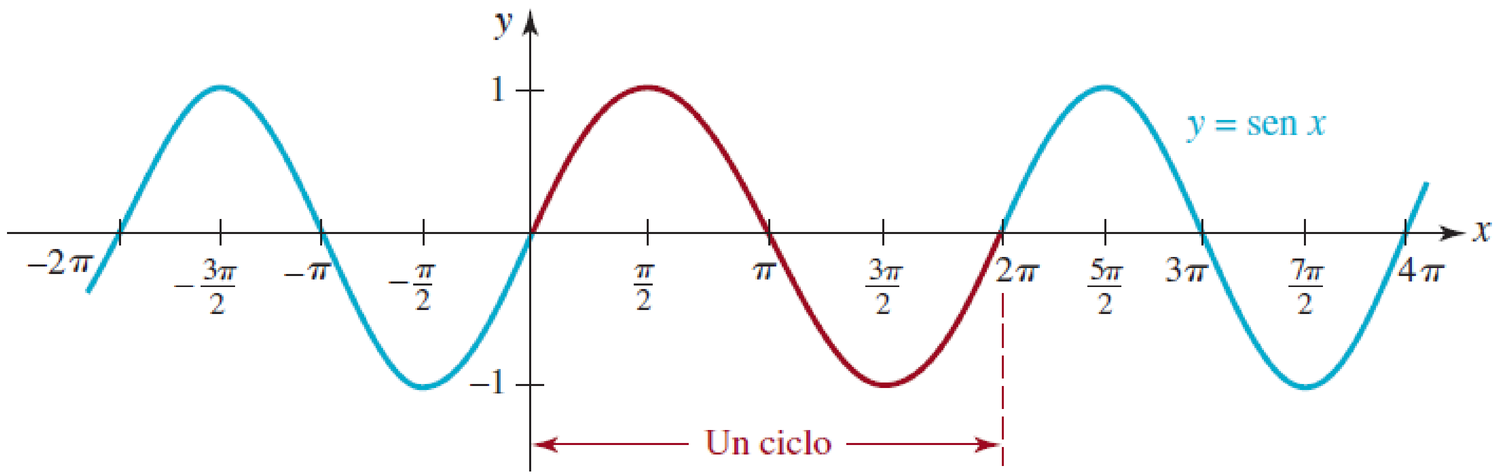
Leyes de los logaritmos:

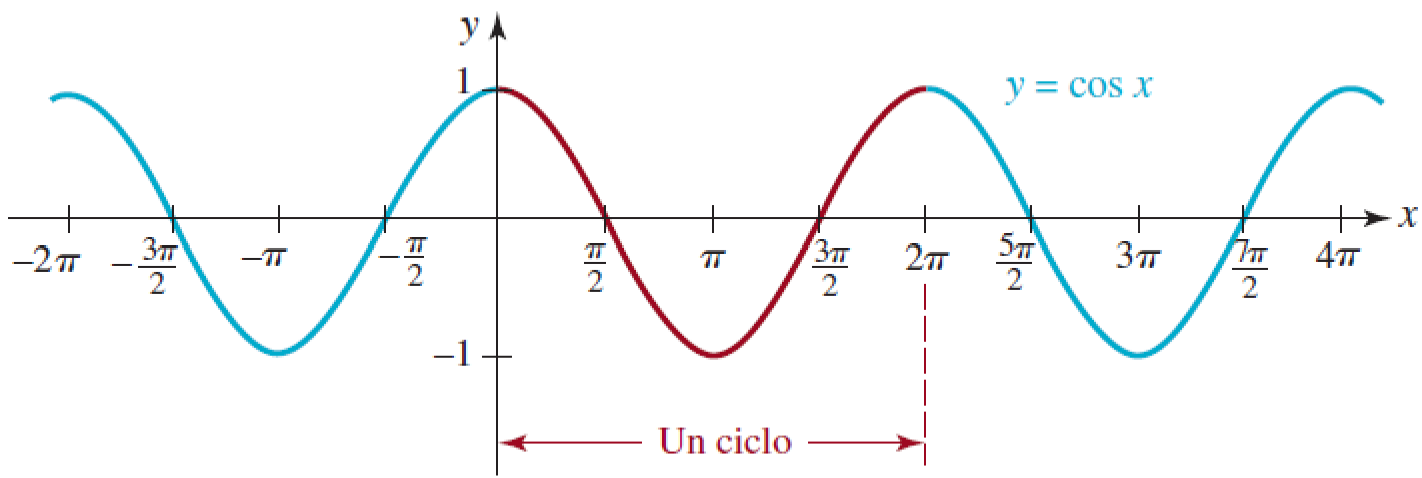
$$\log_b M + \log_b N = \log_b(MN)$$

$$\log_b M - \log_b N = \log_b\left(\frac{M}{N}\right)$$

$$a \log_b M = \log_b(M^a)$$

Funciones trigonométricas





Funciones trigonométricas

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

- El dominio de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y el dominio de $g(x) = \cos x$ es el conjunto de números reales, es decir, $(-\infty, \infty)$.
- El rango de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y el rango de $g(x) = \cos x$ es el intervalo $[-1, 1]$ en el eje y.
- Los ceros de $f(x) = \operatorname{sen} x$ son $x = n\pi$, n un entero. Los ceros de $g(x) = \cos x$ son $x = (2n + 1)\pi/2$, n un entero.
- La gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ es simétrica con respecto al origen. La gráfica de $g(x) = \cos x$ es simétrica con respecto al eje y.
- Las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$ son continuas en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Funciones trigonométricas

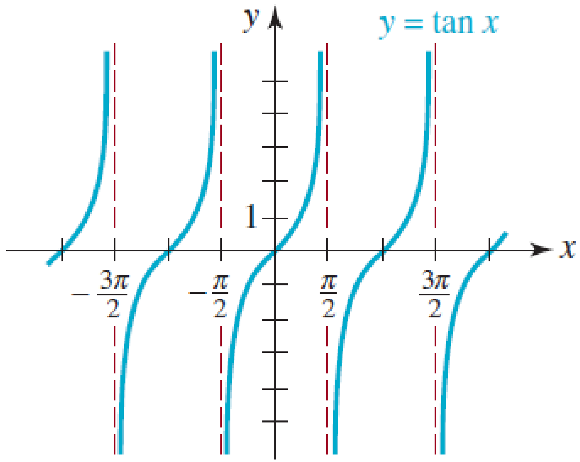
Otras cuatro funciones trigonométricas

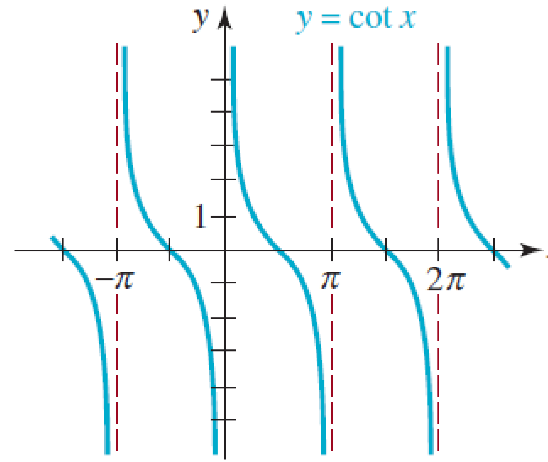
Las funciones **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante** se representan por tan x, cot x, sec x y csc x, respectivamente, y se definen como sigue:

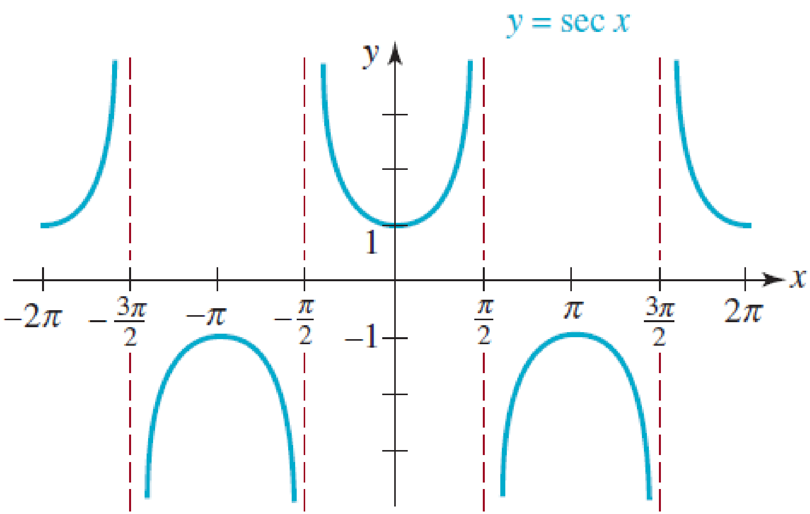
$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

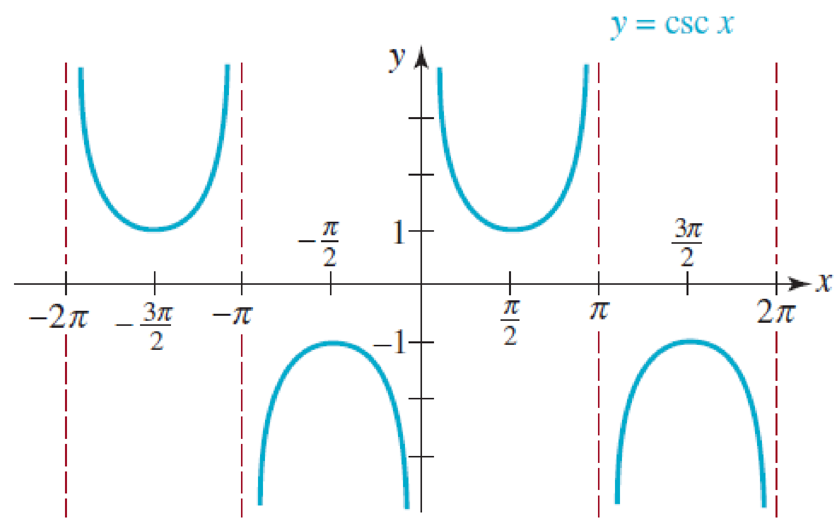
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Funciones trigonométricas







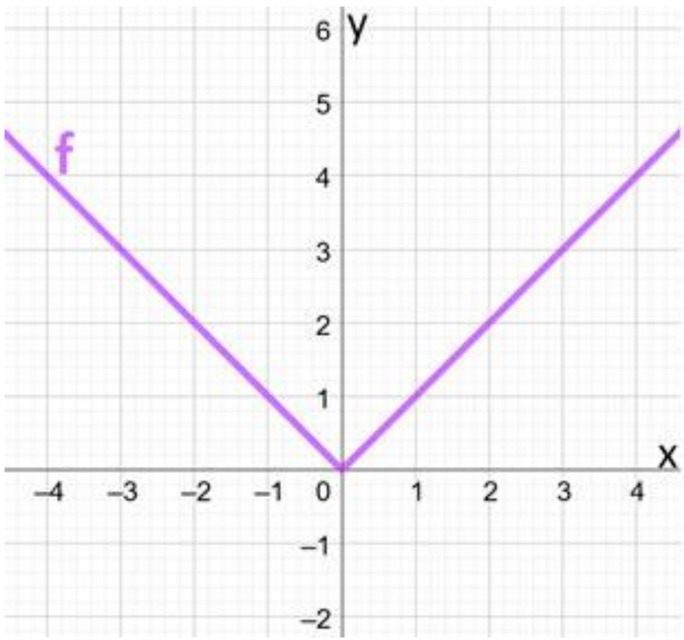


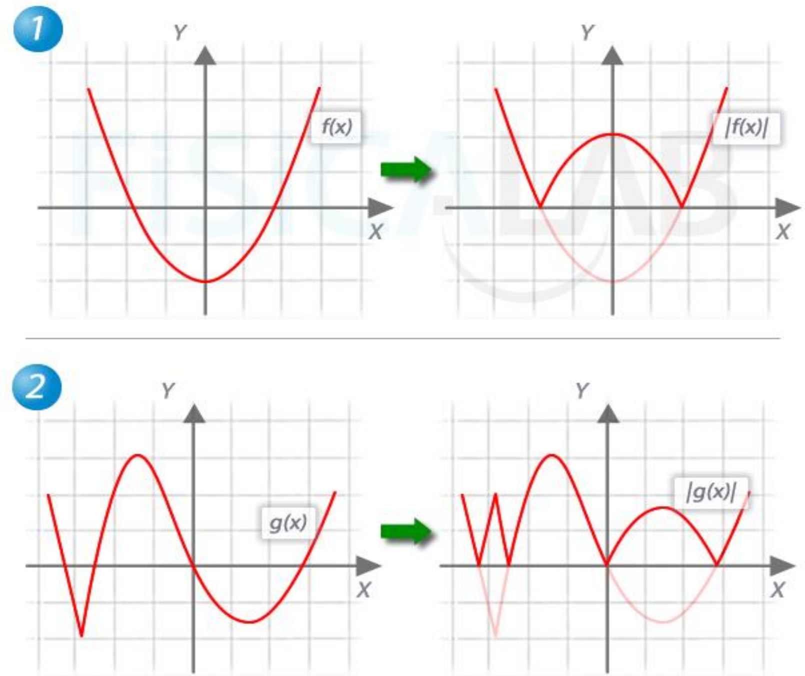
Función valor absoluto

$$f(x) = |x| \qquad |x| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Dom } f = (-\infty, \infty)$$

$$\text{Ran } f = [0, \infty)$$





Funciones con valor absoluto

Ejercicio: Trace la gráfica de las siguientes funciones con valor absoluto

$$f(x) = |x + 2|$$

$$g(x) = |x - 5|$$

$$h(x) = |x^2 - 4|$$

$$m(x) = |x^3 + 1|$$

$$n(x) = 2|x + 3| + 2$$

Funciones a trozos

Son funciones definidas por partes

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x < 0 \\ x + 1 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(-3) = (-3)^2 = 9$$

$$f(5.7) = (5.7) + 1 = 6.7$$

$$f(0) = (0) + 1 = 1$$

Funciones a trozos

Ejercicio: Calcular los valores indicados y graficar cada función.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, \ (-7) & x = 2 \end{cases}$

$f(0), f(2), f(-7)$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \geq 1 \\ -x^3, & x < 1 \end{cases}$

$f(1), f(0), f(-2), f(\sqrt{2})$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, & x \neq \pm 1 \\ 3, & x = -1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$

$f(-1), f(1), f(3)$

d) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

$f(-\frac{1}{2}), f(\frac{1}{3}), f(4), f(6.2)$

INSTITUCIÓN UNIVERSITARIA
COLEGIO MAYOR DEL CAUCA

Autoevaluación
ES EVOLUCIÓN

Somos Institución de Educación Superior Pública sujeta a inspección y vigilancia por MinEducación

Claustro de la Encarnación, *Carrera 5 # 5 - 40* / Edificio Bicentenario, *Carrera 7 # 2-34* / Casa Obando, *Calle 3 # 6-52* / Sede Zona Norte, *Barrio La Ximena, Carrera 6 # 46N-44*
Pbx: (+57-2) 8333390 - (+57-2) 8333208 - (+57-2) 8333216
www.unimayor.edu.co