

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Физико-механический институт
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Работа допущена к защите
Руководитель ОП
_____ А. М. Левченя
« ____ » _____ 2022 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(работа бакалавра)

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ
ТЕЧЕНИЙ ГАЗА В ПАКЕТЕ OPENFOAM**

по направлению подготовки 03.03.01 – Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) 03.03.01_01 – Математическое и экспериментальное
моделирование в механике сплошных сред

Выполнил

студент гр. 5030301/80101

Э. Г. Гулиев

Руководитель

доцент ВШПМиВФ

А. А. Смирновский

Консультант

доцент ВШПМиВФ

Е. В. Колесник

Санкт-Петербург – 2022

РЕФЕРАТ

48 с., 28 рисунков, 2 таблицы, 0 приложений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ВЫСОКОСКОРОСТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ, ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА, ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, СХЕМЫ ГОДУНОВСКОГО ТИПА, МЕТОДЫ СКВОЗНОГО СЧЕТА, СХЕМЫ АППРОКСИМАЦИИ КОНВЕКТИВНЫХ ПОТОКОВ, СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ПОТОКОВ.

Тема выпускной квалификационной работы: «Численное моделирование двумерных сверхзвуковых течений газа в пакете OpenFOAM».

Работа посвящена разработке методов аппроксимации вектора конвективных потоков и тестированию пакета OpenFOAM применительно к задачам газовой динамики. Задачи исследования:

1. Разработка методов аппроксимации вектора конвективных потоков.
2. Выбор тестовых задач, проведение сопоставительных расчетов, выявление достоинств и недостатков численных методов.
3. Исследование особенностей применения функций ограничителей в процедуре реконструкции газодинамических переменных.

Все расчеты проводились с помощью программного пакета OpenFOAM, предназначенного для численного моделирования задач механики сплошных сред. В процессе выполнения дипломной работы ветвь пакета для расчета высокоскоростных течений была дополнена возможностью аппроксимации вектора конвективных потоков с помощью следующих численных методов: AUSM, AUSM+, HLL, HLLC, схема Русанова.

ABSTRACT

48 pages, 28 figures, 2 tables, 0 appendices

KEY WORDS: HIGH-SPEED FLOWS, GAS DYNAMICS, NUMERICAL SIMULATION, GODUNOV-TYPE SCHEMES, SHOCK-CAPTURING METHOD, CONVECTIVE FLUXES APPROXIMATION SCHEMES, FLUX SPLITTING SCHEMES.

The subject of the graduate qualification work: “Numerical modeling of two-dimensional supersonic gas flows in the OpenFOAM package”.

The work is devoted to the development of methods for approximating the vector of convective fluxes and testing OpenFOAM package as applied to the problems of gas dynamics. Research objectives:

1. Development of methods for approximating the vector of convective fluxes.
2. Selection of test problems, comparative calculations, identification of the advantages and disadvantages of numerical methods.
3. Study of the features of the use of limiter functions in the procedure for the reconstruction of gas-dynamic variables.

All calculations were carried out using the OpenFOAM software package, designed for numerical simulation of problems in continuum mechanics. During the thesis, the branch of this package for calculating high-speed flows was supplemented with the possibility of approximating the vector of convective fluxes using the following numerical methods: AUSM, AUSM+, HLL, HLLC, Rusanov's scheme.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	6
1. Математическая модель и численный метод	8
1.1. Уравнения динамики сжимаемого газа	8
1.2. Общие положения метода конечных объемов.....	10
1.3. Аппроксимация потоков на гранях контрольного объема	12
1.3.1. Схема Курганова-Тадмора	13
1.3.2. Схема AUSM.....	14
1.3.3. Схема AUSM+	15
1.3.4. Схема HLL	17
1.3.5. Схема Русанова.....	18
1.3.6. Схема HLLC.....	18
1.4. Повышение порядка точности.....	19
2. Методические и тестовые расчеты.....	22
2.1. Предварительные замечания	22
2.2. Сверхзвуковое течение в плоском канале с центральным клином	22
2.2.1. Регулярное отражение	23
2.2.1.1. Постановка задачи. Эталонное решение	23
2.2.1.2. Результаты расчетов по различным схемам	25
2.2.1.3. Результаты расчетов с применением различных ограничителей ..	28
2.2.2. Маховское отражение	29

2.2.2.1. Постановка задачи. Эталонное решение	29
2.2.2.2. Результаты расчетов по различным схемам	31
2.2.2.3. Результаты расчетов с применением различных ограничителей ..	33
2.3. Гиперзвуковое обтекание цилиндра	34
2.3.1. Постановка задачи. Эталонное решение.....	34
2.3.2. Результаты расчетов по различным схемам	38
2.4. Пограничный слой на плоской пластине	40
2.4.1. Постановка задачи. Эталонное решение.....	40
2.4.2. Сравнение с теорией пограничного слоя.....	42
2.5. Одномерное нестационарное течение в ударной трубе.....	43
2.5.1. Постановка задачи. Эталонное решение.....	43
2.5.2. Результаты расчетов по различным схемам	45
3. Заключение	46
4. Список использованных источников	47

Введение

При моделировании высокоскоростных течений методом контрольного объема ключевым моментом является способ аппроксимации вектора конвективных потоков. Численная схема должна быть экономичной, монотонной, иметь хорошие диссипативные свойства, аппроксимировать гладкие решения с максимально высоким порядком точности и разрешать газодинамические разрывы без образования различного рода осцилляций.

Для поиска решений с разрывами различают следующие подходы: методы гоудоновского типа, основанные на точном или приближенном решении задачи Римана о распаде разрыва, и методы, основанные на расщеплении вектора потоков. В настоящее время существует множество схем аппроксимации конвективных потоков, которые тем или иным образом приближенно решают задачу Римана. Однако до сих пор не разработана универсальная схема, которая могла бы успешно решать любую задачу газовой динамики, независимо от имеющихся особенностей течения и выдвинутых требований к точности расчета. Таким образом, на практике постоянно ведутся исследования в этом направлении. Можно отметить, что методы, основанные на расщеплении потоков, имеют малую алгоритмическую сложность, поэтому широко распространены среди инженеров.

Целями дипломной работы являются разработка методов аппроксимации конвективных потоков и тестирование пакета OpenFOAM применительно к тестовым модельным задачам газовой динамики; сопоставление расчетов с имеющимися аналитическими решениями; исследование решений на монотонность.

Расчеты проводились с помощью пакета OpenFOAM, предназначенного для численного моделирования задач механики сплошных сред.

Первая глава посвящена описанию математической модели течения вязкого сжимаемого газа и численного метода, разработанного в пакете OpenFOAM. Представлено подробное описание методов аппроксимации

конвективных потоков: AUSM, AUSM+, HLL, HLLC, схема Рusanова и Курганова-Тадмора.

Во второй главе приведены результаты верификации программного кода для решения ряда относительно простых тестовых задач в сопоставлении с известными аналитическими решениями.

1. Математическая модель и численный метод

1.1. Уравнения динамики сжимаемого газа

При моделировании сверхзвуковых течений необходимо учитывать возникновение ударных волн, представляющих собой поверхности разрыва параметров состояния и скорости движения газа. Уравнения Навье-Стокса, записанные в дифференциальной форме и полученные в предположении непрерывности параметров потока, непригодны для подобных задач. Поэтому возникает вопрос о введении некоторым образом обобщенного решения, которое может быть разрывным. Основной способ состоит в представлении законов сохранения (массы, импульса, энергии) в интегральной форме:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} d\Omega + \int_{\sigma} \vec{F}^{\Sigma} d\sigma = 0, \quad (1.1)$$

где Ω – произвольный объем, σ – поверхность, ограничивающая этот объем, σ – вектор консервативных переменных:

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

\vec{F}^{Σ} – сумма векторов невязких и вязких потоков соответственно
 $\vec{F}^{\Sigma} = \vec{F} + \vec{F}^*$:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} \\ \rho \vec{U} \cdot \vec{n} u + P \vec{n} \cdot \vec{i} \\ \rho \vec{U} \cdot \vec{n} v + P \vec{n} \cdot \vec{j} \\ \rho \vec{U} \cdot \vec{n} w + P \vec{n} \cdot \vec{k} \\ \rho \vec{U} \cdot \vec{n} H \end{bmatrix}, \quad \vec{F}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -\vec{n} \cdot \underline{\underline{\tau}} \cdot \vec{i} \\ -\vec{n} \cdot \underline{\underline{\tau}} \cdot \vec{j} \\ -\vec{n} \cdot \underline{\underline{\tau}} \cdot \vec{k} \\ -\vec{n} \cdot (\underline{\underline{\tau}} \cdot \vec{U} - \vec{q}) \end{bmatrix}, \quad (1.3)$$

где ρ – плотность, u, v, w – компоненты вектора скорости \vec{U} в декартовой системе координат, P – давление, E – полная энергия, H – полная энтальпия, \vec{n} – вектор нормали к поверхности, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты декартовой системы координат.

Величины полной энергии и энтальпии определяются следующими выражениями соответственно:

$$E = e + \frac{U^2}{2} = c_V T + \frac{U^2}{2}, \quad H = h + \frac{U^2}{2} = c_P T + \frac{U^2}{2}, \quad (1.4)$$

где e – удельная внутренняя энергия, h – удельная энтальпия, c_V – удельная теплоемкость при постоянном объеме, c_P – удельная теплоемкость при постоянном давлении, T – температура.

Система уравнений (1.1) замыкается с помощью уравнения состояния совершенного газа, определяющего связь между давлением, плотностью и удельной внутренней энергией:

$$P = (\gamma - 1) \rho e, \quad (1.5)$$

где $\gamma = c_P / c_V$ – показатель адиабаты.

Компоненты тензора вязких напряжений $\underline{\underline{\tau}}$ определяются законом Ньютона:

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right], \quad (1.6)$$

где μ – динамическая вязкость газа.

Компоненты вектора теплового потока \vec{q} определяются законом Фурье:

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (1.7)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, T – температура.

1.2. Общие положения метода конечных объемов

Для численного моделирования в области механики сплошных сред необходимо провести дискретизацию дифференциальных уравнений, описывающих исследуемый процесс. Успех моделирования во многом зависит от выбранного способа дискретизации и точности разрешения особенностей течения (таких, как, например, пограничный слой, ударные волны, турбулентность), которая зависит от качества расчетной сетки и порядка точности численных схем, применяемых для расчета отдельных слагаемых.

В настоящее время существует множество различных способов дискретизации уравнений, однако, как упоминалось ранее, дифференциальные уравнения неприменимы для получения разрывного решения, описывающего такие особенности течения как ударные волны и волны разрежения. Поэтому ведущее положение в газовой динамике среди методов дискретизации уравнений занимает метод конечных объемов (МКО), который оперирует интегральными формулировками законов сохранения массы, импульса и энергии. Переход к интегральной форме уравнений полностью оправдан, так как разрывные функции можно интегрировать. Дискретный аналог балансовых соотношений, записанных для контрольного объема, возникает вследствие применения теоремы о среднем и суммирования по всем граням выделенного объема потоков массы, импульса и энергии. Отличительными особенностями МКО и преимуществами перед другими способами дискретизации уравнений являются консервативность получаемого разностного аналога, то есть соблюдение исходных законов сохранения во всей расчетной области, представляющей собой совокупность контрольных объемов, и универсальность метода, выражающаяся в том, что МКО пригоден для дискретизации уравнений на сетках с произвольным видом сеточных элементов.

Запишем балансовые соотношения (1.1) в формулировке МКО:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} d\Omega + \sum_k \int_{\sigma_f} \vec{F}^\Sigma d\sigma = 0, \quad (1.8)$$

где Ω – контрольный объем, σ_f – площадь текущей грани, k – порядковый номер грани, τ – физическое время, \vec{w} – вектор консервативных переменных (1.2), \vec{F}^Σ – сумма векторов невязких и вязких потоков $\vec{F}^\Sigma = \vec{F} + \vec{F}^*$, которые определяются выражениями (1.3).

Для дискретизации интегралов, входящих в уравнение (1.8), необходимо использовать следующие квадратурные формулы, основанные на предположении однородного распределения интегрируемых величин:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} d\Omega = \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} \right) \Big|_P \Omega, \quad \int_{\sigma_f} \vec{F}^\Sigma d\sigma = \vec{F}_f^\Sigma \sigma_f, \quad (1.9)$$

где $(\dots)_P$ – центр контрольного объема, $(\dots)_f$ – центр текущей грани.

Применив приведенные аппроксимации (1.9), получим уравнение (1.8) в дискретном виде:

$$\left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} \right) \Big|_P + \frac{1}{\Omega} \sum_k \vec{F}_f^\Sigma \sigma_f = 0. \quad (1.10)$$

В рамках дипломной работы аппроксимация входящего в уравнение (1.10) слагаемого с производной по времени проводилась по схеме Эйлера, имеющей первый порядок точности:

$$\frac{\vec{w}_P^{n+1} - \vec{w}_P^n}{\Delta \tau} + \frac{1}{\Omega} \left(\sum_k \vec{F}_f^\Sigma \sigma_f \right)^{n+1} = 0. \quad (1.11)$$

Приведенная схема (1.11) формирует нелинейную систему уравнений, которую можно решить линеаризацией слагаемых или итерационными процедурами.

1.3. Аппроксимация потоков на гранях контрольного объема

Дискретизация интегральных уравнений по МКО приводит к системе уравнений (1.11). Для разрешения этой системы относительно искомых величин \vec{w}_P требуется знать соответствующие значения на гранях ячеек. Иначе говоря, перед решением системы (1.11) необходимо вычислить вектор потоков \vec{F}_f^Σ . Для этого применяется квазиодномерный подход, суть которого заключается в вычислении вектора потоков с использованием значений величин «слева» и «справа» (с индексами «L» и «R» соответственно) от текущей грани (рис. 1.1).

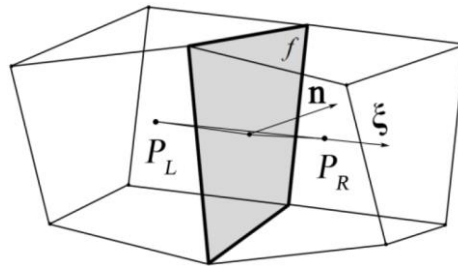


Рис. 1.1. Схема соприкасающихся контрольных объемов с центрами P_L и P_R

При моделировании существенно сжимаемых течений особое значение имеет способ расчета невязких потоков. При этом построение численных методов обычно основано на рассмотрении одномерных уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial \tau} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{n}} = 0, \quad (1.12)$$

где \vec{w} – вектор консервативных переменных (1.2), \vec{F} – вектор невязких потоков (1.3), \vec{n} – направление нормали к текущей грани.

В разделе 1.3.1, будет приведено описание схем годуновского типа (схема Курганова-Тадмора, Рusanова, HLL, HLLC) и схем, основанных на расщеплении вектора потоков (AUSM, AUSM+), разработка которых проводилась в пакете OpenFOAM.

О повышении порядка точности методов аппроксимации невязких потоков в процессе реконструкции (восстановления) локальных (слева и справа) значений на грани будет рассказано в разделе 1.4.

1.3.1. Схема Курганова-Тадмора

Схема Курганова-Тадмора [5] получила широкое распространение среди годуновских методов. Особенностью этой схемы является независимость аппроксимирующих выражений для потоков физических величин от характеристик исследуемой системы уравнений – нет необходимости использовать разложение решения по характеристикам.

Согласно этой схеме, вектор невязких потоков рассчитывается по следующей формуле:

$$\vec{F}_f = \beta \vec{F}_L + (1 - \beta) \vec{F}_R - \tilde{U}_f (\vec{w}_L - \vec{w}_R + (P_L - P_R) \vec{q}), \quad (1.13)$$

где β – весовой коэффициент, \vec{F}_L и \vec{F}_R – вектора локальных (слева и справа) невязких потоков, \vec{w}_L и \vec{w}_R – вектора локальных консервативных переменных, $\vec{q} = (0, n_x, n_y, n_z, 1)^T$ – вспомогательный вектор, \tilde{U}_f – слагаемое, характеризующее скорость:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_f &= -\beta \max(\tilde{U}_L, \tilde{U}_R), \\ \tilde{U}_L &= \max(\vec{U}_L \cdot \vec{n} + a_L, \vec{U}_R \cdot \vec{n} + a_R, 0), \\ \tilde{U}_R &= \min(\vec{U}_L \cdot \vec{n} - a_L, \vec{U}_R \cdot \vec{n} - a_R, 0). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Коэффициент β принимается равным $1/2$, так как вклады от локальных (слева и справа) невязких потоков учитываются одинаково.

1.3.2. Схема AUSM

Схема AUSM [6] основана на представлении вектора потоков $1/2$ в виде суммы конвективной составляющей $\vec{F}^{(c)}$ и составляющей, связанной с давлением $\vec{F}^{(P)}$:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} \\ \rho \vec{U} \cdot \vec{n} u + P \vec{n} \cdot \vec{i} \\ \rho \vec{U} \cdot \vec{n} v + P \vec{n} \cdot \vec{j} \\ \rho \vec{U} \cdot \vec{n} w + P \vec{n} \cdot \vec{k} \\ \rho \vec{U} \cdot \vec{n} H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \vec{U} \cdot \vec{n} \\ \rho \vec{U} \cdot \vec{n} u \\ \rho \vec{U} \cdot \vec{n} v \\ \rho \vec{U} \cdot \vec{n} w \\ \rho \vec{U} \cdot \vec{n} H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ P \vec{n} \cdot \vec{i} \\ P \vec{n} \cdot \vec{j} \\ P \vec{n} \cdot \vec{k} \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{F}^{(c)} + \vec{F}^{(P)}. \quad (1.15)$$

Следовательно, поток на грани равен следующей сумме:

$$\vec{F}_f = \vec{F}_f^{(c)} + \vec{F}_f^{(P)} \quad (1.16)$$

Способы расщепления потоков отличаются друг от друга. Конвективный поток $\vec{F}^{(c)}$ можно записать через число Маха, построенное по нормальной составляющей скорости $M = \vec{U} \cdot \vec{n} / a$, следующим образом:

$$\vec{F}^{(c)} = M \begin{bmatrix} \rho a \\ \rho a u \\ \rho a v \\ \rho a w \\ \rho a H \end{bmatrix} = M \hat{\vec{F}}^{(c)}, \quad (1.17)$$

где $a = \sqrt{\gamma R T}$ – скорость звука.

Расщепление конвективного потока проводится следующим образом:

$$\vec{F}_f^{(c)} = \begin{cases} M_f \hat{\vec{F}}_L^{(c)}, & M_f \geq 0 \\ M_f \hat{\vec{F}}_R^{(c)}, & M_f < 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

Число Маха на грани равно сумме положительной и отрицательной составляющих: $M_f = M_L^+ + M_R^-$, где расщепление проводится с помощью следующего соотношения:

$$M_{L/R}^{+/-} = \begin{cases} \pm \frac{1}{4} (M_{L/R} \pm 1)^2, & |M_{L/R}| \leq 1 \\ \frac{1}{2} (M_{L/R} \pm |M_{L/R}|), & |M_{L/R}| > 1 \end{cases} \quad (1.19)$$

Часть потока, связанная с давлением, рассчитывается как

$$\vec{F}_f^{(P)} = (P_L^+ + P_R^-) \begin{bmatrix} 0 \\ n_x \\ n_y \\ n_z \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

где расщепление давления проводится следующим образом:

$$P_{L/R}^{+/-} = \begin{cases} \frac{1}{4} P_{L/R} (M_{L/R} \pm 1)^2 (2 \mp M_{L/R}), & |M_{L/R}| \leq 1 \\ \frac{1}{2} P_{L/R} \frac{M_{L/R} \pm |M_{L/R}|}{M_{L/R}}, & |M_{L/R}| > 1 \end{cases} \quad (1.21)$$

1.3.3. Схема AUSM+

Схема AUSM+ [7] представляет собой модификацию стандартной схемы AUSM с введением обобщенной скорости звука a_f на грани:

$$a_f = \frac{1}{2} (a_L + a_R). \quad (1.22)$$

Тогда конвективный поток $\vec{F}_f^{(c)}$ может быть записан как

$$\vec{F}_f^{(c)} = M_f a_f \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho H \end{bmatrix}_f = M_f a_f \hat{\vec{F}}_f^{(c)}, \quad (1.23)$$

где $M_f = \vec{U} \cdot \vec{n} / a_f$ – число Маха, построенное по нормальной составляющей скорости потока.

Расщепление конвективного потока проводится следующим образом:

$$\vec{F}_f^{(c)} = \begin{cases} M_f a_f \hat{\vec{F}}_L^{(c)}, & M_f \geq 0 \\ M_f a_f \hat{\vec{F}}_R^{(c)}, & M_f < 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

Число Маха на грани равно сумме положительной и отрицательной составляющих: $M_f = M_L^+ + M_R^-$, где расщепление проводится с помощью обобщенного соотношения (1.19):

$$M_{L/R}^{+/-} = \begin{cases} \pm \frac{1}{4} (M_{L/R} \pm 1)^2 \pm \beta (M_{L/R}^2 - 1)^2, & |M_{L/R}| \leq 1 \\ \frac{1}{2} (M_{L/R} \pm |M_{L/R}|), & |M_{L/R}| > 1 \end{cases}, \quad (1.25)$$

где $-1/16 \leq \beta \leq 1/2$.

Часть потока, связанная с давлением, рассчитывается по формуле (1.20), где расщепление давления проводится следующим образом:

$$P_{L/R}^{+/-} = \begin{cases} \frac{1}{4} P_{L/R} \left((M_{L/R} \pm 1)^2 (2 \mp M_{L/R}) \pm \sigma M_{L/R} (M_{L/R}^2 \pm 1)^2 \right), & |M_{L/R}| \leq 1 \\ \frac{1}{2} P_{L/R} \frac{M_{L/R} \pm |M_{L/R}|}{M_{L/R}}, & |M_{L/R}| > 1 \end{cases}$$

где $-3/14 \leq \sigma \leq 3/16$.

Значения параметров β и σ принимаются равными $1/8$ и $3/16$ соответственно.

1.3.4. Схема HLL

Схема HLL [8], как и другие схемы Годуновского типа, основана на приближенном решении задачи Римана о распаде разрыва. В нее заложено предположение о том, что решение имеет двухволновую структуру в виде основных разрывов, описывающих распространение сильных особенностей течения, наподобие ударных волн (скачков уплотнения), и не описывающих другие особенности: тангенциальные и контактные разрывы.

Скорости основных разрывов (характеристик) S_L и S_R можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} S_L &= \min(\vec{U}_L \cdot \vec{n} - a_L, \vec{U}_R \cdot \vec{n} - a_R), \\ S_R &= \max(\vec{U}_L \cdot \vec{n} + a_L, \vec{U}_R \cdot \vec{n} + a_R), \end{aligned} \quad (1.26)$$

где a_L и a_R – скорости звука, \vec{U}_L и \vec{U}_R – вектора скорости слева и справа от грани, \vec{n} – вектор нормали к поверхности грани.

Численный поток на грани рассчитывается следующим образом:

$$\vec{F}_f = \begin{cases} \vec{F}_L, & 0 \leq S_L \\ \vec{F}_G, & S_L \leq 0 \leq S_R, \\ \vec{F}_R, & 0 \geq S_R \end{cases} \quad (1.27)$$

где \vec{F}_G – решение системы уравнений, представляющих собой соотношения Рэнкина-Гюгонио, записанные для основных разрывов, движущихся со скоростями S_L и S_R соответственно:

$$\begin{cases} \vec{F}_G = \vec{F}_L + S_L (\vec{w}_G - \vec{w}_L) \\ \vec{F}_G = \vec{F}_R + S_R (\vec{w}_G - \vec{w}_R) \end{cases} \quad (1.28)$$

Не вдаваясь в подробности решения системы (1.28), запишем ее решение для вектора потоков \vec{F}_G :

$$\vec{F}_G = \frac{S_R \vec{F}_L - S_L \vec{F}_R + S_L S_R (\vec{w}_R - \vec{w}_L)}{S_R - S_L} \quad (1.29)$$

Далее перейдем к описанию некоторых модификаций схемы HLL.

1.3.5. Схема Русанова

Схема Русанова [9] основана на самом простом приближении задачи Римана. В нее заложено предположение о том, что решение имеет двухволновую симметричную структуру, в котором возмущенная область, образующаяся в результате распада разрыва, ограничена симметрично расположенными характеристиками S_L и S_R , которые, в свою очередь, определяются следующими соотношениями:

$$S_L = -S^+, \quad S_R = S^+, \quad (1.30)$$

$$S^+ = \max \left(\left| \vec{U}_L \cdot \vec{n} - a_L \right|, \left| \vec{U}_L \cdot \vec{n} - a_R \right|, \left| \vec{U}_L \cdot \vec{n} + a_L \right|, \left| \vec{U}_L \cdot \vec{n} + a_R \right| \right)$$

Схема Русанова достаточно проста и надежна, однако предположение о симметричности (1.30) значительно понижает точность предсказания решения в случае движения основных разрывов с разными скоростями.

1.3.6. Схема HLLC

Рассмотренная в методе HLL двухволновая структура решения верна для гиперболических систем уравнений (например, одномерные уравнения мелкой воды), однако для более сложных систем, например, для уравнений Эйлера или двумерных уравнений мелкой воды, предложенная структура решения неверна. Как следствие, разрешение сильных особенностей течения, как контактные или тангенциальные разрывы, может быть неточным.

Данная проблема была решена введением нового метода как модификации стандартного метода HLL, впоследствии получившего название HLLC [10], где дополнительно проводится учёт центрального разрыва, движущегося со скоростью S^* .

Численный поток на грани рассчитывается следующим образом:

$$\vec{F}_f = \begin{cases} \vec{F}_L, & 0 \leq S_L \\ \vec{F}_L^*, & S_L \leq 0 \leq S^* \\ \vec{F}_R^*, & S^* \leq 0 \leq S_R \\ \vec{F}_R, & 0 \geq S_R \end{cases}, \quad (1.31)$$

где $\vec{F}_{L/R}^*$ – решения системы уравнений, представляющих собой соотношения Рэнкина-Гюгоньо. Скорость контактного разрыва S^* можно определить с помощью следующего соотношения:

$$S^* = \frac{(P_R - P_L) + \rho_L \vec{U}_L \cdot \vec{n} (S_L - \vec{U}_L \cdot \vec{n}) - \rho_R \vec{U}_R \cdot \vec{n} (S_R - \vec{U}_R \cdot \vec{n})}{\rho_L (S_L - \vec{U}_L \cdot \vec{n}) - \rho_R (S_R - \vec{U}_R \cdot \vec{n})} \quad (1.32)$$

Введем вспомогательный вектор $\vec{q} = (0, n_x, n_y, n_z, S^*)^T$. Тогда решения для векторов потоков можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{F}_L^* &= \frac{S^* (S_L \vec{w}_L - \vec{F}_L) + S_L \left[P_L + \rho_L (S_L - \vec{U}_L \cdot \vec{n}) (S^* - \vec{U}_L \cdot \vec{n}) \right] \vec{q}}{S_L - S^*}, \\ \vec{F}_R^* &= \frac{S^* (S_R \vec{w}_R - \vec{F}_R) + S_R \left[P_R + \rho_R (S_R - \vec{U}_R \cdot \vec{n}) (S^* - \vec{U}_R \cdot \vec{n}) \right] \vec{q}}{S_R - S^*} \end{aligned} \quad (1.33)$$

1.4. Повышение порядка точности

Стоит отметить, что вычисление значений слева и справа от грани играет принципиальную роль в вычислении невязких потоков, так как способ их расчета напрямую влияет на точность численного метода. Если в качестве

таких значений использовать значения в центрах прилегающих к грани ячеек, то численный метод будет иметь первый порядок точности. Для повышения порядка точности необходимо использовать другие способы расчета. На практике обычно прибегают к специальным методам с ограничителями, необходимость введения которых связана с неустойчивостью и немонотонностью линейных схем повышенного порядка точности в области разрывных решений (теорема Годунова). Для предотвращения возникновения осцилляций необходимо использовать схемы первого порядка, переключение к которым осуществляется с помощью ограничителей. Стандартный подход к введению ограничителя можно записать следующим образом:

$$c_f = c_0 + \Psi(r)(c_H - c_0), \quad (1.34)$$

где c_0 – значение, полученное по схеме первого порядка, c_H – значение, полученное по схеме высокого порядка, $\Psi(r)$ – функция ограничителя, зависящая от аргумента r , представляющего собой отношение последовательных градиентов интерполируемой величины. В зависимости от значения функции ограничителя схема может быть как высокого, так и пониженного порядка точности.

В настоящее время существует множество способов построения подобных схем, однако наиболее предпочтительными среди них являются так называемые TVD схемы, основанные на уменьшении полной вариации. Здесь ограничитель вводится следующим образом:

$$c_f = c_U + \Psi(r)(c_{CD} - c_U), \quad (1.35)$$

где c_{CD} – значение, вычисленное с помощью простой линейной интерполяции, эквивалентной центрально-разностной аппроксимации, $\Psi(r)$ – функция ограничителя, удовлетворяющая свойству симметричности:

$$r\Psi(1/r) = \Psi(r) \quad (1.36)$$

В дипломной работе использовались ограничители: MinMod, VanLeer, VanAlbada. Соответствующие им функции имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{MM}}(r) &= \max(\min(r, 1), 0), \\ \Psi_{\text{VL}}(r) &= \frac{r + |r|}{1 + |r|}, \quad \Psi_{\text{VA}}(r) = \frac{r^2 + r}{r^2 + 1},\end{aligned}\tag{1.37}$$

где MM – MinMod, VL – VanLeer, VA – VanAlbada.

2. Методические и тестовые расчеты

2.1. Предварительные замечания

В данном разделе проводится тестирование возможностей пакета OpenFOAM для расчета сверхзвуковых течений вязкого и невязкого газа на примере относительно простых тестовых задач. Численные решения сопоставляются с известными аналитическими решениями. Кроме того, проводится сравнительное тестирование разработанных численных схем.

Процедура реконструкции переменных, включающая применение того или иного ограничителя, формирует большое количество схем аппроксимации конвективных потоков с повышенным порядком точности. Таким образом, возникает потребность в проведении сопоставительных тестовых расчетов, направленных на выявление недостатков и достоинств различных схем.

В качестве тестовых рассматриваются следующие задачи: стационарное сверхзвуковое течение идеального газа в плоском канале с центральным клином (1), стационарное обтекание цилиндра гиперзвуковым однородным потоком воздуха (2), развитие ламинарного пограничного слоя на плоской пластине в условиях сверхзвукового набегающего потока (3), численное моделирование одномерного нестационарного течения в ударной трубе (задача о распаде разрыва) (4). Во всех задачах проводится исследование сеточной сходимости и влияния численной схемы на получаемое решение.

2.2. Сверхзвуковое течение в плоском канале с центральным клином

Задача о течении в плоском канале с центральным клином часто применяется для исследования работоспособности схем, разработанных для расчета сверхзвуковых течений. В случае небольшого угла наклона клина набежание сверхзвукового потока приводит к формированию присоединенного косоугольного скачка уплотнения. В зависимости от геометрических характеристик и параметров течения может быть как регулярное отражение, так и нерегулярное отражение этого скачка от стенки канала.

2.2.1. Регулярное отражение

2.2.1.1. Постановка задачи. Эталонное решение

Рассматривается течение идеального сжимаемого газа в плоском канале с центральным клином. Параметры газа подбираются так, чтобы скорость звука на входе была равна единице. Тогда скорость набегающего потока соответствует числу Маха. Высота канала на входе равна 1.4, длина канала – 5.0, длина области перед клином – 1.0, длина клина – 1.0, высота клина – 0.5, угол наклона клина – 30° , число Маха во входном сечении – 5.0.

При исследовании сеточной сходимости решения использовались структурированные расчетные сетки размерностью 200×50 (a), 400×100 (b), 800×200 (c), 1600×400 (d) ячеек. Общий вид расчетной области и сетки представлен на рисунке 2.1.

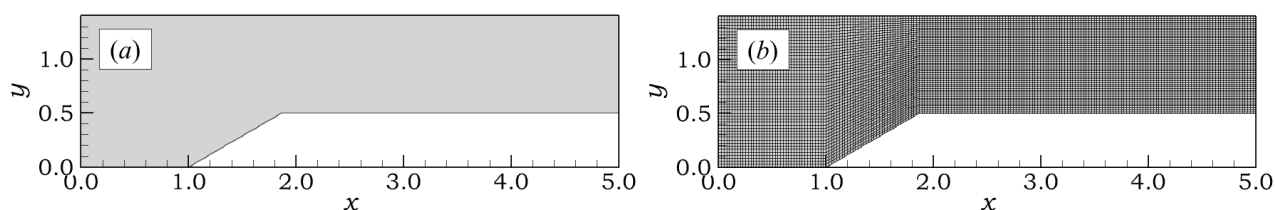


Рис. 2.1. Расчетная область (a) и сетка размерностью 200×50 ячеек (b)

Задаются следующие граничные условия: на входной границе – фиксированные значения компонент вектора скорости, давления и температуры, на нижней и верхней границах – условие симметрии, на выходной границе – нулевой градиент (экстраполяция значений с ближайших к границе ячеек).

На рисунке 2.2 приведены поля числа Маха, рассчитанные по схеме Курганова-Тадмора с применением ограничителя ММ на сетках (a) – (d).

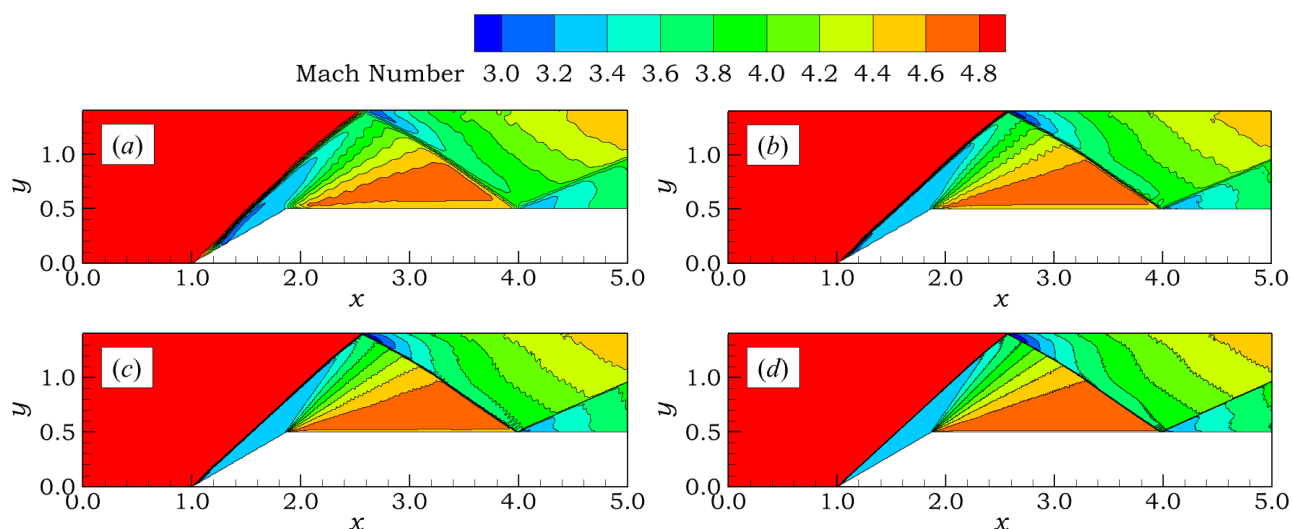


Рис.2.2. Поля числа Маха, рассчитанные по схеме Курганова-Тадмора с применением ограничителя ММ на сетках (a) – (d)

При заданных геометрических параметрах расчетной области и параметрах набегающего потока наблюдается регулярный режим отражения косоугольного скачка уплотнения – падающий и отраженный скачки уплотнения встречаются в точке отражения, расположенной непосредственно на верхней стенке канала. Каждый следующий скачок уплотнения имеет все меньшую интенсивность, поэтому вниз по потоку формируется система скачков уплотнения, выравнивающих давление. Кроме того, можно заметить, что повышение качества сетки приводит к более точному разрешению разрывов параметров потока, при этом отличие решений, полученных на сетках (c) – (d), крайне мало, поэтому можно считать, что решение, полученное на самой подробной сетке (d), является эталонным, а решение, полученное на сетке (c) – сеточно-независимым.

На рисунке 2.3 приведен график с распределениями относительного давления, полученными на сетках (a) – (d), вдоль линии $y = 0.75$.

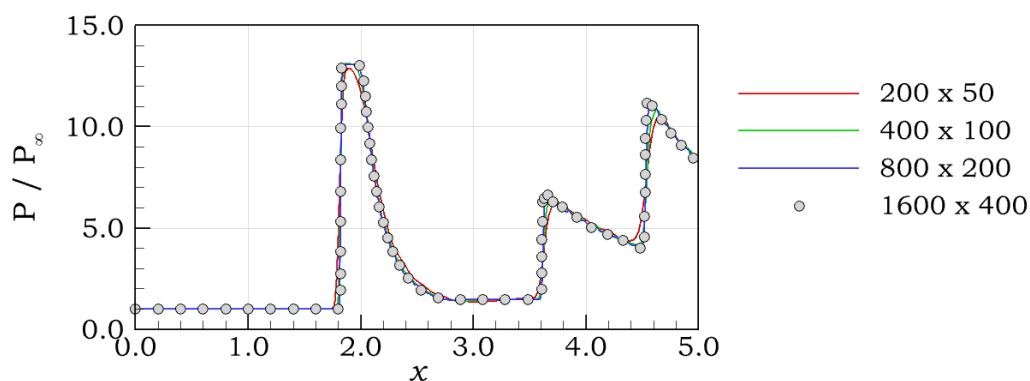


Рис. 2.3. Распределения относительного давления, полученные на сетках (a) – (d), вдоль горизонтальной линии $y = 0.75$

На рисунке 2.4 приведены соответственно поле модуля градиента плотности, где черным цветом нанесена пунктирная линия, определяющая положение присоединенного косого скачка уплотнения и соответствующая известному аналитическому решению [4], и поле относительного давления, полученное на самой подробной сетке (d).

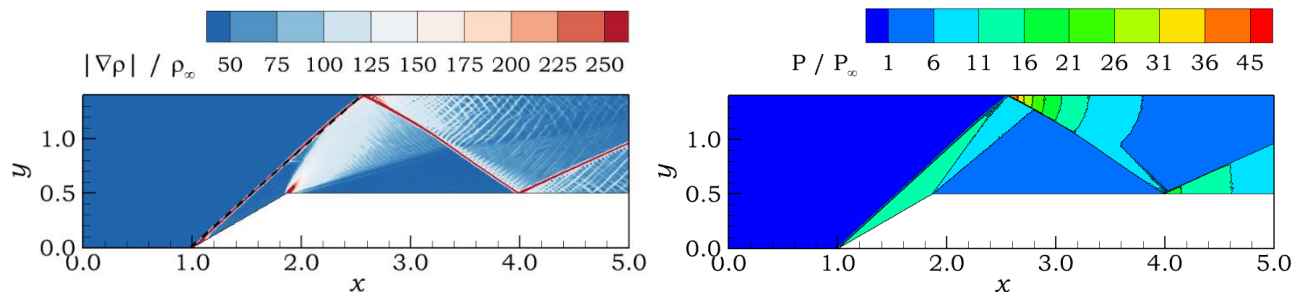


Рис. 2.4. Поле модуля градиента плотности (слева) и поле относительного давления (справа), полученное на самой подробной сетке (d)

Как и ранее, можно наблюдать образование падающего и отраженного скачков уплотнения. Положение присоединенного скачка хорошо согласуется с аналитическим решением.

2.2.1.2. Результаты расчетов по различным схемам

В предыдущем разделе были представлены результаты, полученные по схеме Курганова-Тадмора, которая является достаточно диссипативной схемой

и сильно размывает решение в области разрывов. В этом разделе будет проведен сравнительный анализ решений, полученных по другим схемам аппроксимации конвективных потоков с применением ограничителя VL, вносящего наименьшую численную диссипацию среди других ограничителей.

Очевидно, что достаточно подробная сетка разрешает все особенности течения, поэтому увидеть явные отличия между решениями, полученными на мелкой сетке будет достаточно проблематично. В этом случае логично проводить расчеты на самой грубой сетке (а), где будет заметно наличие диссипативных свойств у схем. На рисунке 2.5 приведены поля числа Маха, рассчитанные по различным схемам с применением ограничителя VL.

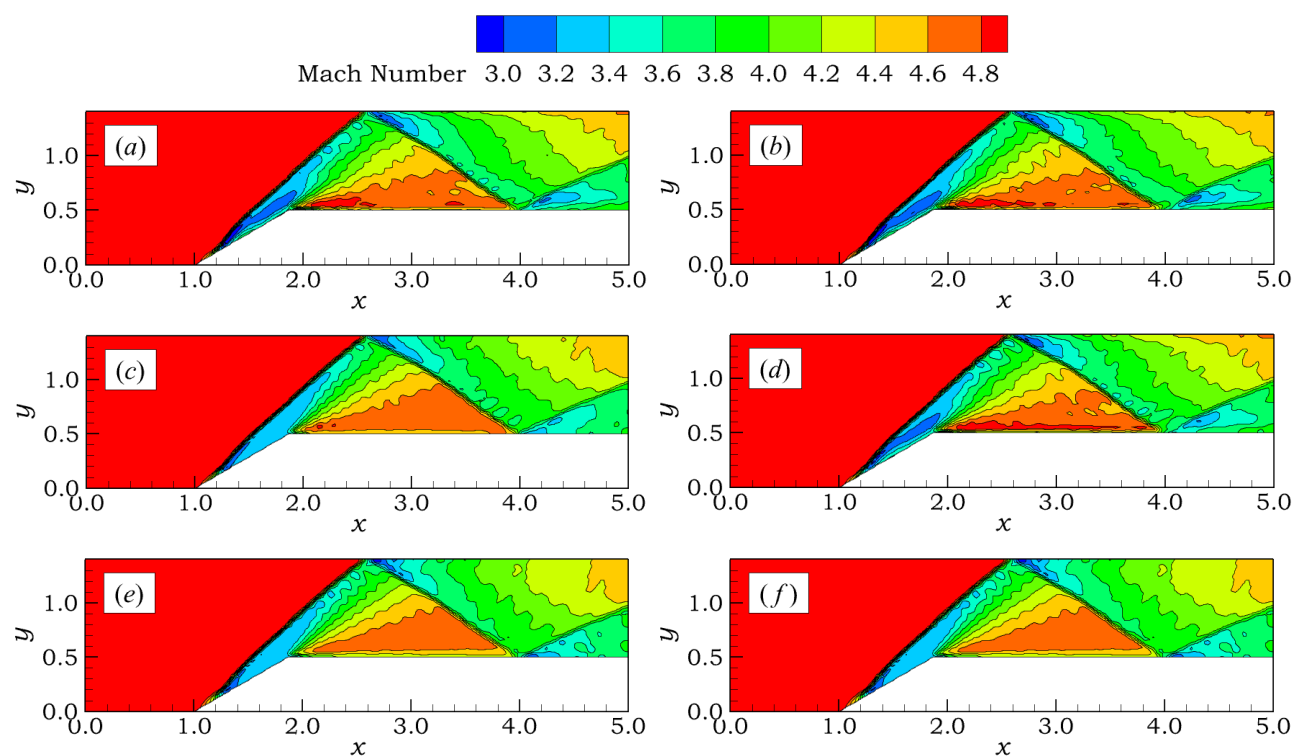


Рис. 2.5. Поля числа Маха, рассчитанные по схемам AUSM (a), AUSM+ (b), HLL (c), HLLC (d), Русанова (e), Курганова-Тадмора (f) с применением ограничителя VL

Отсюда видно, что менее диссипативными схемами аппроксимации конвективных потоков являются схемы AUSM, AUSM+, HLLC, а более диссипативными – схемы HLL, Русанова, Курганова-Тадмора. Кроме того, можно заметить, что в потоке наблюдаются сильные осцилляции, которые

предположительно связаны с не совсем корректным граничным условием на непроницаемой границе (поверхность клина).

На рисунке 2.6 приведен общий график с распределениями относительного давления, рассчитанными по различным схемам с применением ограничителя VL, вдоль нижней стенки канала. Черным цветом обозначено аналитическое решение.

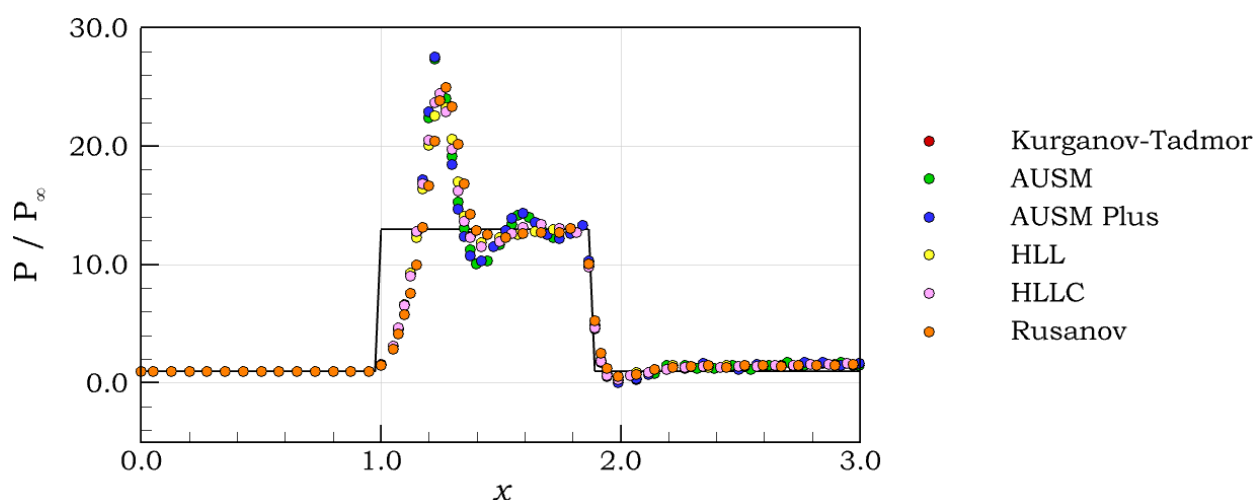


Рис. 2.6. Распределения относительного давления, полученные по различным схемам аппроксимации потоков с применением ограничителя VL, вдоль нижней стенки канала

Как и ранее, можно видеть сильные осцилляции около излома. Граничное условие на непроницаемой поверхности не учитывает, что значение давления на стенке должно быть больше, чем в приграничной ячейке. Это приводит к тому, что основные неустойчивости, идущие от присоединенного скачка уплотнения, существенно влияют на поле течения. Решить проблему сильных осцилляций можно с использованием других ограничителей, которые вносят большую диссипацию в расчет потоков, или применяя схему первого порядка точности. Другим вариантом решения проблемы может быть применение подхода, основанного на задаче Римана о распаде разрыва, позволяющего получить более физическое значение давления на стенке и значительно уменьшить имеющиеся осцилляции в потоке [3]. Однако в дипломной работе не предполагалось рассмотрение других граничных условий, поэтому в

следующем разделе будет рассказано о влиянии на поле течения ограничителей MM, VL, VA.

2.2.1.3. Результаты расчетов с применением различных ограничителей

При сравнении ограничителей необходимо учитывать, что диссипативная схема сильно размывает решение в области разрывов, и определить качественные отличия в работе ограничителей достаточно проблематично, поэтому обоснованно использовать менее диссипативную схему.

На рисунке 2.7 приведены поля числа Маха, рассчитанные по схеме AUSM с применением ограничителей MM, VL, VA.

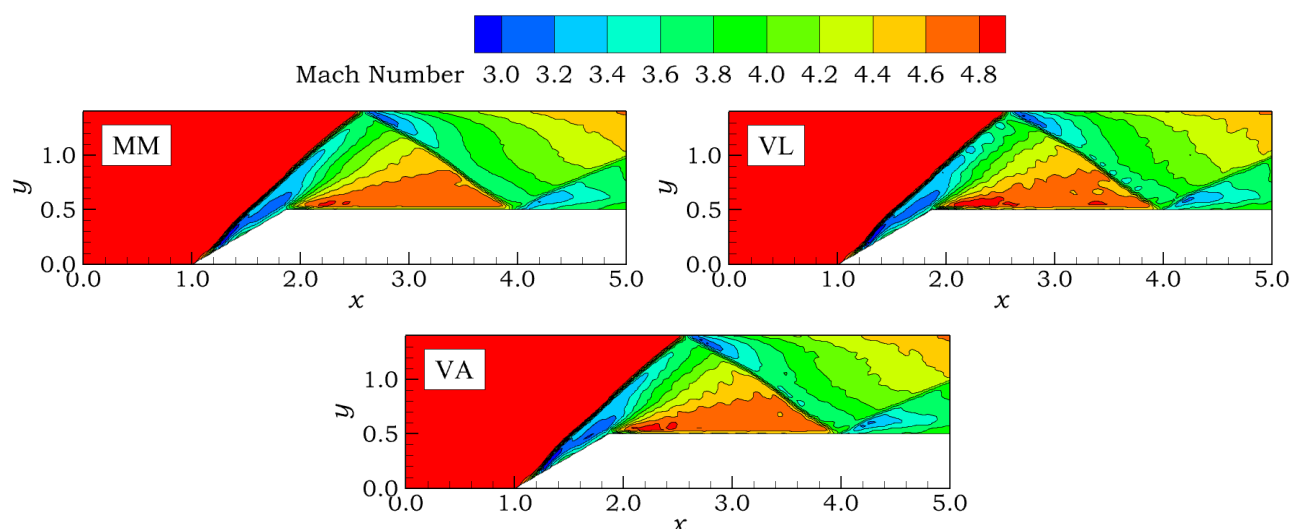


Рис. 2.7. Поля числа Маха, рассчитанные на самой грубой сетке (а) по схеме AUSM с применением ограничителей MM, VL, VA

Отсюда видно, что наименьшую диссипацию в расчет потоков вносит ограничитель VL, а наибольшую – ограничитель MM, существенно размывая имеющиеся осцилляции в решении.

На рисунке 2.8 приведен общий график с распределениями относительного давления, рассчитанными по схеме AUSM с применением ограничителей MM, VA, VL, вдоль нижней стенки канала. Черным цветом обозначено аналитическое решение.

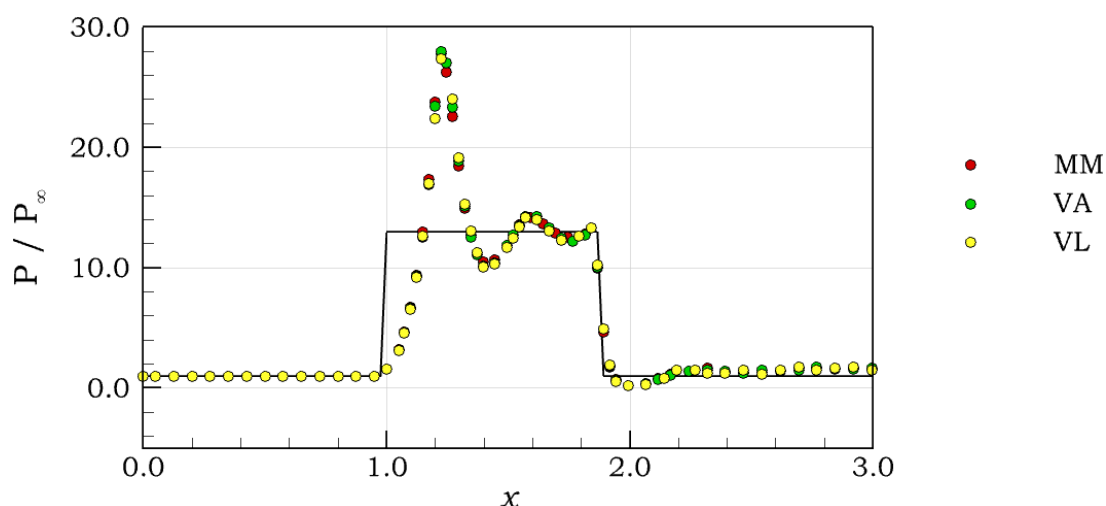


Рис. 2.8. Распределения относительного давления, полученные по схеме AUSM с применением ограничителей MM, VA, VL, вдоль нижней стенки канала

2.2.2. Маховское отражение

2.2.2.1. Постановка задачи. Эталонное решение

Рассматривается течение идеального сжимаемого газа в плоском канале с центральным клином. Параметры газа подбираются так, чтобы скорость звука на входе была равна единице. Тогда скорость набегающего потока соответствует числу Маха. Высота канала на входе равна 1.0, длина канала – 4.0, длина области перед клином – 1.0, длина клина – 1.0, высота клина – 0.5, угол наклона клина – 30° , число Маха во входном сечении – 5.0.

При исследовании сеточной сходимости решения использовались структурированные расчетные сетки размерностью 160×40 (a), 320×80 (b), 640×160 (c), 1280×320 (d) ячеек. Общий вид расчетной области и сетки представлен на рисунке 2.9.

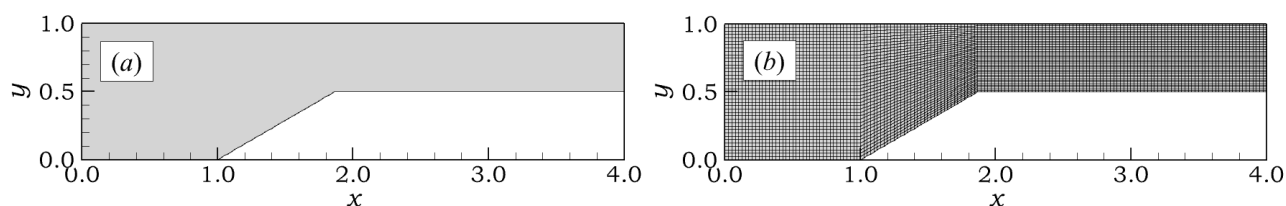


Рис. 2.9. Расчетная область (a) и сетка размерностью 160×40 ячеек (b)

Задаются следующие граничные условия: на входной границе – фиксированные значения компонент вектора скорости, давления и температуры, на нижней и верхней границах – условие симметрии, на выходной границе – нулевой градиент (экстраполяция значений с ближайших к границе ячеек).

На рисунке 2.10 приведены поля числа Маха, рассчитанные по схеме Курганова-Тадмора с применением ограничителя ММ на сетках (a) – (d).

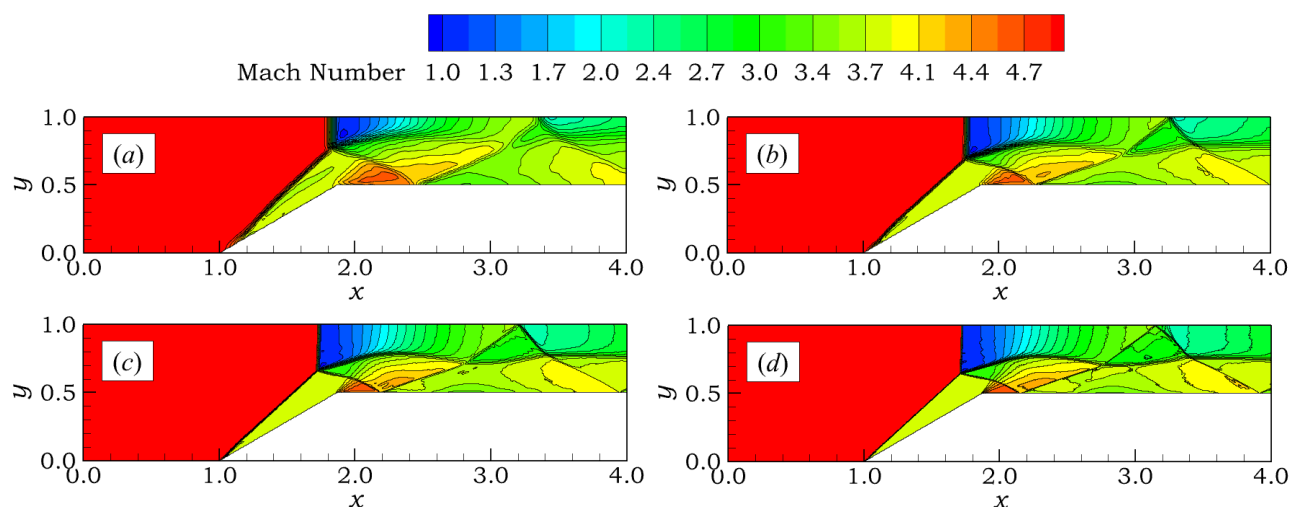


Рис. 2.10. Поля числа Маха, рассчитанные по схеме Курганова-Тадмора с применением ограничителя ММ на сетках (a) – (d)

При заданных геометрических параметрах расчетной области и параметрах набегающего потока наблюдается маховский режим отражения косого скачка уплотнения – кроме падающего и отраженного скачков уплотнения формируется третья ударная волна, так называемая ножка Маха, соединяющая тройную точку, от которой исходит контактный разрыв, с некоторой точкой на верхней стенке канала. Каждый следующий скачок уплотнения имеет все меньшую интенсивность, поэтому вниз по потоку формируется система скачков уплотнения, выравнивающих давление. Кроме того, можно заметить, что повышение качества сетки приводит к более точному разрешению разрывов. В таблице 2.1 приведены относительные длины ножки Маха H/L (L – длина клина), полученные на сетках (a) – (d). Как видно, при

измельчении сетки наблюдается увеличение длины ножки Маха, при этом отличие значений, полученных на сетках (c) – (d), менее 1 %.

	Сетка (a)	Сетка (b)	Сетка (c)	Сетка (d)
H / L	0.219	0.297	0.347	0.350

Табл. 2.1. Относительные длины ножки Маха, полученные на сетках (a) – (d)

На рисунке 2.11 приведен общий график с распределениями относительного давления, полученными на расчетных сетках (a) – (d), вдоль горизонтальной линии $y = 0.85$.

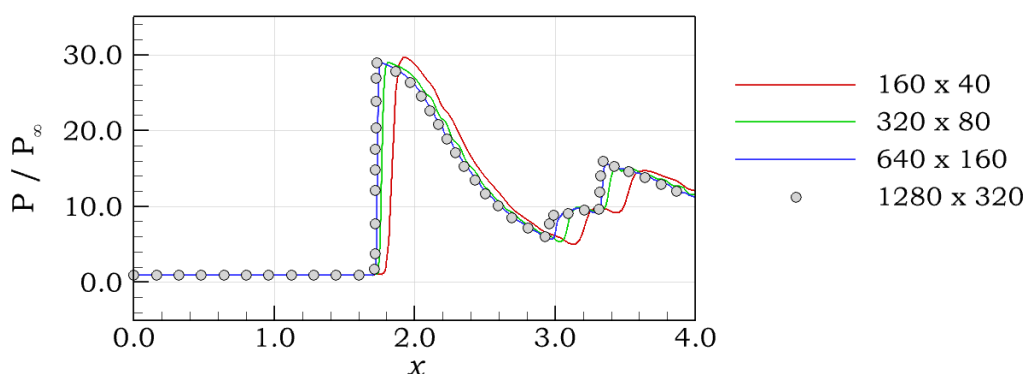


Рис. 2.11. Распределения относительного давления, полученные на сетках (a) – (d), вдоль горизонтальной линии $y = 0.85$

Отсюда видно, что отличие решений, полученных на сетках (c) – (d), крайне мало, поэтому можно считать, что решение, полученное на самой подробной сетке (d), является эталонным, а решение, полученное на сетке (c) – сеточно-независимым.

2.2.2.2. Результаты расчетов по различным схемам

В прошлом разделе были представлены результаты, полученные по схеме Курганова-Тадмора, которая является достаточно диссипативной схемой и сильно размывает решение в области разрывов. В этом разделе будет проведен сравнительный анализ решений, полученных по другим схемам аппроксимации

конвективных потоков с применением ограничителя VL, вносящего наименьшую численную диссипацию среди других ограничителей.

На рисунке 2.12 приведены поля числа Маха, полученные по различным схемам аппроксимации потоков с применением ограничителя VL. Расчеты проводились на самой грубой сетке (a).

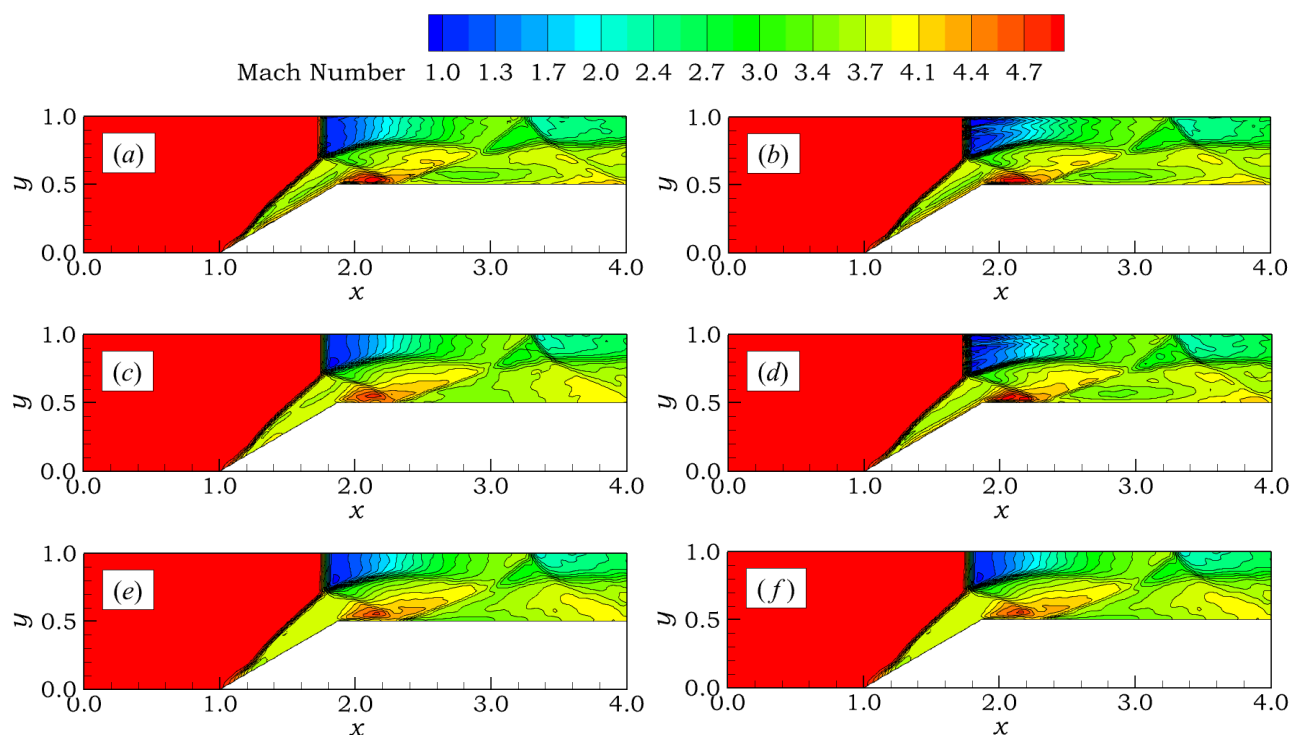


Рис. 2.12. Поля числа Маха, рассчитанные по схемам AUSM (a), AUSM+ (b), HLL (c), HLLC (d), Русанова (e), Курганова-Тадмора (f) с применением ограничителя VL

Отсюда видно, что существенные отличия между полученными решениями наблюдаются в области дозвукового течения за ножкой Маха. В случае аппроксимации потоков по схемам HLLC, AUSM, AUSM+ наблюдаются сильные осцилляции в этой области. Для схем HLL, Русанова и Курганова-Тадмора подобная картина отсутствует – получено относительно гладкое решение, что может быть объяснено их повышенной диссипативностью. Все остальные осцилляции, имеющиеся в потоке, связаны с некорректным граничным условием на непроницаемой границе (см. п. 2.2.1.2).

На рисунках 2.13 приведен общий график и растянутый по координате x вариант этого графика с распределениями относительного давления,

рассчитанными по различным схемам аппроксимации с применением ограничителя VL, вдоль горизонтальной линии $y = 0.85$.

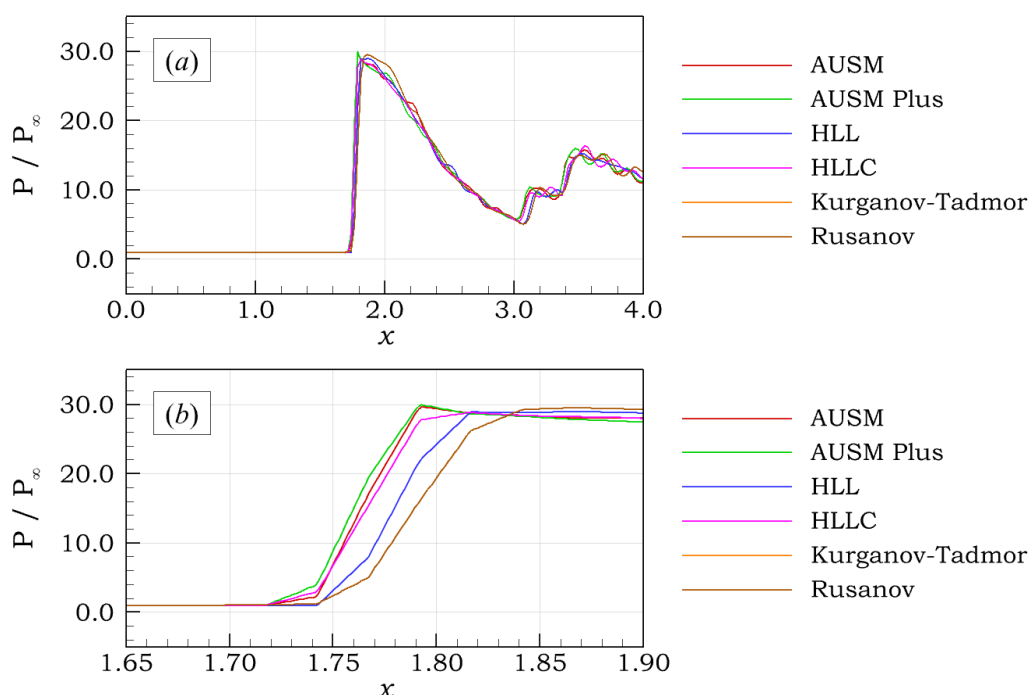


Рис. 2.13. График с распределениями относительного давления, полученными по различным схемам аппроксимации потоков с применением ограничителя VL, вдоль горизонтальной линии $y = 0.85$ (a), растянутый по координате x вариант этого графика (b)

По приведенным рисункам видно, что полученные решения достаточно хорошо согласуются между собой, однако наблюдаются осцилляции вблизи разрыва. По растянутому варианту графика можно заметить, что наиболее диссипативными схемами являются совпавшие друг с другом схемы Русанова и Курганова-Тадмора. Схемы семейства AUSM (AUSM, AUSM+) дают немонотонное поведение на разрыве.

2.2.2.3. Результаты расчетов с применением различных ограничителей

На рисунке 2.14 приведены поля числа Маха, полученные по схеме AUSM с применением ограничителей MM, VL, VA. Расчеты проводились на самой грубой сетке (a).

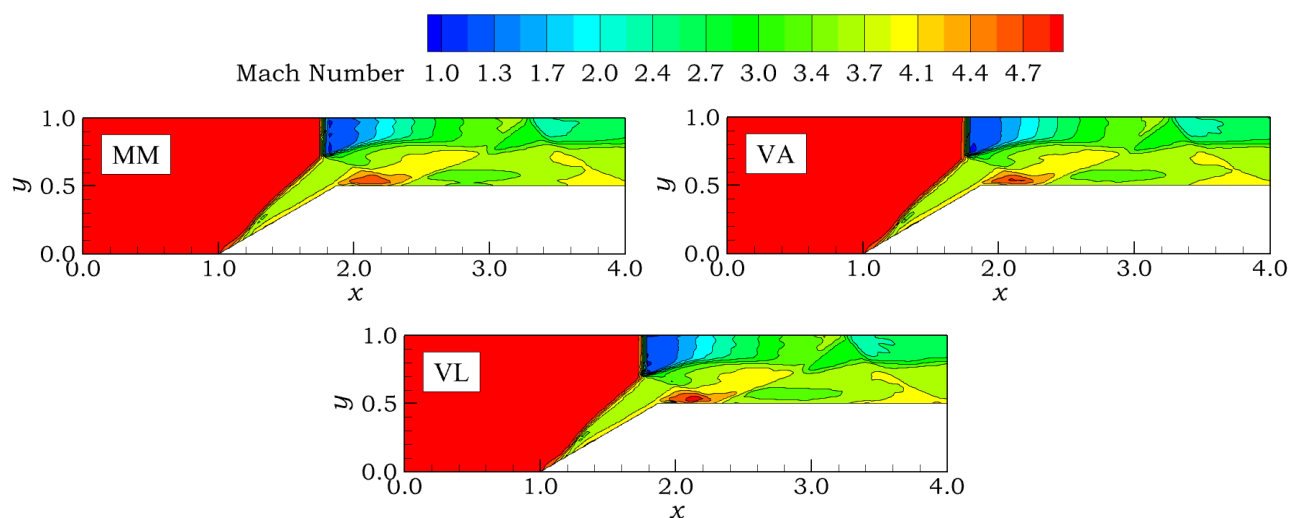


Рис. 2.14. Поля числа Маха, рассчитанные на самой грубой сетке (а) по схеме AUSM с применением ограничителей MM, VL, VA

Отсюда видно, что наименьшую диссипацию в расчет потоков вносит ограничитель VL, а наибольшую – ограничитель MM, существенно размывая имеющиеся осцилляции в решении.

2.3. Гиперзвуковое обтекание цилиндра

2.3.1. Постановка задачи. Эталонное решение

Рассматривается задача о стационарном обтекании цилиндра однородным потоком идеального газа для следующих режимов течения: при умеренном значении числа Маха набегающего потока, $M_{in} = 3$, и гиперзвуковое обтекание, $M_{in} = 10$. Расчетная область представляет собой сектор [1], заключенный между углами $[-75^\circ, 75^\circ]$, радиус цилиндра $R_1 = 1$, внешняя граница расположена на расстоянии $R_2 = 3$.

При исследовании сеточной сходимости использовались расчетные сетки размерностью 90×160 (а), 180×320 (b), 360×640 (c) ячеек вдоль окружного и радиального направления соответственно. Общий вид расчетной области и сетки представлен на рисунке 2.15.

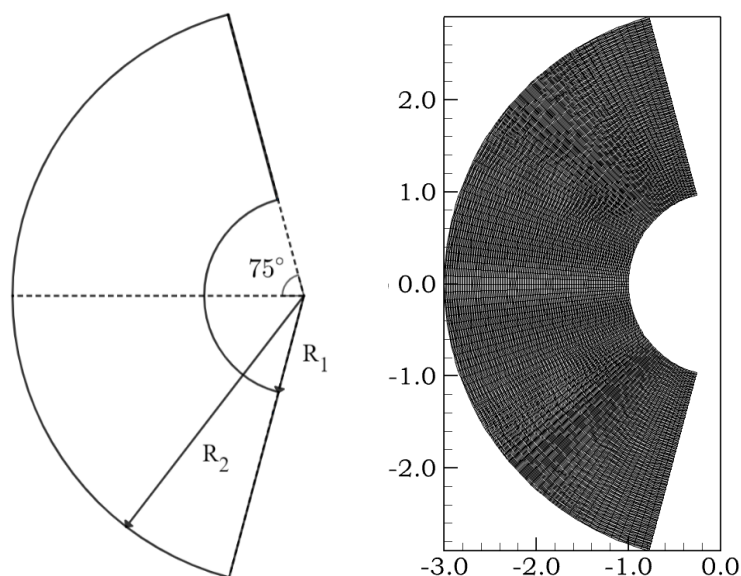


Рис. 2.15. Расчетная область (слева) и сетка размерностью 90×160 ячеек (справа)

Задаются следующие граничные условия: на входной границе – фиксированные значения компонент вектора скорости, давления и температуры, на нижней и верхней границах – нулевой градиент (экстраполяция значений с ближайших к границе ячеек), на поверхности цилиндра – условие стенки с проскальзыванием.

На рисунках 2.16 и 2.17 приведены соответственно поля числа Маха и распределения относительного давления вдоль горизонтальной линии $y = 0$, рассчитанные по схеме Курганова-Тадмора с применением ограничителя ММ на сетках (a) – (c) для двух режимов течения. Выбор схемы Курганова-Тадмора для получения эталонного решения обусловлен ее высокой степенью диссипативности и отсутствием сильных осцилляций в течении.

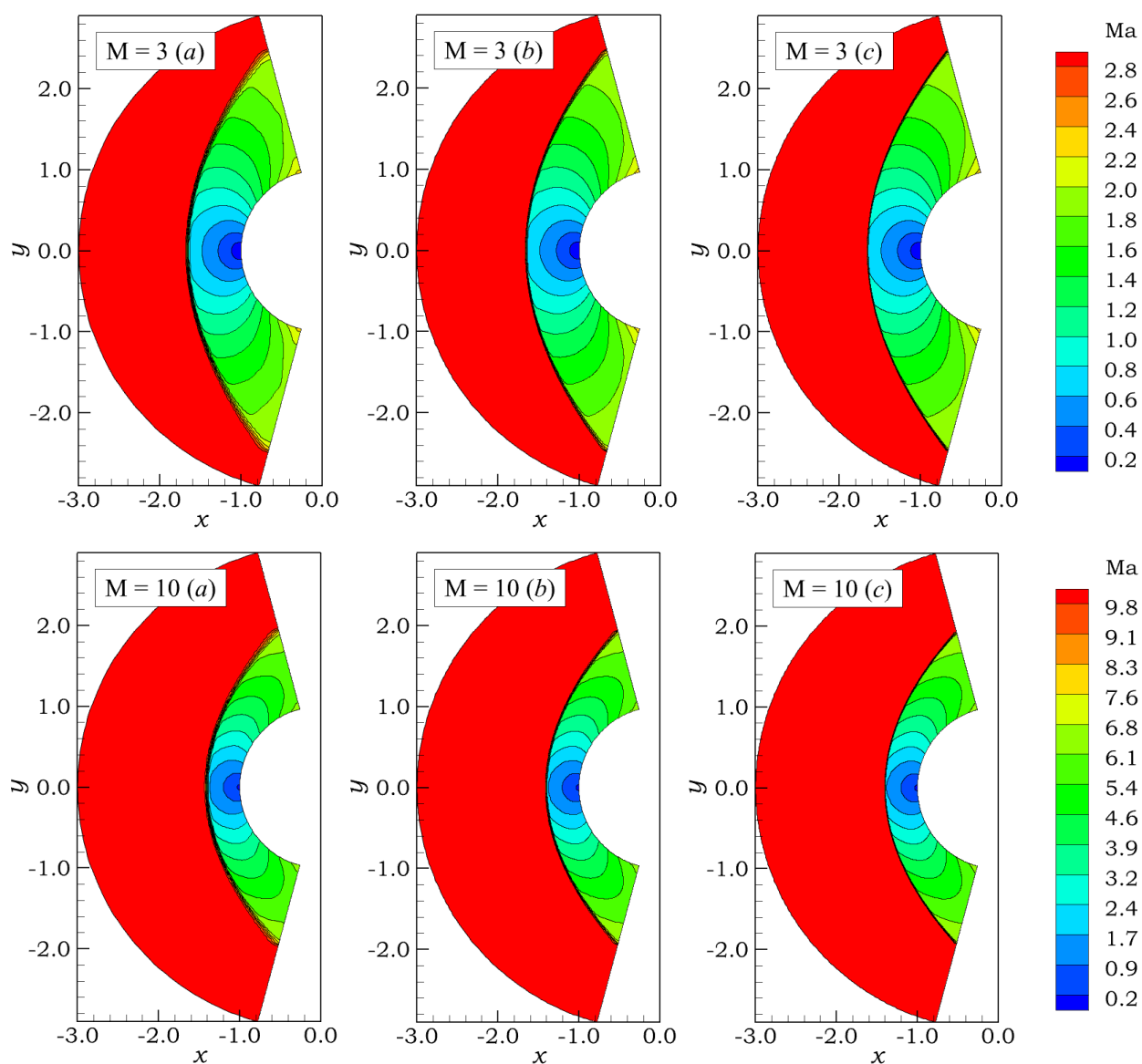


Рис. 2.16. Поля числа Маха, рассчитанные по схеме Курганова-Тадмора с применением ограничителя ММ на сетках (a) – (c) для двух режимов течения

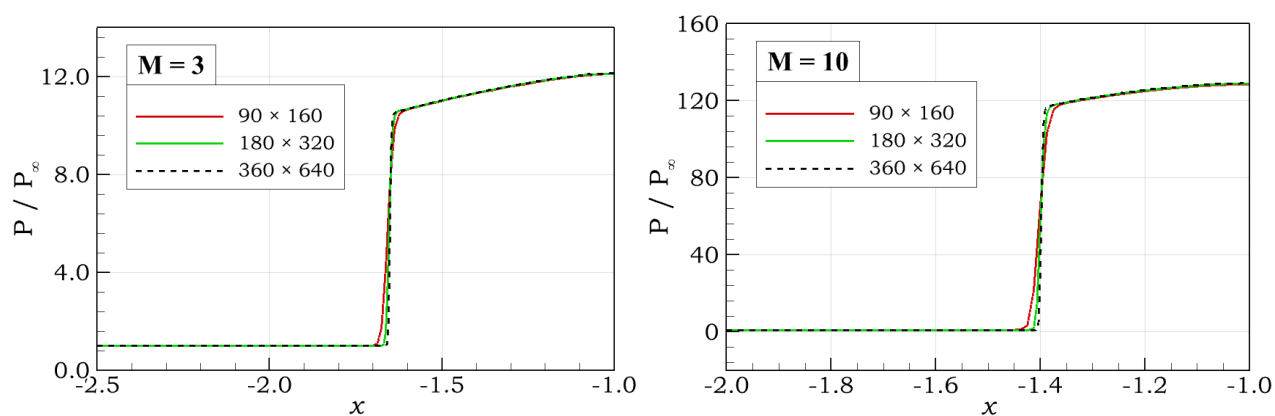


Рис. 2.17. Распределения относительного давления, полученные на сетках (a) – (c) для двух режимов течения, вдоль горизонтальной линии $y = 0$

При обтекании цилиндра высокоскоростным потоком возникает отошедший скачок уплотнения (головная ударная волна), относительное расстояние до которого можно определить по следующей формуле [2]:

$$\frac{B}{D} = 0.19 + \frac{1.2}{M^2 - 1} + \frac{0.7}{(M^2 - 1)^2}, \quad (2.1)$$

где B – расстояние от ударной волны до цилиндра, D – диаметр цилиндра, M – число Маха набегающего потока.

В таблице 2.2 приведены расстояния от головной ударной волны до цилиндра, рассчитанные на сетках (a) – (c) для двух режимов течения, и их сопоставление со значением, полученным по формуле (2.1).

	Сетка (a)	Сетка (b)	Сетка (c)	Формула (2.1)
$M = 3$	0.375	0.357	0.350	0.351
$M = 10$	0.244	0.219	0.209	0.202

Табл. 2.2. Относительные расстояния от головной ударной волны до цилиндра, полученные на сетках (a) – (c) для двух режимов течения

По приведенным рисункам видно, что повышение качества сетки приводит к более точному разрешению отсоединенного скачка уплотнения, толщина разрыва становится меньше. Существенных отличий между полями числа Маха (рис. 2.16) не наблюдается. Слабые осцилляции на самой грубой сетке (a) исчезают при дополнительном дроблении сетки. Относительные распределения давления (рис. 2.17) достаточно хорошо согласуются между собой, при этом решения, полученные на сетках (c) – (d), практически не отличаются друг от друга. Кроме того, при измельчении сетки расстояния от головной ударной волны до цилиндра постепенно сходятся к значениям, полученным по формуле (2.1), причем лучшее соответствие наблюдается на сетке (c). Таким образом, можно считать, что решение, полученное на самой

подробной сетке (с), является эталонным, а решение, полученное на сетке (b) – сеточно-независимым.

2.3.2. Результаты расчетов по различным схемам

В предыдущем разделе были представлены результаты, полученные по схеме Курганова-Тадмора, которая является достаточно диссипативной схемой и сильно размывает решение в области разрывов. В этом разделе будет проведен сравнительный анализ решений, полученных по другим схемам аппроксимации конвективных потоков с применением ограничителя VL, вносящего наименьшую численную диссипацию среди других ограничителей.

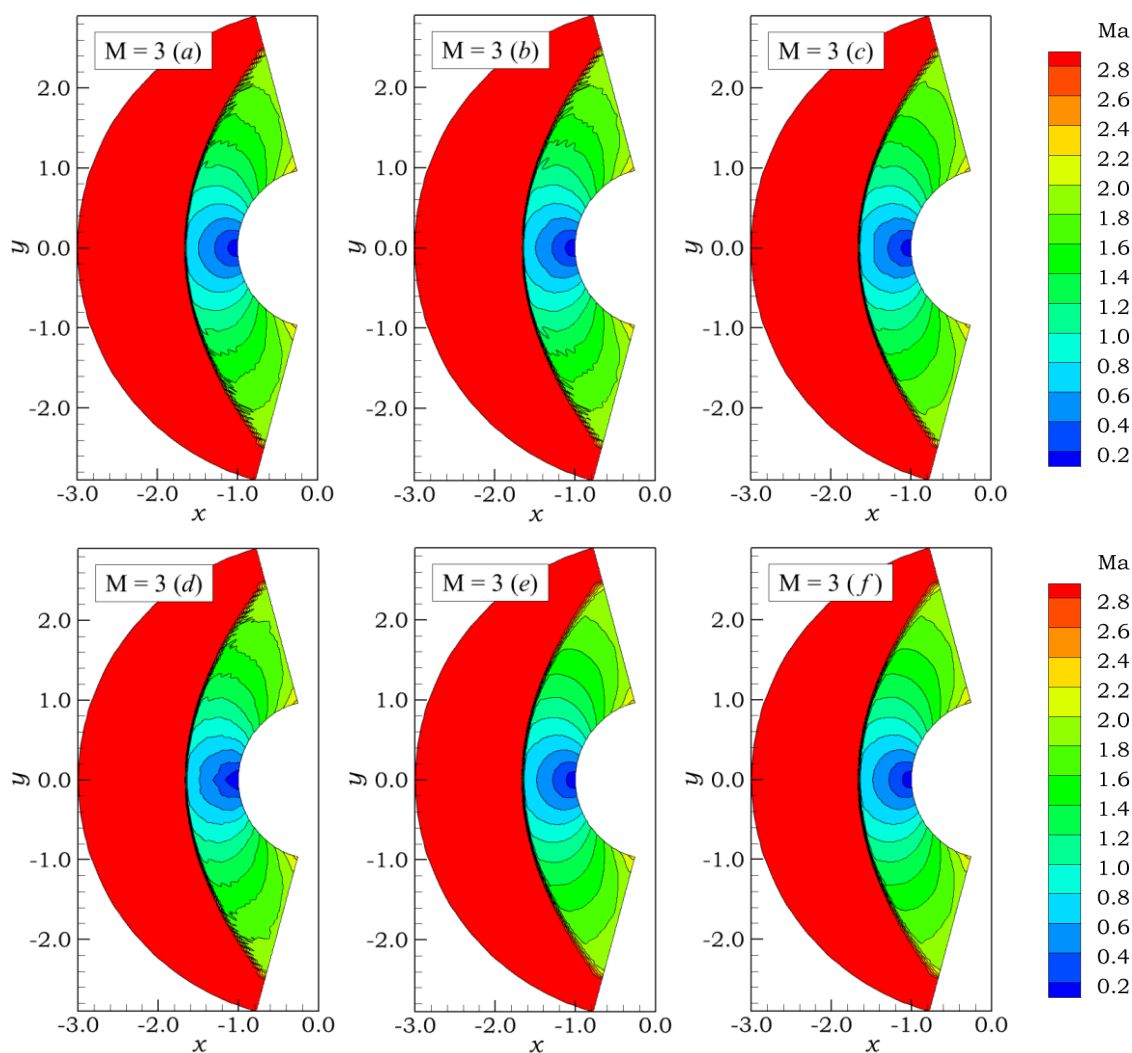


Рис. 2.18. Поля числа Маха, рассчитанные по различным схемам: AUSM (a), AUSM+ (b), HLL (c), HLLC (d), Русанова (e), Курганова-Тадмора (f) с применением ограничителя VL для режима течения $M = 3$

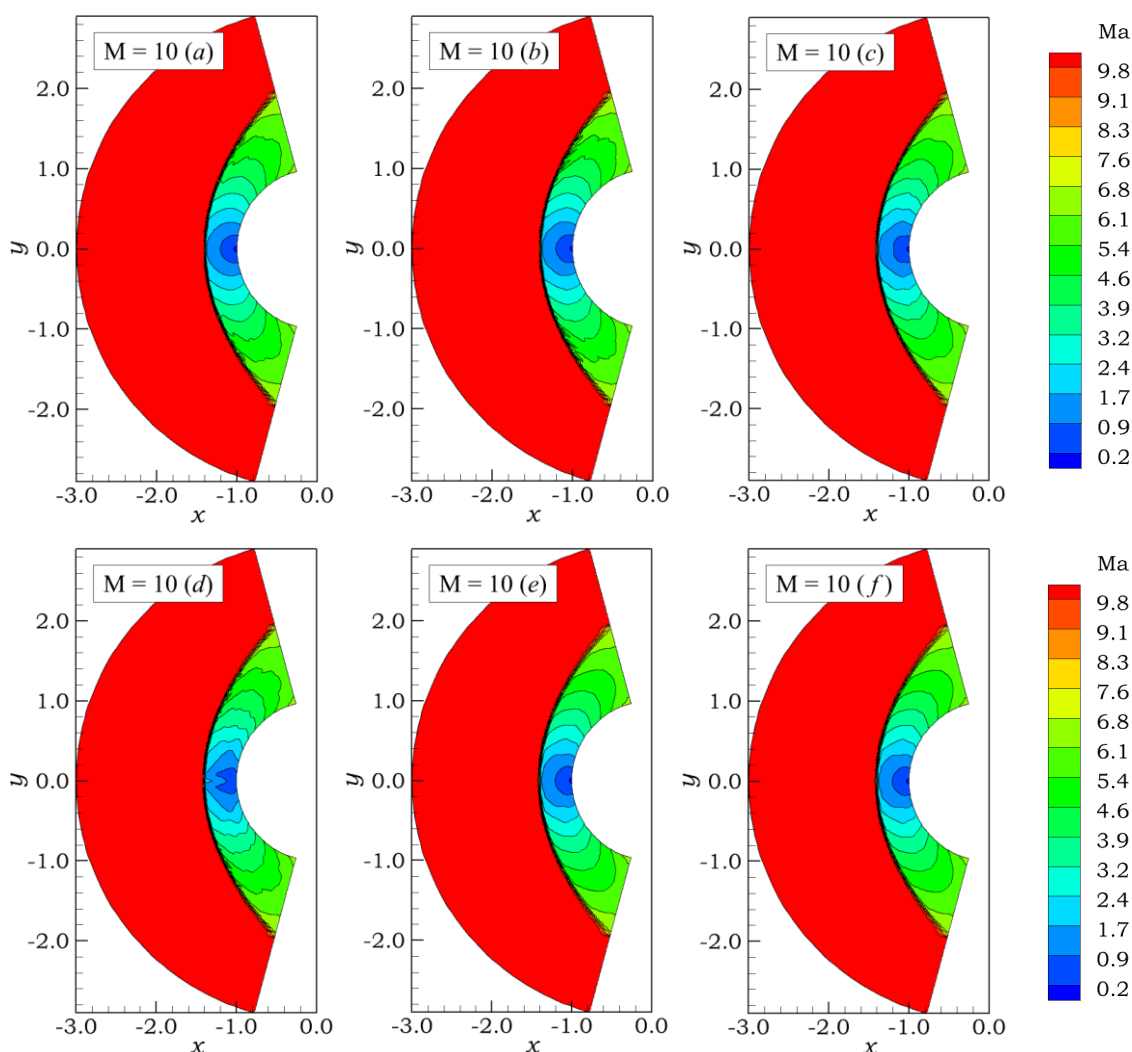


Рис. 2.19. Поля числа Маха, рассчитанные по различным схемам:
 AUSM (a), AUSM+ (b), HLL (c), HLLC (d), Рusanова (e), Курганова-Тадмора (f)
 с применением ограничителя VL для режима течения $M = 10$

На рисунках 2.18 и 2.19 приведены соответственно поля числа Маха, полученные по различным схемам с применением ограничителя VL для двух режимов течения. Расчеты проводились на самой грубой сетке (a). Видно, что сильные осцилляции наблюдаются для схемы HLLC, связанные предположительно с ее малой степенью диссипативности и некорректным граничным условием для давления на границе. Для схем HLL, Рusanова и Курганова-Тадмора получено относительно гладкое решение с минимальными осцилляциями. В случае использования схем семейства AUSM (AUSM, AUSM+) наблюдаются осцилляции среднего уровня.

На рисунке 2.20 представлены распределения относительного давления, рассчитанные по различным схемам для двух режимов течения, вдоль горизонтальной линии $y = 0$.

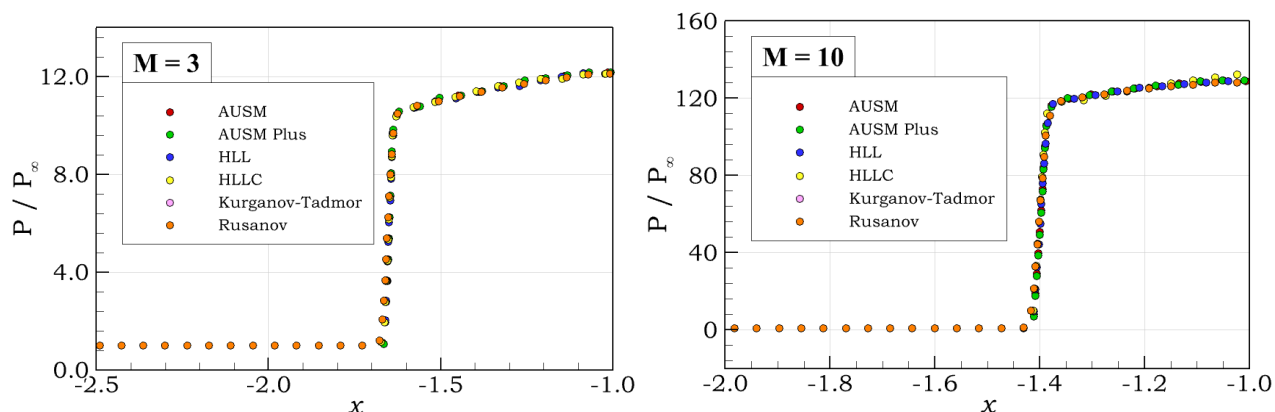


Рис. 2.20. Распределения относительного давления, рассчитанные по различным схемам для двух режимов течения, вдоль горизонтальной линии $y = 0$

Отсюда видно, что полученные распределения практически совпадают.

2.4. Пограничный слой на плоской пластине

2.4.1. Постановка задачи. Эталонное решение

Рассматривается задача о развитии пограничного слоя на плоской пластине, набегающий поток — $M_{\infty} = 6$, пластина адиабатическая. Расчетная область (рис. 2.21) включает основную область, примыкающую к пластине, длиной $L = 0.02$ и высотой $H = 0.05L$, и участок набегающего потока перед пластиной длиной $0.05L$.

Задаются следующие граничные условия: на входной границе — фиксированные значения компонент вектора скорости, давления и температуры, на нижней и верхней границах — условие симметрии, на выходной границе — нулевой градиент (экстраполяция значений с ближайших к границе ячеек), на поверхности пластины — условие стенки с прилипанием

При исследовании сеточной сходимости решения использовались сетки размерностью $35 \times 20 (a)$, $110 \times 60 (b)$, $220 \times 120 (c)$ ячеек, обеспечивающие

аккуратное разрешение пограничного слоя. Расчеты проводились по схеме Курганова-Тадмора с применением ограничителя ММ.

Выбор схемы Курганова-Тадмора обусловлен тем, что способ аппроксимации конвективных потоков не столь принципиален в задаче с вязким газом, так как наличие диффузионного слагаемого в уравнении баланса импульса делает течение более стабильным.

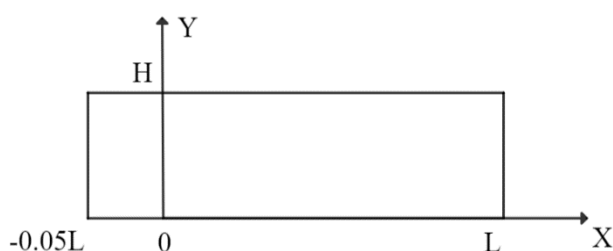


Рис. 2.21. Расчетная область к задаче продольного обтекания пластины потоком вязкого газа

На рисунке 2.22 приведено поле числа Маха, полученное на самой подробной сетке (с). Число Рейнольдса, построенное по параметрам набегающего потока, составляло $Re_L = 2.6 \cdot 10^5$. Стоит отметить, что переход к турбулентности на плоской пластине происходит при $Re_L = 5 \cdot 10^5 \div 3 \cdot 10^6$.

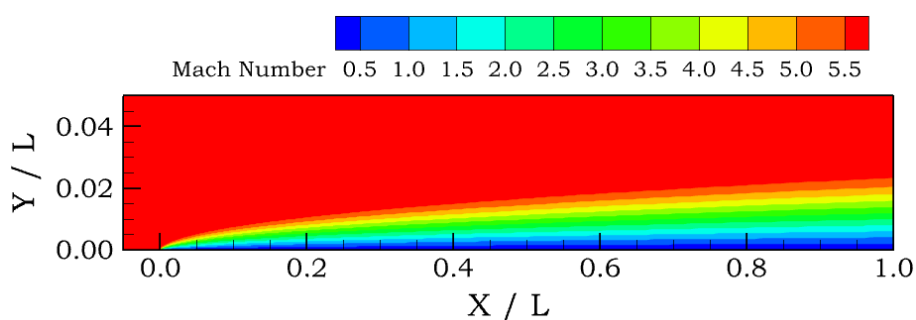


Рис. 2.22. Поле числа Маха, рассчитанное по схеме Курганова-Тадмора с применением ограничителя ММ на самой подробной сетке (с)

На рисунке 2.23 приведен общий график с распределениями относительной продольной скорости, полученными на сетках (a) – (с), вдоль вертикальной линии $x = 0.02$.

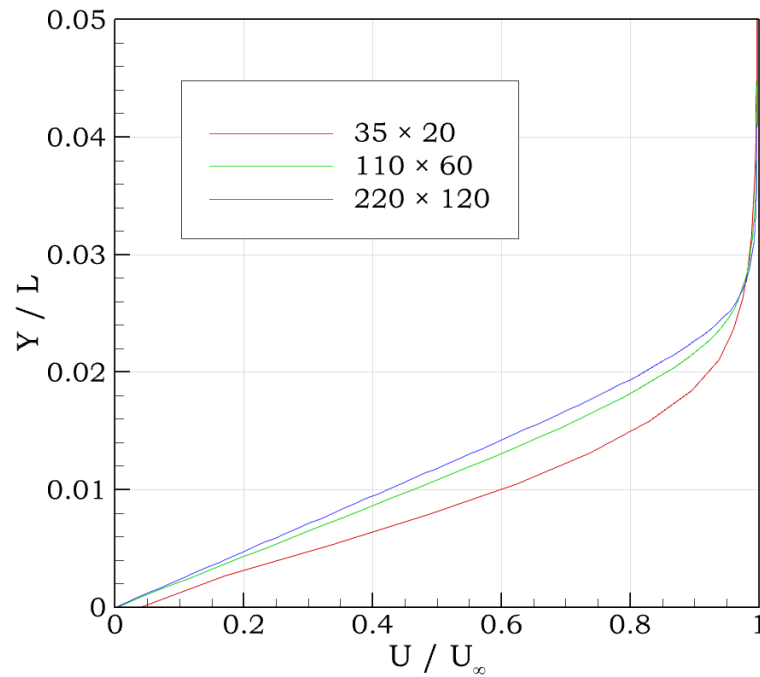


Рис. 2.23. Распределения относительной скорости, полученные на сетках (a) – (c), вдоль вертикальной линии $x = 0.02$

Отсюда видно, что отличие решений, полученных на сетках (b) – (c), крайне мало, поэтому можно считать, что решение, полученное на самой подробной сетке (c), является эталонным, а решение, полученное на сетке (b) – сеточно-независимым.

2.4.2. Сравнение с теорией пограничного слоя

В теории пограничного слоя коэффициент трения на пластине можно определить по следующей формуле [4]:

$$C_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \left(1 + 0.365(\gamma - 1) \sqrt{Pr} M_\infty^2 \right), \quad (2.2)$$

где M_∞ – число Маха набегающего потока, $\gamma = c_p / c_v$ – показатель адиабаты, Pr – критерий Прандтля, Re_x – локальное число Рейнольдса.

На рисунке 2.24 представлен график сравнения численного, полученного на самой подробной сетке (c), и аналитического распределения коэффициента трения на пластине.

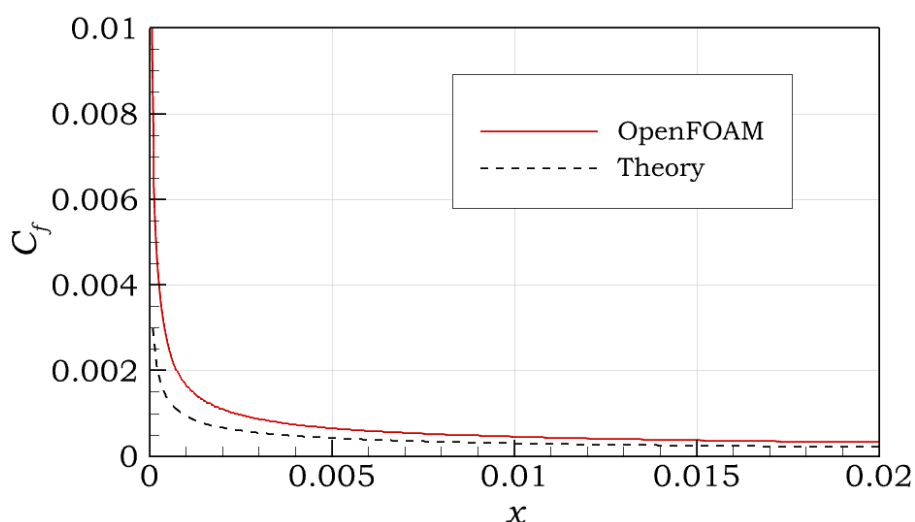


Рис. 2.24. График сравнения численного и аналитического распределения коэффициента трения на пластине

По приведенному графику видно, что наблюдается относительно хорошее согласие численного распределения с аналитическим решением, полученным по формуле (2.3), имеющим место в теории пограничного слоя.

2.5. Одномерное нестационарное течение в ударной трубе

2.5.1. Постановка задачи. Эталонное решение

Рассматривается одномерное нестационарное течение идеального газа в элементарной ударной трубе. Длина трубы составляет $L = 10$ см. В рассматриваемой постановке ударная труба разделена тонкой диафрагмой на камеру высокого и низкого давления. Камера высокого давления заполнена толкающим газом под давлением существенно превышающим ($P_L = 10^5$ Па, $T_L = 348$ К) давление в камере низкого давления ($P_R = 10^4$ Па, $T_R = 278$ К). В начальный момент времени диафрагма сносится, и толкающий газ начинает проникать в камеру низкого давления, сжимая перед собой так называемый рабочий газ. По рабочему газу бежит ударная волна, а по толкающему — волна разрежения в противоположную сторону.

Задаются следующие граничные условия: на левом и правом торце — нулевой градиент. При исследовании сеточной сходимости использовались одномерные сетки размерностью 100 (*a*), 1000 (*b*), 10000 (*c*) ячеек.

На рисунке 2.25 приведен общий график с распределениями скорости, давления и плотности, полученными по схеме Курганова-Тадмора с применением ограничителя ММ в момент времени $t = 0.007$. Черным цветом обозначено аналитическое решение с соответствующими пояснениями к нему. Все расчеты проводились на средней сетке (*b*).

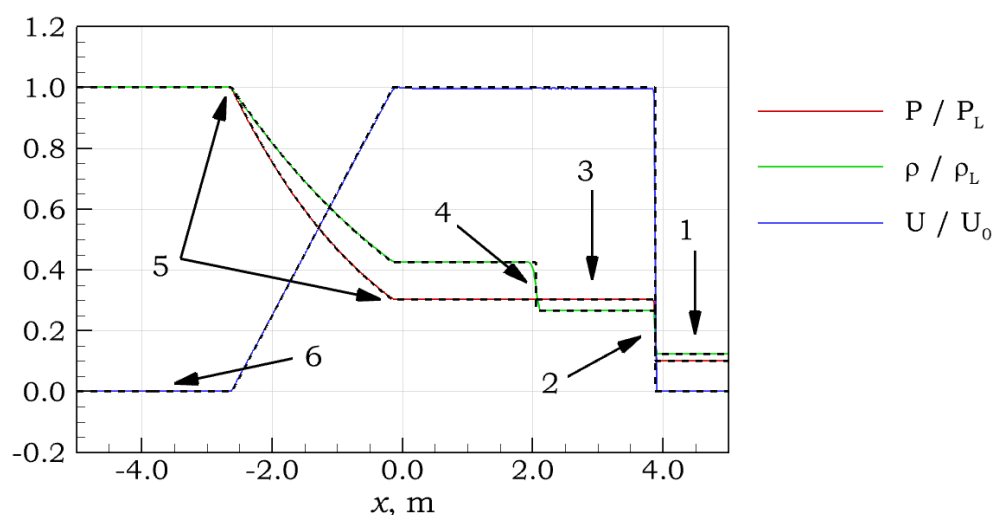


Рис. 2.25. Распределения скорости, давления и плотности, полученные по схеме Курганова-Тадмора с применением ограничителя ММ в момент времени $t = 0.007$:

1 – невозмущенный исследуемый газ, 2 – фронт ударной волны, 3 – область сжатого газа между контактным разрывом и ударной волной, 4 – фронт контактного разрыва, 5 – область, занятая центрированной волной разрежения, 6 – область, соответствующая начальному состоянию газа, U_0 – скорость спутного потока

Отсюда видно, что численные распределения параметров газа, полученные на средней сетке (*c*), практически совпадают с аналитическим решением [1]. В окрестности границ расчетной области параметры газа соответствуют начальным условиям.

На рисунке 2.26 приведено исследование сеточной сходимости решения на примере распределения относительного давления. Как и ранее, черным цветом обозначено аналитическое решение.

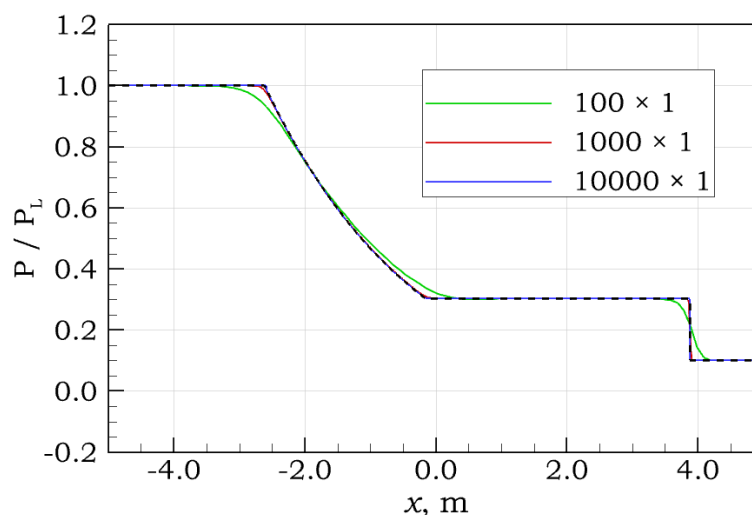


Рис. 2.26. Распределения относительного давления, полученные по схеме Курганова-Тадмора с применением ограничителя ММ на сетках (а) – (с)

По приведенному графику видно, что повышение качества сетки приводит к постепенному приближению численного распределения к аналитическому решению.

2.5.2. Результаты расчетов по различным схемам

На рисунке 2.27 приведены распределения относительного давления, полученные по различным схемам аппроксимации конвективных потоков с применением ограничителя VL на самой грубой сетке (а).

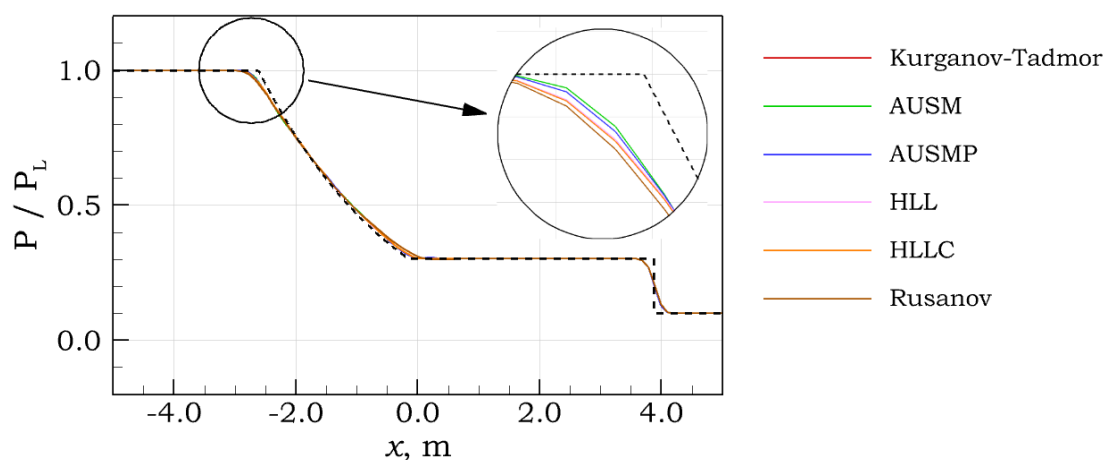


Рис. 2.27. Распределения относительного давления, полученные по различным схемам аппроксимации конвективных потоков с применением ограничителя VL на самой грубой сетке (а)

Отсюда видно, что полученные решения совпадают друг с другом, однако, если приблизить область в окрестности излома аналитического решения, можно заметить, что небольшие отличия все-таки присутствуют, причем самой диссипативной схемой является схема Курганова-Тадмора.

3. Заключение

В процессе выполнения дипломной работы расширены возможности прикладного пакета OpenFOAM. Это достигнуто благодаря разработке программных модулей для аппроксимации вектора конвективных потоков по схемам AUSM, AUSM+, HLL, HLLC, Русанова с последующим повышением порядка точности с помощью процедуры реконструкции.

Тестирование разработанных методов проведено на задаче стационарного сверхзвукового течения идеального газа в плоском канале с центральным клином. В постановке рассмотрены наборы параметров, соответствующие регулярному и нерегулярному (маховскому) режиму отражения косого скачка уплотнения от верхней стенки канала. Установлено, что граничное условие на непроницаемой поверхности в виде нулевого градиента приводит к возникновению нефизических осцилляций около излома поверхности, которые впоследствии оказывают существенное влияние на поле течения. Для уменьшения осцилляций, согласно [4], рекомендуется использовать граничное условие, основанное на решении задачи Римана о распаде разрыва. Сопоставление решений, полученных по различным схемам аппроксимации потоков в случае маховского отражения, показало, что существенные отличия наблюдаются в области дозвукового течения. При применении схем AUSM, AUSM+, HLLC наблюдаются сильные осцилляции, тогда как схемы HLL, Русанова и Курганова-Тадмора дают гладкое решение.

В задаче стационарного обтекания цилиндра однородным потоком перед фронтом ударной волны наблюдаются сильные осцилляции для схемы HLLC, связанные с ее малой диссипативностью. Для схем HLL, Русанова и Курганова-Тадмора получено относительно гладкое решение с минимальными

осцилляциями. В случае использования схем семейства AUSM (AUSM, AUSM+) наблюдаются осцилляции среднего уровня.

В задаче о развитии ламинарного пограничного слоя на плоской пластине получено хорошее соответствие численного коэффициента трения с аналитическим решением.

В задаче одномерного нестационарного течения в ударной трубе получено приемлемое согласие численного распределения параметров газа с аналитическим решением.

Кроме того, проведено исследование особенностей влияния ограничителей на численное решение. Выявлено, что ограничитель MM вносит большую диссипацию среди других ограничителей (VL, VA).

4. Список использованных источников

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.- М.: Дрофа, 1970.- 904 с.
2. Rodionov A. V. Artificial viscosity to cure the carbuncle phenomenon: The three-dimensional case / A. V. Rodionov // Journal of Computational Physics. – 2018. – Vol. 361. – P. 50-55.
3. Amick J. L. Pressure measurements on sharp and blunt 5° and 15° half cone at Mach number 3.86 and angles of attack to 100° / J. L. Amick // NASA TN D-173/ – 1961.
4. E. V. Kolesnik, E. M. Smirnov Some aspects of numerical modeling of inviscid supersonic flow in a duct with a central wedge // Journal of Physics: Conf. Series 1038. – 2018.
5. E. Harvey Combining a density-based compressible solver with a multiphase model. – 2020.
6. Liou M.-S. A New Flux Splitting Scheme / M.-S. Liou, C.J. Steffen // Journal of Computational Physics. – 1993. – Vol. 107. – № 1. – P. 23-39.
7. M.-S. Liou A sequel to AUSM: AUSM+ // Journal of Computational Physics. - 1996. – Vol. 129. – P. 364–382.

8. Harten A. On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws / A. Harten, P.D. Lax, B. van Leer // SIAM Review. – 1983. – Vol. 25. – № 1. – P. 35-61.
9. Русанов В. В. Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями / В.В. Русанов // Ж. вычислительная математика и математическая физика – 1961. – Т. 1. – № 2. – С. 267-279.
10. Toro E. F. Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver / E.F. Toro, M. Spruce, W. Speares // Shock Waves. – 1994. – Vol. 4. – № 1. – P. 25-34.