1–2.

2020/09/02

Első óra: beszélgetés, technikai tudnivalók.

3.

2020/09/03

672. Egy négyzet alapú egyenes gúla alaplapjának oldala 5 cm, a többi éle pedig 10 cm hosszú. Mekkora szöget zár be az alaplap a többi lappal?

673. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az ötöslottón pontosan két kihúzott szám osztható 5-tel? Mekkora a kihúzott számok között az 5-tel oszthatók darabszámának várható értéke?

674. Add meg a következő értéket:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 - n^3}{2n^2}.$$

4.

2020/09/07

675. A egységnégyzetben véletlenszerűen kijelölünk egy pontot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a pont minden csúcstól 0,3-nél távolabb van?

676. Egy test az x időpillanatban a számegyenes $x^2 + 2x$ pontjában van. Mekkora a pillanatnyi sebessége $x = 2$ pillanatban? Mekkora a pillanatnyi sebessége x függvényében?

677. Egy téglalap alapú egyenes gúla alaplapjának élei 3 és 4 hosszúságúak, a többi éle 5 hosszú. Mekkora a gúla felszíne?

5–6.

2020/09/08

Terület fogalmának alapjai.

678. Egy céltábla 10 körgyűrűre van osztva, minden gyűrű azonos vastagságú. A legkülső gyűrű az 1-es, a legbelső (ami egy kis kör) a 10-es. Ha egyenletesen találjuk el a céltáblát, akkor mekkora a valószínűsége annak, hogy 7-est lövünk?

679. Egy mértani sorozat első három elemének összege 42. Ugyanezek a számok ebben a sorrendben egy számtani sorozat első, második és hatodik tagjai. Melyek ezek a számok?

680. Egy téglatest egy csúcsból induló éleinek aránya $4 : 5 : 20$, testátlója 168. Mekkora a térfogata?

7–8.

2020/09/09

Térfogat fogalmának alapjai.

681. Van-e olyan síkbeli ponthalmaz, ami egybevágó egy valódi részhalmazával?

682. A sarki kisboltban 50 doboz tejfölből 4 romlott. Ha három doboz tejfölt vásárolunk, akkor mi a valószínűsége, hogy lesz benne romlott? Mekkora a romlott tejfölök számának várható értéke?

683. Milyen meredek az $f(x) = x^3 - 2x$ függvény érintője az $x = 3$ pontban?

9.

2020/09/10

Hipergeometriai eloszlás.

684. Egy háromszög alapú, egyenes hasáb éleinek hosszai rendre: 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 10, 10. Mekkora a felszíne? Mekkora a térfogata?

685. Egy egységszakaszon véletlenszerűen kiválasztunk két pontot. Mi a valószínűsége, hogy $\frac{1}{2}$-nél közelebb lesznek egymáshoz?

10.

2020/09/14

Hasáb térfogata: $V = T_{\text{alap}} \cdot m$.
Cavalieri-elv.

686. Egy háromszög alapú egyenes hasáb minden éle 5 hosszú. Mekkora a felszíne és a térfogata?

687. Júlia és Rómeó randevút beszélnek meg egy kávézóban, de csak abban állapodnak meg, hogy 6 és 7 óra között érkeznek. Mindketten 15 percet várnak a másikra, ha az nem érkezik meg, akkor elmennek. Az adott időintervallumban mindketten egyenletes eloszlással érkeznek meg. Mi a valószínűsége, hogy összejön a randevú?

11–12.

2020/09/15

Paralelepipedon.

688. Ábrázold az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 2x$ függvényt.

689. Egy paralelepipedon minden éle 4 hosszúságú, és két oldallapján van egy 45°-os szög. A többi oldallap téglalap. Mekkora a test térfogata?

690. Az $x^2 - 4x + c$ kifejezésben c értékét a $[-1, 5]$ intervallumból egyenletes eloszlással választjuk. Mi a valószínűsége, hogy a kifejezés mindkét gyöke nagyobb lesz mint 1?

691. Milyen meredekségű az $f(x) = x^4$ függvény érintője az $x = 1$ pontban?

13–14.

2020/09/16

Ismétlés: binomiális-tétel.
Valószínűségi változó szórásnégyzete, szórása.

692. Egy derékszögű háromszög oldalhosszai mértani sorozatot alkotnak. Mekkorák a háromszög szögei?

693. Két szabályos dobókockával dobunk és vesszük a két dobott szám összegének négyes maradékát. Mi a kapott maradék várható értéke? Mekkora a szórása?

694. Milyen meredek az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény érintője a 2 pontban?

15.

2020/09/17

Próbadolgozat

1. A rulettkeréken 0-tól 36-ig szerepelnek a számok, egyforma valószínűséggel jön ki mindegyik. 6-szor pörgetünk egymás után. Mi a valószínűsége annak, hogy legalább kétszer 25-nél nagyobb számot kapunk?
2. Egy szabályos háromszög alapú egyenes gúla alaplapjának oldalahossza 4 cm. A gúla többi élének hossza 6 cm. Mekkora szöget zár be az alaplap a többi lappal?
3. Határozd meg
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+n)^4-n^4}{3n^3}$$
értékét.
4. Az x tengelyen egyenes vonalban haladó test a t pillanatban a $2t^3-2t$ pontban van. Mekkora a pillanatnyi sebessége $t=3$-ban?

16.

2020/09/21

Próbadolgozat feladatainak megbeszélése.

17–18.

2020/09/22

FÜggvény határértéke, folytonossága. Példa olyan függvényekre, amelynek nincs határértéke egy pontban.

695. Van-e olyan f függvény, amelynek a-ban van határértéke, de a függvény nem folytonos a-ban?

19–20.

2020/09/23

Folytonos függvények tulajdonságai.
Intervallumon folytonos függvény.

696. Van-e olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény, amely egyetlen pontban sem folytonos?

697. Folytonos-e x^2 az $x=3$ pontban?

698. Van-e olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény, amely pontosan három pontban nem folytonos?

699. Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amely pontosan egy pontban folytonos?

700. A függvénygrafikon alapján döntsd el, hogy a következő függvények folytonosak-e $x = 2$-ben:

(a) $x^2 + 3x$

(b) $\frac{1}{x} + 2$

(c) $[2x]$

21.

2020/09/24

Ha f és g folytonos, akkor $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ is folytonos. $\frac{f}{g}$ is folytonos minden olyan pontban, ahol $g \neq 0$.
Weierstrass-tétel: zárt intervallumon folytonos függvénynek van minimuma és maximuma.
Függvény határértéke egy pontban ∞, $-\infty$.

701. Milyen a érték esetén lesz az f függvény mindenhol folytonos, ha

$$f(x) = \begin{cases} -x + a^2, & \text{ha } x \leq 1 \\ 3x - 3a, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

702. Hol folytonos az $f(x) = x^2 + \frac{3x}{x^2-3x-8}$ függvény?

22.

2020/09/28

Bolzano–Darboux-tétel: az $[a; b]$-n folytonos függvény felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket.

703. Az $ABCDEFGH$ kocka alakú kisbolygón landol egy űrhajó, amelynek űrhajósa sétát tesz a bolygón. Az AB él Q felezőpontjában áll éppen, amikor szivárogni kezd az oxigénpalackja. A lehető leggyorsabban szeretne visszajutni a bolygó felszínén a G csúcsban tartózkodó űrhajóhoz. Milyen hosszú a legrövidebb út, ha a bolygó élhosszúsága 2 km?

704. Van-e az $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 6x - 5$ függvénynek olyan gyöke, amely az $[1; 2]$ intervallumba esik?

705. Egy $3 \times 4 \times 8$-as téglatestet egységkockákból ragasztunk össze. Két érintkező lap esetén pontosan az egyiket kenjük be ragasztóval. Hány lapra kerül ragasztó a téglatest elkészítése során?

23–24.

2020/09/29

706. Mi a helyzet akkor, ha az előző feladatban nem feltétlenül kell minden szomszédos lappárt összeragasztani, csak az a fontos, hogy a téglatest egyben maradjon? Ekkor mi a minimális ragasztások száma?

707. Két szabályos tetraéder oldalaira az 1, 2, 3, 4 számokat írtuk. Mekkora a két tetraéderrel dobott számok összegének várható értéke és szórása?

708. Legyen

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}.$$

(a) Mi a legbővebb tartomány, ahol értelmezve lehet a függvény?

(b) Mennyi a függvény határértéke $x = 16$-ban?

(c) Hol folytonos a függvény?

(d) Mennyi $\lim_{x \to 9} f(x)$?

709. Egy cirkuszban rozmárok és fókák vonulnak fel egymás után, 8 fóka és 3 rozmár. Ha két rozmár egymás mögött lenne a sorban, akkor összeverekednének, ezért ezt az idomárok ezt nem engedik meg. Hányféle sorrendben jöhetnek az állatok, ha a rozmárokat sem tudjuk egymástól megkülönböztetni és a fókákat sem?

25–26.

2020/09/30

Differenciálhányados, derivált. Deriváltfüggvény.

Óra eleji

1. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 3, a másik 6. Mekkora a háromszög nagyságrendben középső szöge?
2. Egy téglatest élei 3, 5 és 8. Mekkora a testátló?
3. Egy mértani sorozat második eleme 2, negyedik eleme 18. Mennyi a harmadik eleme?
4. $f(x) = \sin(2x - \pi) + 4$. Add meg R_f-et.

---

710. Egy dobókockára az $1, 1, 1, 2, 3, 6$, egy szabályos tetraéderre pedig a $2, 3, 3, 5$ számokat írták. Mindkettővel dobunk. Mekkora a két dobott szám összegének várható értéke és szórása?

711. Add meg az alábbi függvények deriváltfüggvényét:

(a) $f(x) = 2$,

(b) $f(x) = x$,

(c) $f(x) = 3x^2$.

27.

2020/10/01

Témazáró dolgozat

1. Egy szabályos dobókocka lapjaira a $3, 3, 3, 4, 4, 5$ számokat írták. 5-ször dobunk a kockával.
   (a) Mi a valószínűsége, hogy legalább kétszer prímszámot dobunk?
   (b) Mi a várható értéke a prímszám dobások számának?
2. Egy négyzet alapú egyenes gúla alaplapjának oldalhossza 5 cm. A gúla többi élének hossza 4 cm. Mekkora szöget zár be az alaplap a 4 cm hosszú élekkel?
3. Egy szabályos dobóoktaéder lapjaira a következő számokat írták: $1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 11$. Egyszer dobunk az oktaéderrel.
   Mi a dobás várható értéke és szórása?
4. Határozd meg az
   $$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 2$$
   függvény érintőjének a meredekségét az $x = 2$-ben.

28.

2020/10/05

Az $f(x) = c$, $f(x) = mx$ és $f(x) = x^2$ függvények deriváltja.

712. Határozd meg $n \in \mathbb{N}$ esetén x^n deriváltfüggvényét.

713. Mi lehet vajon $f(x) = \sin x$ deriváltja?

29–30.

2020/10/06

Nevezetes függvényhatárérték:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$(x^n)' = nx^{n-1}$, ha $n \in \mathbb{N}$. (Bizonyítással.)
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, ha $\alpha \in \mathbb{R}$.
$(cf)' = c \cdot f'$.
$(f \pm g)' = f' \pm g'$.
$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$
Ha egy függvény differenciálható (deriválható) egy pontban, akkor abban a pontban folytonos is. (Fordítva ez nem igaz, $|x|$ mindenhol folytonos, de 0-ban nem deriválható.) Nevezetes azonosság:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + \ldots + b^{n-2}a + b^{n-1}).$$

714. Tippeld meg $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ értékét.

715. $\left(x^4 - 2x^2 + 3x\right)'$

716. $\left(\frac{1}{x}\right)'$

717. $(|x|)'$

Házi feladat: Keress azonosságot $\sin\alpha - \sin\beta$-ra.

31–32.

2020/10/07

Óra eleji

1. Azonosság: $\sin(\alpha+\beta)$
2. $\left(\frac{1}{g}\right)'$
3. $f(x) = \operatorname{tg} x$. Add meg D_f-et.
4. Egy trapéz két párhuzamos alapja p és q, magassága k. Mekkora a trapéz területe?

$(\sin x)' = \cos x$.
$(\cos x)' = -\sin x$.
$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.

718. Deriváld az $f(x) = \frac{3}{x^2-2}$ függvényt.

719. Egy kosárban 10 alma és 4 körte van. Egyesével kihúzzuk az összes gyümölcsöt és letesszük őket sorban az asztalra. Mi a valószínűsége, hogy lesz két körte egymás mellett?

720. Rajzold fel vázlatosan az $f(x) = x \sin x$ függvényt, és add meg a deriváltját.

721. $(\cos x)'$

33.

2020/10/08

722. Deriváld a következő függvényeket:

(a) $f(x) = x^6 - 3x^4 + 2x$,
(b) $g(x) = \sqrt{x}$
(c) $h(x) = x^2 \cos x$
(d) $j(x) = \frac{3}{\sin x}$

723. Próbálj az eddigi ismereteink alapján képletet találni $\left(\frac{f}{g}\right)'$-ra.

34.

2020/10/12

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$.
Láncszabály: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

724. Ábrázold a következő függvényeket, vizsgáld meg a derivált előjelét. Mit veszel észre?

(a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$,
(b) $g(x) = x^3 + 4x^2 - 12x$
(c) $h(x) = \cos^2 x$

725. Az $ABCDEFGH$ egységkocka A, B, C, D, E csúcsai egy gúlát határoznak meg. Mekkora ennek a gúlának a térfogata?

35–36.

2020/10/13

Gúla, kúp térfogata

726. Egy téglalap alapú egyenes gúla alaplapjának élei 2 és 5 hosszúak, a másik 4 él hossza 6. Mekkora a gúla felszíne és térfogata?

727. Deriváld az alábbi függvényeket:

   (a) $f_1(x) = \cos(2x + \pi)$
   (b) $f_2(x) = \sin x^2$
   (c) $f_3(x) = \sin^5 x$
   (d) $f_4(x) = \operatorname{tg} x$
   (e) $f_5(x) = \frac{x^2+\cos x}{2+\sin x}$

728. Egy egyenes körkúp alapjának sugara 2, magassága 3. Mekkora a térfogata és a felülete?

37–38.

2020/10/14

Óra eleji

1. $\left(\sqrt[4]{x}\right)'$
2. $\left(\frac{x^2}{1+x}\right)'$
3. $\cos(\alpha - \beta)$
4. Definiáld egy egyenes és egy sík szögét.

Kúp felszíne

729. Deriváld a következő függvényeket:

   (a) $f_1(x) = \sqrt{1 + \sin^2 x}$
   (b) $f_2(x) = \cos^3(2x + 1)$

730. Egy boltban 6 különböző típusú táblás csokoládét árulnak. Hányféleképpen vásárolhatunk 4 tábla csokit?

731. Rajzold fel minél pontosabban az $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ függvény grafikonját.

39.

2020/10/15

Függvények tulajdonságai: intervallumon (szigorúan) monoton növekedés/csökkenés.

732. Egy egyenes körkúp kiterített palástja egy 4 egység sugarú harmadkör. Mekkora a kúp felszíne és térfogata?

733. Milyen kapcsolat van a függvény deriváltfüggvénye és a függvény monotonitása között?

40.

2020/10/19

734. Add meg az alábbi függvények deriváltját:

(a) $f(x) = \sin^3\left(x^2+1\right)$

(b) $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{\operatorname{tg} x}}$

41.

2020/10/20

Dolgozat

1. Add meg az alábbi függvények deriváltfüggvényét:

   (a) $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + x$

   (b) $g(x) = 2\sin x - 3\operatorname{tg} x$

   (c) $h(x) = \sqrt[3]{2x+1}$

   (d) $j(x) = \frac{x^2+1}{x+2}$

   (e) $k(x) = \cos\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

2. Milyen meredek az
$$x^4 - 5x^3 + 2x - 7$$
függvény grafikonjának érintője a 3 abszcisszájú pontban?

3. Egy négyzet alapú egyenes gúla alapéle 3, oldallapjának területe 2-szerese az alaplap területének. Mekkora a gúla térfogata?

4. Egy egyenes körkúp alaplapjának területe 25π, magassága 7.
Mekkora a kúp felszíne?

5. Egy ajándékboltban 12-féle képeslapot árulnak Budapestről. Hányféleképpen vásárolhatunk 8 képeslapot?

42–43.

2020/10/21

735. Tekintsük az $f(x) = x^3 - 4x + 3$ függvény grafikonját. Írd fel az $x = 2$-ben húzott érintő egyenletét.

736. A 2 egység élű $ABCDEFGH$ kocka $ABCD$ lapjának középpontja P, $DCGH$ lapjának középpontja Q, $AEHD$ lapjának középpontja R, a BF él felezőpontja S.

 (a) Milyen poliéder $APQRS$?

 (b) Mekkora a poliéder térfogata?

44.

2020/10/22

45.

2020/11/02

Lokális és globális szélsőérték (minimum, maximum).

737. Legyen $f(x) = \frac{x^2}{4}$. Írd fel a $P(3; -4)$ pontból a grafikonhoz húzott érintő egyenletét.

738. Milyen $n \in \mathbb{N}$ esetén osztható 3-mal az $n^3 + 8n$ kifejezés értéke?

46–47.

2020/11/03

739. Ábrázold vázlatosan az $f(x) = x^3 - 5x^2 - 17x + 21$ függvényt.

740. Egy test az origóból indulva egyenes vonalú mozgást végez a számegyenesen. A sebessége t másodperc elteltével éppen t. Mekkora utat tesz meg a 2. és az 5. másodperc között?

Válogatás emelt szintű érettségi feladatokból

741. (a) Oldd meg az alábbi egyenletrendszert:

$$x + y = 0,2$$
$$\frac{\lg x + \lg y}{2} = \lg \frac{x + y}{2}$$

(b) Oldd meg a $[-\pi, \pi]$ halmazon a $2\sin^2 x - \cos x = 2$ egyenletet.

742. Két várost egy 195 km hosszú vasútvonal köt össze. Ezen a vonalon személyvonattal is és gyorsvonattal is el lehet jutni egyik városból a másikba. A személyvonat átlagsebessége 18 km/h-val kisebb a gyorsvonaténál, menetideje így 45 perccel több. Határozd meg a vonatok átlagsebességét.

48–49.

2020/11/04

Óra eleji

1. Írd fel az $(1; 3)$ ponton átmenő, 3-meredekségű egyenes egyenletét $y = mx + b$ alakban.
2. Egy test egyenes vonalú mozgását az $s(t) = t^3 - 6t$ függvény írja le. Mekkora a sebessége $t = 3$-ban?
3. Egy háromszögben $a = 6, b = 9$ és $c = 4$. A B-nél lévő szög szögfelezője K-ban metszi a b oldalt. Mekkora az AK szakasz hossza?
4. $3\log_2 5 - \log_2 3 = \log_2 b$. Mennyi b értéke?

Primitív függvény. Határozatlan integrál.
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, kicsit másképpen: $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$

743. Add meg az alábbi függvények primitív függvényét:

(a) $3x^3 - 2x + 6$

(b) $\sin 2x$

(c) $\frac{3}{\cos^2 5x}$

744. Az $ABCD$ négyzet körülírt körén felvettünk egy olyan P pontot, amelyik nem csúcsa a négyzetnek. Bizonyítsd be, hogy $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$.

745. Határozd meg a c számjegy lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy $\overline{1c28}$ nem osztható 6-tal, $\overline{93c6}$ nem osztható 36-tal, $\overline{c3c5}$ pedig nem osztható 15-tel.

50.

2020/11/05

746. Add meg az alábbi függvények primitív függvényét:

(a) $4x^5 - \cos 2x$

(b) $\cos^2 x$

747. (a) Milyen n pozitív egész szám esetén osztható 8-cal $4^n + 6n - 1$?

(b) És 9-cel?

748. Egy baktériumtenyészet szaporodását laboratóriumi körülmények között vizsgálják. Az első órában 4 mikrocellát fertőznek meg baktériumokkal. A második órában a baktériumok szaporodni kezdenek, így további 3 cella fertőződik meg. A megfigyelés szerint ezután „szabályszerűvé” válik a baktériumok szaporodása: minden órában annyi új fertőzött cella keletkezik, ahány korábban összesen volt. (A harmadik órában $4 + 3 = 7$ új fertőzött mikrocella keletkezik, a negyedik órában 14 és így tovább.) Ha a baktériumok szaporodásához továbbra is biztosítanák a megfelelő körülményeket, akkor az összes fertőzött mikrocella száma hányadik órában haladná meg a tízmilliót?

51.

2020/11/09

Feladatmegbeszélés.
Online matekórák egyeztetése.

52–53.

2020/11/10

749. Mekkora az $f(x) = 2x$ függvény görbe alatti területe a és b között? $(a, b > 0)$

(b) Mi a helyzet, ha $f(x) = x + 1$?

750. Az egységnyi oldalú ABC szabályos háromszög minden csúcsánál behúztunk egy-egy szögharmadoló egyenest, így a háromszög belsejében a PQR szabályos háromszöget kaptuk. Számítsd ki a PQR háromszög oldalának hosszát.

54–55.

2020/11/11

751. Találj képletet az első n négyzetszám összegére, vagyis $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$-re.

752. (a) $\int 2\sin 3x - \frac{3}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

753. 8 embert rablással vádolnak. Tudjuk, hogy pontosan 3 bűnös közülük, a többiek ártatlanok. A következőket vallották:

A: G ártatlan. C: H ártatlan. D: A ártatlan.
E: B ártatlan. F: D ártatlan. G: E ártatlan.
H: F ártatlan.

Az ártatlanok mindig igazat mondanak. Kik követték el a rablást?

56.

2020/11/12

754. (a) $\int 6x^4 - 5x^3 + 3 \; \mathrm{d}x$
(b) $\int \sqrt[3]{x} \; \mathrm{d}x$
(c) $\int \frac{3}{2x+1} \; \mathrm{d}x$

755. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:
(a) $\frac{2x}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{6}{1-x^2}$
(b) $\cos 2x + 5 \sin x = 3$
(c) $|x-2| + x = 4\sqrt{x} - 2$

756. Próbáld meghatározni az $f(x) = x^2$ függvénygörbe alatti területet a $[0; 1]$ intervallumon.

757. Hány pontja lehet annak az egyszerű, összefüggő gráfnak, amelynek 8 éle van?

57.

2020/11/16

Teljes indukció.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

758. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$3 \cdot \log_8(x-2) + 2 \cdot \log_4(2x) - 5^{1-2\sin x} \cdot \log_2(2x^2 - 4x) = 0.$$

759. Egy 305 tagú társaságból a nők a%-a távozott, így a társaság létszáma $\frac{a}{b}$%-kal csökkent, ahol $1 < b < 305$ egész szám. Hány férfi lehet a társaságban?

58–59.

2020/11/17

Határozott integrál fogalma

60–61.

2020/11/18

Newton–Leibniz-formula: ha f folytonos $[a; b]$-n és itt $F' = f$, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

760. Számítsd ki az alábbi értékeket:

(a) $\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_1^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x$

62.

2020/11/19

761. Bizonyítsd be, hogy $10^n - 9n - 1$ minden pozitív egész n esetén osztható 81-gyel.

762. Számítsd ki az alábbi értékeket:

(a) $\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

(c) $\int_{-1}^2 x^2 - 1\,\mathrm{d}x$

763. Egy konvex sokszög oldalainak a számát megdupláztuk, így az átlóinak száma 400%-kal növekedett. Hány oldalú az eredeti sokszög? Hány százalékkal nőtt a sokszög belső szögeinek összege?

63.

2020/11/23

764. Bizonyítsd be, hogy

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

765. Egy $n \times k$-as téglalap oldalaihoz illeszkedő egységnégyzeteket fehérre, a többi négyzetet feketére festettük. Mekkorák a téglalap oldalai, ha a fekete négyzetek száma kétszerese a fehér négyzetek számának?

766. Tekintsük az $f : [-1; 6] \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$ függvényt. Hányszorosa a függvénygörbe alatti terület x tengely feletti része az x tengely alattinak?

767. Oldd meg a $p + q^n = 2019$ egyenletet, amelyben p és q pozitív prím, n pozitív egész.

64–65.

2020/11/24

768. Mely pozitív egész n-ek esetén igaz, hogy $4^n + 15n - 1$ osztható 9-cel?

769. Mekkora az $y = x^2 - 4x + 3$ parabola és az $y = 2x - 2$ egyenes által közrezárt terület?

770. Négy egész szám közül az első három számtani, az utolsó három mértani sorozatot alkot. A két középső szám összege 50, az első és negyedik összege 55. Határozd meg a számokat.

66–67.

2020/11/25

771. Az a_n sorozatról tudjuk, hogy $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ és $n \geq 1$ esetén

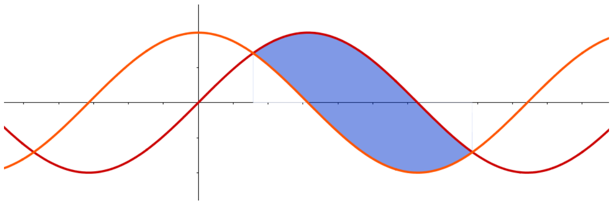
$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}.$$

Mennyi a_{2020}?

772. Határozd meg a értékét, ha tudjuk, hogy

$$\int_a^{2a} x^2 \, \mathrm{d}x = 504.$$

773. Az alábbi ábrán a $\sin x$ és a $\cos x$ függvénygrafikonjának egy részlete látható. Határozd meg a kék színű terület nagyságát.



774. Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{24+x-10\sqrt{x-1}}=5.$$

68.

2020/11/26

A határozott integrál tulajdonságai:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x.$$

775. Egy iskolában két tizenkettedikes osztály van, A és B, az A-ban 30, a B-ben 34 diák tanul. Az A-ba 18, a B-be 15 lány jár. Ha kiválasztunk véletlenszerűen egy tizenkettedikes fiút, akkor mi a valószínűsége annak, hogy az A osztályba jár?

776. Tekintsük az $f(x) = 2x - 2$ függvény grafikonját az $[1; 3]$ intervallumon. Forgassuk meg a görbét az x tengely körül. Mekkora az így kapott forgástest térfogata?

777. Tekinsünk a koordináta-rendszerben egy lefelé álló parabolát, amelynek a csúcsa a $P(3; 4)$ pont, és az $A(1; 0)$ és $B(5; 0)$ pontokban metszi az x tengelyt. Mekkora a parabola és az $y + 2x = 7$ egyenes által közrezárt terület nagysága?

69.

2020/11/30

778. Két dobókockával dobunk. Mi a valószínűsége, hogy dobtunk prímszámot, ha tudjuk, hogy a két dobott szám összege osztható 5-tel?

779. Tekintsük az $f(x) = x$ függvény grafikonját az $[1; 5]$ intervallumon. Forgassuk meg a görbét az x tengely körül. Mekkora az így kapott forgástest térfogata?

70–71.

2020/12/01

Csonka kúp, csonka gúla.
Feltételes valószínűség:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

780. A síkon felvettünk 20 különböző egyenest. Ezek az egyenesek a síkot tartományokra bontják. Ki lehet-e színezni ezeket a tartományokat két színnel úgy, hogy ha két résznek van közös határszakasza, akkor különböző színűnek kell lenniük? (Ha csak egy közös pontjuk van, akkor lehet a színük azonos.)

781. Hol metsszünk el egy négyzet alapú egyenes gúlát az alaplappal párhuzamosan, hogy a két kapott rész térfogata egyenlő legyen?

782. Kende reggelente a Blahán száll fel az 5-ös, 7E, 8E vagy 110-es busz egyikére. Az elmúlt két év statisztikája alapján egyforma valószínűséggel száll fel mind a négyre. A 7E és a 110-es buszoknak a fele alacsonypadlós, a 8E-knek 80%-a, az 5-ös buszoknak pedig a 40%-a. Ma reggel alacsonypadlós busszal jött. Mi a valószínűsége, hogy 8E-vel jött?

783. Mekkora az $f(x) = -x^2 + 6x - 6$ és a $g(x) = x^2 - 8x + 14$ függvénygörbék által közrezárt terület?

72–73.

2020/12/02

Feladatok megbeszélése

74.

2020/12/03

Dolgozat

1. Add meg az alábbi határozatlan integrálokat:
   (a) $\int x^2 - 3 \, dx$
   (b) $\int 4\sqrt[3]{x^5} \, dx$
   (c) $\int \cos\left(3x + \sqrt{\pi}\right) \, dx$
2. Add meg az alábbi értéket:
$$\int_{-2}^{4} x^3 - 3 \, dx.$$
3. Mekkora annak a véges síkidomnak a területe, amelyet teljes egészében az $f(x) = x^2 + 3$ és a $g(x) = 2x^2 - 2x$ függvények grafikonjai határolnak?

4. Bizonyítsd be, hogy
$$5^{2n} + 3n - 1$$
minden $n \geq 1$ egész esetén osztható 9-cel.

5. Az iskolai italautomata elég sokszor rosszul működik, azaz a megfelelő összeg bedobása után sem adja ki a kért innivalót. Ha Coca-Colát akarunk vásárolni, akkor az esetek 75%-ában kapjuk meg az italt, 7up esetében ez az arány már $\frac{8}{9}$. Ha pedig Cappy narancslevet kérünk, akkor $\frac{10}{11}$ a sikeres kísérletek aránya. Rozi bosszankodva jött vissza az automatától, mert elnyelte a pénzét. Ha tudjuk, hogy a három ital közül egyforma valószínűséggel választ, akkor mekkora a valószínűsége, hogy 7up-ot akart inni?

75.

2020/12/07

784. Tekintsük az $f(x) = \sqrt{x}$ függvényt a $[0; 2]$ intervallumon. Forgassuk meg a függvénygörbét az x tengely körül. Kapunk egy jobb oldalon nyitott, pohárszerű testet. Mekkora a pohár térfogata? Milyen módszerrel lehetne meghatározni a térfogatot?

785. Milyen $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén van az alábbi egyenletnek pontosan egy megoldása?
$$\frac{x^2 \cos\alpha + x + \frac{1}{2}\sin\alpha}{x^2 - \frac{1}{2}} = 0.$$

786. Legyen e a $P(-1; 1)$ és $Q(3; 3)$ pontokon átmenő egyenes. Legyen $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Melyik az a pont f grafikonján, amelyben a görbéhez húzott érintő merőleges e-re?

76–77.

2020/12/08

Tekintsük az $f(x)$ függvény grafikonját az $[a; b]$ intervallumon, és forgassuk meg a görbét az x tengely körül. ($f \geq 0$.) A keletkező forgástest térfogata:
$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

787. Az ABC szabályos háromszög belsejében véletlenszerűen kiválasztunk egy P pontot. Mi a valószínűsége, hogy az ABP háromszög területe legfeljebb fele akkora, mint az ABC háromszög területe?

788. Egy négyzet alapú csonka gúla alaplapjának élei 15, fedőlapjának élei 5, míg oldalélei 13 cm hosszúak. Mekkora a csonka gúla felszíne és térfogata?

78–79.

2020/12/09

789. Határozd meg x értékét, ha tudjuk, hogy $x^2 + x - 2$, $2x^2 + x + 3$ és $4x^2 - 12$ ebben a sorrendben egy

(a) számtani

(b) mértani

sorozat három egymást követő tagja.

790. A forgástestekről tanultak alapján hogyan tudnánk meghatározni az egységsugarú gömb térfogatát?

791. Az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonját elmetszettük az $x = b$ egyenessel. Az egyenes, $f(x)$ grafikonja és az x tengely által közrezárt S síkidom területe 18. Megforgatjuk az x tengely körül az S síkidomot. Mekkora a keletkező test térfogata?

80.

2020/12/10

Az R sugarú gömb térfogata:

$$V_g = \frac{4}{3}R^3\pi.$$

792. Szabályos csonkakúp alapkörének sugara 12, fedőkörének sugara 4. Az alkotók hossza 10. Mekkora a test felszíne?

793. Oldd meg a következő egyenletet, illetve egyenlőtlenséget:

(a) $2^{4x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^x$.

(b) $\sqrt{x - \sqrt{x+2}} \leq 2$.

794. (a) Hány osztója van a $2018 \cdot 2019$, illetve a 2018^{2019} számnak?

(b) Mennyi az egyik, illetve a másik szám osztóinak az összege?

81.

2020/12/14

Feladatok megbeszélése

82–83.

2020/12/15

Egyszerű titkosírások

84–85.

2020/12/16

Diffie–Hellman eljárás, RSA

86.

2021/01/04

Permutáció, variáció, kombináció.

795. Hányféleképpen lehet 10 diákot tornaórán sorbaállítani?

796. Hány 8-jegyű számot lehet képezni az 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4 számokból?

797. Hányféleképpen lehet egy 20-fős egyesületben elnökséget választani, ha az elnökségben van egy elnök, egy elnökhelyettes, egy titkár és egy pénztáros?

798. Hány 5-jegyű számot lehet képezni az 1, 2, 3, 4 számjegyek felhasználásával?

799. Hányféleképpen lehet elnökséget választani a 20-fős egyesületben, ha az elnökségnek 3 egyenrangú tagja van?

800. Egy 20-fős osztályban év végén 8 könyvjutalmat osztanak. A könyvek mind egyformák. Egy diák többször is részesülhet jutalomban. Hányféleképpen lehet a jutalmakat kiosztani?

87–88.

2021/01/05

Ismétléses permutáció, ismétléses kombináció.

801. Egy téglalap oldalainak aránya 1 : 2. Tudjuk, hogy a terület mérőszáma egyenlő a kerület és az átlók hosszának összegét jelölő mérőszámmal. Add meg a téglalap egy csúcsának távolságát az őt nem tartalmazó átlótól.

802. Oldd meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 8x + 8y &= 0, \\ xy - 3x - y &= 0. \end{aligned}$$

89–90.

2021/01/06

803. Adj meg bijekciót $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Z}$ között.

804. Bizonyítsd be, hogy $0,\dot{9} = 1$.

805. Ha 2-vel csökkentjük az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökeit, akkor az $ax^2 + cx + b = 0$ egyenlet gyökeit kapjuk. Adjuk meg az eredeti egyenlet együtthatóit, ha tudjuk, hogy az együtthatók összege -3.

91.

2021/01/07

Megszámlálhatóan végtelen halmaz.
Az egész számok halmaza megszámlálhatóan végtelen (m.v.). A racionális számok halmaza is m.v.
Megszámlálható halmaz.

806. Az alábbi számpároknak csak bizonyos számjegyeit ismerjük. Meg tudjuk-e ez alapján állapítani, hogy különbözőek-e a számok és ha igen, akkor melyik a nagyobb? (Minden számot végtelen tizedes törtnek gondolunk, és a nem jelölt jegyeket nem ismerjük.)

(a) 1,4**25*…
1,3**9*…

(b) 2,6*0*0*…
2,5*…

(c) 0,3*4*5*…
0,*6*7* …

807. Tekintsünk egy síkidomot, melyet az x tengely, az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű görbe és az

$$f(x) = \frac{|x+2| + |x-2| - 2}{2}$$

függvény grafikonja határol. Mekkora a síkidom területe? Mekkora annak a forgástestnek a térfogata, amit a síkidom x tengely körüli forgatásával kapunk?

92.

2021/01/11

Feladatok megbeszélése.

93–94.

2021/01/12

A valós számok halmaza nem megszámlálható.

95–96.

2021/01/13

Dolgozat

1. Állapítsd meg az alábbi nem teljesen ismert számpárokról, hogy mi lehet az egymáshoz való viszonyuk. (Kisebb, egyenlő, nagyobb.) Indokold az állításod.

   (a) $0,6*2**\ldots$ és $0,6*3**\ldots$

   (b) $1,**4*2\ldots$ és $1,545**\ldots$

   (c) $2,3***8*\ldots$ és $2,4*00**\ldots$

2. Egy nagyméretű fagylaltos kehely alakját a következő függvény határozza meg:

$$f(x)\begin{cases} x^2+2, & \text{ha } 0 \le x < 1, \\ 4x - x^2, & \text{ha } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

   Az f görbéjét megforgatva az x tengely körül kapjuk a kelyhet, illetve az y tengely 0 és 2 közé eső szakaszát is megforgatjuk, az lesz a kehely alja.
   Ha az adatokat deciméterben értjük, akkor hány köbcentiméter a kehely térfogata?

3. Egy négyzet alapú egyenes csonka gúla alaplapjának élei 6, fedőlapjának élei 2, míg oldalélei 7 cm hosszúak. Mekkora a csonka gúla felszíne és magassága?

4. Egy 10 cm sugarú gömböt a középpontjától 4 cm távolságra lévő síkkal kettévágunk. Mekkora a két keletkező test közül a nagyobbiknak a térfogata?

97.

2021/01/14

Dolgozat feladatok megbeszélése

98.

2021/01/18

808. Egy derékszögű háromszög alakú telekre téglalap alapterületű házat tervezünk úgy, hogy a téglalap két oldala párhuzamos a telekhatár két befogójával. A telek két merőleges oldalának hossza 50 és 30 m. Ha a lehető legnagyobb alapterületű házat építjük a telekre, akkor mekkora annak alapterülete?

809. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\log_{x+3}\left(x^2-9x-10\right) \le \log_{x+3} 12.$$

99–100.

2021/01/19

810. Egy növekvő számtani sorozat első, negyedik és tizedik tagja egy mértani sorozat első három tagja. A számtani sorozat nyolcadik tagja 10. Határozd meg a mértani sorozat első tagját.

811. A 3, 4, 5, 6 számjegyekből véletlenszerűen előállítunk egy csupa különböző számjegyből álló négyjegyű számot. Mekkora a valószínűsége, hogy a kapott szám osztható 4-gyel?

812. Két számot választunk véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) a [0; 1]-ból. Mi a valószínűsége annak, hogy az összegük kisebb, mint 1? Mi a valószínűsége annak, hogy a szorzatuk kisebb, mint $\frac{4}{25}$? Mi a valószínűsége annak, hogy ez a két feltétel egyszerre teljesül?

100–101.

2021/01/20

813. Egy forgáskúp és egy egyenes henger alaplapja közös, a kúp csúcsa a henger fedőlapjának középpontja. Mekkora a kúp tengelyének és alkotójának hajlásszöge, ha a henger felszíne $\frac{7}{4}$-szerese a kúp felszínének.

814. Egy kocka éleinek hossza egész szám. A kocka felületét pirosra festettük, majd az oldallapokkal párhuzamosan egységtávolságra lévő síkokkal kis kockákra vágtuk.

   (a) Mekkora a nagy kocka térfogata, ha ugyanannyi festetlen kis kocka van, mint ahány olyan, amelynek pontosan egy oldala piros?

(b) A kis kockák közül egyforma valószínűséggel választunk egyet, és azt tapasztaljuk, hogy a festetlen kocka választásának valószínűsége 71% és 72% közé esik. Mekkora a nagy kocka felszíne ebben az esetben?

102.

2021/01/21

815. Az $f(x) = \sqrt{x+1}$ függvény grafikonjának $[0; 2]$ intervallumba eső szakaszát megforgattuk az x tengely körül, így kaptuk az A testet. Az $g(x) = 2\sqrt{x}$ függvény grafikonjának $[0; 2]$ intervallumba eső szakaszával is ugyanezt tettük, így kaptuk az B testet.
Melyik testnek nagyobb a térfogata?
Mindkét testet elmetszettük egy síkkal, ami merőleges az x tengelyre, és azt tapasztaltuk, hogy a két síkmetszet területe egyenlő. Milyen messze van a sík az A test nagyobb területű fedőlapjától?

103.

2021/01/25

816. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x+1}{x-2}.$$

817. Hol helyezkednek el a síkban azok a $P(x; y)$ pontok, amelyekre teljesül, hogy

$$||x| - 1| \leq |y|.$$

818. Egy egyenes körkúpba írjunk bele egy félgömböt úgy, hogy a félgömb körlapja illeszkedik a kúp alaplapjára, a gömbfelület pedig érintse a kúp palástját. A kúp felszínének, és a félgömb alapkör nélküli felszínének az aránya 18 : 5. Mekkora a kúp nyílásszöge?

104–105.

2021/01/26

Emelt szintű érettségi feladatok megbeszélése: 2010. október

106–107.

2021/01/27

819. Egy urnában 7 piros és 9 kék golyó van. Egymás után 5-ször húzunk, és minden húzás után visszatesszük a kihúzott golyót.

(a) Mekkora a valószínűsége annak, hogy a kihúzott golyók között több a piros, mint a kék?

(b) Mekkora ez a valószínűség, ha nem tesszük vissza a kihúzott golyót?

820. Anna és a Béla két dobókockával a következő játékot játsszák. Dobnak a két kockával és Anna nyer, ha a két szám összege vagy szorzata osztható 3-mal, Béla pedig akkor, ha ez nem teljesül. Kinek van nagyobb esélye a győzelemre?

821. Melyek azok a $p \in \mathbb{R}$ számok, amelyekre minden $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, hogy

$$\frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} \le p.$$

108.

2021/01/28

822. Két egyenes út az A pontban merőlegesen metszi egymást. Az útkereszteződéstől 70 km távolságban az egyik úton, 10 km-re a másik úton egy-egy étterem van. A két étteremből egyszerre indul el egy-egy társaság A irányába, és egyenes vonalban, egyenletes sebességgel haladnak. Az A-tól távolabbi csoport óránként 6, a közelebbi 5 km-t tesz meg. Mikor lesznek legközelebb egymáshoz, és mekkora lesz közöttük ekkor a távolság?

823. Egy dobókockával háromszor dobunk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy dobott számok szorzata

(a) prím;

(b) négyzetszám?

824. Az $f(x) = x^2 + 4$, a $g(x) = 4 - 3x$ és a $h(x) = x^3$ függvények grafikonjai egy véges területet határolnak. Mekkora ez a terület?

109.

2021/02/01

825. Hány olyan x egész szám van, amelyre teljesül, hogy

$$(x+2)^3 - (x-2)^3 < 2020.$$

826. Egy derékszögű trapéz egyben érintőnégyszög is. A trapéz két alapja 15, illetve 30 egység hosszú. Mekkora a beírt kör sugara?

827. Tekintsük a következő függvényt:

$$f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}.$$

(a) Melyik a valós számoknak az a legbővebb részhalmaza, ami lehet f értelmezési tartománya?

(b) Ábrázold vázlatosan a függvényt.

(c) Hány rácsponton halad át a függvény grafikonja?

110–111.

2021/02/02

Emelt szintű érettségi feladatok megbeszélése: 2011. május

112–113.

2021/02/03

828. Egy gráf csúcsai egy 8×8-as sakktábla mezői. Két csúcs pontosan akkor van éllel összekötve, ha az egyik mezőről a másikra el lehet jutni egy szabályos futólépéssel. Hány éle van ennek a gráfnak?

829. Legyen $f(x) = 90x^2 - 6x^3$. Melyek azok a t számok, amelyekre

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

830. Az ABC háromszögben $AB = 9$, $BC = 7$, $CA = 6$.

(a) Mekkora a beírt kör sugara?

(b) Mekkora annak a konkáv síkidomnak a területe, amelyet a B csúcsból indulókét érintési szakasz és a beírt kör íve határol?

114.

2021/02/04

831. Egy 32 fős osztályban a lányok testmagasságátlaga 165 cm, a fiúké 172 cm.

 (a) Add meg a legszűkebb intervallumot, ahová az osztály testmagasságátlaga eshet.
 (b) Érkezik évközben egy 170 cm magas lány az osztályba. Hány lány lehetett eredetileg az osztályban, ha így is egész szám maradt a lányok testmagasságátlaga?

832. Oldd meg a

$$\sin(5\alpha + 60^{\circ}) = \sin(-\alpha - 192^{\circ})$$

egyenletet, ha $\alpha \in [-180^{\circ}, 180^{\circ}]$.

833. Legyen $f(x) = x^3$ a nemnegatív valós számokon értelmezett függvény, $g(x) = mx - 2m + 8$ pedig a valós számokon értelmezett függvény. A két függvény grafikonja és az x tengely által határolt síkidom területe 2010. Határozd meg m értékét.

115.

2021/02/08

834. Legyen A a

$$\log_{x+5}(x^2 - 9x + 14)$$

kifejezés, B pedig a

$$\sqrt{\frac{10-x}{x^2+4}}$$

kifejezés értelmezési tartománya. Add meg az $A \setminus B$ halmazt.

835. Egy fura ország lottóján az első 50 pozitív egész közül húznak ötöt és a szelvényen is 5 számot lehet megjelölni. Béla kiválasztja két számot, majd harmadiknak az összegüket, negyediknek az eddig 3 összegét, ötödiknek pedig az eddigi négy összegét.

 (a) Legfeljebb mekkora lehet a legkisebb szám?
 (b) Ha a legkisebb szám a lehető legnagyobb, akkor milyen szelvényekkel játszhat?
 (c) Mekkora valószínűséggel lesz telitalálata, ha a fenti szabályok szerint kitölti az összes lehetséges különböző szelvényt?

836. Az ABC szabályos A csúcsa az origó, a B csúcsa az x tengely pozitív félegyenesének egy pontja, a C pedig illeszkedik az $f(x) = 2\sqrt{x}$ függvény grafikonjára. Milyen messze van a háromszög súlypontja az origótól?

116–117.

2021/02/09

Emelt szintű érettségi feladatok megbeszélése: 2016. október

118–119.

2021/02/10

837. Egy téglalap egyik oldala az x tengelyre, másik oldala az $x = 9$ egyenesre, egy csúcsa pedig az $f(x) = 2\sqrt{x}$ függvény grafikonjára illeszkedik.

   (a) Mekkora a területe a legnagyobb területű ilyen téglalapnak?

   (b) Az $f(x)$ függvénygörbe $[0; 9]$ intervallumon értelmezett darabjának görbe alatti területét felezi az $x = a$ egyenes. Mennyi a értéke?

838. Barnabás egy kirakatban meglátott egy nagyon kedvező árú edzőcipőt. Beszaladt a boltba, hogy megvegye, ám a pénztárnál 4-szer akkora összeget kértek tőle, mint amit a kirakatban látott. Az derült ki, hogy a kirakatrendező éppen fordított sorrendben írta ki az árnak megfelelő négyjegyű szám számjegyeit. Hogy harmonikusan zárják le az incidenst, abban állapodtak meg, hogy Barnabás a valódi ár és a kirakatbeli ár harmonikus közepét fizeti a cipőért. Mennyit fizetett?

839. A PQR szabályos háromszög oldalai n cm hosszúak, ahol $n > 2$ egész. Az oldalakon minden, a végpontoktól egész cm-re lévő pontokat megjelöltük. (A csúcsokat nem.) Ezután képeztük az összes olyan háromszöget, amelynek a csúcsai a megjelölt pontok közül kerülnek ki. Majd hasonló módon vettük azokat a négyszöget, amelyeknek a háromszög mindhárom oldalán van csúcsa.
Miből van több, háromszögből vagy négyszögből?

120.

2021/02/11

840. Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja az AB oldal. Az A csúcsot ráhajtjuk a BC oldal F felezőpontjára. Így keletkezik az DE hajtásél, D illeszkedik az AC, E pedig az AB oldalra. Ha D az AC oldal C-hez közelebbi harmadolópontja, akkor E milyen arányban osztja az AB oldalt?

841. Legyen $A(6; 2), B(-3; 5), C(-5; c)$ pontok a síkban, ahol $c > 0$, illetve k a $K(-2; 3)$ középpontú, 5-sugarú kör.

   (a) Mekkora a k kör AB egyenesre illeszkedő húrjának a hossza?

   (b) A C pont illeszkedik a körre, és e érintőt húzunk k-hoz ebben a pontban. Mekkora az e, az y tengely és az AB egyenes által meghatározott háromszög területe?

121.

2021/02/15

842. Egy háromszög három oldalának hossza számtani sorozatot alkot, és a második leghosszabb oldal hossza 6.

(a) Mi azoknak a számoknak a halmaza, amik a fentieknek megfelelő háromszög területei?

(b) Mekkora a minimális és a maximális területű háromszög?

843. Béla 1980-ban 1 millió Ft kölcsönt vett fel évi 5%-os kamatra, 20 éves futamidővel. Minden évben egyszer töleszt, mégpedig ugyanakkora összeget. Mekkora az évi törlesztőrészlet?

844. A k kör érinti az x tengelyt, illetve a $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 20)$ függvény grafikonját a 2 abszcisszájú pontban. Mekkora a k, az $f(x)$ grafikonja, illetve az x és az y tengely által közrezárt véges terület nagysága?

122–123.

2021/02/16

Emelt szintű érettségi feladatok megbeszélése: 2017. október

124–125.

2021/02/17

126.

2021/02/18

24. szóbeli érettségi tétel

127.

2021/02/22

Még egy kicsit a számosságokról. Vannak a kontinuumtól különböző nem megszámlálható számosságok. Russell-paradoxon.

845. Egyenletes eloszlással választunk két valós számot 0 és 10 között. Legyen az egyik a, a másik b. Mi a valószínűsége annak, hogy

(a) $a + b \leq 8$;

(b) $a^2 + b^2 + 49 \leq 10(a + b)$;

(c) $20b \geq a^2$.

846. Egy asztaliteniszcsapatnak 6 női és 6 férfi versenyzője van. A következő csapatbajnoki mérkőzésen két női, két férfi és két vegyespárosnak kell játszania. Egy versenyző nem játszhat kétszer azonos jellegű párosban. Hányféleképpen lehet összeállítani a csapatot a mérkőzésre?
Ha a feltételeknek megfelelően, de véletlenszerűen állítjuk össze a csapatot, akkor mekkora annak a valószínűsége, hogy Bea (aki a 6 nő egyike) nem lép pályára egyik mérkőzésen sem?

128–129.

2021/02/23

Emelt szintű érettségi feladatok megbeszélése: 2018. október

130–131.

2021/02/24

Függvények konvexitása. Inflexiós pont.

847. Határozd meg az $f(x) = |x|$ és a $g(x) = -x^2 - 2x + 8$ függvények által közrezárt terület nagyságát.

848. Egy földalatti üzemanyagtároló tartálya egy fektetett hengerből és a két végén lévő félgömbből áll. A henger sugara $1,2$ m, a tartály teljes hossza pedig 6 m.

   (a) Mekkora a tartály térfogata?

   (b) Mennyi benzin van a tartályban, ha a szintmérő 0,6 m magasan áll?

132.

2021/02/25

849. Legyen $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x$. Határozd meg a függvény zérushelyeit, lokális szélsőértékeit, inflexiós pontjait. Vizsgáld meg a függvényt monotonitás és konvexitás szempontjából.
Írd fel a függvény érintőjének egyenletét a 0 abszcisszájú pontban.

850. Ábrázold az alábbi függvényeket:

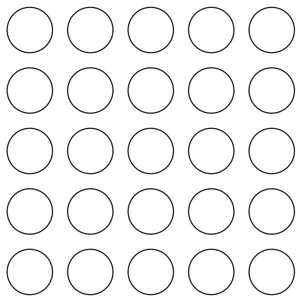
   (a) $f(x) = \sin x \cos x$

   (b) $g(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x$

133.

2021/03/01

851. Az ábrán látható 25 kör mindegyikét feketére vagy fehérre lehet színezni.



(a) Hány olyan színezés van, amelyben több a fekete kör, mint a fehér?

(b) Hány olyan színezés van, amely szimmetrikus az ábra vízszintes vagy függőleges tengelyére?

(c) Hány olyan színezés van, ami szimmetrikus a függőleges tengelyre és pontosan 7 kör színe fekete?

852. Az $A \cup B$ halmaznak 192 eleme van. $A \cap B$ elemszáma A elemszámának 20%-a, B elemszámának 15%-a. Hány eleme van az A és a B halmaznak?

853. Legyen

$$a_n = 8^{n(n+1)}.$$

Bizonyítsd be, hogy a sorozat első n tagjának szorzata:

$$P_n = 2^{n(n+1)(n+2)}.$$

134–135.

2021/03/02

Emelt szintű érettségi feladatok megbeszélése: 2017. október

136–137.

2021/03/03

138.

2021/03/04

Dolgozat

Emelt

1. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

   (a) $2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0.$ (*6 pont*)

   (b) $\sqrt{2x-6} + |x-2| = 1.$ (*6 pont*)

2. Egy korábbi munkából megmaradt, háromszög alakú bútorlap oldalainak közelítő méretei: 200 cm, 120 cm és 160 cm. A bútorlapból egy félkör alakú asztallapot vágnak ki a műhelyben úgy, hogy a félkör átmérője a leghosszabb oldalra illeszkedik.

   (a) Legfeljebb mekkora lehet az így kapott félkör alakú asztallap sugara? A választ egész centiméter pontossággal add meg! (*8 pont*)

   Az O középpontú kör sugara $r = 5$ cm. Felveszünk egy körön kívüli P pontot úgy, hogy $OP = 13$ cm, és a P ponton át húzott e egyenessel elmetsszük a kört. A P-hez közelebbi metszéspontot jelölje A, a P-től távolabbit B.

   (b) Mekkora az O pont és az e egyenes távolsága, ha $PA = 10$ cm? (*8 pont*)

Közép

1. (a) Oldd meg az alábbi egyenlőtlenséget a $[-4; 5]$ intervallumon:

   $$\frac{-4}{2-x} > 0.$$

   (*4 pont*)

   (b) Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

   $$\sqrt{x+5} > x - 7.$$

   (*6 pont*)

2. Egy konvex ötszög szögeinek nagysága számtani sorozatot alkot.

   (a) Bizonyítsd be, hogy az ötszög egyik szöge 108°. (*5 pont*)

   (b) Azt is tudjuk, hogy egy ilyen ötszög másik szöge 70°. Mekkora lehet ebben az esetben az ötszög legnagyobb szöge? (*6 pont*)

(c) Az $ABCDE$ szabályos ötszög kerülete 14 cm. Mekkora az AC átló hossza? (*6 pont*)

139.

2021/03/08

Dolgozatfeladatok megbeszélése

140–141.

2021/03/09

Emelt szintű érettségi feladatok megbeszélése: 2017. május

142–143.

2021/03/10

854. Határozd meg az $(x+1)^2(2+cx)^4$ kifejezésben c értékét, ha tudjuk, hogy a polinom elsőfokú tagjának együtthatója 64.

855. Add meg az A, B és C kijelentések lehetséges logikai értékeit, ha tudjuk, hogy az

$$(A \wedge B) \Rightarrow (\neg B \vee C)$$

állítás logikai értéke hamis.

144.

2021/03/11

A körhöz húzott érintő és szelőszakaszok tétele, a pont körre vonatkozó hatványa.

145–146.

2021/03/16

Emelt szintű érettségi feladatok megbeszélése: 2016. október

147–148.

2021/03/17

Dolgozat

EMELT

1. A derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(-11;2)$, $B(-9;-1)$ és $C(-8;1)$ pontok. A C centrumú, $\lambda = -3$ arányú középpontos hasonlóság végrehajtása után az A pont képe D, a B pont képe pedig E.

   (a) Számítsd ki a D és E pontok koordinátáit! (*4 pont*)

   (b) Határozd meg a BAC szöget! (*4 pont*)

   (c) Igazold, hogy a BCD és az ACE háromszögek területe megegyezik! (*5 pont*)

2. (a) Mely helyen veszi fel a
$$p(x) = (2x-3)^8$$
polinom a 256 értéket? (*3 pont*)

   (b) Add meg az x^5 tag együtthatója a $p(x)$ polinom kifejtett alakjában! (*4 pont*)

   (c) Igazold, hogy az $a_n = 4^n - 3n - 1$ képlettel megadott sorozat minden tagja osztható 9-cel! (*9 pont*)

KÖZÉP

1. Egy háromszög oldalainak hossza $a = 13$ cm, $b = 12$ cm és $c = 5$ cm.

   (a) Bizonyítsd be, hogy a háromszög derékszögű! (*2 pont*)

   (b) Milyen hosszú az átfogóhoz tartozó súlyvonal? (*2 pont*)

   (c) Bizonyítsd be, hogy az átfogóhoz tartozó magasság $\frac{60}{13}$ cm hosszúságú! (*3 pont*)

   Egy hegyi kristályból csiszolt dísz kettős forgáskúp alakú test. A dísz egy 5 cm, 12 cm, 13 cm oldalú derékszögű háromszögnek az átfogója körüli forgatásából is származtatható.

   (d) Számítsd ki a dísz tömegét, ha 1 cm^3 hegyi kristály tömege 2,66 g! (*6 pont*)

2. Egy borítékban kilenc számkártya van, rajtuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 és 9 számok szerepelnek. Réka becsukott szemmel, egyesével kihúz három számkártyát, és a húzás sorrendjében kiteszi a kártyákat az asztalra, balról jobbra egymás mellé. Így egy háromjegyű számot kap. (Például ha az 5, 1, 6 számokat húzta, akkor az 516-os számot kapta.)

(a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy 500-nál kisebb számot kap? (***4** pont*)

(b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a háromjegyű számban lesz 1-es számjegy? (***5** pont*)

(c) Hányféle 9-cel osztható számot kaphat Réka? (***8** pont*)

149.

2021/03/18

Dolgozat megbeszélése

150.

2021/03/22

856. Racionális-e $\log_{2020} 2021$?

857. Négyzetszám-e $2014 \cdot 2016 \cdot 2024 \cdot 2026 + 100$?

858. Oldd meg a
$$\sin^4 x + \cos^4 x - \frac{5}{2} \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$
egyenletet a pozitív valós számok halmazán.

151–152.

2021/03/23

Emelt szintű érettségi feladatok megbeszélése: 2018. május

153–154.

2021/03/24

859. Egy n pontú teljes gráf éleiből 21 élt töröltünk, így egy n pontú fát kaptunk. Mekkora n értéke?

860. Bizonyítsd be, hogy $n > 1$ egész esetén:
$$11^n + 60^n \leq 61^n.$$

861. Az AB szakasz felezőpontja O, az A-hoz közelebbi negyedelőpont C, a B-hez közelebbi pedig D. Az AB szakaszra a C, O, D pontokban merőlegest állítunk, a merőlegesek az AB átmérőjű félkört rendre a P, Q, R pontokban metszik.

(a) Határozd meg a BQP és BRQ háromszögek szögeit.

155.

2021/03/25

Feladatok megbeszélése

156–157.

2021/04/07

862. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 15} \cdot \lg(5 - x) \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

863. Egy húrtrapéz három csúcsának koordinátája: $A(-1;-3), B(5;-1), C(2;3)$. Határozd meg a negyedik csúcs koordinátáit, ha tudjuk, hogy a keresett két koordináta szorzata negatív.

864. Egy kis patak vízmélységét a folyás irányára merőlegesen az $f : [0;3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3-9x}{9}$ függvény adja meg. (Az egység méter.)

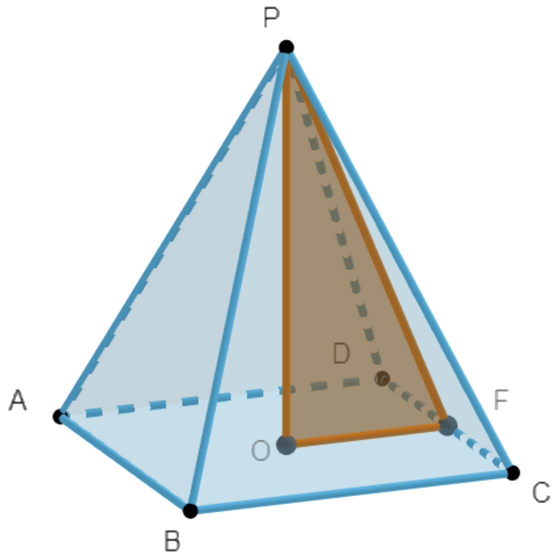
   (a) A patak szélétől hány méterre legmélyebb a víz?

   (b) Mekkora a legnagyobb vízmélység?

   (c) Ha a patak $0,5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel folyik, akkora mekkora a percenkénti vízhozama?

Megoldások

672. Tudjuk, hogy $AB = BC = CD = DA = 5$ és $PA = PB = PC = PD = 10$.



Tekintsük a POF háromszöget, ennek F-nél lévő szöge a kérdéses szög. Ebben a háromszögben tudjuk, hogy $OF = 2,5$, hiszen a négyzet oldalhosszúságának a fele. Szükségünk lenne még az FP szakasz hosszára. Tekintsük most a CDP háromszöget. Mivel $CP = DP = 10$, ezért ez egy egyenlőszárú háromszög, így $PF \perp CD$, hiszen F felezőpont. Vagyis CFP háromszög derékszögű. $CF = 2,5$, $CP = 10$, ebből kapjuk, hogy $FP = \sqrt{93,75}$. A kérdéses α mérete pedig:

$$\alpha = \arccos \frac{2,5}{\sqrt{93,75}} \approx 75,05^{\circ}.$$

673. (a) 18 darab 5-tel osztható szám van. Ezek közül kell kettő választanunk, illetve a maradék 72-ből 3-at. Vagyis a keresett valószínűség:

$$p = \frac{\binom{18}{2} \cdot \binom{72}{3}}{\binom{90}{5}} \approx 0,2076 = 20,76\%.$$

(b) Hasonló módszerrel megkaphajuk, hogy annak a valószínűsége, hogy k darab 5-tel osztható számot húznak ki:

$$p_k = \frac{\binom{18}{k} \cdot \binom{72}{5-k}}{\binom{90}{5}}.$$

Ami alapján annak a valószínűsége, hogy nem lesz 5-tel osztható 31,83%, hogy 1 lesz 42,13%, 2 lesz 20,76%, 3 lesz 4,74%, 4 lesz 0,5%, 5 lesz 0,02%. A várható értéket úgy kapjuk, ha a megfelelő a_i és p_i értékeket összeszorozzuk és összadjuk. Így éppen 1-et kapunk.

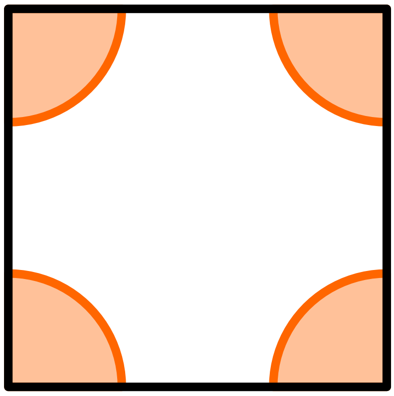
Ez nagyon hasonlít a binomiális eloszlásnál kapott értékre, vagyis, hogy a várható érték np, ahol n a kísérletek száma, p pedig a bekövetkezés valószínűsége. Látni fogjuk, hogy ez a lottóhúzáshoz hasonló eloszlásoknál is működik. (Ezek a hipergeometriai eloszlások.)

674. Alakítsuk át a kifejezést:

$$\frac{(n+1)^3-n^3}{2n^2}=\frac{n^3+3n^2+3n+1-n^3}{2n^2}=\frac{3n^2+3n+1}{2n^2}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}.$$

Ha n tart végtelenhez, akkor a második és harmadik tag is 0-hoz tart, vagyis a teljes kifejezés $\frac{3}{2}$-hez.

675. Nézzük azt a területet, ahol nem lehet a pont:



Ezek $0,3$-sugarú negyedkörök a négyzet csúcsai körül. Ezek összterülete: $T = 4\cdot\frac{0,3^2\pi}{4} = 0,3^2\pi = 0,09\pi \approx 0,283$. A teljes négyzet területe 1, így a megfelelő terület és a teljes terület aránya éppen $0,09\pi$.

Az egyenletes elosztást ilyen esetben úgy értjük, hogy annak a valószínűsége, hogy a kiválaszott pont egy adott tartományba esik, arányos a tartomány területével. Ezt feltételezve (mivel a teljes négyzet területe éppen 1), így a keresett valószínűség: $1-0,09\pi \approx 71,7\%$.

676. Próbáljuk meghatározni a pillanatnyi sebességet úgy, hogy az adott pillanatból induló picike időintervallumban meghatározzuk a test átlagsebességét, majd egyre kisebbre vesszük az időintervallumot.

Legyen az időintervallum hossza ε. Vagyis a $[3,3+\varepsilon]$ intervallumon nézzük a mozgást. Kezdetben a test a 15 pontban van, hiszen $3^2+2\cdot 3=15$. Hol van a test az intervallum végén? A $(3+\varepsilon)^2+2(3+\varepsilon)$ pontban. Vagyis az ε idő alatt megtett út hossza:

$$(3+\varepsilon)^2+2(3+\varepsilon)-15=9+6\varepsilon+\varepsilon^2+6+2\varepsilon-15=8\varepsilon+\varepsilon^2.$$

Az átlagsebességet megkapjuk, ha a megtett út hosszát elosztjuk az eltelt idővel, esetünkben ε-nal. Azt kapjuk, hogy az átlagsebesség: $8+\varepsilon$. Ha pedig az intervallum hosszát csökkentjük, közelítjük a 0-hoz, vagyis ε tart 0-hoz, akkor kapjuk, hogy a pillanatnyi sebesség 8.

Ugyanezt a számolást elvégezhetjük úgy is, hogy 3 helyett az x időpillanatot nézzük. Ekkor az időintervallum másik végpontja $x+\varepsilon$. A megtett út hossza:

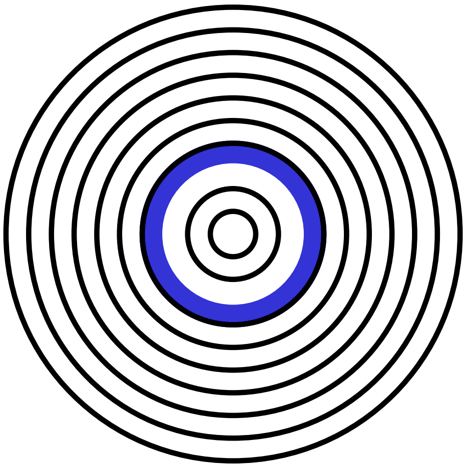
$$(x+\varepsilon)^2+2(x+\varepsilon)-(x^2+2x)=x^2+2\varepsilon x+\varepsilon^2+2x+2\varepsilon-x^2-2x=2\varepsilon x+2\varepsilon+\varepsilon^2.$$

Most is osztanunk kell ε-nal, hiszen most is ennyi idő telt el. Így az átlagsebességre azt kapjuk, hogy $2x+2+\varepsilon$. Ha ε tart 0-hoz, akkor ez minden esetben azt adja, hogy a pillanatnyi sebesség az x időpillanatban $2x+2$.

677. A téglalap területe $3\cdot 4=12$. Az oldallapok közül kettő oldalai: 3, 5 és 5, a másik kettő oldalai: 4, 5 és 5. Mindkét háromszög egyenlőszárú, és az alapokhoz tartozó magasságuk rendre: $\sqrt{5^2-1,5^2}=\sqrt{22,75}$, illetve $\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$. Ezért a felszín:

$$A=3\cdot 4+2\cdot\frac{3\cdot\sqrt{22,75}}{2}+\frac{4\cdot\sqrt{21}}{2}\approx 44,64.$$

678. A lövés egyenletes eloszlása azt jelenti, hogy a az esemény valószínűsége arányos az érintett területtel. A kérdés tehát valójában az, hogy hányadrésze a 7-es körgyűrű területe a teljes körnek. Nézzük az ábrát:



Legyen a legkisebb kör sugara 1, a következőé 2 stb., a legnagyobb köré pedig 10. Ekkor a kék körgyűrű területét úgy kapjuk meg, hogy a negyedik kör területéből kivonjuk a harmadik kör területét. Vagyis: $T_{\text{gyűrű}} = 16\pi - 9\pi = 7\pi$. A teljes céltábla területe 100π. A keresett valószínűség:

$$p = \frac{7\pi}{100\pi} = 0,07 = 7\%.$$

679. Legyen a számtani sorozat első eleme a, differenciája pedig d. Ekkor azt tudjuk, hogy mértani sorozatunk elemei: $a, a+d, a+5d$. Mivel ez a három szám egy mértani sorozat három egymást követő eleme, ezért $a(a+5d) = (a+d)^2$. Másrészt azt is tudjuk, hogy a három elem összege 42, vagyis $a+a+d+a+5d = 42$. Ez utóbbiból kapjuk, hogy $3a+6d = 42$, azaz $a+2d = 14$. (Vagyis a számtani sorozat harmadik eleme 14.) Fejezzük ki a-t, kapjuk, hogy $a = 14 - 2d$, és ezt helyettesítsük be a másik egyenletbe:

$$\begin{aligned} a(a+5d) &= (a+d)^2 \\ (14-2d)(14+3d) &= (14-d)^2 \\ 196 + 14d - 6d^2 &= 196 - 28d + d^2 \\ 7d^2 - 42d &= 0 \\ 7d(d-6) &= 0. \end{aligned}$$

Vagyis $d = 0$ és $d = 6$ megoldásokat kapjuk.
Ha $d = 0$, akkor $a = 14 - 2d = 14$, vagyis a számok: 14, 14, 14.
Ha $d = 6$, akkor $a = 14 - 2d = 2$, vagyis a számok: 2, 8, 32.

680. Ha a téglatest élei 4, 5, 20 hosszúak lennének, akkor a testátlója: $f = \sqrt{4^2 + 5^2 + 20^2} = \sqrt{441} = 21$ hosszú lenne. Ezzel szemben 168 a hossza, ami a 21 nyolcszorosa. Így az élek is nyolcszor akkorák, mint feltételeztük, vagyis 32, 40, 160 hosszúak. Így a térfogat $V = 32 \cdot 40 \cdot 160 = 204800$.

681. Van. Pl. a félegyenes ilyen. (A félsík is.)
Meglepőbb, hogy van ilyen korlátos alakzat is.

682. Könnyebb kiszámolni azt, hogy mi annak a valószínűsége, hogy nem lesz romlott. Hiszen ekkor 46 doboz tejfölből kell választanunk mind a 3-at, és összesen 50 tejfölből választunk 3-at. Mivel ez épp a keresett esemény komplementere, ezért 1-ből ki kell vonni ennek a valószínűségét, hogy megkapjuk a keresett esemény valószínűségét. Azaz:

$$p = 1 - \frac{\binom{46}{3}}{\binom{50}{3}} \approx 21,12\%.$$

A várható érték meghatározásához nézzük meg, hogy milyen eloszlást kaptunk, vagyis mi a valószínűsége annak, hogy k doboz romlott tejfölt vásárolunk. Ez azt jelenti, hogy a 4 romlottból kell k-t választanunk, ezt $\binom{4}{k}$-féleképpen tehetjük meg, a maradék 46-ból pedig $3-k$-t kell választanunk, hiszen összesen 3 doboz tejfölt veszünk. Erre $\binom{46}{3-k}$ lehetőségünk van. Vagyis a keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{4}{k} \cdot \binom{46}{3-k}}{\binom{50}{3}}.$$

Az eloszlás táblázatba foglalva:

a_i	p_i	%
0	0,774	77,4%
1	0,211	21,1%
2	0,014	1,4%
3	0,0002	0,02%

A várható érték definíciója alapján tehát a következő összeget kell kiszámolnunk:

$$0 \cdot \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{46}{3}}{\binom{50}{3}} + 1 \cdot \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{46}{2}}{\binom{50}{3}} + 2 \cdot \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{46}{1}}{\binom{50}{3}} + 3 \cdot \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{46}{0}}{\binom{50}{3}}.$$

A számolás végeredménye az lesz, hogy $3 \cdot \frac{4}{50} = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$.
A fenti vásárlás egy jó példa a **hipergeometriai eloszlásra**. Már a lottóhúzás is az volt. Ez az eloszlás írja le a viszatevés nélküli mintavételeket.
Általánosságban van N dolog, melyek között van M megkülönböztetett. Visszatevés nélkül választunk n-et dolgok közül és azt kérdezzük, hogy mi a valószínűsége, hogy éppen k darab megkülönböztetettet választottunk.
(Az ötöslottónál: $N = 90, M = 5, n = 5$, és az a kérdés, hogy hány találatos a szelvényünk. A tejfölös feladatnál: $N = 50, M = 4, n = 3$, és az a kérdés, hogy hány romlott tejfölt vásárolunk.)
Mivel n-szer választunk, ezért a kísérlet kimenetele $0, 1, 2, \ldots, n$ lehet. (Ha $k < n$, akkor persze minden k-nál nagyobb értéknél 0 lesz a valószínűség.) A kérdés tehát az, hogy mi a valószínűsége, hogy pontosan k megkülönböztetett lesz a kiválasztottak között.
Követve a fenti gondolatmenetet, azt kapjuk, hogy ki kell választanunk k-t az M megkülönböztetett közül. Ezt $\binom{M}{k}$-féleképpen tehetjük meg. A maradék $n-k$ dolgot pedig az $N-M$ nem különböztetett közül kell vennünk. Ami természetesen $\binom{N-M}{n-k}$ lehetőség. A kétválasztás egymástól független, és összesen $\binom{N}{n}$ lehetőség van az n dolog kiválasztására. Így a valószínűség:

$$P(k \text{ megkülönböztetettet választunk}) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Bizonyítható, de mi nem tesszük meg, hogy az n, N, M paraméterekkel rendelkező hipegeometriai eloszlás **várható értéke**:

$$E = n\frac{M}{N}.$$

683. Az érintő meredekségének kiszámításához számoljuk ki a húrok meredekségét. A húr másik pontja tartozzon az $x = 3 + \varepsilon$ ponthoz. Ekkor a meredekség:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left((3+\varepsilon)^3 - 2\cdot(3+\varepsilon)\right) - \left(3^3 - 2\cdot 3\right)}{\varepsilon} = \frac{27 + 27\varepsilon + 9\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - 6 - 2\varepsilon - 27 + 6}{\varepsilon}.$$

Ha összevonunk a számlálóban, akkor $25\varepsilon + 9\varepsilon^2 + \varepsilon^3$-t kapunk. Ezt el kell osztanunk ε-nal, tehát:

$$m = 25 + 9\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Az érintő meredekségét úgy tudjuk meghatározni, ha ε-nal 0-hoz tartunk, vagyis a húr másik pontját mozgatjuk az $x = 3$-beli pont felé. Világos,hogy ekkor m értéke tart 25-hoz, vagyis a pillanatnyi sebesség az $x = 3$ pillanatban 25.

684. Mivel 3 pár egyforma élhosszúság van, és egy hosszúság, amiből 3 darab, ezért az alap élei: 6, 8, 10, és a gúla magassága (hiszen egyenes gúláról van szó) 7. Ekkor az alaplap egy derékszögű háromszög, aminek a területe: $\frac{6\cdot 8}{2}$. Ilyen lapból van 2, illetve 3 téglalap alakú lapunk van, mindnek az egyik oldala 7, a másik pedig rendre 6, 8, 10. Vagyis a felszín:

$$A = 2\cdot\frac{6\cdot 8}{2} + 7\cdot(6+8+10) = 216.$$

Ha a derékszögű alaplapot kiegészítjük téglalappá és vesszük az erre emelt 7 magasságú egyenes hasábot, akkor annak kétszer akkor a térfogata, mint az általunk vizsgált hasáb térfogta. Az így kapott test azonban egy téglatest, aminek a térfogata a három egy csúcsból induló él hosszának a szorzata. Esetünkben $6\cdot 8\cdot 7$. Vagyis az eredeti hasáb térfogata:

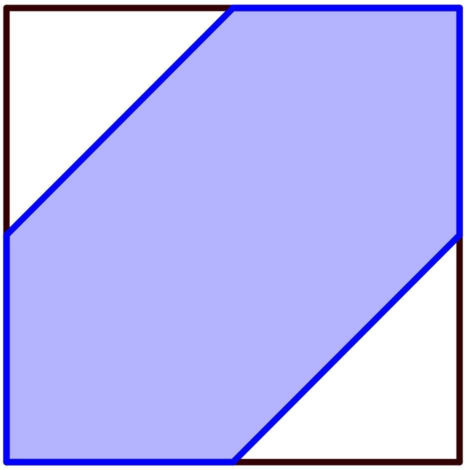
$$V = \frac{6\cdot 8\cdot 7}{2} = 168.$$

Érdemes észrevenni, hogy ez megegyezik $\frac{6\cdot 8}{2}\cdot 7$-tel, vagyis az alaplap területe szorozva a magassággal. Ez általában is igaz, tetszőleges sokszög alaplap esetén. A Cavalieri-elvet felhasználva pedig az is látszik, hogy ferde hasábra is igaz, illetve nem is kell, hogy az alaplap sokszög legyen. Tetszőleges alaplapú hengerszerű test térfogatára igaz, hogy

$$V = T_{\text{alap}}\cdot m.$$

Érdemes megjegyezni, hogy ferde hasáb, illetve henger esetén a magasság nem egyezik meg az alkotó, illetve a megfelelő él hosszával.

685. Ábrázoljuk a két pont kiválasztását úgy, hogy egy egységnégyzetben választunk egy pontot, és a x koordinátája mondja meg, hogy az első pont hol van a szakaszon, az y koordinátája pedig, hogy második pont hol van. Így pl. az egységnégyzet középpontja azt jelenti, hogy mindkét pontnak a szakasz felező pontját választottuk, míg a bal felső sarok azt, hogy az első pont a szakasz bal, a második a jobb végpontja.
Az, hogy a két pontot egyenletes eloszlással választjuk a szakaszon azt jelenti, hogy a pontot a négyzetben egyenletes eloszlással választjuk.
Vagyis a négyzetben annak a résznek a területét kell meghatároznunk, amire igaz, hogy a két pont távolsága kisebb, mint $\frac{1}{2}$. A megfelelő pontok az ábrán kékkel jelölt területen helyezkednek el.



A területet pedig könnyen kiszámolhatjuk, ha két kis háromszög területét levonjuk a négyzet területéből. A háromszögek területe $\frac{1}{8}$, a teljes négyzeté 1, vagyis a keresett valószínűség $p = 1 - 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$.

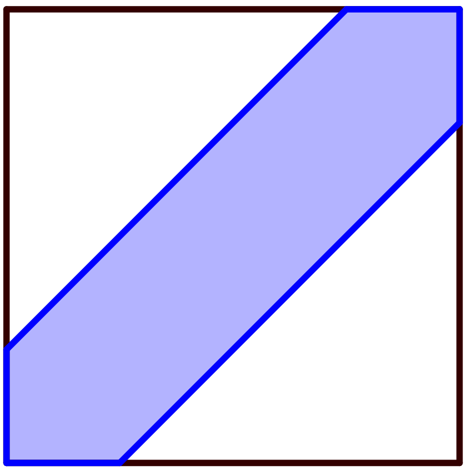
686. A hasáb alaplapja egy szabályos háromszög, aminek a területe: $T = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 5^2$. Van három oldallapja, amelyek mind négyzetek, ezek területe egyenként 25. A teljes felület:

$$A = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^2 \approx 96,65.$$

Az alaplap területét már ismerjük, az ehhez tartozó magasság 5, így a térfogat:

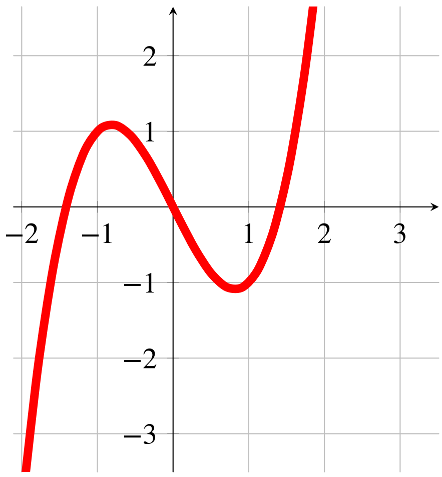
$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 5^2 \cdot 5 \approx 54,13.$$

687. Ez a feladat lényegében ugyanaz, mint a 685. feladat. Júlia érkezése egy egyenletes eloszlással választott pont egy 1 óra hosszú intrvallumból, Rómeó érkezése szintén. Az a kérdés, hogy ez két pont mikor lesz $\frac{1}{4}$-nél közelebb egymáshoz, hiszen ekkor jön létre a randevú. A megoldás is ugyanaz, mint a 685. feladatnál, kicsit módosul az ábra:

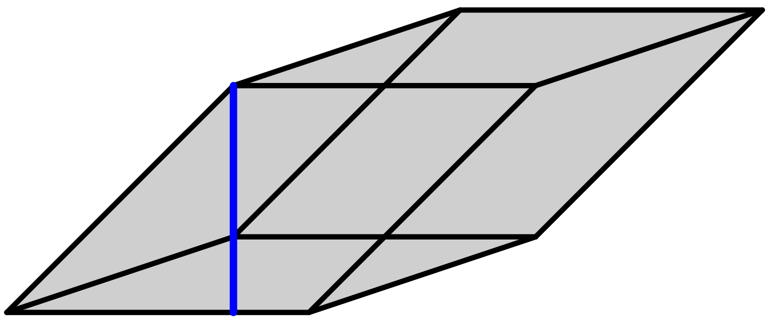


A terület is módosul, hiszen a két egyenlszőszárú, derékszögű háromszög oldalai is megváltoztak, ebben az esetben mindkettő $\frac{3}{4}$. Így a terület és egyben a keresett valószínűség: $p = 1 - 2 \cdot \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{2} = \frac{7}{16}$.

688. Tudjuk, hogy ha x nagyon kicsi szám (nagy abszolút értékű negatív), akkor $x^3 - 2x$ is nagyon kicsi. Hasonlóan, ha x nagyon nagy, akkor $f(x)$ is nagyon nagy. Azt is látjuk, hogy $f(x) = x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}$. Vagyis van három gyöke a függvénynek: $-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}$. Ezek a alapján a függvény grafikonja így néz ki:



689. A paralalepipedon alaplapja egy 4 cm oldalú négyzet, aminek a területe 16 cm^2. Az ábrán kékkel jelölt szakasz pedig ehhez a laphoz tartozó magasság. Mivel minden él 4 cm hosszú, és a paralelogramma oldal egyik szöge 45°, így a magasság $\frac{4}{\sqrt{2}}$. A térfogat emiatt: $32\sqrt{2}$ cm^3.



690. A kifejezés gyökei: $2 \pm \sqrt{4-c}$. Ezek közül elég, ha a kisebb már nagyobb, mint 1, mert akkor automatikusan mindkét gyök nagyobb, mint 1. Vagyis azok a c felelnek meg, amikor $2 - \sqrt{16-4c} > 1$.

$$\begin{aligned} 2 - \sqrt{4-c} &> 1 \\ 1 &> \sqrt{4-c} \\ 1 &> 4 - c \geq 0 \\ 3 &< c \leq 4. \end{aligned}$$

Mivel c értékét egy 6 hosszúságú intervallumról választjuk, és egy 1 hosszú intervallum felel meg a feltételeknek, így a megfelelő c érték választásának a valószínűsége $\frac{1}{6}$.

691. Ismét nézzünk egy ε hosszúságú intervallumot, és az ehhez tartozó húr meredekségét:

$$m_\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1+\varepsilon)^4 - 1^4}{\varepsilon}.$$

A számlálóban bontsuk fel a zárójelet:

$$(1+\varepsilon)^4 - 1^4 = 1^4 + 4\cdot 1^3 \cdot \varepsilon + 6 \cdot 1^2 \cdot \varepsilon^2 + 4 \cdot 1 \cdot \varepsilon^3 + \varepsilon^4 - 1^4 = 4\varepsilon + 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4.$$

Ha ezt elosztjuk ε-nal, akkor azt kapjuk, hogy

$$m_\varepsilon = 4 + 6\varepsilon + 4\varepsilon^2 + \varepsilon^3.$$

Ha ε tart 0-hoz, akkor m_ε tart 4-hez, vagyis az érintő meredeksége 4.

692. Tegyük fel, hogy a mértani sorozat kvóciense $q > 1$. Ekkor az oldalak a, aq, aq^2, és az utóbbi az átfogó. Tudjuk, hogy $a^2 + a^2q^2 = a^2q^4$. Vagyis $1 + q^2 = q^4$. Legyen $z = q^2$, ekkor $1 + z = z^2$, és tudjuk, hogy z nemnegatív. A másodfokú egyenletnek két gyöke van, de csak az $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ pozitív, így $q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, amiből

$$q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

Mivel aq a hosszabbik befogó hossza, a rövidebb pedig a, így a hosszabb befogóvan szemközti β szögre igaz, hogy $\operatorname{tg}\beta = q$. Vagyis:

$$\beta = \operatorname{arctg} q = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \approx 51,83^{\circ}.$$

693. Először nézzük meg az összeg eloszlását:

a_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Ennek alapján könnyen meg tudjuk állapítani, hogy a 4-es maradékoknak milyen az eloszlása:

a_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{3+5+1}{36} = \frac{9}{36}$	$\frac{4+4}{36} = \frac{8}{36}$	$\frac{1+5+3}{36} = \frac{9}{36}$	$\frac{2+6+2}{36} = \frac{10}{36}$

Ebből látható, hogy a várható érték:

$$E = 0 \cdot \frac{9}{36} + 1 \cdot \frac{8}{36} + 2 \cdot \frac{9}{36} + 3 \cdot \frac{10}{36} = \frac{56}{36} = \frac{14}{9}.$$

A szórásnégyzet a várható értéktől való eltérés négyzetének a várható értéke. Nézzük meg a várható értéktől való eltérés négyzetét:

a_i	$\left(\frac{14}{9}\right)^2$	$\left(\frac{5}{9}\right)^2$	$\left(\frac{4}{9}\right)^2$	$\left(\frac{13}{9}\right)^2$
p_i	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{10}{36}$

Ez alapján a szórásnégyzet:

$$D^2 = \frac{196}{81} \cdot \frac{9}{36} + \frac{25}{81} \cdot \frac{8}{36} + \frac{16}{81} \cdot \frac{9}{36} + \frac{169}{81} \cdot \frac{10}{36} = \frac{211}{162}.$$

Ezek alapján $D = \sqrt{D^2} = \sqrt{\frac{211}{162}} \approx 1,141$.

694. Nézzük az $x = 2$ és $x = 2 + \varepsilon$ pontok közötti húr meredekségét.

$$m_\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2+\varepsilon} - \frac{1}{2}}{\varepsilon} = \frac{\frac{2-(2+\varepsilon)}{2(2+\varepsilon)}}{\varepsilon} = \frac{\frac{-\varepsilon}{2(2+\varepsilon)}}{\varepsilon} = \frac{-1}{2(2+\varepsilon)} = \frac{-1}{4+2\varepsilon}.$$

Ha ε tart 0-hoz, akkor a meredekség tart $-\frac{1}{4}$-hez, így ez az érintő meredeksége.

695. Igen. Pl:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x = a \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

696. Igen, van ilyen függvény. Egy nevezetes példa az ún. Dirichlet-függvény:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

697. Igen, folytonos. Tekintsünk egy tetszőleges x_n sorozatot, melyre $x_n \to 3$. Ekkor a függvényértékek sorozata x_n^2. Kérdés, hogy hová tart ez a sorozat? Tanultuk, hogy ha $a_n \to a$ és $b_n \to b$, akkor $a_n \cdot b_n \to ab$, így az x_n^2 sorozat határértéke 9 lesz. Mivel az x^2 függvény 3-ban 9-et vesz fel, ezért a határérték és a függvényérték megegyezik, vagyis a függvény folytonos 3-ban.

698. Igen, van ilyen függvény. Pl.:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \{1, 2, 3\} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

699. Igen, ilyen függvény is van. A Dirichlet-függvény adhat ötletet a megoldásra:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$$

700. (a) Igen, a függvény a teljes számegyenesen folytonos.
   (b) Igen, a függvény a 0-n kívül mindenhol folytonos.
   (c) Nem, a függvény az $\frac{n}{2}$ alakú számokban nem folytonos, ahol $n \in \mathbb{Z}$.

701. Mivel $-x+a^2$ és $3x-3a$ a teljes számegyenes folytonos, így f mindenképpen folytonos, ha $x \neq 1$. Úgy kell tehát megválasztanunk a-t, hogy 1-ben is folytonos legyen a függvény. Ehhez pedig arra van szükség, hogy az értelmezési tartomány két részén használt képlet ugyanazt a helyettesítési értéket adja 1-ben. Vagyis, hogy

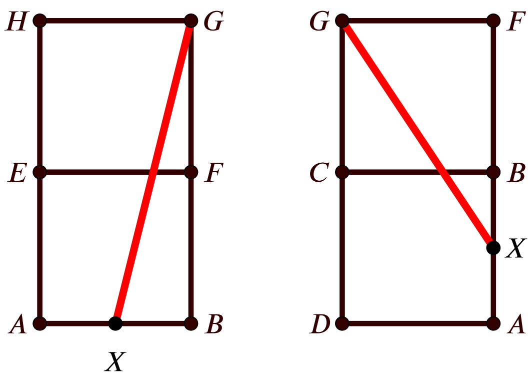
$$-1+a^2=3-3a.$$

Ebből a-ra az $a^2+3a-4=0$ egyenletet kapjuk, amelyet átírhatunk $(a-1)(a+4)=0$ egyenletre. Vagyis $a=1$ vagy $a=-4$ esetén lesz mindenhol folytonos az f függvény.

702. Csupa folytonos függvény összegeként, különbségeként, szorzataként, hányadosaként áll elő a függvény, így mindenhol folytonos, kivéve ott, ahol egy nevező értéke 0. Ott nem is lehet folytonos, hiszen nincs is értelmezve, márpedig folytonos csak ott lehet a függvény, ahol értelmezve van.
A nevező x^2-3x-8, tehát ott nem folytonos a függvény, ahol ez 0. Vagyis a halmaz, ahol f folytonos:

$$\mathbb{R}\setminus\{\frac{3-\sqrt{41}}{2},\frac{3+\sqrt{41}}{2}\}.$$

703. Tekintsük a kocka hálóját, és annak segítségével határozzuk meg a legrövidebb utat. Jól látható, hogy legrövidebb út vagy az $ABFE$ lapon indul, és $BCGF$ vagy $EFGH$ lapon folytatódik, vagy $ABCD$ lapon indul és $BCGF$ vagy $DCGH$ lapon folytatódik. (Más lapokat is érinthet azútvonal, hogy világos, hogy azok nem lehetnek a legrövidebbek.) Ebből 2-2 eset teljesen ugyanaz, így csak azt vizsgáljuk, amikor az út az $ABEF$ lapon indul. Legyen a kezdőpont X. Ekkor a legrövidebb út a kocka hálóján a két pont között a két pontot összekötő szakasz. Nézzük a két esetet:



Az első ábrán látható piros szakasz hossza: $\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$, a második ábrán pedig $\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$. Mivel a második rövidebb, így a legrövidebb út hossza $\sqrt{13}$ km.

704. Igen, van. Ugyanis $f(1)=-5$, $f(2)=15$, és tudjuk, hogy a függvény folytonos. Emiatt teljesülnek a Bolzano–Darboux-tétel feltételei, ami azt jelenti, hogy a függvény az $[1;2]$ intervallumon minden -5 és 15 közötti valós számot felvesz. Így a 0-t is, vagyis lesz ebben az intervallumban ennek a polinomnak gyöke.

705. A téglatest $3\cdot4\cdot8=96$ egységkockából épül fel. Ezek összfelülete: $6\cdot96=576$. A felületen nem lesz ragasztás, vagyis ebből $2(3\cdot4+3\cdot8+4\cdot8)=136$ lappal nem kell foglalkozni. Marad belül $576-136=440$ lap. Itt két érintkező pár esetén kell egy lapot ragasztóval bekenni, vagyis $\frac{440}{2}=220$ a helyes válasz.

706.

707. Ha egy tetraéderrel dobunk, akkor a várható érték 2,5. Ha kettővel dobunk, akkor nyilván ennek a kétszerese, vagyis 5.
Nézzük az összeg eloszlását.

a_i	2	3	4	5	6	7	8
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Ezek alapján könnyen el tudjuk készíteni a várható értéktől való eltérés négyzetének eloszlását. (Ne felejtsük, hogy a várható érték 5.

a_i	9	4	1	0	1	4	9
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Amit tömörebben is le tudunk írni:

a_i	0	1	4	9
p_i	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$

Ebből kapjuk, hogy

$$D^2 = 0 \cdot \frac{4}{16} + 1 \cdot \frac{6}{16} + 4 \cdot \frac{4}{16} + 9 \cdot \frac{2}{16} = \frac{40}{16}.$$

Amiből $D = \sqrt{\frac{40}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

708. (a) $x \geq 0$, hiszen $\sqrt{x}$ ezen a halmazon értelmezett. A nevező nem lehet 0, vagyis $x \neq 9$. Vagyis a legbővebb $D_f = [0; \infty[\setminus\{9\}$.

(b) A függvény a teljes értelmezési tartományán folytonos, hiszen folytonos függvények, összegeként, különbségeként, hányadosaként áll elő és az értelmezési tartományon a hányados nem 0. Így 16-ban is folytonos, vagyis a határértéke megegyezik a függvényértékkel. Mivel $f(16) = \frac{1}{7}$, így

$$\lim_{x \to 16} f(x) = \frac{1}{7}.$$

(c) A teljes értelmezési tartományon. (Ld. előző pont.)

(d) Végezzük el a következő átalakítást:

$$\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x}+3}.$$

A $(\sqrt{x}-3)$ kifejezéssel azért egyszerűsíthetünk, mert $x \neq 9$, így a kifejezés nem 0. Mivel ez a függvény folytonos, ezért tetszőleges 9-hez tartó sorozat mentén a függvényértékek sorozata tart a helyetessítési értékhez, vagyis $\frac{1}{6}$-hoz. Emiatt az eredeti függvény határértéke 9-ben $\frac{1}{6}$.

709. Három különböző megoldást mutatunk.
I. Vonjuk le az összes esetből a rosszakat.
Ha mehetnek egymás mellett is a rozmárok, akkor nyilván $\binom{11}{3}$ lehetséges sorrendjük van. Ezek közül mik azok, amik nem jók?
Egyrészt, ha mindhárom rozmár egymás mellett megy. Ilyenből nyilván 9 lehetőség van, hiszen ha egy „egységnek” tekintjük a három rozmárt, akkor a 8 fóka között 9 hely van, ahová elhelyezhetjük őket.

Másrészt, ha két rozmár egymás mellett megy, a harmadik pedig külön. Most a két rozmárt tekintsük egy egységnek, ezt az egységet a 8 fóka közé szintén 9 helyre tehetjük le. Így most a 8 fóka és a duplarozmár közé kell elhelyeznünk a szingli rozmárt. De a duplarozmár melletti két helyre nem tehetjük, vagyis csak 8 lehetséges hely van, így ilyen sorrendből $9 \cdot 8 = 72$ van.
A végeredmény tehát:

$$\binom{11}{3} - 9 - 72 = 84.$$

II. Leszámolás, de okosan.
11 állat megy sorban, ha megmondjuk, hogy melyik 3 helyen van rozmár, akkor készen vagyunk. Az a feltétel, hogy nem lehet a számok között szomszédos.
Ha az első helyen áll rozmár, akkor legközelebb a 3. helyen lehet, és azt követően legközelebb az 5. helyen.
Vagyis ha $1, 3$-mal kezdődik a sorozat, akkor 5-től 11-ig lehet a harmadik szám, vagyis 7 lehetőség van. Ha $1, 4$-gyel, akkor 6 és így tovább. Összesen $7+6+5+4+3+2+1 = 28$ lehetőség, ha az 1-es helyen van rozmár.
A 2-es helyen van az első rozmár, akkor $4, 6$ a legkisebb, folytatás, és a fentiekhez hasonlóan $6+5+4+3+2+1 = 21$ lehetőség van.
Ezt folytatva minden esetben az első k szám összegét kapjuk lehetőségként, végül ha az első rozmár a 7-es helyen megy, akkor egyetlen lehetőség van a másik kettő elhelyezésére, a $9, 11$.
A válasz tehát:

$$28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 84.$$

III. Elegánsan.
Állítsuk sorba a 8 fókát. Ekkor ők meghatároznak 9 lehetséges helyet, ahová rozmárokat lehet állítani. Ha minden ilyen helyre legfeljebb 1 rozmár kerülhez, akkor nem lesz szomszédos rozmár. Vagyis a 9 hely közül kell kiválasztanunk 3-at kiválasztanunk a rozmároknak, így a megoldás:

$$\binom{9}{3} = 84.$$

710. Milyen összegeket kaphatunk: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11. Mivel a kockán 6, a tetraéderen 4 elemi kimenetel van, így ha a kettővel egyszerre dobunk, akkor 24 elemi kimenetel lehetséges. Számoljuk meg, hogy ezek közül hányszor kapjuk az adott összeget. Ezt elosztva 24-gyel kapjuk az adott kimenetel valószínűségét. Pl. 4 lehet az összeg úgy, hogy 1-3 a két dobás, illetve 2-2. Az első 6 elemi esetben következhet be, hiszen 3 db 1-es és 2 3-as van a kockán, illetve a tetraéderen, a második 1 esetben, hiszen egy-egy 2-es van mindkét testen. Így kapjuk meg az eloszlást:

a_i	3	4	5	6	7	8	9	11
p_i	$\frac{3}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$

Ezek alapján a várható érték:

$$E = 3 \cdot \frac{3}{24} + 4 \cdot \frac{7}{24} + 5 \cdot \frac{3}{24} + 6 \cdot \frac{5}{24} + 7 \cdot \frac{1}{24} + 8 \cdot \frac{2}{24} + 9 \cdot \frac{2}{24} + 11 \cdot \frac{1}{24} = \frac{134}{24} = 5{,}58\dot{3}.$$

711. Minden esetben vizsgálnunk kell tetszőleges a esetén a

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

kifejezés értékét.

(a) Ebben az esetben a nevező minden esetben $2 - 2 = 0$, így a határérték is minden a-ra 0. Vagyis $f'(x) = 0$.
A 2-nek nincs jelentősége, minden konstansfüggvény derinváltfüggvénye az azonosan 0 függvény.

(b) Itt az $\frac{x-a}{x-a}$ hányadost kell vizsgálnunk, ami minden $x \neq a$ esetben 1. Így a határérték is 1. Vagyis $f'(x) = 1$.

(c) Ha $f(x) = 3x^2$, akkor a derivált:
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{3x^2 - 3a^2)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{3(x + a)(x - a)}{x - a} = \lim_{x \to a} 3(x + a) = 6a.$$
Mivel ez minden a-ra teljesül, így $f'(x) = 6x$.

712. Az eddigiekhez hasonlóan most is
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
értékét kell meghatároznunk, ha $f(x) = x^n$. Ehhez elevenítsük fel a következő azonosságot:
$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + b^2a^{n-3} + \ldots + b^{n-2}a + b^{n-1}).$$
Ezt felhasználva már nincs nehéz dolgunk:
$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1})}{x - a} =$$
$$= \lim_{x \to a} x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1}.$$
Ha $x \to a$, akkor az összegben minden tag a^{n-1}-hez tart, vagyis a határérték: na^{n-1}. Mivel ez minden a-ra igaz, így $f'(x) = nx^{n-1}$.

713. Ezt az eddigi ismereteink alapján nem tudjuk még megmondani. Két későbbi információ lesz a segítségünkre. Az első a 714-es feladat megoldása. A másik pedig, hogy van olyan trigonometrikus azonosság, amely $\sin\alpha - \sin\beta$ kifejezésre ad alternatív kiszámítási módot.
A két hasznos dolog tehát a következő:
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
Illetve, hogy
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$
Nézzük, mit is kellene kiszámítanunk. A derivált definíciója alapján, ha $f(x) = \sin x$, akkor
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}.$$
Alakítsuk át egy kicsit a kifejezést:
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \cos\left(\frac{x + a}{2}\right).$$
Mivel $x \to a$, ezért $\frac{x-a}{2} \to 0$, vagyis a szorzat első tagja 1-hez tart.
$$\lim_{x \to a} \frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} = 1.$$

Mivel $x \to a$, a cos-függvény mindenhol folytonos, ezért $\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$ határértéke: $\cos\left(\frac{a+a}{2}\right) = \cos a$.
Így az egész kifejezés határértéke is $\cos a$.
Mivel a fentiek minden $a \in \mathbb{R}$ esetén igazak, ezért ezzel beláttuk, hogy

$$(\sin x)' = \cos x.$$

714. Megtippelni úgy lehet az értékét, hogy kis ε-ra kiszámoljuk számológéppel $\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}$ értékét, vigyázva arra, hogy ε radiánban értendő. Ez persze nem bizonyítás, ez alapján csak egy sejtésünk lehet, hogy a határérték 1.
Órán be is láttuk, hogy ez így van.

715. Már tudjuk, hogy $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, $(f \pm g)' = f' \pm g'$, és $(x^n)' = nx^{n-1}$. Ezek alapján:

$$\left(x^4 - 2x^2 + 3x\right)' = 4x^3 - 4x + 3.$$

716. Két módon is meghatározhatjuk $\frac{1}{x}$ deriváltját.
Használhatjuk azt, hogy $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$. Ekkor:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2}.$$

A definíció alapján is egyszerű megkapni a helyes választ.

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a} == \lim_{x\to a} \frac{-1}{xa} = \frac{-1}{a^2}.$$

Mivel ez minden a-ra teljesül, ha $a \neq 0$, ezért $\frac{1}{x}$ deriváltja $\frac{-1}{x^2}$.

717. A függvény a pozitív számokon megegyezik az x függvénnyel, így itt a deriváltja 1. A negatív számokon pedig a $-x$ függvénnyel, így a deriváltja itt -1. 0-ban pedig nincs derivált, mert az $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ kifejezés értéke -1, ha x negatív és 1 ha x pozitív, így nem lehet határértéke a 0-ban. Vagyis a deriváltfüggvény:

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

718. Tudjuk, hogy $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, illetve hogy $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$, ezért $f(x) = \frac{3}{x^2-2}$ deriváltja:

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (2x)}{(x^2-2)^2} = \frac{6x}{x^4 - 4x^2 + 4}.$$

719. A gyümölcsöknek $\binom{14}{4}$ lehetséges sorrendje van, ezek a lehetséges kimenetelek, amelyek mindegyike egyformán valószínű. Nézzük, hogy mennyi azoknak az eseteknek a száma, amelyekben van két körte egymás mellett.
Első megoldás. Könnyebb talán azokat az eseteket megszámolni, amikor nincs két körte egymás mellett.

Ennek megoldását már átgondoltuk a 709. feladatokban, ahol rozmárok nem lehettek egymás mellett a sorban. Ha letesszük a 10 almát az asztalra, akkor 11 hely van közöttük, ahová a körtéket helyezhetjük. Mivel egy ilyen helyre legfeljebb egy körtét tehetünk, így ki kell választanunk azt a 4 helyet, ahová körte kerül. Vagyis a $\binom{11}{4}$ ilyen sorrend van. Ezt most le kell vonnunk az összesből, így a valószínűség:

$$p = 1 - \frac{\binom{11}{4}}{\binom{14}{4}} = \frac{61}{91} \approx 0,67.$$

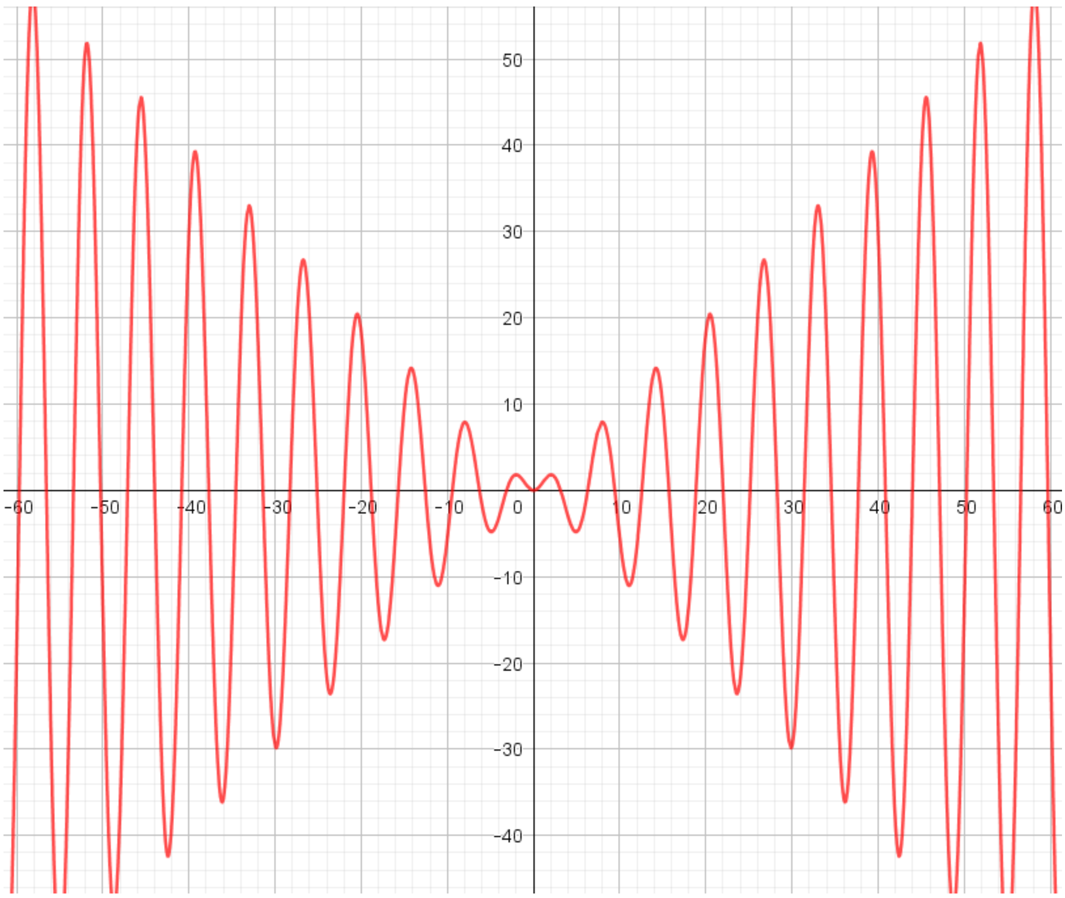
Második megoldás. Számoljuk meg a megfelelő eseteket. 4 típust különböztessünk meg, aszerint, hogy hogy helyezkednek el a körték, hány körte van egymás mellett:

- 4: Válasszuk ki a 11 hely közül azt, ahová a négy körtét teszünk. Az esetek száma: 11.
- 3-1: Válasszuk ki a két helyet a 11 közül, ahová körtét teszünk, és aztán a két hely közül azt, ahová 3 körtét teszünk. Az esetek száma: $\binom{11}{2} \cdot 2 = 110$.
- 2-2: Válasszuk ki a két helyet a 11 közül, ahová két körtét teszünk. Az esetek száma: $\binom{11}{2} = 55$.
- 2-1-1: Válasszuk ki a három helyet a 11 közül, ahová körtét teszünk, majd a három hely közül azt, ahová kettőt. Az esetek száma: $\binom{11}{3} \cdot 3 = 495$.

Vagyis összesen $11 + 110 + 55 + 495 = 671$ megfelelő eset van. Így a valószínűség:

$$p = \frac{671}{\binom{14}{4}} = \frac{61}{91} \approx 0,67.$$

720. GeoGebrában ábrázolva a függvényt ezt kapjuk:



A deriváltat a szozat deriválási szabálya alapján kapjuk. Tudjuk, hogy $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$. Ha most $f(x) = x$ és $g(x) = \sin x$, akkor

$$(x \sin x)' = 1 \cdot \sin + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x.$$

721. A $\sin x$ deriváltja után ez már nem egy nehéz feladat. Most $\cos\alpha - \cos\beta$ kifejezésre kell keresnünk egy azonosságot, és továbbra is szükségünk van arra, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Azt találhatjuk, hogy

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

A derivált definíciója alapján, ha $f(x) = \cos x$, akkor

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a}.$$

Alakítsuk át ismét egy kicsit a kifejezést:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{\cos x - \cos a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{-2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{-\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} \sin\left(\frac{x+a}{2}\right).$$

Mivel $x \to a$, ezért $\frac{x-a}{2} \to 0$, vagyis a szorzat első tagja -1-hez tart.

$$\lim_{x\to a} \frac{-\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}} = -1.$$

Mivel $x \to a$, a sin-függvény mindenhol folytonos, ezért $\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)$ határértéke: $\sin\left(\frac{a+a}{2}\right) = \sin a$.

Így az egész kifejezés határértéke is $-\sin a$.

Mivel a fentiek minden $a \in \mathbb{R}$ esetén igazak, ezért ezzel beláttuk, hogy

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

722. (a) $f'(x) = 6x^5 - 12x^3 + 2$.

(b) Mivel $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, ezért

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(c) $h'(x) = \left(x^2 \cos x\right)' = 2x\cos x + x^2(-\sin x) = 2x\cos x - x^2 \sin x$.

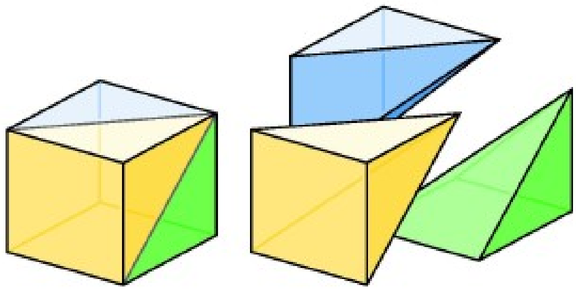
(d) $j'(x) = \left(\frac{3}{\sin x}\right)' = \frac{-3\cos x}{\sin^2 x}$

723. Írjuk fel $\frac{f}{g}$-t $f \cdot \frac{1}{g}$ alakban. Azt már tudjuk, hogy $\frac{1}{g}$ deriváltja $\frac{-g'}{g^2}$, és azt is, hogy a szorzat deriváltját hogyan kell kiszámítani. Ezek alapján:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \frac{-g'}{g^2} = \frac{f'}{g} - \frac{f \cdot g'}{g^2} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

724.

725. Vegyük észre, hogy 3 egybevágó négyzet alapú gúlából össze tudjuk rakni a kockát:



Az egyik az eredeti $ABCDE$, a másik kettő pedig: $BCGFE$, illetve $DCGHE$. Vagyis a kocka térfogatának éppen harmada a gúla térfogata, azaz $\frac{1}{3}$.

726.

727. (a) $f_1'(x) = (\cos(2x+\pi))' = -2\sin(2x+\pi)$

(b) $f_2'(x) = \left(\sin x^2\right)' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x\cos x^2$.

(c) $f_3'(x) = \left(\sin^5 x\right)' = 5\sin^4 x \cos x$.

(d) $f_4'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^x 2} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

(e) $f_5'(x) = \left(\frac{x^2+\cos x}{2+\sin x}\right)' = \frac{(2x-\sin x)()2+\sin x-(x^2+\cos x)\cos x}{(2+\sin x)^2} = \frac{4x+2x\sin x-2\sin x-x^2\cos x-1}{4+4\sin x+\sin^2 x}$

728. A térfogatot már könnyen ki tudjuk számítani, hiszen az alaplap területe 4π, a magassága 3, vagyis a térfogat is 4π.
Mekkora a felülete? Az alaplap továbbra is 4π területű. Mekkora a palást területe? A palást egy körcikk, melynek kerülete az alaplap kerülete, a sugara pedig a kúp alkotója. Az alkotó hossza $\sqrt{13}$, a kerület pedig 4π. Tudjuk, hogy az r sugarú, K kerületű körcikk területe $T = \frac{rK}{2}$, vagyis a palást területe $\frac{\sqrt{13}\cdot 4\pi}{2} = 2\sqrt{13}\pi$. Azt kaptuk, hogy

$$A = 4\pi + 2\sqrt{13}\pi = (4 + 2\sqrt{13})\pi.$$

Az egyenes körkúp felszínét a fenti módszerrel általánosan is megkaphatjuk. Legyen az alapkör sugara r, az alkotó hossza pedig a. Ekkor az alaplap területe $r^2\pi$, a palás területe pedig $\frac{a\cdot 2r\pi}{2} = ar\pi$. Vagyis a felszín:

$$A = r^2\pi + ar\pi = r\pi(a+r).$$

729. (a) Mindkét esetben alkalmazhatjuk az összetett függvény deriválására vonatkozó tételt.

$$f_1'(x) = \left(\sqrt{1+\sin^2 x}\right)' = \left(\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{2}}\right)' =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1+\sin^2 x\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\sin^2 x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}} \cdot 2\cos x \cdot \sin x =$$
$$= \frac{\cos x \cdot \sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}.$$

(b)

$$f_2'(x) = \left(\cos^3(2x+1)\right)' = 3\cos^2(2x+1)\cdot(-2\sin(2x+1)) =$$
$$= -6\cos^2(2x+1)\sin(2x+1).$$

730. Ismét két megoldást nézzünk.
Első megoldás: Nézzük meg, hogy a csokoládkat milyen eloszlásban vásárolhatjuk, vagyis hány van egy-egy fajtából.

- Egy fajtából veszünk 4-et (4): Mivel 6-féle csokoládé van, így erre 6 lehetőség van.
- Egy fajtából veszünk 3-at, egy másikból 1-et (3-1): Válasszuk ki a két típust, ezt $\binom{6}{2} = 15$-féleképpen tehetjük meg, és aztán válasszuk ki, hogy melyikből veszünk 3-at. Ez még 2 lehetőség. Vagyis összesen $2\binom{6}{2} = 30$ lehetőség van erre.
- 2-2: Válasszuk ki, hogy melyik két csokoládéból veszünk, és ez meg is határozza a vásárlást. Vagyis itt $\binom{6}{2} = 15$ lehetőség van.
- 2-1-1: Válasszuk ki a 3 típust, ez $\binom{6}{3} = 20$ lehetőség, és aztán a 3-ból válasszuk ki azt, amiből 2-t veszünk. Vagyis $3\binom{6}{3} = 60$ lehetőség.
- 1-1-1-1: Válasszuk ki a 4 típust, és ezzel mindent el is döntöttünk. Vagyis $\binom{6}{4} = 15$ lehetőség.

Összesen $6 + 30 + 15 + 60 + 15 = 126$ lehetőség.
Vegyük észre, hogy ha egy lényegesen nagyobb boltba megyünk, és jóval több csokoládét akarunk venni, akkor ez a módszer nagyon nehézkessé válik, mert rengeteg eset lesz.
Második megoldás. Rajzoljunk fel 5 függőleges vonalat, amik elválasztják egymástól a 6 különböző típust, és minden csokit jelöljünk egy körrel. A $||oo|o||o$ sorozat azt jelzi, hogy az első és a második típusú csokoládéból nem veszünk, a harmadikból 2-t, a negyedikből 1-et, az ötödöikből egyet sem, és a hatodikból szintén egyet. Minden ilyen sorozatban 5 vonal van és 4 kör, és az ilyen sorozatok és a vásárlási lehetőséget között egy-egyértelmű megfeleltetés van. Vagyis a sorozatok száma megegyezik a lehetséges vásárlások számával.
Hány ilyen sorozat van? Minden sorozat 9 hosszúságú és bárhol lehet benne 4 kör. Vagyis a számuk: $\binom{9}{4} = 126$.

731. Mit tudunk megállapítani a függvényről. Tudjuk, hogy nagy abszolútértékű negatív számok esetén a függvényérték nagyon nagy lesz, és ugyanez a helyzet a nagy abszolútértékű pozitív x-ek esetén is, vagyis a függvény grafikonja a „bal felső sarokból” jön, és a „jobb felső sarokba” megy.
A gyökök kapcsán azt tudjuk megállapítani, hogy mivel $f(-2)$ negatív és $f(-1)$ pozitív, ezért a $]-2;-1[$-n valahol van gyöke. Hasonlóan derül ki, hogy az $]1;2[$-n szintén van gyök.
...

732.

733.

734. Ismét az összetett függvény deriválási szabályát használjuk, esetleg többször egymás után.

(a) $f'(x) = \left(\sin^3\left(x^2+1\right)\right)' = 3\sin^2\left(x^2+1\right)\cdot\cos\left(x^2+1\right)\cdot 2x = 6x\sin^2\left(x^2+1\right)\cdot\cos\left(x^2+1\right)$

(b) $g'(x) = \left(\sqrt[3]{\frac{x}{\operatorname{tg} x}}\right)' = \frac{1}{3}\left(\frac{x}{\operatorname{tg} x}\right)^{-\frac{2}{3}}\frac{\operatorname{tg} x - \frac{x}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x}$

735. Az $f(x) = x^3 - 4x + 3$ függvénynek a $P(2,3)$ pontjában kell felírnunk az érintő egyenletét. Tudjuk, hogy ha f deriválható, akkor az $(x, f(x))$ pontban az érintő meredeksége $f'(x)$. Mivel $f'(x) = 3x^2 - 4$, így $f'(2) = 8$, vagyis az érintő meredeksége 8. Tudjuk, hogy az (a, b) ponton áthaladó, m meredekségű egyenes egyenlete: $y - b = m(x - a)$, vagyis a mostani esetben $y - 3 = 8(x - 2)$. Tehát az egyenes egyenlete:

$$y = 8x - 13.$$

736.

737. Mivel az egyenes áthalad a $P(3; -4)$ ponton, ezért az egyenes egyenlete: $y + 4 = m(x - 3)$ alakú, ahol m az egyenes meredeksége. Azt is tudjuk, hogy ez az egyenes pontosan egy pontot tartalmaz a függvénygrafikonból. Ez azt jelenti, hogy a

$$\begin{aligned} y + 4 &= m(x - 3) \\ y &= \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

egyenletrendszernek egyetlen megoldása van. Az első egyenletből fejezzük ki y-t: $y = mx - 3m - 4$. Helyettesítsük be ezt a második egyenletbe:

$$mx - 3m - 4 = \frac{x^2}{4}.$$

Ez egy másodfokú egyenlet x-re, és tudjuk, hogy pontosan egy megoldása van:

$$x^2 - 4mx + 12m + 16,$$

vagyis a diszkriminánsa 0. Azaz:

$$\begin{aligned} 16m^2 - 4(12m + 16) &= 0 \\ m^2 - 3m - 4 &= 0 \\ (m - 4)(m + 1) &= 0. \end{aligned}$$

A várakozásoknak megfelelően az adott pontból két érintő húzható a parabolához, az egyik meredeksége 4, a másiké -1. A két egyenes egyenlete:

$$\begin{aligned} e_1 &: y = 4x - 16 \\ e_2 &: y = -x - 1. \end{aligned}$$

738. Nézzük n 3-as maradékai szerint:

n	n^3	$8n$	$n^3 + 8n$
0	0	0	0
1	1	2	0
2	2	1	0

Mivel minden lehetséges maradék esetén a kifejezés 3-as maradéka 0, ezért minden $n \in \mathbb{N}$-re osztható 3-mal.

739.

740.

741.

742.

743.

744.

745.

746. (a) $\int 4x^5 - \cos 2x \mathrm{d}x = \frac{4}{6}x^6 - \frac{1}{2}\sin 2x + C$

(b) Először alakítsuk át $\cos^2 x$-et a következő módon:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Vagyis:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Emiatt:

$$\int \cos^2 x \mathrm{d}x = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

747.

748. A sorozat n-edik tagját (az n-edik órát) a következő kifejezés adja meg, ha $n > 1$:

$$a_n = 7 \cdot 2^{n-2}.$$

Hiszen 7, azaz a második tag után mindig duplázódik az érték (mértani sorozat). Tehát azt a legkisebb n-et keressük, amire teljesül:

$$\begin{aligned} 7 \cdot 2^{n-2} &> 10^7 \\ 2^{n-2} &> \frac{10^7}{7} \\ n - 2 &> \log_2\left(\frac{10^7}{7}\right) \\ n - 2 &> 20,446 \\ n &> 22,446 \end{aligned}$$

Tehát $n = 23$.

749.

750.

751. Kifejezetten nehéz megsejteni, hogy:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Bizonyítsuk ezt teljes indukcióval.
Ha $n = 1$, akkor jó a képlet, hiszen $1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}$.
Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz az állítás, vagyis

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Szükségünk lenne az

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2$$

összegre. Használjuk fel az indukciós feltevésünket, ekkor:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2.$$

Alakítsuk tovább a jobb oldalt:

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6(k+1))}{6} =$$
$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Ezzel beláttuk az állítást, hiszen ez a kifejezés éppen $n = k + 1$ esetén a kívánt képletünk.

752. (a) $\int 2\sin 3x - \frac{3}{2\cos^2 x}\, dx = -\frac{2}{3}\cos 3x - \frac{3}{2}\operatorname{tg} x + C.$

(b) $\int \frac{2}{x}\, dx = 2\ln|x| + C.$

(c) $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$

753. Ha felrajzoljuk, hogy ki kire mondta, hogy ártatlan, akkor az alábbi láncot kapjuk:

$$C \longrightarrow H \longrightarrow F \longrightarrow D \longrightarrow A \longrightarrow G \longrightarrow E \longrightarrow B$$

Ha ebben a sorban van egy ártatlan, akkor ő igazat mond, ezért a következő vádlott is ártatlan, így ő is igazat mond és így tovább. Vagyis ha van a láncban egy ártatlan valahol, akkor minden tőle jobbra lévő ártatlan. Emiatt az első 3 ember lehet csak bűnös, vagyis C, H és F a bűnösök.

754. (a) $\int 6x^4 - 5x^3 + 3\, dx = \frac{6}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + 3x + C.$

(b) $\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C.$

(c) $\int \frac{3}{2x+1}\, dx = \frac{3}{2}\ln|2x+1| + C.$

755.

756.

757. Legalább 5 pontja van a gráfnak, hiszen egy 4-pontú egyszerű gráfnak legfeljebb $\binom{4}{2} = 6$ éle lehet. 5 pontú gráf esetén a maximum $\binom{5}{2} = 10$, így ez már lehetséges. Tudjuk, hogy egy n pontú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van és ez lehetséges is, így legfeljebb 9 pontja lehet a gráfnak. Minden $5 \leq n \leq 9$-re lehet mutatni megfelelő példát.

758. Használjuk a logaritmus tanult azonosságait:

$$\begin{aligned}
3 \cdot \log_8(x-2) + 2 \cdot \log_4(2x) - 5^{1-2\sin x} \cdot \log_2(2x^2-4x) &= 0 \\
\frac{3 \cdot \log_2(x-2)}{\log_2 8} + \frac{2 \cdot \log_4(2x)}{\log_2 4} - 5^{1-2\sin x} \cdot \log_2(2x^2-4x) &= 0 \\
\log_2(x-2) + \log_2(2x) - 5^{1-2\sin x} \cdot \log_2(2x^2-4x) &= 0 \\
\log_2(2x(x-2)) - 5^{1-2\sin x} \cdot \log_2(2x^2-4x) &= 0 \\
\log_2(2x^2-4x) - 5^{1-2\sin x} \cdot \log_2(2x^2-4x) &= 0 \\
\log_2(2x^2-4x)\left(1 - 5^{1-2\sin x}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Mivel a szorzat 0, így legalább az egyik tényező 0.
1. eset: $\log_2(2x^2-4x) = 0$, vagyis $2x^2 - 4x = 1$. Ennek a másodfokú egyenletnek két megoldása van:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{4}.$$

Mivel $x > 2$, hogy az eredeti kifejezésnek legyen értelme, ezért a másodfokú egyenlet negatív gyöke nem gyöke az eredeti egyenletnek.
2. eset: $1 - 5^{1-2\sin x} = 0$, vagyis $5^{1-2\sin x} = 1$, azaz $1 - 2\sin x = 0$, tehát $\sin x = \frac{1}{2}$. Ennek megoldásai: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ és $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Megint figyelnünk kell arra, hogy $x > 2$, így ebből a részből a következő gyököket kapjuk: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}^+$, és $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{N}$.

759. Legyen a nők száma n. Nézzük meg, hogy hány ember távozik a társaságból. Egyrészt $n \cdot \frac{a}{100}$, hiszen ez jelenti a nők a%-át. Másrészt $305 \cdot \frac{\frac{a}{b}}{100}$, hiszen ez jelenti a 305 ember $\frac{a}{b}$%-át. Ez két mennyiség egyenlő, vagyis:

$$\begin{aligned}
n \cdot \frac{a}{100} &= 305 \cdot \frac{\frac{a}{b}}{100} \\
\frac{na}{100} &= \frac{305a}{100b} \\
n &= \frac{305}{b}.
\end{aligned}$$

Mivel n és b pozitív egész, ezért b osztója 305-nek, és tudjuk, hogy $1 < b < 305$. Mivel $305 = 5 \cdot 61$, ezért b értéke 5 vagy 61. Ezért a nők száma 61 vagy 5, így a férfiak száma 244 vagy 300.

760. Minden esetben a Newton–Leibniz-formulát használjuk:

(a) $\int\limits_0^1 x^3 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}$.

(b) $\int\limits_1^2 \sqrt{x} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right) \approx 1{,}219$.

(c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1$.

761. 1. megoldás: binomiális tétellel.
Tudjuk, hogy

$$10^n = (9+1)^n = 9^n + \binom{n}{1}9^{n-1} + \binom{n}{2}9^{n-2} + \binom{n}{3}9^{n-3} + \ldots + + \binom{n}{n-3}9^3 + \binom{n}{2}9^2 + \binom{n}{1}9 + 1.$$

Ebben az utolsó két tag éppen $9n + 1$, vagyis

$$10^n - 9n - 1 = (9+1)^n = 9^n + \binom{n}{1}9^{n-1} + \binom{n}{2}9^{n-2} + \binom{n}{3}9^{n-3} + \ldots + + \binom{n}{n-3}9^3 + \binom{n}{2}9^2.$$

A kifejezés minden tagjában 9 legalább a második hatványon szerepel, így minden tag osztható 81-gyel, vagyis az összeg is.
2. megoldás: teljes indukcióval.
Világos, hogy $n = 1$ esetén igaz az állítás, hiszen a $10^1 - 9 \cdot 1 - 1 = 0$, ami osztható 81-gyel.
Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra, vagyis $10^k - 9k - 1$ osztható 81-gyel. Tekintsük a $10^{k+1} - 9(k+1) - 1$ kifejezést. Vegyük észre, hogy

$$10^{k+1} - 9(k+1) - 1 = 10(10^k - 9k - 1) + 81k.$$

Az indukciós feltevés miatt $10^k - 9k - 1$ osztható 81-gyel, természetesen $81k$ is, így az összegük is. Ezzel beláttuk az indukciós lépést, így minden $n \geq 1$ egészre az állítást.
(Felmerül a kérdés, hogy hogyan vettük észre, hogy $10^{k+1} - 9(k+1) - 1 = 10(10^k - 9k - 1) + 81k$. A teljes indukciós bizonyításokban mindig arra törekszünk, hogy fel tudjuk használni az indukciós feltételt, vagyis jelen esetben azt, hogy $10^k - 9k - 1$ osztható 81-gyel. Ezért arra törekszünk, hogy úgy alakítsuk át a kifejezést, hogy megjelenjen benne ez a kifejezés.)

762. (a) $\int\limits_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln|x|]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

(b) Szükségünk lenne $\operatorname{tg} x$ egy primitív függvényére. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$, amiből meg tudjuk sejteni, hogy $-\ln|\cos x|$-et deriválva éppen $\operatorname{tg} x$-et kapunk. Most már tudjuk használni a Newton–Leibniz-formulát:
$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = [-\ln|\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln|\cos\frac{\pi}{4}| + -\ln|\cos 0| = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2.$

(c) $\int\limits_{-1}^2 x^2 - 1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0.$

763. Legyen a sokszög oldalainak száma n. Ekkor átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$, így a $2n$-oldalú sokszög átlóinak száma $\frac{2n(2n-3)}{3}$. Ha 400%-os a növekedés, akkor az azt jelenti, hogy 5-szörösére nőtt az érték, vagyis:

$$5\frac{n(n-3)}{2} = \frac{2n(2n-3)}{2}$$
$$5n^2 - 15n = 4n^2 - 6n$$
$$n^2 = 9n.$$

Ennek két megoldása van, $n = 0$ és $n = 9$. Az előbbi nyilván nem jó, vagyis eredetileg egy 9-szögünk volt. Ebben a szögek összege $7 \cdot 180^\circ$, a 18-szögben pedig $16 \cdot 180^\circ$. Vagyis $\frac{16}{7}$-ére nőtt a szögek összege, ami kerekítve: 2,286. Vagyis a növekedés 128,6%.

764. Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk. Nyilvánvaló, hogy $n = 1$-re teljesül az állítás, hiszen

$$1^3 = \left(\frac{1 \cdot (1+1)}{2}\right)^2.$$

Következik az indukciós lépés. Tegyük fel, hogy

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

Azt kellene belátnunk, hogy

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Az indukciós feltevés alapján alakítsuk át a bal oldali kifejezést:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + +(k+1)^3.$$

Hozzunk közös nevezőre, és alakítsuk tovább a számlálót:

$$\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2 + 4(k+1))}{4} = \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} =$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

765. A téglalapban a fekete mezők száma $(n-2)(k-2)$, ami az összes mező számának kétharmada, hiszen fekete mezőből kétszer annyi van, mint fehérből. Vagyis:

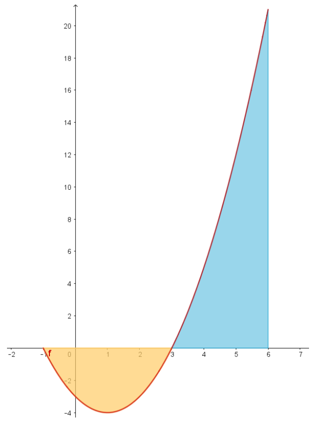
$$\begin{aligned}
(n-2)(k-2) &= \frac{2}{3}nk \\
nk - 2k - 2n + 4 &= \frac{2}{3}nk \\
3nk - 6k - 6n + 12 &= 2nk \\
nk - 6k - 6n + 12 &= 0.
\end{aligned}$$

Mivel egész számokról van szó, ezért sokszor segít az, ha szorzattá tudunk alakítani kifejezéseket, mert akkor véges sok esetet vizsgálva be tudjuk fejezni a feladat megoldását. A bal oldalon lévő kifejezés nagyon hasonlít az $(n-6)(k-6)$ kifejezésre. Abban a konstans tag persze 36, de ez alapján tudjuk, hogy

$$(n-6)(k-6) = nk - 6k - 6n + 36 = 24.$$

Mivel $n, k \geq 3$, ezért $n-6$ és $k-6$ is pozitív. Ráadásul n és k szerepe szimmetrikus, így összesen 4 lehetőség adódik a szorzattá bontásra, hiszen $24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$. Ezek pedig 4 különböző téglalapot adnak: 7×30, 8×18, 9×14 és 10×12.

766. Vizsgáljuk meg a függvény grafikonját:



A függvénynek két gyöke van: -1 és 3, így a $]-1;3[$-on a grafikon az x tengely alatt, a $]3;6[$-on az x tengely felett halad. A területeket a megfelelő intergrálok segítségével ki tudjuk számítani, de figyelnünk kell arra, hogy az x tengely alatti részek az integrálban negatív előjellel jelennek meg. Vagyis a sárga terület nagysága:

$$T_s = -\int_{-1}^{3} x^2 - 2x - 3 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3} = \frac{32}{3}.$$

A kék terület nagysága:

$$T_k = \int_{3}^{6} x^2 - 2x - 3 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{3}^{6} = 27.$$

Így a két terület aránya: $\frac{27}{\frac{32}{3}} = \frac{81}{32}$.

767. Ha p és q is páratlan prím lenne, akkor a $p + q^n = 2019$ egyenlet bal oldalán egy páros szám állna, ami lehetetlen. Vagyis legalább az egyik prím 2. Nézzük ezt a két esetet: 1. eset: $p = 2$. Ekkor az egyeneltünk $q^n = 2017$-re redukálódik. Mivel 2017 prím, így ebből az egyetlen megoldás: $p = 2, q = 2017, n = 1$.
2. eset: $q = 2$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$p + 2^n = 2019.$$

Egyesével megvizsgálhatjuk a lehetséges n értékeket, hiszen $1 \le n \le 10$. Négy esetben lesz a $2019 - 2^n$ kifejezés értéke prím. Ha
$n = 1, p = 2017$,
$n = 3, p = 2011$,
$n = 4, p = 2003$,
$n = 5, p = 1987$.
Így az egyenletnek összesen 5 megoldása van.

768. Minden pozitív egész n esetén igaz. Két megoldást is mutatunk erre.
1. megoldás.
Tekintsük a kifejezés 9-es maradékát. Nézzük először 4^n-t. Ha $n = 1$, akkor a maradék 4, és innetől a maradékokat kell mindig 4-gyel szorozni, hogy megkapjuk a következő 4-hatvány 9-es maradékát. Így a maradékok rendre: 4, 7, 1, 4, 7, 1, ... Mivel a következő 4-hatvány maradéka csak az előzőtől függ, így ez a 3 hosszú periódus a végtelenségig ismétlődik. Készítsünk akkor egy táblázatot a 9-es maradékokról:

n	4^n	$15n$	$4^n+15n-1$
0	1	0	0
1	4	6	0
2	7	3	0
3	1	0	0
4	4	6	0
5	7	3	0
6	1	0	0
7	4	6	0
8	7	3	0

Mivel az utolsó oszlopban mindehol 0 áll, ezért a kifejezés minden pozitív egész n-re osztható 9-cel. (Sőt, $n = 0$-ra is.)
Második megoldás.
Bizonyítsunk teljes indukcióval. $n = 1$-re igaz az állítás.
Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz, vagyis $9 \mid 4^4 + 15n - 1$.
Ekkor:

$$4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4(4^k + 15k - 1) - 45k + 18.$$

Tudjuk, hogy $4^k + 15k - 1$ osztható 9-cel, így az összeg első tgaja is. Mivel 45 és 18 is osztható 9-cel, így a második és harmadik tag is, vagyis az egész kifejezés. Ezzel beláttuk, hogy minden $n \geq 1$ esetén igaz az állítás.

769.

770. Legyen a 4 szám: a, b, c, d. Ekkor az alábbi 4 dolgot tudjuk:

$$\begin{aligned} a + c &= 2b \\ c^2 &= bd \\ a + d &= 55 \\ b + c &= 50. \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletből azt kapjuk, hogy $b = 50 - c$. Ha ezt felhasználjuk az elsőben, akkor $a + c = 100 - 2c$-t kapunk, vagyis $a = 100 - 3c$. Ezt pedig felhasználhatjuk a harmadikban: $100 - 3c + d = 55$, vagyis $d = 3c - 45$. Mindent sikerült kifejezni c-vel, és akkor ezeket a második egyenletbe beírva kapjuk, hogy

$$c^2 = (50 - c)(3c - 45).$$

Ezt a szokásos alakra hozva $4c^2 - 195c + 2250 = 0$-t kapunk. Ennek két megoldása van: $c_1 = 30$ és $c_2 = 18,75$. Mivel egész számok szerepeltek a feladat szövegében, ezért a második lehetőséget elvethetjük. Vagyis $c = 30$, amiből következik, hogy $a = 10$, $b = 20$ és $d = 45$, és ez a számnégyes teljesíti is a kívánt feltételeket.

771. Vizsgáljuk meg a sorozat első néhány elemét. Azt látjuk, hogy az elemek:

$$1, 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, \ldots$$

Mivel a sorozat következő eleme csak az előző kettőtől függ, így amikor látjuk, hogy $a_6 = 1, a_7 = 2$, akkor biztosak lehetünk abban, hogy innentől kezdve periodikus a sorozat, a periódus hossza pedig 5. Vagyis az $1, 2, 3, 2, 1$ részsorozat ismétlődik. Mivel 2020 osztható 5-tel, ezért a_{2020} értéke megegyezik a_5 értékével, vagyis:

$$a_{2020} = 1.$$

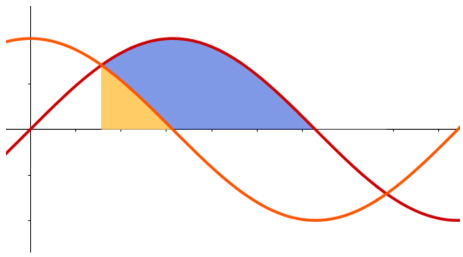
772. Számítsuk ki $\int_a^{2a} x^2\ dx$ értékét.

$$\int_a^{2a} x^2\ dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^{2a} = \frac{8a^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{7}{3}a^3.$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{7}{3}a^3 &= 504 \\ 7a^3 &= 1512 \\ a^3 &= 216 \\ a &= 6. \end{aligned}$$

773. Tekintsük az alábbi ábrát.



Szimmetria okok miatt a keresett terület éppen kétszerese az ábrán kékkel jelölt területnek. A kék terület nagyságát pedig megkaphatjuk úgy, hogy a $\sin x$ függvény $\frac{\pi}{4}$ és π közötti görbe alatti területéből kivonjuk a $\cos x$ függvény görbe alatti területét $\frac{\pi}{4}$ és $\frac{\pi}{2}$ között (narancssárga terület). Vagyis:

$$T = 2\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x\ dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx\right| = 2\left(\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= 2\left(\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 2\sqrt{2}.$$

Meggondolhatjuk, hogy az alábbi számolás is jó eredményt ad, hiszen az x tengely alatti és feletti területeket éppen megfelelő előjellel veszi számításba:

$$T = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x\ dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos x\ dx$$

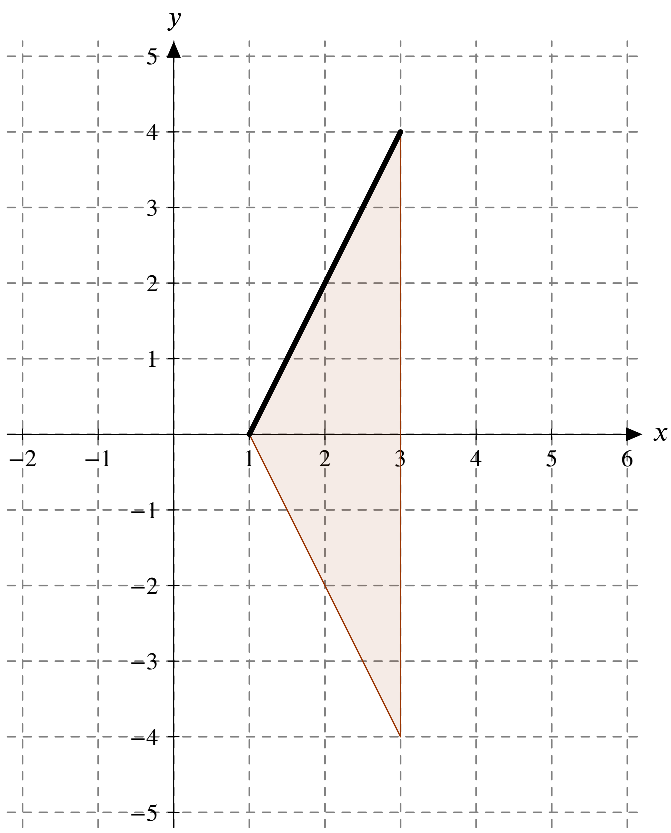
774. Alakítsuk át a gyökjelek alatti kifjezéseket teljes négyzetekké:

$$\sqrt{x +}$$

Vizsg∧ljukmeg, hogyazabszol≉t∸rt∸kbenl∸v‸kifejez∸sekmikornegat∼van, hogytudjuk, hogymikorv∧ltozta

775. Az A osztályban 12 fiú tanul, a B-ben 19. Vagyis 31 fiú közül választottunk egyet úgy, hogy minden fiú valószínűsége egyenlő. A fiúk közül 12 jár az A-ba, ezért a keresett valószínűség: $\frac{12}{31}$.

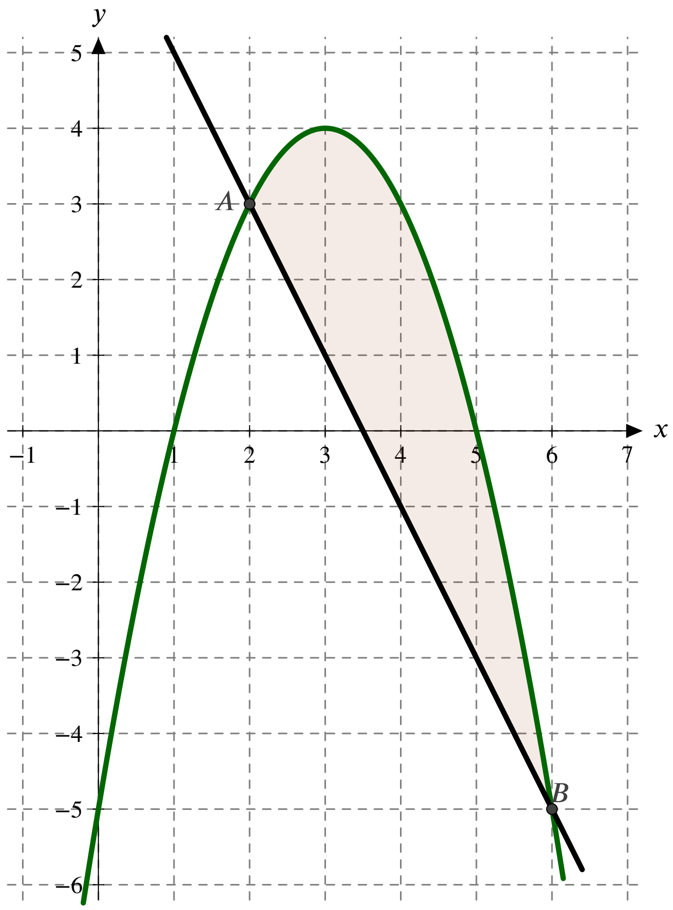
776. Ha megforgatjuk a szakaszt az x tengely körül, akkor egy kúp palástját kapjuk meg.



A kúp magassága illeszkedik az x tengelyre, annak 1 és 3 közötti szakasza, vagyis a hossza 2. Az alapkör sugara pedig éppen a függvény 3-ban felvett értéke, vagyis 4. Így a térfogata:

$$V = \frac{4^2\pi \cdot 2}{3} = \frac{32\pi}{3}.$$

777. Rajzoljuk fel a megfelelő görbéket.



778. Ha a két dobott szám összege 5-tel osztható, akkor vagy 5, vagy 10. Az első kétféleképpen történhet meg, a dobott számok 1 és 4, vagy 2 és 3. Mindkettő kétféleképpen jöhet ki. 10-et pedig úgy kaphatunk, hogy mindkét kockán 5-öt dobtunk, vagy az egyiken 4-et, a másikon 6-ot. Az utóbbi szintén kétféleképpen történhet meg. Tehát 7 egyforma valószínűségű eseményünk van: 1-4, 2-3, 3-2, 4-1, 4-6, 5-5, 6-4. Ezek közül 3 esetben (2-3, 3-2, 5-5) dobunk prímszámot. Vagyis a keresett valószínűség $\frac{3}{7}$.

779. Ha a függvény grafikonját a $[0; 5]$ intervallumon tekintenénk, akkor a forgatással kapott alakzat egy kúp lenne. A mi alakzatunkból viszont hiányzik a kúp teteje, de a hiányzó rész szintén egy kúp. Így a keresett test térfogatát ki tudjuk számítani úgy, hogy a kép kúp térfogatának a különbségét vesszük. A nagy kúp alaplapjának sugara és magassága is 5, így a térfogata: $V_1 = \frac{5^2 \cdot \pi \cdot 5}{3}$, a kis kúp alaplapjának sugara és magassága pedig 1, így a térfogata: $V_2 = \frac{1^2 \cdot \pi \cdot 1}{3}$. Vagyis a forgatással kapott csonka kúp térfogata:

$$V = V_1 - V_2 = \frac{125\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{124\pi}{3}.$$

780. Mindig ki lehet a tartományokat színezni két színnel a kívánt módon. Bizonyítsuk ezt az egyenesek számára vonatkozó teljes indukcióval.
Ha egy egyenes van, akkor az egyik félsíkot fehérre, a másikat feketére színezve megfelelő színezést kapunk.
Tegyük fel, hogy k egyenes esetén mindig kiszínezhetőek a tartományok megfelelően. Nézzük az új, $k+1$-edik egyenest. Ez két félsíkra bontja a síkot. Az egyik félsíkban tartsuk meg az eddigi színezést, a

másik félsíkban pedig cseréljük fel minden tartomány színét.
Miért jó ez? Az új ábrán háromféle határoló szakasz létezik.

- Abban a félsíkban van, ahol nem változtattuk meg a színeket. Ekkor az indukciós feltevés az volt, hogy jó a színezésünk k egyenesre, ezért ennek a szakasznak a két oldalán különböző színű tartomány van.
- Abban a félsíkban van, ahol mindent átváltoztattunk. Az indukciós feltevés alapján eredetileg itt is minden jó volt, és ez attól nem változik meg, hogy megcseréljük a színeket.
- A határoló szakasz része az új egyenesnek. Ekkor egy korábban egyszínű tartományt vág ketté, és az egyik oldalon megtartjuk az eredeti színt, a másik oldalon átcseréjük, ezért itt is a két új tartomány különböző színű lesz.

781. Legyen a gúla magassága 1, alapjának területe t. Ha a csúcstól m távolságra vágjuk el a gúlát, akkor a levágott darab az eredetinek az m arányú kicsinyítése a gúla csúcsából. Tudjuk, hogy m arányú hasonlóság esetén a területe m^2-szeresére változik, vagyis tm^2 lesz. A magasság pedig m, így a térfogat: $\frac{1}{3}tm^3$. Az eredeti gúla térfogata $\frac{1}{3}t$, így azt kapjuk, hogy ha a csúcstól m távolságra vágunk, akkor a térfogat m^3-szörösére változik. Most azt szeretnénk, hogy a kapott kisebb gúla térfogata felel legyen a nagyobbnak, vagyis $m^3 = \frac{1}{2}$, amiből azt kapjuk, hogy

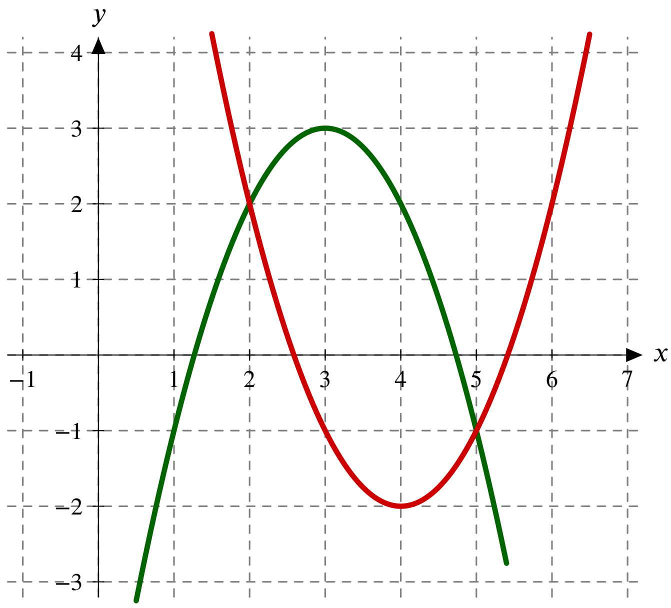
$$m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Általában is igaz az, hogy ha egy testet λ arányban nagyítunk (kicsinyítünk), akkor a kapott test térfogata λ^3-szöröse az eredeti test térfogatának.

782.

783. Először vizsgáljuk meg azt, hogy hol metszi egymást a két grafikon. Ehhez oldjuk meg az $f(x) = g(x)$ egyenletet:

$$\begin{aligned}
-x^2 + 6x - 6 &= x^2 - 8x + 14 \\
2x^2 - 14x + 20 &= 0 \\
x^2 - 7x + 10 &= 0 \\
(x-2)(x-5) &= 0
\end{aligned}$$



Ezek után pedig alkalmazhatjuk azt, hogy a közrezárt terület nagysága egyenlő a két függvény különbségének a megfelelő intervallumon (esetünkben [2; 5] vett integráljával:

$$\int_2^5 (-x^2+6x-6)-(x^2-8x+14)\ \mathrm{d}x = \int_2^5 -2x^2+14x-20\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{3}x^3+7x^2-20x\right]_2^5 = 9.$$

784.

785.

786.

787.

788.

789.

790.

791.

792.

793.

794.

795. Az első helyre 10, a másodikra 9, a harmadikra 8 diák kerülhet, és ezt tudjuk folytatni. A választások függetlenek, vagyis $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 10!$ sorrend lehetséges.
Általában: n különböző dolog egy sorbarendezését a dolgok (ismétlés nélküli) **permutációjának** nevezzük. Egy n elemű halmaz permutációinak száma $n!$.

796. Először különböztessük meg a két 1-est, a három 2-est és a két 4-est. Ekkor az előző feladat alapján 8! különböző „számot" képezhetünk. De minden számot sokszor számoltunk, hiszen az 1-esek, 2-esek és 4-esek valójában nem különböznek. A két 1-esnek 2!, a három 2-esnek 3!, a két 4-esnek 2! sorrendje van, vagyis egy valódi számot $2! \cdot 3! \cdot 2! = 24$-szer számoltunk meg. Így a keresett számok száma:

$$\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = 1680.$$

Általában: n dolog – melyek között vannak azonosak – egy sorbarendezését a dolgok **ismétléses permutációjának** nevezzük. Ha az n dolog között $k_1, k_2, \ldots, k_m$ egyforma elem van, akkor az ismétléses permutációik száma $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$.

797. Az elnököt 20 ember közül választhatjuk, a helyettest már csak 19 közül, a titkárra marad 18 jelölt, végül a pénztárosra 17. Ezek a választások már függetlenek egymástól, így a különböző lehetséges elnökségek száma: $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116280$.
Általában: n különböző dolog közül a sorrendet is figyelembe véve kiválasztunk k-t, akkor az n elem egy k tagú (ismétlés nélküli) **variációját** kapjuk. Egy n elemű halmaz k tagú variációinak száma: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

798. Minden heyliértékre 4 számjegy kerülhet egymástól függetlenül, tehát a megfelelő számok száma: 4^5.
Általában: n-féle dolog közül a sorrendet is figyelembe véve kiválasztunk k-t úgy, hogy egy elemet többször is választhatunk, akkor az n elem egy k tagú **ismétléses variációját** kapjuk. Egy n elemű halmaz k tagú ismétléses variációinak száma: n^k.

799. A 20 ember közül választanunk kell 3-at úgy, hogy a sorrendjük nem számít, vagyis $\binom{20}{3} = 1140$ megfelelő elnökség lehetséges.
Általában: n különböző dolog közül a sorrend figyelembe vétele nélkül kiválasztunk k-t, akkor az n elem egy k tagú (ismétlés nélküli) **kombinációját** kapjuk. Egy n elemű halmaz k tagú kombinációinak száma: $\binom{n}{k}$.

800.

801. Legyen a téglalap két oldala a és $2a$. Ekkor az átló hossza $\sqrt{5}a$. Ekkor a terület $2a^2$, a kerület pedig $6a + 2\sqrt{5}a$. Tudjuk, hogy ez a két mennyiség egyenlő, vagyis $2a^2 = 6a + 2\sqrt{5}a$. Mivel a egy téglalap oldala, ezért $a > 0$, így oszthatunk vele. Kapjuk, hogy $a = 3 + \sqrt{5}$.

Egy átlóval bontsuk két részre a téglalapot, így a keresett távolság a kapott két háromszög átfogóhoz tartozó magassága. A téglalap területét kétféleképpen is kiszámíthatjuk. Egyrészt $2a^2$, ahogy korábban is láttuk. Másrészt a háromszög területének a kétszerese, vagyis $\sqrt{5}ad$, ha d a keresett távolság. Az első alapján $T = 2(3 + \sqrt{5})^2$, a második alapján $T = \sqrt{5}(3 + \sqrt{5})d$. Ebből kapjuk, hogy

$$d = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{\sqrt{5}}.$$

802. Írjuk át az első egyenletet szorzat alakba: $(x - y)(x + y - 8) = 0$. Egy szorzat akkor 0, ha az egyik tényezője 0. Vagyis két eset van:
1. eset: $x - y = 0$, vagyis $x = y$. Ekkor a második egyenlet azt adja, hogy $y^2 - 4y = 0$, vagyis $y = 0$ vagy $y = 4$. Ebből két megoldást kapunk az eredeti egyenletrendszerre: $x_1 = 0, y_1 = 0$ és $x_2 = 4, y_2 = 4$.
2. eset: $x + y - 8 = 0$, vagyis $x = 8 - y$. Ekkor a második egyenlet azt adja, hogy $y(8-y) - 3(8-y) - y = 0$,

azaz $y^2 - 10y + 24 = 0$. Ami szorzattá bontható: $(y-4)(y-6) = 0$, vagyis $y = 4$ vagy $y = 6$. Ha $y = 4$, akkor $x = 8 - y = 4$, és ezt a megoldást már megkaptuk az első esetnél is. Ha $y = 6$, akkor új megoldást kapunk $y_3 = 6, x_3 = 2$.

803. Vegyük a következő megfeleltetést: $0 \leftrightarrow 0, 1 \leftrightarrow 1, 2 \leftrightarrow -1, 3 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow -2, 5 \leftrightarrow 3, 6 \leftrightarrow -3, \dots$ Vagyis az egész számok számossága is ugyanakkor, mint a természetes számok számossága, hiszen $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Z}$ között létezik bijekció.

804. Egy meggyőző érvelés a következő. Mindenki tudja, hogy $\frac{1}{3} = 0,\dot{3}$. Szorozzuk meg mindkét oldalt 3-mal, és azt kapjuk, hogy $1 = 0,\dot{9}$.
Nézzünk egy másik okoskodást.
Mit jelent a $0,\dot{9}$?

$$0,\dot{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \dots .$$

Legyen ez az összeg A és nézzük meg, hogy mit tudunk kezdeni vele.

$$A = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \dots$$
$$10A = 9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots$$

Most vonjuk ki az alsó egyenletből a felsőt:

$$9A = 9.$$

Amiből azt kapjuk, hogy $A = 1$.

805.

806.

807.

808.

809.

810.

811.

812.

813.

814.

815.

816.

817.

818.

819.

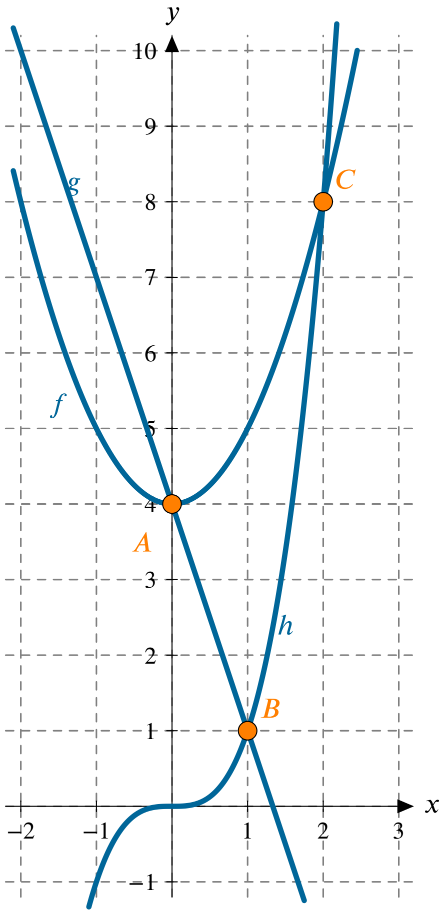
820.

821.

822.

823.

824. Rajzoljunk egy jó ábrát, hogy lássuk egyáltalán, melyik területről van szó.



Fontos szerepet játszanak az A, B és C pontok, először azok koordinátáit határozzuk meg. Ezek a grafikonok metszéspontjai, vagyis 3 egyenletet kell megoldanunk:

$$x^2 + 4 = 4 - 3x$$
$$x^2 + 3x = 0.$$

Vagyis $x = 0$ és $x = -3$ értékeknél lesz metszéspontja akét görbének. Nekünk az $A(0; 4)$ pont felel meg.

$$x^3 = 4 - 3x$$

Ha vázlatosan ábrázoljuk a grafikonokat, akkor megsejthetjük, hogy a $B(1; 1)$ pont mindkét görbén rajta lesz, és ezt számolással könnyen ellenőrizhetjük.

$$x^3 = x^2 + 4$$

Szintén az ábra alapján bízhatunk abba, hogy $x = 2$-re mindkét oldal ugyanazt az értéket veszi fel, és tényleg. Vagyis a harmadik pontunk $C(2; 8)$.
Ezek után a területet úgy kapjuk meg, hogy a másodfokú függvény $[0; 2]$ intervallumon vett görbe alatti területéből kivonjuk a lineáris függvény alatti területet a $[0; 1]$ intervallumon (ez egy trapéz), illetve a harmadfokú függvény alatti területet az $[1; 2]$ intervallumon.

$$T = \int_0^2 x^2{+}4 \text{ d}x - \frac{1+4}{2} \cdot 1 - \int_1^2 x^3 \text{ d}x = \left[\frac{x^3}{3} + 4x\right]_0^2 - \frac{5}{2} - \left[\frac{x^4}{4}\right] = \frac{32}{3} - \frac{5}{2} - \frac{15}{4} = \frac{53}{12}.$$

825. Oldjuk meg az egyenlőtlenséget:

$$(x+2)^3 - (x-2)^3 < 2020$$
$$\left(x^3 + 6x^2 + 12x + 8\right) - \left(x^3 - 6x^2 + 12x - 8\right) < 2020$$
$$12x^2 + 16 < 2020$$
$$12x^2 < 2004$$
$$x^2 < 167$$

Mivel $13^2 = 169$, ezért a fenti egyenlőtlenség a 13-nál kisebb abszolút értékű egészekre teljesül. A megoldások halmaza tehát $\{-12, -11, \dots, 11, 12\}$, és ennek a halmaznak 25 eleme van.

826.

827. Vegyük észre a következőt:

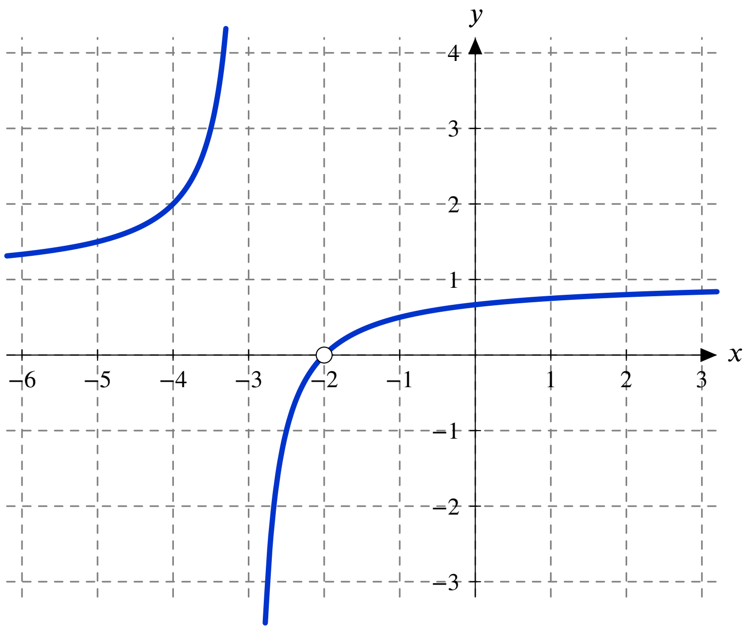
$$f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)(x+3)}.$$

(a) Az $f(x) = \frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$ kifejezés számlálója minden valós x esetén értelmes. Így akkor nem értelmes a kifejezés, ha a nevező nincs értelmezve vagy 0. A nevező is mindig értelmezve van, így a zérushelyei okozzák a problémát. A zérushelyek -3 és -2, vagyis a legbővebb halmaz, ahol értelmezhető a kifejezés: $\mathbb{R} \setminus \{-3; -2\}$.

(b) Még egy kicsit alakítsuk tovább a függvényt, hiszen a tört egyszerűsíthető $(x+2)$-vel, de ne felejtsük el, hogy $x = -2$-ben nincs értelmezve a függvény. Vagyis a függvény ezt a helyet kivéve megegyezik a

$$g(x) = \frac{x+2}{x+3} = \frac{x+3-1}{x+3} = 1 - \frac{1}{x+3}$$

függvénnyel. Ezt pedig könnyen tudjuk ábrázolni, hiszen az $\frac{1}{x}$ grafikonját kell eltolnunk balra 3-mal, majd tükrözni az x tengelyre, és végül eltolni függelegesen felfelé 1 egységgel.



(c) Akkor lesz a grafikon pontja rácspont, ha egész x esetén $f(x)$ is egész. Vagyis $1 - \frac{1}{x+3}$-nak kell egésznek lennie, azaz $\frac{1}{x+3}$-nak. Ehhez az kell, hogy $x+3 = -1$ vagy $x+3 = 1$. Az előbbi azt adja, hogy $x = -4$, és ekkor $f(x) = 2$, vagyis ez tényleg rácspont. A másik esetben $x = -2$, itt viszont a függvény nincs értelmezve, tehát ekkor nem kapunk rácspontot a grafikonon.

828. Vizsgáljuk meg, hogy melyik mezőről hány másik mezőre tudunk eljutni:

7	7	7	7	7	7	7	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	13	13	11	9	7
7	9	11	11	11	11	9	7
7	9	9	9	9	9	9	7
7	7	7	7	7	7	7	7

Ezek a megfelelő csúcsok fokszámai, így ezek összegének fele adja az élek számát:

$$\frac{1}{2}\left(28\cdot 7+20\cdot 9+12\cdot 11+4\cdot 13\right)=280.$$

829. Számoljuk ki t függvényében az integrál értékét:

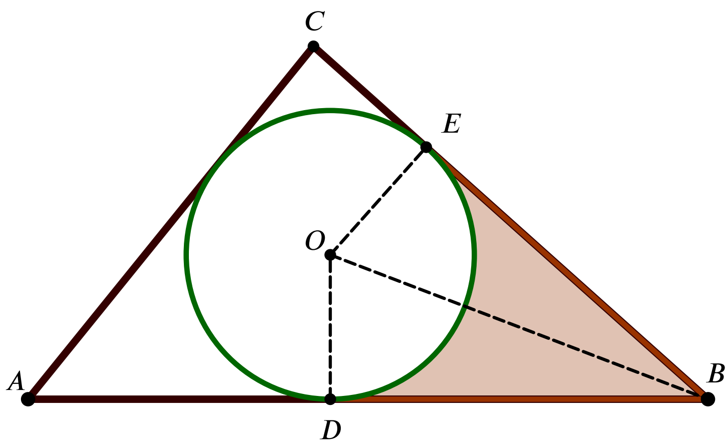
$$\int_0^t 90x^2-6x^3\,\mathrm{d}x=\left[30x^3-\frac{3}{2}x^4\right]_0^t=30t^3-\frac{3}{2}t^4.$$

Vagyis $30t^3-\frac{3}{2}t^4=0$. Világos, hogy $t=0$ megfelelő érték, ha pedig $t\neq 0$, akkor $30=\frac{3}{2}t$, vagyis $t=20$. Mindkét megoldás megfelel a feltételeknek.

830. (a) A háromszög területe segítségével számoljuk ki a beírt kör sugarát. A háromszög területe egyrészt: $T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{11\cdot 4\cdot 5\cdot 2}=2\cdot\sqrt{110}$. Másrészt $T=s\cdot r$, azaz $11r$. Ebből kapjuk, hogy $2\cdot\sqrt{110}=11r$, vagyis

$$r=2\sqrt{\frac{10}{11}}.$$

(b) Rajzoljunk egy jó ábrát. Legyen O a kör középpontja, D, illetve E a középpont merőleges vetülete, vagyis a beírt kör érintési pontja.



Tudjuk, hogy $|DO|=|OE|=r$ és azt is, hogy $|DB|=|BE|$, hiszen egy pontból azonos körhöz húzott érintő szakaszok. Legyen a két szakasz hossza x. Ekkor $|AD|=9-x$, $|EC|=7-x$. Az AC oldal előáll egy $9-x$ és egy $7-x$ hosszú szakasz összegeként, hiszen megkaphatjuk két érintőszakasz uniójaként. Vagyis $9-x+7-x=6$, amiből kapjuk, hogy $x=5$.

Mivel $OEB\sphericalangle = ODB\sphericalangle = 90^\circ$, ezért a $DOEB$ deltoid területe $2\cdot\frac{5r}{2} = 5r$. Ebből kellene kivonnunk az ODE körcikk területét. Tudjuk, hogy $\alpha = EOB\sphericalangle$ esetén $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{r}$, így $\alpha \approx 69,124^\circ$. Ebből a körcikk területe közelítőleg $4,387$. Emiatt a konkáv alakzat területe nagyjából 5,15.

831.

832.

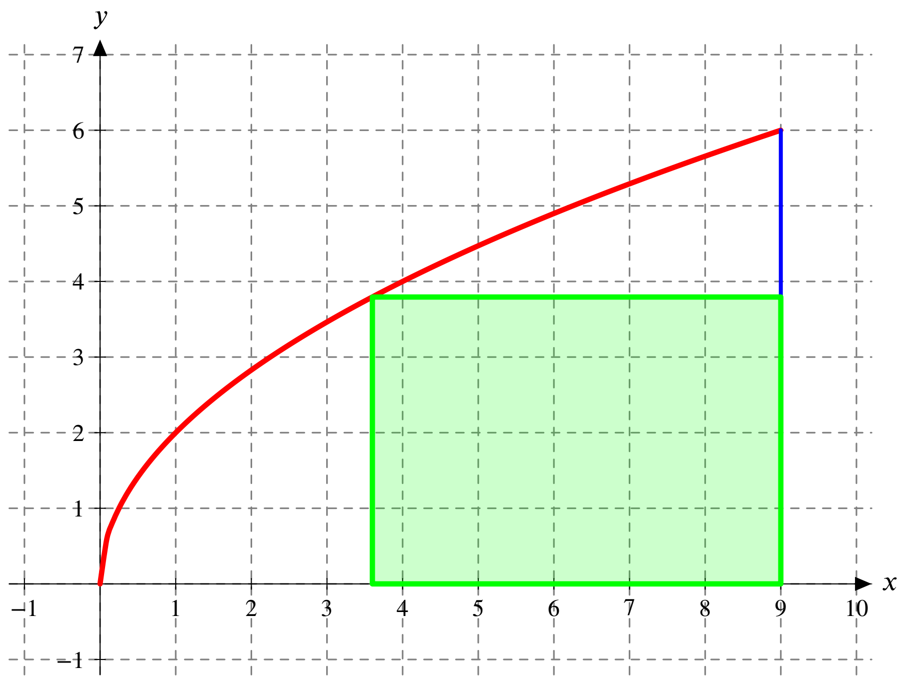
833.

834.

835.

836.

837. (a) Tekintsük az alábbi ábrát:



Ha a téglalap bal oldali függőleges oldala x-nél van, akkor az vízszintes oldal hossza $9 - x$, a függőleges pedig $2\sqrt{x}$. Vagyis a terület x függvényében:

$$t(x) = 2\sqrt{x}(9 - x) = 18\sqrt{x} - 2x\sqrt{x}.$$

Ahol szélsőértéke van ennek a függvénynek, ott a deriváltja 0. Nézzük a deriváltat:

$$t'(x) = \frac{9}{\sqrt{x}} - 3\sqrt{x} = \frac{3(3 - x)}{\sqrt{x}}.$$

A számláló csak akkor 0, ha $x = 3$. Ebben az esetben a derivált előjelet vált, 3-nál kisebb x-ekre a derivált pozitív, 3-nál nagyobbakra negatív, így tényleg lokális maximum van ebben a pontban.

(b) Ha az $x = a$ egyenessel kettévágjuk a görbe alatti területet, akkor a bal oldali terület nagysága:

$$T_1 = \int_0^a 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a = \frac{4}{3}\sqrt{a^3}.$$

A teljes terület, aminek T_1 a fele:

$$T = \int_0^9 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9 = \frac{4}{3}9^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{9^3}.$$

Akkor azt kaptuk, hogy

$$2\cdot\frac{4}{3}\sqrt{a^3} = \frac{4}{3}\sqrt{9^3}.$$

Amiből: $a = \frac{9}{\sqrt[3]{4}}$.

838. Legyen az eredeti ár $\overline{abcd}$ és ekkor a hibásan kiírt ár $\overline{dcba}$. Tudjuk, hogy

$$\overline{abcd} = 4\cdot\overline{dcba}.$$

Látható, hogy d legfeljebb 2, hiszen ha nagyobb lenne, akkor a négyszerese már ötjegyű szám lenne. Vagyis csak 1 és 2 lehet. A bal oldal páros, hiszen egy egész szám négyszerese, így d is páros. Ebből következik, hogy $d = 2$. Vagyis $\overline{abc2} = 4\cdot\overline{2cba}$. Akkor tehát a legalább 8, és a négyszeresének az utolsó számjegye 2. Így 9 nem lehet, vagyis $a = 8$. Most ott tartunk, hogy

$$\begin{aligned}
\overline{8bc2} &= 4\cdot\overline{2cb8}\\
8000 + 100b + 10c + 2 &= 4\cdot(2000 + 100c + 10b + 8)\\
8000 + 100b + 10c + 2 &= 8000 + 400c + 40b + 32\\
60b &= 390c + 30\\
2b &= 13c + 1.
\end{aligned}$$

Mivel b számjegy, így $2b$ legfeljebb 18, így c értéke csak 0 vagy 1 lehet. Ha 0 lenne, akkor $2b = 1$-et kapnánk, de b számjegy. Így $c = 1$, amiből $b = 7$. Vagyis az eredeti ár 8712 Ft volt, aminek tényleg a negyede 2178 Ft. A két szám harmonikus közepe pedig amit Barnabás fizetett, vagyis

$$\frac{2}{\frac{1}{8712}+\frac{1}{2178}} = 3484,8.$$

839.

840.

841.

842.

843.

844.

845.

846.

847.

848.

849.

850.

851.

852.

853.

854.

855.

856. Nem. Indirekten bizonyítjuk, hogy $\log_{2020} 2021$ irracionális.
Tegyük fel, hogy racionális, vagyis léteznek olyan a, b pozitív egészek, amelyekre

$$\log_{2020} 2021 = \frac{a}{b}.$$

Feltehetjük, hogy a és b pozitívak, hiszen tudjuk, hogy $log_{2020}2021$ egy 1-nél nagyobb valós szám. Alíktsuk az egyenletet át egy kicsit.

$$\begin{aligned} \log_{2020} 2021 &= \frac{a}{b} \\ 2020^{\frac{a}{b}} &= 2021 \\ 2020^a &= 2021^b. \end{aligned}$$

A bal oldali szám páros, a jobb oldali páratlan. Ez ellentmondás.
Vagyis ez a szám irracionális.

857. Nézzük a számot kicsit általánosabban, vagyis vegyük az

$$(n-6)(n-4)(n+6)(n+4)+100$$

alakú számokat. Alakítsuk át a kifejezést:

$$(n-6)(n-4)(n+6)(n+4)+100 = \left(n^2-16\right)\left(n^2-36\right)+100 = n^4-52n+676 = \left(n^2-26\right)^2.$$

Ebből látható, hogy a kifejezés minden n egész esetén négyzetszámot ad, így $n = 2020$ esetén is.

858.

859.

860.

861.

862.

863.

864.

865.

866.

867.

868.

869.