1–2.

2019/09/03

Első óra: beszélgetés, technikai tudnivalók.

3.

2019/09/04

409. Legyen $A(7;2)$ és $B(-1;5)$. Add meg az AB szakasz

   (a) F felezőpontjának

   (b) az A-hoz közelebbi harmadolópontjának (H)

   (c) a B-hez közelebbi negyedelőpontjának (N)

   koordinátáit.

   (d) Legyen $\underline{h}$ az origóból a H pontba mutató vektor. Melyik vektor a $\underline{h}$ 90^o-kal és -90-kal elforgatott képe?

410. Egy vízilabdamérkőzést izgalmasnak nevezünk, ha a meccs során sosem volt egy gólnál nagyobb különbség a csapatok között. Hányféleképpen alakulhat egy izgalmas meccs, ha összesen 11 gól esik rajta?

411. Lehet-e két köbszám hányadosa 5400?

412. Van-e olyan négyszög, amelynek minden oldala legalább 100, de a területe kisebb, mint 1?

Házi feladat: **409d., 410–412.**

4.

2019/09/05

413. Legyen $A(5;6)$ és $B(-3;2)$. Add meg az AB szakasz 7-edelő pontjai közül annak a koordinátáit, amelyik A-hoz a második legközelebb van.

414. Van-e olyan pozitív egész szám, amelynek a kétszerese négyzetszám, míg a háromszorosa köbszám?

415. Legyen $A(-1;-1)$, $B(2;5)$, $C(8;2)$. Add meg az ABC háromszög súlypontjának koordinátáit.

Házi feladat: **413–415.**

5.

2019/09/09

Ismétlő dolgozat

1. Legyen $A(2;-4)$ és $B(-1;6)$. Mekkora az AB szakasz hossza?
2. Egy érintőnégyszög 3 oldalának hossza 8, 9, 10. Milyen hosszú lehet a negyedik oldal?
3. Az O középpontú körvonal 4 különböző pontja A, B, C, D.
Tudjuk, hogy $ACB\sphericalangle = 51^\circ$. Add meg $ADB\sphericalangle$ és $AOB\sphericalangle$ nagyságának összes lehetséges értékét.
4. Tudjuk, hogy $\sqrt[4]{3^{13}} = 9^x$. Add meg x értékét.
5. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenséget:
$$\frac{x^2-4}{x^2-2x-3} < 0.$$
6. Az első 500 számból véletlenszerűen választunk egyet (mindegyiket egyforma valószínűséggel). Mekkora a valószínűsége, hogy a választott szám osztható 2-vel vagy 7-tel?
7. Négy dobókockával dobva mi a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata osztható 5-tel?
8. Az $(a+3b)^7$ kifejezésben mekkora az a^3b^4 tag együtthatója?
9. Tudjuk, hogy az α szög szinusza $\frac{1}{3}$. Mennyi $\cos\alpha$?
10. Az ABC háromszögben $a=4$, $b=7$, $\gamma=30^\circ$. Mekkora a c oldal és a háromszög területe?

6–7.

2019/09/10

Háromszög súlypontjának koordinátái.
Legyen $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$ a háromszög három csúcsa. Ekkor
$$S\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

Szögfüggvények definíciójának ismétlése.

416. Van-e olyan szám, amelynek a kétszerese négyzetszám, a háromszorosa köbszám, a négyszerese teljes negyedik hatvány?
417. Legyen $A(2;6)$ és $B(9;3)$. Add meg az AB szakaszt $p:q$ arányban osztó pont koordinátáját.
418. Tekintsük az $f(x) = x^2-(p+2)x+4$ másodfokú kifejezést. Milyen p esetén lesz
   (a) f-nek egy valós gyöke?

(b) f egyik gyöke 1?

(c) f két gyökének összege 1?

419. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket:

(a) $\cos x < 1$

(b) $\sin x > \frac{1}{2}$

Házi feladat: **418, 419.**

8.

2019/09/11

Adott szakaszt adott arányban osztó pont koordinátáinak kiszámítása. Legyen $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ és az arány $p : q$. Ekkor az L osztópont koordinátái:

$$L\left(\frac{q \cdot x_A + p \cdot x_B}{p+q}; \frac{q \cdot y_A + p \cdot y_B}{p+q}\right).$$

Súlyozott közép fogalma.

418. (d) f két gyökének szorzata 4?

(e) minden x-re $f(x) < 0$?

Házi feladat: **418cde, 419.**

Óra végi

1. Legyen $A(-1; 7)$, $B(2; 4)$. Add meg az AB szakasz $3 : 5$ arányban osztó pont koordinátáit.
2. Egy háromszög csúcsai: $A(1; 1)$, $B(-2; 6)$, $C(4; 5)$. Mik a súlypontjának koordinátái?
3. Add meg a $\sin x$ és a $\operatorname{ctg} x$ definícióját.

9.

2019/09/12

Ismétlő dolgozat feladatainak megbeszélése

10.

2019/09/16

418. (f) minden x-re $f(x) > 0$?

419. (c) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} > 0$

420. Melyik a legkisebb pozitív egész szám, amellyel 4200-at megszorozva

   (a) négyzetszámot
   (b) köbszámot

   kapunk?

Házi feladat: **418f, 419c., 420**

11–12.

2019/09/17

421. Egy domb tetején egy szobor áll. A szoborhoz, egy 150 méter hosszú út vezet, amelynek meredeksége 15^o. Az út aljáról a szobor 3^o-os szögben látszik. Milyen magas a szobor?

422. $\sqrt{x^2 + 6x + 9} - x = 1$

423. Vegyél fel két nem párhuzamos $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektort. Szerkeszd meg az

   (a) $\underline{a} + \underline{b}$
   (b) $\underline{b} - 2\underline{a}$
   (c) $2\left(\underline{a} - \frac{\underline{b}}{3}\right)$

   vektorokat.

424. Ábrázold a következő függvények grafikonját:

   (a) $\cos 2x$
   (b) $\sin\frac{x}{2} + 1$
   (c) $\mathrm{tg}(x - \pi)$
   (d) $\frac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{x}{3}$

Házi feladat: **422., 424bcd**

13.

2019/09/17

425. $x^2 + 3x + \sqrt{x^2 + 3x + 9} = 27$

426. Meg lehet-e adni négy pozitív egész számot úgy, hogy semelyik kettő különbsége se legyen 4-gyel osztható? És ötöt?

427. $\cos(\sin x) < 0$.

Óra végi

1. Tudjuk, hogy $\cos x = \frac{2}{3}$. Mennyi $\sin x$?
2. Egy derékszögű háromszög egyik szöge 20°, a vele szemben lévő befogó 15. Mekkora a mellette lévő befogó hossza?
3. Vegyél fel egy $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektort. Szerkeszd meg $2\underline{b} - \frac{\underline{a}}{2}$ vektort.
4. Ábrázold a $\frac{1}{2}\sin(x + \pi)$ függvény grafikonját.

Házi feladat: **425., 426b., 427.**

14.

2019/09/19

428. $2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

429. Egy 20×20-as céltáblára 5 lövést adtunk le. Mindegyik eltalálta a céltáblát. Biztosak lehetünk-e abban, hogy van két olyan lövés, amelyeknek a távolsága kevesebb, mint 15?

430. Adott az $\underline{a}$ és a $\underline{b}$ vektor, melyek kezdőpontja megegyezik. Adjuk meg a végpontjaikat összekötő szakasz felezőpontjába mutató vektort.

Házi feladat: **428–430.**

15.

2019/09/23

431. Tekintsük az $ABCDEFGH$ kockát a csúcsok szokásos betűzésével. Legyen $\overrightarrow{AB} = \underline{b}, \overrightarrow{AD} = \underline{d}$ és $\overrightarrow{AE} = \underline{e}$. Fejezzük ki ezekkel a vektorokkal az

    (a) $\overrightarrow{AC}$
    (b) $\overrightarrow{BG}$
    (c) $\overrightarrow{HB}$

    vektorokat.

432. $x^2 + x + 1 + \sqrt{x^2 + x + 7} = 6$

433. Adott az ABC háromszög. Legyen $\overrightarrow{CA} = \underline{a}, \overrightarrow{CB} = \underline{b}$, illetve legyen H az AB oldal B-hez közelebbi harmadoló pontja. Fejezd ki $\underline{a}$-val és $\underline{b}$-vel a $\overrightarrow{CH}$ vektort.

Házi feladat: **432, 433.**

16–17.

2019/09/24

Helyvektor.
Háromszög súlypontjába mutató helyvektor:

$$\underline{s} = \frac{\underline{a} + \underline{b} + \underline{c}}{3}.$$

Logikai kvantorok: $\exists$ - létezik, $\forall$ - minden.

434. Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egy háromszög három csúcsába mutató helyvektor. Írd fel a súlypontba mutató helyvektort.

435. $x^2 + 1 = \sin x$.

436. $x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$.

437. Egy 6×8-as téglalapban elhelyeztünk 13 pontot. Bizonyítsd be, hogy van két olyan pont, amelyek távolsága kisebb, mint 3.

438. $3 \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 0$.

Házi feladat: **437, 438.**

18.

2019/09/25

Vektorok lineáris kombinációja.

439. $3 \cos x + 2 = \sqrt{2}$.

440. $2 \cos^2 x + \cos x = 1$.

441. Bizonyítsd be, hogy ha adott a síkban két nem párhuzamos vektor, akkor bármely síkbeli vektor egyértelműen felírható ezek lineáris kombinációjaként.
Formálisan: Ha $\underline{a} \nparallel \underline{b}$, akkor $\forall \underline{v} \;\; \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \underline{v} = \alpha \underline{a} + \beta \underline{b}$.

Házi feladat: **440., 441.**

Óra végi

1. Egy háromszögben $a = 4, b = 3, \gamma = 45^\circ$. Mekkora a háromszög területe?
2. Egy háromszög csúcsaiba mutató helyvektorok: $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$. Mi a súlypontba mutató vektor?
3. Ábrázold $f(x) = \sin x - 1$ függvényt.
4. Tekintsük az $ABCDEFGH$ kockát a csúcsok szokásos betűzésével. Legyen $\overrightarrow{AB} = \underline{b}, \overrightarrow{AD} = \underline{d}$ és $\overrightarrow{AE} = \underline{e}$. Fejezd ki a a $\overrightarrow{CH}$ vektort.

19.

2019/09/26

Vektorok skaláris szorzata.

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\alpha.$$

A skaláris szorzás kommutatív.

442. Asszociatív-e a skaláris szorzás, azaz igaz-e mindig, hogy $(\underline{a} \cdot \underline{b}) \cdot \underline{c} = \underline{a} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{c})$

443. Mikor lesz két vektor skaláris szorzata 0?

444. $\cos^2 x + 3\sin x + 3 = 0$.

Házi feladat: **442–444.**

20.

2019/09/30

Vektorok merőlegessége.
Koszinusztétel skaláris szorzattal.

445. Tekintsd az alábbi paralelogrammákat: $a = 3, b = 5, \alpha = 30^\circ$, illetve $a = 5, b = 5, \alpha = 60^\circ$. Számold ki az átlók hosszát, illetve az oldalak hosszának és az átlók hosszának négyzetösszegét.

Házi feladat: **445.**

21–22.

2019/10/01

Egy paralelogramma oldalahosszainak négyzetösszege megegyezik az átlók oldalhosszainak négyzetösszegével.

446. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin 2x$.

447. Egy 6 egység oldalú négyzetben adott 7 pont. Igaz-e, hogy mindig található 2 olyan pont, amelyek távolsága legfeljebb 3,65?

23.

2019/10/02

Egyéni dolgozat

1. Adottak az $A(-2,4)$, $B(6;-1)$ és $C(3;3)$ pontok, illetve az A pontba mutató $\underline{a}$ és a B pontba mutató $\underline{b}$ vektorok. Osszuk fel az AB szakaszt 5 egyenlő részre, és tekintsük az ötödölőpontok közül a B-hez második legközelebbit. Legyen ez a pont V.

   (a) Add meg a V pont koordinátáit.

   (b) Fejezd ki az V pontba mutató $\underline{v}$ vektort $\underline{a}$ és $\underline{b}$ segítségével.

   (c) Legyen S az ABC háromszög súlypontja. Add meg az $\overrightarrow{SB}$ vektor koordinátáit.

2. Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$2x^2 - 7x + \sqrt{2x^2 - 7x + 5} = 7.$$

3. Ábrázold a $g(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 2$ függvényt.

4. Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. Bizonyítsd be, hogy ha egy 3×4-es téglalapban elhelyezünk 10 pontot, akkor lesz kettő, amelyek távolsága legfeljebb $\frac{5}{3}$.

6. Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$2\cos^2 x + 5\sin x = -1.$$

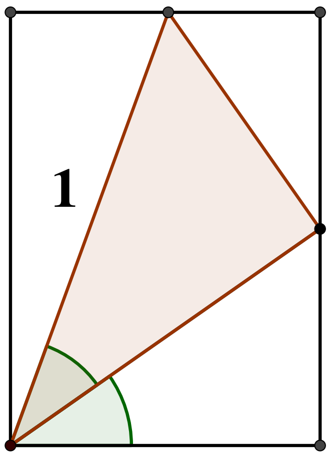
24.

2019/10/03

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

448. $2\sin x\cos x - 1 = \cos x - 2\sin x$.

449. Találj képletet $\sin 2\alpha$-ra és $\cos 2\alpha$-ra az alábbi ábra segítségével:



450. Számold ki a következő vektorpárok skaláris szorzatát:

(a) $\underline{a}(1;1)$, $\underline{b}(3;3)$

(b) $\underline{a}(2;0)$, $\underline{b}(0;7)$

(c) $\underline{a}(2;5)$, $\underline{b}(-5;2)$

(d) $\underline{a}(1;2)$, $\underline{b}(3;1)$

451. Barnáékhoz, vagyis Barna úrhoz és feleségéhez három házaspár érkezik vendégségbe. Az örömteli találkozás alkalmából egyesek kezet is fogtak egymással. Senki sem fogott kezet azonban a saját házastársával.
Barna úr utóbb mindenkitől megkérdezte, hogy hány jelenlévővel fogott kezet. Kérdésére, amelyet hétszer tett fel, hiszen rajt kívül heten voltak a szobában, csupa különböző választ kapott.
Hány vendéggel fogott kezet Barnáné?

Házi feladat: **450d., 451.**

25.

2019/10/07

Dolgozat feladatainak megbeszélése.

26–27.

2019/10/08

A skaláris szorzat kiszámításának másik módja, ha $\underline{a}(a_x, a_y)$, $\underline{b}(b_x, b_y)$:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = q_x b_x + a_y b_y.$$

452. Találj képletet $\sin(\alpha+\beta)$-ra és $\cos(\alpha+\beta)$-ra.

453. Rajzolj térképet, amelyen

   (a) 6
   (b) 7
   (c) 8
   (d) 9

   város van, és minden városból pontosan 3 út indul ki. (Az utak minden esetben pontosan két várost kötnek össze.)

454. $\cos 2x + \sin x = 1$.

455. Egy 6-fős társaságról ezt tudjuk: Annának 5, Bettinek 4, Csabának, Daninak és Eszternek 3, Fanninak 2 ismerőse van a Facebookon.

   (a) Ismerőse-e Betti Fanninak?
   (b) Lehet-e, hogy Fanninak csak 1 ismerőse van?

Házi feladat: **452., 454., 455.**

28.

2019/10/09

Addíciós képletek:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

456. Igaz-e, hogy egy társaságban mindig van két ember, akiknek ugyanannyi ismerőse van a társaságban?

Házi feladat: **455b., 456.**

Óra végi

1. Bizonyítsd be $0 < \alpha < 45^\circ$ esetén a $\sin 2\alpha$-ra és $\cos 2\alpha$-ra tanult képletet.
2. Add meg az $\underline{a}(3;7)$, $\underline{b}(10,-4)$ vektorok skaláris szorzatát.

29.

2019/10/10

A gráf fogalma.
Jelölések: $\mathcal{G}$, $\mathcal{V}(\mathcal{G})$, $\mathcal{E}(\mathcal{G})$. Csúcsok, élek, fokszám, izolált pont, teljes gráf.

457. $\sin 2x + 2\sin x = \cos x + 1$.

458. Van-e olyan gráf, amelyben a fokszámok rendre:

(a) 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2.
(b) 0, 1, 1, 2, 2, 4, 6.
(c) 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5.
(d) 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3.

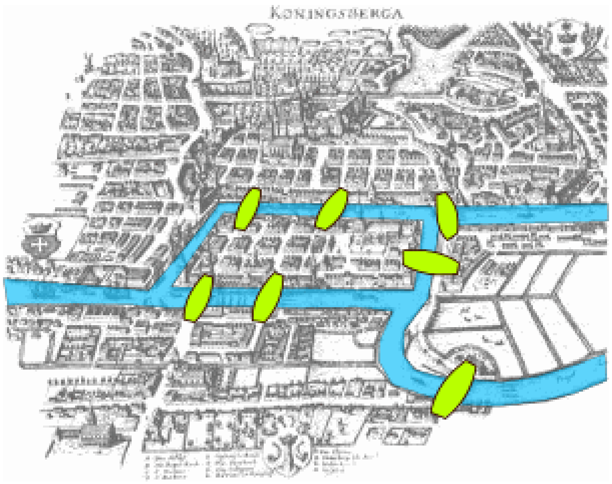
Házi feladat: **456–458.**

30.

2019/10/14

Egy egyszerű gráfban mindig van két azonos fokszámú csúcs.
Egy egyszerű gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszerese. Vagyis a fokszámok összege mindig páros.

459. Königsbergi hidak problémája:



Az ábrán Königsberg látképe látható, kiemelve a Pregel folyó és a folyó hídjai. Lehetséges-e olyan városi körséta, amely minden hídon pontosan egyszer halad át?

460. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

461. Egy konferencia vacsoráján 51 ember vett részt. A végén megkérdezték a résztvevőket, hogy hány emberrel koccintottak az este során. 46 ember válasza egyforma volt, a maradék öt ember válasza pedig egy-egy 10-nél nagyobb prímszám. Lehetséges-e, hogy mindenki jól emlékezett a koccintások számára?

Házi feladat: **457., 460., 461.**

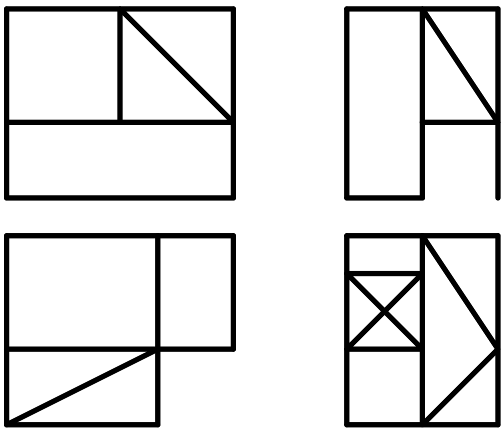
31–32.

2019/10/15

Gráfban: séta, körséta, út, kör.

462. $\cos\left(7x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

463. Az alábbi ábrák közül melyeket lehet lerajzolni úgy, hogy nem kell felemelnünk a tollat? (És egy szakaszt egy vonallal kell megrajzolni.)



464. $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}$.

465. Mekkora az $\underline{a}(2; 5)$ és $\underline{b}(6; 1)$ vektorok által bezárt szög?

466. Hogyan tudjuk eldönteni egy ábráról, hogy le lehet-e rajzolni úgy, hogy nem kell felemelnünk a tollat?

Házi feladat: **465., 466.**

33.

2019/10/16

Euler-séta, Euler-kör(séta). Összefüggőség, komponens.
Szükséges és elégséges feltétel Euler-séta, és Euler-kör létezésére.

467. Oroszországban 14 csapat van a bandy-bajnokság első osztályában. Teljes körmérkőzést játszanak. Igazold, hogy a bajnokság bármely pillanatában van két olyan csapat, akiknek ugyanannyi lejátszott meccsük van.

468. Egy kis országban mindössze 10 település van. Legkevesebb hány utat kell építeni ahhoz, hogy bármely településből bármely másik településbe el lehessen jutni. (Egy út mindig két települést köt össze.)

Házi feladat: **467., 468.**

Óra végi

1. $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. Hány éle van egy 11-csúcsú teljes gráfnak?
3. Mit nevezünk egy gráfban útnak?

34.

2019/10/17

Gráf: fa, erdő fogalma.

469. $\cos\left(7x+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)$.

470. Rajzolj minél több 6-pontú fát. Mi a közös bennük?

471. Add meg $\sin 75^\circ$ pontos értékét.

Házi feladat: **469–471.**

35.

2019/10/21

Gráfok izomorfiája.

472. Bizonyítsd be, hogy egy n-pontú fának $n-1$ éle van.

473. A négyjegyű számok hányadrészében van legalább két azonos számjegy?

474. Egy háromszögben: $a=5, b=7, \gamma=120^\circ$. Határozd meg $c, \alpha, \beta, m_a, s_c, f_c, T$ nagyságát.

Házi feladat: **472., 473., 474. első négy feladat**

36–37.

2019/10/22

Minden n-pontú fának $n-1$ éle van.

475. Adott a $V = \{A, B, C, D\}$ halmaz.
    (a) Hány különböző egyszerű gráf van, amelynek a csúcsai éppen V elemei?
    (b) Hány izomorfia erejéig különböző van?
476. Határozd meg $\cos 105^\circ$ pontos értékét.
477. Hány éle lehet egy erdőnek, amelynek 100 pontja és 5 komponense van?
478. $\sin 2x - \sin x - \sin^2 x = \cos^2 x - 2\cos x$

38.

2019/11/04

Egy n-pontú, k-komponensű erdőnek $n-k$ éle van.

39–40.

2019/11/05

Páros dolgozat

1. Határozd meg $\cos \frac{11\pi}{12}$ pontos értékét.
2. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy gráfban van Euler-séta?
3. Adott a $V = \{A, B, C, D, E, F\}$ halmaz.
    (a) Hány különböző egyszerű gráf van, amelyben a csúcsok halmaza V, és pontosan 4 éle van?
    (b) Hány izomorfia erejéig különböző ilyen gráf van?
4. Oldd meg az alábbi egyenletet a pozitív valós számok halmazán:
$$2\sin(4x - \pi) = -\sqrt{3}.$$
5. Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:
$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(5x - \frac{2\pi}{5}\right).$$

6. Van-e olyan gráf, amelyben a fokszámok rendre:
   (a) $2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4$.
   (b) $1, 2, 2, 2, 2, 3, 4$.
   (c) $1, 2, 3, 3, 3, 6, 6$.
7. Melyek azok a 15-nél kisebb pozitív valós x-ek, amelyekre
$$2\sin 2x + 2\sin x - 3\sin^2 x = 3\cos^2 x + 6\cos x.$$
8. Egy n-pontú teljes gráf éleinek száma 23-mal kevesebb, mint az $n+2$-pontú teljes gráf éleinek száma. Hány éle van egy $2n$-pontú, 3 komponensű erdőnek?
9. Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(0;0)$, $B(3;4)$, $C(0;16)$.
   Add meg az f_b és s_b által bezárt szöget.

41.

2019/11/06

Sorozat definíciója.

479. Hogyan folytatnád a sort?
   (a) $2, 3, \dots$
   (b) $1, 3, \dots$
   (c) Ő, D, A, …
480. Oldd meg az alábbi két egyenletet:
   (a) $\operatorname{ctg} 2x = -1$.
   (b) $\sin x = \operatorname{tg} x$.
481. Mennyi a háromjegyű számok összege?
482. Keress olyan képletet, amely $\operatorname{tg}\alpha$ segítségével fejezi ki $\operatorname{tg} 2\alpha$-t.
483. Mennyi a 7-tel osztható, háromjegyű számok összege.

Házi feladat: **480b., 482., 483.**

42.

2019/11/07

Bolyai 2019-es körzeti forduló feladatai

43.

2019/11/11

Dolgozat feladatainak megbeszélése
Házi feladat: **480b., 482., 483.**

44–45.

2019/11/12

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

484. Hány mérkőzés van összesen egy labdarúgó világbajnokságon, ha kezdetben 8 darab négyes csoportban játszanak teljes körmérkőzést a csapatok, majd pedig minden csoportból az első kettő jut tovább, és ez a 16 csapat egyenes kieséses rendszerben folytatja a tornát? Rendeznek mérkőzést a 3. hely eldöntéséért is.

485. $\operatorname{tg}^2 x = 3$.

486. Egy nigériai faluban két törzs tagjai alkotják a lakosságot, jorubák és ibibiók. Tudjuk, hogy minden joruba ismer 8 jorubát és 9 ibibiót. Illetve minden ibibió ismer 10 jorubát és 8 ibibiót.
Kik vannak többen a jorubák vagy az ibibiók?

487. Hogyan lehetne általánosítani a 483. feladatot?

Házi feladat: **486.**

46.

2019/11/13

Számtani sorozat definíciója.

488. Mennyi az összege azoknak a háromjegyű számoknak, amelyek 9-cel osztva 7 maradékot adnak?

489. Ha Magyarországon szeretnénk bevezetni a „személyi gráfot", akkor legkevesebb hány csúcsú gráffal kellene ezt megtenni?
(Mindenki kapna egy n-pontú gráfot, és mindenkinek különbözőt kellene adnunk.)

Házi feladat: **488., 489.**

Óra végi

1. Számtani sorozat első elem 7, differenciája 11. Mi a 8-adik eleme?
2. Mennyi a következő két vektor skalárszorzata: $\underline{a}(2;5)$, $\underline{b}(4;-1)$
3. Oldd meg: $\operatorname{tg} x = -1$
4. Add meg az összes egyszerű gráfot, amelynek a csúcsainak halmaz: $\{A, B, C\}$.

47.

2019/11/14

Számtani sorozat első n tagjának összege:

$$S = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d.$$

48.

2019/11/18

Önálló tanulás.

Ismétlés a tankönyből, koordináta-geometria: egyértelmű vektorfelbontás, osztópont, súlypont koordinátája, skalárszorzat kiszámítása.
Tk. 140–151. o.

49.

2019/11/20

Önálló tanulás.

Egyenes irányvektoros, és normálvektoros egyenlete. Két adott ponton átmenő egyenes egyenlete.
Tk. 153–158. o.

50.

2019/11/21

Önálló tanulás.

Egyenes meredeksége, két egyenes metszéspontja.
Tk. 158–163. o.

51–52.

2019/11/26

Az önálló tanulás eredményének tesztelése:

1. Az $ABCD$ paralelogramma átlóinak metszéspontja K.
   Tudjuk, hogy $K(4;2)$, $A(-1;1)$, $B(0;7)$.
   Add meg C és D koordinátáit.
2. Mekkora szöget zár be az $\underline{a}(-1;3)$ és a $\underline{b}(4;7)$ vektor egymással?
3. Egy egyenes normálvektora $\underline{n}(3;2)$ és áthalad a $P(9;-1)$ ponton.
   Add meg az egyenes egyenletét.
4. Legyen $A(12;3)$, $B(2;9)$.
   Add meg az AB szakasz felezőmerőlegesének egyenletét.
5. Add meg az első feladatban szereplő paralelogramma AB oldalegyenesének egyenletét.
6. Legyen az e és az f egyenesek egyenlete az alábbi:

$$\begin{aligned} e: &\quad 3x+8y=2 \\ f: &\quad 2x+7=3y. \end{aligned}$$

   Add meg az M metszéspont koordinátáit.

---

490. Az alább definiált sorozatok közül melyek számtani sorozatok?

   (a) $a_n = 6n-7$,
   (b) $b_n = 5+3(n-2)$,
   (c) $c_n = \frac{2}{n}+3$,
   (d) $d_n = \frac{5n+2}{7}$

Házi feladat: **490.**

53.

2019/11/27

491. Illeszkedik-e a $P(7;3)$, illetve $Q(5;2)$ pontok valamelyike az $4x-7y=6$ egyenletű egyenesre?

492. Az ABC háromszög csúcsai: $A(4;-6)$, $B(8;4)$, $C(16;-2)$. Hol van a körülírt kör középpontja?

493. Egy repülő a felszállást követően 8°-os szögben emelkedik, 30 km-t tesz meg így. Ezt követően csökkenti az emelkedés szögét 5°-ra, és 70 km-t repülve éri el az utazási magasságot. Mekkora ez a magasság?

494. Egy számtani sorozat hetedik tagja 43, a tizenkettedik tagja 73. Mennyi a sorozat első és harmadik elemének összege?

495. Mekkora szöget zár be egymással az $x - 3y = 2$ és a $3y + 2x = -1$ egyenletű egyenes?

Házi feladat: **492., 495.**

54.

2019/11/28

496. Egy számtani sorozat harmadik tagja 23, az első 7 tag összege 210. Add meg a sorozat első tagját és a differenciát.

497. Adott 3 pont a síkban: $A(2;3), B(8;-1), C(7;4)$. Legyen F az AB szakasz felezőpontja. Írd fel a CF egyenes egyenletét.
Mekkora az egyenes meredeksége?
Hol metszi a x tengelyt?

498. Egy számtani sorozat harmadik és ötödik tagjának összege 43. A negyedik és a hatodik tagjának összege 37. Melyik ez a sorozat?

Házi feladat: **497., 498.**

55–56.

2019/12/02

499. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x \leq 0$.

500. Pozitív egészek összege 80. Mikor maximális a szorzatuk?

501. Egy számtani sorozat első három tagjának az összege 30-cal kisebb, mint a következő három tag összege. Az első hat tag összege 60. Melyik ez a sorozat?

502. Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. A háromszög kerülete 30. Mekkora a háromszög területe?

503. Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(1;1), B(4;6), C(7;3)$. Mekkora β, s_b, m_b?

Házi feladat: **499., 502., 503.**

57–58.

2019/12/03

Egyenes normálegyenlete, pont egyenestől mért távolsága.

504. Béla 600 000 Ft-ot betesz a bankba évi 5%-os kamatra. Mennyi pénz lesz ezen a bankszámlán 20 év múlva, ha nem nyúl többet hozzá?

505. Add meg az alábbi két összeget egyszerűbb alakban:

(a) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{15}$

(b) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{15}$

506. Milyen egyenlettel lehet jellemezni az origó középpontú, egységsugarú kör pontjait?

(b) És az $O(3; 4)$ középpontú 5-sugarú kör pontjait?

507. Béla 100 000 Ft-ot betesz a bankba évi 5%-os kamatra. Minden évben 100 000 Ft-ot spórol meg, ezt minden év végén beteszi erre a bankszámlára. Mennyi pénz lesz a bankszámláján 20 év múlva?

Házi feladat: **505., 506b., 507.**

59.

2019/12/04

Az $O(u, v)$ középpontú, r sugarú kör egyenlete:

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2.$$

Házi feladat: **507.**

Óra végi

1. $\cos(2\alpha)$-ra képlet.
2. Milyen messze van az $A(-2; 1)$ pont a $3x - 4y = 5$ egyenletű egyenestől?
3. Írd fel az $A(1; 1)$ és $B(10; 2)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.
4. Egy számtani sorozat első 3 elemének összege 45. Mi a sorozat második eleme? (Bizonyítsd is.)

60.

2019/12/05

Mértani sorozat (a_1 és q)tagjainak összege:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

508. Legyen $e : 2x - 7y = 12$, és $C(3; -4)$. Mekkora $d(e, C)$?

509. Tudjuk az $\{a_n\}$ sorozatról, hogy $a_n = 3 \cdot n + 2$. Mennyi a sorozat első 11 tagjának az összege?

510. Hol metszi a $K(6; 2)$ középpontú, $\sqrt{10}$-sugarú kört a $2y - x + 7 = 0$ egyenes?

511. A $\{b_n\}$ sorozat első tagja 2. Tudjuk továbbá, hogy $b_{n+1} = 3 \cdot b_n$. Mennyi b_{11}? Mennyi a sorozat első 11 tagjának az összege?

Házi feladat: **509–511.**

61.

2019/12/09

Kör és egyenes metszéspontja.

512. Egy mértani sorozat negyedik és nyolcadik tagja is 10. Add meg az első 10 tag összegét.

513. Add meg annak a körnek az egyenletét, amely átmegy az $A(2; 1)$ ponton és érinti mindkét koordinátatengelyt.

514. Egy számtani sorozat második és nyolcadik tagjának összege 2, kilencedik és harmadik tagjának különbsége 24. Mennyi az első tíz tag összege?

Házi feladat: **514.**

62–63.

2019/12/10

515. A k kör középpontja illeszkedik az $5x + 4y = 59$ egyenletű egyenesre. A kör két pontja $A(4; 5)$, $B(8; 3)$. Add meg a kör egyenletét.

516. $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

517. Egy színházi nézőtéren 30 sor van. Minden sorban kettővel többen férnek el, mint az előzőben. Hány ember fér el a nézőtéren, ha a 15. sorban 50 férőhely van?

518. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $A(5; 3)$ ponton, és párhuzamos a $3x-4y = 7$ egyenletű egyenessel.

519. Számtani sorozatban: $a_4^2 - a_2^2 = 208$, $a_3 + a_5 = 34$. Add meg a sorozatot.

Házi feladat: **–**

64.

2019/12/11

Egyéni dolgozat

1. Melyik pont van közelebb az $x - 4 = 2y$ egyeneshez, $A(4; 2)$ vagy $B(10; 1)$?
2. Egy könyvszekrénynek 11 polca van. Felülről a hetedik polcon 51 könyv van, és minden polcon hárommal kevesebb, mint az alatt lévőn. Hány könyv van a könyvszekrényen?
3. Határozd meg az $e : x - 4 = 2y$ és $f : 3x + y = 40$ egyenesek metszéspontját és szögét.

4. Oldd meg az egyenletet a valós számok halmazán:

$$\operatorname{ctg}\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{3}.$$

5. Helga elektromos autóra gyűjt. A kiszemelt autó ára jelenleg 10 millió Ft, de 3 év múlva ennél 40%-kal kevesebb lesz. Helga minden hónapban 100 000 Ft-ot tesz be a bankba, a bank pedig havi 2%-os kamatot ad a betétekre. Lesz-e 3 év múlva elegendő spórolt pénze a bankban, hogy megvegye az autót?

6. Egy kör középpontjának x koordinátája 5. A kör két pontja: $P(3;0)$, $Q(8;1)$. Add meg a kör egyenletét.

65.

2019/12/12

Dolgozat feladatok megbeszélése

520. Zsolt egy 645 oldalas könyvet olvas. Az első nap 15 oldalt tudott elolvasni, de egyre jobban tetszett neki a könyv, ezért minden nap 4 oldallal többet olvasott, mint az előző napon. Hány nap alatt olvasta el a könyvet?

521. A k_1 kör középpontja $O_1(3;2)$, a k_2 köré $O_2(6;-4)$. Az előbbi kör sugara $r_1=\sqrt{10}$, az utóbbié $r_2=5$. Hol metszi egymást a két kör?

522. Benedek 1 millió forintot tesz a bankba, és a bank évi 5%-os kamatot ajánl a lekötésre. Benedek azonnal kiveszi az összes pénzét, amikor a betét összege meghaladja az 1,6 millió forintot. Mikor fogja Benedek kivenni a pénzét?

Házi feladat: **520–522.**

66.

2019/12/16

A logaritmus fogalma

523. Add meg x és y értékét, ha tudjuk, hogy

$$2^x\cdot 2^y=128$$
$$3x+5y=25.$$

524. Add meg tízes számrendszerben az alábbi számokat:

(a) $\log_{10}1000$
(b) $\log_2 512$
(c) $\log_3\frac{1}{27}$
(d) $\log_2\sqrt{2}$
(e) $\log_{\frac{1}{3}}9$

Házi feladat: **523., 524.**

67–68.

2019/12/17

Körhöz külső pontból húzott érintők egyenlete.

525. $25^x - 3 \cdot 5^x = 10$.

526. A k kör egyenlete: $x^2 + y^2 + 6x + 2y = 15$.

(a) Add meg a kör középpontját.

(b) Add meg a kör sugarát.

(c) Add meg a k kör $P(1; 2)$ pontjához tartozó érintő egyenletét.

527. Oldd meg a következő egyenletrendszert:

$$3^x + 2^{y+1} = 11$$
$$5 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 3.$$

Házi feladat:

69.

2019/12/18

Javító dolgozat

70.

2019/12/19

Karácsony előtti utolsó óra

71.

2020/01/06

Beszélgetés

72–73.

2020/01/07

528. Egy mértani sorozat első tagja 3, a második és harmadik tagjának összege 18. Mennyi az első 10 tag összege? És szorzata?

529. Add meg az alábbi kifejezések pontos értékét:
   (a) $5^{\log_5 19}$
   (b) $9^{\log_3 5}$
   (c) $4^{\log_{16} 81}$
   (d) $7^{1+\log_{49} 8}$

530. Mennyi lehet ennek a végtelen sok számnak az összege?

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{4^n} + \ldots$$

531. Rajzold fel vázlatosan az alábbi függvények grafikonját:
   (a) $f(x) = 3^x$
   (b) $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
   (c) $h(x) = \log_3 x$
   (d) $j(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

532. A k kör középpontja $(5; 3)$, sugara $\sqrt{5}$. Húzzunk k-hoz érintőt a $(12; 2)$ pontból. Add meg a két érintő egyenletét.

Házi feladat: **529cd., 531., 532.**

74.

2020/01/08

533. Add meg az alábbi kifejezések pontos értékét:
   (a) $5^{\log_{\sqrt{5}} 25}$
   (b) $9^{\log_{\sqrt[5]{2}} 8}$
   (c) $4^{\log_{\frac{1}{7}} 49}$

Házi feladat: **532., 533.**

Óra végi

1. $\log_4 64$
2. $\log_5 \frac{1}{25}$
3. Mértani sorozat első eleme 3, kvóciense 2. Mennyi az első 15 tag összege?
4. Kör egyenlete, amelynek középpontja $(2; -3)$, és egyik pontja az origó.

75.

2020/01/09

A kör külső pontból húzott érintőjének egyenlete.
Logaritmus tulajdonságai:

$$\log_a b = \log_{a^2} b^2$$
$$\log_a b = \log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b}$$

Általában:

$$\log_a b = \log_{a^k} b^k.$$

534. Add meg a $\log_6 4 + \log_6 9$ kifejezés pontos értékét.

535. Egy mértani sorozat első tagja 5, a harmadik és ötödik tagjának összege 60. Mennyi a sorozat kvóciense?

536. Rajzold fel vázlatosan az alábbi függvények grafikonját:
   (a) $f(x) = 3^{x+2}$
   (b) $h(x) = \log_2(x-1)$

537. A k kör középpontja $O(4; 3)$, sugara $2\sqrt{2}$. Húzzunk k-hoz érintőt a $A(10; 5)$ pontból. Add meg a két érintő egyenletét.

Házi feladat: **535–537.**

76.

2020/01/13

Logaritmus tulajdonságai:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c).$$

538. Határozd meg a következő kifejezések pontos értékét:
   (a) $\log_4 320 - \log_4 5$
   (b) $\log_3 \frac{27}{5} + \log_9 25$

539. Írd fel az $O(2;2)$ középpontú, $\sqrt{5}$ sugarú körhöz húzható érintők egyenletét, amelyek merőlegesek a $2x - y = 7$ egyenletű egyenesre.

Házi feladat: **538–539.**

77–78.

2020/01/14

Logaritmus tulajdonságai:

$$\log_a b - log_a c = \log_a \frac{b}{c}.$$

540. Az 537. feladatot oldd meg más módszerrel.

541. Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 8-adrésze a következő három tag összegének. Mi a sorozat kvóciense?

542. Ábrázold az alábbi függvényeket:

(a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-5}$

(b) $g(x) = \log_5(x+2) - 5$

Házi feladat: **–**

79.

2020/01/15

Egyéni dolgozat

1. Add meg a következő kifejezések pontos értékét:
   (a) $\log_3 81$
   (b) $\log_5 \frac{1}{125}$
   (c) $\log_{\frac{1}{2}} 32$
   (d) $\log_4 96 - \log_{16} 36$
2. Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 31, az első és a harmadik tag összege 26. Add meg a sorozat első tagját és kvóciensét.
3. Határozd meg az origó középpontú, $r = 5$ sugarú körhöz a $P(7;1)$ pontból húzott érintők egyenletét.
4. Ábrázold az alábbi függvények grafikonját:
   (a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 2$
   (b) $g(x) = \log_3(x-2) + 4$

80.

2020/01/16

543. Hogyan tudunk kiszámítani a számológéppel egy logaritmust, azaz hogyan tudunk áttérni 10-es alapra? Keress olyan azonosságot, amelynek a bal oldalán $\log_a b$ áll, míg a jobb oldalon csak 10-es alapú logaritmus szerepel.

544. A k kör középpontja $O(4; 2)$, és egyik pontja $P(7; 0)$. Az e egyenes meredeksége -1 és áthalad a $Q(2; 3)$ ponton. Hol metszi az e egyenes a k kört?

545. Egy mértani sorozat negyedik tagja 10. A hatodik és hetedik tagjának összege 81-szer akkora, mint a második és harmadik tag összege. Mi a sorozat első tagja?

Házi feladat: **543–545.**

81.

2020/01/20

Javító dolgozat és gyakorló érettségi feladatok

546. Oldd meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:

   (a) $\frac{x+3}{3} = \frac{x^2+3x-4}{2x^2+4x-16} \cdot (x+3)$;

   (b) $\lg(6^x - 96) = \lg 2 + \lg 6$.

547. Egy háromszög két csúcspontja $A(6; 10)$ és $B(2; 7)$, a harmadik csúcs az $y = 2x+3$ egyenletű egyenesen van. Add meg a harmadik csúcs koordinátait, ha tudjuk, hogy

   (a) az ABC háromszög egyenlőszárú;

   (b) oldalhosszainak négyzetösszege minimális.

Házi feladat: **543–547.**

82–83.

2020/01/21

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

548. Oldd meg a valós számok halmazán a

$$\frac{\log_2(2x-5)}{\log_2(x^2-8)} = \frac{1}{2}$$

egyenletet.

549. Egy 3 cm sugarú kör köré egyenlőszárú trapézt írtunk. A trapéz hegyesszögei 60°-osak. Mekkora a trapéz területe?

Házi feladat: **547b., 548., 549.**

84.

2020/01/22

Logaritmus függvények értelmezési tartománya.

550. Hány nulla áll a $\binom{100}{50}$ szám végén?

551. Egy derékszögű háromszög átfogója 5, a szögeinekk szinusza pedig egy számtani sorozat három egymást követő eleme. Mekkora a háromszög területe?

Házi feladat: **550., 551.**

85.

2020/01/23

552. Oldd meg az alábbi egyenleteket:

(a) $\log_2 x + \log_2(x+3) = 2 + \log_2(6-5x)$;

(b) $\log_4 \sqrt{x+4} - \frac{1}{2}\log_4(x+1) = 2 - \log_4 8$.

553. Vizsgáld meg az alábbi sorozatot:

$$a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n},$$

ahol f_n az n-edik Fibonacci-szám. ($f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.) Fogalmazz meg sejtéseket, állításokat. Nem baj, ha nem tudod bizonyítani.

Házi feladat: **552., 553.**

86.

2020/02/03

Sorozatok tulajdonságai: korlátosság (alulról, felülről), (szigorú) monotonitás.

554. Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left(\log_3 3x\right)^2 = \log_3 \frac{x^3}{3} + 4.$$

555. Láttuk az 553-as feladatban, hogy a Fibonacci-sorozat szomszédos tagjainak hányadosai „tartanak” egy számhoz. Hogyan definiálnád azt, hogy egy $\{a_n\}$ sorozat tart egy számhoz?

Házi feladat: **554., 555.**

87–88.

2020/02/04

556. Mit mondhatunk a számtani, illetve a mértani sorozatokról monotonitás és korlátosság szempontjából?

557. Van-e olyan szigorúan monoton növő sorozat, amely korlátos?

558. $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11.$

559. Elképzelhető-e, hogy egy teniszmérkőzésen egy megnyert gémet jobb lett volna elveszíteni? Pontosan fogalmazva: elképzelhető-e, hogy egy teniszmérkőzést elveszítünk, de ha egy gémet, amit megnyertünk, elvesztettünk volna, és a többi gém ugyanúgy alakul, akkor megnyerjük a mérkőzést? Feltesszük, hogy nincs rövidítés (tie break).

Házi feladat: **558., 559.**

89.

2020/02/05

Óra végi

1. $\log_{x-1}(x+3)$ kifejezésnek milyen x-ekre van értelme?
2. $log_2 c(x+1) = -1$
3. Definíció: sorozat monoton csökken.
4. Definíció: Sorozat felülről korlátos.

Házi feladat: **559.**

90.

2020/02/06

Középszintű érettségi feladatok

560. Oldd meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

   (a) $\frac{2x}{5} - \frac{3x}{10} + 0,15 = \frac{x}{5} - \frac{x}{4} + 18.$

   (b) $\log_2(40x - 8) = 1 + 2 \cdot \log_2(2 + 2x).$

561. Az ABC háromzög csúcsainak koordinátái: $A(3;2), B(13;4), C(4;10)$.

   (a) Írd fel az A csúcsból induló magasságvonal egyenletét.

   (b) Határozd meg a BC oldalhoz tartozó magasság hosszát.

   (c) Add meg a háromszög legkisebb szögének nagyságát.

   (d) Írd fel az AC oldalra, mint átmérőre emelt kör egyenletét.

562. Belgiumban az autók rendszáma egy olyan 7 karakter hosszú sorozat, melynek első, valamint az utolsó 3 karaktere egy-egy tízen számrendszerbeli számjegy, míg a 2–4. karakterei egy-egy angol ábécébeli betű. (Pl. 4MTC129) Az angol ábécé 26 betűt tartalmaz.

   (a) Hány különböző rendszám adható ki Belgiumban?

   (b) Hány olyan rendszám van, amelyben nincs D betű?

   (c) Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott rendszámon szereplő számjegyek szorzata 5-re végződik?

Házi feladat: **559–562.**

91.

2020/02/10

Feladatok megbeszélése

92–93.

2020/02/11

Függvények: monotonitás, korlátosság.

563. Mi az alábbi kifejezés értelmezési tartománya?

$$\log_{x-2}(5x - x^2 - 4)$$

564. Egy mértani sorozat első 3 elemének összege 19, a harmadik eleme 5-tel nagyobb az elsőnél. Mekkora a sorozat kvóciense?

565. Egy számtani sorozat első 3 tagjának összege 45. Ha az első taghoz 2-t, a másodikhoz 3-at, a harmadikhoz 7-et adunk, akkor egy mértani sorozatot kapunk. Mi volt a számtani sorozat?

566. Oldd meg az alábbi egyenletet:

$$\log_4(x^2 - 2x + 1) + 2\log_4(2x) = 2.$$

Házi feladat:

94.

2020/02/12

Dolgozat

1. Egy számtani sorozat második, harmadik és negyedik tagjának az összege 105.
   Ha az első tagot eggyel növeljük, a másodikat eggyel csökkentjük, és a harmadikat szintén eggyel növeljük, akkor egy mértani sorozat egymást követő elemeit kapjuk.
   Mennyi a számtani sorozat 20. tagja?
2. Add meg az alábbi kifejezés értelmezési tartományát:

$$\log_{x+3}(2x^2 - 8x - 10)$$

3. Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\log_2(x-1) + \log_2(6x-10) = 2 \cdot \log_4(5x+1)$$

95.

2020/02/13

567. $\log_2 x + 2\log_x 2 = 3.$

568. Van-e olyan korlátos sorozat, amelyben nincs sem legnagyobb, sem legkisebb elem?

569. Legyen $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Mennyi a_{20}? Mennyi a sorozat első 100 tagjának az összege?

570. Tippeld meg, hogy hová „tart”?

   (a) $a_n = \frac{1}{n^2}$

   (b) $b_n = n^2 - n$

   (c) $c_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$

Házi feladat: **567–570.**

96.

2020/02/17

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

571. Tippeld meg, hogy hová „tart”?

(a) $a_n = \frac{2n+7}{n}$

(b) $b_n = \sqrt[n]{2}$

(c) $c_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^2$

(d) $d_n = n^2$ utolsó számjegye.

572. Léteznek-e olyan f függvények, amelyekre:

(a) $D_f = \mathbb{R}$ és $R_f =]-1;1[$

(b) $D_f = \mathbb{R}$ és $R_f = [-1;1]$

(c) $D_f = [0;1]$ és $R_f = \mathbb{R}$

Házi feladat: **569.** s_{100}**, 571., 572.**

97–98.

2020/02/18

573. Van-e olyan sorozat, amelyben minden természetes szám végtelen sokszor szerepel?

574. Oldd meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 3\log_3 x - 4\log_2 y &= 1 \\ 2\log_3 x + \log_2 y &= 8. \end{aligned}$$

575. Egy mértani sorozat első 4 tagjának összege 2, az első 8 tag összege 34. Mi a sorozat hetedik tagja?

Házi feladat: **572ac., 573.**

99.

2020/02/19

576. Tippeld meg, hogy hová „tart”?

   (a) $a_n = \frac{4n-7}{3n}$

   (b) $b_n = \sqrt[2n]{3}$

   (c) $c_n = \frac{2n+3}{n^2}$

577. $\log_2(3x-2) > 0$.

Házi feladat: **572c., 576., 577.**

Óra végi

1. Mértani sorozat első két tagjának összege 5, kvóciense 3. Mennyi a sorozat ötödik és hatodik tagjának összege?
2. Hova tart $a_n = \frac{n+2}{n}$?
3. Mit jelent az, hogy egy függvény alulról korlátos?
4. $\log_2 5 + \log_2 6 = \log_4 A$. Mennyi A?

100.

2020/02/20

Stabil házasságok
avagy
hogyan működik a felvételi pontszámok meghatározása

101.

2020/02/24

578. Próbálj definíciót találni arra, hogy egy sorozat tart egy számhoz.

579. (a) $\log_4(x^2+2x-3) > 2$

   (b) $\log_x(2x+6) > 0$

Házi feladat: **572c. (tangens befejezése), 578., 579.**

102–103.

2020/02/25

A sorozat határértékének definiciói.
Jelölés: $a_n \to A$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$
1) Minden $\varepsilon > 0$ esetén a sorozatnak csak véges sok tagja van az $]A-\varepsilon; A+\varepsilon[$ intervallumon kívül.
2) Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik N, hogy $n > N$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$.

580. Bizonyítsd be, hogy az $a_n = \frac{1}{n}$ sorozat 0-hoz tart.

581. Mi a határértéke a $b_n = \sqrt[n]{5} + \frac{2n^2-3n+1}{5n^2}$ sorozatnak?

582. $\log_{\frac{1}{2}}(5+2x) > 2$

583. Van-e olyan sorozat, amelyben minden pozitív racionális szám szerepel?

Házi feladat: **582., 583.**

104.

2020/02/26

584. Legyen $a_n = \frac{1}{n^2+1}$. Adjuk meg $\varepsilon = \frac{1}{200}$-hoz megfelelő N-et. Melyik a legkisebb N, ami megfelel?

585. Mi a határértéke az alábbi sorozatoknak?
   (a) $c_n = \frac{2n^2-7}{3n^2} + 4$
   (b) $d_n = n^2\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n}\right)$
   (c) $e_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2$

   sorozatnak?

586. Van-e olyan $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, amelynek nincs maximuma.

Házi feladat: **583., 585bc., 586.**

Óra végi

1. A határérték definíciója
2. Mihez tart: $\frac{6n^2+2n-4}{13n^2}$
3. $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) > 2$

105.

2020/02/27

Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n + b_n \to A + B$.
Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n \cdot b_n \to AB$.

Azt mondjuk, hogy $a_n \to \infty$, vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, ha
1) Minden K-ra a sorozatnak csak véges sok eleme van a $]K, \infty[$ intervallumon kívül.
vagy
2) Ha minden K-ra létezik N, hogy $n > N$ esetén $a_n > K$.

587. Van-e olyan sorozat, amelyben minden racionális szám szerepel?

588. Hogyan definiálnád azt, hogy egy sorozat ∞-hez tart?

Házi feladat: **586–588.**

106.

2020/03/02

Azt mondjuk, hogy $a_n \to -\infty$, vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, ha
1) Minden k-ra a sorozatnak csak véges sok eleme van a $]-\infty, k[$ intervallumon kívül.
vagy
2) Ha minden k-ra létezik N, hogy $n > N$ esetén $a_n < k$.

589. Definiáld azt, hogy $a_n \to -\infty$.

590. Legyen $a_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$. Adjuk meg $\varepsilon = \frac{1}{50}$-hez megfelelő N-et.

591. $\log_6 x \cdot \sqrt{\log_x 6x} = \sqrt{2}$.

Házi feladat: **591.**

107–108.

2020/03/03

Szóhasználat: konvergens, divergens, van határértéke, nincs határértéke, oszcillálva divergens.

592. Hová tartanak a következő sorozatok? Indokold is meg.

(a) $\frac{n-2+2n^2}{5n}$

(b) $\frac{n-3+3n^2}{4n^2}$

(c) $\left(2+\frac{3}{n}\right)\sqrt{5-\frac{1}{n^2}}$

(d) $\frac{(n+1)^2}{n} - \frac{n^2}{n+1}$

593. James bemegy a pittsburgh-i papírboltba tollat és jegyzetfüzetet vásárolni. A toll ára 3, a jegyzetfüzet ára 5 dollár. Ha 42 dollárt fizetett, akkor hány tollat vett?

594. Hová tart a következő sorozat

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2}$$

595. A b_n sorozatot az következő módon definiáljuk: $b_1 = 1$ és $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{b_n}$. Van-e a sorozatnak határértéke?

596. Konvergens-s a $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ sorozat?

597. Vizsgáld meg az $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozatot.

Házi feladat: **595–597.**

109.

2020/03/04

Az *e* szám definíciója.

598. Egy kerékpáros egy 90 km hosszú pályán állandó sebességgel elhalad az $\overline{AB}$ kilométerkő mellett. Egy óra múlva haladt el a $\overline{BA}$ kilométerkő mellett, és újabb egy óra múlva célba ért. Mennyi idő alatt tette meg a teljes távot?

599. Add meg a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{5}$

(b) $\frac{2n^2-3}{3n^2+n}$

Házi feladat: **598., 599.**

110.

2020/03/05

Beszélgetés a koronavírusokról, a CoViD-19-ről, és annak matematikai vonatkozásairól.

111.

2020/03/09

Részsorozat fogalma.
Konvergens sorozata részsorozatának a határértéke megegyezik a sorozat határértékével.

Dolgozat előtti megbeszélés

112–113.

2020/03/10

Dolgozat

1. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket
   (a) $\log_2(2x-7) > 5$.
   (b) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-x+3) > -2$.
   (c) $\log_x(2x-1) > 1$.
2. Van-e olyan felülről nem korlátos sorozat, amelynek nincs legkisebb eleme?
3. Van-e olyan f függvény, amelyre
   (a) $D_f = [0;3]$ és $R_f =]-1;2[$.
   (b) $D_f = [0;2]$ és $R_f = [0;\infty[$.
4. Határozd meg az alábbi sorozatok határértékét, indokold is meg az állításod:
   (a) $a_n = \frac{4n-2+3n^3}{5n^4}$
   (b) $b_n = \left(3-\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
   (c) $c_n = \frac{2n-3+4n^2}{7n^2-n}$
   (d) $d_n = \sqrt[3n+2]{7} + \sqrt{2+\frac{1}{n}}$

114.

2020/03/11

Dolgozat feladtainak megbeszélése

115.

2020/03/12

600. Az iskolai sakkbajnokságon mindenki pontosan egyszer játszott mindenkivel. Amikor 42 partit lejátszottak, akkor még mindenkinek 4 volt hátra. Hányan szerepeltek ezen a bajnokságon?

601. Ábrázoljuk a következő függvényeket:

   (a) $f(x) = |x+2| + |x-1|$, a $[-2; 1]$ intervallumon;

   (b) $g(x) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)\sin x \cos x$, a $[-\pi; \pi]$ intervallumon;

   (c) $h(x) = \log_{2013} x \cdot \log_x 2014 \cdot \log_{2014} 2013$, a $]0; 3]$ intervallumon.

602. Oldjuk meg az egyenletet, ahol n tetszőleges, 1-nél nagyobb, pozitív egész szám:

$$\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2+2x-3} + \ldots + \sqrt{x^2+nx-(n+1)} = 0.$$

603. Írd fel annak a körnek az egyenletét, amelyre illeszkedik az $A(-7; 5)$ pont, továbbá az $(x-2)^2+(y-3)^2 = 17$ egyenletű kört az $E(-2; 2)$ pontban érinti.

Házi feladat: **601bc., 602., 603.**

Feladatok járvány idejére

604. Add meg az összes $\overline{aabb}$ alakú négyzetszámot.

605. Oldd meg a következő egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:

$$3^{3x-1} = 2y^3 - 11y - 693$$
$$x = \log_3(y+1)$$

606. Add meg rövid indoklással az alábbi sorozatok határértékét:

(a) $a_n = \frac{\sqrt[2n]{31}+2}{3\sqrt[n+2]{5}}$

(b) $b_n = \frac{2}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \frac{6}{n^3} + \ldots + \frac{2n}{n^3}$

607. Legyen

$$a_n = \frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^4} + \frac{3}{n^4} + \ldots + \frac{n^2}{n^4}.$$

Mi a sorozat határértéke?

608. Mekkora az ABC háromszög körülírt körének a területe, ha $A(8;-2)$, $B(1;1)$, $C(4;-2)$?

609. Oldd meg a következő egyenleteketek a valós számok halmazán:

(a) $\cos 2x + 5\sin x + 2 = 0$

(b) $2\log_5 x - \frac{3}{\log_5 x} = 5$

610. Hány csúcsa van annak a konvex sokszögnek, aminek 250-nel több átlója van, mint oldala?

611. A p paraméter milyen értékeire lesz a

$$x^2 - 3px + 2p^2 - p - 1 = 0$$

egyenletnek

(a) gyöke az 5?

(b) egyetlen valós gyöke?

612. A középszintű érettségi második részében általában van három 12 pontos feladat és három 17 pontos. Az utóbbi háromból választani kell kettőt. Hányféle sorrendben lehet megoldani ezt az 5 feladatot a vizsga során?

613. Mi a határértéke az alábbi sorozatoknak?

(a) $a_n = \frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^3} + \frac{5}{n^3} + \ldots + \frac{2n-1}{n^3}$

(b) $b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$

614. Add meg p értékét, ha tudjuk, hogy az

$$x^2 + y^2 - 8x - 8y + p^2 = 0$$

egyenletű kör az origóból 60°-os szögben látszik.

615. Mekkorák annak az egyenlőszárú háromszögnek a szögei, amelynek az alaphoz tartozó magasságának, alapjának és a szárának a hosszai ebben a sorrendben egy számtani sorozatot alkotnak?

616. Egy hajó 600 utasa között van egy koronavírus-fertőzött. A hajón egy PCR készülék van, amelyekkel tesztelni lehet az utasokat. Csoportos mintát is lehet tesztelni, ami azt jelenti, hogy egyszerre több ember nyálmintáját lehet megvizsgálni, és a vizsgálat megmutatja, hogy fertőzött-e a minta. (Azt persze nem, hogy a vizsgált csoport tagjai közül pontosan ki fertőzött.) Egyszerre legfeljebb 30 ember mintáit lehet vizsgálni egy vizsgálattal. Egy vizsgálat 3 óráig tart. Mennyi idő alatt tudjuk garantáltan megtalálni a fertőzött utast?

617. Számítsd ki a háromszög körülírt körének sugarát, ha tudjuk, hogy

(a) $a = 10$, $\alpha = 30^{o}$;
(b) $a = 18$, $\alpha = 125^{o}$.

618. Írd fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely a-ban metszi az x, és b-ben az y tengelyt.

619. Az a_n sorozat elemeire teljesül, hogy $a_n = 2a_{n+1} - a_{n+2}$, illetve $a_3 + a_7 = 12$. Mennyi a sorozat első 9 tagjának az összege?

620. Oldd meg a

$$\sin^2 x = 1 - \sin x \cos x$$

egyenletet a $[0; 2\pi]$ intervallumon.

621. Két konvex sokszög közül az elsőnek 540-nel több átlója van, mint a másodiknak, és az elsőnek 3-szor annyi csúcsa van, mint a másodiknak. Hány csúcsuk van a sokszögeknek?

622. Adott a következő 3 egyenes:

$$\begin{aligned} e &: x + 3y = 7 \\ f &: 3x - y = -7 \\ g &: 3x + 4y = 8. \end{aligned}$$

(a) Bizonyítsd be, hogy a három egyenes derékszögű háromszöget határoz meg.
(b) Milyen messze van a derékszögű csúcs a szemközti oldal felezőpontjától?
(c) Mekkora a háromszög beírt körének sugara?

623. Összeadtuk a $2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{99}, 2^{100}$ számok x alapú logaritmusát és 10 100-at kaptunk. Mennyi x értéke?

624. Hány páratlan osztója van 2020^3-nek?

625. Az ABC háromszög csúcspontjai $A(-1; -2)$, $B(5; -2)$, $C(4; 3)$. Milyen messze van egymástól a háromszög súlypontja és magasságpontja?

626. Egy bűvész 3 végtelen részre osztotta a pozitív egész számokat és a következő trükköt mutatta be: kihív egy nézőt, akit megkér, hogy húzzon ki két számot valamelyik részből, adja össze őket és mondja meg az eredményt. A bűvész pedig megmondja, hogy melyik részből húzta a számokat.
Meg tudod-e te is csinálni a trükköt?

(b) Meg tudod-e csinálni úgy, hogy 4 végtelen részre osztod a számokat?

627. Oldd meg a $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8x + 12) > -5$ egyenlőlenséget a valós számok halmazán.

628. Mennyi az alábbi sorozatok határértéke?

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}+5\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2-1}$

629. Léteznek-e olyan a_1, a_2, a_3, a_4 pozitív egész számok, amelyeknek nincs 1-nél nagyobb közös osztója (vagyis olyan szám, ami mind a négy számot osztja), de bármely kettőnek van közös osztója?

(b) Minden n-re meg lehet adni n számot a fenti tulajdonsággal?

630. Milyen n-re igaz, hogy

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_n(n+1) = 7$$

631. Egy mértani sorozat első három tagjának összege 22, az első három tag reciprokösszege $\frac{7}{18}$. Mennyi az első 3 tag szorzata?

632. Egy egyenlőszárú háromszög kerülete 221 cm, két oldalának aránya $3 : 7$. Mekkorák az oldalai?

(b) Mi a helyzet, ha a két oldal aránya $2 : 3$?

633. Egy szabályos sokszög átlóinak száma 115-nél nagyobb, de 140-nél kisebb. Mekkora a sokszög belső szögeinek összege?

634. Milyen hosszú az egység oldalú kocka testátlója?

635. Milyen hosszú annak a téglatestnek a testátlója, amelynek oldalélei 3, 4, 12 hosszúak?

636. Legyen $k_1 : x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$ és $k_2 : x^2 + y^2 - 16x + 6y + 53 = 0$ körök. Milyen távolságra van egymástól a két kör két legtávolabbi pontja?

637. Fel lehet-e darabolni egy kockát 15 kockára? És 36-ra? És 53-ra?

638. Tekintsük egy téglatest éleire illeszkedő egyeneseket. Hány kitérő egyenespár van közöttük?

639. Hány részre oszthatja a teret 3 különböző sík?

640. Oldd meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:

(a) $\sqrt{x+12} + \sqrt{x-12} = 6$;

(b) $3^{\lg x^2} + 3^{1+\lg x} = 108$.

641. Egy számtani és egy mértani sorozat első tagja egyaránt 2. A sorozatok második tagjai szintén egyenlők, és a számtani sorozat differenciája megegyezik a mértani sorozat hányadosával.

(a) A mértani sorozat tizedik tagja hányadik tagja a számtani sorozatnak?

(b) Elő lehet-e állítani a mértani sorozat valamelyik tagját a számtani sorozat egynél több szomszédos tagjának összegeként?

642. Egy 80 lapos kártyapakliban minden lapon egy piros vagy egy kék írásjel van. A jelek 30%-a kérdőjel, 45%-a felkiáltójel, a többi pont. A piros írásjelek 3/8 része, a kékeknek 1/6 része pont.

(a) Hány kék, illetve piros lap van a pakliban?

Ha a játék során tíz alkalommal húzunk a pakliból (a húzott lapokat visszatesszük, és a kártyákat megkeverjük), mekkora a valószínűsége, hogy

(b) egy kérdőjelet sem húzunk;

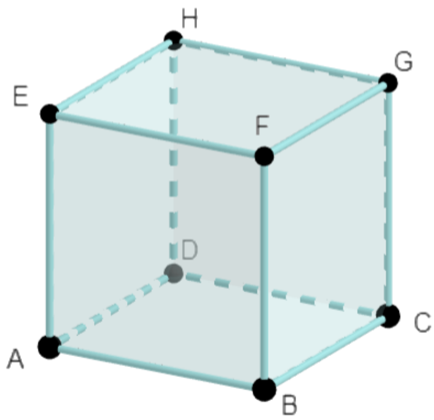
(c) 2-nél több kérdőjelet húzunk?

643. Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{2\cos x + 4\sin x}{\cos x + \sin x} = 2\operatorname{tg} x + 1.$$

Térelemek.
Térelemek szöge, térelemek távolsága.
Mikor merőleges egy egyenes egy síkra.

Mostantól egy kockát csúcsait mindig így jelöljük, ha nem mondunk ettől eltérőt:



644. Adott egy szokásos kocka. Mekkora a szöge

(a) az AB és a BG egyeneseknek;

(b) az AD és a BG egyeneseknek;

(c) az AG és a BC egyeneseknek;

(d) az AG egyenesnek és az FBC síknak?

645. Adott egy 3 egység oldalhosszúságú kocka. Mekkora a távolsága

(a) az A pontnak és a DC egyenesnek;

(b) a B pontnak és a GH egyenesnek;

(c) a B pontnak és az AG egyenesnek;

(d) az A pontnak és az FDH síknak?

646. Egy $ABCDEFGH$ téglatest (a szokásos jelöléssel) éleinek hossza: $|AB| = 4, |AD| = 6, |AE| = 3$. Add meg a következő távolságokat:

(a) $d(A, e_{BH})$;

(b) $d(A, S_{BFHD})$.

647. Egy dobókockával 7-szer dobunk. Mi a valószínűsége, hogy 3-szor dobunk négyzetszámot?

648. Mi a valószínűsége annak, hogy a lottószámok között pontosan 2 páros szám van?

649. Mit válaszolnál arra a kérdésre, hogy ha egy dobókockával dobunk, akkor várhatóan mennyit fogunk dobni? Hogy lehetne értelmezni ezt a kérdést?
És ha a dobókockán 3 darab 1-es, 2 darab 3-as és 1 darab 6-os van?

650. Van-e olyan test a kockán kívül, amelynek minden lapja négyzet?

651. Egy kockával háromszor dobunk. Mennyi a 2-es dobások számának várható értéke?

Eloszlás. Várható érték.

652. Két dobókockával dobunk. Add meg a két dobott szám szorzatának eloszlását.

653. Két dobókockával dobunk. Mennyi a két dobás összegének várható értéke?

Poliéder.

654. Írd fel legalább 5 különböző poliéder esetén a csúcsok, élek és lapok számát.Észreveszel-e bármilyen összefüggést?

Euler-féle poliédertétel:
$$c + l = e + 2.$$

Szabályos testek.
Hengerszerű és kúpszerű testek.

655. Mekkora egy kockába beírható és körülírható gömb sugarának aránya?

656. Egy speciális lottón 10 számból húznak 3-at. Egy szelvénnyel játszunk, mekkora a találatok számának várható értéke?

657. Mekkora az egységoldalú szabályos tetraéder magassága és lapszöge?

658. Mekkora szöget zár be egy szabályos tetraéder éle egy olyan lapjával, amelyre nem illeszkedik?

659. Egy céllövöldében 15% valószínűséggel találjuk el a kiszemelt célpontunkat. 1000 Ft-ért 5-öt lehet lőni, és minden tárgy értéke 1200 Ft. Érdemes-e próbálkozni?

$B(n, p)$ binomiális eloszlás várható értéke np.

660. Egy test egyenes vonalú mozgást végez, a t időpillanatban t^2 távolságra van a kiindulási pontjától. Mekkora a pillanatnyi sebessége $t = 1$ időpillanatban?

   (b) Mennyi a sebessége a $t = 2$ és $t = 5$ időpillanatokban?

661. Az előző feladathoz hasonlóan a test egyenes vonalú mozgást végez. De most a t időpillanatban t^3 távolságra van a kiindulási ponttól. Mekkora a sebessége az indulás után 2 másodperccel?

662. Egy oktaéder lapjaira számokat írtunk: 1, 2, 4, 6, 9, 10, 15, 21. Az oktaéderrel 10-szer dobunk. Mi a négyzetszám dobások számának várható értéke?

663. Mekkora az egységélű szabályos tetraéderbe írt gömb sugara? És a köré írt gömbbé?

664. Egy test egyenesvonalú mozgást végez, a t időpillanatban a t^2+t pontban található. Mekkora a sebessége $t = 3$ és $t = 5$ időpillanatokban?

665. Egy magyarkártyapakliból véletlenszerűen húzunk 3 lapot. Mi a valószínűsége annak, hogy húzunk zöldet? Mi a kihúzott zöld lapok számának várható értéke?

666. Adott egy kocka, amelynek élhosszúsága 4. Mekkora annak a gömbnek a sugara, amely a kocka minden élét érinti?

667. Egy közvélemény-kutatás kérdéseire az első hónapban 700 ember válaszolt, mindenki pontosan egyet választott a felkínált 3 lehetőségből. A feleletek aránya $4 : 7 : 14$ volt. Ezután még néhány ember részt vett a közvélemény-kutatásban, így a feleletek aránya $6 : 9 : 16$ lett. Legkevesebb hány ember válaszolt utólag a kérdésekre? Ebben az esetben melyik lehetőséget hányan választották?

668. Egy mosogatógépnek 3 programja van. Egy mosogatáshoz az A program 30%-kal több elektromos energiát, viszont 20%-kal kevesebb vizet használ, mint a B program. A B program 15%-kal kevesebb elektromos energiát, de 25%-kal több vizet használ, mint a C program. Mindhárom program futásakor 50 Ft-ba kerül a mosogatószer. Egy mosogatás az A programmal 165, a B programmal 150 Ft. Mennyibe kerül egy mosogatás a C programmal?

669. Hányféleképpen húzhatunk ki a 32 lapos magyar kártyából 6 lapot úgy, hogy legyen köztük pontosan két piros, két zöld és két ász?

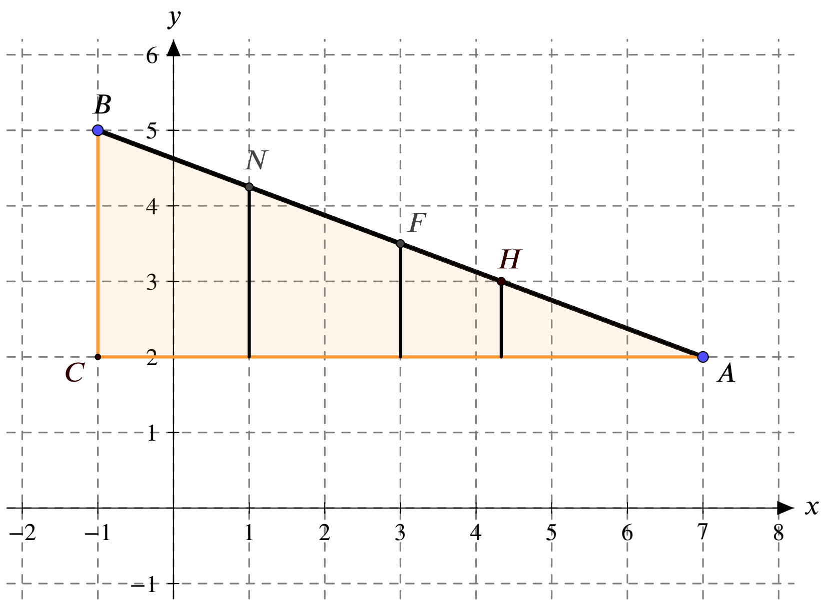
670. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hatoslottón (45 számból húznak 6-ot) a számokat növekvő sorrendbe rakva számtani sorozatot kapunk?

671. (a) Hányféleképpen állítható elő a 2016 szomszédos egész számok összegeként?

   (b) Adj meg olyan 2016-nál nagyobb számot, amely nem írható fel egynél több szomszédos egész szám összegeként.

Megoldások

409. Az első 3 feladatrészben felhasználhatjuk a párhuzamos szelők tételét.



(a) Ez alapján világos, hogy a felezőpont koordinátái a végpontok x, illetve y koordinátáinak számtani közepei, azaz:

$$F\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right).$$

Ez jelen esetben azt jelenti, hogy $F(3; 3,5)$.

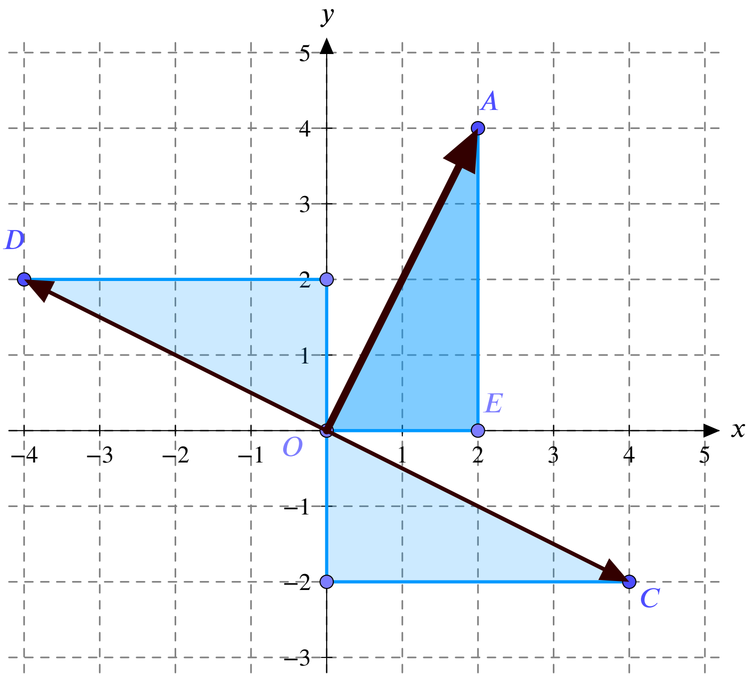
(b) A harmadolópont már nehezebb kérdés. Legyen a H pont merőleges vetülete az AC szakaszra P. Mivel H harmadolópont, ezért AP hossza harmada AC hosszának. Ez utóbbi 8, ezért $AP = \frac{8}{3}$. Mivel A x koordinátája 7, ezért P x koordinátája $7 - \frac{8}{3}$. De ez egyben H x koordinátája is, hiszen a HP szakasz függőleges. Ebből következik, hogy H x koordinátája $4\frac{1}{3}$.

Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy az y koordináta 3. Tehát $H\left(4\frac{1}{3}; 3\right)$

(c) Az N pont az FB szakasz felezőpontja, és ennek a szakasznak mindkét végpontját ismerjük. Alkalmazhatjuk tehát azt, amit az a) részben észrevettünk, és azt kapjuk, hogy $N(1; 4,25)$.

(d) Tekintsük a lenti ábrát és az ábrán látható derékszögű háromszögeket. Az A pontba vektor esetén az AOE háromszög két befogója megadja a vektor (és A) két koordinátáját. A $+90^\circ$-os és a -90°-os elforgatások során ezek a háromszögek is elfordulnak, így a kapott háromszögek egybevágóak az eredetivel. Emiatt a koordináták felcserélődnek és az egyikük a -1-szeresére változik.

Vagyis $\underline{h^+}\left(-3; 4\frac{1}{3}\right)$, míg $\underline{h^-}\left(3; -4\frac{1}{3}\right)$.



410. Mi a helyzet, ha csak egy gól esik a meccsen? Akkor nyilván csak két lehetőség van, 0-0 után 1-0 vagy 0-1 lesz a végeredmény.
Ha két gól esik összesen, akkor nem sok minden változik, mert ugyanezen két eset marad, csak 1-1 lesz a végeredmény.
Ha három gól esik, akkor 1-1-ig lehet kétféle, és aztán is kétféle (2-1 vagy 1-2). Ez összesen $2 \cdot 2 = 4$ lehetőség.
Általánosságban elmondható, hogy az első gól szerzőjére két lehetőség van, és az meghatározza a második gól szerzőjét, a harmadik gól szerzőjére ismét két lehetőség van, és ez meghatározza a negyedik gól szerzőjét. Ezek a lehetőségek egymástól függetlenek, tehát dönthetünk, hogy az 1., 3., 5., 7., 9. és 11. gólt ki szerzi. Ez meghatározza a mérkőzés teljes lefolyását. Vagyis a lehetőségek száma: $2^6 = 64$.

411. Nem. Ha két köbszám hényadosa egész szám, akkor a hányados is köbszám. Hiszen az osztandó prímtényezős felbontásában minden kitevő osztható 3-mal, az osztóban is, ezért a hányadosban is, hiszen azokat a kitevők kivonásával kapjuk. Mivel két 3-mal osztható szám különbsége is 3-mal osztható, ezért a hányados is köbszám. De 5400 osztható 25-tel, és nem osztható 125-tel, ezért nem lehet köbszám.

412. Igen. Vegyünk egy rombuszt, amelynek minden oldala 100. Ekkor egyik átlója sem lehet 200-nál nagyobb. Csökketnsük az egyik átlót úgy, hogy $\frac{1}{100}$-nál kisebb legyen, ekkor a négyszög területe kisebb lesz, mint 1.

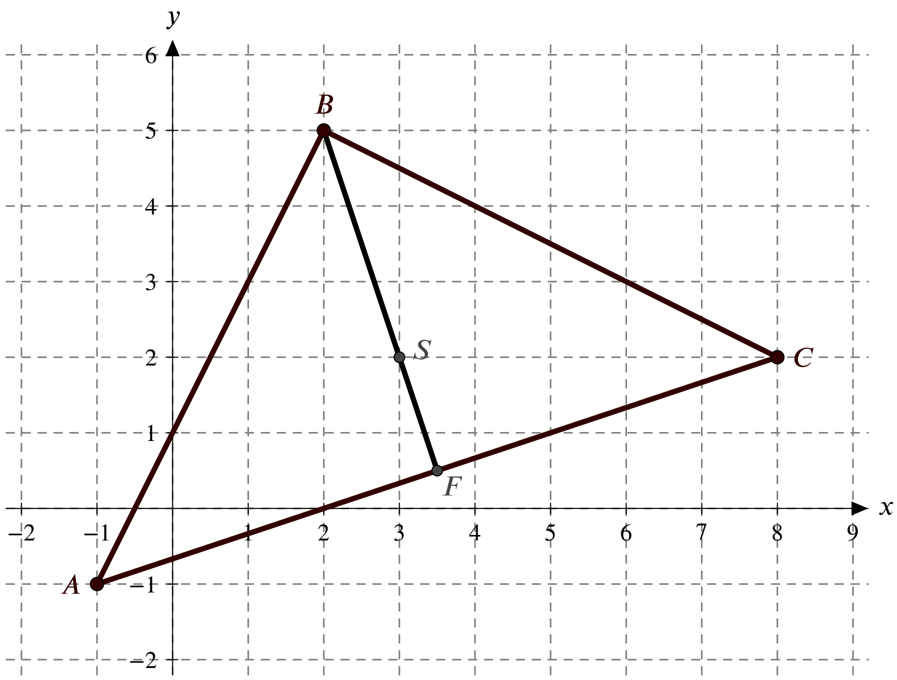
413. Tekintsük az alábbi ábrát:

414. Van ilyen szám.
Legyen a szám n. Tudjuk, hogy $2n$ négyzetszám, vagyis a prímtényezős felbontásában minden kitevő páros. Ebből következik, hogy n felbontásában minden kitevő páros, kivéve a 2 kitevője, ami páratlan. Hasonlóan, abból, hogy $3n$ köbszám, az következik, hogy $3n$-ben minden kitevő 3-mal osztható, vagyis n-ben is minden kitevő osztható 3-mal, kivéve a 3 kitevőjét, ami 3-mal osztva 2 maradékot ad.
Ezek alapján n-ben a 2 kitevője egy páratlan szám, ami osztható 3-mal. Ilyen pl. a 3. A 3 kitevője egy páros szám, ami 3-mal osztva 2 maradékot ad. Ilyen például a 2. Ezek alapján a legkisebb ilyen pozitív

szám a $2^3 \cdot 3^2 = 72$.

Ha olyan számot akarunk, aminek a felbontásában nem csak 2 és 3 szerepel, akkor a többi prím kitevőjének 6-tal oszthatónak kell lennie. Vagyis végtelen sok megfelelő szám van, pl. a következők: $2^9 \cdot 3^2, 2^9 \cdot 3^{20}, 2^{27} \cdot 3^{80} \cdot 17^{600}$.

415. Nézzük az ábrát:



416. Nincs.

Ha a kétszerese négyzetszám, akkor a szám prímtényezős felbontásában 2 kitevője páratlan. De mit jelent az, hogy a 4-szerese teljes negyedik hatvány? Azt, hogy ha 4-gyel megszorozzuk, akkor a kapott szám prímtényezős felbontásában a 2 kitevője (és a többi prímé is) osztható 4-gyel. A 4-gyel szorzás 2-vel növeli a kitevőt, vagyis eredetileg egy 4-gyel osztva 2 maradékot adó szám volt a kitevő. Ez viszont ellentmondás, hiszen ez páros szám.

417. Legyen a megfelelő pont L. Számítsuk ki először az x koordinátáját. Tudjuk, hogy ez a szakasz x tengelyre merőleges vetületét is $p : q$ arányban osztja. A koordinátákból látható, hogy a merőleges vetület 7 (9 − 2) hosszú. Az osztópont a szakaszt két részre osztja, az egyik $7\frac{p}{p+q}$, a másik $7\frac{q}{p+q}$ hosszú. Vagyis L x koordinátája $2 + 7\frac{p}{p+q}$.

Ha a 7 helyére az eredeti kooridnáták különbségét írjuk, akkor azt kapjuk, hogy L x koordinátája:

$$x_L = 2 + (9-2)\frac{p}{p+q} = 2\frac{p+q}{p+q} + (9-2)\frac{p}{p+q} = \frac{2q+9p}{p+q}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy az y koordináta pedig:

$$y_L = \frac{6q+3p}{p+q}.$$

Ezek alapján általánosan is felírhatjuk az $A(x_A, y_A)$ és $B(x_B, y_B)$ pontok által meghatározott szakasz L osztópontját, ami $p : q$ arányban osztja a szakaszt:

$$L\left(\frac{q \cdot x_A + p \cdot x_B}{p+q}; \frac{q \cdot y_A + p \cdot y_B}{p+q}\right).$$

418. A kifejezésünk $f(x) = x^2 - (p+2)x + 4$.

(a) Akkor van egy másodfokú kifejezésnek egy valós gyöke, ha a diszkriminánsa 0. Vagyis

$$\begin{aligned} D = (p+2)^2 - 16 &= 0 \\ (p+2)^2 &= 16 \\ |p+2| &= 4 \end{aligned}$$

Vagyis $p+2=4$, azaz $p=2$, vagy $p+2=-4$, vagyis $p=-6$.

(b) Ha az egyik gyök 1, akkor az azt jelenti, hogy $f(1)=0$. Vagyis $1^2-(p+2)+4=0$. Tehát: $p=3$.

(c) A két gyök összegét az x-es tag együtthatója mutatja. A mostani esetben $p+2=1$. De óvatosnak kell lennünk, mert hajlamos az ember itt befejezni a megoldást. Ellenőriznünk kell azonban, hogy van-e ilyenkor tényleg két gyök. És a mostani esetben nincs. Tehát nincs megfelelő p.

(d) (f két gyökének szorzata 4?)

(e) (minden x-re $f(x) < 0$?)

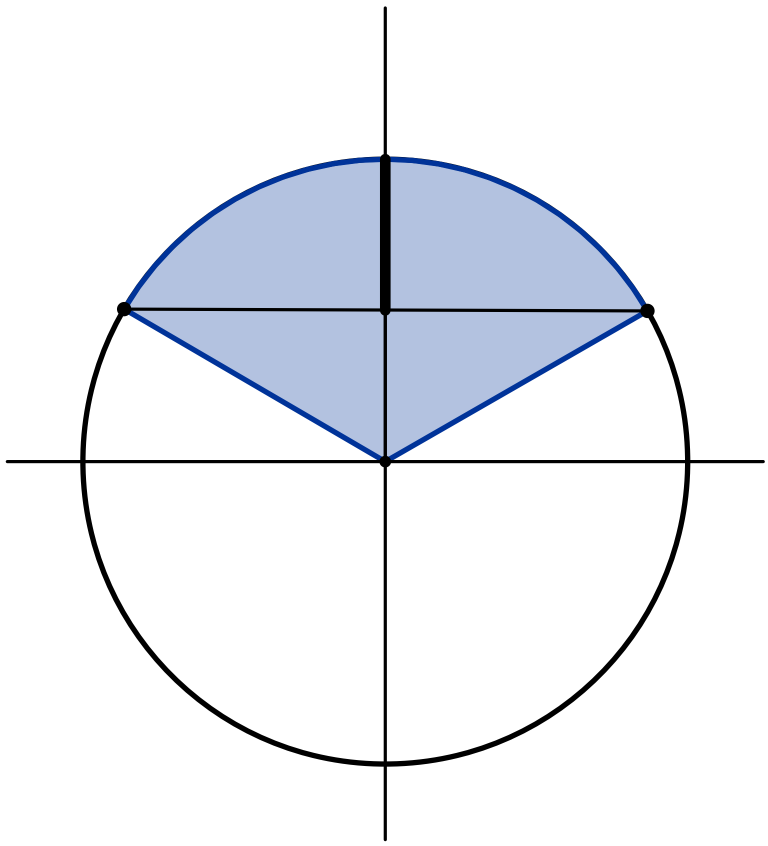
(f) (minden x-re $f(x) > 0$?)

419. (a) $\cos x < 1$

Tudjuk, hogy $-1 \leq \cos x \leq 1$. Vagyis a fenti egyenlőtlenség mindig teljesül, kivéve ha $\cos x = 1$. Ez pedig éppen akkor teljesül, ha $x = 2k\pi$. A megoldás tehát: $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) $\sin x > \frac{1}{2}$

Nézzük az alábbi ábrát:



Ezek alapján jól látható, hogy egy szög szinusza akkor lesz nagyobb $\frac{1}{2}$-nél, ha a kék tartományban van. Ekkor a két határoló szög az ábrán: 30° és 150°, azaz $\frac{\pi}{6}$ és $\frac{5\pi}{6}$. Vagyis az egyenlőtlenség megoldása:

$$30^\circ + k\cdot 360^\circ < x < 150^\circ + k\cdot 360^\circ,$$

ahol $k\in\mathbb{Z}$, illetve radiánban számolva:

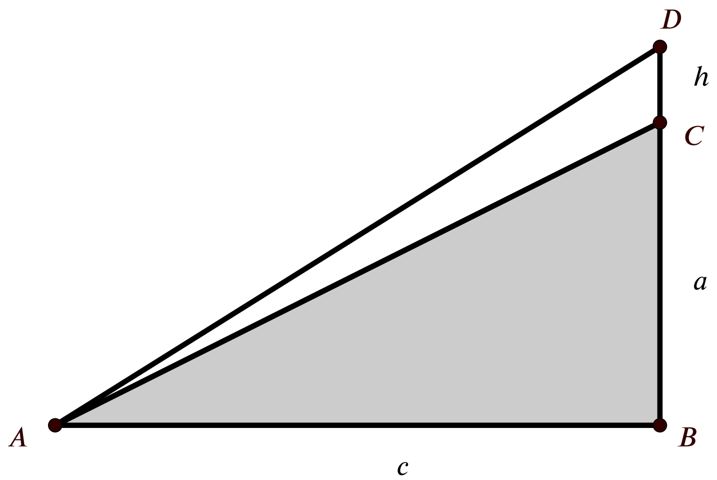
$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

420. Nézzük a 4200 prímfelbontását: $4200 = 2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 7$.

(a) Ahhoz, hogy a szám négyzetszám legyen, minden kitevőnek párosnak kell lennie. Mivel a legkisebb ilyen számot keressük, ezért $2\cdot 3\cdot 7 = 42$-vel kell megszorozni a 4200-at.

(b) Most minden kitevőnek 3-mal oszthatónak kell lennie, hiszen egy szám pontosan akkor köbszám, ha a prímtényezős felbontásában minden kitevő osztható 3-mal. A legkisebb szám, amivel ez elérhető: $3^2\cdot 5\cdot 7^2 = 2205$.

421. Nézzük az alábbi ábrát:



Tudjuk, hogy $AC = 150$, $CAB\sphericalangle = 15^\circ$, illetve $DAC\sphericalangle = 3^\circ$.
Ekkor $c = 150\cdot\cos 15^\circ$, és $a = 150\cdot\sin 15^\circ$.
Azt is tudjuk, hogy $\frac{a+h}{c} = \operatorname{tg} 18^\circ$, vagyis $a + h = c\cdot\operatorname{tg} 18^\circ = 150\cdot\cos 15^\circ\cdot\operatorname{tg} 18^\circ$.
Vagyis $h = (a+h) - a = 150\cdot\cos 15^\circ\cdot\operatorname{tg} 18^\circ - 150\cdot\sin 15^\circ \approx 8,25$.
A szobor tehát kicsit több, mint 8 méter magas.

422. Két megoldást is mutatunk, mindkettő tanulságos. Induljunk ki az eredeti egyenletből:

$$\sqrt{x^2+6x+9} - x = 1.$$

Az első esetben rendezzük át az egyenletet:

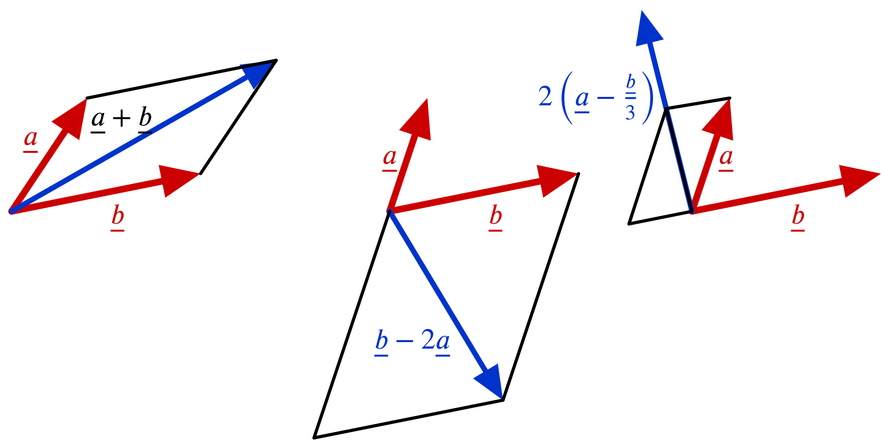
$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+6x+9} &= x+1\\ x^2+6x+9 &= (x+1)^2\\ x^2+6x+9 &= x^2+2x+1\\ 4x &= -8\\ x &= -2.\end{aligned}$$

Mivel a lépések során négyzetre emeltünk, ezért fennáll a veszélye annak, hogy hamis gyököt is kaptunk. Ellenőrizzük, hogy a -2 megoldás-e. Behelyettesítve látjuk, hogy nem, hiszen a bal oldal értéke 3, nem 1. Vagyis az egyenletnek nincs megoldása.
A második esetben vegyük észre, hogy a gyökjel alatt egy teljes négyzet található.

$$\sqrt{(x+3)^2} - x = 1$$
$$|x+3| - x = 1$$

Könnyen eshet az ember abba a hibába, hogy $\sqrt{(x+3)^2}$ helyett $(x+3)$-at ír, de ez nem helyes. Csak akkor igaz, hogy ez a két kifejezés egyforma értéket ad, ha $x+3 \geq 0$. Az abszolút értékes kifejezés miatt két részre bonthatjuk az egyenlet megoldását.
1. $x+3 \geq 0$. Ekkor $|x+3| = x+3$, vagyis azt kapjuk, hogy $3 = 1$, vagyis ezen az ágon nincs megoldás.
2. $x+3 < 0$. Ekkor $|x+3| = -x-3$, vagyis azt kapjuk, hogy $-2x = 4$, azaz $x = -2$. Azonban ez sem megoldás, hiszen ezen az ágon az volt a feltevésünk, hogy $x+3 < 0$, azaz $x < -3$.
Egyik ágon sem kaptunk megoldást, vagyis az egyenletnek nincs megoldása.

423. Az alábbi ábrán láthatóak a megoldások:



424.

425. Nevezzük el az x^2+3x-et mondjuk y-nak.

$$x^2+3x+\sqrt{x^2+3x+9} = 27$$
$$y+\sqrt{y+9} = 27$$
$$\sqrt{y+9} = 27-y$$
$$y+9 = (27-y)^2$$
$$y^2-55y+720 = 0.$$

Ha megoldjuk ezt az egyenletet y-ra, akkor két gyököt kapunk. Az egyik gyök nagyobb lesz, mint 27, ami hamis gyök, hiszen a $\sqrt{y+9} = 27-y$ egyenlet bal oldalán negatív szám lesz.
Csak a 27-nél kisebb gyökkel kell több számolnunk, és azt felhasználva, az $y = x^2+3x$ egyenletet megoldva két gyököt kapunk x-re.

426. Négyet igen. Pl.: 1, 2, 3, 4.
Ötöt nem. 4-gyel osztva egy szám osztási maradéka 4-féle lehet: 0, 1, 2, 3. Ha 5 számunk van, akkor

a skatulyaelv miatt van legalább kettő, amelyeknek ugyanaz a 4-es maradéka. Ennek a két számnak a különbsége biztosan osztható lesz 4-gyel.

427.

428. Kicsit rendezzük át az egyenletet:

$$
\begin{aligned}
2\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= 1\\
\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Tudjuk tehát, hogy $x+\frac{\pi}{2}$ szinusza éppen $\frac{1}{2}$. Vagyis

$$
\begin{aligned}
x+\frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{6}+2k\pi,\\
x+\frac{\pi}{2} &= \frac{5\pi}{6}+2n\pi,
\end{aligned}
$$

ahol $k, n \in \mathbb{Z}$. Ebből viszont következik, hogy az egyenletünk megoldásai:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-\pi}{3}+2k\pi,\\
x &= \frac{\pi}{3}+2n\pi,
\end{aligned}
$$

ahol $k, n \in \mathbb{Z}$.

429. Osszuk fel a céltáblát 4 egybevágó négyzetre. Ezek oldalhossza 10 egység. MIvel 4 négyzetünk van, ezért a skatulyaelv miatt biztoan lesz olyan négyzet, amelyben legalább 2 pont van. Egy négyzetben a lehetséges legnagyobb távolság az átló, aminek esetünkben $10\sqrt{2}$ a hossza, ami kisebb 15, vagyis mindig lesz két olyan pont, amelyek távolsága legfeljebb 15.

430.

431. (a) $\underline{b}+\underline{d}$
(b) $\underline{d}+\underline{e}$
(c) $\underline{b}-\underline{d}-\underline{e}$

432. A több lehetséges megoldás közül egy: adjunk az egyenlet minkét oldalához 6-ot, és legyen $y = x^2+x+7$.

$$
\begin{aligned}
x^2+x+1+\sqrt{x^2+x+7} &= 6\\
x^2+x+7+\sqrt{x^2+x+7} &= 12\\
y+\sqrt{y} &= 12\\
\sqrt{y} &= 12-y\\
y &= y^2-24y+144\\
z^2-25y+144 &= 0.
\end{aligned}
$$

Ennek az egyenletnek két megoldása van: $y_1 = 9$ és $y_2 = 16$. Ez utóbbi hamis gyök, hiszen $\sqrt{y} = 12-y$ egyenletben a jobb oldal negatív érték lenne.
Tehát $x^2+x+7 = 9$, amiből azt kapjuk, hogy $x_1 = 1$ és $x_2 = -2$.

433.

434. Az AB szakasz felezőpontja legye F. Tudjuk, hogy az ebbe mutató vektor: $\underline{f} = \frac{\underline{a}+\underline{b}}{2}$. Azt is tudjuk, hogy az S pont az FC szakasz F-hez közelebbi harmadolópontja, és tudjuk, hogy ez a két végpontba mutató vektor $1 : 2$ arányú súlyozott közepe. Vagyis:

$$\underline{s} = \frac{2}{3}\frac{\underline{a}+\underline{b}}{2} + \frac{1}{3}\underline{c} = \frac{\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}}{3}.$$

435. Tudjuk, hogy $x^2 + 1 \geq 1$, és $-1 \leq \sin x \leq 1$. Vagyis csak akkor lehet egyenlő az egyenlet két oldala, ha mindkettő 1. Ha $x^2 + 1 = 1$, akkor $x = 0$, de ekkor a jobb oldal 0. Vagyis az egyenletnek nincs megoldása.

436. Vegyük észre, hogy a harmadfpkú polinomnak gyöke az 1 (hiszen az együtthatók összege 0). Akkor ki lehet emelni $(x-1)$-et. Ekkor $x^3 + x^2 - 10x + 8 = (x-1)(x^2 + 2x - 8)$. Már csak a másodfokú egyenlet gyökeit kell meghatároznunk. Mivel $x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x+4)$, így az eredeti egyenletnek 3 gyöke van: $-4, 1, 2$.

437. Osszuk fel a téglalapot 2×2-es négyzetekre. Ilyenből 12 van, így ha 13 pontunk van a téglalapban, akkor van legalább egy olyan négyzet, amelyben legalább két pont van. Egy 2-oldalú négyzetben az átló a legnagyobb távolság, vagyis tetszőleges két pont távolsága legfeljebb $2\sqrt{2}$, ami kisebb, mint 3. Így az állítást beláttuk.

438.

439. Rendezzük az egyenletet:

$$3\cos x + 2 = \sqrt{2}$$
$$\cos x = \frac{\sqrt{2}-2}{3}.$$

Vagyis a $[0, 2\pi]$ intervallumon két gyöke lesz az egyenletnek: $x = \pm\arccos\left(\frac{\sqrt{2}-2}{3}\right)$.

Vagyis az egyenlet összes megoldása: $x = \pm\arccos\left(\frac{\sqrt{2}-2}{3}\right) + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

440.

441.

442. Nem. Nézzük milyen jellegű mennyiség áll a bal, illetve a jobb oldalon. Két vektor skalárois szorzata egy valós szám, ezért mindkét oldalon egy vektor áll. Bal oldalon $\underline{c}$ skalárszorosa, a jobb oldalon pedig $\underline{a}$ skalárszorosa. Ha ez a két vektor nem egyirányú, akkor lehetetlen, hogy ez a két vektor megegyezzen. Tehát a skaláris szorzás nem asszociatív. (Speciális esetekben előfordulhat, hogy a két mennyiség megegyezik.)

443. Tudjuk, hogy $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\alpha$, ahol α a két vektor szöge. Ebből látszik, hogy három esetben lehet a szorzat 0. Ha $|\underline{a}| = 0$, ha $|\underline{0}| = 0$, vagy ha $\cos\alpha = 0$. Az utóbbi azt jelenti, hogy a két vektor merőleges egymásra. Mivel a 0-vektornak nincs iránya, így tekinthetjük úgy, hogy minden vektorra merőleges. Ha ezt elfogadjuk, akkor mondhatjuk azt, hogy két vektor skaláris szorzata *akkor és csak akkor* 0, ha merőlegesek egymásra. 443f

444.

$$\begin{aligned}\cos^2 x + 3\sin x + 3 &= 0\\ 1 - \sin^2 x + 3\sin x + 3 &= 0\\ \sin^2 x - 3\sin x - 4 &= 0\\ (\sin x - 4)(\sin x + 1) &= 0.\end{aligned}$$

Ha a szorzat 0, akkor valamelyik tényező 0. Az első tényező, vagyis $\sin x - 4$ biztosan nem 0, hiszen ez azt jelentené, hogy $\sin x = 4$. Vagyis $\sin x + 1 = 0$, azaz $\sin x = -1$. Ez pedig akkor igaz, ha

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

445.

446.

447. Osszuk fel a négyzetet 6 darab 2×3-as téglalapra. Ekkor valamelyik téglalap biztosan tartalmaz legalább két pontot. Ezek távolsága legfeljebb akkora, mint a téglalap átlója. A téglalap átlója pedig $\sqrt{13}$, ami kisebb mint 3,65. Vagyis igaz az állítás.

448.

$$\begin{aligned}2\sin x\cos x - 1 &= \cos x - 2\sin x\\ 2\sin x\cos x - 1 - \cos x + 2\sin x &= 0\\ (2\sin x - 1)(\cos x + 1) &= 0.\end{aligned}$$

A szorzat 0, tehát legalább az egyik tényezője 0. Vagyis két eset van:
$2\sin x - 1 = 0$, vagyis $\sin x = \frac{1}{2}$, amiből kapjuk, hogy

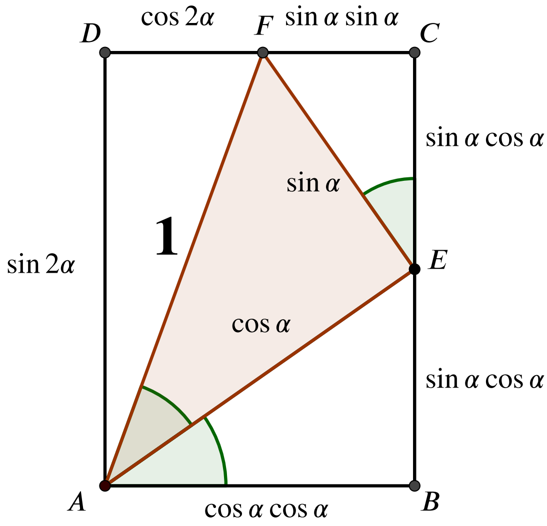
$$\begin{aligned}x &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\\ x &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.\end{aligned}$$

A másik eset, hogy $\cos x + 1 = 0$, vagyis $\cos x = -1$. Tehát

$$x = (2k+1)\pi.$$

Minden esetben $k \in \mathbb{Z}$.

449. Írjuk be az ábrába a szakaszok hosszát:



Mivel AEF háromszög derékszögű, átfogója 1 és az A-nál lévő szög α, ezért $AE = \cos\alpha$, $EF = \sin\alpha$. Most vizsgáljuk meg az ABE háromszöget. Ez is derékszögű, és van egy α nagyságú szöge, így hasonló AEF-hez. Mivel az átfogója $\cos\alpha$, ezért a hasonlóság aránya is $\cos\alpha$. Vagyis a megfelelő oldalak is $\cos\alpha$-szorosra változnak, így $AB = \cos\alpha\cos\alpha$, $BE = \sin\alpha\cos\alpha$.
Még azt érdemes észrevenni, hogy EFC háromszög is hasonló az előző kettőhöz, hiszen $BEA\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$, $AEF\sphericalangle = 90^\circ$, így $FEC\sphericalangle = \alpha$, és ez a háromszög is derékszögű. Itt a hasonlóság aránya AEF-hez viszonyítva $\sin\alpha$, hiszen az EFC háromszög átfogója $\sin\alpha$. Emiatt: $EC = \sin\alpha\cos\alpha$, illetve $FC = \sin\alpha\sin\alpha$.
Ha F-et merőleges vetítenénk az AB oldalra, akkor a vetítő szakasz hossza éppen $\sin 2\alpha$ hosszú. De BC szakasz is éppen ilyen hosszú, amiből kapjuk, hogy

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

A DF szakasz hossza hasonló módon $\cos 2\alpha$. Ennek a szakasznak a hossza éppen a DC és az FC szakasz hosszának a különbsége. Még azt is tudjuk, hogy AB és DC szakaszok hossza megegyezik, így:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

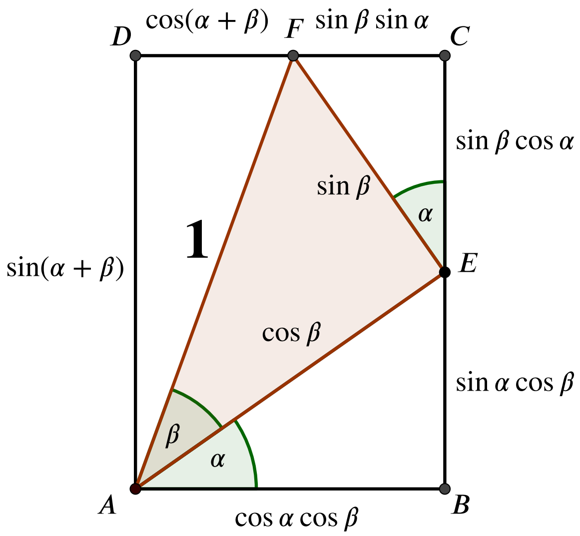
A fenti gondolatmenet általában nem bizonyítja, hogy ezek az azonosságok igazak lennének. Más módszerekkel (vagy a fenti ábra módosításával) belátható, hogy ezek tetszőleges α esetén igazak.

450. (a) $\underline{a}(1;1), \underline{b}(3;3)$: $\underline{a}\cdot\underline{b} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{18}\cos\alpha$, ahol α a két vektor által bezárt szög. De ez a szög nyilván 0, így az skalárszorzat 6.
(b) $\underline{a}(2;0), \underline{b}(0;7)$: $\underline{a}$ párhuzamos az x tengellyel, míg $\underline{b}$ az y tengellyel, vagyis merőlegesek egymásra. Így a skalárszorzatuk 0.
(c) $\underline{a}(2;5), \underline{b}(-5;2)$: ez a két vektor is merőleges egymásra, így ezek skalárszorzata is 0.
(d) $\underline{a}(1;2), \underline{b}(3;1)$:

451. Miket mondhattak a résztvevők? Mivel mindenkinek 7 emberrel lenne lehetősége kezet fogni, de senki nem fog kezet a házastársával, ezért a $0, 1, 2, \ldots, 6$ számokat mondhatták az emberek. Mivel Barna úr hét embert kérdezett meg, és minden válasz különböző volt, ezért ez csak úgy lehetséges, ha pontosan ezek hangzottak el.
Ki lehet a házastársa annak, aki 6 emberrel fogott kezet? Ő mindenkivel kezet fogott a házastársát leszámítva. Vagyis a házastársán kívül mindenki legalább egyet mondott, így a 0-t mondó ember a házastársa.

Nézzük most azt, hogy ki lehet az 5-öt mondó házastársa. Ha az első párt figyelmen kívül hagyjuk (és mindenkinek csökken eggyel a kézfogásainak száma, hiszen a 6-ossal mindenki, a 0-ással senki nem fogott kezet), akkor az 5-ös mindenkivel kezet fogott, így az ő házastársa az előbbi gondolatmenet alapján a 0-s, aki valójában az 1-es, hiszen elhagytuk azt, aki a házastársán kívül mindenkivel kezet fogott. Vagyis az 5-ös házastársa az 1-es.
Ugyanígy kapjuk, hogy a 4-es házastársa a 2-es, és ebből kifolyólag megtudjuk, hogy Barnáné 3 emberrel fogott kezet.

452. Használjuk az ábrát, amit a 449. feladatban használtunk:



Mivel AEF háromszög derékszögű, átfogója 1 és az A-nál lévő szög β, ezért $AE = \cos\beta$, $EF = \sin\beta$. Most vizsgáljuk meg az ABE háromszöget. Ez is derékszögű, és van egy α nagyságú szöge. Tehát $\frac{|EB|}{|AE|} = \sin\alpha$. Mivel $|AE| = \cos\beta$, $BE = \sin\alpha\cos\beta$. Hasonlóan kapjuk, hogy $AB = \cos\alpha\cos\beta$.
Még azt érdemes észrevenni, hogy $FEC\sphericalangle = \alpha$. Hasonlóan az előző gondolatmenethez kapjuk, hogy $EC = \sin\beta\cos\alpha$, illetve $FC = \sin\beta\sin\alpha$, hiszen a derékszögű háromszögünk átfogójának hossza $\sin\beta$.
Ha F-et merőleges vetítenénk az AB oldalra, akkor a vetítő szakasz hossza éppen $\sin(\alpha+\beta)$ hosszú. De BC szakasz is éppen ilyen hosszú, amiból kapjuk, hogy

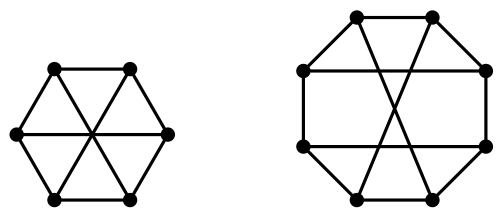
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.$$

A DF szakasz hossza hasonló módon $\cos(\alpha+\beta)$. Ennek a szakasznak a hossza éppen a DC és az FC szakasz hosszának a különbsége. Még azt is tudjuk, hogy AB és DC szakaszok hossza megegyezik, így:

$$\cos 2\alpha = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

A fenti gondolatmenet általában nem bizonyítja, hogy ezek az azonosságok igazak lennének. Más módszerekkel (vagy a fenti ábra módosításával) belátható, hogy ezek tetszőleges α és β esetén igazak.

453. Az a) és a c) feladat megoldható, lásd az alábbi ábrát:



A b) és a d) viszont nem oldható meg, nincs a feltételeknek megfelelő térkép.
Tegyük fel, hogy van 7 várossal ilyen térkép. Hány út van ezen a térképen? Mivel 7 város van, és mindből pontosan 3 út indul ki, ezért $7 \cdot 3$ „kiindulás" van. Egy úthoz pontosan két „kiindulás" tartozik, vagyis az utak száma: $\frac{7\cdot 3}{2}$. Ez azonban nem egész szám, így ellentmondásra jutottunk, hiszen az utak számának nyilvánvalóan egésznek kell lennie.
Hasonlóan minden páratlan szám esetén belátható, hogy nincs megfelelő térkép, hiszen a számláló mindig páratlan lesz, így nem lesz otható 2-vel.

454.

$$\begin{aligned}
\cos 2x + \sin x &= 1 \\
\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x &= 1 \\
(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x + \sin x &= 1 \\
\sin x - 2\sin^2 x &= 0 \\
\sin x \cdot (1 - 2\sin x) &= 0
\end{aligned}$$

A szorzat akkor lesz csak 0, ha legalább az egyik tényezője 0. Vagyis két eset van:
1. $\sin x = 0$, akkor $x = k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
2. $1 - 2\sin x = 0$, vagyis $\sin x = \frac{1}{2}$. Érdemes megnézni az egységkört, és hogy mikor lesz a megfelelő sugár vetülete az y tengelyen $\frac{1}{2}$. Ebből kapjuk, hogy
a) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$ b) $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
Összestíve az egyenlet megoldásait kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
x &= k\pi, \\
x &= \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \\
x &= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,
\end{aligned}$$

ahol $k \in \mathbb{Z}$.

455.

456. A társaságot tekintsük egy gráfnak, csúcsai az emberek, és két csúcs (ember) között él van, ha ismerik egymást. Ekkor a csúcs fokszáma azt mondja meg, hogy az edott embernek hány ismerőse van a társaságban.
Ha n ember van, akkor a lehetséges fokszámok: $0, 1, 2, \dots, n-1$. Ez összesen n lehetséges érték. Tegyük fel, hogy nincs két azonos fokszámú csúcs (vagyis nincs két olyan ember, akiknek ugyanannyi ismerőse van). Ekkor minden szám pontosan egyszer szerepel, hiszen összesen n ember és n lehetséges érték van. Tekintsük azt a csúcsot, amelynek a fokszáma $n-1$. Ezt a csúcsot az összes többivel él köti össze. Akkor viszont nem lehet 0-fokú csúcs (izolűlt pont). Ellentmondásra jutottunk.
Így kaptuk a következő egyszerű gráfelméleti tételt:
Minden egyszerű gráfban van két olyan csúcs, amelyeknek a fokszáma megegyezik.

457.

$$\begin{aligned} \sin 2x + 2\sin x &= \cos x + 1 \\ 2\sin x\cos x + 2\sin x &= \cos x + 1 \\ 2\sin x(\cos x + 1) &= \cos x + 1 \\ (2\sin x - 1)(\cos x + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Egy szorzat értéke akkor lesz 0, ha legalább az egyik tényező 0. Vagyis két eset van:
1) $2\sin x - 1 = 0$, vagyis $\sin x = \frac{1}{2}$. Ekkor

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

vagy

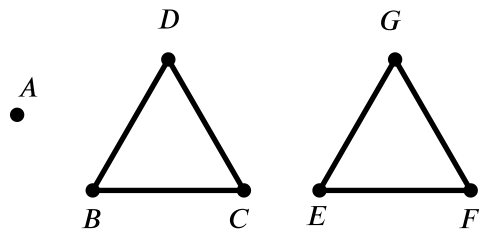
$$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

2) $\cos x + 1 = 0$, vagyis $\cos x = -1$, azaz

$$x = (2k+1)\pi.$$

Mindkét esetben $k \in \mathbb{Z}$.

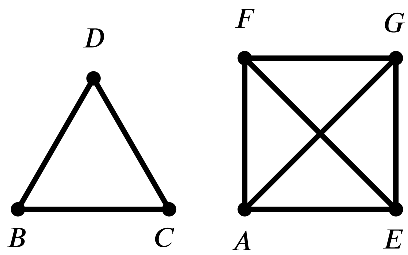
458. (a) 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2:
Igen, van ilyen gráf:



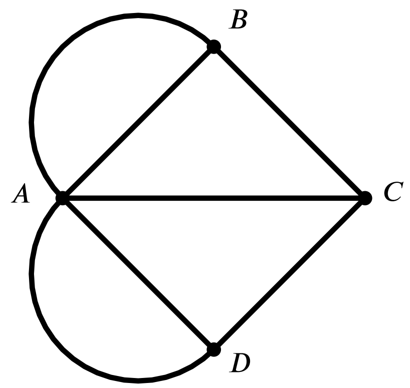
(b) 0, 1, 1, 2, 2, 4, 6:
Ilyen gráf nincs, hiszen 7 pontja lenne, és az egyik fokszáma 6, vagyis minden csúccsal össze van kötve. Akkor pedig nem lehet izolált (0-fokú) pont a gráfban.

(c) 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5:
Ilyen gráf sincs, hiszen egy gráfban a fokszámok összege az élek számának a kétszerese, így ez mindig páros szám. Itt azonban 17.

(d) 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3:



459. Nem lehet a hidakat a kívánt módon bejárni. Tekintsük a következő gráfot, amely jól mutatja a probléma szerkezetét:



Vegyük észre, hogy ez nem egy egyszerű gráf, mert vannak ún. többszörös élek, azaz két pont között több él is lehetséges. A problémát az okozza, hogy mind a négy pont fokszáma páratlan, ugyanis, ha lenne megfelelő körséta, akkor minden pontot a beérkezést követően el is kell hagynunk, ezért minden csúcs fokszáma páros kell, hogy legyen.

460.

461. A koccintásokat ábrázolhatjuk egy gráffal. A gráf csúcsa az emberek és él van két ember között, ha az este folyamán koccintottak. Ekkor ez egy 51-csúcsú egyszerű gráf. Tudjuk, hogy egy ilyen gráfnak a fokszámösszege mindig páros (hiszen a fokszámösszeg az élek számának a kétszerese). Mekkora a mi gráfunkban a fokszámok összege? Ha a 46 ember k emberrel koccintott, akkor az összeg

$$46k + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5,$$

ahol a p_i 10-nél nagyobb prímek, vagyis páratlan számok. $46k$ függetlenül k értékétől páros szám, az 5 prím összege páratlan, így a teljes összeg is páratlan. Ez ellentmondás, nincs ilyen gráf, tehát legalább egy ember rosszul emlékezett a koccintások számára.

462.

463.

464. Három dolgot használunk:

- $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$,
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$,
- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

$$\begin{aligned}
\cos^4 x - \sin^4 x &= \frac{1}{2}\\
(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) &= \frac{1}{2}\\
\cos^2 x - \sin^2 x &= \frac{1}{2}\\
\cos 2x &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ebből tudjuk, hogy $2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, és így kapjuk, hogy

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi,$$

ahol $k \in \mathbb{Z}$.

465. Több különböző módszerrel is meghatározhatjuk a szöget. Részletesen azt mutatjuk meg, ami a skaláris szorzat tulajdonságait használja.
A skaláris szorzatot kétféleképpen is ki tudjuk számítani. Egyrészt a koordináták alapján az $\underline{a}(2;5)$ és $\underline{b}(6;1)$ vektorok sozrzata: $\underline{a}\cdot\underline{b} = 2\cdot 6 + 5\cdot 1 = 17$. Másrészt a két vektor hossza: $\sqrt{29}$ és $\sqrt{37}$, tehát a skaláris szorzat: $\underline{a}\cdot\underline{b} = \sqrt{29}\cdot\sqrt{37}\cdot\cos\alpha$, ahol az α éppen a keresett szög.
Tudjuk tehát, hogy $17 = \sqrt{29}\cdot\sqrt{37}\cdot\cos\alpha$. Vagyis

$$\cos\alpha = \frac{17}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{37}},$$

amiből az α-t könnyen meg tudjuk határozni, mert két vektor szöge legfeljebb π.
A konkrét esetben azt kapjuk, hogy

$$\alpha = \arccos\left(\frac{17}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{37}}\right) \approx 58,74^{\circ}.$$

Koordinátarendszerben felrajzolva a vektorokat és a végpontjaikat összekötve koszinusztétel segítségével is könnyen meghatározható a szögük, illetve külön a két vektor x tengellyel bezárt szögének (amit arctg-függvény segítségével tudunk meghatározni) különbségeként is megkaphatjuk a keresett szöget.

466. Képzeljük el, hogy egy ábrát lerajzolunk a megfelelő módon. Ekkor a kezdő- és a végpontot leszámítva minden csomópontnál, amikor áthaladunk, akkor van egy vonal, amin beérkezünk a csomópontba és egy másik, amin elhagyjuk a csomópontot. A közbülső csomópontokból tehát páros számú vonalnak kell kiindulnia. Ha a rajzolás során nem térünk vissza a kezdeti pontba, akkor a kezdő- és a végpontokból kinduló vonalak száma páratlan, ha visszatérünk, akkor azoké is páros.
Ha egy gráfnak tekintjük a rajzot, a csomópontok a gráf csúcsai és az ezeket összekötő szakaszok a gráf élei, akkor tehát szükséges feltétel, hogy a páratlan fokú pontok száma vagy 0, vagy 2. Az is szükséges feltétel, hogy a gráf összefüggő legyen, ellenkező esetben nyilván nem lehet egyetlen vonallal lerajzolni az ábrát.
Az állítás megfordítása is igaz, de ezt nem bizonyítjuk, mert nem könnyű. Ha egy gráf összefüggő és a páratlan fokú csúcsok száma 0, vagy 2, akkor le lehet rajzolni egyetlen vonallal. Vagyis van benne Euler-séta. (Ha a páratlan fokú pontok száma 0, akkor a gráfban van Euler-kör.)

467. Fogalmazzuk át a feladatot, és használjuk a gráfelméleti tudásunkat.
Legyenek a gráf csúcsai a bajnokság csapatai, és legyen él két csúcs között, ha a két megfelelő csapat már játszott egymással. Mi akkor az igazolandó állítás? Hogy egy ilyen gráfban van két azonos fokszámú csúcs, hiszen a fokszám épp a csapat által lejátszott meccseket mutatja. Azt viszont már tudjuk a 456. feladat megoldásából, hogy minden egyszerű gráfban van két azonos fokszámú csúcs.

468. 9 úttal megoldható a feladat, hiszen ha egy kitüntetett települőst összekötünk minden egyéb településsel, akkor teljesül a feltétel. (Sok egyéb módon is megoldható, hogy bármely településből bármelybe eljuthassunk.) D miért nem lehet kevesebbel? Képzeljük el kezdetben, hogy van a 10 település út nélkül. Ekkor 10 komponense van a rendszernek. Amikor építünk egy utat, akkor legjobb esetben két olyan települést kötünk össze, amelyekből eddig nem lehetett eljutni egymásba. Ekkor a komponensek száma pontosan eggyel csökken. (Ha két olyat kötünk össze, amik már eddig is egy komponensben voltak, akkor nem csökken a komponensek száma.) Mivel az elején 10 komponens van, a végén egy, hiszen bárhonnan bárhová el lehet jutni, ezért legalább 9 útra van szükségünk.

469.

470.

471. Használjuk a $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$ összefüggést. Olyan szögek összegeként kellene felírnunk a 75°-ot, amelynek ismerjük a szögfüggvény-értékeit. Kézenfekvő, hogy a $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$.

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

472. Hozzunk létre egy n-pontú fát.
Induljunk ki abból, hogy kezdetben n darab izolált pontunk van. Húzzunk be éleket egyesével úgy, hogy ne keletkezzen kör. Addig csináljuk ezt, amíg összefüggő gráfot nem kapunk.
Kezdetben a gráf n izolált pontból áll, tehát n komponense van. Vegyük észre, hogy minden él behúzásával eggyel csökken a komponensek száma. Amikor új élt húzunk be, akkor elvileg két lehetőség van. A két végpont egy komponenshez tartozik az él behúzása előtt, vagy két különbözőhöz. Az első eset nem lehetséges, ha ugyanis egy komponensbe tartoztak már korábban, akkor volt köztük út, és az él behúzásával kör keletkezne. Ha a két csúcs különböző komponenshez tartozik, akkor biztosan behúzható az él. Ekkor azonban vegyük észre, hogy pontosan eggyel csökken a komponensek száma, hisz a két komponens, amelyhez a két csúcs tartozik, az él behúzása után már egy komponenst alkot.
Az elején tehát n komponensünk van, a folyamat végén pedig 1, hiszen a fa összefüggő. Minden él behúzásakor pontosan eggyel csökken a komponensek száma, így pontosan $n - 1$ lépésre volt szükségünk, vagyis minden fának pontosan eggyel kevesebb éle van, mint ahány csúcsa. (Érdemes megfigyelni, hogy ez a gondolatmenet nagyon hasonló a 468. feladat megoldásához.)

473. Összesen $9 \cdot 10^3$ négyjegyű szám van. Könnyebb megszámolni azokat, amelyekben nincs azonos számjegy. Az ezres helyiértékre 9, a százasra szintén 9, a tízesre 8, az egyesre 7 lehetőségünk van, hogy milyen számjegyet írjunk, hiszen a korábban használt számjegyek már nem használhatók. Ezek független döntések, tehát a nem megfelelő számok száma: $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$. Vagyis az arány:

$$\frac{9 \cdot 10^3 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{9 \cdot 10^3} = 1 - \frac{9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{9 \cdot 10^3} = \frac{62}{125}.$$

474.

475.

476. Használjuk a $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ összefüggést. Olyan szögek összegeként kellene felírnunk a 105°-ot, amelynek ismerjük a szögfüggvény-értékeit. Kézenfekvő, hogy a $105^\circ = 60^\circ + 45^\circ$.

$$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

477.

478.

479. A kérdés elég nagy butaság. Bármelyiket, bárhogy lehet folytatni, nincs rossz megoldás. Az utolsónál egy vicces folytatás: K, K, T, V. Így ugyanis megkapjuk a hétköznapok utolsó betűit.

480.

481. A legkisebb háromjegyű szám a 100, a legnagyobb 999. Alkalmazzuk az ismert trükköt, és nézzük a következő felírást:

$$100 + 101 + 102 + \ldots + 997 + 998 + 999 = S$$
$$999 + 998 + 997 + \ldots + 102 + 101 + 100 = S$$

Jól látható, hogy az egy oszlopban lévő számok összege 1099, és 900 oszlop van. Mivel a két sort összeadva a kívánt érték kétszeresét kapjuk, ezért: $S = \frac{1099 \cdot 900}{2} = 494550$

482.
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}.$$

A kapott kifejezésben egyszerűsítsünk $\cos^2\alpha$-val, azaz osszuk le a nevezőt és a számlálót is. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}.$$

483. A 481. feladathoz hasonlóan gondolkodhatunk:

$$105 + 112 + 119 + \ldots + 980 + 987 + 994 = S$$
$$994 + 987 + 980 + \ldots + 119 + 112 + 105 = S$$

Az oszlopokban az összegek megegyeznek, mindegyik 1099. Mivel 128 darab 7-tel osztható 3-jegyű szám van, ezért $S = \frac{128 \cdot 1099}{2} = 70336$.

484. A csoportban mindenki játszik mindenkivel, így $\binom{4}{2} = 6$ mérkőzés van. 8 csoport esetén ez összesen 48 mérkőzés. Ezt követően van 8 nyolcaddöntő, 4 negyeddöntő, 2 elődöntő, aztán mérkőzés a 3. helyért és végül a döntő. Ez 16 mérkőzést jelent az egyenes kieséses szakaszban. Vagyis összesen 64 mérkőzést rendeznek egy világbajnokságon.

485.

486.

487.

488.

489.

490. (a) Igen. Az első tagja -1, a differenciája 6.

(b) Igen. Mivel $b_n = 5 + 3(n-2) = 3n - 1$, így a sorozat első eleme 2, differenciája 3.

(c) Nem. Mivel $c_n = \frac{2}{n} + 3$, így $c_1 = 5, c_2 = 4, c_3 = \frac{8}{3}$, és az első két tag és a második két tag különbsége nem egyenlő.

(d) $d_n = \frac{5n+2}{7} = \frac{5}{7}n + \frac{2}{7}$, vagyis az első tag 1, a differencia pedig $\frac{5}{7}$.

491. Ezt egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetjük. Ha a pont koordinátái kielégítik az egyenes egyenletét, akkor illeszkedik a pont az egyenesre.

Mivel $4 \cdot 7 - 7 \cdot 3 \neq 6$, ezért P nincs az egyenesen, de $4 \cdot 5 - 7 \cdot 2 = 6$, ezért Q rajta van az egyenesen.

492.

493.

494.

495.

496.

497.

498.

499.

500.

501.

502. Legyenek az oldalak: $a-d, a, a+d$. Ekkor a kerület: $K = 3a = 30$, amiből azonnal kapjuk, hogy $a = 10$. Tehát az oldalak: $10-d, 10, 10+d$. Azt is tudjuk, hogy derékszögű a háromszög, vagyis

$$(10-d)^2 + 10^2 = (10+d)^2.$$

Ha ezt átlalakítjuk és megoldjuk az egyenletet, akkor azt kapjuk, hogy $d = 2,5$. Vagyis a rövidebb befogó $7,5$, így a terület: $T = \frac{ab}{2} = 37,5$.

503.

504.

505. Mindkét esetben érdemes kisebb számokkal próbálkozni, hátha észreveszünk valamit.

(a) $1+2=3$, $1+2+2^2=7$, $1+2+2^2+2^3=15$, $1+2+2^2+2^3+2^4=31$. Ebből azt sejthetjük, hogy $1+2+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$. Ezek alapján nem is nehéz egy jó bizonyítást készíteni. Adjunk az összeghez 1-et, és vizsgáljuk azt: $1+1+2+2^2+\ldots+2^n$. Tudjuk, hogy $1+1=2$, ezért azt kapjuk, hogy a keresett összeg $2+2+2^2+\ldots+2^n$. Mivel $2+2=2^2$, ezért ez az összeg: $2^2+2^2+\ldots+2^n$. De $2^2+2^2=2^3$, ezért az összeg: $2^3+2^3+\ldots+2^n$. Ezt folytatva az összeg 2^n+2^n alakot ölt, amiről tudjuk, hogy 2^{n+1}. Így az eredeti összeg tényleg $2^{n+1}-1$.

(b) Itt is próbálkozhatunk, az összegek kiszámításával:

3^n	$\sum$
1	1
3	4
9	13
27	40
81	121
243	364

Észrevehetjük, hogy minden sorban az összeg a következő sor 3-hatványánál eggyel kisebb szám fele. Vagyis az a sejtés, hogy $1+3+3^2+3^3+\ldots+3^n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.

Most nem annyira egyszerű a bizonyítás, mint az előtt. Használjuk a következő ötletet. Legyen a keresett összeg A, és alakítsuk át egy kicsit:

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{n-1} + 3^n = A$$
$$3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n + 3^{n+1} = 3A$$

Ha kivonjuk az alsó sorból a felsőt, akkor a bal oldalon szinte minden kiesik, és azt kapjuk, hogy $3^{n+1} - 1$. A jobb oldalon pedig természetesen $2A$-t. Vagyis $2A = 3^{n+1} - 1$. Ebből pedig: $A = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.

Ezt a módszert általában is alkalmazhatjuk a mértani sorozatok elemeinek összegére.

$$\begin{aligned} a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1} &= S_n \\ a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_q^n &= qS_n \\ a_1q^n - a_1 &= (q-1)S_n \\ S_n &= a_1\frac{q^n - 1}{q-1}. \end{aligned}$$

506. Az $(x; y)$ kooridnátájú pont akkor van az origó középpontú, egységsugarú körön, ha a pont origótól vett távolsága éppen 1. Vagyis, ha

$$x^2 + y^2 = 1.$$

(b) Ekkor pedig a középponttól kell 5 távolságra lennie minden pontnak. Mivel már tudjuk, hogy két pont távolságát hogyan tudjuk kiszámítani a koordináta rendszerben (Pitagorasz-tétellel), ezért azt kapjuk, hogy:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2.$$

507.

508.

509.

510.

511.

512.

513.

514.

515.

516.

517.

518.

519.

520.

521.

522.

523.

524.

525.

526.

527.

528.

529. Használjuk a logaritmus definícióját és a hatványozás azonosságait. Ezek alapján tudjuk, hogy $a^{\log_a b} = b$, illetve $\left(a^b\right)^c = (a^c)^b = a^{bc}$

(a) $5^{\log_5 19} = 19$.

(b) $9^{\log_3 5} = \left(3^2\right)^{\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^2 = 5^2 = 25$.

(c) $4^{\log_{16} 81} = \left(16^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{16} 81} = \left(16^{\log_{16} 81}\right)^{\frac{1}{2}} = 81^{\frac{1}{2}} = 9$.

(d) $7^{1+\log_{49} 8} = 7 \cdot 7^{\log_{49} 8} = 7 \cdot \left(49^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{49} 8} = 7 \cdot \left(49^{\log_{49} 8}\right)^{\frac{1}{2}} = 7 \cdot 8^{\frac{1}{2}} = 7 \cdot \sqrt{8}$.

530.

531.

532.

533. (a) Nézzük meg, hogy mennyi a kitevő értéke. $\sqrt{5}$ második hatványa 5, annak második hatványa 25, ezért a kitevő értéke nyilván 4, hiszen $\sqrt{5}^4 = 25$. Emiatt $5^{\log_{\sqrt{5}} 25} = 5^4 = 625$

(b) Ismét a kitevőre koncentráljunk. Mivel $\sqrt[5]{2}$ ötödik hatványa 2, annak harmadik hatványa 8, ezért $\sqrt[5]{2}^{15} = 8$. Vagyis a kitevő értéke 15, így $9^{\log_{\sqrt[5]{2}} 8} = 9^{15} = 3^{30}$.

(c) Az előzőkhöz hasonlóan láthatjuk, hogy $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2} = 49$, ezért $4^{\log_{\frac{1}{7}} 49} = 4^{-2} = \frac{1}{16}$.

534. Legyen $A = \log_6 4 + \log_6 9$. Ekkor $6^A = 6^{\log_6 4 + \log_6 9} = 6^{\log_6 4} \cdot 6^{\log_6 9} = 4 \cdot 9 = 36 = 6^2$, és mivel az $f(x) = 6^x$ függvény egy értéket legfeljebb egy helyen vesz fel, ezért $A = 2$.

535.

536.

537. Mit tudunk az érintőről? Két dolgot biztosan: egyrészt áthalad a P ponton, másrészt a kör középpontja éppen sugárnyi távolságra van az érintő egyenestől.
Az egyik lehetséges stratégia az érintők egyenletének a felírására az, hogy ezeket az információkat felhasználjuk. Írjuk fel a P ponton átmenő egyenesek általános egyenletét. Legyen az egyenes meredeksége m, ekkor az egyenlete: $y = mx + b$ alakú. (Így minden az adott ponton átmenő egyenes egyenletét megkapjuk, kivéve a függőleges egyenest, hiszen annak nincs meredeksége. Ezért ezt észben kell tartanunk.) Tudjuk, hogy az egyenes áthalad a $(10; 5)$ ponton, vagyis $5 = 10m+b$, amiből kapjuk, hogy $b = 5-10m$. Tehát az általános egyenlet:

$$mx - y + 5 - 10m = 0.$$

Tudjuk, hogy a keresett egyenestől éppen $2\sqrt{2}$ távolságra van a kör $(4; 3)$ középpontja. Ahhoz, hogy az egyenestől való távolságot könnyű legyen számolni, szükségünk van az egyenes normálegyenletére. A fenti egyenlettel felírt egyenesek normálvektora az $\underline{n}(m; -1)$ vektor, aminek a hossza $\sqrt{m^2+1}$. Vagyis a normálegyenlet:

$$\frac{mx}{\sqrt{m^2+1}} - \frac{y}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{5-10m}{\sqrt{m^2+1}} = 0.$$

A baloldali kifejezésbe behelyettesítve a középpontot éppen a sugár hosszát kell kapnunk, vagy annak a -1-szeresét. Tehát

$$\left|\frac{4m}{\sqrt{m^2+1}} - \frac{3}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{5-10m}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 2\sqrt{2}.$$

Az egyenletet szorozzuk be $\sqrt{m^2+1}$-gyel, és emeljük négyzetre, akkor ezt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{4m}{\sqrt{m^2+1}} - \frac{3}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{5-10m}{\sqrt{m^2+1}}\right| &= 2\sqrt{2}\\
|4m - 3 + 5 - 10m| &= 2\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}\\
|2 - 6m| &= 2\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}\\
(2-6m)^2 &= 8(m^2+1)\\
36m^2 - 24m + 4 &= 8m^2 + 8\\
28m^2 - 24m - 4 &= 0\\
7m^2 - 6m - 1 &= 0\\
(m-1)(7m+1) &= 0
\end{aligned}$$

Tehát az érintők meredeksége: $m_1 = 1$ és $m_2 = -\frac{1}{7}$.
Mivel tudjuk, hogy a keresett érintők egyenlete $mx - y + 5 - 10m = 0$ alakú, ezért az egyik érintő: $x - y - 5 = 0$, a másik pedig $-\frac{1}{7}x - y + \frac{45}{7}$. Ez utóbbit szebb alakba is írhatjuk: $x + 7y = 45$.

538. (a) Legyen $A = \log_4 320 - \log_4 5$. Ekkor $4^A = 4^{\log_4 320 - \log_4 5} = \frac{4^{\log_4 320}}{4^{\log_4 5}} = \frac{320}{5} = 64$. Vagyis $A = 3$.
A fenti gondolatmenet általában is működik, vagyis $\log_a b - \log_a c$ értékére is kapunk egy szép képletet. Hiszen legyen $B = \log_a b - \log_a c$. Ekkor $a^B = a^{\log_a b - \log_a c} = \frac{a^{\log_a b}}{a^{\log_a c}} = \frac{b}{c}$. Vagyis $a^B = \frac{b}{c}$, amiből azt kapjuk, hogy

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}.$$

(b) Korábbról tudjuk, hogy $\log_a b + \log_a c = |log_a bc$, illetve $\log_a b = \log_{a^k} b^k$. Ezek alapján $\log_3 \frac{27}{5} + \log_9 25 = \log_3 \frac{27}{5} + \log_3 5 = \log_3 27 = 3$.

539.

540. Kör érintő egyenletek felírására egy másik lehetséges módszer, hogy követjük az algebrai számításokkal az érintő megszerkesztésének szokásos módszerét. Ehhez szükségünk van a külső pont és a középpont által meghatározott szakasz Thálesz-körére. Ehhez tekintsük a PO szakasz felezőpontját: $F(7;4)$, és az $r = FP$ távolságot, ami $\sqrt{10}$. Így a Thálesz-kör egyenlete:

$$(x-7)^2 + (y-4)^2 = 10.$$

Szükségünk lesz ennek a körnek és az eredeti körnek a metszéspontjára. Vagyis meg kell oldanunk a két kör egyenletéből álló egyenletrendszert.
A kör egyenletét kicsit átrendezve kapjuk, hogy

$$x^2 - 8x + y^2 - 6y + 17 = 0.$$

A Thálesz-kör esetében ugyanez:

$$x^2 - 14x + y^2 - 8y + 55 = 0.$$

Két kör metszéspontjainak megkereséséhez vonjuk ki a két kör egyenletét egymásból:

$$6x + 2y - 38 = 0.$$

Kicsit egyszerűbb alakban: $y = 19 - 3x$. Megkaptuk ezzel a a két metszéspontot összekötő egyenes egyenletét. Az egyszerűbb alakban már ki is van fejezve y, így azt valamelyik kör egyenletébe visszaírhatjuk, így egy másodfokú egyenletet kapunk y-ra.

$$x^2 - 8x + (19-3x)^2 - 6(19-3x) + 17 = 0$$
$$10x^2 - 104x + 264 = 0.$$

Kapjuk, hogy $x_1 = 6$ és $x_2 = \frac{22}{5}$. Ezek tehát a két metszéspont x kooridnátái. Visszahelyettesítve az $y = 19 - 3x$ egyenletbe, kapjuk, hogy $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{29}{5}$. Vagyis a két metszéspont, ami egyben a pontból húzott érintők érintési pontja: $K_1(6;1)$ és $K_2(\frac{22}{5};\frac{29}{5})$.
Most már csak ezt a két pontot kell összekötni a $P(10;5)$ ponttal és megkapjuk az érintők egyenletét.

541. A feltételek alapján:

$$8(a_1 + a_1q + a_1q^2) = a_1q^3 + a_1q^4 + a_1q^5.$$

De vegyük észre, hogy $a_4 + a_5 + a_6 = q^3(a_1 + a_2 + a_3)$, vagyis azt kapjuk, hogy $q^3 = 8$. Ebből pedig azonnal köetkezik, hogy $q = 2$.

542.

543. Azt vehetjük észre, hogy $\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$. Illetve általában:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Ennek bizonyítása a következő: Tudjuk, hogy $a^{\log_a b} = b$. Ha át akarunk térni c alapú logaritmusra, akkor egyrszét tudjuk, hogy $c^{\log_c b} = b$, illetve, hogy $a = c^{\log_c a}$. Felhasználva ezeket, beírva az eredeti egyenletbe, azt kapjuk, hogy: $\left(c^{\log_c a}\right)^{\log_a b} = c^{\log_c b}$. A bal oldalt átalakíthatjuk és azt kapjuk, hogy $c^{\log_c a \log_a b} = c^{\log_c b}$. Mivel az exponenciális függvény szogorúan monoton, ha az alap nem 1, ezért ebből következik, hogy $\log_c a \log_a b = \log_c b$. Leosztva $\log_c a$-val kapjuk a kívánt állítást.

544.

545.

546.

547.

548.

549.

550.

551.

552.

553.

554.

555. Elhangzott pár definíció, de egyelőre messze vagyunk egy megfelelő változattól. Még korai lenne lezárni ezt a kérdést. Megvizsgálunk további sorozatokat, remélve, hogy ezáltal jobban megismerjük őket, és könnyebben tudjuk kitalálni a definíciót.

556. Minden számtani sorozat monoton. Ha a differencia pozitív, akkor szigorúan monoton nő, ha negatív, akkor csökken. Ha 0, akkor csak monoton, de akkor egyszerre nő és csökken.
A számtani sorozatok közül csak azok korlátosak, amelyeknek a differenciája 0.
Mértani sorozatoknál kicsit összetettebb a helyzet (tegyük fel, hogy $a_1 \neq 0$):

q	korl.	monotonitás
$1 < q$	$-$	ha $a_1 > 0$ nő, ha $a_1 < 0$ csökken
$q = 1$	$+$	nő és csökken
$0 < q < 1$	$+$	ha $a_1 > 0$ szigorúan csökken, ha $a_1 < 0$ szigorúan nő
0	$+$	ha $a_1 > 0$ csökken, ha $a_1 < 0$ nő
$-1 < q < 0$	$+$	nem monoton
$q = -1$	$+$	nem monoton
$q < -1$	$-$	nem monoton

557. Létezik. Ilyenek például a következők:

- $a_n = -\frac{1}{n}$
- $b_n = \frac{n-1}{n}$
- $c_n = \frac{2^n-1}{2^n}$

558. Két megoldás következik:
1. megoldás:

$$\begin{aligned}\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x &= 11\\ \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x &= 11\\ \frac{11}{6}\log_2 x &= 11\\ \log_2 x &= 6\\ x &= 64.\end{aligned}$$

2. megoldás:
Vegyük észre, hogy a 64 gyöke az egyenletnek. (Ez általában nem szokott menni, de ennél az egyenletnél nem olyan nagyon nehéz észrevenni ezt.)
Más gyöke nem lehet az egyenletnek, hiszen a $\log_2 x$, $\log_4 x$ és a $\log_8 x$ függvények mindegyike szigorúan monoton nő, így az összegük is. Vagyis egy adott értéket legfeljebb egyszer vehetnek fel. Így a 11-et is, tehát 64 az egyetlen gyök.

559. Igen, némiképp meglepő módon ez elképzelhető.

560.

561.

562.

563. Mikor van értelmezve $\log_a b$? Ha 3 dolog teljesül: 1) $a > 0$, 2) $a \neq 1$, 3) $b > 0$.
Esetünkben:

- $x - 2 > 0$, vagyis $x > 2$.
- $x - 2 \neq 1$, vagyis $x \neq 3$.
- $5x - x^2 - 4 > 0$, vagyis $-(x-1)(x-4) > 0$, azaz $1 < x < 4$.

Mindháromnak egyszerre kell teljesülnie, vagyis azt kapjuk, hogy: $2 < x < 4$, de $x \neq 3$.

564. Tudjuk, hogy $a_1 + a_2 + a_3 = 19$, illetve hogy $a_3 = a_1 + 5$. Ebből kapjuk, hogy $a_1 + a_2 + a_1 + 5 = 19$, vagyis $2a_1 + a_2 = 14$. Tehát $a_2 = 14 - 2a_1$.
Mivel ez egy mértani sorozat, ezért $a_1 \cdot a_3 = a_2^2$, vagyis $a_1(a_1+5) = a_2^2$. Ebből kapunk egy egyenletet a_1-re:

$$\begin{aligned}a_1(a_1+5) &= (14-2a_1)^2\\ a_1^2 + 5a_1 &= 4a_1^2 - 56a_1 + 196\\ 3a_1^2 - 61a_1 + 196 &= 0.\end{aligned}$$

Vagyis $a_1 = 4$, vagy $a_1 = \frac{49}{3}$.
Az egyik lehetséges sorozat tehát: $4, 6, 9$, a másik pedig: $\frac{49}{3}, \frac{56}{3}, \frac{64}{3}$.

565. Ha egy számtani sorozat első 3 elemének összege 45, akkor a sorozat elemei: $15-d, 15, 15+d$. Tudjuk, hogy $17-d, 18, 22+d$ mértani sorozatot alkot, vagyis:

$$
\begin{aligned}
(17-d)(22+d) &= 18^2 \\
-d^2 - 5d + 374 &= 324 \\
d^2 + 5d - 50 &= 0 \\
(d-5)(d+10) &= 0
\end{aligned}
$$

Vagyis $d = 5$ vagy $d = -10$. Az első esetben a sorozat $10, 15, 20$, és ekkor $12, 18, 27$ tényleg mértani sorozat. A második esetben a sorozat $25, 15, 5$, és ekkor $27, 18, 12$ szintén mértani sorozat.

566. Használjuk a logaritmus ismert azonosságait:

$$
\begin{aligned}
\log_4(x^2-2x+1) + 2\log_4(2x) &= 2 \\
\log_4(x-1)^2 + \log_4(2x)^2 &= 2 \\
\log_4\left[(2x(x-1))^2\right] &= \log_4 16 \\
(2x(x-1))^2 &= 16 \\
2x(x-1) &= \pm 4
\end{aligned}
$$

1) $2x(x-1) = 4$, azaz $2x^2 - 2x - 4 = 0$, aminek gyökei: $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$. Ezek gyökei az eredeti egyenletnek is.
2) $2x(x-1) = -4$, azaz $2x^2 - 2x + 4 = 0$, aminek nincsenek valós gyökei.
Az eredeti egyenelt gyökei tehát -1 és 2.

567. $\log_2 x + 2\log_x 2 = 3$.
Érdemes lenne azonos alapú logaritmusokkal dolgozni. Tudjuk, hogy $\log_x 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 x} = \frac{1}{\log_2 x}$. (Ezt a gondolatmenetet alkalmazva kapjuk általánosan is, hogy $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$. Ezek alapján kapjuk, hogy $\log_2 x + \frac{2}{\log_2 x} = 3$. Legyen $y = \log_2 x$. Vagyis:

$$
\begin{aligned}
y + \frac{2}{y} &= 3 \\
y^2 - 3y + 2 &= 0 \\
(x-1)(y-2) &= 0
\end{aligned}
$$

Azt kaptuk, hogy $\log_2 x = 1$, azaz $x = 2$, vagys $\log_2 x = 2$, azaz $x = 4$. Visszahelyettesítve látjuk, hogy mindkét megoldás gyöke az eredeti egyenletnek.

568. Igen, van.
A sorozat páratlan elemei legyenek a számok reciprokai, a páros elemei pedig ugyanezen számok 1-ből kivonva. Vagyis a sorozat: $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \ldots$.

569. Számítsuk ki a sorozat első néhány elemét:

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, \ldots$$

Talán nem nehéz észrevenni, hogy ezek a számok a 2-hatványoknál eggyel kisebb számok. Vagyis úgy tűnik, hogy $a_n = 2^n - 1$. Ez egyelőre csak egy sejtés a számításaink alapján.

Ezt azonban be is tudjuk látni teljes indukcióval. Látjuk, hogy $n = 1$ esetén igaz az állítás, hiszen $a_n = 2^1 - 1 = 1$. Ha pedig feltesszük, hogy $a_n = 2^n - 1$, akkor a rekurzív képletet használva kapjuk, hogy

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 = 2 \cdot (2^n - 1) + 1 = 2 \cdot 2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1.$$

Vagyis ha a_n-re jó a képlet, akkor a_{n+1}-re is, így minden a_n-re igaz.
Ebből következik, hogy $a_{20} = 2^{20} - 1$.
Nézzük az első 100 tag összegét:

$$s_{100} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = 2^1 - 1 + 2^2 - 1 + \ldots + 2^{100} - 1 = 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{100} - 100.$$

Az első 100 kettő-hatvány összegét már ismerjük: $2^{101} - 1$, így $s_{100} = 2^{101} - 101$.

570. (a) Ahogy nő n értéke, úgy lesz egyre kisebb $\frac{1}{n^2}$ értéke. Mindig pozitív marad, de bármilyen pozitív értéknél egy idő után kisebb lesz. Ezért azt mondjuk, hogy 0-hoz tart.

(b) Ahogy n nő, úgy lesz $n^2 - n = n(n-1)$ értéke egyre nagyobb, hiszen mindkét szorzótényező egyre nagyobb lesz. Bármilyen nagy értéket meghalad előbb-utóbb a sorozat, ezért azt mondjuk, hogy végtelenhez tart.

(c) A sorozat elemei:

$$0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}, \frac{8}{7}, \frac{7}{8}, \ldots$$

A sorozat elemei váltakozva kisebbek, illetve nagyobbak 1-nél, de egyre közelebb kerülnek az értékek 1-hez. Ezért azt mondjuk, hogy a sorozat 1-hez tart.

A fenti gondolatmenetek nem bizonyítások, csak meggyőző érvelések arra nézve, hogy mondjuk azt, hogy a sorozat oda tart, ahová. Egyelőre nem is definiáltuk ezt a fogalmat, még csak megfigyeljük a jelenséget, hogy minél jobb definíciót alkothassunk.

571. Nincs még definíciónk arra, hogy mit jelent az, hogy egy sorozat tart valahova, ezért ezek nem precíz megoldások, csak meggyőző érvelések.

(a) $a_n = \frac{2n+7}{n} = 2 + \frac{7}{n}$. Ez 2-höz tart, mert ahogy egyre nagyobb az n értéke, úgy lesz egyre kisebb a $\frac{7}{n}$, és így a sorozat tagjai egyre közelebb lesznek 2-höz. Azt is megállapíthatjuk, hogy a sorozat korlátos és szigorúan monoton csökken.

(b) $b_n = \sqrt[n]{2}$. A sorozat minden eleme nagyobb, mint 1, és szigorúan monoton csökken a sorozat. Ha n nagyon nagy, akkor 1-hez nagyon közeli számot kell hatványoznunk a n-edik hatványra, hogy 2-t kapjunk. Ezek alapján a sorozat 1-hez tart.

(c) $c_n = \left(\frac{n+3}{n}\right)^2 = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^2 = \frac{n^2+6n+9}{n^2} = 1 + \frac{6}{n} + \frac{9}{n^2}$. Az átlalkításokat látva, használva a fenti gondolatmeneteket, a sorozat 1-hez tart.

(d) $d_n = n^2$ sorozat elemei 10 elemenként periodikusan ismétlődnek. Voltak olyan javaslatok, hogy ezek alapján a sorozat 5-höz tart, de végül abban maradtunk, hogy ez a sorozat nem tart sehova.

572. (a) Igen, létezik ilyen. Egy lehetséges példa:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -1 < x < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

(b) Ilyenek is vannak. A közismertek: $\sin x$, $\cos x$.

(c) Ilyen is van. Pl. a következő:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right), & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{ha x=0 vagy x=1.} \end{cases}$$

573. Igen, van. Pl.

$$0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, 4, \dots.$$

574. Az egyszerűség kedvéért legyen $\log_3 x = A$ és $\log_2 y = B$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$3A - 4B = 1$$
$$2A + B = 8.$$

Ebből kapjuk, hogy $A = 3$ és $B = 2$. Vagyis $log_3 x = 3$, azaz $x = 27$, és $\log_2 y = 2$, azaz $y = 4$.

575. Tudjuk, hogy $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2$ és $a_1 + a_2 + \ldots + a_8 = 34$. Ebből kapjuk, hogy $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 32$. Vegyük észre, hogy $a_5 = a_1 \cdot q^4$, $a_6 = a_2 \cdot q^4$ stb. Vagyis $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = q^4(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$. Azaz $32 = 2q^4$, $q^4 = 16$. Ebből kapjuk, hogy $q = 2$ vagy $q = -2$. Mivel $a_1(1 + q + q^2 + q^3) = 2$, ezért az első esetben: $a_1 a_1 = \frac{2}{15}$. A második esetben pedig $a_1 = \frac{-2}{5}$.
Tudjuk, hogy $a_7 = a_1 \cdot q^6$, így az első esetben $a_7 = \frac{128}{15}$, a második esetben pedig $a_7 = \frac{-128}{5}$.

576. (a) $a_n = \frac{4n-7}{3n} = \frac{4}{3} - \frac{7}{3n}$. Mivel a $\frac{7}{3n}$ elhanyagolható lesz, ha n nagy, ezért a sorozat $\frac{3}{4}$-hez tart.

(b) $b_n = \sqrt[2n]{3}$. Ha minél többször kell összeszoroznunk számokat ahhoz, hogy 3-at kapjuk, akkor maguk a számok egyre közelebb kell, hogy legyenek 1-hez. A sorozat 1-hez tart.

(c) $c_n = \frac{2n+3}{n^2} = \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}$. Ha n nagy, akkor mindkét összeadandó szinte elhanyagolható, nagyon közel vannak 0-hoz. Így a sorozat 0-hoz tart.

577. $\log_2(3x-2) > 0$. Ahhoz, hogy a 2-es alapú logaritmus értéke pozitív legyen, az kell, hogy az argumentum nagyobb legyen, mint 1. Vagyis $3x - 2 > 1$, azaz $x > 1$.

578. Két különböző (egymással ekvivalens) módon definiáljuk azt, hogy egy $\{a_n\}$ sorozat tart az A számhoz. Azt mondjuk, hogy a_n tart A-hoz, azaz $a_n \to A$ vagy $\lim_{n\to\infty} a_n = A$,

- ha minden $\varepsilon > 0$ esetén a sorozatnak csak véges sok eleme van az $]A - \varepsilon; A + \varepsilon[$ intervallumon kívül;
- ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik, olyan N, ha $n > N$, akkor $|a_n - A| < \varepsilon$.

579. (a) $\log_4(x^2 + 2x - 3) > 2$ Az egyenlőtlenség átírható így: $\log_4(x^2 + 2x - 3) > \log_2 4$. Mivel a $\log_2 x$ függvény szigorúan monoton nő, ezért ez akkor teljesül, ha $x^2+2x-3 > 4$. Vagyis $x^2+2x-7 > 0$, amiből azt kapjuk, hogy $x < -1 - 2\sqrt{2}$ vagy $x > 2\sqrt{2} - 1$.
Fontos még megnézni, hogy ezekben az esetekben értelmezve van-e a bal oldali logaritmus. De szerencsére igen, hiszen arra van szükségünk, hogy ilyenkor $x^2 + 2x - 3 > 0$, de azt is tudjuk, hogy ilyenkor $x^2 + 2x - 3 > 4$, vagyis biztosan pozitív.

(b) $\log_x(2x+6) > 0$. Ezt az egyenlőtlenséget átírhatjuk úgy, hogy

$$\log_x(2x+6) > \log_x 1.$$

Ha reflexből oldjuk meg az egyenlőtlenséget, akkor esetleg abba a hibába eshetünk, hogy mivel a logaritmus szigorúan monoton, ezért elhagyhatjuk. Most azonban óvatosabbnak kell lennünk, mert bár elhagyhatjuk a logaritmust a szigorú monotonitás miatt, de vigyáznunk kell, hogy megváltozik-e a relációs jel iránya. Ugyanis szigorúan monoton növekvő sorozat esetén marad az irány, csökkenő esetén azonban éppen ellentétesre változik.
Ezek alapján válasszuk két részre a megoldásunkat.
Amikor szigorúan monoton csökken a logaritmus, vagyis amikor $0 < x < 1$. Ekkor $2x+6 < 1$ egyenlőtlenséget kapjuk, vagyis: $x < -\frac{5}{2}$. Ekkor tehát nincs megoldás, hiszen $0 < x < 1$ volt a feltételünk.
A második eset, amikor a logaritmus szigorúan monoton nő, azaz $x > 1$. Ekkor azt kapjuk, hogy $2x+6 > 1$, azaz $x > -\frac{5}{2}$. Ha tehát $x > 1$, akkor mindig teljesül az egyenlőtlenség.
Így a megoldás: $x > 1$.

580. Ahhoz, hogy belássuk $a_n = \frac{1}{n}$ sorozat 0-hoz tart, arra van szükségünk, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz mutassunk olyan N küszöbindexet, amire teljesül, hogy ha $n > N$, akkor

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Mivel $\frac{1}{n}$ pozitív, ezért ezt átírhatjuk úgy, hogy $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Amiből azt kapjuk, hogy $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Ha tehát N-nek olyan pozitív egész számot választunk, amely nagyobb, mint $\frac{1}{\varepsilon}$, akkor az megfelel az elvárásoknak. Mivel minden ε esetén létezik ilyen N, így beláttuk, hogy a sorozat 0-hoz tart.

581. A sorozat két részből áll, először állapítsuk meg a határértéküket külön-külön.
Azt már megbeszéltük, hogy egy pozitív szám n-edik gyökeiből álló sorozat 1-hez tart. Vagyis $\sqrt[n]{5}$ tart 1-hez.
A sorozat második részét alakítsuk át egy kicsit:

$$\frac{2n^2 - 3n + 1}{5n^2} = \frac{2}{5} - \frac{3}{5n} + \frac{1}{5n^2}$$

A fenti összeg utolsó két tagja pedig nagy n-ek esetén nagyon kicsi, így a határérték szempontjából elhanyagolható. Vagyis a sorozat $\frac{2}{5}$- höz tart.
Mivel az első tag 1-hez, a második $\frac{2}{5}$-höz tart, így a b_n sorozat $\frac{7}{5}$-höz tart.

582. Az egyenlőtlenségünk a következő:

$$\log_{\frac{1}{2}}(5+2x) > 2.$$

Mivel a logaritmusfüggvény szigorúan monoton, így nincs nehéz dolgunk. Azonban figyelnünk kell arra, hogy a $\log_{\frac{1}{2}} x$ függvény szigorúan monoton csökken.
Tudjuk tovább, hogy $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$, ezért arra van szükségünk, hogy

$$\begin{aligned} 5 + 2x &< \frac{1}{4} \\ 2x &< -\frac{19}{4} \\ x &< -\frac{19}{8}. \end{aligned}$$

Ne feledkezzünk el azonban arról sem, hogy a fenti egyenlőtlenségnek nem minden x esetén van értelme. Szükség van arra, hogy $5 + 2x > 0$, vagyis $x > -\frac{5}{2}$.
Vagyis a megoldás: $-\frac{5}{2} < x < -\frac{19}{8}$.

583. Igen, van. Kétféle konstrukciót is mutatunk:

- $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{8}{3}, \frac{9}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \ldots, \frac{15}{4}, \frac{16}{4}, \ldots$
- A másik lehetőség, hogy rendezzük táblázatba a lehetséges számlálók és nevezők szerint a számokat:

$$
\begin{tikzcd}
\frac{1}{1} \arrow[r] & \frac{1}{2} \arrow[dl] & \frac{1}{3} \arrow[r] & \frac{1}{4} \arrow[dl] & \cdots \\
\frac{2}{1} \arrow[d] & \frac{2}{2} \arrow[ur] & \frac{2}{3} \arrow[dl] & \frac{2}{4} & \cdots \\
\frac{3}{1} \arrow[ur] & \frac{3}{2} \arrow[dl] & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \cdots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \cdots &
\end{tikzcd}
$$

Az ábrán a nyilak sorrendjében haladjunk végig a számokon.

584. Az eddigi megoldásaink alapján az $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ sorozat 0-hoz tart.
Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\varepsilon = \frac{1}{200}$, akkor a feladatunk az, hogy olyan N-et találjunk, amelyre igaz, hogy ha $n > N$, akkor

$$\left|\frac{1}{n^2+1} - 0\right| < \frac{1}{200}.$$

Mivel a sorozat elemei pozitív számok ezért, a fenti egyenlőtlenséget sokkal egyszerűbb alakra hozhatjuk, hiszen elhagyható az abszolút érték, és a 0 is.:

$$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{200}.$$

Tehát azt kell mindössze megállapítanunk, hogy mikortól (milyen n-ekre) teljesül ez az egyenlőtlenség. Hogy teljesüljön, arra van szükségünk, hogy $n^2 + 1 > 200$, vagyis $n > 14$. Ha tehát $N = 14$, akkor $n > N$ esetén teljesül, hogy az a_n sorozat tagjai $\frac{1}{200}$-nál közelebb lesznek a határértékhez, vagyis 0-hoz. Hasonló módszerrel tetszőleges , $\varepsilon > 0$ esetén el tudnánk végezni a számítást, vagyis minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik megfelelő N. Így tehát beláttuk, hogy a sorozat 0-hoz tart.

585. (a) $c_n = \frac{2n^2-7}{3n^2} + 4$.
Alakítsuk át az első tagot: $\frac{2n^2-7}{3n^2} = \frac{2}{3} - \frac{7}{3n^2}$. Ez a rész $\frac{2}{3}$-hoz tart. Így a teljes sorozat $4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$-hoz. Általában is megállapíthatjuk, hogy ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor a $c_n = a_n + b_n$ sorozat tart $A + B$-hez.

(b) $d_n = n^2\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n}\right)$ sorozat elemeit alakítsuk át, hogy könnyebben meg tudjuk határozni a határértéket:

$$n^2\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n}\right) = n^2\left(\frac{n-(n+2)}{n(n+2)}\right) = \frac{-2n^2}{n^2+2n} = \frac{-2n^2-4n+4n}{n^2+2n} = -2+\frac{4n}{n^2+2n} = -2+\frac{4}{n+2}.$$

Ezek alapján világos, hogy a sorozat határértéke: -2.

(c) $e_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2$.
Ha n nagy, akkor a $2 - \frac{1}{n}$ értékei nagyon közel lesznek 2-höz, így a négyzete nagyon közel lesz 4-hez. Vagyis a sorozat határértéke 4.
Általában is megállapíthatjuk, hogy ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor a $c_n = a_n \cdot b_n$ sorozat tart AB-hez.

586. Igen, létezik ilyen függvény. Egy lehetséges példa:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \neq 1 \\ 0, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

587. Igen. Az 583-as feladatban már sorozatba rendeztük a pozitív racionális számokat. Vegyük valamelyik jó megoldást, és legyen az a sorozat $\{r_n\}$. Ekkor az összes racionális számot a következőképpen tudjuk egy sorozatban felsorolni:

$$0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, \ldots$$

588. Nagyon hasolnóan tudjuk definiálni ezt, mint amikor egy sorozat véges határértékkel rendelkezik: Azt mondjuk, hogy $a_n \to \infty$, vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, ha

- Minden K-ra a sorozatnak csak véges sok eleme van a $]K, \infty[$ intervallumon kívül.
- Ha minden K-ra létezik N, hogy $n > N$ esetén $a_n > K$.

589. Az előző feladatban látott definíciót kis mértékben kell csak módosítani: Azt mondjuk, hogy $a_n \to \infty$, vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, ha

- Minden k-ra a sorozatnak csak véges sok eleme van a $]-\infty, k[$ intervallumon kívül.
- Ha minden k-ra létezik N, hogy $n > N$ esetén $a_n < k$.

590. Először is állapítsuk meg, hogy a sorozat 1-hez tart. Vagyis olyan N-et kell keresnünk, hogy $n > N$ esetén igaz, hogy

$$\left|\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right| < \frac{1}{50}$$

Mivel a sorozat minden tagja nagyobb, mint 1, és a sorozat szigorúan monoton csökken, ezért arra van szükségünk, hogy

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} &< 1 + \frac{1}{50} \\ \sqrt{1 + \frac{1}{n}} &< \frac{51}{50} \\ 1 + \frac{1}{n} &< \frac{2601}{2500} \\ \frac{1}{n} &< \frac{101}{2500} \\ n &> \frac{2500}{101}. \end{aligned}$$

Ebből kapjuk, hogy $N = 24$ jó választás. Ha $n > 24$, akkor $\sqrt{1+\frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{50}$.

591. Vegyük észre, hogy $\log_x 6 = \frac{1}{\log_6 x}$, illetve legyen $y = \log_6 x$. Ekkor:

$$\begin{aligned}
\log_6 x \cdot \sqrt{\log_x 6x} &= \sqrt{2} \\
\log_6 x \cdot \sqrt{\log_x 6 + \log_x x} &= \sqrt{2} \\
\log_6 x \cdot \sqrt{\log_x 6 + 1} &= \sqrt{2} \\
\log_6 x \cdot \sqrt{\frac{1}{\log_6 x} + 1} &= \sqrt{2} \\
y \cdot \sqrt{\frac{1}{y} + 1} &= \sqrt{2} \\
y^2 \left(\frac{1}{y} + 1\right) &= 2 \\
y + y^2 &= 2.
\end{aligned}$$

Mivel $y^2 + y - 2 = (y-1)(y+2)$, ezért azt kaptuk, hogy két lehetséges megoldás van:
$\log_6 x = 1$, azaz $x = 6$, amit ellenőrizve kapunk, hogy tényleg megoldás.
Másrészt $\log_6 x = -2$. Ekkor azonban a gyökjel alatt negatív szám állna, így ez nem megoldása az egyenletnek.

592. (a) $\frac{n-2+2n^2}{5n} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5n} + \frac{2}{5}n$. Mivel az első két tag határértéke véges, az utolsó tagé pedig végtelen, ezért az egész sorozat végtelenhez tart.

(b) $\frac{n-3+3n^2}{4n^2} = \frac{1}{4n} - \frac{3}{4n^2} + \frac{3}{4}$. Az első két tag határértéke 0, az utolsóé pedig $\frac{3}{4}$, ezért a sorozat határértéke $\frac{3}{4}$.

(c) $\left(2+\frac{3}{n}\right)\sqrt{5-\frac{1}{n^2}}$. Tudjuk, hogy $2+\frac{3}{n}$ tart 2-höz, $5-\frac{1}{n^2}$, 5-höz, így $\sqrt{5-\frac{1}{n^2}}$ határértéke $\sqrt{5}$. Ebből következik, hogy a két sorozat eleminek szorzatából álló sorozat határértéke a két határérték szorzata, vagyis $2\sqrt{5}$.

(d) $\frac{(n+1)^2}{n} - \frac{n^2}{n+1} = \frac{(n+1)^3 - n^3}{n(n+1) = \frac{3n^2+3n+1}{n^2+n}} = 3 + \frac{1}{n^2+n}$. Mivel $\frac{1}{n^2+n}$ határértéke 0, ezért a sorozat határértéke 3.

593. Jelöljük t-vel a vásárolt tollak, j-vel a jegyzetfüzetek számát. Ekkor azt tudjuk, hogy

$$3t + 5j = 42.$$

A jobb oldal osztható 3-mal, ezért a bal oldal is. Mivel $3t$ osztható 3-mal, ezért $5j$-nek is oszthatónak kell lennie. Ez csak úgy lehet, ha j osztható 3-mal. Ez azt jelenti, hogy j értéke csak 0, 3, vagy 6 lehet. Mindhárom esetben kapunk megfelelő megoldást.

594. Első gondolatunk az lehet, hogy ez a sorozat különböző sorozatok összege, amelyek egyenként mind 0-hoz tartanak. Tanultuk, hogy két sorozat összegének határértéke a két sorozat határértékének összege, így azt gondolhatnánk, hogy ebben az esetben a határérték 0.
Ez azonbannem így van. Ennek az az oa, hogy az összeadandók száma változik. Ha az összeadandók száma állandó, akkor használhatjuk a fenti módszert, tehát pl. az

$$s_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{10}{n^2}$$

sorozat határértéke 0, hiszen 10 olyan sorozat összege, amelyek mindegyikének 0 határértéke.

Mit tehetünk akkor az eredeti sorozattal? Alakítsuk át egy kicsit:

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2} = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Ebből már jól látható, hogy a sorozat $\frac{1}{2}$-hez tart.

595. A sorozat végtelenhez tart, ami azt jelenti, hogy tetszőleges K esetén egy indextől kezdve a sorozat minden tagja nagyobb lesz, mint K.
Nézzük meg, hogy lesz-e a sorozatnak 100-nál nagyobb tagja. Belátjuk, hogy lesz. Indirekt bizonyítást alkalmazunk, vagyis feltesszük, hogy nincs a sorozatnak 100-nál nagyobb tagja, és ebből ellentmondásra fogunk jutni.
Ha nincs a sorozatnak 100-nál nagyobb tagja, akkor minden tag legfeljebb 100, így minden tag reciproka legalább $\frac{1}{100}$. Vagyis a sorozat minden „lépésben" legalább $\frac{1}{100}$-dal nő. Ami azt jelenti, hogy $100 \cdot 100$ lépés után a növekmény legalább $100 \cdot 100 \cdot \frac{1}{100}$, ami 100. Vagyis a sorozatnak van 100-nál nagyobb tagja, ami ellentmondás.
Mivel a sorozat nyilvánvalóan szigorúan monoton nő, ezért ha egy tag nagyobb mint 100, akkor onnantól kezdve minden tag nagyobb.
A fenti okoskodást 100 helyett bármilyen K számra hasonlóan elvégezhetjük. Ezzel beláttuk, hogy a sorozat végtelenhez tart.

596. Alakítsuk át a sorozatot, mégpedig elég szokatlan módon, hiszen első ránézésre ettől minden komplikáltabb lesz:

$$c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Tudjuk, hogy $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, így a nevezőt átalakíthatjuk, és 1-et kapunk. Vagyis:

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Ha n nagyon nagy, akkor a nevező is nagy, vagyis a sorozat 0-hoz fog tartani.

597. Ha megvizsgáljuk a sorozatot, akkor az első néhány elem a következő:

$$2; 2,25; 2,37037; 2,44141; 2,48832; 2,52163; \ldots$$

Ezek alapján nehéz megítélni, hogy milyen ez a sorozat. Azt sejthetjük, hogy szigorúan monoton nő, de az nem világos, hogy lesz-e egy véges határértéke vagy végtelenhez tart.
A sorozat 50-edik tagja: $2,691588029073$, az 500-adik tagja: $2,715568520651$, míg az 5000-edik tagja: 2.718010050101.
Ezek alapján már inkább arra szavazna az ember, hogy ez a sorozat nem tart végtelenhez, sőt, nem éri el a 3-at sem.
Igen, ez az igazság. A sorozat határértéke az a szám, amelyet a matematikában e-nek neveznek. Ennek közelítő értéke:

$$e \approx 2,7182818284590452354$$

598.

599.

600. Ha n résztvevő van, akkor összesen $\frac{n(n-1)}{2}$ mérkőzés lesz. Tudjuk, hogy 42 mérkőzés után még 4 meccse van mindenkinek. Ha 4 meccse van még mindenkinek, akkor az $\frac{4n}{2} = 2n$ mérkőzés még. Vagyis:

$$\frac{n(n-1)}{2} = 42 + \frac{4n}{2}$$
$$n(n-1) = 84 + 4n$$
$$n^2 - 5n - 84 = 0$$
$$(n+7)(n-12) = 0$$

Ezek alapján n értéke -7 vagy 12. Nyilván a résztvevők száma nem lehet negatív, vagyis 12 versenyző volt.

601.

602. Az alábbi egyenlet

$$\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{x^2+2x-3} + \ldots + \sqrt{x^2+nx-(n+1)} = 0$$

bal oldalán álló kifejezés minden összeadandója nem-negatív, így csak úgy lehet az összeg 0, ha minden tag 0. Mivel $\sqrt{a}$ csak akkor 0, ha $a = 0$, ezért a gyökjel alatt álló kifejezéseknek minden $k = 1, 2, \ldots, n$-re 0-t kell adniuk. Tudjuk $x^2 + kx - (k+1) = (x-1)(x+k+1)$, vagyis egy adott kifejezés $x = 1$ és $x = -k-1$ esetén lesz 0. Így az egyenlet csak akkor teljesül, ha $x = 1$.

603.

604. Tudjuk, hogy

$$\overline{aabb} = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11 \cdot (100a + b).$$

Mivel ez a szám négyzetszám, és osztható 11-gyel, ezért osztható $11^2 = 121$-gyel is, vagyis $100a+b$-nek is oszthatónak kell lennie 11-gyel. Vizsgáljuk meg ezeket a számokat, ha a és b számjegyek. Ha $a = 1$, akkor nincs ilyen szám. Ha $a = 2$, akkor $b = 9$, a számunk 209. Azonban ha $100 + b = 11 \cdot K$, akkor K-nak is négyzetszámnak kell lennie, hiszen tudjuk, hogy $\overline{aabb} = 11^2 \cdot K$ négyzetszám.
209 esetében $K = 19$, ami nem négyzetszám. A következő szám 308 (hiszen 99-cel növelve kapjuk az új lehetséges számokat, és közben K értéke 9-cel nő), ekkor $K = 28$, ami szintén nem négyzetszám. Ezt folytatva: 407 ($K = 37$), 506 ($K = 46$), 605 ($K = 55$), 704 ($K = 64$), 803 ($K = 73$), 902 ($K = 82$). Egyedül a 64 négyzetszám a lehetséges K-k közül, így az egyetlen jó megoldás: $a = 7, b = 4$, vagyis a 7744.

605.

$$3^{3x-1} = 2y^3 - 11y - 693$$
$$x = \log_3(y+1)$$

A második egyenletből azonnal látszik, hogy $y + 1 = 3^x$. Alakítsuk át 3^{3x-1}-t.

$$3^{3x-1} = \frac{(3^x)^3}{3} = \frac{(y+1)^3}{3}.$$

Helyettesítsük ezt vissza az első egyenletbe:

$$\frac{(y+1)^3}{3} = 2y^3 - 11y - 693.$$

Ebből a következő harmadfokú egyenletet kapjuk:

$$5y^3 - 3y^2 - 36y - 2080 = 0.$$

Ez egy harmadfokú egyenlet. Hogyan oldjuk meg. Ugyan van harmadfokú egyenlethez megoldóképlet (Cardano-képlet), de nem szeretnénk használni, aminek több oka van. Akkor viszont mit tehetünk? Találjuk ki az egyik gyökét! Hogyan? Okosan keressünk megfelelő y-t. Mivel x ésy egész számok, ezért tudjuk, hogy y egy 3-hatványnál 1-gyel kisebb. Így az értelmes próbálkozások: 0, 2, 8, 26, 80 stb. Mivel a konstans tag nem 0, így a 0 nyilván nem gyök. A 2-t ki kell próbálni, és kiderül, hogy nem az. A 8-at behelyettesítve azonban kapjuk, hogy az gyök.
Vagyis $(y-8)$ kiemelhető a harmadfokú polinomból. Így az egyenletünk:

$$(y-8)(5y^2 + 37y + 260) = 0.$$

Mivel a másodfokú résznek nincs gyöke, így az egyetlen gyök a 8.
Vagyis a megoldás: $x = 2$, $y = 8$.

606. (a) $a_n = \frac{\sqrt[2n]{31}+2}{3^{\sqrt[n+2]{5}}}$

A $\sqrt[2n]{31}$ sorozat részsorozata a $\sqrt[n]{31}$ sorozatnak. Ez utóbbi határértéke már ismert számunkra, vagyis tudjuk, hogy 1, így a részsorozat határértéke is 1. Vagyis a számláló határértéke 3. A nevezőben lévő kitevő $\sqrt[n+2]{5}$ határértéke ugyanígy 1, ezért a nevező határértéke is 3. Így a hányados határértéke 1.

(b) $b_n = \frac{2}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \frac{6}{n^3} + \ldots + \frac{2n}{n^3}$

Különösen óvatosnak kell lennünk az ilyen típusú sorozatokkal.
A következő gonodlatmenet **hibás**: tudjuk, hogy $\frac{2}{n^3}$ tart 0-hoz, tudjuk, hogy $\frac{4}{n^3}$ tart 0-hoz, tudjuk, hogy $\frac{6}{n^3}$ tart 0-hoz és így tovább, és végül tudjuk, hogy $\frac{2n}{n^3}$ tart 0-hoz. Vagyis az összegük is tart 0-hoz.
Ez utóbbi következtetés a hibás. Ha fix számú tagunk van, akkor az összegsorozat határértéke tényleg a határértékek összege, ahogy azt bizonyítottuk is. De most nem fix számú összeadandónk van. Nézzünk erre egy nagyon szemléletes példát. Legyen a sorozatunk a következő: $c_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}$, és n tag van. Vagyis $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ stb. Ekkor a fenti gondolatmenet azt adja, hogy a határérték 0, hiszen minden tag, azaz $\frac{1}{n}$ 0-hoz tart, így az összegük is ahhoz tartana. De a sorozatunk a konstans 1 sorozat, aminek a határértéke nyilván 1.
Más módszerhez kell tehát folyamodnunk.

$$b_n = \frac{2}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \frac{6}{n^3} + \ldots + \frac{2n}{n^3} = \frac{2+4+6+\ldots+2n}{n^3} = \frac{2(1+2+3+\ldots+n)}{n^3} = \\ = \frac{2\frac{n(n+1)}{2}}{n^3} = \frac{n(n+1)}{n^3} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}.$$

Ekkor már csak két tagból áll a sorozat, mindkettő 0-hoz tart, így az összeg is, vagyis az eredeti b_n sorozat is 0-hoz tart. (Annak ellenére, hogy az eredmény az első okoskodás során is 0, az a gondolatmenet továbbra is hibás.)

607. Alakítsuk át a képletet:

$$a_n = \frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^4} + \frac{3}{n^4} + \ldots + \frac{n^2}{n^4} = \frac{1+2+3+\ldots+n^2}{n^4} = \\ = \frac{\frac{n^2(n^2+1)}{2}}{n^4} = \frac{n^4+n^2}{2n^4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2}.$$

Amiből jól látszik, hogy a sorozat határértéke $\frac{1}{2}$.

608. Keressük meg a kör középpontját. Ez rajta van a három szakaszfelező merőlegesen. Az AC szakaszfelezőjének nagyon egyszerű az egyenlete: $x = 6$. Az AB szakasz felezőpontja $F(4,5; -0,5)$, és a szakaszfelező merőleges egyik normálvektora az $\overrightarrow{AB}$, azaz az $\underline{n}(7; -3)$. Így az egyenlete: $7x - 3y = 33$. A két egyenes metszéspontja pedig: $O(6; 3)$. Így OA hossza megegyezik a sugár hosszával, ami így $r = \sqrt{29}$. A kör területe: $T = r^2\pi = 29\pi$.

609. (a) $\cos 2x + 5\sin x + 2 = 0$.
Tudjuk, hogy $\cos 2x = \sin^2 x - \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x$. Ezt beírva kapjuk, hogy

$$2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0.$$

Vagyis $\sin x = 3$ vagy $\sin x = -\frac{1}{2}$. Az első lehetőségből nem kapunk gyököt. A másodikból pedig: $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, illetve $x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

(b) $2\log_5 x - \frac{3}{\log_5 x} = 5$. A kényelem kedvéért legyen $y = \log_5 x$. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$2y^2 - 5y - 3 = 0.$$

Az előző feladatrészben láttuk, hogy ennek két megoldása van: $y = 3$, amiből kapjuk, hogy $x = 125$, illetve $y = -\frac{1}{2}$, amiből pedig azt kapjuk, hogy $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

610. Egy konvex n-szögnek $\frac{n(n-3)}{2}$ átlója van, amiből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{n(n-3)}{2} &= n + 250 \\ n^2 - 5n - 500 &= 0 \\ (n-25)(n+20) &= 0 \end{aligned}$$

Így n értékei 25 és -20 lehetnek, de az utóbbi nyilván nem jön szóba most. Vagyis egy konvex 25-szögről van szó.

611. (a) Ha $x = 5$ gyök, akkor

$$\begin{aligned} 25 - 15p + 2p^2 - p - 1 &= 0 \\ 2p^2 - 16p + 24 &= 0 \\ p^2 - 8p + 12 &= 0 \\ (p-2)(p-6) &= 0. \end{aligned}$$

Vagyis p értéke 2 vagy 6, ha $x = 5$ gyöke az egyenletnek.

(b) Ha egyetlen gyök van, akkor a diszkrimináns 0, vagyis:

$$\begin{aligned} 9p^2 - 4(2p^2 - p - 1) &= 0 \\ p^2 + 4p + 4 &= 0 \\ (p+2)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Kizárólag $p = -2$ esetén van egyetlen gyök. (Minden más esetben két különböző gyök van, hiszen minden más esetben $(p+2)^2$ határozottan pozitív.)

612. Válasszuk ki az, hogy melyik feladatot hagyjuk ki a 17 pontosok közül. Ezt 3-féleképpen tehetjük meg. Ha ez megtörtént, akkor 5 feladatunk van, amiket tetszőleges sorrendben oldhatunk meg. Ilyen sorrendből 5! van, így a lehetséges sorrendek száma: $3 \cdot 5! = 360$.

613. (a) $a_n = \frac{1}{n^3} + \frac{3}{n^3} + \frac{5}{n^3} + \ldots + \frac{2n-1}{n^3}$

Tudjuk, hogy az első n páratlan szám összege n^2, ezért $a_n = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$. Amiből következik, hogy a sorozat határértéke 0.

(b) $b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$.

Alakítsuk át egy kicsit a sorozat képletét.

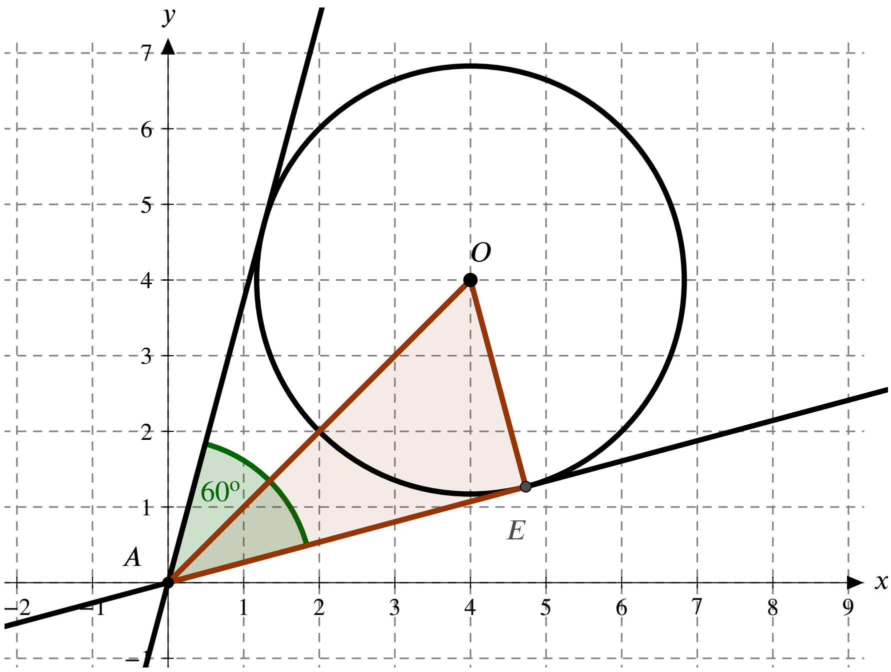
$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^2.$$

Tudjuk, hogy az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat határértéke e, így $\lim_{n\to\infty} b_n = e^2$.

614. Alakítsuk át a kör egyenletét:

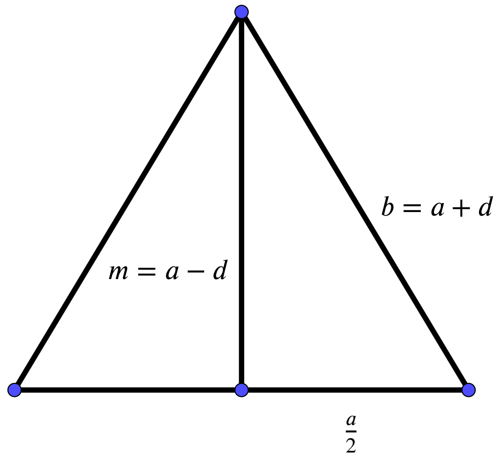
$$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 32 - p^2.$$

Ebből látjuk, hogy a kör középpontja $O(4;4)$. Rajzoljunk ábrát:



Vagyük észre, hogy AOE egy félszabályos háromszög, hiszen az érintés miatt van egy derékszöge E-nél, és a feladat feltétele miatt egy 30°-os szöge A-nál. Vagyis OE fele olyan hosszú, mint AO. Mivel $|AO| = 4\sqrt{2}$, így $r = |OE| = 2\sqrt{2}$. Vagyis a kör egyenletében $r^2 = 8$. Ebből kapjuk, hogy $32 - p^2 = 8$, azaz $p^2 = 24$. Így két megfelelő p van: $\sqrt{24}$ és $-\sqrt{24}$.

615. Készítsünk ábrát, legyen az alap hossza a, és a számtani sorozat differenciája d. Ekkor a magasság hossza $a - d$, a szárak hossza pedig $a + d$.



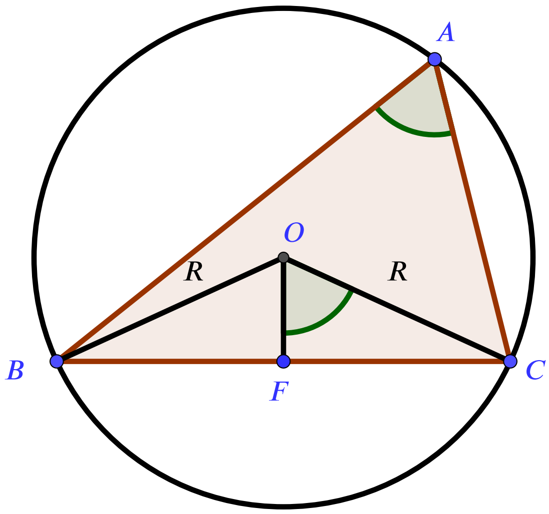
Írjuk fel az ábrán látható derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt:

$$(a-d)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (a+d)^2$$
$$a^2 - 2ad + d^2 + \frac{a^2}{4} = a^2 + 2ad + d^2$$
$$a^2 = 16ad$$
$$a = 16d$$

Ebből kapjuk, hogy $m = \frac{15}{16}a$, $b = \frac{17}{16}a$. Ebből már mindhárom szöget könnyen ki tudjuk számolni, hiszen $\beta = \gamma$, és $\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{15}{16}a}{\frac{a}{2}} = \frac{30}{16}$. Ebből $\beta = \gamma = 61,93^{\circ}$, és $\alpha = 56,14^{\circ}$.

616. Kezdjünk egy sorban diszjunkt 30-as csoportokat tesztelni. Legrosszabb esetben 19 mérés után fogjuk megtudni, hogy melyik 30 ember között van a fertőzött. Innentől felezéssel 5 teszteléssél tudjuk egy emberre szűkíteni a lehetőségeket, hiszen először eg 15-ös csoportot tesztelünk, aztán egy nyolcast, majd egy legfeljebb négyest és így tovább. Összesen tehát 24 tesztre van szükség, ami 72 óra alatt készül el, tehát 3 nap alatt tudjuk meg, hogy ki a fertőzött.

617. Tekintsük az alábbi ábrát:



Az ábrán zölddel jelölt szögek egyforma nagyságúak a kerületi és középponti szögek közötti összefüggés alapján. Vagyis a középpontnál lévő szög is α. Tekintsük az FCO háromszöget. Ebben $|FC| = \frac{a}{2}$, illetve

$|OC| = R$. Vagyis

$$\frac{\frac{a}{2}}{R} = \sin\alpha.$$

Amiből kapjuk, hogy $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$.

618. Ha a tengelyeket két különböző pontban metszi az egyenes, akkor $a \neq 0, b \neq 0$. Ekkor az egyenes egyenletét írjuk fel az m meredeksége segítségével: $y = mx + b$. A b itt a feladatban szereplő b, hiszen ott metszi az egyenes az y tengelyt. Mennyi m? Meggondolhatjuk, hogy minden esetben $m = -\frac{b}{a}$. Vagyis az egyenes egyenelete: $y = -\frac{b}{a}x + b$. Mivel $b \neq 0$, ezért ezt átlakíthatjuk így:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Ezt szokás az egyenes **tengelymetszetes egyeneltének** nevezni.

619. Alakítsuk át a $a_n = 2a_{n+1} - a_{n+2}$ feltételt egy kicsit, és azt kapjuk, hogy

$$\frac{a_n + a_{n+2}}{2} = a_{n+1}.$$

Vagyis minden tag a két szomszédjának a számtani közepe. Ez azt jelenti, hogy a_n számtani sorozat. Ha $a_3 + a_7 = 12$, akkor ez azt is jelenti, hogy $a_5 = 6$, illetve $a_4 + a_6 = a_2 + a_8 = a_1 + a_9 = 12$. Vagyis az első 9 tag összege 54.

620.

$$\begin{aligned}
\sin^2 x &= 1 - \sin x \cos x \\
\sin^2 x &= \sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cos x \\
0 &= \cos^2 x - \sin x \cos x \\
0 &= \cos x(\cos x - \sin x)
\end{aligned}$$

Egy szorzat akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0. Vagyis két módon kaphatunk gyököket:
1) $\cos x = 0$. Vagyis $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
2) $\sin x = \cos x$. Vagyis $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.
Mivel a $[0; 2\pi]$ intervallumon keressük a megoldásokat, ezért a megoldások: $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

621. Ha a második sokszögnek n csúcsa van, akkor az elsőnek $3n$. Vagyis felírhatjuk az alábbi egyenletet:

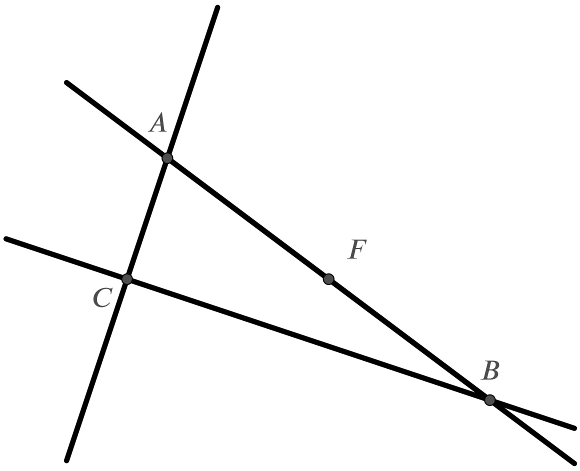
$$\begin{aligned}
\frac{n(n-3)}{2} + 540 &= \frac{3n(3n-3)}{2} \\
n^2 - 3n + 1080 &= 9n^2 - 9n \\
4n^2 - 3n - 540 &= 0.
\end{aligned}$$

Ennek a másodfokú egyenletnek két gyöke van, egy negatív és a 12. Az előbbi nyilván nem megoldása a feladatnak. Vagyis a két sokszögnek 36, illetve 12 csúcsa van.

622. Az egyenesek egyenletei:

$$\begin{aligned}
e &: x + 3y = 7 \\
f &: 3x - y = -7 \\
g &: 3x + 4y = 8.
\end{aligned}$$

így az alábbi ábrát kapjuk:



(a) Mivel az egyenesek normálvektorai: $\underline{n_e}(1;3), \underline{n_f}(3;-1), \underline{n_g}(3;4)$,, így látható, hogy $\underline{n_e} \perp \underline{n_f}$. Mivel g nem párhuzamos sem e-vel, sem f-fel így a három egyenes tényleg derékszögű háromszöget határoz meg.

(b) A háromszög csúcsainak koordinátáit megkapjuk, ha a ét megfelelő oldalegyenes egyenletét tekintjük, és az így kapott egyenletrendszereket megoldjuk. $A\left(-\frac{4}{3};3\right)$, $B\left(-\frac{4}{5};\frac{13}{5}\right)$, $C\left(-\frac{7}{5};\frac{14}{5}\right)$.
Mivel F a AB szakasz felezőpontja, így a két végpont koordinátáinak számtani közepe adja F koordinátáit: $F\left(-\frac{16}{15};\frac{14}{5}\right)$. Mivel C és F y koordinátái megegyeznek, így a távolságuk az x koordinátáik különbsége: $d(C,F) = -\frac{16}{15} - \left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{1}{3}$.

(c) A csúcsok koordinátáinak ismeretében Pitagorasz-tétel segítségével kiszámíthatók az oldalhosszak: $a = \frac{\sqrt{10}}{5}, b = \frac{\sqrt{10}}{15}, c = \frac{2}{3}$.
Mivel a háromszög derékszögű, így $T = \frac{ab}{2}$. Másrészt azt is tudjuk, hogy $T = r \cdot s$, ahol r a beírt kör sugara, s pedig a kerület fele. Vagyis: $r = \frac{T}{s} = \frac{2\sqrt{10}-5}{15} \approx 0,088$.

623. A feladat szövege azt állítja, hogy

$$\log_x 2^1 + \log_x 2^2 + \log_x 2^3 + \ldots + \log_x 2^{99} + \log_x 2^{100} = 10100.$$

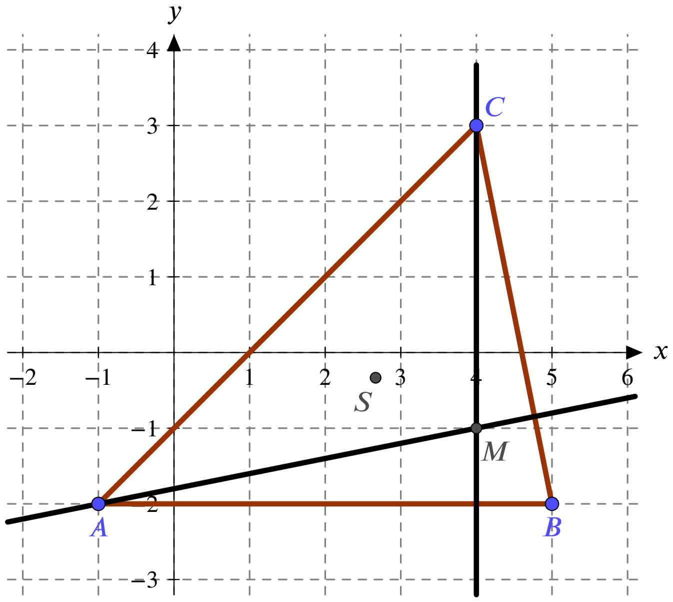
Legyen $y = \log_x 2$, akkor $\log_x 2^k = k \cdot \log_x 2 = ky$. Vagyis azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} y + 2y + 3y + \ldots + 99y + 100y &= 10100 \\ \frac{100 \cdot 101}{2} y &= 10100 \\ 5050y &= 10100 \\ y &= 2. \end{aligned}$$

Vagyis $\log_x 2 = 2$, amiből kapjuk, hogy $x = \sqrt{2}$.

624. Bontsuk prímtényezőkre 2020-at: $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Ebből kapjuk, hogy $2020^3 = 2^6 \cdot 5^3 \cdot 101^3$. A páratlan osztók tehát $5^a \cdot 101^b$ alakúak lehetnek, és mindkét kitevő legfeljebb 3 lehet. Vagyis a kitevőkre egymástól függetlenül 4-féle lehetőség van, vagyis a páratlan osztók száma $4 \cdot 4 = 16$.

625. Tekintsük az alábbi ábrát, ahol S a súlypont, M pedig a magasságpont.
A súlypont koordinátáit megkapjuk a csúcsok koordinátáinak számtani közepeként, vagyis:
$S\left(\frac{-1+5+4}{3}; \frac{-2-2+3}{3}\right)$, vagyis $S\left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
Mivel A és B pont y koordinátái megegyeznek, ezért a C-hez tartozó magasság párhuzamos az y tengellyel. A magasság egyenesének át kell mennie a C ponton, vagyis az egyenlete: $x = 4$.
Írjuk fel az A-n átmenő magasságvonal egyenletét. Tudjuk, hogy ez merőleges az a oldalra, és átmegy az A ponton. Mivel a $\overrightarrow{BC}$ vektor $(-1; 5)$, ezért a magasságvonal egy normálvektora ez a vektor a merőlegesség miatt. Másrészt az egyenes átmegy a $(-1; -2)$ ponton, így az egyenlete: $-x + 5y = -9$. Keressük ennek és az $x = 4$ egyenletű egyenesnek a metszéspontját. Megoldva a (nagyon egyszerű) egyenletrendszert, azt kapjuk, hogy $M(4; -1)$.
Így kapjuk, hogy $d(M, S) = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.



626. Osszuk be a számokat a 3-as maradékuk szerint, vagyis az első részbe kerüljenek a 3-mal osztható számok, a másodikba a 3-mal osztva 1 maradékot adók, a harmadik részbe pedig azok, amiknek a 3-as maradéka 2. Ekkor az első részben bármely két szám összege is 3-mal osztható, a másodikban bármely összeg 3-mal osztva 2 maradékot ad, míg a harmadikban 1-et. Így az összeg 3-as maradéka alapján meg tudjuk mondani, hogy melyik részből választotta a néző a számokat.

627. Először nézzük meg, hogy milyen x-ekre van értelme a $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8x + 12) > -5$ egyenletnek. Ehhez az kell, hogy $x^2 - 8x + 12 > 0$ teljesüljön. $x^2 - 8x + 12 = (x - 2)(x - 6)$ vagyis ez akkor teljesül, ha $x < 2$ vagy $x > 6$.
Akkor most nézzük az egyenletet:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8x + 12) > -5$$
$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8x + 12) > \log_{\frac{1}{2}} 32$$
$$x^2 - 8x + 12 < 32$$
$$x^2 - 8x - 20 < 0$$
$$(x + 2)(x - 10) < 0.$$

Felhasználtuk, hogy a logaritmus-függvény szigorúan monoton, ezért hagyhattuk el a logaritmust a harmadik sorban. De most azt is felhasználtuk, hogy szigorúan monoton csökken a $\log_{\frac{1}{2}} x$ függvény, emiatt fordul meg a relációs jel.
Azt kaptuk tehát, hogy $-2 < x < 10$. Ennek is teljesülnie kell, illetve annak is, hogy az egyenlőtlenség bal oldalán értelmes kifejezés álljon.
Így az egyenlőtlenség megoldásai:
$-2 < x < 2$ vagy $6 < x < 10$. Másképp: $x \in]-2; 2[\cup]6; 10[$.

628. (a) Alakítsuk át a hányadost, egyszerűsítsünk $\sqrt{n}$-nel:
$\frac{\sqrt{n+2}+5\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+5\sqrt{1+\frac{3}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$.
Mivel $\frac{1}{n}$ tart 0-hoz, ezért a számláló első tagja 1-hez, a második 5-hoz tart, így a teljes számláló 6-hoz. A nevező első tagja 1-hez, amihez adunk még egyet, így a nevező határértéke 2. Vagyis a hányados határértéke 3.

(b) A $\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2-1}$ kifejezés mindkét tagja végtelenhez tart, így nem tudjuk első ránézésre megmondani, hogy mi lesz a határérték. Azt a trükköt alkalmazzuk, hogy tegyük első ránézésre bonyolultabbá a kifejezést.

$$\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2-1} = \frac{\left(\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2-1}\right)\left(\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2-1}\right)}{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2-1}} =$$
$$= \frac{3n+1}{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2-1}} = \frac{3+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}$$

Az ötlet az, hogy próbáljuk meg eltüntetni a gyökjeleket. Ez nem sikerül teljesen, de mégis könnyebben kezelhető a kifejezés határérték szempontjából. Felhasználjuk, hogy $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Illetve a végén a számlálót és a nevezőt is elosztjuk n-nel. (Ez a gyökjelek alatti kifejezések esetében n^2-tel való osztást jelent.
A kapott kifejezés számlálója 3-hoz tart, míg a nevező 2-höz, így az eredeti kifejezés határértéke $\frac{3}{2}$.
Felhasználtuk, hogy $\frac{1}{n}$ és $\frac{1}{n^2}$ sosozatok határértéke végtelenben 0.

629. Igen, léteznek ilyen számok. Pl. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5, 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7, 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7, 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. De sok egyéb megoldás is lehetséges.

(b) Minden n esetén megadható n megfelelő szám.
1) Bálint konstrukciója.
Vegyünk egy szabályos n-szöget, húzzuk meg az összes átlóját. Minden oldalra és átlóra írjunk egy prímet, mégpedig különböző prímeket. Mivel végtelen sok prím van, így ezt megtehetjük. A sokszög csúcsaiba írjuk azt a számot, ami a belőle kiinduló oldalakra, illetve átlókra írt prímek szorzata.
Fogalmazhattunk volna úgy is, hogy egy n csúcsú teljes gráf éleire írunk különböző prímeket, és minden csúcsba az onnan induló éleken lévő prímek szorzatát írjuk, így kapjuk az n megfelelő számot.
2) Kristóf konstrukciója.

Vegyünk n darab prímet, legyenek ezek $p_1, p_2, \dots, p_n$. Ekkor a számok a következők:

$$\begin{aligned}
&p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_{n-3} \cdot p_{n-2} \cdot p_{n-1}\\
&p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_{n-3} \cdot p_{n-1} \cdot p_n\\
&p_1 \cdot p_2, \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_{n-3} \cdot p_{n-2} \cdot p_n,\\
&\dots\\
&p_1 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot \dots \cdot p_{n-2} \cdot p_{n-1} \cdot p_n\\
&p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot \dots \cdot p_{n-2} \cdot p_{n-1} \cdot p_n
\end{aligned}$$

Vagyis vesszük a prímek szorzatát, de minden szám esetében egy prímet (mindig másikat) kihagyunk. Mivel végtelen sok prím van, ezért ezt minden n-re megtehetjük, és világos, hogy bármely két számnak lesz közös osztója, de az összes számnak nem.

630. Az egyenletünk ez volt:

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_n(n+1) = 7.$$

Írjunk át minden logaritmust 2-es alapra:

$$\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \ldots \cdot \frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n} = 7.$$

Látható, hogy a legtöbb $\log_2 k$ szerepel számlálóban és nevezőben is, így kiesnek. Marad, hogy

$$\log_2(n+1) = 7,$$

amiből kapjuk, hogy $n = 127$.

631. Legyen a sorozat első tagja a, hányadosa q. Írjuk fel, amit tudunk:

$$\begin{aligned}
a + aq + aq^2 &= 22\\
\frac{1}{a} + \frac{1}{aq} + \frac{1}{aq^2} &= \frac{7}{18}.
\end{aligned}$$

Illetve vegyük észre, hogy a kérdés az, hogy mennyi a második tag köbe, hiszen $a_1 a_2 a_3 = a_2^3$. A mi jelöléseinkkel a kérdés tehát $a^3 q^3$.

632. Ha két oldal arányát ismerjük egy egyenlőszárú háromszögben, akkor elvileg két lehetőség van, hogy melyik oldal hosszával egyezik meg a harmadik oldal hossza. Most tehát elvileg lehet, hogy az oldalak aránya $3 : 7 : 7$ vagy $3 : 3 : 7$. Az utóbbi azonban a haromszög-egyenlőtlenség miatt nem lehetséges. Az előbbi esetben tehát 17 egység a teljes kerület, hiszen $3 + 7 + 7 = 17$. Így egy egység $\frac{221}{17} = 13$ cm, hiszen a kerület 221 cm. Vagyis az oldalak hossza rendre: 39, 91, és 91 cm.

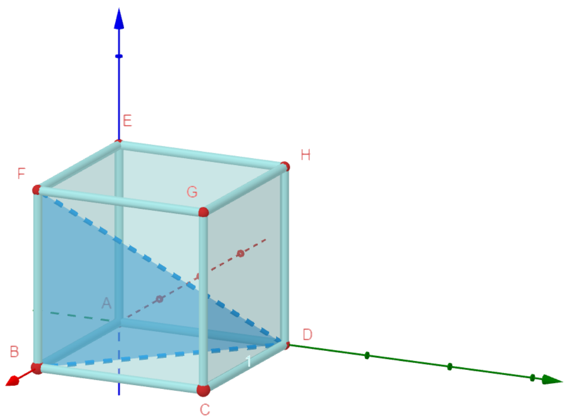
(b) Most már mindkét elvileg lehetséges háromszög létezik, vagyis lehet az oldalak aránya $2 : 2 : 3$ és $2 : 3 : 3$ is.
Az első esetben egy egység hossza: $\frac{221}{7}$ cm, így az oldalak hossza: $\frac{442}{7}$ cm, $\frac{442}{7}$ cm és $\frac{663}{7}$ cm.
A második esetben pedig $\frac{221}{8}$ cm az egység, így az oldalak hossza: $\frac{442}{8}$ cm, $\frac{663}{8}$ cm és $\frac{663}{8}$ cm.

633. Egy n-oldalú sokszög átlóinak száma: $\frac{n(n-3)}{2}$. Vagyis azt tudjuk, hogy

$$115 < \frac{n(n-3)}{2} < 140.$$

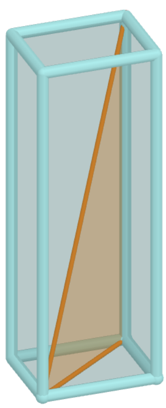
Ez valójában két egyenlőtlenség. Az egyik: $230 < n^2 - 3n$, a másik $n^2 - 3n < 280$. Ha az elsőt az egész számok halmazán megoldjuk, akkor azt kapjuk, hogy $n \leq -14$ vagy $n \geq 17$. Ha pedig a másodikat, akkor azt kapjuk, hogy $16 \leq n \geq 18$. Mivel a két egyenlőtlenségnek egyszerre kell teljesülnie, így a megoldáshalmazok metszetét kell vennünk. Vagyis n értéke csak kétféle lehet, 17 vagy 18.
Mivel az n-szög belső szögeinek összege $(n-2) \cdot 180^o$, így az egyik esetben a szögösszeg 2700^o, a másodikban pedig 2880^o.

634. Tekintsük az alábbi ábrát:



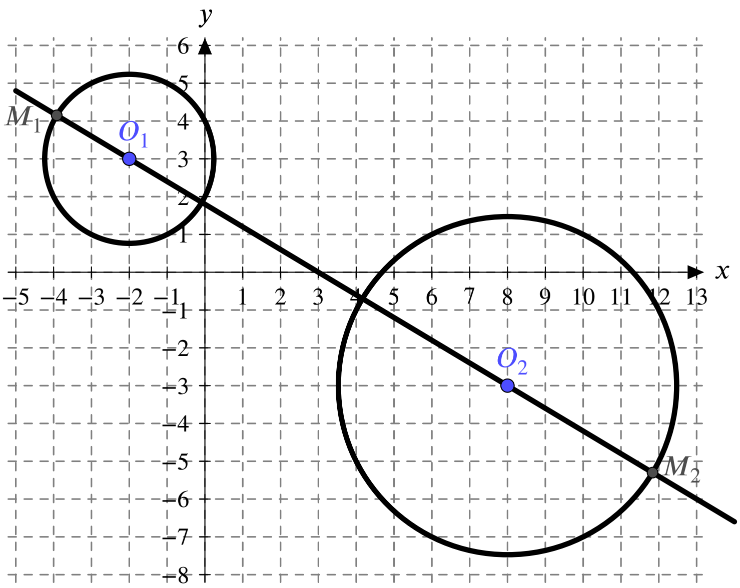
DF egy testátló, határozzuk meg ennek a hosszát. Tudjuk, hogy $|BF| = 1$. BD egy egységoldalú négyzet átlója, így hossza $\sqrt{2}$. Vegyük észre, hogy BDF háromszög derékszögű, és épp a keresett hosszúságú DF az átfogója. Mivel a két befogó hossza 1 és $\sqrt{2}$, így az átfogó hossza $|DF| = \sqrt{3}$.
Általában elmondhatjuk, hogy ha egy kocka élhosszúsága a, akkor a lapátlójának a hossza $\sqrt{3}a$.

635. Az előző feladat gondolatmenetét használjuk.



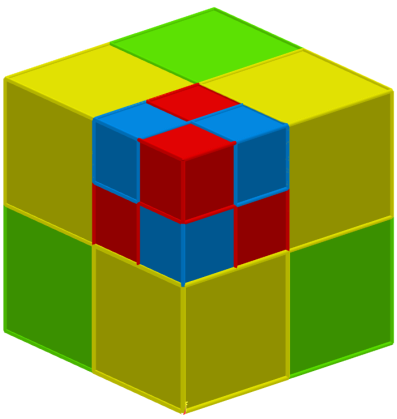
Az alsó lap lapátlója 5 hosszúságú, hiszen egy olyan derékszögű háromszög átfogója, amelynek a két befogója 3 és 4. Tekintsük az ábrán látható narancssárga háromszöget, ennek egyik befogója 5, a másik pedig a harmadik él, ami 12. Ekkor az átfogó hossza $\sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$. (A 3, 4, 5 mellett az 5, 12, 13 is egy viszonylag nevezetes Pitagoraszi-számhármas.) Vagyis a testátló hossza 13.
A fenti gondolatmenetet általában is alkalmazhatjuk. Ha egy téglatest éleinek hossza a, b, c, akkor a testálójának hossza: $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

636. Alakítsuk át a körök egyenletét úgy, hogy le tudjuk olvasni a középpontokat és a sugarakat. $k_1 : x^2 + y^2 + 4x - 6y + 8 = 0$, amit át tudunk alakítani $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$ alakúra. Ugyanez $k_2 : x^2 + y^2 - 16x + 6y + 53 = 0$ esetén azt adja, hogy $(x - 8)^2 + (y + 3)^2 = 20$. Vagyis k_1 kör O_1 középpontjának koordinátái: $(-2; 3)$, r_1 sugara pedig $\sqrt{5}$. Ugyanezek k_2 esetében: $O_2(8; -3)$ és $r_2 = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Vagyis így helyezkednek el a körök a síkban:

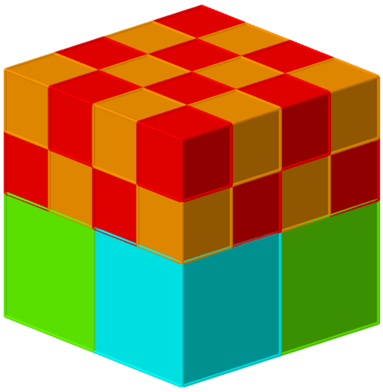


A két kör legtávolabbi pontpárja (M_1, M_2). Tudjuk, hogy $|M_1O_1| = \sqrt{5}$, hiszen $r_1 = \sqrt{5}$. Másrészt $|O_2M_2| = 2\sqrt{5}$. Szükségünk van még $|O_1O_2|$-re. Ezt könnyen meg tudjuk határozni, s kapjuk, hogy $\sqrt{136} = 2\sqrt{34}$.
Vagyis a kérdésre a válasz: $2\sqrt{34} + 3\sqrt{5}$.

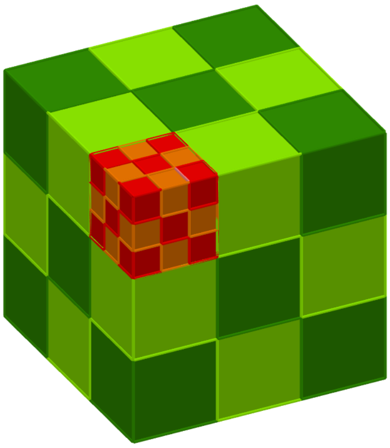
637. Ha mindhárom irányból elfelezünk egy kockát, akkor 8 kisebb kockára tudjuk felbontani a kockát ($2^3 = 8$). Ha egy már meglévő kiskockát osztunk így tovább, akkor 1 kocka helyett 8 lesz, vagyis 7-tel tudjuk növelni a kockák számát. Vagyis 1 kockából lesz 8, aztán 15.



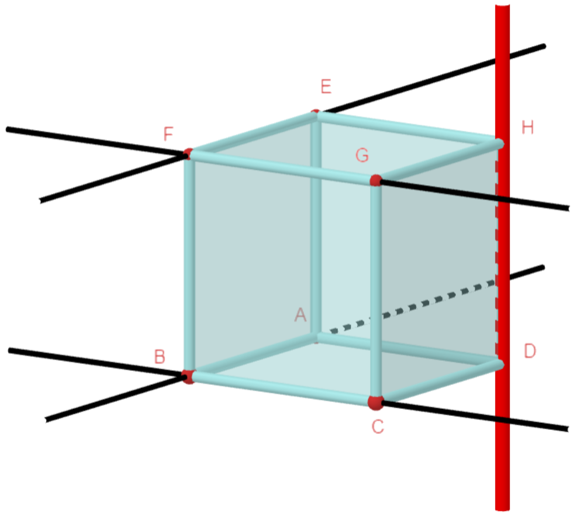
Ezt az ötletet folytatva 22, majd 29, 36, 43, 50 stb. kockára is fel tudunk osztani egy kockát. Minden $n = 7k + 1$ esetén létezik felosztás n kockára.



Ezzel a módszerrel azonban 53 kockára nem tudjuk felosztani a kockánkat. Ha viszont minden irányból harmadolunk, akkor rögtön 1 kockából 27 kockát kapunk, vagy 26-tal tudjuk növelni a kockák számát. Mivel $1+26+26=53$ ezért 53 kiskockára is fel tudunk osztani egy kockát két ilyen lépés egymás utáni alkalmazásával.



638. Az egyszerűség kedvéért legyen a téglatest egy kocka. Válasszuk ki az egyik élét (ábrán piros), és nézzük meg, hogy hány olyan él van, amik nincsenek a piros éllel egy síkban (vagyis a két élre illeszkedő egyenesek kitérők).



Az ábrán látjuk, hogy 4 olyan él van, ami megfelel a feltételnek (sötétkék egyenesek). Számoljuk össze, hogy hány kitérő egyenespár van. Mivel 12 éle van a kockának, és mindhez van 4 egyenes, ami megfelel. Vagyis ez $12 \cdot 4 = 48$. De ilyen módon minden párt kétszer számoltunk, vagyis a megfelelő egyenespárok száma: 24.

639.
- Ha mindhárom sík párhuzamos egymással, akkor 4 rész keletkezik.
- Ha kettő párhuzamos, egy pedig metszi a másik kettőt, vagy
- ha a 3 síknak van közös egyenese, akkor 6 rész keletkezik.
- Ha a páronkénti metszésegyenesek párhuzamosak, akkor 7 rész keletkezik.
- Ha pedig a páronkénti metszésegyeneseknek van közös pontja, akkor 8 rész keletkezik.

Az alábbi ábrán láthatók a lehetőségek.

640. (a)

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+12}+\sqrt{x-12}&=6\\
x+12+x-12+2\sqrt{x^2-144}&=36\\
\sqrt{x^2-144}&=18-x\\
x^2-144&=324+x^2-36x\\
36x&=468\\
x&=13
\end{aligned}$$

Ahhoz, hogy a bal oldal értelmes legyen, szükséges, hogy $x \geq 12$. Ez $x = 13$ esetén teljesül, vagyis az egyenlet egyetlen gyöke a 13.

(b)

$$\begin{aligned}
3^{\lg x^2}+3^{1+\lg x}&=108\\
3^{2\lg x}+3\cdot 3^{\lg x}&=108\\
\left(3^{\lg x}\right)^2+3\cdot 3^{\lg x}&=108
\end{aligned}$$

Ha most $y = 3^{\lg x}$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
y^2+3y&=108\\
y^2+3y-108&=0\\
(y+12)(y-9)&=0
\end{aligned}$$

Vagyis két lehetőség van:
$3^{\lg x} = -12$, ami nyilván lehetetlen.
$3^{\lg x} = 9$, amiből $\lg x = 2$, vagyis $x = 100$.

641. (a) Legyen a számtani sorozat $\{a_n\}$, a mértani pedig $\{b_n\}$, a differencia d, a hányados pedig q. Ekkor tudjuk, hogy $a_1 = b_1 = 2$, $d = q$, illetve, hogy $a_2 = b_2$. Ez utóbbiból kapjuk, hogy $2 + d = 2q$, és azt is tudjuk, hogy $d = q$, vagyis $2 + d = 2d$, amiből $d = q = 2$.
Vagyis a számtani sorozat a páros számok sorozata 2-től kezdve, a mértani pedig a 2-hatványok sorozata szintén 2-től kezdve.
Ebből következik, hogy $b_{10} = 1024$, ami éppen a_{512}.

(b) Tegyük fel, hogy egy 2-hatványt elő tudunk állítani egynél több szomszédos, pozitív páros szám összegenként. Legyen az első páros szám $2k$, és m szomszédos tag. Ekkor a számok összege:

$$2k + (2k + 2) + (2k + 4) + \ldots (2k + (m - 1) \cdot 2.$$

Az összeadandók egy számtani sorozat tagjai, így az összeg $\frac{(4k+(m-1)\cdot 2)\cdot m}{2}$, kicsit átalakítva: $(2k + m - 1)m$. Ennek a szorzatnak kell 2-hatványt adni, és tudjuk, hogy $m > 1$. Mivel egy 2-hatványnak csak 2-hatvány osztói vannak, és m osztója és $m > 1$, ezért m páros. Emiatt $2k + m - 1$ páratlan. De ez a szám is osztója a 2-hatványnak, így ez a szám csak az 1 lehet. Másrészt viszont k pozitív egész, $m > 1$ egész, így $2k + m - 1 \geq 2$. Ami ellentmondás.
Vagyis nem lehet a mértani sorozat egyik tagját sem előállítani a számtani sorozat szomszédos elemeinek összegeként.

642. Az adatokból látjuk, hogy 25%-a a jeleknek pont, vagyis 20 pont van.

(a) Ha n a piros írásjelek száma, akkor $\frac{3}{8}n$ piros pont van, és $\frac{1}{6}(80-n)$ kék pont, hiszen a kék írásjelek száma $80-n$. Vagyis

$$\frac{3}{8}n+\frac{1}{6}(80-n)=20.$$

Ebből kapjuk, hogy $n=32$. Vagyis 32 piros és 48 kék írásjel van.

(b) 0,3 a valószínűsége annak, hogy egy húzás során kérdőjelet húzunk, így 0,7 a valószínűsége, hogy nem. Ennek kell egymástól függetlenül 10-szer bekövetkeznie, így a valószínűség:

$$P(\text{nem húzunk kérdőjelet})=\left(\frac{7}{10}\right)^{10}\approx 0,0282.$$

(c) Nézzük a rossz esetek valószínűségét, vagyis amikor legfeljebb két kérdőjelet húzunk. Azt már tudjuk, hogy a 0 kérdőjel valószínűsége $\left(\frac{7}{10}\right)^{10}$.

Az egy kérdőjel húzásának valószínűsége: $\binom{10}{1}\cdot\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{9}$, hiszen egyszer kérdőjelet kell húznunk, annak az esélye 0,3, kilencszer nem szabad kérdőjelet húzni, aminek valószínűsége 0,7, és 10 különböző helyen következhet be az, hogy kérdőjelet húzunk.

Hasonló megfontolással a két kérdőjel húzásának esélye: $\binom{10}{2}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{2}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{8}$. Vagyis

$$P(\text{több, mint két kérdőjel})=1-\left(\frac{7}{10}\right)^{10}-\binom{10}{1}\cdot\frac{3}{10}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{9}-\binom{10}{2}\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{2}\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^{8}\approx 0,351.$$

643. Az egyenlet két oldalán álló kifejezéseknek nincs értelme, ha $\cos x=0$, hiszen ekkor $\operatorname{tg} x$ nem értelmezett, illetve ha $\sin x+\cos x=0$, hiszen ekkor a bal oldalon a tört nevezője lenne 0.
Első lépésként egyszerűsítsük a bal oldali törtet $\cos x$-szel, hogy mindenhol csak $\operatorname{tg} x$-ek legyenek.

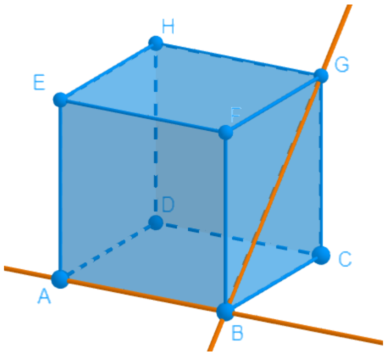
$$\frac{2\cos x+4\sin x}{\cos x+\sin x}=2\operatorname{tg} x+1$$
$$\frac{2+4\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}=2\operatorname{tg} x+1$$

Ha most $y=\operatorname{tg} x$, akkor azt kapjuk, hogy

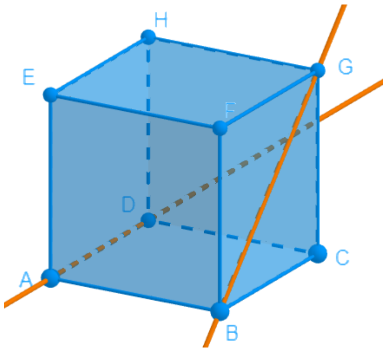
$$\frac{2+4y}{1+y}=2y+1$$
$$2+4y=(2y+1)(1+y)$$
$$2y^2-y-1=0$$
$$(2y+1)(y-1)=0.$$

Amiből azt látszik, hogy $y=-\frac{1}{2}$ vagy $y=1$. Az előbbi esetből kapjuk, hogy $x=\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)+k\pi$, a másodikból, hogy $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$. Mindkét esetben értelmes marad az eredeti kifejezés, tehát ezek az eredeti egyenlet gyökei.

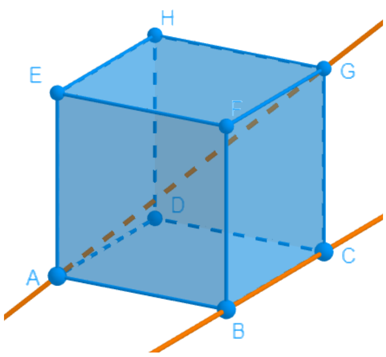
644. (a) Ez a két egyenes merőleges egymásra, hiszen $AB\perp BF$ és $AB\perp BC$ hiszen megfelelő négyzetek szomszédos oldalai. BF és BF két metsző egyenes a $BCGF$ síkban, amiből az következik, hogy ez a sík merőleges AB-re. Amiből pedig az következik, hogy AB merőleges ennek a síknak minden egyenesére, így BG-re is.



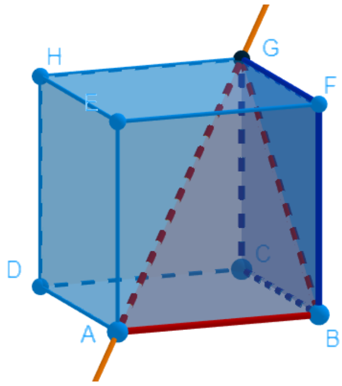
(b) AD és BG kitérő egyenesek, ezért toljuk el mondjuk AD-t úgy, hogy legyen közös pontja BG-vel. $AD \parallel BC$, vagyis $\sphericalangle(AD, BG) = \sphericalangle(BC, BG)$. Mivel ezek egy síkban vannak, és az egyik egy négyzet oldalegyenese, a másik pedig az átló egyenese, így a szögük 45°.



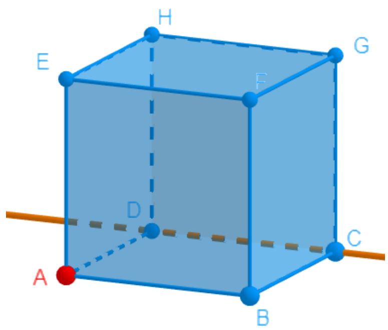
(c) Ez a két egyenes is kitérő, ezért toljuk el BC-t AD-be. Az AD és az AG szögét pedig az ADG derékszögű háromszög segítségével határozzuk meg. Legyen a kocka élhossza 1, ekkor $|AD| = 1$ és $|DG| = \sqrt{2}$. Ebből következik, hogy a keresett szög tangense $\sqrt{2}$. Vagyis $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{2} \approx 57,74^{\circ}$.



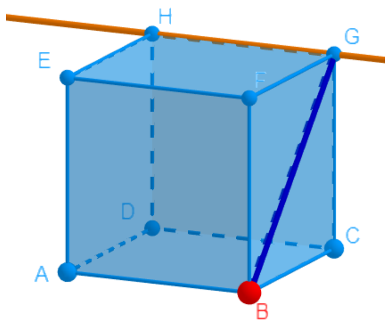
(d) Egyenes és sík szögének meghatározásakor levetítjük az egyenest a síkra. Az AG egyenes vetülete a BG egyenes, hiszen G az egyenes és a sík metszéspontja, A merőleges vetülete pedig B, hiszen AB merőleges a síkra. Akkor az $AGB\sphericalangle$ szöget kell meghatároznunk. Tekintsük az AGB derékszögű háromszöget, ebben tudjuk, hogy $|AB| = 1$, $|BG| = \sqrt{2}$ és $|AG| = \sqrt{3}$. Mivel B-nél van derékszög, ezért a keresett szög tangense $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Vagyis $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 35,26^{\circ}$.



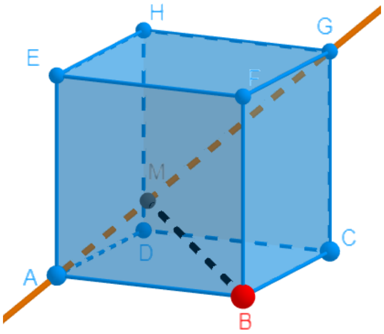
645. (a) Tudjuk, hogy $AD \perp CD$, ezért a pont és az egyenes távolsága éppen az AD szakasz hossza, ami 1.



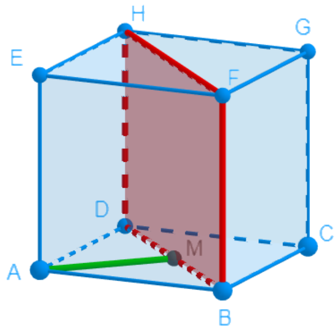
(b) BG merőleges a GH egyenesre, mivel a $BCGF$ sík merőleges a GH egyenesre. Ez pedig azért igaz, mert két metsző egyenese, CG és GF merőleges GH-ra. Ebből pedig következik, hogy a keresett távolság $\sqrt{2}$.



(c) Tekintsük az ABG háromszöget. Ez egy derékszögű háromszög, mert már tudjuk az előző feladatból, hogy $AB \perp BG$. Az oldalak hossza is ismert, hiszen $|AB| = 3$, $|BG| = 3\sqrt{2}$, $|AG| = 3\sqrt{3}$. A kérdés, hogy ennek a háromszögnek a BM magassága milyen hosszú, hiszen a távolságot úgy kapjuk meg, ha merőlegest állítunk az egyenesre.
A magasságot pedig meghatározhatjuk a terület alapján. Egyrészt a háromszög területe a két befogó szorzatának a fele, vagyis $\frac{3 \cdot 3\sqrt{2}}{2}$, másrészt pedig a keresett d távolság és az átfogó szorzatának a fele, vagyis $\frac{d \cdot 3\sqrt{3}}{2}$. Ebből kapjuk, hogy $d = 3\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6} \approx 2,45$.



(d) Az FDH síkban a B csúcs is benne van. Az ábrán látható, hogy az A pont síktól vett távolsága az AM szakasz hossza. Ez pedig egy oldallap átlójának a fele, vagyis $\frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2,12$.



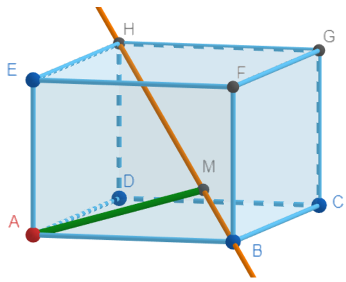
646. (a) Az ABH háromszög segítségével tudjuk kiszámolni a távolságot. Ez ismét egy derékszögű háromszög, hiszen $AB \perp AH$, hiszen $AB \perp s_{ADHE}$, hiszen nyilvánvalóan merőleges annak két egyenesére, AD-re és AE-re.

Ebben a háromszögben minden oldal hosszát ki tudjuk számolni. $|AB| = 4$, $|AH| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$, és a BH testátló, tehát $|BH| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{61}$. Vagyis egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magasságának meghatározása a feladat, ha ismerjük az oldalak hosszát.

Ezt a problémát már megoldottuk a 645c. feladatban. Most is kétféleképpen számoljuk ki a területet:

$$T = \frac{4 \cdot \sqrt{45}}{2} = \frac{d \cdot \sqrt{61}}{2}.$$

Ebből $d = \frac{4 \cdot \sqrt{45}}{\sqrt{61}} \approx 3,44$.

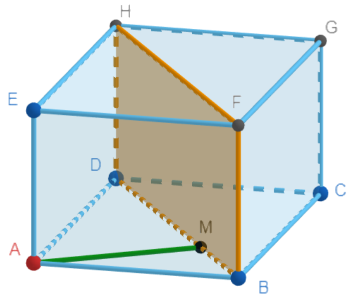


(b) Most az ABD háromszög lesz a segítségünkre, hiszen az $s_{ABCD} \perp s_{BDHF}$, ezért az A-ból az s_{BDHF}-ra állított merőleges benne van az s_{ABCD}-ben.

Ez ismét egy derékszögű háromszög, amelynek ismét ismerjük az összes oldalát, és az átfogóhoz tartozó magasságot kell meghatároznunk. Az oldalak: $4, 6$ és $\sqrt{52}$, vagyis

$$T = \frac{4 \cdot 6}{2} = \frac{d \cdot \sqrt{52}}{2}.$$

Ebből $d = \frac{24}{\sqrt{52}} \approx 3,33$.



647. Két négyzetszám van a dobókockán, az 1 és a 4. Vagyis annak a valószínűsége, hogy egy dobás során négyzetszámot dobunk: $p = \frac{1}{3}$. Emiatt annak a valószínűsége, hogy nem dobunk négyzetszámot $\frac{2}{3}$. Háromszor kell négyzetszámot dobnunk és 4-szer nem négyzetszámot. Ezek függetlenek egymástól, ezért a keresett valószínűség:

$$P(\text{3-szor dobunk négyzetszámot}) = \binom{7}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4.$$

Miért szorzunk $\binom{7}{3}$-mal? Mert egy konkrét sorrendnek a valószínűsége $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$, és a 3 négyzetszám, 4 nem négyzetszám $\binom{7}{3}$ sorrendben fordulhat elő.

648. Két megoldást mutatunk.
1. megoldás: Tegyük fel, hogy először kihúzzuk a páros számokat, majd a páratlanokat. Az első páros szám húzásának valószínűsége $\frac{45}{90} = \frac{1}{2}$, a másodiké ezek után már $\frac{44}{89}$, hiszen a maradék 89 számból már csak 44 páros. Ha most páratlanokat kell húznunk, akkor a valószínűség rendre: $\frac{45}{88}, \frac{44}{87}, \frac{43}{86}$. Vagyis ennek a konkrét húzási sorrendnek

$$\frac{45}{90} \cdot \frac{44}{89} \cdot \frac{45}{88} \cdot \frac{44}{87} \cdot \frac{43}{86}$$

a valószínűsége. Ha más sorrendben húzzuk ki, mondjuk elsőre és negyedikre húzunk páros, akkor más számokat kapunk: $\frac{45}{90} \cdot \frac{45}{89} \cdot \frac{44}{88} \cdot \frac{44}{87} \cdot \frac{43}{86}$, de a szorzat ugyanaz lesz. Hiszen a nevezőben végig egyesével csökkenek a számok, a számlálóban pedig lesz két 45-ös, hiszen párosból és páratlanból is kell egy elsőt húznunk, lesz két 44-es, mert mindkettőből kell egy második, és lesz egy 43-as, amikor a harmadik páratlant kihúzzuk. Vagyis a konkrét sorrendtől függetlenül ugyanannyi a valószínűség minden esetben. Mivel 5 szám van, és 2 páros, ezért a sorrend $\binom{5}{2}$-féle lehet, így a valószínűség:

$$P(\text{2 páros szám}) = \binom{5}{2} \cdot \frac{45 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 44 \cdot 43}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}.$$

2. megoldás: összesen $\binom{90}{5}$ lehetséges számötös van. A két páros számot ki tudjuk választani $\binom{45}{2}$ különböző módon, a 3 páratlant pedig $\binom{45}{3}$-féleképpen. Ezek a választások egymástól függetlenek, ezért a valószínűség:

$$P(2 \text{ páros szám}) = \frac{\binom{45}{2}\cdot\binom{45}{3}}{\binom{90}{5}}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy két érték ugyanaz, kicsit kevesebb, mint 32%.

649. Lehetne az az értelmezés, hogy a legvalószínűbb értéket tekintjük úgy, mint várható érték. Nem ez a szokás, és ennek egyik oka, hogy ha több egyformán legvalószínűbb kimenetel van, akkor az érték nem lenne egyértelmű.
Ezért azt nevezzük **várható érték**nek, hogy ha sokszor elvégezzük a kísérletet, akkor a kimenetelek átlaga mi lesz.
Nézzük a szokásos dobókockát. Dobjunk vele mondjuk 6000-szer. Ha minden oldal egyformán valószínű, akkor ez azt jelenti, hogy az az elvárásunk, hogy minden szám nagyjából 1000-szer jöjjön ki. Vagyis a dobások átlaga várhatóan

$$\text{Átlag} = \frac{1000\cdot1+1000\cdot2+1000\cdot3+1000\cdot4+1000\cdot5+1000\cdot6}{6000} =$$
$$= 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3,5.$$

Ami elsőre butaságnak tűnik, hiszen nem is egész, ilyen számot egyáltalán nem is dobhatunk egy kockával. Meg fogjuk látni, hogy ennek ellenére van ennek értelme.

A fentiek alapján általában is definiálhatjuk a **várható érték**et. (E-vel szokás jelölni.) Ha van egy eloszlásunk, aminek a kimetelei valós számok: $a_1, a_2, \dots a_n$, és a megfelelő valószínűségek $p_1, p_2, \dots, p_n$, akkor a várható érték:

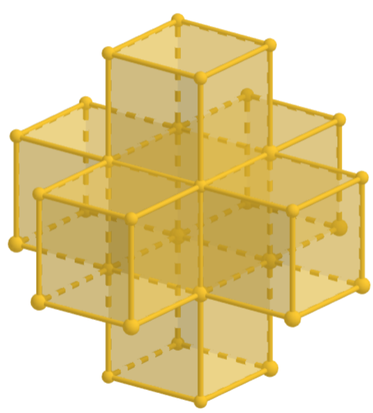
$$E = a_1p_1 + a_2p_2 + \dots a_np_n.$$

A dobókockánál minden $p_i = \frac{1}{6}$, és $a_i = i$.

(b) Ennél a dobókockánál 3 lehetséges kimenetel van, vagyis $n = 3$. Ha $a_1 = 1, a_2 = 3$ és $a_3 = 6$, akkor világos, hogy $p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{1}{6}$. Ezek alapján:

$$E = 1\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{3}+6\cdot\frac{1}{6} = 2,5.$$

650. Igen, van ilyen test. Ha pl. egy kocka minden lapjához ragasztunk egy vele egybevágó kockát:



651. Készítsünk táblázatot, amelyben a 2 dobások számának várható értéke szerepel. Tudjuk, hogy a 2-es dobás valószínűsége $\frac{1}{6}$, annak a valószínűsége, hogy nem 2-est dobunk $\frac{5}{6}$:

kimenetel	valószínűség	magyarázat
0	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	egyik dobás sem 2-es.
1	$3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$	egyik dobásnak kell 2-esnek lennie, és az 3 kockán lehet, a másik kettő nem 2-es.
2	$\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6}$	két dobásnak kell 2-esnek lennie, és az $\binom{3}{2}$-féleképpen lehet, a harmadik nem 2-es
3	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$	mindhárom dobás 2-es

A várható érték kiszámítása ezek után már egyszerű:

$$E = 0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3 + 1\cdot 3\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 2\cdot\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{5}{6} + 3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{75}{216} + \frac{30}{216} + \frac{3}{216} = \frac{1}{2}.$$

Érdemes észrevenni, hogy ha egyszer dobnánk, akkor $\frac{1}{6}$ lenne a 2-esek számának várható értéke, ha pedig 3-szor dobunk, akkor $3\cdot\frac{1}{6}$.

652. Nézzük meg a lehetséges eseteket, amit a két szám szorzataként kaphatunk, illetve a hozzájuk tartozó valószínűségeket. A táblázatban minden értéket $\frac{1}{36}$-dal szorozva kell érteni:

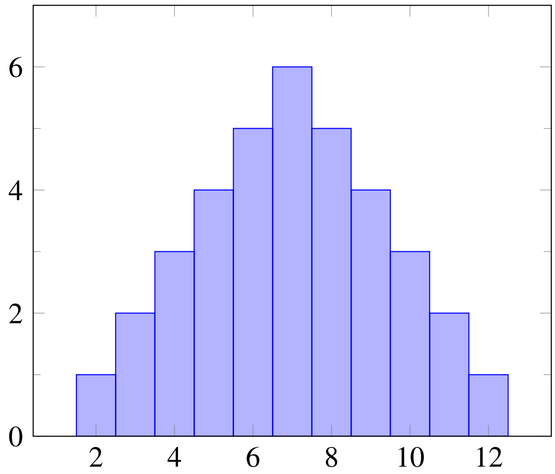
a_i	p_i	a_i	p_i	a_i	p_i
1	1	8	2	18	2
2	2	9	1	20	2
3	2	10	2	24	2
4	3	12	4	25	1
5	2	15	2	30	2
6	4	16	1	36	1

Az 1 csak úgy jöhet ki, ha mindkét kockán 1-et dobunk, a 6 viszont 4-féleképpen: 1-6, 2-3, 3-2, 6-1. (Tekinthetnénk az 1-6-ot és a 6-1-et egy esetnek, de akkor nem lenne ez az eset ugyanolyan valószínű, mint pl. az 1-1.) Ezt szem előtt tartva minden fenti valószínűség ellenőrizhető.
Bár nem volt kérdés, de érdemes megnézni a szorzat várható értékét. Azt kapjuk, hogy $\frac{441}{36} = 12,25$. Ami azért érdekes, mert $12,25 = 3,5^2$, és ha egy kockával dobunk, akkor dobott szám várható értéke éppen $3,5$.

653. Számoljuk ki az egyes lehetőségek valószínűségét, vagyis az eloszlást. Ekkor az alábbit kapjuk (ismét minden valószínűséget $\frac{1}{36}$-ban értjük:

a_i	p_i	a_i	p_i	a_i	p_i
2	1	6	5	10	3
3	2	7	6	11	2
4	3	8	5	12	1
5	4	9	4		

Amit ábrázolhatunk is egy hisztogramon:



Ezek után már könnyen megkapjuk a várható értéket:

$$E = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{4}{36} + 6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} + 8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{4}{36} + 10\cdot\frac{3}{36} + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} = 7.$$

Ismét érdemes megjegyezni, hogy egy kockadobás esetén 3,5 a várható érték, két dobás összegének várható értéke pedig $3,5 + 3,5 = 7$.

654. Válasszunk pár ismertebb testet:

test	csúcsok (c)	élek (e)	lapok (l)
tetraéder	4	6	4
kocka	8	12	6
négyzet alapú gúla	5	8	5
hatszög alapú hasáb	12	18	8
a 650. feladatbeli test	32	60	30

A fentiek alapján azt vehetjük észre, hogy a csúcsok és lapok számának összege mindig 2-vel nagyobb, mint az élek száma.

Ez az összefüggés igaz minden konvex poliéderre (sőt, az ún. egyszerű poliéderekre is).

Ez az **Euler-féle poliédertétel**:

$$c + l = e + 2.$$

655. Legyen a kocka éle 1 hosszúságú. Ekkor a beírt gömb sugara $r = \frac{1}{2}$, hiszen az átmérő 1, így a sugár fele az átmérőnek.
A körülírt gömb átmérője a kocka testátlója, és ennek fele a sugara. Mivel a testátló hossza $\sqrt{3}$, ezért a sugár $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vagyis a két sugár aránya $\sqrt{3}$.

656. Nézzük meg az eloszlást. A kimenetel 4-féle lehet, 0, 1, 2 vagy 3 találatunk lehet. Vizsgáljuk meg mindnek a valószínűségét. (A 0-t el is hagyhatjuk, mert a várható értékben 0-val fogjuk szorozni a valószínűségét.) A kihúzott számokat nevezzük jónak, a többit rossznak. Mivel 10 számból húznak 3-at, ezért $\binom{10}{3} = 120$ elemi esemény van.

a_i	p_i	magyarázat
0	$\frac{\binom{7}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{35}{120}$	A 7 rossz számból kell 3-at választanunk.
1	$\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{7}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{63}{120}$	A 3 jóból 1-et, a 7 rosszból 2-t kell választanunk.
2	$\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{7}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{21}{120}$	A 3 jóból 2-t, a 7 rosszból 1-et kell választanunk.
3	$\frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}$	A 3 jóból kell 3-at választanunk.

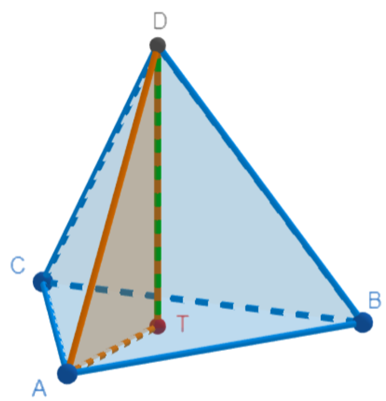
Ezek alapján a várható érték:

$$E = 0 \cdot \frac{35}{120} + 1 \cdot \frac{63}{120} + 2 \cdot \frac{21}{120} + 1 \cdot \frac{1}{120} = \frac{108}{120} = 0,9.$$

Vegyük észre, hogy ha olyan szelvénnyel játszanánk, amin csak egy számot jelölhetünk meg, akkor a várható érték $\frac{3}{10}$ lenne. Ha pedig 3 számot jelölhetünk meg, akkor $\frac{3 \cdot 3}{10}$.

A másik érdekesség, hogy ezen a lottón valószínűbb, hogy lesz találatunk, mint az, hogy nem lesz. Sőt, jóval valószínűbb, hiszen kevesebb mint 30% annak az esélye, hogy nem lesz találatunk.

657. Tekintsük az $ABCD$ tetraédert:

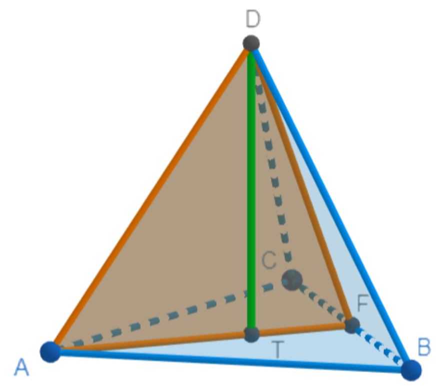


A magasságot úgy kapjuk meg, hogy a D csúcsot merőlegesen vetítjük az alaplapra, és az így kapott T és D pontok által meghatározott szakasz a magasság. A T pont a szimmetria miatt az ABC háromszögnek a „mindenes” pontja, vagyis a súlypontja, magasságpontja, beírt és körülírt körének középpontja.

Vizsgáljuk az ATD háromszöget. Ebben $|AD| = 1$. Az AT szakasz pedig egy súlyvonal hosszának a $\frac{2}{3}$-a, hiszen ismerjük a súlypont ezen tulajdonságát. Az egységoldalú szabályos háromszög magassága $\frac{\sqrt{3}}{2}$, vagyis $|AT| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Innen pedig Pitagorasz-tétel segítségével kapjuk, hogy $m = |AD| = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Bármely két lapsík szöge egyforma, határozzuk meg az ABC és a BCD lapok szögét. Vegyük ehhez a BC él felezőpontját, ami legyen F. A két sík metszésegyenes a BC egyenes. Ha F-ben merőlegest állítunk BC-re mindkét síkban, akkor BA és BD egyeneseket kapjuk, hiszen a lapok szabályos háromszögek. Ezért a két lap szöge a $AFD\sphericalangle$.



Az előző feladatrészben szereplő T pontot használjuk fel, és nézzük a DTF derékszögű háromszöget. Ebben tudjuk, hogy $|DT| = \sqrt{\frac{2}{3}}$, és $|FT| = \frac{\sqrt{3}}{6}$, hiszen a súlyvonal hosszának harmada. Így azt kapjuk, hogy a keresett α szögre igaz, hogy

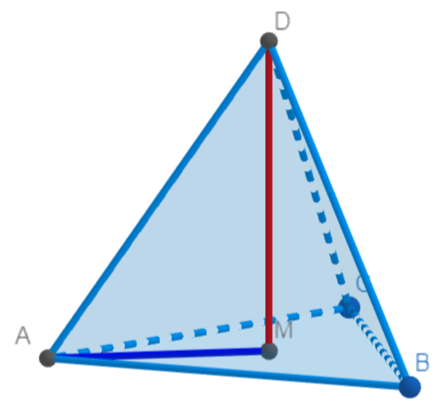
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \sqrt{8}.$$

Vagyis $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{8} \approx 70{,}53^{\circ}$.

658. Tekintsük 657. feladat első részének ábráját. Ott már kiszámítottuk, hogy az egységoldalú tetraéder magassága $|DT| = \sqrt{\frac{2}{3}}$, illetve $|AT| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

A keresett szög ebben a háromszögben a $\alpha = DAT\sphericalangle$. Világos, hogy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{2}$. Vagyis

$$\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2} \approx$$



659. A kérdés feltevés nem precíz, hiszen nem tudjuk, hogy mikor mondjuk azt, hogy érdemes próbálkozni. Állapodjunk meg abban, hogy akkor érdemes próbálkozni, ha a nyereményünk várható értéke nagyobb, mint a befizetett összeg. (Máshogy is definiálhatnánk azt, hogy érdemes próbálkozni.)

660. A sebességről azt tudjuk, hogy $v = \frac{s}{t}$. De ez egy adott időintervallumon mondja meg az átlagsebességet. Közvetlenül ezzel a képlettel nem tudjuk megmondani, hogy mekkora a pillanatnyi sebesség. (Már csak

azért sem, mert egyelőre nem is definiáltuk, hogy ez mit jelent.) A kérdés tehát az, hogy milyen módon tudnánk erre a kérdésre elfogadható választ adni.
A pillanatnyi sebesség elnevezés arra utal, hogy abban a pillanatban vagyunk kíváncsiak az értékre. De a sebesség eddig megszokott fogalmához két időpont kell. Jó ötletnek tűnik, hogy megbecsüljük a sebességet úgy, az időintervallumot egyre kisebbnek választjuk. Nevezzük pillanatnyi sebességnek azt az értéket, amit ezzel a közelítéssel kapunk, ha az időintervallum hossza 0-hoz tart.

Nézzünk meg pár közelítő értéket. Legyen $t_0 = 1$, vagyis az az időpont, amelyben érdekel minket a pillanatnyi sebesség. Válasszunk különböző t_1 értékeket a becsléshez. Ha a test heyzetét a t pillanatban az $f(t)$ függvény írja le, akkor a sebességet az

$$\frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

kifejezéssel tudjuk becsülni, hiszen a számláló a megtett út a $[t_0; t_1]$ időintervallumban, a nevező pedig az ez alatt eltelt idő. (Ha $t_1 < t_0$, akkor persze a $[t_1; t_0]$ időintervallumról van szó.)

661.

662. A számok között 3 négyzetszám van, így minden dobás esetén $\frac{3}{8}$ a négyzetszám dobás valószínűsége. Vagyis egy $n = 10, p = \frac{3}{8}$ paraméterű binomiális eloszlásról van szó, és tudjuk, hogy általában np a várható érték, vagyis esetünkben: $\frac{30}{8}$.

663.

664.

665. Számoljuk ki azt, hogy mi a valószínűsége, hogy nem húzunk zöldet. Ekkor 24 lapból kell mind a három kihúzott lapott kiválasztanunk, vagyis a valószínűség: $\frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}}$. Ha ezt a valószínűséget 1-ből kivonjuk, akkor épp az ellentétes esemény valószínűségét kapjuk, vagyis azt, hogy húzunk zöldet. A kérdésre tehát a válasz:

$$1 - \frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{367}{620} \approx 0,592.$$

Ha 3 lapot húzunk, akkor 0, 1, 2 vagy 3 zöld lap lehet közöttük. Ezek valószínűsége rendre:

$$\frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}}, \frac{\binom{24}{2} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{32}{3}}, \frac{\binom{24}{1} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{32}{3}}, \frac{\binom{8}{3}}{\binom{32}{3}}.$$

A várható érték kiszámításához minden valószínűséget meg kell szoroznunk a zöld lapok számával, és ezeket kell összeadnunk. Vagyis a keresett érték:

$$E = 0 \cdot \frac{\binom{24}{3}}{\binom{32}{3}} + 1 \cdot \frac{\binom{24}{2} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{32}{3}} + 2 \cdot \frac{\binom{24}{1} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{32}{3}} + 3 \cdot \frac{\binom{8}{3}}{\binom{32}{3}} = \frac{3}{4}.$$

666.

667. Ha a 700 embert felosztjuk a megfelelő arányban, akkor azt kapjuk, hogy 112, 196, illetve 392 ember választotta az adott választ. Mivel $6 + 9 + 16 = 31$, ezért az összes válaszoló száma osztható 31-gyel. A 700-nál nagyobb 31-gyel osztható számok: 713, 744, 775 stb. Ha 744 vagy kevesebb ember lenne, akkor annak a $\frac{16}{31}$ része kevesebb lenne, mint 392. Mivel a harmadik választ már az első 700-ből is 392-en választották, ezért ez lehetetlen. Vagyis a legkisebb lehetséges létszám 775, ami meg is valósulhat, hiszen ekkor a végső számok: 150, 225 és 400.

668. Ha az energia x, a víz pedig y forintba kerül, akkor tudjuk, hogy a B program alapján $x + y + 50 = 150$. Azaz $x + y = 100$. Az A program alapján: $1,3x + 0,8y + 50 = 165$, vagyis $1,3x + 0,8y = 115$. Megoldva az egyenletrendszert, azt kapjuk, hogy $x = 70$, $y = 30$.
Mivel a *B* program 15%-kal kevesebb elektromos energiát, de 25%-kal több vizet használ, mint a C program, ezért a C program ára:

$$\frac{x}{0,85} + \frac{y}{1,25} + 50 = \frac{70}{0,85} + \frac{30}{1,25} + 50 \approx 156.$$

669. Ilyen húzás 4-féleképpen fordulhat ez elő:

1. A két ász a tök ász és a makk ász.
2. A két ász egyike a tök vagy a makk ász, a másik pedig a piros ász.
3. A két ász egyike a tök vagy a makk ász, a másik pedig a zöld ász.
4. Kihúzzuk a piros és a zöld ászt is.

Nézzük meg egyenként, hogy melyik hányféleképpen következhet be:

1. Az rögzített, hogy a tök és a makk ászt ki kell húznunk, így csak a piros és a zöld lapok esetében van választásunk. Egyik színből sem húzhatjuk ki az ászt, ezért mindkét esetben 7 lapból kell választanunk kettőt, és a két választás független. Az esetek száma: $\binom{7}{2} \cdot \binom{7}{2}$.
2. Ki kell húznunk a piros ászt és még 7 piros lapból az egyiket. A hét lehetséges zöldből (ász nem lehet) kell húznunk kettőt. A makk és a tök ász közül az egyiket, ami két lehetőség, és a többi tök, illetve makk lapból (14-ből összesen) 1-et. Ez tehát $7 \cdot \binom{7}{2} \cdot 2 \cdot 14$.
3. Ez pontosan ugyanaz, mint az előző eset.
4. Kell az ászok mellé még egy piros és egy zöld lapot húznunk, az mindkét esetben 7-7 lehetőség. A nem ász makk és több lapokból pedig kettőt, vagyis: $7 \cdot 7 \cdot \binom{14}{2}$.

A végeredmény a négy szám összege, azaz: 13132.

670.

671.