

# Tópicos Especiais em Otimização

## **GRASP**

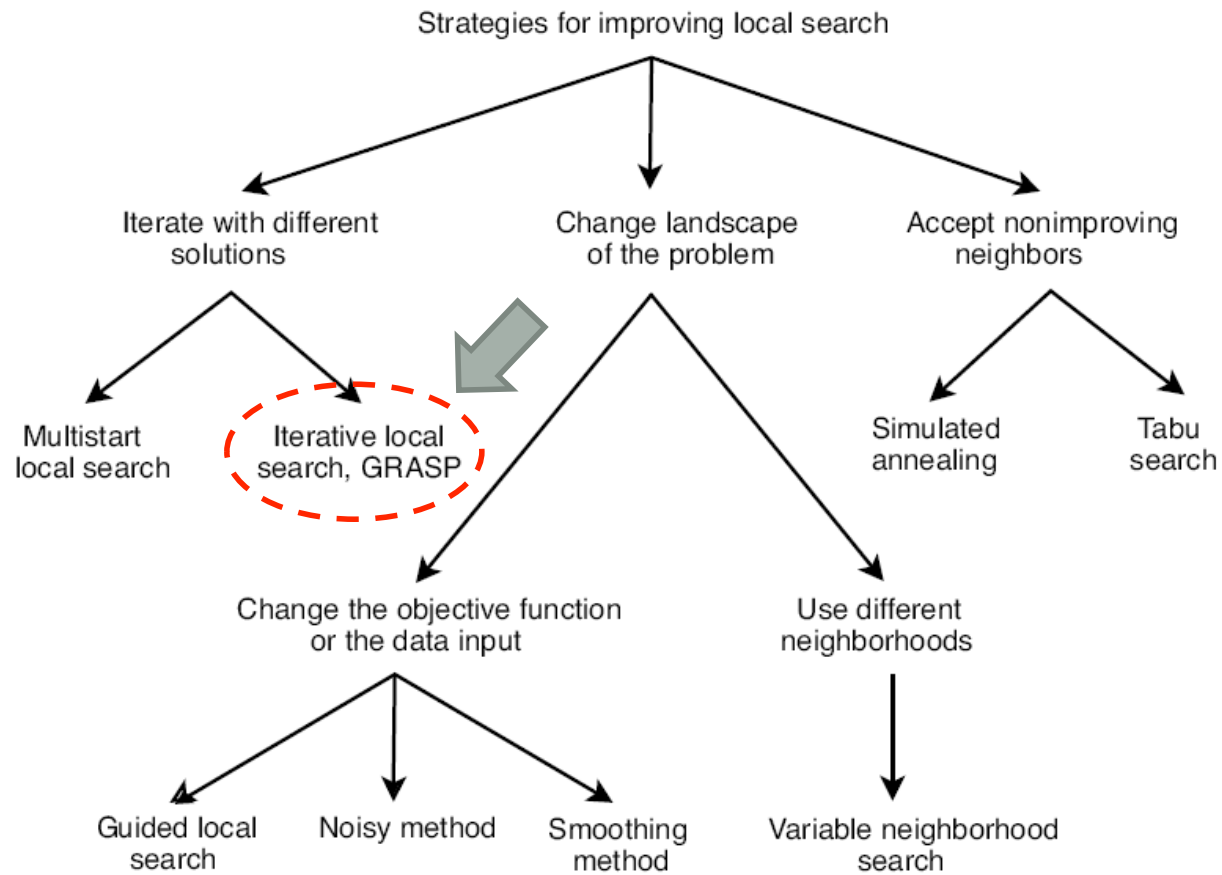
Autora do material:

Prof. Luciana Brugiolo Gonçalves

Professora: Adria Lyra

[adrialyra@ufrrj.br](mailto:adrialyra@ufrrj.br)

# GRASP



[Talbi]

# GRASP

- Roteiro
  - GRASP
    - Fase 1: Construção
    - Fase 2: Busca Local
  - Aperfeiçoando...
    - Construtivos Alternativos
    - GRASP Reativo
    - GRASP+PR e GRASP+evPR
    - GRASP Híbrido

# GRASP

- **Greedy Randomized Adaptive Search Procedure**

Operations Research Letters 8 (1989) 67–71  
North-Holland

## **A PROBABILISTIC HEURISTIC FOR A COMPUTATIONALLY DIFFICULT SET COVERING PROBLEM \***

Thomas A. FEO

*The University of Texas, Austin, TX 78712, USA*

Mauricio G.C. RESENDE

*University of California, Berkeley, CA 94720, USA*

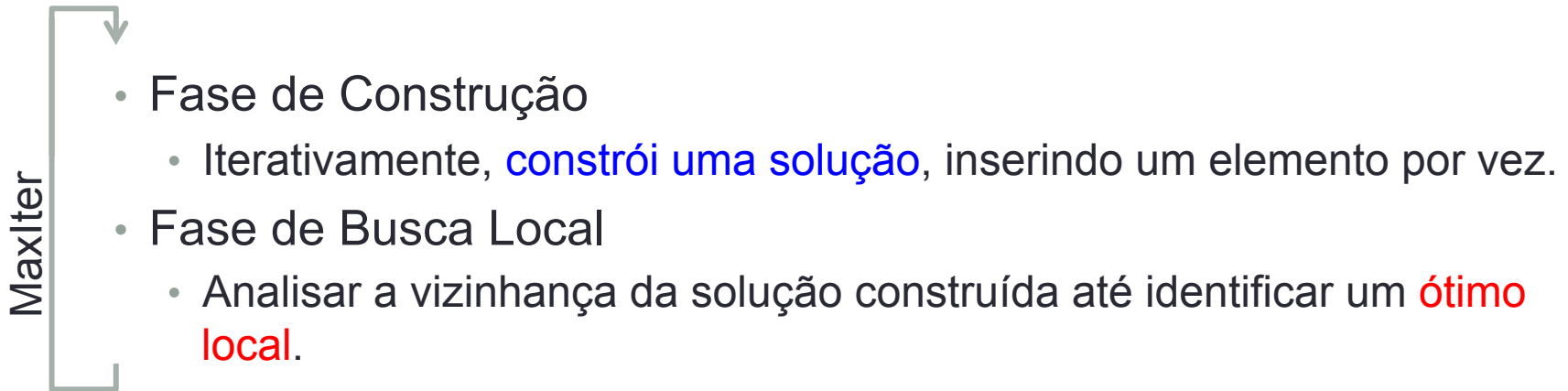


# GRASP

- **Greedy Randomized Adaptive Search Procedure**
  - Trabalhos relacionados
    - *random multistart local search* [e.g. Lin & Kernighan, 1973]
    - *semi-greedy heuristics* [e.g. Hart & Shogan, 1987]

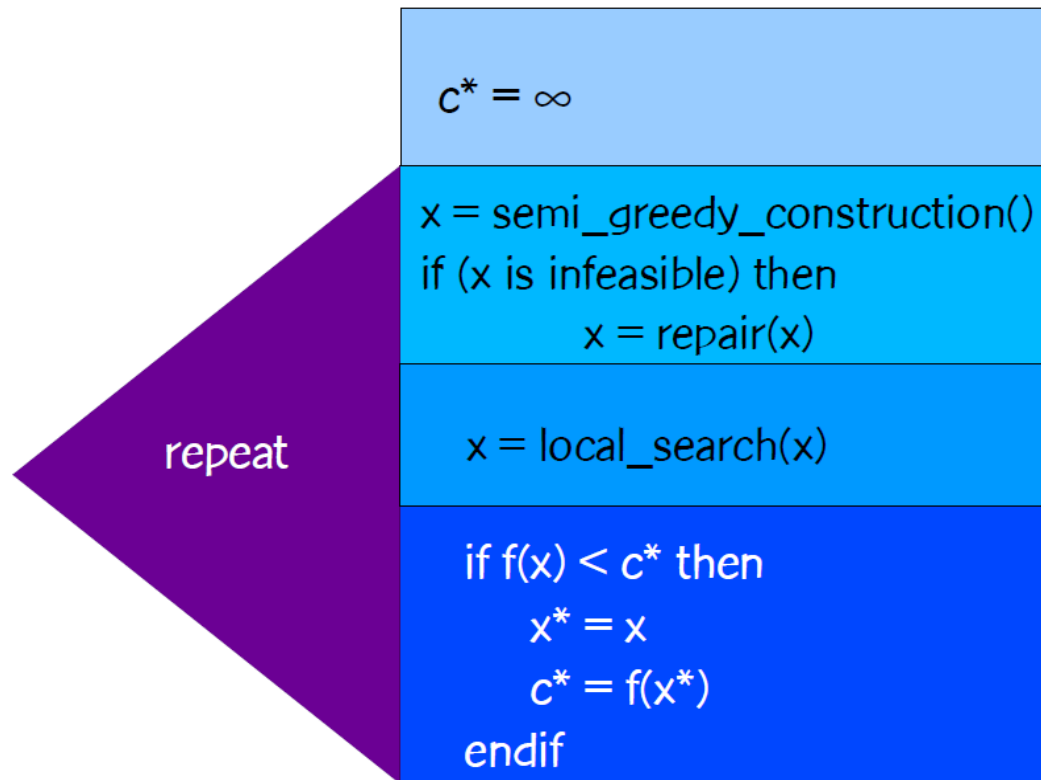
# GRASP

- Procedimento iterativo ou *multi-start* que combina



# GRASP

- GRASP - Algoritmo Básico



[MResende]

<http://www2.research.att.com/~mgcr/talks/2010-11-copios2010-grasp-pr.pdf>

# GRASP

- Fase de Construção

- Procedimento iterativo onde uma solução viável é construída acrescentando-se um elemento por vez.
- Em cada iteração
  - Utilizando uma função gulosa, **avaliar o benefício** de incluir cada elemento na solução e ordenar os elementos;
  - Criar uma **lista restrita** com os elementos melhor avaliados;
  - De forma aleatória, **selecionar um elemento** da lista restrita;
  - Na próxima iteração, a/o função/problema é “**adaptada**” considerando o novo panorama (inclusão do último elemento).

*Repetir até obter uma  
solução viável*



# GRASP

- Fase de Construção:
  - Características
    - Gulosa
    - Aleatória
    - Adaptativa
  - Necessário definir:
    - Solução como conjunto de elementos
    - Função de avaliação
    - Parâmetro de aleatoriedade ( $\alpha$ )

# GRASP

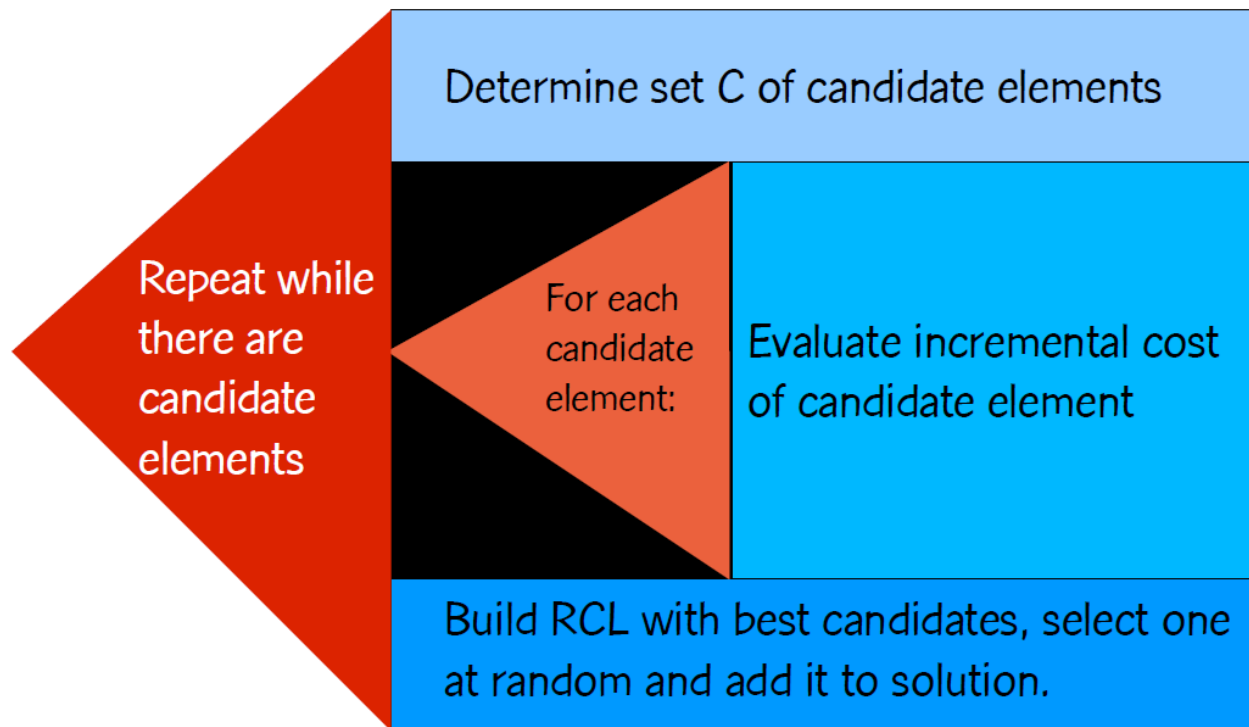
- Fase de Construção

- Procedimento iterativo onde uma solução viável é construída acrescentando-se um elemento por vez.
- Em cada iteração
  - Utilizando uma função **gulosa**, **avaliar o benefício** de incluir cada elemento na solução e ordenar os elementos;
  - Criar uma **lista restrita** com os elementos melhor avaliados;
  - De forma **aleatória**, **selecionar um elemento** da lista restrita;
  - Na próxima iteração, a/o função/problema é “**adaptada**” considerando o novo panorama (inclusão do último elemento).

Repetir até obter uma  
solução viável

# GRASP

- Fase de Construção



[MResende]

<http://www2.research.att.com/~mgcr/talks/2010-11-copios2010-grasp-pr.pdf>

# GRASP

- Fase de Construção

- Elementos na lista restrita de candidatos

- Baseado na **Cardinalidade**

- $p$  elementos melhor avaliados ( $\alpha * \text{\#candidatos}$ );

- Baseada na **Qualidade**

- Parâmetro  $\alpha$  define a qualidade dos elementos a serem inseridos na lista restrita;
    - Considerando  $c_{min}$  e  $c_{max}$  o valor mínimo e máximo, respectivamente, da função de avaliação para os candidatos, na LRC são inseridos os elementos  $\mathbf{e}$  cuja função de avaliação  $\mathbf{c}(\mathbf{e})$  esteja no intervalo:

$$c_{min} \leq \mathbf{c}(\mathbf{e}) \leq c_{min} + \alpha (c_{max} - c_{min})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \rightarrow \text{guloso} \\ \alpha = 1 \rightarrow \text{totalmente aleatório} \end{array} \right.$$

# GRASP

- Fase de Busca Local
  - Fase de construção não necessariamente leva a uma solução ótima local.
  - Na maioria das vezes, a fase de busca local pode melhorar a solução.

# GRASP

- Benefícios
  - Fácil de implementar;
    - A partir de um algoritmo construtivo e um procedimento de busca local;
  - Poucos parâmetros
    - Fator de aleatoriedade:  $\alpha$
    - Número de iterações

# GRASP

- Incrementando/Aperfeiçoando/Evoluindo a versão básica do GRASP

# GRASP

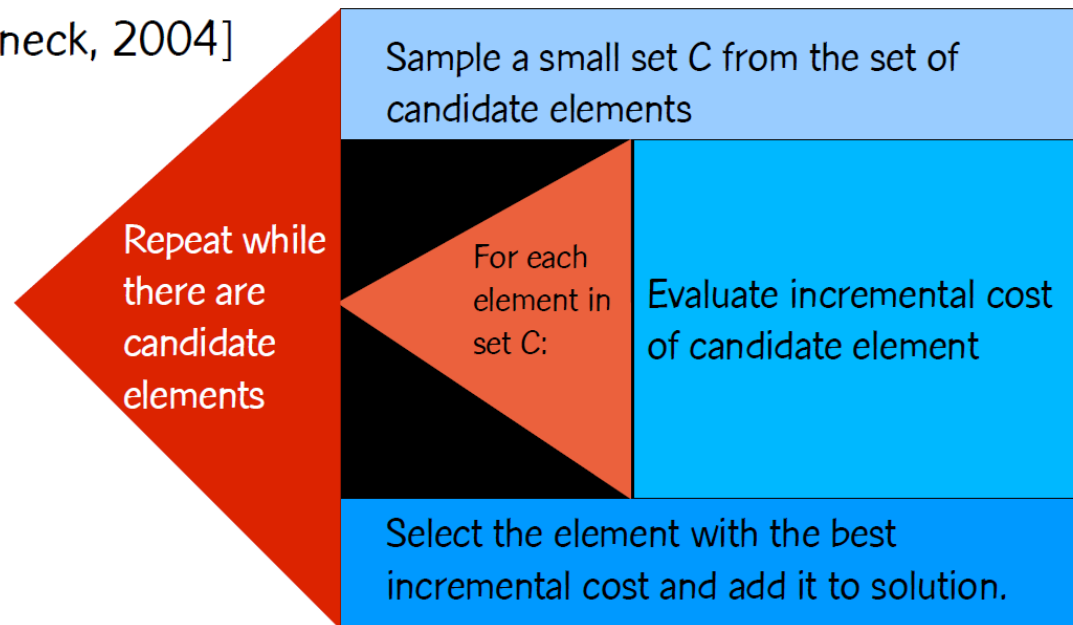
- GRASP<sup>++</sup>
  - Construtivos alternativos;
  - Uso de filtros:
  - Inserir algum tipo de memória;
  - Ajuste automático do parâmetro de aleatoriedade;
  - Paralização do algoritmo.



# GRASP

- GRASP<sup>++</sup>
  - Construtivos alternativos

[Resende & Werneck, 2004]



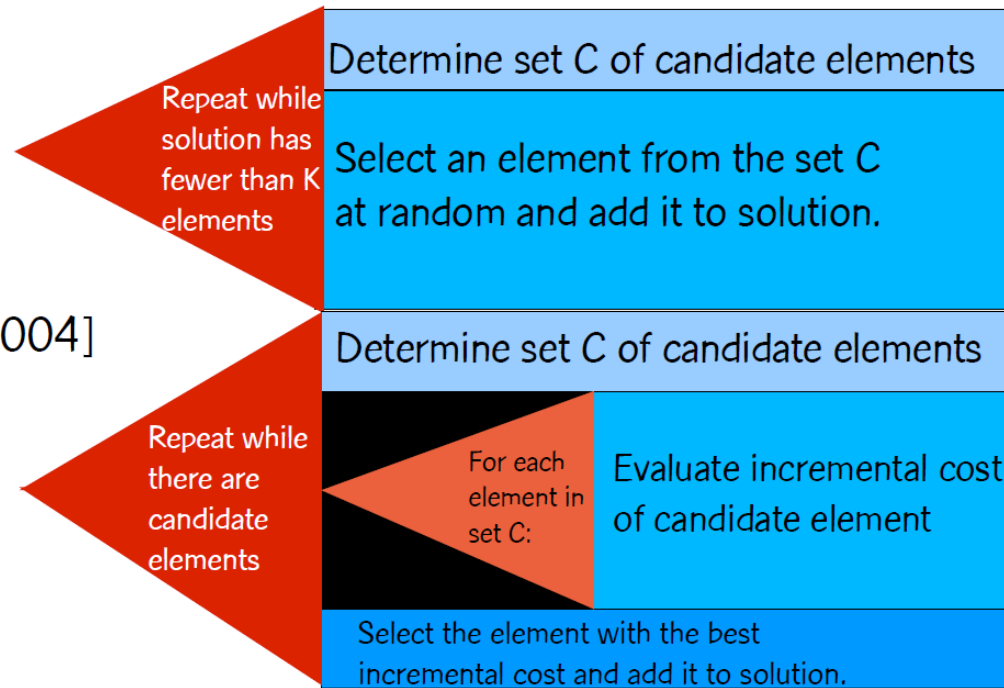
[MResende]

<http://www2.research.att.com/~mgcr/talks/2010-11-copios2010-grasp-pr.pdf>

# GRASP

- GRASP<sup>++</sup>
  - Construtivos alternativos

[Resende & Werneck, 2004]

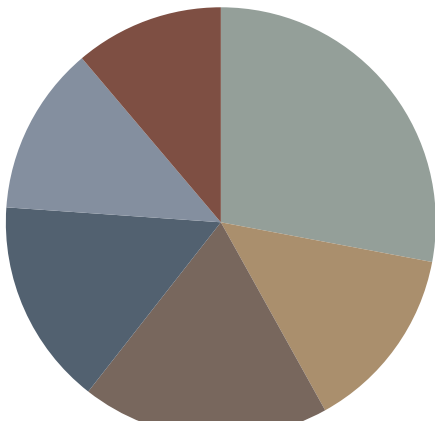


[MResende]

<http://www2.research.att.com/~mgcr/talks/2010-11-copios2010-grasp-pr.pdf>

# GRASP

- GRASP<sup>++</sup>
  - Construtivos alternativos – Roleta
    - [Bresina, 1996]
    - Na versão tradicional, todos os elementos da lista restrita possuem a mesma chance de serem escolhidos;
    - Nesta proposta, a probabilidade de escolha varia de acordo com a avaliação de cada candidato.



[MResende]  
<http://www2.research.att.com/~mgcr/talks/2010-11-copios2010-grasp-pr.pdf>

# GRASP

- GRASP<sup>++</sup>
  - Construtivos alternativos – Custos alterados
    - [Ribeiro, Uchoa, & Werneck, 2002];
    - Aplicar uma perturbação, introduzir algum tipo de ruído nos custos antes de aplicar uma heurística de construção.

[MResende]

<http://www2.research.att.com/~mgcr/talks/2010-11-copios2010-grasp-pr.pdf>

# GRASP

- GRASP<sup>++</sup>
  - Uso de filtros:
    - Construir um conjunto de soluções e aplicar BL apenas na melhor delas;
    - A cada solução construída, aplicar algum critério de aceitação. Somente aplicar BL nas soluções aceitas.

[MResende]

<http://www2.research.att.com/~mgcr/talks/2010-11-copios2010-grasp-pr.pdf>

# GRASP

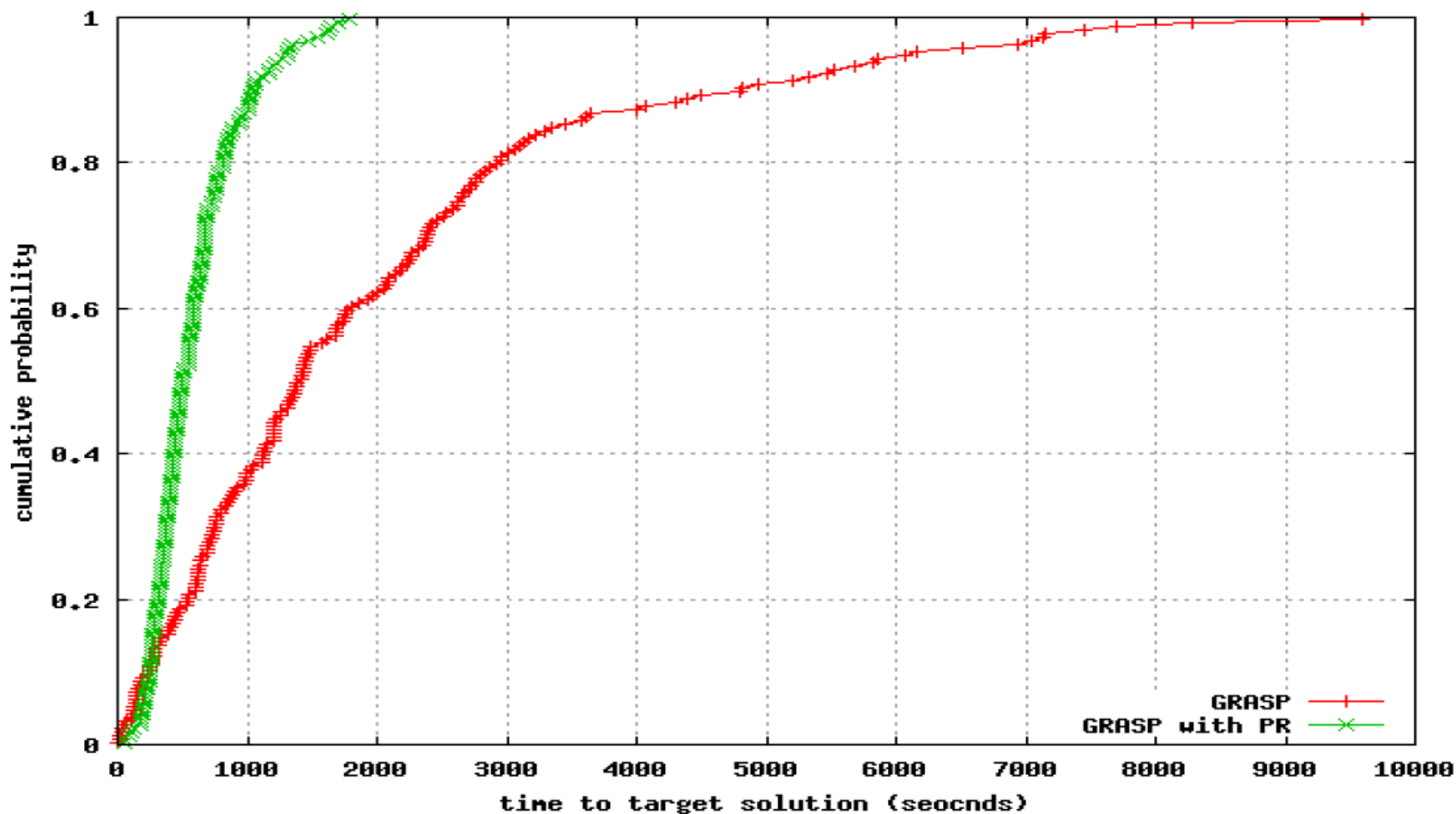
- GRASP com memória
  - Etapa de construção
    - Como a intensificação da Busca Tabu;
    - Identificar atributos presentes nas melhores soluções e “incentivar ou forçar” a presença destes atributos nas próximas soluções
    - Memória de médio prazo → Conjunto soluções elite.

# GRASP

- GRASP com memória
  - Pós Busca Local
    - Path relinking (Reconexão por caminhos)
      - Estratégias de acionamento
        - Em cada iteração utilizando a solução da iteração atual e uma solução do conjunto elite;
        - Após as iterações do GRASP, aplicar PR entre todas as soluções do conjunto elite;

# GRASP

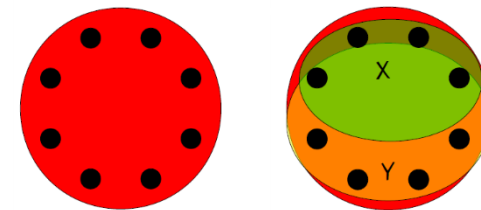
- GRASP com memória
  - Pós Busca Local
  - Path relinking





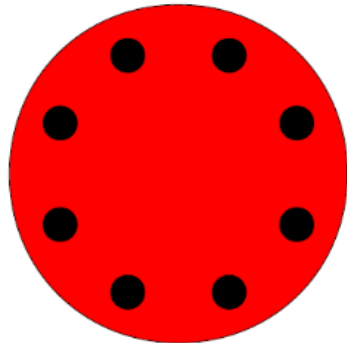
# GRASP

- GRASP com memória
  - Path relinking Evolutivo (EV-PR)
    - Resende & Werneck, 2004, 2006
    - Pode ser utilizado como um procedimento de intensificação, ou como método de pós otimização;
    - Aplicado sobre um conjunto de soluções;
    - Aprimora as soluções de forma a ter um conjunto com soluções ainda melhores.



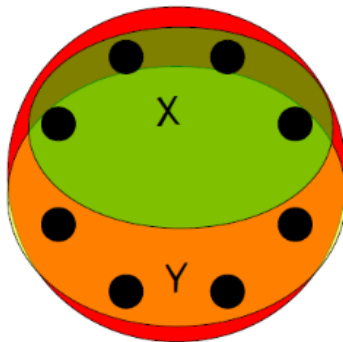
# GRASP

- GRASP com memória
  - Path relinking Evolutivo (EV-PR)
    - População inicial ( $P_0$ )  $\rightarrow$  Pool de soluções elite
    - Inicialmente:
      - Conjunto X: Pequeno e com as melhores soluções (1 ou 2 soluções);
      - Conjunto Y: Todo o conjunto de soluções.



# GRASP

- GRASP com memória
  - Path relinking Evolutivo (EV-PR)
    - População inicial ( $P_0$ )  $\rightarrow$  Pool de soluções elite
    - Inicialmente:
      - Conjunto X: Pequeno e com as melhores soluções (1 ou 2 soluções);
      - Conjunto Y: Todo o conjunto de soluções.

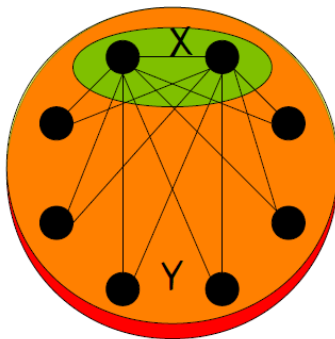


# GRASP

- GRASP com memória

- Path relinking Evolutivo (EV-PR)

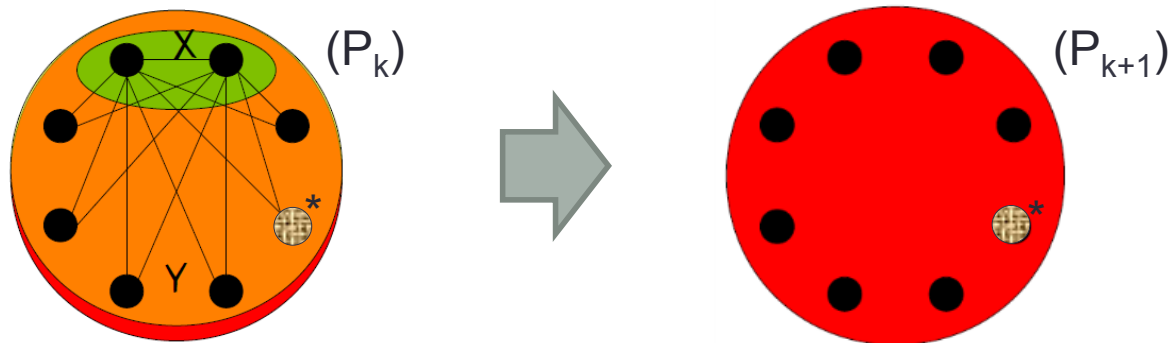
- População inicial ( $P_0$ )  $\rightarrow$  Pool de soluções elite
- Aplicar PR entre todos os pares  $(x,y)$  de soluções elite onde  $x \in X$  e  $y \in Y$
- A solução resultante  $z = PR(x,y)$  é candidata a integrar a próxima população;
- Regras para inclusão na próxima população é a mesma para PR



- ou  $z$  é melhor que a melhor solução
- ou  $z$  é melhor que a pior e suficientemente diferente as demais.

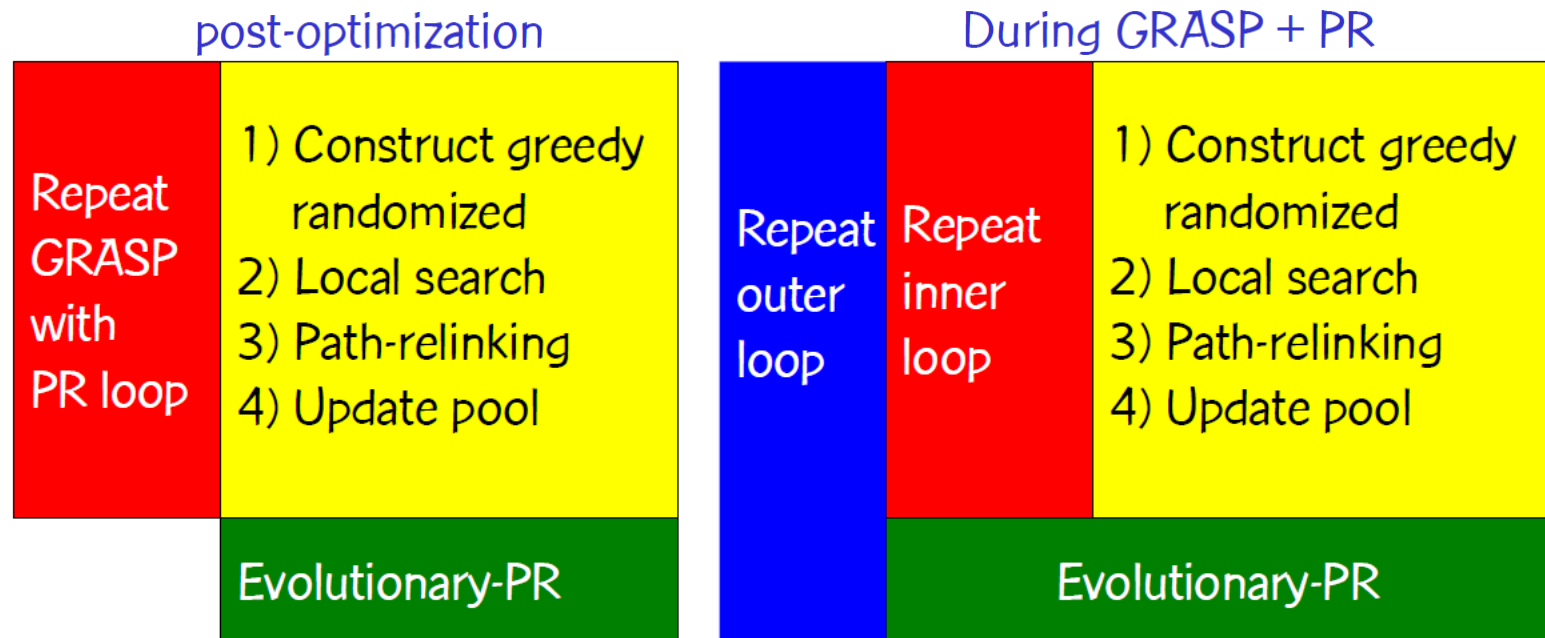
# GRASP

- GRASP com memória
  - Path relinking Evolutivo (EV-PR)
    - O algoritmo termina quando a melhor solução população atual possui o mesmo valor da melhor solução da população anterior.



# GRASP

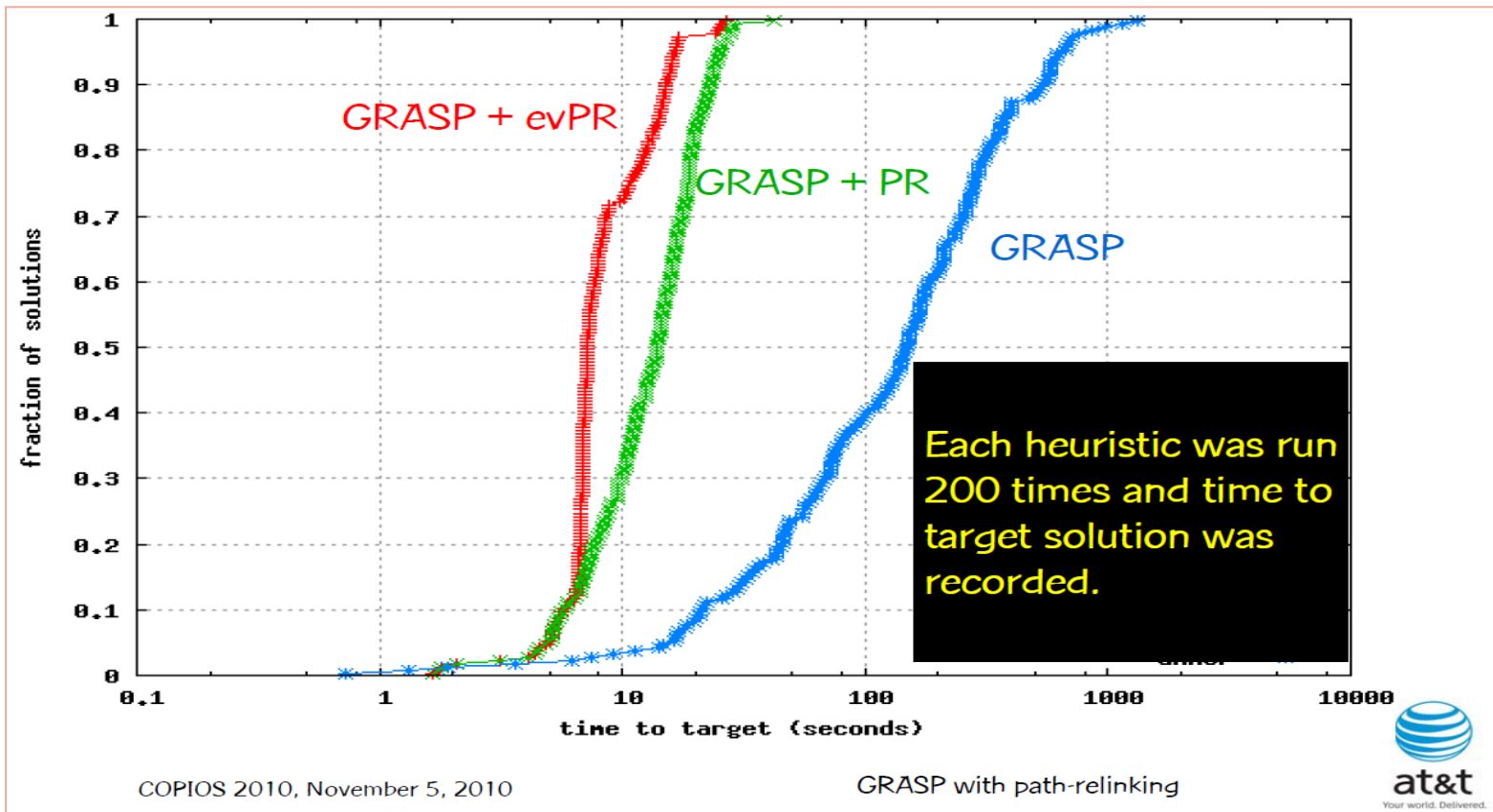
- GRASP com memória
  - Path relinking Evolutivo (EV-PR)



Fonte: <http://www2.research.att.com/~mgcr/talks/2010-11-copios2010-grasp-pr.pdf>

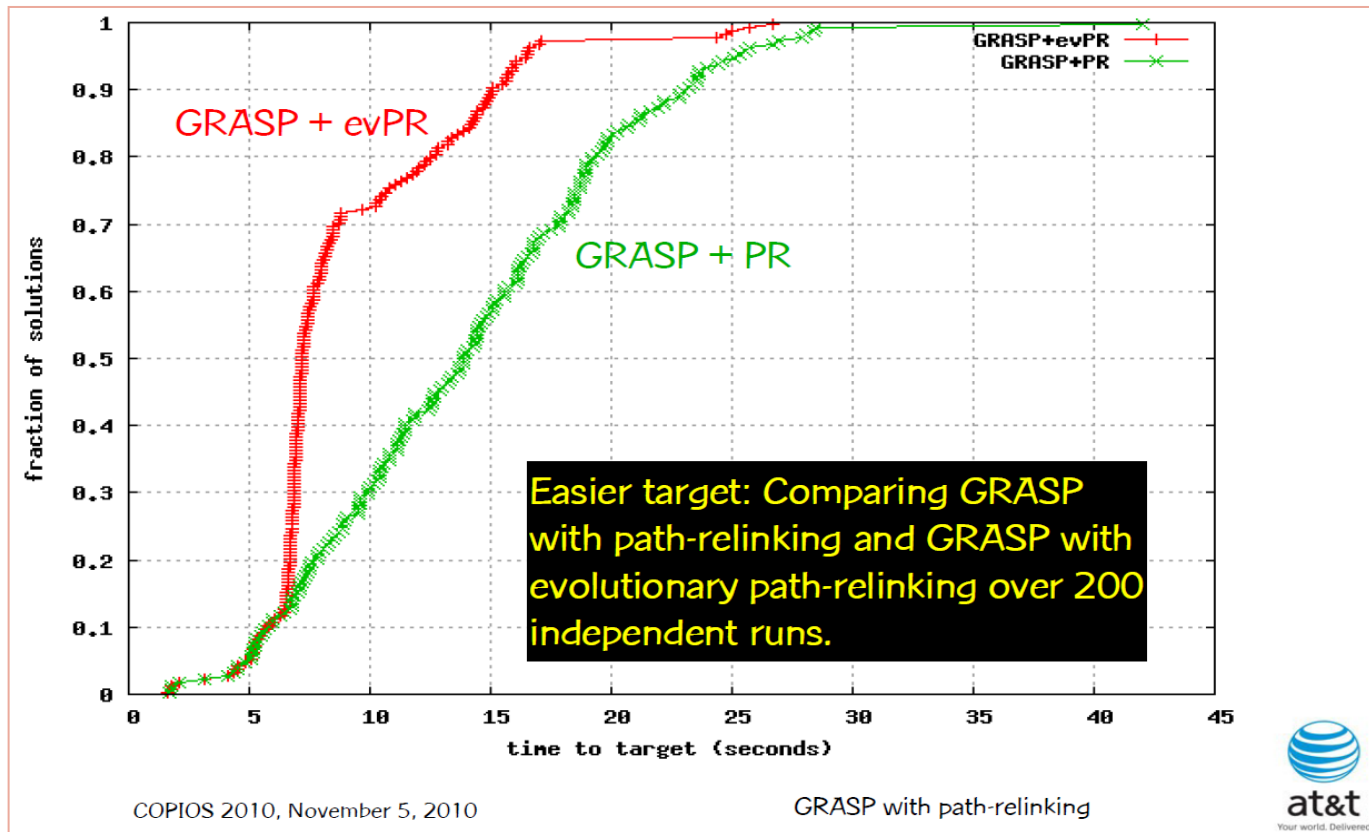
# GRASP

- GRASP com memória
  - Path relinking Evolutivo (EV-PR)



# GRASP

- GRASP com memória
  - Path relinking Evolutivo (EV-PR)





# GRASP

- GRASP++

- Opções de seleção do parâmetro  $\alpha$ 
  - Valor Fixo
    - Resultado vai depender do problema e do tamanho da instância;
  - Em cada iteração do GRASP, seleção aleatória do parâmetro
    - Conjunto discreto de valores  $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m]$
    - Mesma probabilidade de seleção.
  - GRASP Reativo

# GRASP

- GRASP++

- GRASP Reativo [ Prais & Ribeiro (2000) ]

- Conjunto discreto de valores  $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m]$
    - Probabilidade de escolha de  $\alpha_m$  é  $p_m$
    - Ajuste adaptativo da probabilidade, favorecendo valores de  $\alpha$  que produziram melhores resultados.

# GRASP

- GRASP++

- GRASP Reativo [ Prais & Ribeiro (2000) ]

- Conjunto discreto de valores  $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m]$
    - Inicialmente  $p_i = 1/i$ , para  $i = \{1, 2, \dots, m\}$
    - Probabilidade ajustada a cada  $k$  iterações
      - Considerando:
        - $f(s^*)$  o valor custo da melhor solução;
        - $A_i$  média das soluções obtidas com  $\alpha_i$ ;
      - A cada  $k$  iterações, atualizar probabilidade (prob. minimização):
        - $q_i = f(s^*) / A_i$
        - $p_i = q_i / i$

# GRASP

- GRASP++
  - Busca Local
    - Utilização de outras metaheurísticas na etapa de busca local do GRASP.
    - Exemplo: ILS, Tabu, Simulated Annealing entre outras que ainda serão vistas.

# GRASP

- GRASP
  - Critério de parada
    - Número máximo de iterações (original);
    - Tempo de execução (comparação de diferentes abordagens);
    - Solução alvo (ttt plot);
    - .....

# GRASP

- GRASP Paralelo

- Paralelização simples e direta

Dividir as iterações para os processadores disponíveis.

# Dúvidas

- Perguntas ou comentários?



Luciana Brugiolo Gonçalves  
lbrugiolo@ufv.br

# Referências

- EL-GHAZALI TALBI. Metaheuristics: From Design to Implementation, Wiley, 2009.
- Mauricio Resende – AT&T
  - <http://mauricio.resende.info/MiniCursoGRASP.pdf>
  - <http://www2.research.att.com/~mgcr/talks/2010-11-copios2010-grasp-pr.pdf>