1.

2018/09/05

Első óra: beszélgetés, technikai tudnivalók.

2.

2018/09/06

2016-os Bolyai Csapatverseny körzeti fordulójának feladatai.

3–4.

2018/09/10

207. Hány metszéspontja lehet egy egyenesnek és egy hatszögnek?

    (b) És egy egyenesnek és egy hétszögnek?

208. Megoldható-e az egész számok körében az alábbi egyenlet?

$$(x+y)(y+z)(z+x) = 3333333333.$$

209. Adott egy szabályos 12-szög egyik oldala. Szerkesztendő a körülírt kör sugara!

210. Péter és Pál beszélgetnek. Pali elmeséli, hogy három gyermeke van. Erre Péter érdeklődik, hány évesek ezek a gyerekek.
PALI: Elárulom, hogy a három (egész számokban kifejezett) életkor szorzata 36.
PÉTER: Ebből még nem tudom megállapítani az életkorukat.
PALI: No, akkor még azt is megmondom, hogy az összegük annyi, mint a Te lakásod házszáma.
PÉTER (hosszas gondolkodás után): Sajnos még ebből sem lehet meghatározni a három számot.
PALI: Azt is figyelembe veheted, hogy amikor a Te Borcsa lányod a világra jött, nekem még nem volt gyermekem.
PÉTER: Köszönöm a segítséget, most már tudom, hogy hány évesek a gyermekeid.
Hány évesek Pali gyermekei?

Házi feladat: **207b., 210.**

5.

2018/09/12

211. Legfeljebb hány metszéspontja lehet
   (a) két hatszögnek?
   (b) két hétszögnek?

   A véges maximumot keressük.

212. Adott 4 pont a koordináta-rendszerben: $A(1;2)$, $B(3;7)$, $C(7;4)$, $D(4;5)$. Melyik kettő van legtávolabb, illetve legközelebb egymáshoz? Mekkorák ezek a távolságok?

213. Mi az alábbi állításpárok logikai kapcsolata?
   (a) A: Egy szám osztható 48-cal.
   B: Egy szám osztható 6-tal és 8-cal is.
   (b) A: Az ABC háromszög derékszögű.
   B: $a^2 + b^2 = c^2$.
   (c) A: Egy szám osztható 3-mal.
   B: Egy szám minden számjegye osztható 3-mal.

Házi feladat: **211b., 212., 213bc.**

6.

2018/09/13

Ki, mire emlékszik a tavalyi évből? - Felmérés

1. Hány páratlan osztója van 70000-nek?
2. Egy 3×7-es téglalap bal felső sarkából szeretnénk eljutni a jobb alsóba. Minden lépésben egyet jobbra, vagy egyet lefelé léphetünk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
3. Mennyi maradékot ad a $3(5^{35} - 3)$ szám 4-gyel osztva?
4. Legyen $g(x) = x^2 + |x - 2| - 1$. Mennyi $g(-1) + g(1)$?
5. Hányféleképpen lehet 20 kosárlabdázóból egy 3-fős streetball-csapatot összeállítani?
6. Mekkora egy háromszög külső szögeinek összege?
7. Írd fel az $(x^2 - x + 2)(3x + 1)$ kifejezést zárójel nélkül (a szokásos polinomalakban).
8. Az $\overline{123a5b}$ szám osztható 12-vel. Mennyi $a + b$ legnagyobb lehetséges értéke?
9. Add meg az $x^2 + 3x = 10$ egyenlet összes gyökét.
10. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 10 cm, az átfogója 17 cm hosszú. Milyen hosszú a körülírt körének a sugara?

7–8.

2018/09/17

Két pont távolsága derékszögű koordinátarendszerben.

214. Adott egy k kör és az A és B pontok. Szerkeszd meg a k kör pontjait, amelyek egyenlő távolságra vannak A-tól és B-től.

215. Oldd meg a:

(a) $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$;

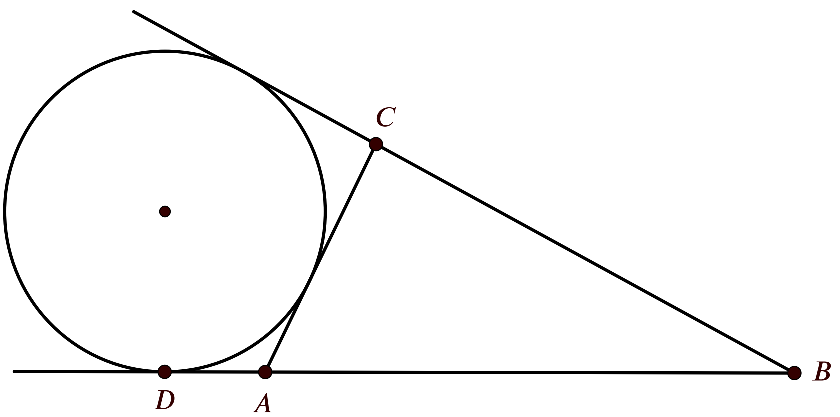
(b) $|x+3| + |2x-y| = 0$

egyenletet.

216. Igaz-e, hogy a sík tetszőleges 3 pontjához van olyan kör, amelyre illeszkedik mindhárom pont?

(b) Igaz-e ez 4 pontra?

217. Az alábbi ábrán $DB = 10$. Mekkora az ABC háromszög kerülete?



Házi feladat: **211d., 215b., 216., 217.**

9.

2018/09/19

Adott pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak.
Húrnégyszög. Érintőnégyszög.

218. Mely trapézok húrnégyszögek is egyben?

219. Adott egy 60°-os szögtartomány. Szerkessz 2 cm sugarú kört, ami érinti a szögszárakat.

220. Egy érintőnégyszög három oldalának hossza 5, 6 és 7 cm. Milyen hosszú lehet a negyedik oldal?

Házi feladat: **218–220.**

10.

2018/09/20

Érintőnégyszögek tétele: érintőnégyszögben a szemközti oldalak hosszának összege megegyezik.

221. Igaz-e, hogy az ABC háromszög A-ból és B induló magasságainak talppontja (T_A és T_B), illetve az A és B csúcsok egy körön vannak?

222. Oldd meg az alábbi egyenletet:

$$\left|x^2 - 4x + 3\right| = 2.$$

Házi feladat: **211d., 221., 222.**

11–12.

2018/09/24

Legfeljebb hány metszéspontja lehet egy m-szögnek és egy n-szögnek.
Ha m és n páros, akkor $m \cdot n$. Ha m páros, n páratlan, akkor $m(n-1)$. Ha mindkettő páratlan, akkor a sejtés az, hogy $(m-1)(n-1)+2$, de a probléma megoldatlan.
Ha két egyenes meredekségének szorzata -1, akkor a két egyenes merőleges egymásra.

223. Legyen $A(0;3), B(2;7), C(6;0)$. Derékszögű-e az ABC háromszög?

224. $|x^2 + 6x + 7| < 2$.

225. Vegyél fel egy szakaszt a síkon, és keress olyan pontokat, amelyekből a szakasz 60°-os szögben látszik. Fogalmazz meg sejtést ennek kapcsán!

Házi feladat: **224., 225.**

Óra végi

1. Mekkora a $(2;7)$ és $(6;3)$ pontok távolsága a síkon?
2. $|x^2 - 2x + 3| = 2$
3. Egy érintőnégyszög három oldala $7, 8, 10$. Mekkora lehet a negyedik oldal?

13.

2018/09/26

226. Azt tapasztaltuk, hogy két köríven vannak azok a pontok, amelyekből ugyanakkora szögben látszik egy szakasz. Mekkora szögben látszik az adott szakasz a középpontból?

227. $x^4 + x^2 - 6 = 0$.

228. Két ember fejére piros vagy fekete sapkát tesznek. 15 másodperc múlva mindkét embernek meg kell tippelnie, hogy milyen színű sapka van a fején. Csak az az információ áll rendelkezésre a tippeléshez, hogy milyen színű sapka van a másik ember fején. Előre összebeszélhetnek. Van-e olyan stratégia, amely garantálja, hogy legalább egy tipp jó legyen?

Házi feladat: **226–228.**

14.

2018/09/27

Kerületi szög. Középponti szög.
Kerületi és középponti szögek tétele.

229. Szerkessz legalább három különböző húrnégyszöget, és mérd meg a szögeiket. Mit veszel észre?

230. Oldd meg az $\frac{x^2-3x+4}{x^2-4} > 0$ egyenlőtlenséget.

231. Oldd meg az $\frac{x^2+10x+1}{x^2+2x+3} > 0$ egyenlőtlenséget.

Házi feladat: **228–231.**

15–16.

2018/10/01

Húrnégyszögek tétele.
Négyzetgyök ismétlése.

232. A síkra ledobunk egy egyenest, ami csörömpölve leesik. Hány rácspont lehet az egyenesen?

233. $2x^6 + 5x^3 - 3 = 0$.

234. Szerkessz húrnégyszöget, ha adott két szemközti oldalának, az egyik átlójának és a körülírt kör sugarának a hossza.

Óra végi

1. $\frac{x^2-x-2}{x^2+2} < 0$
2. Kerületi, középponti szögek tétele.

3. Húrnégyszögek tétele.

Házi feladat: **232., 234. tényleges szerkesztés**

17.

2018/10/03

Köbgyök ($\sqrt[3]{a}$).
Racionális számok.

235. Keress olyan a, b egész számokat, amelyekre

$$\frac{a}{b} = 0,2794\overline{46}\ldots$$

236. Miért irracionális $\sqrt{2}$?

Házi feladat: **235., 236.**

18.

2018/10/04

$\sqrt{2}$ irracionális. Indirekt bizonyítás a számelmélet alaptételével, és anélkül.
Ha N pozitív egész, akkor $\sqrt{N}$ egész vagy irracionális.
Szakaszos tizedes tört átírása két egész szám hányadosára.

237. Szerkessz egy hegyesszögű, egy derékszögű és egy tompaszögű háromszöget. Szerkeszd meg a magasságvonalaikat. Mit tapasztalsz?

238. Írd fel

   (a) $0,1234\overline{34}\ldots$;
   (b) $0,2018\overline{2018}\ldots$

   számokat két egész szám hányadosaként.

Házi feladat: **237., 238.**

19–20.

2018/10/08

Magasságpont.

239. Adott egy háromszög. Minden egyenes és kör szerkesztése 100 Ft-ba kerül. Szerkessz minél olcsóbban
    (a) körülírt kört;
    (b) magasságpontot.

240. Oldd meg az $\frac{x^2+10x+1}{x^2+2x+3} > 2$ egyenlőtlenséget.

241. Bizonyítsd be, hogy a háromszög magasságai egy ponton mennek keresztül.

Házi feladat: **239b., 240., 241.**

Óra végi

1. Írd fel $0,5\overline{12}\ldots$-t két egész szám hányadosaként.
2. Bizonyítsd be, hogy $\sqrt{2}$ irracionális.

21.

2018/10/10

Bizonyítás: a háromszög magasságvonalai egy ponton mennek keresztül.

Dolgozat: október 24.

242. Szerkessz húrnégyszöget, ha adott 3 szomszédos oldalának és egy átlójának hossza.

243. Szerkeszd meg egy hegyesszögű és egy tompaszögű háromszög magasságpontjait. Majd mindkét esetben tükrözd a magasságpontot a háromszög oldalaira. Szerkeszd meg az így kapott 3 pont körülírt körét. Mit tapasztalsz?

Házi feladat: **239b., 242., 243.**

22.

2018/10/11

n-edik gyök.

244. Bizonyítsd be, hogy ha a magasságpontot tükrözzük a háromszög oldalára, akkor a kapott pont rajta van a háromszög körülírt körén.

245. Írd fel más alak(ok)ban az alábbi számokat:

(a) $\sqrt{\sqrt{2}}$;

(b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{7}$

(c) $\sqrt[3]{81}$;

Házi feladat: **244., 245.**

23–24.

2018/10/15

Gyökvonás azonosságai:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

A hatványozás kiterjesztése ha $a \geq 0$:

$$\sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$$
$$a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n} = \left(\sqrt[k]{a}\right)^n$$

246. Írd fel más alak(ok)ban az alábbi számokat:

(a) $\sqrt[7]{128}$

(b) $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2$

(c) $\sqrt[4]{\sqrt[6]{256}}$

(d) $\sqrt[3]{4^{12}}$

Házi feladat: **246.**

Óra végi

1. Definiáld $\sqrt[8]{13}$-at.
2. Tudjuk, hogy $\sqrt[n]{15} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{15}}$. Add meg n értékét.
3. Ha $\sqrt[k]{a} = a^m$, akkor mennyi m értéke?
4. $2x - x^2 - 3 < 0$

25.

2018/10/17

Beszélgetés a hatványozásról.

26.

2018/10/18

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

247. Az ABC háromszög köré írt körének középpontja K. Tudjuk, hogy $AKB\sphericalangle = 126^o$ és $BKC\sphericalangle = 68^o$. Mekkorák a háromszög szögei?

248. Add meg más alakban a $\sqrt[4]{\frac{12}{81}}$ számot.

249. Melyik a nagyobb: $3 \cdot \sqrt[3]{5}$ vagy $2 \cdot \sqrt[3]{17}$?

250. Adott egy háromszög a oldala, a szemközti α szöge és az a oldalhoz tartozó magasság hossza (m_a). Szerkeszd meg a háromszöget.

Házi feladat: **249., 250.**

27.

2018/10/24

251. Adott az A és B pont a síkon. Szerkessz olyan e egyenest, amely áthalad A-n és B távolsága e-től 2 cm.

252. Egy szabályos háromszög körülírt körének pontjából milyen szögben látszanak a háromszög oldalai?

253. Hozd minél egyszerűbb alakra a

$$\left(\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{4}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{100} + \sqrt[3]{40} + \sqrt[3]{16}\right)$$

kifejezést.

Házi feladat: **251–253.**

28.

2018/10/25

254. Igaz-e, hogy $a, b \geq 0$ esetén

(a) $\left(a^{-\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

(b) $\left(a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[9]{a^3 b^8}$

mindig teljesül?

255. Egy háromszög szögei α, β és γ. Mekkorák annak a háromszögnek a szögei, amelyet a beírt kör érintési pontjai határoznak meg?

256. $\frac{x^2-x-6}{4-x^2-3x} < 0.$

Házi feladat: **250. megoldása írásban, 254–256.**

29–30.

2018/11/05

Az eddigiek megbeszélése kis csoportok rövid összefoglalói alapján.

31.

2018/11/07

Dolgozat párban

1. Racionális szám-e az $A(2; 4)$ és a $B(6; -3)$ pont távolsága?
2. Add meg az $1,23\dot{6}1\dot{6}\ldots$ számot két egész szám hányadosaként.
3. Add meg a minél egyszerűbb alakban:

   (a) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{-5}{4}}$

   (b) $4^{\frac{1}{3}} \cdot 6^{\frac{2}{3}} \cdot \left(3^2\right)^{\frac{7}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$

   (c) $3^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2+\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{81}} \cdot \left(2-\sqrt{2}\right)$
4. Egy háromszög szögeinek aránya: $5 : 5 : 7$. Tekintsük a háromszög beírt körét, és a kör érintési pontjait a háromszög oldalain. Mekkorák a három pont által alkotott háromszög szögei. Írj részletes indoklást.
5. Oldd meg az
$$\frac{12-2x^2-2x}{x^2+4x-5} \geq 0$$
egyenlőtlenséget.

6. Szerkessz ABC háromszöget, melyben $BC = 5$ cm, $\alpha = 45^{\circ}$. Legyen F a BC oldal felezőpontja, és még azt is tudjuk, hogy $AF = 5,5$ cm.

7. Oldd meg az

$$|x - y + 1| + \sqrt{x^2 - 3} = 0$$

egyenletet.

32.

2018/11/05

Síkbeli geometriai transzformáció definíciója: olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya a sík pontjai, értékkészlete pedig részhalmaza a sík pontjainak.

257. Ha az azonos betűk azonos számjegyeket jelentenek, akkor mennyi $\overline{ABC}$ értéke?

$$\begin{array}{rr} & \mathrm{A\,A} \\ & \mathrm{B\,B} \\ + & \mathrm{C\,C} \\ \hline & \mathrm{A\,B\,C} \end{array}$$

258. Definiálj ismert (vagy kevésbé ismert) síkbeli geometriai transzformációkat.

Házi feladat: **258.**

33–34.

2018/11/12

Dolgozat feladatainak megbeszélése

Tengelyes tükrözés definíciója.

259. Találtunk néhány ismert geometriai transzformációt. Próbáld meg definiálni őket: eltolás, elforgatás, középpontos tükrözés, nagyítás.

Házi feladat: **259.**

35.

2018/11/14

Középpontos tükrözés.

260. Vegyél fel két egyenest a síkon, és egy háromszöget. Tükrözd a háromszöget a két egyenesre egymást követően. Hogy kaphattuk volna meg egy lépésben a kapott alakzatot?

261. $9^{\frac{2}{5}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2^2\right)^{\frac{7}{3}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{5}}$

262. Jancsi és Juliska egymástól jó messze ülnek a réten. Jancsi oda akar menni Juliskához, de kiderül, hogy Juliska szomjas. Szerencsére a közelben van egy patak (egy egyenes), amin nem kell átkelni, mert ugyanazon a partján üldögélnek. Hogyan tud Jancsi a lehető legrövidebb úton eljutni Juliskához, ha közben érinti a patakot is, hogy tudjon neki vizet vinni?

Házi feladat: **260., 262.**

36.

2018/11/15

Eltolás. Elforgatás.
A vektor fogalma.
Körüljárástartó, körüljárásváltó transzformációk.

263. $5^{\frac{4}{3}} \cdot 15^{\frac{3}{2}} \cdot \left(3^3\right)^{\frac{7}{4}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

264. Egy szakaszt tükrözz egymás után két merőleges tengelyre. Hogy kaphattuk volna meg egy lépésben a kapott alakzatot?

265. Osztható-e $\binom{38}{19}$ 17-tel?

Házi feladat: **262. 264., 265., GeoGebrában megszerkesztve egy háromszög tengelyesen és középpontosan tükrözött képe.**

37–38.

2018/11/19

Egybevágóság.

266. Egy háromszöget tükröztünk az $y = x$ egyenesre. A kapott háromszög csúcsának koordinátái: $A'(2; -3)$, $B'(1; 4)$, $C'(-2, 1)$. Mik az eredeti háromszög csúcsainak koordinátái?

267. Milyen

(a) háromszögek

(b) négyszögek

tengelyesen, illetve középpontosan szimmetrikusak?

268. Egy 30-fős osztályból (12 fiú, 18 lány) állítanak össze egy korfballcsapatot (4 fiú, 4 lány). Hányféleképpen tehetik ezt meg?

Házi feladat: **267., 268.**

Óra végi

1. Középpontos tükrözés definíciója.
2. Egybevágóság definíciója.
3. $\binom{20}{10}$ osztható-e 15-tel?
4. Az $A(-2;3)$ pontot tükrözzük az x tengelyre, illetve az origóra. Add meg a kapott A_x és A_0

39.

2018/11/21

Dolgozat

A csoport

1. Legyen $A(1;3)$ és $B(-2;4)$
   Add meg az AB szakasz hosszát.
2. Add meg az $1,71\dot{2}1\dot{5}\ldots$ számot két egész szám hányadosaként.
3. (a) Mennyi a értéke, ha $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{7}{3}} = 2^a$?

   (b) Add meg minél egyszerűbb alakban:

$$\left(4-\sqrt{7}\right)\cdot\left(9^2\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{6^7}\cdot\left(4+\sqrt{7}\right)\cdot\lambda^{\frac{\gamma}{2}}$$

4. Oldd meg a

$$\frac{10+8x-2x^2}{x^2+2x-8} > 0$$

   egyenlőtlenséget.

5. Legyenek AB és CD 3 cm hosszúságú szakaszok, mégpedig úgy, hogy a rájuk illeszkedő egyenesek merőlegesek egymásra. Azt is tudjuk, hogy ennek a két egyenesnek a metszéspontja A, illetve $AC = 2$ cm és $AD = 5$ cm. Szerkeszd meg az E pontot, amelyre igaz, hogy az ABE háromszög területe 6 cm^2, és $CED\sphericalangle = 60^{\circ}$.

B csoport

1. Legyen $A(3;-5)$ és $B(-1;4)$
   Add meg az AB szakasz hosszát.

2. Add meg az $1,631\dot{4}\dot{9}\ldots$ számot két egész szám hányadosaként.

3. (a) Mennyi a értéke, ha $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{5}{2}} = 3^a$?
   (b) Add meg minél egyszerűbb alakban:
$$\left(6-\sqrt{20}\right)\cdot\left(10^2\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{2^7}\cdot\left(6+\sqrt{20}\right)$$

4. Oldd meg az
$$\frac{x^2-x-20}{2x^2-2x-4}\leq 0$$
   egyenlőtlenséget.

5. Legyenek AB és CD 4 cm hosszúságú szakaszok, mégpedig úgy, hogy a rájuk illeszkedő egyenesek merőlegesek egymásra. Azt is tudjuk, hogy ennek a két egyenesnek a metszéspontja B, illetve $BC=1$ cm és $BD=5$ cm. Szerkeszd meg az E pontot, amelyre igaz, hogy a CDE háromszög területe 6 cm^2, és $AEB\sphericalangle=60^{\circ}$.

40.

2018/11/22

Beszélgetés a LaTeX-ről.

Házi feladat: **267., 268.**

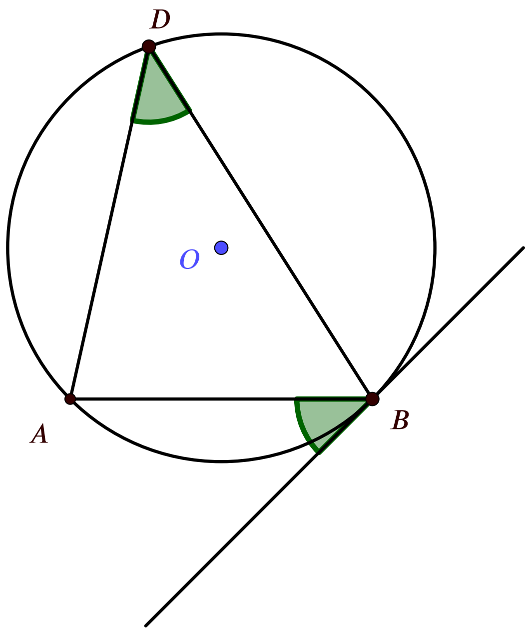
GeoGebra **01**: vegyél fel egy $ABCD$ húrnégyszöget. Először tükrözd az x tengelyre a körülírt körével együtt. Majd a kapott négyszöget (a kört már ne) tükrözd az origóra. Legyen egyedi az ábrád, színezz, betűzz, változtasd a vonalak vastagságát.

41–42.

2018/11/26

Fixpont, fixalakzat, invariáns alakzat.

269. A k kör egy húrja AB. Húzzunk érintőt a B pontban a körhöz, illetve legyen D a kör egy pontja az ábrán látható módon. Bizonyítsd be, hogy a két jelölt szög egyenlő nagyságú.



270. Két dobókockával dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy a két dobott szám összege 5?

271. Hány szimmetriatengelye van egy szabályos n-szögnek?

Házi feladat: **269–271.**

43.

2018/11/28

Relatív gyakoriság, valószínűség.
Érintőszárú kerületi szög.

272. Készítettünk egy táblázatot az egybevágósági transzformációkról:

	Körüljárástartó	Körüljárásváltó
Van fixpont	elforgatás	tengelyes tükrözés
Nincs fixpont	eltolás	**?**

Van-e olyan egybevágóság, aminek nincs fixpontja és körüljárásváltó?

273. Ha három dobókockával dobunk, akkor mi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege páros?

Házi feladat: **272., 273.**

44.

2018/11/28

Csúsztatva tükrözés.
A és B alakzatok (ponthalmazok) egybevágók, ha van olyan egybevágóság, ami A-t B-be viszi. Jele: $A \cong B$.

274. Mikor egybevágó két háromszög? Gyűjts össze minél több kritériumot. A háromszög oldalait és hosszait használd fel elsősorban.

Házi feladat: **274.**

GeoGebra **02**: Vegyél fel egy érintőnégyszöget a beírt körével együtt, illetve egy vektort és egy tengelyt. Csúsztatva tükrözd a négyszöget a körrel együtt, felhasználva a vektort és a tengelyt.

45–46.

2018/12/03

Egy háromszöget **egybevágóság erejéig** meghatározza:

- a, b, c;
- a, b, γ;
- a, β, γ.

Ez azt is jelenti, hogy ha két háromszögben ezek az adatok megegyeznek, akkor egybevágóak.
a, c, γ nem feltétlenül határozza meg a háromszöget.

275. Mikor határozza meg az a, c és γ a háromszöget?

276. Valószínűség: mire lennétek kíváncsiak? Ti tegyetek fel izgalmas kérdéseket, amikre van esély, hogy meg tudjuk válaszolni.
   (a) KGergő: Topográfia dolgozatban 150 pontot kell tudni megnevezni a vaktérképen. Ha 50-et tanulok meg, akkor mi a valószínűsége annak, hogy a Seregély tanárnő által adott 5 pont mindegyikét meg tudom válaszolni?
   (b) Milán: Mi a valószínűsége, hogy az ötlapos pókerben royal flush-t kapunk a kezünkbe? És mi a valószínűsége annak, hogy pókert?
   (c) Nina: Orosz rulettet játszik 6 ember egy hatlövetű Coltal és egy tölténnyel. Mi a valószínűsége, hogy a harmadik ember fog meghalni?

277. Szerkessz az ABC háromszög C csúcsán keresztül egy olyan egyenest, amely felezi a háromszög területét.

278. Igaz-e, hogy ha két háromszögben megegyezik c, α és f_α, akkor a két háromszög egybevágó?

Házi feladat: **275., 276bc., 277, 278.**

Óra végi

1. Bizonyítsd be, hogy az érintőszárú kerületi szög nagysága megegyezik a kerületi szög nagyságával.
2. Mi a valószínűsége, hogy két szabályos dobókockával dobva a dobott számok összege 4 vagy 5?
3. Melyik az a síkbeli egybevágóság, amelynek nincs fixpontja, de körüljárástartó?

47.

2018/12/05

Ha $c \geq a$, akkor a, c, γ egybevágóság erejéig meghatározza a háromszöget.
Súlyvonal.

279. Mekkora a pókerben a full house valószínűsége?

280. Igazak-e az alábbi állítások:

(a) Ha két egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogói megegyeznek, akkor a két háromszög hasonló.

(b) Ha két háromszögnek van két páronként egyenlő nagyságú szöge, és egy-egy egyforma hosszúságú oldala, akkor a két háromszög egybevágó.

(c) Ha két háromszögben egy csúcsból kiinduló oldalak hossza és az onnan induló magasság megegyezik, akkor a két háromszög egybevágó.

Házi feladat: **279., 280.**

48.

2018/12/06

281. A háromszög súlyvonalai egy ponton mennek keresztül.

282. Mekkora a pókerben a szín (flush) és a sor (straight) valószínűsége?

Házi feladat: **281., 282.**

GeoGebra **03**: Vegyél fel 4 egybevágó háromszöget. Az elsőben szerkeszd meg a magasságokat (szakaszokat), és a magasságpontot. A másodikban a körülírt kör középpontját és a körülrt kört, a harmadikban a súlyvonalakat (szakaszokat) és a súlypontot. A negyedikben pedig csak a masságpont, a körülírt kör középpontja és a súlypont legyen megszerkesztve. Az első háromszög legyen ABC és ezt változtatva automatikusan változzon minden. (Tehát a másik 3 háromszög legyen automatikusan egybevágó ezzel.)

49–50.

2018/12/10

A háromszög középvonalai.
A középvonalak a háromszöget négy egybevágó háromszögre bontják.

283. Mekkora a pókerben a drill valószínűsége?

284. Négy ajtó mögött két autó és két kecske van véletlenszerűen elhelyezve. Megjelölhetünk egy ajtót, majd ezek után a maradék három ajtó közül kinyitnak egyet, ami mögött kecske van. Ezt követően változtathatunk, ha akarunk, és megjelölhetünk egy másik ajtót. Mit érdemes ekkor csinálni?

285. Két sorban vannak korongok. Két játékos felváltva vesz el a korongokból, mégpedig úgy, hogy minden lépésben egy sorból akárhány korong elvehető. Az nyer, aki elveszi az utolsó korongot. Keresd meg a nyerő stratégiát.

A SET játék.
Házi feladat: **281., 283., 284., 285.**

51.

2018/12/12

Középpontos hasonlóság.
A középpontos hasonlóság tulajdonságai.

52.

2018/12/13

Bizonyítás: a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.

286. Pókerben a 2 pár valószínűsége.

Házi feladat: **285., 286.**

GeoGebra **04**: Vegyél fel egy „általános” háromszöget. Húzd be mind a három középvonalát, és 4 különböző színnel színezd ki a 4 kapott háromszöget. (Ha mozgatom az eredeti háromszög csúcsait, akkor automatikusan változzon a teljes ábra.)
Vegyél fel egy szakaszt és azon kívül egy pontot. Alkalmazz középpontos hasonlóságot a szakaszra, amelynek középpontja a pont és arányai: $\lambda = -2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 4, 8$. Az eredeti szakasz legyen vastagabb, és más színű, mint a többi, de a képként kapott 7 szakasz színe legyen egyforma.

53–54.

2018/12/17

287. Adott egy szögszár, és az egyik száron az AB és a CD egyenlő hosszú szakaszok. Legyen AA', BB', CC' és DD' párhuzamos egyenesek, és A', B', C' és D' illeszkedjenek a másik szögszárra. Igaz-e, hogy $|A'B'| = |C'D'|$?

288. Póker: Egy pár valószínűsége.

289. Egy derékszögű háromszögben $\alpha = 60^{\circ}$. Mekkora arányban osztja az α szögfelezője a szemközti oldalt?

290. Adott egy szögszár, és az egyik száron az AB és a CD úgy, hogy $|AB| = 2 \cdot |CD|$. Legyen AA', BB', CC' és DD' párhuzamos egyenesek, és A', B', C' és D' illeszkedjenek a másik szögszárra. Mit tudunk modani $A'B'$ és $C'D'$ hosszának arányáról?

291. Adott egy szakasz, szerkeszd meg a harmadolópontjait.

292. Adott egy szög. Szerkeszd meg körzővel és vonalzóval azt a két egyenest, amely három egyenlő nagyságú szögre osztja az eredeti szöget.

Házi feladat: **290–292.**

55.

2018/12/19

Párhuzamos szelők tétele.

56.

2018/12/20

Ricochet Robots.

57.

2019/01/03

- Hogyan számolja a π-t a számológép? Hogyan számolják mások?

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Ennél hatékonyabb:

$$\pi = 3 + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{4}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{4}{6 \cdot 7 \cdot 8} - \dots$$

- Ókori görögök szerkesztési problémái:
  - Kockakettőzés
  - Szögharmadolás
  - Körnégyszögesítés
  - Szabályos hétszög (egyéb sokszögek)

58–59.

2019/01/07

Párhuzamos szelők tétele és megfordítása.
Párhuzamos szelőszakaszok tétele.
Szögfelezőtétel.

293. Milyen négyszöget határoznak meg egy négyszög oldalfelező pontjai?

294. Az első 1000 számból véletlenszerűen választunk egyet (mindegyiket egyforma valószínűséggel). Mekkora a valószínűsége, hogy a választott szám osztható 2-vel vagy 3-mal?

295. Egy háromszögben $\alpha = 60^\circ$, $b = 4$, $c = 6$. Milyen arányban osztja f_α az a oldalt?

296. Feldobunk egy pénzérmét 8-szor. Mekkora a valószínűsége, hogy többször dobtunk fejet, mint írást?

297. Az $ABCD$ négyszög AD és DC oldalának D-hez közelebbi negyedelőpontjai: E és F. Az AB és BC oldalak B hez közelebbi harmadolópontjai: G és H. Mit tudunk mondani az $EFGH$ négyszögről?

Házi feladat: **296., 297.**

60.

2019/01/09

298. Hányféleképpen lehet egy 5-szög csúcsait 3 színnel megszínezni úgy, hogy szomszédos csúcsok nem lehetnek azonos színűek?

299. Mi a valószínűsége, hogy két véletlenszerűen választott ember a hét ugyanazon napján született? (Feltesszük, hogy egy ember egyforma valószínűséggel születik a hét minden napján.)

Házi feladat: **298., 299.**

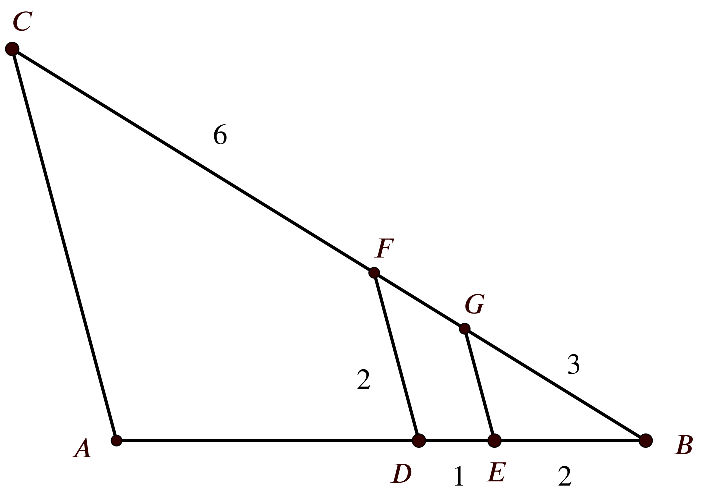
61.

2019/01/10

300. 10 tengelypárhuzamos téglalappal legfeljebb hány részre lehet osztani a síkot?

301. Hány különböző SET van egy teljes SET pakliban?

302. Az alábbi ábrán $EB = 2, DE = 1, GB = 3, CF = 6$ és $FD = 2$. Mekkorák az AC, FG, AD és EG szakaszok hosszai, ha $AC \parallel FD \parallel EG$?



Házi feladat: **300–302.**

GeoGebra **05**: Rajzolj egy tetszőleges háromszöget. Szerkeszd meg a körülírt körét, a beírt körét, és mindhárom hozzáírt körét. Ezen kívül a súlypontját és a magasságpontját. Mindezt úgy, hogy a háromszög három csúcsa mozgatható legyen, és a változtatás közben automatikusan változzon a teljes ábra.

62–63.

2019/01/14

303. Az ABC háromszög AC oldalán felvettük az E, a BC oldalán az F pontokat. Tudjuk, hogy $AB \parallel EF$, illetve, hogy $4 \cdot T_{ABC} = 9 \cdot T_{CEF}$. Milyen arányban osztja az E az AC oldalt?

304. Mekkora a valószínűsége, hogy ha két dobókockával dobunk, akkor a dobott számok összege osztható 5-tel?

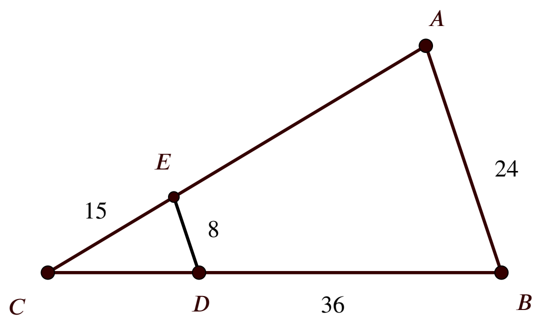
305. Az ABC háromszög AB oldalának A-hoz közelebbi harmadolópontja H, a háromszög területe 45 cm^2. Az M illeszkedik BC-re és $AC \parallel MN$. Mekkora az AHN háromszög területe?

306. Az ABC háromszög AB oldalának két harmadolópontja H_1 és H_2. (Az előbbi van A-hoz, az utóbbi B-hez közelebb.) H_1-en keresztül párhuzamost húzunk CB-vel, és ez az egyenes M-ben metszi az AC oldalt. Mekkora a H_1H_2M háromszög területe, ha a ABC területe 1.

307. Három dobókockával dobunk. Mi a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata páros?

Óra végi

1. Mondd ki a szögfelezőtételt.
2. Mekkora a valószínűsége, hogy ha két dobókockával dobunk, akkor a dobott számok összege osztható 4-gyel?
3. Mekkora az AE és a CD szakasz hossza?



Házi feladat: **306., 307.**

64.

2019/01/16

Két alakzat hasonlósága.

308. Három kockával dobva, mi a valószínűsége, hogy a dobott számok

 (a) összege
 (b) szorzata

 osztható 3-mal?

Házi feladat: **308.**

65.

2019/01/17

Jelölések:

- $A \sim B$: A és B alakzatok **hasonlók**.
- $A \cong B$: A és B alakzatok **egybevágók**.

309. Villámkérdések:

 (a) 4 kockával dobva mi a valószínűség, hogy a dobott számok szorzata osztható 3-mal?
 (b) 3 kockával dobva mi a valószínűség, hogy a dobott számok szorzata osztható 5-tel?
 (c) 6 kockával dobva mi a valószínűség, hogy a dobott számok szorzata osztható 7-tel?

310. Mondj olyan ★ síkbeli alakzat fajtákat, amelyekre igaz a következő állítás:
 Bármely két ★ hasonló.

311. Gyűjts feltételeket, amelyek elegendőek ahhoz, hogy két háromszög hasonló legyen.

Házi feladat: **311.**

Geogebra **06**: Vedd fel az ABC háromszöget és az AB és a BC oldalt is oszd fel 4 egyenlő részre. Az AB oldalon a keletkező negyedelő pontok A-tól kezdve legyenek N_1, N_2, N_3, a BC oldalon B-től kezdve N_4, $N_5 N_6$. Húzz párhuzamost BC-vel N_3-on keresztül, és AB-vel párhuzamost N_4-en keresztül. Az előbbi egyenes és AC metszéspontja legyen K, az utóbb egyenes és AC metszéspontja L. Az ABC háromszög területe legyen fehér, az N_4N_6L és az N_1N_2K háromszögek pedig különböző színűek. Legyen 3 szöveg az ábrán, melyek mutatják az ABC, N_4N_6L és N_1N_2K háromszögek területét. (Amikor létrehoztok egy szöveget, akkor a párbeszédablakban kattintsatok az Alakzatok menüre.)
Csak a szükséges vonalak, alakzatok legyenek az ábrán, és az eredeti ABC háromszög módosítása esetén minden automatikusan változzon.

66–67.

2019/01/21

Háromszögek hasonlósága.

312. Az ABC derékszögű háromszögben C-nél van derékszög. Legyen $a = 3$, $b = 4$. Legyen az m_c magasság talppontja T. Milyen hosszú az AT szakasz?

313. Ha két dobókockával dobunk, akkor mi a valószínűsége, hogy a két dobott szám szorzata osztható 4-gyel?

314. Egy derékszögű háromszögben $\gamma = 90^o$. Az m_c talppontja T. Tudjuk, hogy $AT = 4$, $TB = 9$. Mekkora a TC szakasz hossza?

Házi feladat: **312., 314.**

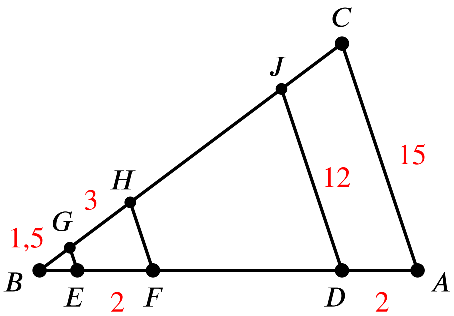
Óra végi

1. Az ABC háromszögben $BC = 12$. Az AB oldalon vegyük fel a D pontot úgy, hogy $BD = 6$. Húzzunk D-n keresztül párhuzamost BC-vel, ez E-ben metszi AC-t. Tudjuk, hogy $DE = 4$. Mekkora AD?
2. Egy derékszögű háromszög két befogója 5 és 7. Mekkora az átfogóhoz tartozó magasság hossza?
3. Két dobókockával dobva, mi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege prím?
4. Mikor mondjuk azt, hogy két alakzat hasonló?

68.

2019/01/23

315. Add meg az ábrán látható összes szakasz hosszát.



316. Egy kocka élein egy hangya bolyong. Ha elér egy csúcshoz, időveszteség nélkül véletlenszerűen (egyforma valószínűséggel) kiválasztja, hogy melyik élen folytassa útját (vissza is fordulhat). A hangyának egy élnyi út megtételéhez egy percre van szüksége. A kocka egyik testátlója legyen AB. Az A csúcsból indulva, mi a valószínűsége annak, hogy

(a) három
(b) négy
(c) öt

perc múlva a B pontban lesz?

Házi feladat: **312., 314–316.**

69.

2019/01/24

Magasságtétel.

Házi feladat: **316c.**

70–71.

2019/02/04

317. Mi a valószínűsége annak, hogy egy póker kézben

    (a) van ász?
    (b) van kőr színű lap?
    (c) pontosan három treff lap van?
    (d) van ász, de nincs dáma?

318. Az ABC derékszögű háromszögnek CT az átfogóhoz tartozó magassága. Tudjuk, hogy $|AT| = 4$ és $|CT| = 3$. Mekkora AB hossza és az ABC, illetve a TBC háromszög területe?

319. Az origóban ül egy bolha. Minden másodpercben egy egységet ugrik jobbra (az x koordinátáját növeli eggyel), vagy egyet felfelé (az y koordinátáját növeli eggyel.) Hogy merre ugrik, azt egy szabályos érme feldobásával dönti el, fej esetén jobbra, írás esetén felfelé ugrik. Mekkora a valószínűsége, hogy

    (a) 7
    (b) 8

    másodperc múlva a $(3; 5)$ pontban lesz?

Óra végi

1. Mondd ki a magasságtételt.
2. Sorold fel a 4 alapesetet, amikor két háromszög hasonló.
3. Mekkora a valószínűsége annak, hogy magyar kártyából 4 lapot osztva, lesz a lapok között tök?

Házi feladat: **317d., 319b.**

72.

2019/02/06

320. A k kör AB húrja merőleges az XY átmérőre. AB és XY metszéspontja F. Tudjuk, hogy $YF = 24$, $FX = 3$. Milyen hosszú az AB húr?

321. Egy háromszögben $\gamma = 120°$. Bizonyítsd be, hogy ha f a C-ből induló szögfelező hossza, akkor

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

322. Adott egy szögtartomány és benne egy P pont. Szerkessz kört, amely átmegy P és érinti mindkét szögtartományt. (Diszkutáld is a megoldást.)

Házi feladat: **322.**

73.

2019/02/07

Pascal-háromszög.
A Pascal-háromszög n-edik sorának k-adik eleme: $\binom{n}{k}$.

323. Bizonyítsd be, hogy

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

324. Adott az ABC szabályos háromszög. Szerkessz olyan $EFGH$ téglalapot, amelynek E és F csúcsa az AB oldalon van, a G a BC-n, H pedig a CA-n, és $|EF| = 2 \cdot |FG|$.

Házi feladat: **323., 324.**

74–75.

2019/02/11

Összefoglalás (Minden pár 7 adott feladat közül kiválasztotta a pdf-ben, hogy melyik szerinte a legproblémásabb, és azokat megbeszéltük.)

Óra végi

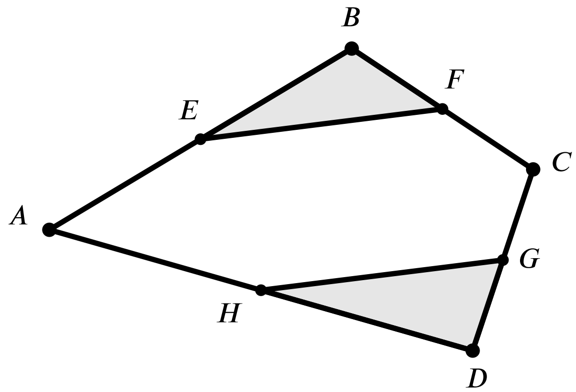
1. ABC derékszögű háromszögben CT az átfogóhoz tartozó magasság. Tudjuk, hogy $AT = 2$, $CT = 3$. Mekkora TB?
2. Mekkora a valószínűsége, hogy ha 3 dobókockával dobunk, akkor a dobott számok szorzata osztható 5-tel?
3. Az ADE háromszögben húzzunk az ED oldallal két párhuzamost egyenest. Ezek az egyenesek B-ben, C-ben, illetve G-ben, F-ben metszik a másik két oldalt. Tudjuk, hogy $|AG| = 2$, $|GF| = 2$, $|AB| = 3$, $|CD| = 1$ és $|ED| = 9$. Milyen hosszú FE és CF?

76.

2019/02/13

Dolgozat

1. Egy 52 lapos francia kártyapakliból 5 lapot kapunk véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy
   (a) nincs király a kezünkben;
   (b) pontosan 4 treff van a kezünkben;
   (c) van a kezünkben kőr, de nincs pikk?
2. Az ABC háromszögben meghúztuk a C-nél lévő szög szögfelezőjét, amely D-ben metszi az AB oldalt. Tudjuk, hogy $AD = 2$, $BC = 6$ és $DB = 3$. Mekkora az AC oldal?
3. Adott az ABC háromszög. Szerkessz az AB oldalon egy X és egy Y pontot úgy, hogy az XYC háromszög területe egyötöde legyen az ABC háromszögnek. (X, Y egyike se essen egybe A-val vagy B-vel.)
4. Az $ABCD$ négyszög oldalfelező pontjai rendre E, F, G és H.



   Hányad része az ábrán látható szürke terület a négyszög területének?
5. Adott ABC egyenlőszárú, derékszögű háromszög, amelynek C-nél van derékszöge. Szerkesszük meg a D, E és F pontokat úgy, hogy a $CDEF$ téglalap legyen, $|CD| = 3 \cdot |DE|$, és D illeszkedik a CA, E az AB, F pedig a CB oldalra.
6. Az ABC derékszögű háromszögnek A-nál van derékszöge. D és E az AB oldal pontjai $|AD| = 3$, $|EB| = 2$, és D közelebb van A-hoz, mint E. D-ben és E-ben merőlegest állítunk AB-re, ezek rendre G-ben és F-ben metszik BC-t. F-en és G-en keresztül párhuzamost húzunk AB-vel és ezek az egyenesek rendre I-ben és H-ban metszik AC-t. Tudjuk, hogy $|DG| = 2 \cdot |EF|$ és $|IH| = 4$. Mekkora a háromszög területe?
7. (a) 2 dobókockával dobva, mi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege osztható 3-mal?
   (b) 10 dobókockával dobva, mi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege osztható 3-mal?
   (c) 6 dobókockával dobva, mi a valószínűsége, hogy a szorzat osztható 3-mal?

8. Az ABC derékszögű háromszögben meghúztuk a C-nél lévő derékszög szögfelezőjét. Ez F-ben metszi az AB oldalt. Ha $a = 5$ és $b = 3$, akkor milyen hosszú CF?

77.

2019/02/14

Pasal-háromszög n-edig sorában az elemek össze 2^n. (3 különböző gondolatmenet.)

325. Mennyi az elemek összege a Pascal-háromszög egy sorában?

326. Bontsd fel a zárójelet!

   (a) $(a+b)^2$
   (b) $(a-b)^2$
   (c) $(a+b)^3$
   (d) $(a+b)^4$
   (e) $(a+b)^{10}$

327. Egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága két részre osztja az átfogót. Az egyik rész 4, a másik 12 hosszú. Mekkorák a befogók?

328. Szerkessz $\sqrt{\sqrt{2}}$ hosszúságú szakaszt, ha adott az egység.

Házi feladat: **326–328.**

GeoGebra **07**: Vegyél fel egy szögtartományt (AOB, O a szög csúcsa, A és B pedig egy-egy pont a két határoló félegyenesen), és benne egy P pontot. Szerkeszd meg azt a két kört, amely érinti a szögtartományt határoló két félegyenest és átmegy a P ponton. Az ábra dinamikus legyen, vagyis ha mozgatom O, A, B vagy P bármelyikét, akkor automatikusan helyes ábrát kapjak.

78–79.

2019/02/18

Befogótétel.
Számtani közép: ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $\frac{a+b}{2}$.
Mértani közép: ha $a, b \geq 0$, akkor $\sqrt{ab}$.

Dolgozatfeladatok megbeszélése.

329. Miért igaz, hogy

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n.$$

330. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 5, és ennek a befogónak az átfogóra vett merőleges vetülete 3. Mekkora a háromszög másik két oldala?

331. Szerkeszd meg az a és a b szakaszt, ha adott egy $a+b$ és egy $\sqrt{ab}$ hosszúságú szakasz.

Óra végi

1. Írd le a Pascal-háromszög 8. sorát.
2. Add meg 6 és 12 számtani és mértani közepét.
3. Mondd ki a befogótételt.

Házi feladat: **329., 331.**

80.

2019/02/20

Binomiális tétel.

332. Bizonyítsd be, hogy ha $a, b \geq 0$, akkor

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

333. Számold ki többféle módon az alábbi összeget:

$$\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \ldots + \binom{9}{9}.$$

334. Tekintsük az $(x+y)^{11}$ kifejezést. Mennyi az együtthatója x^9y^2-nek, x^5y^6-nak és x^7y^3-nek?

Házi feladat: **332., 334.**

81.

2019/02/21

Számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség.

335. Bontsd fel a zárójelet a következő kifejezésekben:

(a) $(a+2b)^3$;

(b) $(2a+3)^4$;

(c) $(3a-2b)^5$.

336. Egy téglalap kerülete 100 m. Mikor maximális a területe?

337. Hányféleképpen lehet eljutni egy sakktábla bal alsó (a1) mezőjéről a jobb felsőbe (h8), ha minden lépésben egyet fel vagy egyet jobbra lehet lépni, és nem lehet rálépni az f4 mezőre?

Házi feladat: **335–337.**

GeoGebra **08**: Vedd fel az AB szakaszt, amelynek a hosszát nevezzük a-nak. Szerkessz egy AC szakaszt, amely $\sqrt{a}$ hosszúságú. Legyen két felirat, az egyik mutassa AB hosszát, a másik pedig AC hosszát. Az ábrán lehessen mozgatni A-t és B-t, és ennek megfelelően dinamikusan változzon a többi tartalom.

82–83.

2019/02/25

338. Bontsd fel az zárójelet az alábbi kifejezésekben:

 (a) $(a-b)^4$;
 (b) $(3x-2)^5$.

339. Ha a pozitív szám, akkor mikor maximális és mikor minimális $a+\frac{1}{a}$ értéke?

340. Egy függőleges fal mellől csúszik egy pálca a függőleges helyzetéből vízszintesbe, a falra merőleges síkban. Milyen pályát ír le a felezőpontja?

Házi feladat: **338b., 339., 340.**

84.

2019/02/27

Ha $a>0$, akkor
$$a+\frac{1}{a}\geq 2,$$
és egyenlőség csak akkor van, ha $a=1$.

341. Hány olyan 1000-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely osztható

 (a) 2-vel, vagy 3-mal?
 (b) 2-vel, 3-mal, vagy 5-tel?

Házi feladat: **340., 341.**

GeoGebra **09**: Legyen ABC egy háromszög. Rajzolj a háromszög minden oldalára kifelé egy szabályos háromszöget. Szerkszed meg ezeknek a háromszögeknek a középpontját. Kösd össze a három középpontot, így kapunk új háromszöget. Az munkalapon legyen 3 felirat, ami mutatja, hogy ennek a háromszögnek milyen hosszú a 3 oldala. (Az ábrán legyen A, B és C mozgatható, minden más ennek a háromszögnek a függvényében változzon.)

85.

2019/02/28

Összevont óra: mese a négyszíntételről.

342. A $(2x-4)^9$ kifejezésben mi az együtthatója
   (a) x^2-nek;
   (b) x^4-nek;
   (c) x^5-nek?

Házi feladat: **340–342.**

86–87.

2019/03/04

Szita-formula:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

343. Mennyi az $(x-3)^5 \cdot (2x+1)^6$ kifejezésben x és x^2 együtthatója?

344. Két játékos felváltva mond egész számokat. Az első játékos szabadon választhat a $2, 3, 4, 5, 6$ számok közül. Minden lépésben a következő játékosnak nagyobb számot kell mondania, mint az előzőnek, de legfeljebb az előző szám négyzetét. Az nyer, aki 100 000-et mond. Kinek van nyerő stratégiája és mi az?

345. Egy egyenes folyópart mentén egy téglalap alakú telket szeretnénk elkeríteni. 100 m kerítés áll a rendelkezésünkre. Legfeljebb mekkora telket tudunk elkeríteni így?

Házi feladat: **340. bizonyítás, 343b., 344., 345.**

88.

2019/03/06

Óra eleji

1. Mennyi a Pascal-háromszög 7. sorában lévő számok összege?
2. Mondd ki pontosan a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget.
3. Mennyi az $(a + 2b)^5$ kifejezésben az a^3b^2 együtthatója?

Házi feladat: **340. bizonyítás, 345.**

89.

2019/03/07

346. Melyik a legkisebb 36-tal osztható pozitív egész szám, amelyben csak 6-os és 0 számjegy szerepel?

347. Egy kilátó legfelső pontját összekötöttük a víszintes talajon lévő árnyékának megfelelő pontjával. Ez a szakasz 30^o-os szöget zár be a talajjal. A kilátó árnyéka 104 m. Milyen magas a kilátó? Mit mondhatunk akkor, ha a szög 15^o?

348. Mi a valószínűsége annak, hogy a lottón kihúzott öt szám között pontosan két prím van? És annak, hogy legalább két prím?

Házi feladat: **347., 348.**

GeoGebra **10**: A 340-es feladatot modellezd. Legyen egy vízszintes talaj, és egy ahhoz csatlakozó fal. Az eredeti feladatban ez egy függőleges fal volt, vagyis merőleges volt a padló síkjára. Most viszont ezt a szöget lehessen állítani a fal egy pontjával. Legyen emellett a fal mellett egy pálca, és ahogy az eredeti feladatban, csússzon le vízszintes állásba. A felezőpont pedig hagyjon nyomot maga után, vagyis lehessen látni a pályáját.

90–91.

2019/03/11

Szinusz, koszinusz, tangens, kotangens.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Trigonometrikus Pitagorasz-tétel:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

349. Tudjuk, hogy két pozitív szám szorzata 44. Mikor minimális, és mikor maximális az összegük?

350. Milyen magas a kilátó a 347. feladatban, ha a szög 32^o?

Óra végi

1. $(3a-b)^7$-ben a^3b^4 és a^5b^4 együtthatója.
2. Hegyesszög szinuszának definíciója.
3. Hegyesszög kotangensének definíciója.

Házi feladat: **349., 350.**

92.

2019/03/13

Radián fogalma.

Házi feladat: **Átnézni a szögfüggvények definícióját alaposan.**

93.

2019/03/14

351. Egy táblázatban gyűjtsük össze a $30^o, 45^o, 60^o$-hoz és az 1 radiánhoz tartozó szögfüggvényértékeket.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
30^o				
45^o				
60^o				
1 rad				

352. Egy téglalap oldalai 28 és 16 egység. Mekkora szöget zárnak be az átlói?

353. Mely x-ekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség?

$$x^2 - 3x \leq 2.$$

Házi feladat: **351–353.**

94–95.

2019/03/18

Két egyenes szöge.
Ha tudjuk egy szög szinuszát, koszinuszát, tangensét, akkor számológép segítségével hogyan kapjuk meg a szög nagyságát.

354. A k kör AB átmérője 10, az AC húrja 5 hosszú. Milyen hosszú a BC húr és mekkora az $ABC\sphericalangle$?

355. Oldd meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{2x-5} = x - 1.$$

356. Egy rombusz átlói 10 és 8 hosszúak. Mekkorák a szögei?

Házi feladat: **355., 356.**

Óra végi

1. Add meg 120°-ot radiánban.
2. Derékszögű háromszög befogói 5, 7. Mekkorák a szögei?
3. Trigonometrikus Pitagorasz-tétel.
4. $(2a-3)^7$-ben mekkora a^4 együtthatója?

96.

2019/03/20

357. Egy egyenlőszárú háromszög szárai 15, alapja 8 hosszú. Mekkorák a szögei és a területe?

358. Az előbbi háromszög súlypontját összekötöttük a háromszög csúcsaival. Mekkora a keletkező 3 háromszög kerülete és területe?

359. $\sqrt{x^2-3} = \sqrt{6x-8}.$

360. $\sqrt{x-4} + \sqrt{2x-4} = 10.$

Házi feladat: **358–360.**

97.

2019/03/21

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

361. Az ABC háromszög C-hez tartozó magassága 4 cm hosszú, és egy 2 és egy 3 cm hosszú részre osztja az AB oldalt. Add meg a háromszög kerületét és szögeit.

362. Az előző feladatban szereplő háromszög s_C súlyvonala mekkora szöget zár be az AB oldallal?

363. Egy konvex sokszögnek éppen 33-mal több átlója van, mint oldala. Hány oldala van a sokszögnek?

Házi feladat: **361–363.**

GeoGebra (11): Szerkessz egy ABC háromszöget, amelynek minden csúcsa mozgatható. Szerkeszd meg a súlypontját, és ezt kösd össze mindhárom mindhárom csúccsal. Az ábrán legyen három szöveg, amelyek mindig mutatják a kis háromszögek területét.
Legyen az ABC háromszögnek egy eltolt képe, ami változik annak megfeglelően, ha az eredeti háromszöget változtatjuk. Ennek a beírt kör középpontját szerkeszd meg, és azt kösd össze a csúcsokkal. Itt is legyen három szám, amely mutatja a kis háromszögek aktuális területeit.

GeoGebra (F01): Szerkessz egy kört, benne egy AB átmérőt. Vegyük fel a C pontot a köríven, és ezt a pontot lehessen mozgatni. Szerkeszd meg a háromszög beírt körének középpontját, és ennek pályája látszódjon, miközben mozgatjuk a C pontot.
Legyen az ABC háromszögnek két eltolt képe is az ábrán. Az egyiken a súlypont pályája jelenjen meg, a másikon pedig az a pont, ahonnan mindhárom oldal 120°-os szögben látszik. Az eredeti ábrán a C pontot mozgatva egyszerre mozogjon a 3 háromszög, és rajzolódjanak ki a pályák.

98–99.

2019/03/25

Ha α hegyesszög:

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha), \quad \cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha), \quad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha), \quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$$

Mese az izogonális pontról, „bizonyítás" fizikai módszerrel.

364. Melyik α hegyesszögre igaz, hogy

$$\sin(\alpha + 15^\circ) = \cos(\alpha + 43^\circ).$$

365. Legyen ABC tetszőleges háromszög, S pedig a súlypont. Bizonyítsd be, hogy ABS, BCS és CAS háromszögek területe egyenlő.

366. $\sqrt{4-\sqrt{3x+2}}=1$.

367. $\sqrt{4x+9}-\sqrt{x-1}=4$.

Házi feladat: **367.**

Óra végi

1. $\sqrt{x^2-3}=\sqrt{x+3}$.
2. Az ABC egyenlőszárú háromszög AB alapja 6, szárai 12 hosszúak. Ha S a súlypont, akkor mekkorra az $SBA\sphericalangle$?

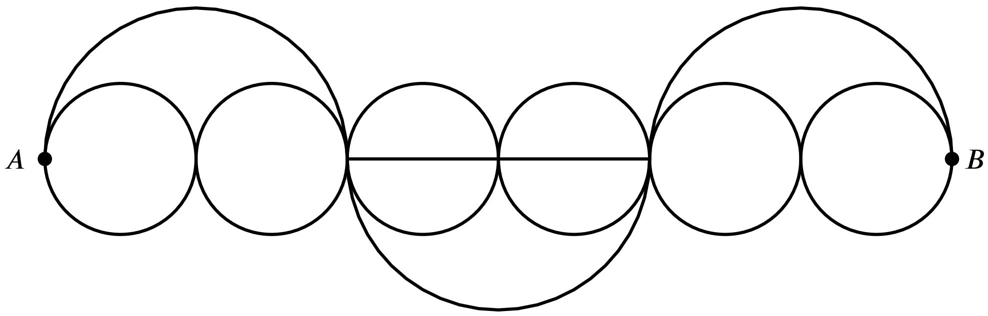
100.

2019/03/27

Századik óra.

Rövid egyéni verseny:

368. Hány út vezet A-ból B-be, ha csak balról jobbra lehet haladni?



369. $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{2x^2-6x+1}$.

370. ABC háromszögben CT magasság. Tudjuk, hogy $CT=AT=100$ és $BT=50$. Mekkora m_c és s_c szöge?

Házi feladat: **367.**

101.

2019/03/28

371. Az $ABCD$ négyzet belsejében található két pont, E és F, úgy, hogy $AE=5$, $EF=1$ és $FC=3$, illetve $AE\perp EF$ és $EF\perp FC$. Mekkora a négyzet oldala?

372. Hány közös pozitív osztója van a következő két számnak: 15^{20} és 20^{15}.

373. $x^6 - 15x^3 - 100 = 0$.

374. $\sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 16}} = x - 1$.

Házi feladat: **371., 373., 374.**

102–103.

2019/04/01

Háromszög területe:

$$T_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}.$$

375. Egy háromszögben $a = 4$, $b = 7$ és $\gamma = 50^\circ$. Mekkora a háromszög területe?

376. Mekkora az előző feladatban szereplő háromszög kerülete?

377. Oldd meg az alábbi egyenletrendszert:

$$x + 2y = 36$$
$$x^2 - y^2 = 75.$$

Házi feladat: **376., 377.**

104.

2019/04/03

378. Két konvex sokszög átlóinak száma 158, belső szögeik összege 4320°. Hány oldalú a két sokszög?

379. Téglalapos játék.

380. Egy kutató és két teherhordó, 380 km-re akarnak eljutni. Mindnél van 4 napi élelem. Naponta legfeljebb 60 km-t tudnak megtenni.

Házi feladat: **378., 379.**

105.

2019/04/04

381. Az ABC egyenlőszárú háromszögnek AB az alapja. A háromszög kerülete 50, a szárak által bezárt szög 35°. Mekkora a háromszög területe, mekkorák az oldalai?

382. Egy téglalapot két részre osztottunk. Az egyik rész egy négyzet, a másik rész hasonló az eredeti téglalaphoz. A téglalap egyik oldala 10. Mekkora lehet a másik oldala?

Házi feladat: **381., 382.**

106–107.

2019/04/08

Paralelogramma területe (a és b az oldalak hossza és ezek közrezárt szöge α):

$$T_p = a \cdot b \cdot \sin \alpha$$

383. Egy paralelogramma két szomszédos oldala: $a = 5$, $b = 6$. A két oldal által közrezárt szög 60^o. Mekkora a paralelogramma területe?

384. 180 cm hosszú AB szakasz C pontja olyan tulajdonságú, hogy

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|AC|}.$$

Mekkora az AC távolság?

Házi feladat: **383., 384.**

108.

2019/04/10

Aranymetszés.

Óra eleji

1. Egy derékszögű háromszög átfogója 4, egyik szöge 40^o. Mekkora a két befogó hossza?
2. Egy háromszögben $a = 5, b = 7, \gamma = 40^o$. Mekkora a háromszög területe?
3. $\sqrt{x^2 + 6x} = \sqrt{10 + 3x}$.

---

385. $\sin^2 x - \frac{\sqrt{2}+1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{4}$.

386. Oldd meg az alábbi egyenletrendszert:

$$x^2 + y^2 = 58$$
$$x^2 - y^2 = 40.$$

Házi feladat: **385., 386.**

109.

2019/04/11

387. Egy rombusz oldalai 4 hosszúak.

    (a) Ha a területe 7, akkor mekkorák a szögei?

    (b) Mekkora lehet a területe?

388. $\cos^2 x - 1 = \sin x$.

389. Melyik az a legkisebb n, amelyre $n!$ osztható 2^{20}-nal?

Házi feladat: **387b., 388., 389.**

GeoGebra (12): Vegyél fel egy 4 hosszúságú AB szakaszt, illetve egy D pontot, amelyre $|AD| = 4$. A és B legyen rögzített, C pedig mozgatható, de a fenti feltételnek teljesülnie kell. Szerkeszd meg az $ABCD$ rombuszt. Rajzold be az ábrába a rombusz CT magasságát, ahol T illeszkedik az AB oldalegyenesre. Legyen egy szöveges mező, amelyben látszik a CT szakasz hossza, és egy másik szöveges mező, amelyben látszik a rombusz területe.

110–111.

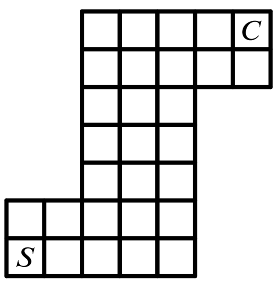
2019/04/15

Ha az $x^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei x_1 és x_2, akkor

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -b \\ x_1 x_2 &= c. \end{aligned}$$

390. Létezik-e két olyan szám, amelyek szorzata -2, összegük pedig 3?

391. Stratégiás játék: két játékos felváltva lép a lenti táblán az S mezőről induló koronggal. Egy lépésben jobbra vagy felfelé lehet lépni, annyi mezőt, amennyit a tábla enged. Az nyer, aki C-re lép. Add meg a nyerő stratégiát.



392. Mennyi az $x^2 - 6x + 4 = 0$ egyenlet két gyökének négyzetösszege?

Házi feladat:

Óra végi

1. Egy rombusz oldala 3, egyik szöge 45°. Mekkora a területe?
2. $\cos\frac{\pi}{6}$
3. Adj meg egy olyan másodfokú egyenletet, amelynek a gyökei -6 és $\frac{1}{2}$.
4. Egy háromszögben $c = 8, b = 5, \beta = 38,66^\circ, \alpha = 53,13^\circ$. Mekkora a háromszög területe? Írd fel a képletet, amivel ki tudod számolni.

112.

2019/04/17

Ha az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet gyökei x_1 és x_2, akkor

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$
$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

393. Van-e két olyan szám, amelyek összege 4, szorzata 5?

394. 10 ember ül a moziban egy sorban. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha A, B és C balról jobbra ilyen sorrendben ülnek?

395. Egy háromszögben $a = 7, b = 9$ és $\gamma = 40^\circ$. Mekkorák a háromszög magasságai és szögei?

Házi feladat: **391–395.**

GeoGebra (13): Vegyél fel egy tetszőleges ABC háromszöget. Minden oldalát oszd fel 5 egyenlő részre, és minden osztóponton keresztül húzz párhuzamost azzal a két oldallal, amelyre nem illeszkedik az osztópont. Vedd ezeknek a párhuzamosoknak a háromszögbe eső részét, csak azok látszódjanak az ábrán. Így egy háromszögrácsot kapunk. Lehessen mozgatni az A, B, C pontokat és annak megfelelően mozogjon a teljes rács.

GeoGebra (F02): Készíts egy tetszőleges GeoGebra projektet. Mutass be vele valamit, ami szerinted érdekes, szép. Legyen minél áttekinthetőbb és látványosabb a projekt.

113–114.

2019/04/29

Feladatok megbeszélése, kérdések.

115.

2019/05/02

Dolgozat

1. Mekkora a $(3x - y)^7$ kifejezésben az x^3y^4 tag együtthatója?
2. Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:
$$\sqrt{8x+1} = x + 2.$$
3. Egy háromszögben $a = 5, b = 8$ és $\gamma = 70^{\circ}$.
Mekkora β, m_a és a háromszög területe?
4. Hány olyan pozitív egész szám van, amely kisebb, mint 3000 és nem osztható sem 3-mal, sem 7-tel?
5. Add meg b és c értékét úgy, hogy a
$$3x^2 + bx + c = 0$$
egyenlet gyökei -2 és 7 legyenek.
6. Egy paralelogramma egyik átlója 7, a másik 11 egység hosszú. A két átló által bezárt szög 60°. Add meg pontosan, hogy mekkora a paralelogramma területe.
7. Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:
$$\sqrt{x-5} + \sqrt{x+3} = \sqrt{2x+4}.$$
8. Ha d pozitív valós szám, akkor mi a
$$2d + \frac{3}{d}$$
kifejezés minimuma és maximuma?
Milyen d értékre veszi fel ezeket az értékeket?

116.

2019/05/08

Dolgozatfeladatok megbeszélése

117.

2019/05/09

Szinusztétel. Egy háromszögben igaz, hogy

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Másképpen egy háromszögben igaz a következő:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

396. A háromszög m_a magasságának hosszát fejezd ki többféleképpen Milyen egyéb összefüggést kaphatunk ebből?

397. Ha adott a háromszög a és b oldala, illetve a γ szög, akkor adjunk képletet a c oldalra.

398. $\sqrt{7-2x} > x+3$.

Házi feladat: **397., 398.**

118–119.

2019/05/13

Koszinusztétel.
Minden háromszögben igaz, hogy

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Vektorok.
Vektorok összeadása, kivonása, síkvektorok koordinátái. Egységvektor.

Házi feladat: **398.**

120.

2019/05/15

Javító dolgozat

1. Mekkora a $(2x-y)^9$ kifejezésben az x^4y^5 tag együtthatója?
2. Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{2x+21} = x+3.$$

3. Egy háromszögben $a=7, m_a=4$ és $\gamma=40^\circ$.
   Mekkora b, m_b és β?

4. Hány olyan 5000-nél kisebb pozitív egész szám van, amely osztható 9-cel vagy 15-tel?
5. Egy másodfokú egyenlet gyökei 3 és -5, a másodfokú kifejezés konstans tagja pedig -60. Add meg ezt a másodfokú egyenletet.
6. Egy paralelogramma egyik átlója 3, a másik 4 egység hosszú, a területe $3\sqrt{2}$. Add meg pontosan, hogy mekkora szöget zár be a két átló.
7. Oldd meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:
$$\sqrt{6x^2+8x-8}-\sqrt{3x-2}=0.$$
8. Egy furcsa ország tudományos parkjába úgy lehet bejutni, hogy két pénztárnál kell fizetni. Az első pénztárnál te mondhatod meg, hogy mennyit fizetsz, de kell valamennyit fizetni. A másodiknál az első pénztárnál fizetett összeg reciprokának a 7-szeresét kérik el. A furcsa országban tetszőleges összeg kifizethető. Mennyit érdemes az első pénztárnál fizetni, hogy a legolcsóbban jussunk be a parkba?

121.

2019/05/16

Szögfüggvények általánosítása: sin és cos kiterjesztése minden valós számra.
Vektorok skalárszorosa. Egységvektorok koordinátáinak kiszámítása.

399. Legyen $\underline{a}(2;7)$, $\underline{b}(-3;4)$. Add meg a következő vektorok koordinátáit:
   (a) $\underline{a}+\underline{b}$
   (b) $\underline{a}-\underline{b}$
   (c) $3\underline{b}+\underline{a}$
   (d) $5\underline{a}-7\underline{b}$
   (e) $\sqrt{2}\underline{b}-\sqrt{3}\underline{a}$

400. Számítsd ki pontosan a következő értékeket:
   (a) $\sin(2\pi)$
   (b) $\sin(5\pi)$
   (c) $\cos(-3\pi)$
   (d) $\cos\left(\frac{7}{3}\pi\right)$
   (e) $\sin\left(-\frac{11}{2}\pi\right)$

Házi feladat: **398–400.** A 399. és 400. feladat eredményeit írásban is be kell adni.

GeoGebra (14): Vegyél fel egy origó (O) középpontú egységkört, és a körön egy P pontot. A P pont legyen mozgatható a körön. Legyen P_x, illetve P_y a P pont merőleges vetülete az x, illetve az y tengelyre. Legyen a PP_x és PP_y szakaszoknak feltűnő színe és vastagsága. A szakasz mellett jelenjen meg a szakasz hossza is. Legyen az $A(1;0)$ pont is rajta az ábrán, és jelöld meg az AOP szöget, és annak is legyen feltüntetve a nagysága fokban és radiánban is.

GeoGebra (F03): Vegyél fel három csúszkát. Az elsőn lehessen állítani a hosszát 1 és 10 között, a második dikon m_a hosszát 1 és 8 között, a harmadikon pedig az α szöget 10º és 150º között. A megadott adatokkal szerkesszen a GeoGebra háromszöget, ha az lehetséges.

122–123.

2019/05/20

401. Keress trigonometrikus összefüggéseket, amelyek általánosan igazak.
402. Az ABC háromszögben $a = 6, b = 7, c = 8$. Mekkora β?
403. $(2x + 1)(3 - x) > 9 - x^2$.

Házi feladat: **403.**

Óra végi

1. $\sin(14\pi)$
2. $\cos\left(-\frac{3}{2}\pi\right)$
3. $x^2 - 2x - 15 < 0.$
4. Legyen $\underline{a}(3; -4)$, $\underline{b}(-1; 5)$. Add meg $3\underline{b} - 2\underline{a}$-t.

124.

2019/05/22

Páratlan függvény:

$$f(x) = -f(-x).$$

Ilyen például a $\sin x$, x, x^3. A függvény grafikonja türkös az origóra.
Páros függvény:

$$f(x) = f(-x).$$

Ilyen például a $\cos x$, x^2, x^8. A függvény grafikonja tükrös az y tengelyre.
Az f függvény **periodikus**, ha létezik olyan p valós szám, hogy minden x-re

$$f(x) = f(x + p).$$

A p számot az f függvény **periódus**ának nevezzük. (Olykor csak a legkisebb ilyen pozitív p-t nevezik periódusnak.)
Mivel

$$\sin x = \sin(x + 2\pi)$$
$$\cos x = \cos(x + 2\pi),$$

ezért $\sin x$ és $\cos x$ periodikusak, és $2\pi, 4\pi, 6\pi$ stb. periódusai a függvénynek.

Házi feladat: **403.**

125.

2019/05/23

Tangens és kotangens általános definíciója.

404. Az ABC háromszögben $a = 6$, $c = 8$ és $\beta = 50^\circ$. Határozd meg b, m_b és α nagyságát.

405. (a) $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
   (b) $\cos\left(\frac{-11\pi}{3}\right)$
   (c) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right)$
   (d) $\operatorname{tg}\left(\frac{-\pi}{2}\right)$
   (e) $\operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$
   (f) $\operatorname{ctg}(7\pi)$

406. A csoport elmegy moziba, mind a 18-en egy sorban ülünk le, véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy Bálint és Gellért nem ülnek egymást mellett?

Házi feladat: **404–406.**

GeoGebra (14): Egy koordinátarendszerben ábrázold a következő függvényeket:

$$f(x) = \sin x$$
$$g(x) = \cos x$$
$$h(x) = \operatorname{tg} x$$
$$j(x) = \operatorname{ctg} x$$
$$k(x) = \sin(x + 2\pi) + 3$$
$$m(x) = \operatorname{ctg}(x - \pi) - 4$$

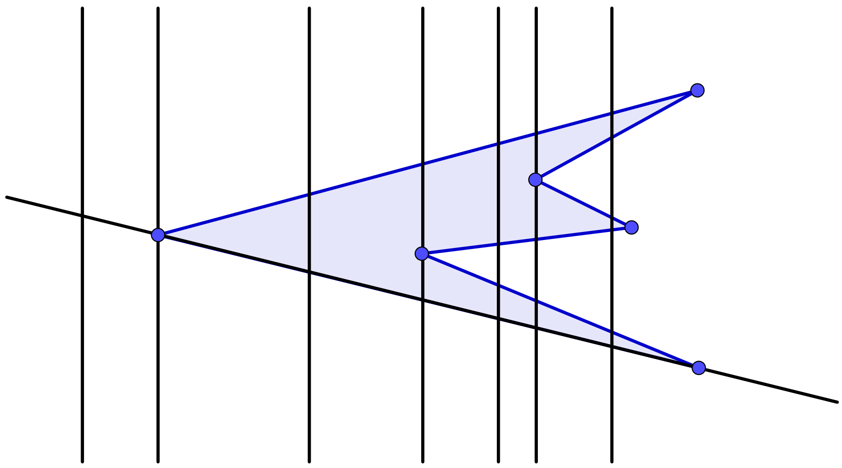
Legyen minden függvény grafikonja különböző színű, és mindegyik mellett szerepeljen a függvény definíciója.

GeoGebra (F03): Vegyél fel három csúszkát, a-t, b-t, c-t. Mindegyiket -6 és 6 között lehessen állítani. Ábrázolj 3 függvényt különböző színekkel ugyanabban a koordinátarendszerben:

$$f(x) = a \cdot x^2 + bx + c$$
$$g(x) = a \cdot \cos(b \cdot x)$$
$$h(x) = a \cdot \operatorname{ctg}(x + c\pi)$$

Megoldások

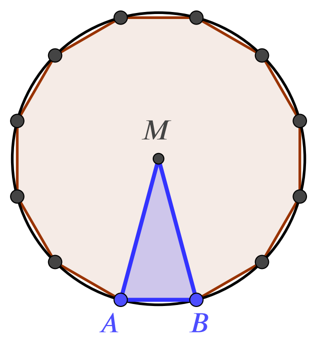
207. Az alábbi ábrán látható, hogy $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ és végtelen sok metszéspont lehetséges.



Még be kell látnunk, hogy 6-nál több, véges számú metszéspont nem lehetséges. Két egyenesnek, ha nem esnek egybe, akkor legfeljebb 1 metszéspontjuk lehet. Ha az egyenes egybeesne valamelyik oldalegyenessel, akkor végtelen sok metszéspont lenne, így az egyenes minden oldalt legfeljebb 1 pontban metszhet. Mivel 6 oldala van a hatszögnek, így ebben az esetben legfeljebb 6 metszéspont keletkezhet.

208. Nem oldható meg.
A jobb oldalon egy páratlan szám áll, így a bal oldali szorzat is páratlan. Egy szorzat pontosan akkor páratlan, ha minden tényezője páratlan. Vagyis $x + y, y + z$ és $z + x$ is páratlan egészek. Két szám összege akkor lesz páratlan, ha ellenkező paritásúak. Azonban 3 szám (esetünkben x, y, z) között mindig van legalább két egyforma paritású, azok összege páros lesz. Vagyis az egyenletnek nincs megoldása.

209. Nézzük az alábbi ábrát:



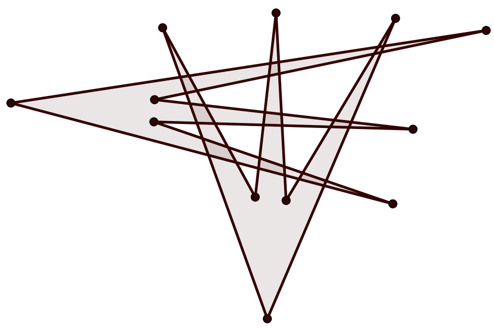
Ha adott az AB oldal, akkor meg tudjuk szerkeszteni az ABM háromszöget, hiszen ismerjük az AB oldalt és a szögeit. A szögeit azért, mivel az $AMB\sphericalangle = 30^o$, hiszen egy szabályos 12-szögről van szó, és a háromszög egyenlőszárú, vagyis $MAB\sphericalangle = MBA\sphericalangle = 75^o$.
Ha tehát felvesszük az AB oldalt és mindkét végpontjában 75^o-os szöget szerkesztünk, akkor megkapjuk az ABM háromszöget, amelyben az $AM = BM$ éppen a körülírt kör sugara.
75^o-os szöget pedig úgy tudunk szerkeszteni, hogy először egy 60^o-os és egy 120^o-os szöget szerkesztünk, az ezek közötti rész megfelezve kapunk egy 90^o-os szöget, és a 90^o-os és a 60^o-os szögszárak közötti szöget elfelezve kapjuk a 75^o-os szöget.

210. Tudjuk, hogy a 3 gyerek életkorának a szorzata 36. Mivel egész számokról van szó, így fel tudjuk sorolni az összes lehetőséget.

a	b	c	össz
1	1	36	36
1	2	18	21
1	3	12	16
1	4	9	14
1	6	6	13
2	2	9	13
2	3	6	11
3	3	4	10

Mi sajnos nem tudjuk a házszámot, de ki tudjuk találni, hiszen Péter annak ismeretében sem tudta megmondani a gyerekek életkorát. Ebből következik, hogy csak olyan lehet a házszám, ami többféleképpen is kijön az életkorok összegeként. Ez pedig egyedül a 13. Tehát tudjuk, hogy a gyerekek életkora vagy 1, 6, 6, vagy 2, 2, 9. Még annyi információnk van, hogy Pálnak van egy olyan gyereke, aki idősebb Péter Borcsa lányánál. Ez csak azzal segít nekünk, hogy ez az információ elég Péternek, hogy meghatározza az életkorokat. Ez azt jelenti, hogy Borcsának 6 évesnél idősebbnek, 9-nél fiatalabbnak kell lennie. (Különben ez az információ nem segítene.) Vagyis az egyetlen lehetőség, hogy a gyerekek $1, 6, 6$ évesek, hiszen mind fiatalabbak Borcsánál.

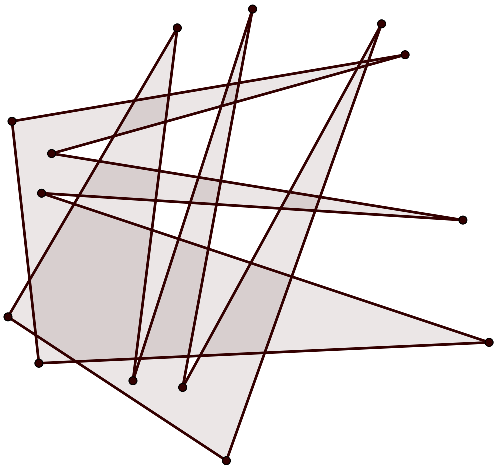
211. (a) Már tudjuk, hogy egy egyenesnek és egy hatszögnek legfeljebb 6 metszéspontja lehet, ha véges sok metszéspontjuk van. Ha az egyik hatszög minden oldalegyenese legfeljebb 6 pontban metszheti a másik hatszöget, akkor összesen legfeljebb 36 metszéspontjuk lehet. Ez meg is valósítható:



(b) Két hétszög esetén lényegesen bonyolultabb a helyzet. A fentiek alapján nyilvánvaló, hogy 49-nél több metszéspont nem lehet. Mi azonban már azt is tudjuk a 207. feladatból, hogy egy egyenesnek és egy hétszögnek legfeljebb 6 metszéspontja lehet. Ezek alapján látszik, hogy 42-nél több metszéspont sem lehet.

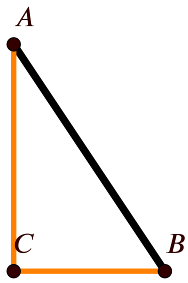
A hatszöges példa könnyen átalakítható két hétszögre, így az is egyszerű, hogy 36 metszéspont lehetséges.

Közel sem ilyen egyszerű észrevenni, hogy 38 metszéspontot is kaphatunk:



38 a maximum, de ennek bizonyítása kifejezetten nehéz, ezért eltekintünk tőle.

212. Két pont távolságát a koordinátarendszerben könnyen meghatározhatjuk a Pitagorasz-tétel segítségével. Nézzük az alábbi ábrát:



213. (a) A: Egy szám osztható 48-cal.
B: Egy szám osztható 6-tal és 8-cal is.
Nyilvánvaló, hogy $A \Longrightarrow B$, hiszen $48 = 6 \cdot 8$.
Viszont $B \not\Longrightarrow A$, hiszen 24-re teljesül a B állítás, de az A nem.

(b) A: Az ABC háromszög derékszögű.
B: $a^2 + b^2 = c^2$.
A Pitagorasz-tételből és annak megfordításából tudjuk, hogy ez a két állítás ekvivalens, azaz: $A \Longleftrightarrow B$. (Feltéve persze, hogy a második állításban egy háromszög három oldalát jelzi a, b és c.

(c) A: Egy szám osztható 3-mal.
B: Egy szám minden számjegye osztható 3-mal.
$A \not\Longrightarrow B$, hiszen 111 osztható 3-mal, de egyik számjegye sem osztahó.
$B \Longrightarrow A$, hiszen ha minden számjegy osztható 3-mal, akkor a számjegyek összege is, és abból következik, hogy a szám is.

214. Tudjuk, hogy két ponttól egyenlő távolságra lévő pontok mértani helye éppen a két pont által meghatározott szakasz felezőmerőlegese. A keresett pontok tehát rajta vannak AB felezőmerőlegesén és a k körön is. Vagyis csak meg kell szerkesztenünk a felezőmerőlegest, és ahol metszi a kört, ott lesznek a keresett pontok.
Ha az egyenes két pontban metszi k-t, akkor két megoldás van, ha érinti, akkor egy, és az is elképzelhető, hogy nem metszi a felezőmerőleges a kört, ekkor nincs a feltételeknek megfelelő pont a síkon.

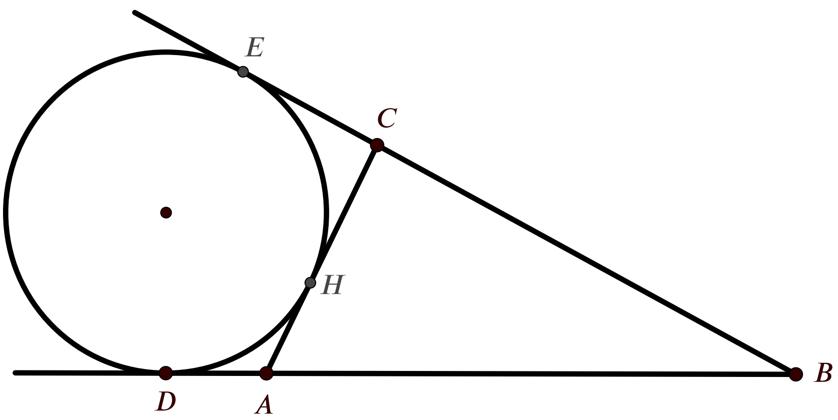
215. (a) $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$
Mindkét oldalon értelmes kifejezésnek kell állnia, vagyis mindkét gyökjel alatt egy nem-negatív értékre van szükség. Ahhoz, hogy a bal oldal nem-negatív legyen, azaz $x - 2 \geq 0$, az kell, hogy $x \geq 2$. Hasonlóan a jobb oldalon $2 - x \geq 0$, vagyis $2 \geq x$. Ez egyszerre csak úgy teljesül, ha $x = 2$, és akkor mindkét oldalon 0 áll, vagyis teljesül az egyenlőség.

(b) $|x + 3| + |2x - y| = 0$.
Mivel egy abszolútértékes kifejezés értéke mindig nem-negatív, így az összegük csak akkor lehet 0, ha mindkettő 0. Vagyis:
$x + 3 = 0$, amiből $x = -3$, és $2x - y = 0$, vagyis, $y = 2x = -6$.

216. Nem igaz minden esetben. Ha a 3 pont egy egyenesre esik, akkor nincs ilyen kör. (Minden egyéb esetben van ilyen kör, hisz akkor a három pont egy háromszöget alkot, amelynek mindig van körülírt köre, amely épp megfelel a kívánt feltételeknek.)

(b) Ha már 3 pontra sem volt, igaz négyre még kevésbe. Viszont ekkor már az sem igaz, hogy ha a 4 pont egy négyszöget alkot, akkor lenne megfelelő kör feltétlenül. Ha egy konkáv négyszögre gondolunk, akkor világos, hogy nem lehet olyan kör, amely mind a 4 csúcson áthalad.
Kifejezetten speciálisak azok a négyszögek, amelyeknek van körülírt köre, ezeket nevezzük húrnégyszögnek, hiszen minden oldaluk a körülírt körüknek egy húrja.

217. Tekintsük az alábbi ábrát:



..

Használjuk fel azt, hogy egy pontból egy körhöz húzott két érintőszakasz hossza megegyezik. Ebből a következő három állítás is következik:

$$\overline{BD} = \overline{BE}$$
$$\overline{AD} = \overline{AH}$$
$$\overline{CH} = \overline{CE}.$$

Tudjuk, hogy $|\overline{BD}| = 10$, ezért $|\overline{BE}| = 10$. Mivel $\overline{AD} = \overline{AH}$, ezért $|\overline{BD}| = |\overline{BA}| + |\overline{AH}|$. Hasonlóan $\overline{CH} = \overline{CE}$ miatt $|\overline{BE}| = |\overline{BC}| + |\overline{CH}|$. Tehát

$$K = |\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{CA}| = |\overline{BE}| + |\overline{BD}| = 20.$$

218. A négyszög minden oldala egy húr, és kettő ezek közül párhuzamos, hiszen trapézról van szó. Két párhuzamos húrnak azonban egybeesik a szakaszfelező merőlegese, ami egyben szimmetriatengely is. Vagyis egy ilyen trapéz tengelyesen szimmetrikus. Ez visszafelé is igaz, ha egy trapéz szimmetrikus, akkor húrnégyszög. Emiatt a szimmetrikus trapézokat más néven húrtrpéznak is nevezhetjük.

219. Ha egy kör érint két egyenest, akkor a középpontja egyenlő távolságra van a két egyenestől. Két szögszár esetén a szögfelezőn vannak azok a pontok, amelyek egyenlő távolságra vannak a két szögszártól. Ebből következik, hogy a keresett kör középpontja rajta van a 60^o-os szög szögfelelzőjén. Szerkesszük tehát meg a szög szögfelezőjét.
Mit tudunk még a keresett kör középpontjáról? Azt, hogy 2 cm-re van mindkét szögszártól. Szerkesszünk párhuzamost az egyik szögszárral 2 cm-re attól. Ezen is rajta kell lennie a kör középpontjának. A szögfelező és a párhuzamos metszéspontja adja meg a keresett kör középpontját.

220. Tudjuk, hogy egy érintőnégyszög szemközti oldalainak az összege egyenlő. A megadott három oldal sorrendjét nem ismerjük, ezért 3 lehetőség van a negyedik oldal hosszára, aszerint, hogy a három megadott hosszúságú oldal közül melyik van középen.
Ha az oldalak sorrendje: 5, 6, 7, akkor a szemközti oldalak hosszának összege 12, vagyis a negyedik oldal 6 hosszúságú.
Ha az oldalak sorrendje: 5, 7, 6, akkor a szemközti oldalak hosszának összege 11, vagyis a negyedik oldal 4 hosszúságú.
Ha az oldalak sorrendje: 6, 5, 7, akkor a szemközti oldalak hosszának összege 13, vagyis a negyedik oldal 8 hosszúságú.

221. Mivel az ABT_A háromszög derékszögű, ezért T_A rajta van AB Thalész-körén. De ugyanez elmondható T_B-ről is, így ez a 4 pont minden háromszög esetén egy körön van.

222. Ha egy kifejezés abszolút értéke 2, akkor az azt jelenti, hogy a kifejezés értéke 2 vagy -2. Vizsgáljuk meg mindkét esetet:
$x^2 - 4x + 3 = 2$ esetén $x^2 - 4x + 1 = 0$. Ennek az egyenletnek a gyökei: $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$.
$x^2-4x+3 = -2$ esetén $x^2-4x+5 = 0$. Ennek az egyenletnek nincs gyöke, hiszen $x^2-4x+5 = (x-2)^2+1$, ami nem lehet 0, hiszen a négyzet legalább 0, és ahhoz 1-et adva egész biztosan pozitív számot kapunk. Vagyis itt nem kapunk megoldást.
Az eredeti egyenlet összes megoldása: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

223. Két különböző megoldást mutatunk.
Első megoldás. Fel tudjuk írni a háromszög oldalainak hosszát Pitagorasz-tétel segítségével.
Azt kapjuk, hogy $AB = \sqrt{(2-0)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{20}$, $AC = \sqrt{(6-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{45}$ és $BC = \sqrt{(6-2)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{65}$. Ebből látszik, hogy $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$, vagyis a háromszög derékszögű.
Második megoldás. Az AB szakasz által meghatározott egyenes meredeksége 2, míg az AC szakasz által meghatározott egyenesé $-\frac{1}{2}$. Az előbbi azt jelenti, hogy míg 1-et haladunk jobbra, addig 2-t haladunk az egyenesen felfelé, a második pedig épp azt, hogy míg 2-t haladunk jobbra, addig 1-et lefelé. Ez utóbbi pedig azt jelenti, hogy az AB szakasz merőleges AC-re.
Ez alapján állapítottuk meg, hogy ha két egyenes meredekségének a szorzata -1, akkor a két egyenes merőleges egymásra.

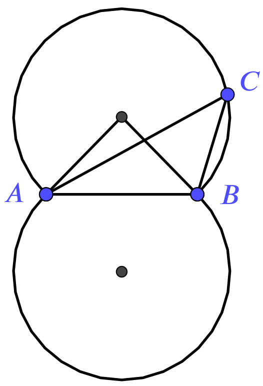
224. Ha azt akarjuk, hogy a $|x^2+6x+7|$ kifejezés kisebb legyen, mint 2, ahhoz az kell, hogy az abszolútérték belsejében lévő kifejezés -2 és 2 közé essen. Tehát az kell nekünk, hogy

$$-2 < x^2 + 6x + 7 < 2.$$

Mivel $x^2 + 6x + 7 = (x + 3)^2 - 2$, ezért $x^2 + 6x + 7 \geq -2$, és csak akkor -2, ha $x = -3$.
Arra van még szükségünk, hogy $x^2 + 6x + 7 < 2$ legyen. Vagyis $x^2 + 6x + 5 < 0$, ami átírható erre: $(x + 1)(x + 5) < 0$. Mivel a grafikon egy felfelé nyíló parabola, ezért a két gyök között lesz negatív a kifejezés értéke. Vagyis $-5 < x < -1$. De azt már tudjuk, hogy $x \neq -3$.
Vagyis azt kaptuk, hogy $-5 < x < -3$ vagy $-3 < x < -1$.
Másképpen $x \in]-5; -1[\setminus \{-3\}$.

225. Hogyan tudunk okosan pontokat találni? Ha P egy megfelelő pont a síkon, akkor tekintsük az ABP háromszöget. Ennek P-nél lévő szöge 60°-os. Ebből következik, hogy a másik két szög összege 120°. Ha tehát A-ban és B-ben szerkesztünk két olyan szögszárat, amelyre az A-nál és a B-nél lévő szögek összege 120°, akkor a két szögszár metszéspontjából a szakasz 60°-ban fog látszódni. Így tetszőleges mennyiségű megfelelő pontot találhatunk.
Megvizsgálva a pontokat azt látjuk, hogy két köríven helyezkednek el.
Ezeket látóköríveknek nevezzük.

226. Megszerkesztve pár példát, azt tapasztaljuk, hogy a körívek középpontjából a szakasz kétszer akkora szögben látszik, mint a körív pontjaiból.



227. Vegyük észre, hogy ha a
$$x^4 + x^2 - 6 = 0$$
egyenletben az $y = x^2$ helyettesítést hajtjuk végre, akkor egy másodfokú egyenletet kapunk. Ekkor ugyanis:
$$y^2 + y - 6 = 0.$$
Ezt viszont már meg tudjuk oldani, például észrevéve azt, hogy $y^2 + y - 6 = (y - 2)(y + 3)$ kapjuk, hogy $y = 2$ vagy $y = -3$. (Ezt persze a megoldóképlet alkalmazásával is megkaphatjuk.)
Tehát azt kaptuk, hogy $x^2 = 2$ vagy $x^2 = -3$. Ez utóbbi nyilván nem lehetséges. Az előbbi pedig akkor teljesül, ha $x = \pm\sqrt{2}$.
Vagyis az egyenletnek két gyöke van: $\sqrt{2}$ és $-\sqrt{2}$.

228. A sapkák a fejükön vagy egyforma színűek lesznek, vagy különbözőek. Legyen az a stratégiájuk, hogy az egyik azt feltételezi, hogy egyforma színű sapka van a fejükön, a másik, hogy különböző. Vagyis az egyikük olyan színre tippel, amilyet lát a másik fején, a másikuk pedig épp az ellenkezőjére, mint amit lát. Ebben az esetben pontosan az egyiküknek lesz igaza, és ő el is találja a saját fején lévő sapka színét.

229. Nehéz pontosan megmérni a szögeket, hiszen a szögmérő beosztásához képest gyakran túl vastag vonalat húz a ceruzánk. De ha sikerül elég pontosan mérni, akkor feltűnhet, hogy a négyszögek szemközti szögei

180°-ra egészítok ki egymást.
Ezt be is tudjuk bizonyítani, ez a húrnégyszögek tétele:

230. Ahhoz, hogy egy tört értéke pozitív legyen, a számláló és a nevező előjelének egyformának kell lennie. A
$$\frac{x^2-3x+4}{x^2-4}$$
tört számlálója mindig pozitív, hiszen $x^2-3x+4=(x-1,5)^2+1,75$, ami mindig legalább $1,75$, vagyis pozitív.
Azt kell tehát megvizsgálnunk, hogy a nevező mikor pozitív. $x^2-4=(x+2)(x-2)$, és a grafikonja egy felfelé nyíló parabola, így akkor pozitív, ha $x<-2$ vagy $x>2$.
Azaz ugyanez az egyenlőtlenség megoldása is: $x<-2$ vagy $x>2$, másképpen $x\in]-\infty;-2[\cup]2,\infty[$.

231. Egy tört értékéről kell eldöntenünk, hogy mikor pozitív, hiszen ez az egyenlőtlenségünk:
$$\frac{x^2+10x+1}{x^2+2x+3}>0.$$
Akkor lesz pozitív, ha a számláló és a nevező előjele azonos.
Könnyen látható, hogy a nevező mindig pozitív, hiszen $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$. (Ez onnan is látható, hogy a másodfokú kifejezés diszkriminánsa $D=2^2-4\cdot1\cdot3=-8$ negatív, vagyis nincs gyöke és a főegyütthatója pozitív.)
Vagyis ahhoz, hogy a tört pozitív legyen, az kell, hogy a számláló pozitív legyen: $x^2+10x+1>0$. Mivel ebben a másodfokú kifejezésben is pozitív a főegyüttható, így a grafikonja egy felfelé nyíló parabola lesz, így a két gyök között lesz negatív a kifejezés értéke. Határozzuk meg a két gyököt:
$$x_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{10^2-4\cdot1\cdot1}}{2}=-5\pm2\sqrt{6}.$$
Vagyis az eredeti egyenlet megoldása:
$x<-5-2\sqrt{6}$ vagy $x>-5+2\sqrt{6}$, amit így is írhatunk: $x\in\left]-\infty;-5-2\sqrt{6}\right[\cup\left]-5+2\sqrt{6};\infty\right[$.

232. Könnyen tudunk találni olyan egyenest, amin nincs egyetlen rácspont sem. Ilyen például az x tengellyel párhuzamos egyenes, ami a tengelytől $\frac{1}{2}$ távolságra van.
Az x tengely kiváló példa arra, amikor egy egyenesen végtelen sok rácspont van.
Ha egy egyenesen van két rácspont, akkor biztosan lesz végtelen sok. Nézzük meg ugyanis a két rácspont távolságát az x és az y tengelyen. Ha az x tengelyen X a távolságuk, az y tengelyen pedig Y, akkor a jobbra lévő ponttól X-et jobbra haladva, Y-t pedig felfelé ismét egy rácspontot kapunk, ami szintén az egyenesen van. Ezt ismételve végtelen sok rácspontot találunk az egyenesen. (Lehetnek egyéb rácspontok is az egyenesen.)
Egyetlen kérdés maradt: lehet-e, hogy egy egyenesen egyetlen rácspont van?
A válasz igen. Ha ugyanis veszünk egy origón átmenő egyenest, amelynek a meredeksége nem racionális, akkor azon nem lehet rácspont. Ha ugyanis van rajta rácspont, akkor a rácspont két koordinátájának hányadosaként ki tudjuk fejezni a meredekségét. A koordináták viszont egész számok, így a hányados racionális lenne.
Itt felmerül a kérdés, hogy vannak-e nem racionális számok. Igen, vannak, ld. 237. feladat.

233. Első ránézésre nehéznek tűnik a feladat, hiszen ez egy hatodfokú egyenlet, amikről keveset tudunk. De

könnyen észrevehető, hogy az egyeneltet vissza tudjuk vezetni egy másodfokúra, ha x^3 helyére y-t írunk.

$$2x^6 + 5x^3 - 3 = 0$$
$$2y^2 + 5y - 3 = 0$$
$$(2y - 1)(y + 3) = 0.$$

Ebből kapjuk, hogy $y = \frac{1}{2}$ vagy $y = -3$.
(A másodfokú egyenlet megoldóképletébe is behelyettesíthettünk volna: $z_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{4} = \frac{-5\pm\sqrt{49}}{4} = \frac{-5\pm 7}{4}$. Amiből szintén azt kaptuk, hogy $y_1 = \frac{1}{2}$ vagy $y_2 = -3$.)
Ne felejtsük el, hogy nem y-t kerestük, hanem x-et. Vagyis olyan számokat keresünk, amiknek a köbe $\frac{1}{2}$, illetve -3. Vannak-e egyáltalán ilyen számok?
Ennek kapcsán vezettük be $\sqrt[3]{\ldots}$ fogalmát.
Az egyenlet gyökei tehát: $x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx 0,794$, illetve $x_2 = \sqrt[3]{-3} \approx -1,442$.

234. Ha adott a körülírt kör sugara, akkor első lépésként ezzel a sugárral szerkesszünk kört. Ismerjük az egyik oldalt, vegyük ezt körzőnyílásba és szerkesszünk a körbe ilyen hosszúságú húrt. Ezzel megkaptuk a négyszög egyik oldalát, illetve két csúcsát. Az egyik csúcsból induló átló hosszát is ismerjük, ezt körzőnyílásba véve meg tudjuk szerkeszteni az átlót és ezáltal a négyszög harmadik csúcsát. Innen a másik ismert oldal (az előzővel szemközti) hosszát körzőnyílásba véve, és elmetszve vele a körülírt kört, kapjuk a negyedik csúcsot. (Ez utóbbi lépésnél két metszéspontot kapunk, de csak az egyik lesz megfelelő, mert a másik esetében nem az lesz az átló hossza, amit szeretnénk.)

235. Nevezzük el a számot A-nak. Jó lenne valahogyan megszabadulni a végtelen sok tizedesjegytől. Ha lenne két olyan számunk, amelyekben a tizedesvessző után ugyanaz szerepel, akkor a különbségük egész szám lenne. Hogyan tudunk ilyen számokat képezni A-ból. Ha 10 hatványaival megszorozzuk.

$$0,2794\overline{646} = A$$
$$279,4\overline{646} = 1000 \cdot A$$
$$27946,4\overline{646} = 100000 \cdot A$$

A második és a harmadik számban a tizedesvessző után ugyanaz áll. Vonjuk ki a nagyobból a kisebbet.

$$27946 - 279 = 100000 \cdot A - 1000 \cdot A$$
$$27667 = 99000 \cdot A$$
$$\frac{27667}{99000} = A.$$

Vagyis felírtuk A-t két egész szám hányadosaként.

236. Bizonyítsuk be az állítást indirekt bizonyítás segítségével.
Tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális.
Ez azt jelenti, hogy vannak olyan a és b egész számok, melyekre

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Az egyenletet négyzetre emelhetjük, és beszorozhatunk b^2-tel.

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$
$$2b^2 = a^2.$$

Innen több módon befejezhetjük a bizonyítást. Nézzünk ezek közül kettőt:
1) A jobb oldalon egy négyzetszám áll, így a prímtényezős felbontásban minden prím kitevője páros, köztük 2 kitevője is. A baloldalon viszont egy négyzetszám kétszerese áll, a négyzetszámban páros sok 2 szerepel szorzótényezőként, és a kétszeres szorzó miatt összesen páratlan sok lesz. Ez azonban ellentmond a számelmélet alaptételének, miszerint a prímfelbontás a prímek sorrenjétől eltekintve egyértelmű.
2) Mivel a bal oldalon páros szám áll, ezért a csak páros lehet, hiszen páratlan szám négyzete is páratlan. Ekkor legyen $a = 2a_1$. Helyettesítsük be, kapjuk, hogy $2b^2 = 4a_1^2$, amiből $b^2 = 2a_1^2$. Ekkor az előzőkhöz hasonlóan b is páros szám. Vagyis $b = 2b_1$, amit felhasználva kapjuk, hogy $4b_1^2 = 2a_1^2$, amiből $2b_1^2 = a_1^2$. Ami lényegében az eredeti egyenlet, és az előző gondolatmenetet megismételve kapjuk, hogy a_1 is páros, vagyis a 4-gyel osztható. És így tovább, és így tovább, kiderül, hogy a bármekkora 2-hatvánnyal osztható, ami nyilván lehetetlen.
Mivel mindkét módon ellentmondásra jutottunk, így az eredeti feltevésünk hamis volt, vagyis $\sqrt{2}$ irracionális.

237. Ha elég pontosan szerkesztünk, akkor azt láthatjuk, hogy a 3 magasságvonal (a teljes egyenesek) egy ponton mennek keresztül.
Azt is észrevehetjük, hogy hegyesszögű háromszög esetén ez a pont a háromszög belsejében, derékszögű esetében a derékszögű csúcsban, tompaszögű háromszög esetében pedig a háromszögön kívül van.
Ez a három egyenes tényleg mindig egy ponton megy keresztül, ezt nevezzük a háromszög magasságpontjának. (Ld. 241. feladat megoldása.)

238. (a)

$$\begin{aligned} 0,1234\overline{34}\ldots &= A \\ 1234,34\overline{34}\ldots &= 10000\cdot A \\ 12,34\overline{34}\ldots &= 100\cdot A \\ 1222 &= 9900\cdot A \\ A &= \frac{1222}{9900} = \frac{611}{4550} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 0,2018\overline{2018}\ldots &= B \\ 2018,2018\overline{2018}\ldots &= 10000\cdot B \\ 2018 &= 9999\cdot B \\ B &= \frac{2018}{9999} \end{aligned}$$

239.

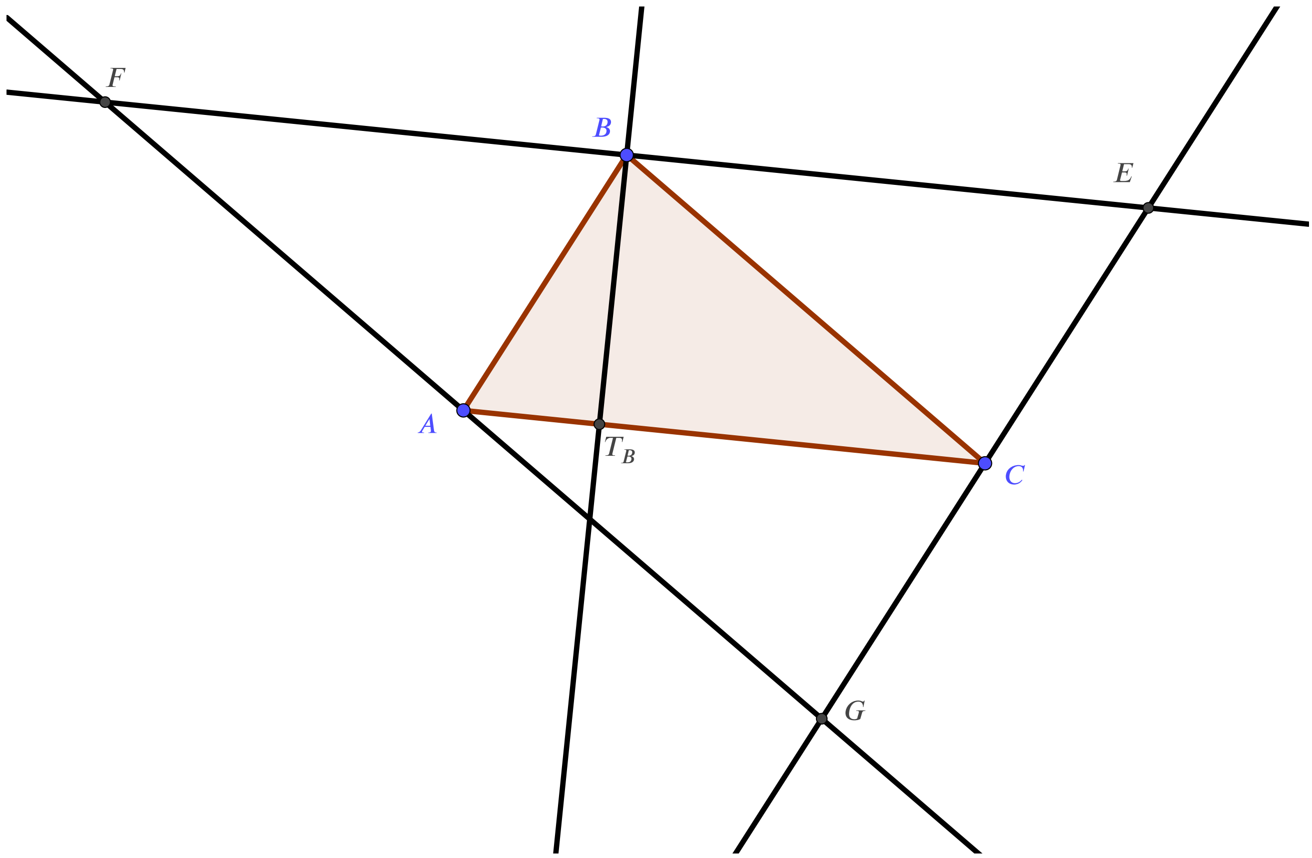
240. Észrevehetjük, hogy a bal oldali kifejezés értéke mindig pozitív, hiszen $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2$. Vagyis ez minden x esetén legalább 2. Emiatt a nevezővel beszorozhatunk és a reláció iránya nem változik meg,

hiszen pozitív számmal szorzunk. Tehát:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+10x+1}{x^2+2x+3} &> 2\\ x^2+10x+1 &> 2(x^2+2x+3)\\ x^2+10x+1 &> 2x^2+4x+6\\ 0 &> x^2-6x+5\\ 0 &> (x-1)(x-5)\end{aligned}$$

Képzeljük el a jobb oldali kifejezés grafikonját. Ez egy felfelé nyíló parabola, amely 1-ben és 5-ben metszi a x tengelyt, vagyis 1 és 5 között lesz a kifejezés értéke negatív.
A megoldás: $1 < x < 5$ vagy $x \in]1;5[$.

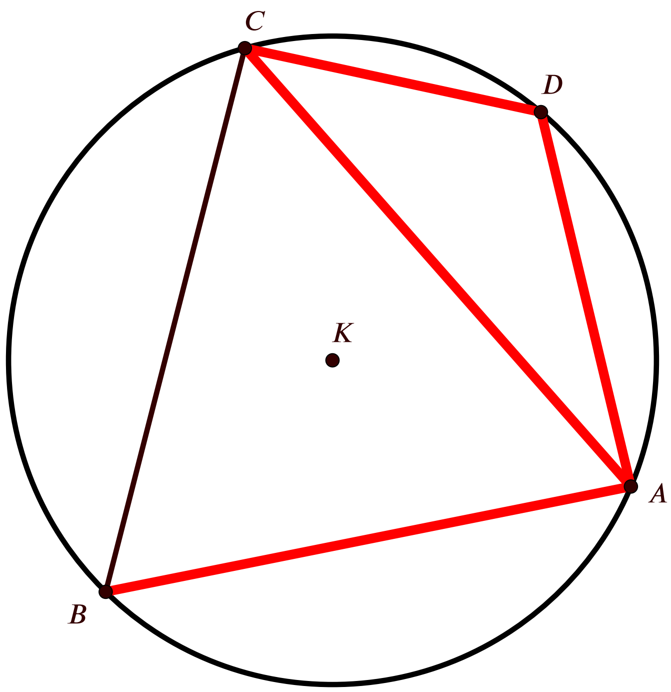
241. Vegyük az ABC háromszög B-hez tartozó magasságát, és az ábrán látható módon húzzunk minden csúcson keresztül párhuzamost a szemközti oldallal.



Azt fogjuk belátni, hogy az ABC háromszög magasságvonalai az EFG háromszög oldalfelező merőlegesei. Ez azért jó, mert azt már tudjuk, hogy egy háromszög oldalfelező merőlegesei mindig egy ponton haladnak át. Ha tehát az EFG háromszög oldalfelező merőlegesei megegyeznek az ABC háromszög magasságvonalaival, akkor ebből következik, hogy a magasságvonalak is mindig egy pontban metszik egymást.
A B csúcshoz tartozó magasság (BT_B) merőleges az AC oldalra. De mivel AC párhuzamos EF-fel, hiszen így hoztuk létre az EFG háromszöget, ezért ez a magasság merőleges EF-re is. Már csak azt

kellene belátnunk, hogy a B pont felezi az EF szakaszt, mert ebből már következne, hogy BT_B az EF szakaszfelező merőlegese.
Vegyük észre, hogy $ABEC$ paralelogramma, hiszen két-két szemközti oldalpárja párhuzamos. Emiatt a szemközti oldalai egyenlő hosszúak. Vagyis $|AC| = |BE|$. Hasonlóan $AFBC$ is paralelogramma, amiből az következik, hogy $|AC| = |FB|$. Mivel BE és FB szakasz hossza is megegyezik AC szakasz hosszával, így B tényleg felezőpont.
Ezzel beláttuk, hogy minden háromszögben a három magasságvonal egy ponton halad azt.
Ezt a pontot a háromszög magasságpontjának nevezzük, és rendszerint M-mel jelöljük.

242. Érdemes elképzelni, hogy már meg is szerkesztettünk mindent, és jelöljük meg, hogy mi az, amit ismerünk.



Jól látszik az ábrán, hogy két oldal és egy átló meghatároz egy háromszöget. Ezt meg is tudjuk szerkeszteni, hiszen háromszöget tudunk szerkeszteni a 3 oldal hosszának ismeretében. Azt is észrevehetjük az ábrán, hogy ha megvan ez a háromszög, akkor megvan a négyszög körülírt köre, hiszen az ugyanaz, mint a háromszög körülírt köre. Ezen észrevételek után a szerkesztés:
1) Az a, b és e hosszak segítségével szerkesszünk háromszöget.
2) Szerkesszük meg a háromszög körülírt körét (a kör középpontja a háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja).
3) Az átló egyik végpontjából vegyük körzőnyílásba a c oldalt, ahol metszi a kör a körülírt kört, ott lesz a húrnégyszögünk negyedik csúcsa.

243. Ha elég pontosan szerkesztünk, akkor azt tapasztaljuk, hogy a 3 tükörkép körülírt köre egybeesik az eredeti háromszög körülírt körével.
Másképp úgy is mondhatjuk ezt, hogy ha a magasságpontot tükrözzük a háromszög oldalaira, akkor a tükörképek rajta vannak a háromszög körülírt körén.

244.

245. (a) $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$.

(b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{7}=\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[4]{7}=\sqrt[4]{28}$.

(c) $\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^4}=\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}=3\cdot\sqrt[3]{3}$.

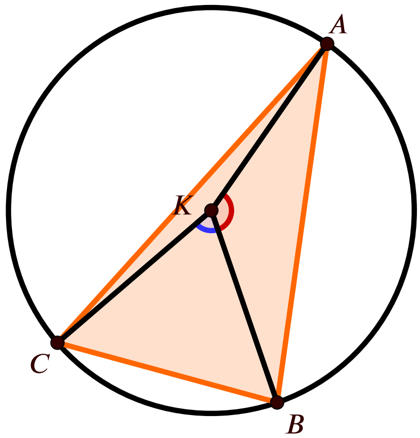
246. (a) $\sqrt[7]{128}=\sqrt[7]{2^7}=2$.

(b) $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$.

(c) $\sqrt[4]{\sqrt[6]{256}}=\sqrt[24]{256}=\sqrt[24]{2^8}=\sqrt[3]{\sqrt[8]{2^8}}=\sqrt[3]{2}$.

(d) $\sqrt[3]{4^{12}}=\sqrt[3]{\left(4^4\right)^3}=4^4=256$.

247. Az ábrán látható, hogy mit tudunk a háromszögről. Nézzünk két, némiképp különböző megoldást.



1. megoldás.
Tudjuk, hogy egy ívhez tartozó középponti szög kétszerese a kerületi szögnek, amiből azonnal adódik, hogy $\gamma=63^\circ$, hiszen $AKB\sphericalangle=126^\circ$. Hasonlóan $\alpha=34^\circ$, mert fele a $BKC\sphericalangle$-nek. Mivel a háromszög szögeinek összege 180°, ezért $\beta=180^\circ-63^\circ-34^\circ=83^\circ$.
2. megoldás.
Tudjuk, hogy $|AK|=|BK|=|CK|$, hiszen mindegyik a körülírt kör sugara. Emiatt AKB, BKC és CKA háromszög is egyenlőszárú, vagyis a két megfelelő szöge egyenlő. Nézzük mondjuk az AKB háromszöget. Tudjuk, hogy az egyik szöge 126°, a másik kettő pedig egyenlő. Emiatt $KAB\sphericalangle=KBA\sphericalangle=\frac{180^\circ-126^\circ}{2}=27^\circ$. Hasonlóan kapjuk, hogy $KCB\sphericalangle=KBC\sphericalangle=\frac{180^\circ-68^\circ}{2}=56^\circ$. Mivel $AKB\sphericalangle+BKC\sphericalangle+CKA\sphericalangle=360^\circ$, ezért $CKA\sphericalangle=166^\circ$. Felhasználva, hogy CKA háromszög is egyenlőszárú, kapjuk, hogy $KAC\sphericalangle=KCA\sphericalangle=\frac{180^\circ-166^\circ}{2}=7^\circ$.
Hogy megkapjuk a háromszög szögeit, két-két megfelelő szöget kell összeadnunk, és kapjuk, hogy $\alpha=CAK\sphericalangle+KAB\sphericalangle=34^\circ$, $\beta=ABK\sphericalangle+KBC\sphericalangle=83^\circ$ és $\gamma=BCK\sphericalangle+KCA\sphericalangle=63^\circ$.

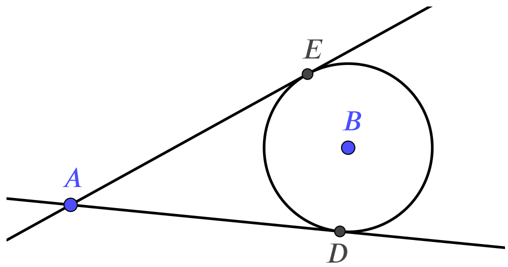
248. Tudjuk, hogy egy törtet úgy hatványozhatunk, hogy külön hatványozzuk a számlálót és a nevezőt. Ezek alapján a gyökvonást is végezhetjük így:

$$\sqrt[4]{\frac{12}{81}}=\sqrt[4]{\frac{12}{3^4}}=\frac{\sqrt[4]{12}}{3}=\frac{\sqrt[4]{2^2\cdot 3}}{3}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{3}}{3}.$$

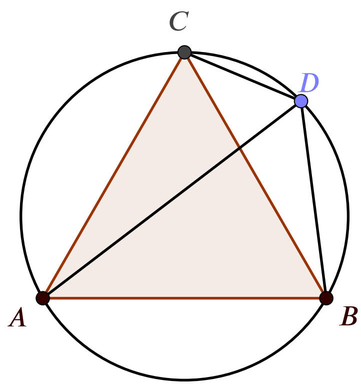
249. Alakítsuk át mindkét számot: $3\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{27\cdot 5}=\sqrt[3]{135}$, illetve $2\cdot\sqrt[3]{17}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{17}=\sqrt[3]{8\cdot 17}=\sqrt[3]{136}$. Ebből pedig jól látható, hogy a második szám a nagyobb.

250.

251. Képzeljük el, hogy már ismerjük a keresett egyenest. Akkor tudjuk, hogy ha a B pontból merőlegest állítunk az egyenesre, akkor B pont és a merőleges és az egyenes metszéspontjának távolsága 2 cm lesz. Ha tehát B köré 2 cm sugarú kört szerkesztünk, és A-ból ahhoz érintőt húzunk, akkor megfelelő egyenest kapunk.
Ha A több mint 2 cm-re van B-től, akkor 2 ilyen egyenes lesz (ahogy az ábrán is látszik). Ha éppen 2 cm-re van a két pont egymástól, akkor csak 1, ha közelebb, akkor egy sem.



252. Nézzük az alábbi ábrát:



Világos, hogy $ACB\sphericalangle = ADB\sphericalangle$, illetve $ABC\sphericalangle = ADC\sphericalangle$, hiszen ugyanahhoz az ívhez tartozó kerületi szögek. De azt is tudjuk, hogy a szabályos háromszög szögei 60°-osak, ezért $ACB\sphericalangle = ADB\sphericalangle = ABC\sphericalangle = ADC\sphericalangle = 60^\circ$. A harmadik keresett szög pedig ennek a kettőnek az összege.
Vagyis az eredeti kérdésre a válasz az, hogy $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ$.

253. Alakítsuk át a kifejezést lépésről lépésre:

$$\left(\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{100}+\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{16}\right)=$$
$$=\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{100}+\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{100}-\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}=$$
$$=\sqrt[3]{1000}+\sqrt[3]{400}+\sqrt[3]{160}-\sqrt[3]{400}-\sqrt[3]{160}-\sqrt[3]{64}=$$
$$=\sqrt[3]{1000}-\sqrt[3]{64}=10-4=6.$$

254. (a) $\left(a^{-\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ általában nem teljesül.

Ugyanis $\left(a^{-\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(a^{-\frac{3}{4}+\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(a^{\frac{7}{12}}\right)^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{12} \cdot -\frac{1}{2}} = a^{\frac{-7}{24}}$. És mivel $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, ezért ez a két kifejezés szinte sosem egyenlő.

(b) $\left(a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[9]{a^3 b^8}$ mindig igaz.
Alakítsuk át a bal oldalt:

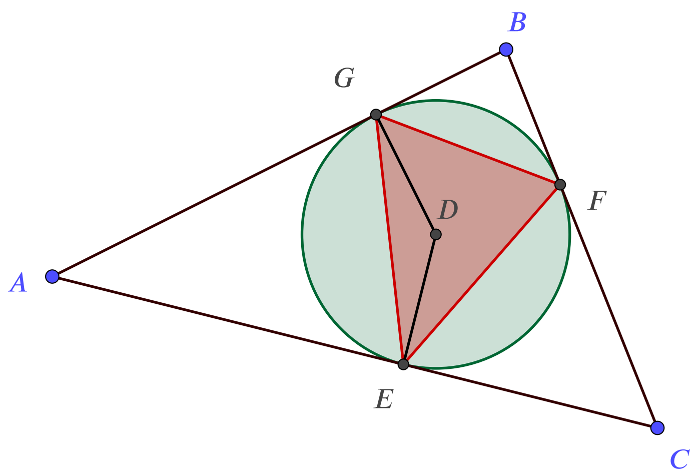
$$\left(a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} \cdot \left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{3}} = a^{\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}} \cdot b^{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{8}{9}}.$$

Most pedig alakítsuk át a jobb oldalt:

$$\sqrt[9]{a^3 b^8} = \left(a^3 b^8\right)^{\frac{1}{9}} = a^{\frac{3}{9}} \cdot b^{\frac{8}{9}} = a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{8}{9}}.$$

Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk és ugyanazt kaptuk, így a két oldal mindig megegyezik.

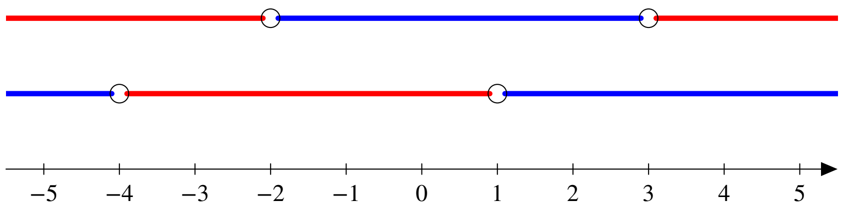
255. Tekintsük az alábbi ábrát, amelyen legyen az ABC háromszög A-nál lévő szöge α. Akkor határozzuk meg az EFG háromszög F-nél lévő szögét. Legyen D a beírt kör középpontja.



Tudjuk, hogy DE merőleges AC-re, illetve DG merőleges AB-re, hiszen az oldalak érintik a beírt kört. Vagyis az $AEDG$ négyszög két szemközti szögének összege 180°, így a másik két szemközti szög összege is 180°. (Ebből az is látszik, hogy ez a négyszög húrnégyszög, de azt nem fogjuk felhasználni, hogy van körülírt köre.)
Ha az ABC háromszög A-nál lévő szöge α, akkor tehát a $GDE\sphericalangle = 180^\circ - \alpha$.
Ez a szög a GE körív középponti szöge, vagyis kétszer akkora, mint bármely, ehhez az ívhez tartozó kerületi szög. $EFG\sphericalangle$ éppen ehhez az ívhez tartozó kerületi szög, így az is $\frac{180^\circ-\alpha}{2}$.
Ezt hasonlóan elmondhatjuk a többi szögről is, vagyis az EFG háromszög szögei: $\frac{180^\circ-\alpha}{2}$, $\frac{180^\circ-\beta}{2}$, $\frac{180^\circ-\gamma}{2}$.
Ha még azt is felhasználjuk, hogy $\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma$, illetve a többi szögre a megfelelő egyenlőséget, akkor azt kapjuk, hogy a megfelelő szögek: $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\alpha+\gamma}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

256. Ahhoz, hogy egy tört értéke negatív legyen, az kell, hogy a számláló és a nevező előjele különböző legyen.
Vizsgáljuk meg külön a számláló és a nevező előjelét:
A számláló: $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, vagyis a grafikonja felfelé nyíló parabola, és a gyökei -2 és

3. Ebből következik, hogy a kifejezés értéke $-2 < x < 3$ esetén negatív, -2-ben és 3-ban 0, egyébként pozitív.
Hasonlóan a nevezővel végrehajtva mindezt: $4 - x^2 - 3x = (1 - x)(x + 4)$ kifejezést kapjuk. Ennek a grafikonja lefelé nyíló parabola, hiszen x^2 együtthatója negatív, így ez a két gyök között lesz pozitív. Vagyis $-4 < x < 1$ esetén pozitív, -4-ben és 1-ben 0, egyébként pedig negatív.
Ezt ábrázolhatjuk is (kék jelenti a negatív, piros a pozitív előjelet):



Azokat az intervallumokat kell figyelnünk, ahol a két vonal színe különböző, akkor lesz a tört értéke negatív. Az ábráról könnyen leolvashatjuk, hogy ez azt jelenti, hogy $x < -4$ vagy $-2 < x < 1$ vagy $x > 3$.

257. Három kétjegyű szám összege legfeljebb 297, ezért A értéke csak 1 vagy 2 lehet. Mivel A értéke nem lehet 0, ezért az egyesek helyén álló számok összege: $A + B + C = 10 + C$. (Mivel A legfeljebb 2, ezért az összeg $20 + C$ már nem lehet.) Ebből következik, hogy $A + B = 10$.
Két lehetőség van tehát:

- $A = 1$.
Ekkor $B = 9$, vagyis $11 + 99 + \overline{CC} = 190 + C$. Ebből $C = 8$, vagyis $\overline{ABC} = 198$.
- $A = 2$.
Ekkor $B = 8$, vagyis $22 + 88 + \overline{CC} = 280 + C$. Ez azonban lehetetlen, hiszen 110-hez egy kétjegyű számot adva legfeljebb 209-et kaphatunk.

Az egyetlen megoldás tehát a 198.

258. Felmerültek:

- Tengelyes tükrözés
- Középpontos tükrözés
- Eltolás
- Nagyítás

Megbeszéltük, hogy vannak kicsit furcsábbak is:

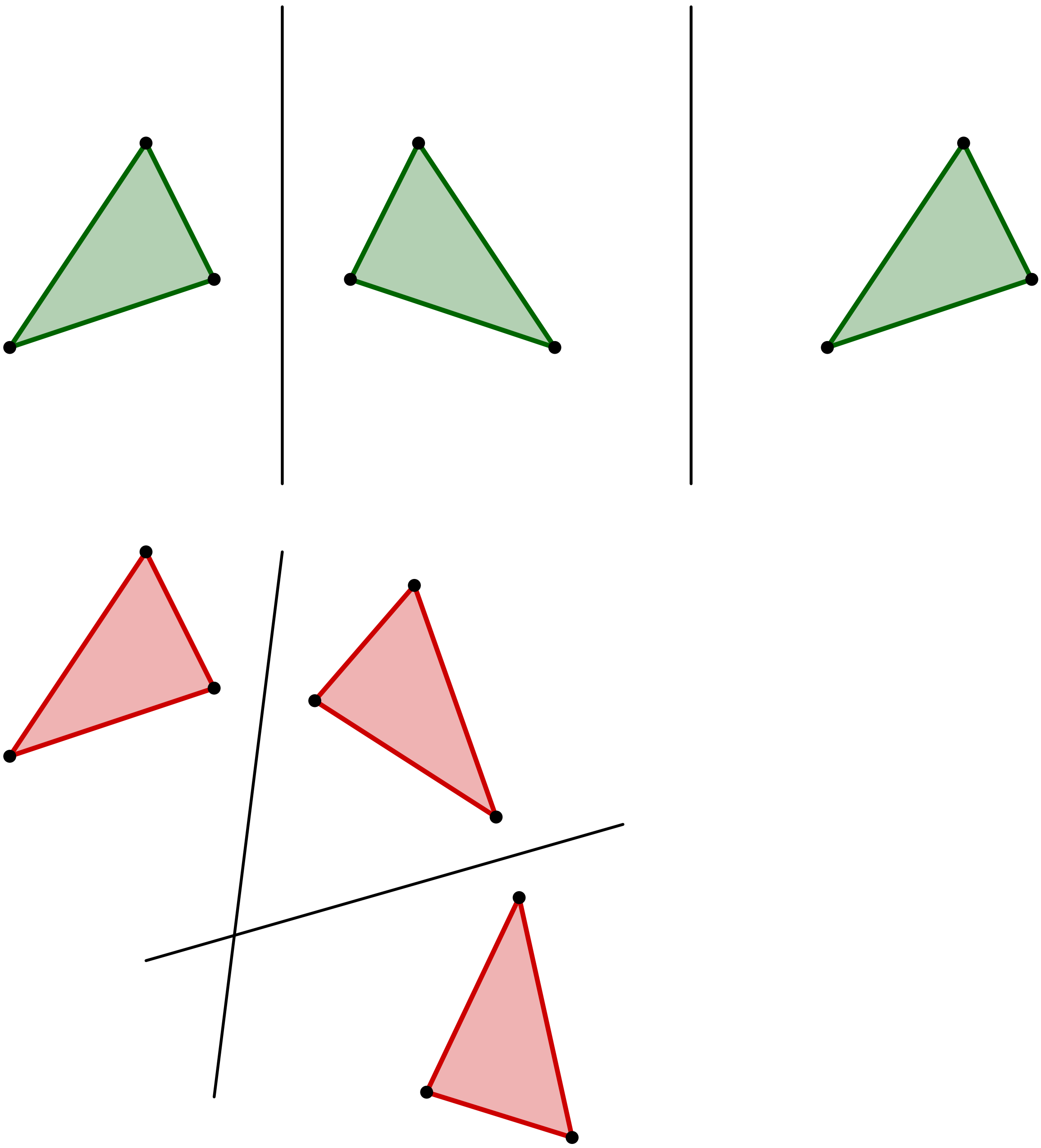
- Identitás (minden a helyén marad)
- Minden pont képe ugyanaz a kitüntetett pont.

259. A definíciók:

- Eltolás: Adott egy $\underline{v}$ vektor. Minden pontot ezzel a $\underline{v}$ vektorral mozgatunk el a síkon.
- Elforgatás: Adott egy K pont és egy irányított α szög. A sík minden pontját a K pont körül elforgatjuk $alpha$-val, vagyis a P pont képe az a P' pont, amelyre igaz, hogy $KP = KP'$ és a $PKP'\sphericalangle = \alpha$.
- Középpontos tükrözés: Adott egy K pont. A P pont képe az a P' pont, amelyre igaz, hogy a PP' szakasz felezőpontja K.

- A nagyítás definícióját nem beszéltük meg egyelőre precízen.

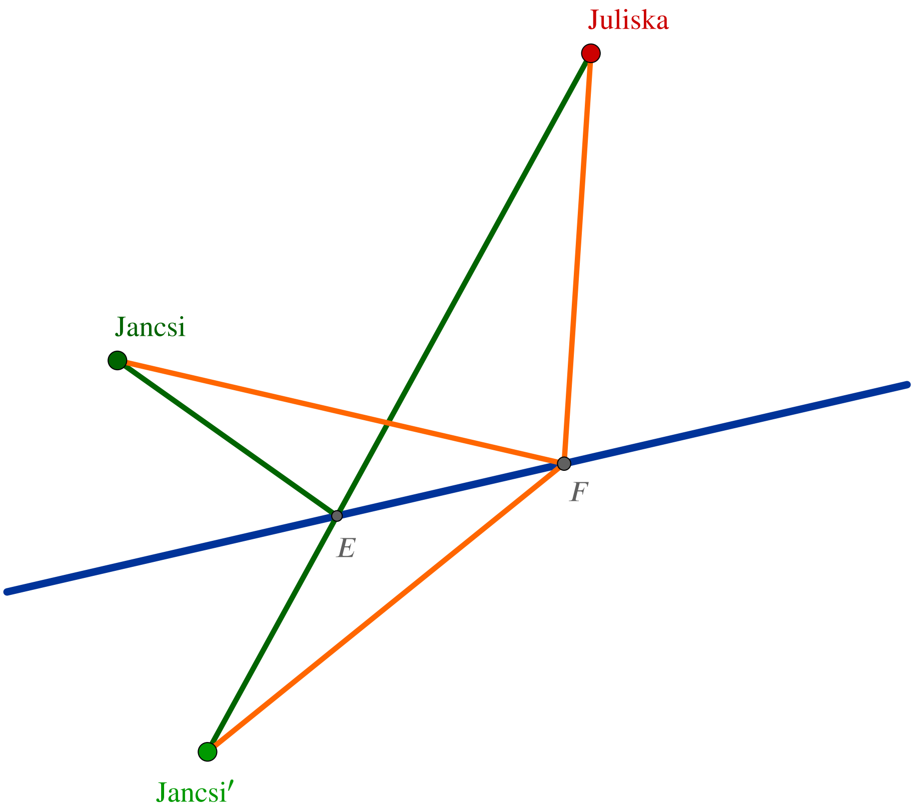
260. Az alábbi ábrán két különböző eset látható:



Az első esetben a két tengely párhuzamos egymással, ekkor a két transzformáció egyetlen **eltolás**sal helyettesíthető.
A második esetben a két tengely metszi egymást, ekkor a két transzformáció egyetlen **elfogatás**sal helyettesíthető. Az elforgatás középpontja a két tengely metszéspontja. Ha a két tengely merőleges egymásra, akkor az eredő transzformáció egy 180°-os elfogatás, vagyis egy **középpontos tükrözés**.

261. $9^{\frac{2}{5}} \cdot 6^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2^2\right)^{\frac{7}{3}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{5}} = 3^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{14}{3}} \cdot 3^{-\frac{3}{5}} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{14}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{3}{5}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{14}{3}} \cdot 3^{\frac{4}{5}+\frac{1}{3}-\frac{3}{5}} =$
$= 2^{\frac{15}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{5}+\frac{1}{3}} = 2^5 \cdot 3^{\frac{8}{15}} = 32 \cdot \sqrt[8]{3^{15}}.$

262. Nézzük az alábbi ábrát:

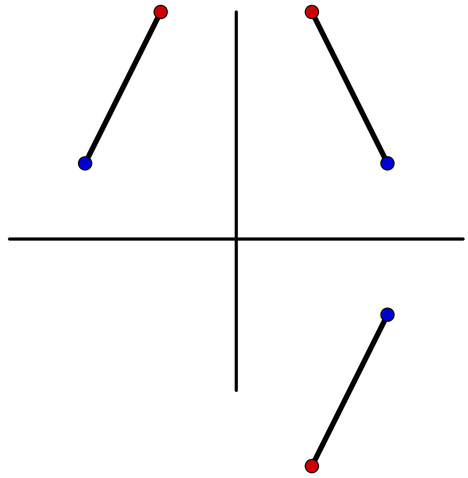


A legrövidebb utat úgy kapjuk, ha Jancsit tükrözzük a patakra, a kapott Jancsi′ pontot összekötjük Juliskával, és ahol ez a szakasz metszi a patakot (E), ott kell vizet vennie Jancsinak.
Miért ez a legrövidebb út?
Tudjuk, hogy kép pont között legrövidebb út az őket összekötő szakasz. Emiatt az út olyan lesz, hogy a patak egy tetszőleges F pontját összekötjük egy szakasszal Jancsival, illetve Juliskával. Ezek közül azonban a fent említett lesz a legrövidebb. Ugyanis az FJancsi szakasz hossza megegyezik az FJancsi′ szakasz hosszával, ahogy az EJancsi szakasz hossza megegyezik az EJancsi′ szakasz hosszával. Emiatt tulajdonképpen Jancsi′-ből akarunk a legrövidebb úton eljutni Juliskához. Ez pedig ismét az őket összekötő szakasz.

263. Alakítsuk át a kifejezést:

$$5^{\frac{4}{3}} \cdot 15^{\frac{3}{2}} \cdot \left(3^3\right)^{\frac{7}{4}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{4}{3}} \cdot 5^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} \cdot 3^{\left(3\cdot\frac{7}{4}\right)} \cdot 5^{-\frac{2}{3}} = 5^{\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{2}+\frac{21}{4}} = 5^{\frac{13}{6}} \cdot 3^{\frac{27}{4}}.$$

264. Nézzük az alábbi ábrát:



A két tengely metszéspontjára középpontosan tükrözve egy lépésben megkaphattuk volna a szakasz képét.

265. Nem. Hogyan tudjuk felírni $\binom{38}{19}$-et? Így:

$$\binom{38}{19} = \frac{38 \cdot 37 \cdot \ldots \cdot 21 \cdot 20}{19 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}.$$

A számlálóban egyedül 34 osztható 17-tel, ezért a számláló prímtényezős felbontásában egyszer szerepel a 17. A nevező esetén is igaz ez, hiszen csak a 17 osztható 17-tel. Mivel mind a számláló, mind a nevező csak egyszer tartalmazza prímtényezőként a 17-et, ezért a hányadosban nem szerepel a 17, így a hányados nem osztható 17-tel.

266. Ha az $y = x$ egyenesre tükrözünk, akkor az felcserélni a pont koordinátáit. Ezért az eredeti háromszög csúcsait úgy kapjuk meg, ha felcseréljük a koordinátákat:
$A'(-3; 2)$, $B'(4; 1)$, $C'(1; -2)$.

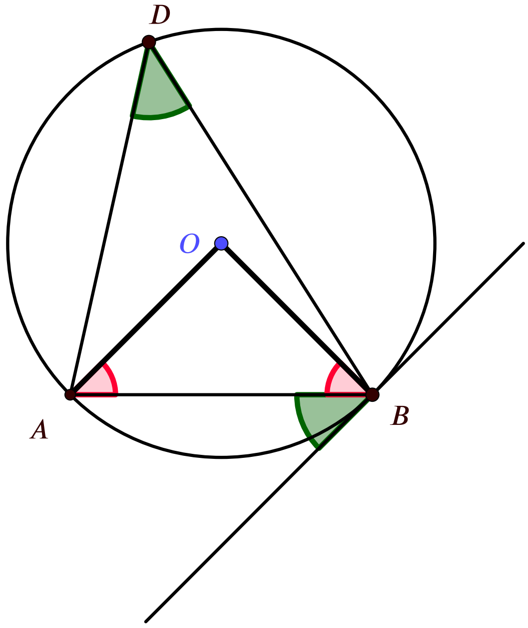
267. A háromszögek között az egyenlőszárú háromszögek tengelyesen szimmetrikusak. Nincs középpontosan szimmetrikus háromszög. (A szabályos háromszög sem az.)
A négyszögek közül a deltoidok és az egyenlőszárú trapézok tengelyesen szimmetrikusak, az előbbiek azok, amelyeknek van olyan szimmetriatengelye, amely áthalad két csúcson, az utóbbiak azok, amelyeknek van olyan szimmetriatengelye, amely nem halad át csúcson. (Természetesen a rombuszok, téglalapok és a négyzetek is tengelyesen szimmetrikusak.)
Egy négyszög pontosan akkor középpontosan szimmetrikus, ha paralelogramma.

268. Először válasszuk ki a 4 lányt. Mivel 18 lány van, ezért ezt $\binom{18}{4}$-féleképpen tehetjük meg. Ettől teljesen függetlenül kiválaszthatjuk a fiúkat $\binom{12}{4}$-féleképpen, vagyis az eredmény:

$$\binom{18}{4} \cdot \binom{12}{4} = 1515700.$$

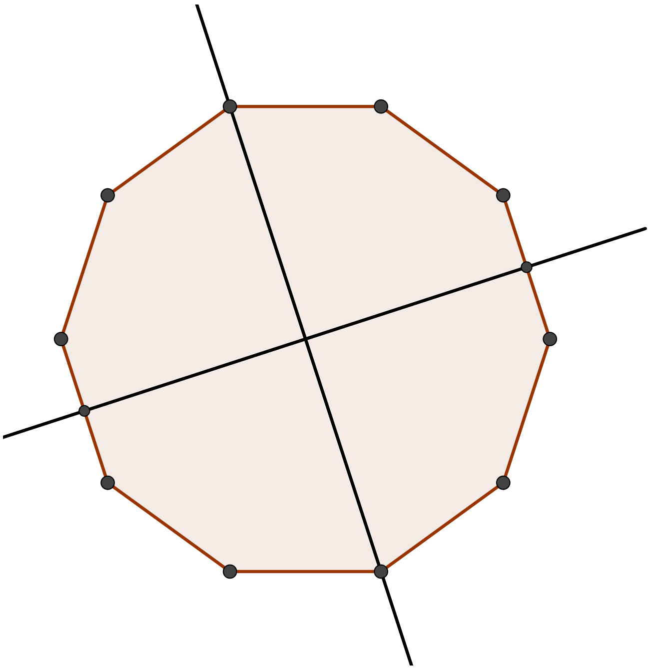
269. Legyen $ADB\sphericalangle = \alpha$. Ekkor azt kell belátnunk, hogy az **érintőszárú kerületi szög** is α nagyságú. A kerületi és középponti szögek közötti összefüggés alapján tudjuk, hogy $AOB\sphericalangle = 2\alpha$. Mivel az AOB háromszög egyenlőszárú ($AO = OB$, hiszen mindkettő sugara a körnek), ezért $OAB\sphericalangle = OBA\sphericalangle$. Legyen ez a szög β. Ekkor $2\alpha + \beta + \beta = 180^\circ$, vagyis $\alpha + \beta = 90^\circ$, így $\beta = 90^\circ - \alpha$.

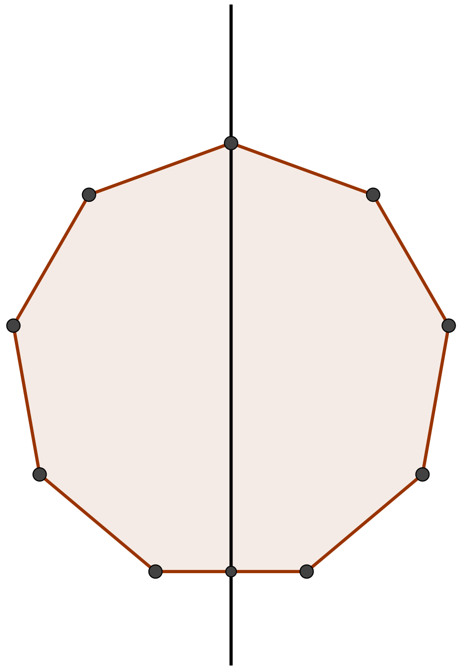
Mivel a kör középpontját az érintési ponttal összekötő szakasz mindig merőleges az érintőre, ezért az ábrán piros és zöld szög összege 90^o. Mivel $OBA\sphericalangle = 90^o - \alpha$, ezért az érintőszárú kerületi szög nagysága α. $OBA\sphericalangle = 90^o - \alpha$.



270. Két dobókockával dobva 36-féle lehet az esemény kimenetele. Ezek közül 4 esetben lesz az összeg 5. $((1;4),(2;3),(3;2),(4;1))$. Vagyis a valószínűség: $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

271. Egy szabályos n-szögnek mindig n szimmetriatengelye van. Ha n páros, akkor két típusú szimmetriatengely van. Az egyik, amely két szemközti csúcson halad át, a másik amely két szemközti oldal oldalfelező pontjait köti össze. Ha n páratlan, akkor minden szimmetriatengely egy csúcson és a szemközti oldal oldalfelező pontján halad át.





272. Van. A csúsztatva türközés. Ez egy olyan transzfomáció, amelyhez szükség van egy $\underline{v}$ vektorra, és egy ezzel párhuzamos t tengelyre. A P pont képét úgy kapjuk meg, hogy először eltoljuk a $\underline{v}$ vektorral, majd pedig a kapott pontot tengelyesen tükrözzük t-re.
Megbeszéltük, hogy minden rubrikában pontosan egy egybevágósági transzformáció van. Illetve azt is, hogy minden síkbeli egybevágósági transzformáció sz

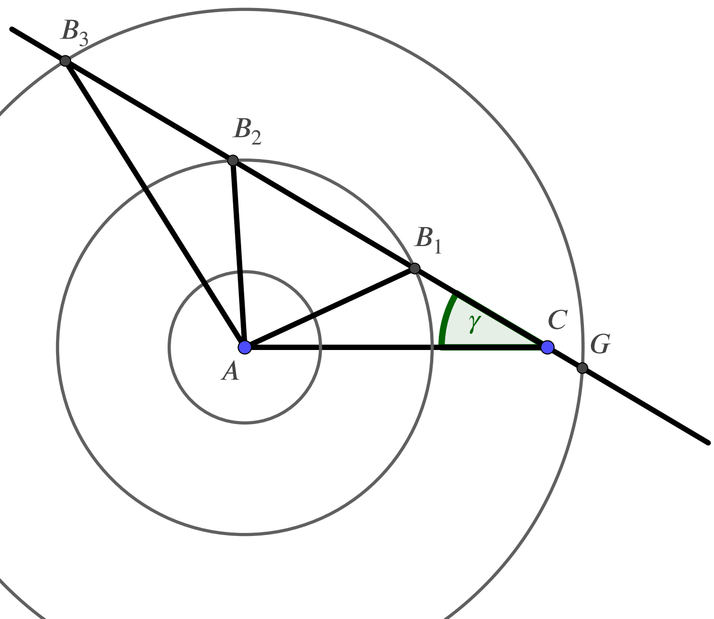
273. Ha megnézzük, hogy egy, illetve két dobókocka esetén mi a valószínűsége a páros összegnek, akkor azt kapjuk, hogy $\frac{1}{2}$. 3 dobókockára már nem könnyű az esetek összeszámolásával megkapni a helyes eredményt.
Gondoljuk el, hogy dobunk a kockákkal, és kettő már megállt, és a harmadik eredményére várunk. Bármi is van az első két kockán, nekünk pontosan 3 kedvező kimenetünk lesz. Ha ugyanis a már ismert két szám összege páros, akkor páros szám kell nekünk (2, 4 vagy 6), ha páratlan, akkor páratlan (1, 3 vagy 5). Ebből az is látszik, hogy akárhány dobókocka esetén pontosan $\frac{1}{2}$ a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege páros.

274. A következő esetekben biztosan egybevágó két háromszög:

- Ha mindhárom oldal hossza megegyezik (a, b, c).
- Ha két oldal és a közbezárt szögük megegyezik (a, b, γ).
- Ha egy oldal, és a rajtuk fekvő két szög megegyezik (a, δ, γ).

Ezen adatok alapján megszerkesztve a háromszöget, látható, hogy egybevágó háromszögeket kapunk. Egyéb esetekben is kiderülhet, hogy két háromszög hasonló, ezekre látunk később példát.

275. Próbáljuk megszerkeszteni a háromszöget a megadott adatok alapján. Vegyük fel az a oldalt, és mérjük fel rá a γ szöget a B csúcsban.



Ekkor az alábbi ábrából megvan az AC szakasz, és a B_3G egyenes. Tudjuk, hogy a B csúcs ezen az egyenesen lesz. Azt is tudjuk, hogy a B csúcs c távolságra van A-tól. Akkor tehát a B csúcs rajta az A

pont körüli c sugarú körön. Nézzünk meg pár lehetőséget. Elképzelhető, hogy c olyan kicsi, hogy nem lesz a körnek és a B_3G egyenesnek metszéspontja. Ekkor nem létezik a megfelelő adatokkal háromszög. Ha $c < a$, de van metszéspont, akkor is két lehetőség van. Ha a kör éppen érinti az egyenest, akkor egyértelmű a háromszög. Ha azonban két metszéspont van, akkor két különböző háromszög is létezik a megadott adatokkal. Az ábrán AB_1C és AB_2C is ilyen. Ha $c > a$, akkor is két metszéspont van, de az egyik már a CG félegyenenesen, ami miatt a C-nél lévő szöge a háromszögnek nem γ.
Azt mondhatjuk tehát, hogy ha két háromszög két-két oldala, és a nagyobbikkal szemben lévő szögei megegyeznek, akkor a két háromszög egybevágó.
A fentiek alapján fontos azt is megjegyezni, hogy ha két háromszögben két oldal és az egyikkel szemközti szög megegyezik, akkor a két háromszög *nem feltétlenül egybevágó*.

276. (a) Összesen $\binom{150}{5}$ lehetősége van Seregély tanárnőnek az 5 pont kiválasztására. Ezek közül $\binom{50}{5}$ felel meg nekünk, hiszen akkor tudjuk mindet, ha azok mind az általunk megtanult 50-ből kerülnek ki. Vagyis a keresett valószínűség:

$$p = \frac{\binom{50}{5}}{\binom{150}{5}} \approx 0,0036.$$

Vagyis igen csekély az esély.

(b) Ötlapos póker esetén $\binom{52}{5}$ különböző lapunk lehet a kezünkben. Mivel összesen 4 különböző royal flush van (minden színből egy), ezért a keresett valószínűség:

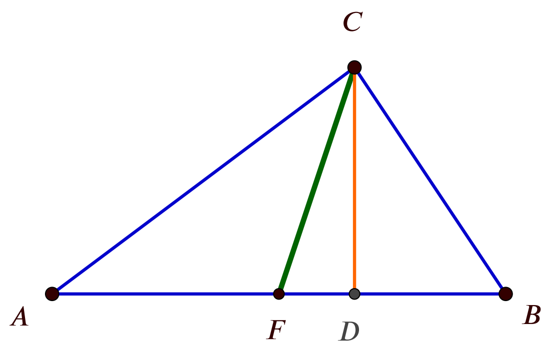
$$p = \frac{4}{\binom{52}{5}} \approx 0,00000154.$$

A póker valószínűsége már jóval nagyobb. Hány olyan kéz (öt lap) van, amelyben van póker? 13-féleképpen választhatjuk meg a 4 egyforma lapot, hiszen ennyiféle lap van a pakliban. Az ötödik lap bármi más lehet, tehát összesen $13 \cdot 48$ kéz van, amiben van póker. Vagyis a póker valószínűsége:

$$p = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} \approx 0,000256.$$

(c) Ahhoz, hogy a harmadik ember haljon meg, az kell, hogy a harmadik helyen legyen az egyetlen golyó. Ha azt feltételezzük, hogy minden helyen egyforma valószínűséggel van az egyetlen golyó, akkor 1/6 a valószínűsége, hogy a harmadik ember hal meg.

277. Felezzük meg az AB oldalt, legyen a felezőpont F. Ekkor a CF szakasz egyenese felezi a háromszög területét, hiszen $AF = FB$, és az ehhez a két oldalhoz tartozó magasság (CD) megegyezik.



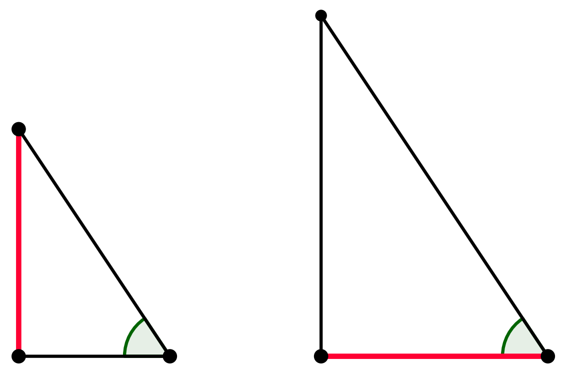
278. Szerkesszünk háromszöget az adott adatokból.
Vegyük fel a c hosszúságú oldalt, ez lesz AB. Az A csúcsban mérjük fel az α szöget és szerkesszük meg a szögfelezőt. A szögfelezőre A-ból mérjük fel az f_a hosszt, ez kijelöli a BC oldal egy pontját. Így azonban a BC oldal már meg van határozva. Ahol a BD egyenes metszi az α szög másik szögszárát, ott lesz a C csúcs. Vagyis ez a 3 adat (ha szerkeszthető belőle háromszög), akkor egyértelműen meghatározza a háromszöget.

279. Azt már tudjuk, hogy összesen $\binom{52}{5}$ különböző kéz van. Hány olyan van ezek között, ami full house?
13-féleképpen választhajuk meg annak a lapnak az értékét, amiből 3 lesz a kzünkben, és mivel a összesen 4 ilyen lap van, ezért 4-féleképpen választhatunk ezek közül hármat. A maradék két lapnak is egyformának kell lennie, ezek érték szerint 12-félék lehetnek, és a 4 lehetséges lapból, $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen lehet őket kiválasztani. Vagyis a full house valószínűsége:

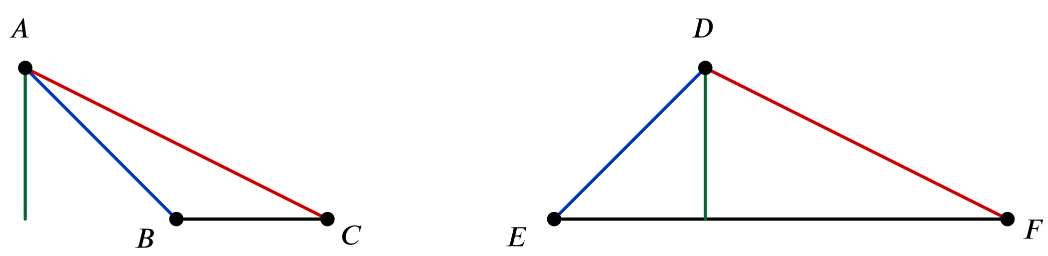
$$p = \frac{13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} \approx 0,001441.$$

280. (a) Az állítás igaz, hiszen ha egy egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogója a hosszúságú, akkor a befogói $\frac{a}{\sqrt{2}}$ hosszúságúak. Vagyis, ha az átfogók megegyeznek, akkor a befogók is, és tudjuk, hogy ha két háromszög oldalai páronként egyenlők, akkor a két háromszög egybevágó.

(b) Ebben az esetben nem feltétlenül egybevágó a két háromszög. Az alábbi ábrán a két derékszögű háromszögnek minden szöge egyenlő nagyságú, illetve a piros befogók egyenlő hosszúak. Jól látható, hogy a két háromszög mégsem egybevágó:

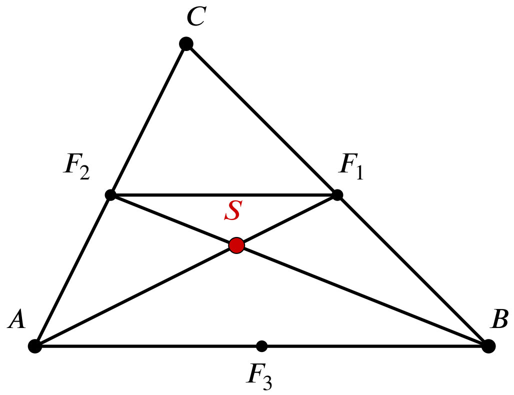


(c) Ebben az esetben sem feltétlenül egybevágó a két háromszög. Tekintsük az alábbi ábrát:



Az ábrán az egyforma színű szakaszok egyenlő hosszúak, vagyis az A, illetve D csúcsból induló két oldal hossza, és az innen induló magasságok megegyeznek.

281. Tekintsük az ABC háromszög két súlyvonalát AF_1-et és BF_2-t. Legyen a metszéspontjuk S. Azt kell belátnunk, hogy a CF_3 súlyvonal mindig átmegy S-en. Húzzuk be az F_1F_2 szakaszt, amely középvonala a háromszögnek, így párhuzamos AB-vel és fele olyan hosszú.



Vegyük észre, hogy SF_1F_2 háromszög hasonló ABS háromszöghöz, és a hasonlóság aránya $1 : 2$. Ebből következik, hogy AS kétszer olyan hosszú, mint SF_1, vagyis S harmadolópontja az AF_1 súlyvonalnak, mégpedig az F_1-hez közelebbi. Ugyanezen okok miatt AF_1 és CF_3 metszépontja is harmadolja AF_1-et, ezért az a metszéspont is éppen S. Vagyis S rajta van a háromszög mindhárom súlyvonalán, így azok egy ponton mennek keresztül.

282. Továbbra se felejtsük el, hogy $\binom{52}{5}$ különböző kéz lehetséges. Számoljuk meg, hogy ezek között hány szín, és hány sor van:

Szín. Magát a színt 4-féleképpen választhatjuk meg, az 5 lapot pedig az adott szín 13 lapjából kell kiválasztanunk. Ez $4 \cdot \binom{13}{5}$ lehetőség. Viszont figyelnünk kell arra, hogy ezek között már színsor (straight flush) is van. Ez utóbbiak száma $4 \cdot 10$, hiszen 4 színben lehetnek és a kezdőlapjuk 10-féle lehet. (Az A1234 is sornak számít.) A keresett valószínűség tehát:

$$p = \frac{4 \cdot \binom{13}{5} - 4 \cdot 10}{\binom{52}{5}} \approx 0,001965.$$

Sor. A sor kezdőlapja 10-féle értékű lehet, ez meghatározza a többi lap értékét is. Viszont minden egyes lap 4-féle színű lehet. Ez összesen $10 \cdot 4^5$ lehetőség. Most is figyelnünk kell arra, hogy ebben a színsorok is benne vannak, azokat le kell vonnunk. A keresett valószínűség tehát:

$$p = \frac{10 \cdot 4^5 - 4 \cdot 10}{\binom{52}{5}} \approx 0,003925.$$

283. Ahhoz, hogy drill legyen a kezünkben, ki kell választanunk egy értéket, amiből 3 lap is lesz a kezünkben. Az érték lehet 13-féle, míg a 4 ilyen értékű lapból 4-féleképpen választhatunk ki 3-at. Ez eddig $13 \cdot 4$ lehetőség. A negyedik lap ezt követően lehet 48 féle, hiszen nem lehet olyan értékű, mint a másik 3, mert akkor pókerünk lenne. Az ötödik lap pedig 44-féle lehet, hiszen az eddigi két értéktől eltérőnek kell lennie, hogy se póker, se full house ne legyen a kezünkben. De vigyáznunk kell, mert az utóbbi két lap sorrendje természetesen nem számít, ezért az utolsó két lap $\frac{48 \cdot 44}{2}$-féleképpen választható ki. A keresett valószínűség tehát:

$$p = \frac{13 \cdot 4 \cdot \frac{48 \cdot 44}{2}}{\binom{52}{5}} \approx 0,02113.$$

284. Változtatni érdemes most is. Ha ugyanis elhatározzuk, hogy nem változtatunk, akkor az elején kell eltalálnunk az autót, és mivel négy ajtóból kettő mögött van autó, ezért az autó megnyerésének a valószínűsége $\frac{1}{2}$. Ha eldöntjük, hogy változtatunk, akkor két lehetőség van:

- Elsőre autóra tippeltünk, aminek $\frac{1}{2}$ a valószínűsége. Ezt követően megmutatnak egy kecskét, tehát mi egy autó és egy kecske közül fogunk választani, amikor szintén $\frac{1}{2}$ valószínűséggel találunk autót. Összességében így $\frac{1}{4}$ valószínűséggel nyerjük meg az autót.
- Elsőre kecskére tippeltünk, aminek szintén $\frac{1}{2}$ a valószínűsége. Ekkor azonban mindenképpen megnyerjük az autót, tehát összeségében itt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel vihetjük az autót.

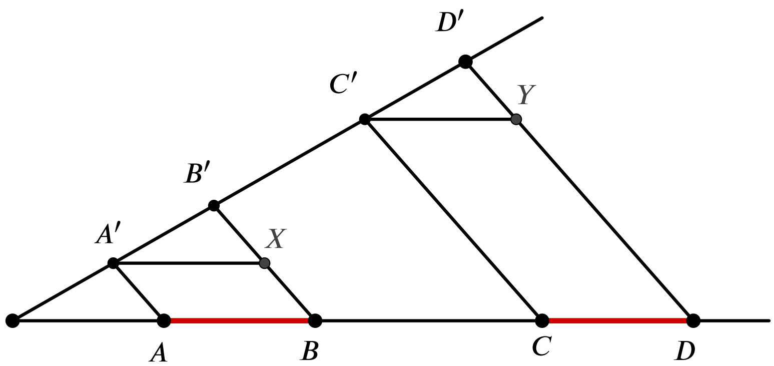
A változtatással tehát $\frac{3}{4}$-re tudjuk a nyerés valószínűségét feltornázni.
(Elsőre talán meglepő lehet, hogy a két stratégiával összesen több, mint 1 az autó megszerzésének a valószínűsége. Itt azonban nincs ellentmondás, mert vannak olyan esetek, amikor mindkét stratégiával megnyernénk az autót.)

285. A kezdőállás függvényében kell megválasztanunk, hogy kezdeni szeretnénk vagy másodikok lenni. Ha a két sorban különböző a korongok száma, akkor kezdünk, ha egyenlő, akkor átengedjük a kezdést. Ezt követően minden lépésben egyenlővé tesszük a két sorban a korongok számát. Ez garantálja, hogy mi vesszük el az utolsó korogo(ka)t

286. Számoljuk össze azokat a kezeket, amelyekben 2 pár van. Válasszuk ki először azt a két értéket, amiből a párjaink lesznek. Ezt $\binom{13}{2}$-féleképpen tehetjük meg. Mindkét érték esetében $\binom{4}{2}$ lehetőségünk van a konkrét két lap kiválasztására, végül pedig kell még egy lap, ami nem egyezik meg értékben az eddigiekkel, vagyis 44-féle lehet. Összesen tehát $\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 44$ olyan kéz van, amelynek az értéke 2 pár. Így a keresett valószínűség:

$$p = \frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2 \cdot 44}{\binom{52}{5}} \approx 0,04754.$$

287. Igen, igaz. Tekintsük az alábbi ábrát:



Húzzunk A'-n és C'-n keresztül párhuzamost az AD egyenessel. Vegyük észre, hogy $A'XB'$ és $C'YD'$ háromszögek egybevágóak. Miért?
Mivel $A'X \parallel AB$ és $AA' \parallel BB'$, ezért $|AB| = |A'X|$. Hasonlóan $|CD| = |C'Y|$, és mivel $|AB| = |CD|$, ezért $|A'X| = |C'Y|$.
Az ezen a két oldalon fekvő szögek is egyenlőek, hiszen egyállású szögek, mivel $A'X \parallel C'Y$, és $B'X \parallel D'Y$. Ha pedig a két háromszög egybevágó, akkor a megfelelő oldalak is egyenlő hosszúak, vagyis $|A'B'| = |C'D'|$.

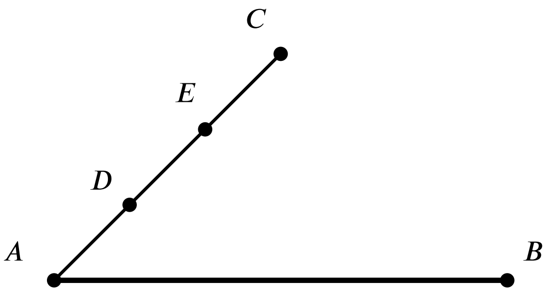
288. Ha egy párra van szükségünk, akkor 13-féle lehet az értéke, és a 4 lehetséges lapból kell 2, ami $\binom{4}{2}$ lehetőség. A maradék három lap értékének a pár értékétől és egymástól is különbözőnek kell lennie. Az első lap lehet 48-féle, a második 44, a harmadik 40, de ezeknek a sorrendje nem számít, vagyis a három lapot $\frac{48\cdot44\cdot40}{3!}$-féleképpen választhatjuk ki. Így a keresett valószínűség:

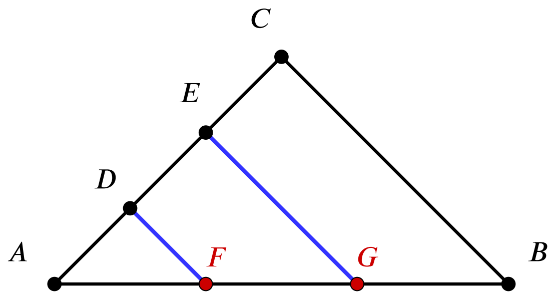
$$p = \frac{13\cdot\binom{4}{2}\cdot\frac{48\cdot44\cdot40}{3!}}{\binom{52}{5}} \approx 0,42257.$$

289.

290.

291. Az AB szakasz A végpontjából indítsunk egy félegyenest, és mérjünk fel erre 3 egyforma hosszúságú, csatlakozó szakaszt. (AD, DE, EC). Kössük össze a C pontot a szakasz másik végpontjával B-vel.

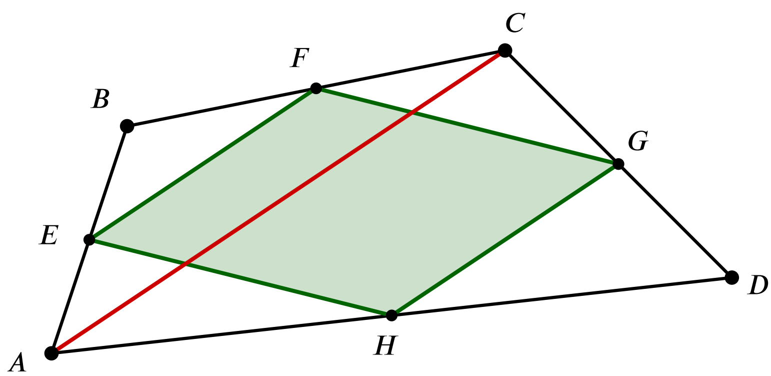




Húzzunk párhuzamost CB-vel D-n, illetve E-n keresztül. A kapott egyenesek F, illetve G pontokban metszik az AB szakaszt. F és G pedig a párhuzamos szelők tétele miatt harmadolja az AB szakaszt. Érdemes megjegyezni, hogy a harmadolásnak nincs kitüntetett szerepe, telszőleges n esetén ezzel a móddszerrel egy adott szakaszt fel tudunk osztani n egyenlő részre.

292. Ez egy gonosz kérdés volt.
Ilyen szerkesztés ugyanis nem létezik. Az ókori görögöket nagyon izgatta ez a probléma, de nem tudták megoldani. A 19. században sikerült a matematikusoknak bebizonyítaniuk (algebrai eszközökkel), hogy ilyen szerkesztés nincs. A bizonyítás nehéz, messze meghaladja a középiskolai anyag kereteit.

293. A négy oldalfelezőpont mindig egy paralelogrammát határoz meg.



Mivel EF középvonal az ABC háromszögben, ezért $EF \parallel AC$ és EF hossza fele AC hosszának. Hasonlóan GH középvonal az ACD háromszögben, így GH is párhuzamos AC-vel és fele olyan hosszú. Vagyis $EF \parallel GH$ és $|EF| = |GH|$, amiből következik, hogy $EFGH$ paralelogramma.
A fenti következtetések akkor is igazak, ha az eredeti négyszög konkáv.

294. Számoljuk meg, hogy hány olyan szám van, amely osztható 2-vel, vagy 3-mal. Páros számból 500 van, 3-mal oszthatóból 333. Ez eddig 833 szám, de ha így számolunk, akkor a 6-tal osztható számokat kétszer is számoltuk. Mivel 166 darab 6-tal osztható szám van 1000-ig, ezért a keresett darabszám: 500+333-166=667. Vagyis a keresett valószínűség: $\frac{667}{100}$, ami majdnem pontosan $\frac{2}{3}$.

295.

296. Vegyük észre, hogy ha páratlan sok dobás lenne, akkor 1/2 a valószínűsége annak, hogy többször dobunk fejet. Ennek az az oka, hogy a fej és az írás teljesen szimmetrikus, és valamelyikből mindenképpen több lesz.
Most azonban az is elképzelhető, hogy pont ugyanannyi fejet dobunk, mint írást. Összesen 2^8 különböző fej-írás sorozat van, ezek mind egyformán valószínűek. Ezek között $\binom{8}{4}$ olyan van, amelyben 4 fej van.
Tehát annak a valószínűsége, hogy éppen egyenlő a fejek és az írások száma: $\frac{\binom{8}{4}}{2^8}$. A maradék esetekben azonban egyformán valószínű, hogy fej vagy írás van több, így a keresett valószínűség:

$$p = \frac{1 - \frac{\binom{8}{4}}{2^8}}{2} = \frac{93}{256}.$$

Ugyanezt megkaphatjuk kicsit több számolással is. Kiszámolhatjuk egyesével, hogy mi a valószínűsége, hogy 8, 7, 6, illetve 5 fej lesz pontosan, és ezeket összeadjuk. (Ez ugyanaz, mint hogy 0, 1, 2, illetve 3 írás van.) Ezek alapján a valószínűség:

$$p = \frac{1 + 8 + \binom{8}{2} + \binom{8}{3}}{2^8} = \frac{1 + 8 + 28 + 56}{2^8} = \frac{93}{256}.$$

297.

298.

299. Arra van szükségünk, hogy a második ember ugyanazon a napon szülessen, mint az első. Vagyis a második számára van egy kitüntetett nap. Mivel minden nap egyformán valószínű, ezért 1/7 a valószínűsége, hogy a második ember egy bizonyos napon született, vagyis 1/7 a valószínűsége, hogy a két ember a hét ugyanazon napján született.

300. Arany Dániel feladat.
Nem beszéltük meg.

301. A pakli tetszőleges két lapjához van pontosan egy, amellyel kiegészülve, a három lap SET-et határoz meg. Vagyis egy SET-et egyértelműen meghatározza 2 lapja. A pakliban 81 lap van, így két lapot $\binom{81}{2}$-féleképpen választhatunk ki. Viszont minden SET-et így 3-féleképpen határoztunk meg, hiszen 3 lapból kettőt háromféleképpen választhatunk ki. Vagyis összesen

$$\frac{\binom{81}{2}}{3} = 1080$$

SET van a pakliban.

302. Használjuk a párhuzamos szelők tételét és a párhuzamos szelőszakaszok tételét.
A megadott szakaszok párhuzamossága alapján tudjuk, hogy

$$\frac{|GB|}{|FG|} = \frac{|EB|}{|DE|},$$

amiből kapjuk, hogy $|FG| = \frac{3}{2}$.
Hasonlóan

$$\frac{|CF|}{|GB|} = \frac{|AD|}{|EB|},$$

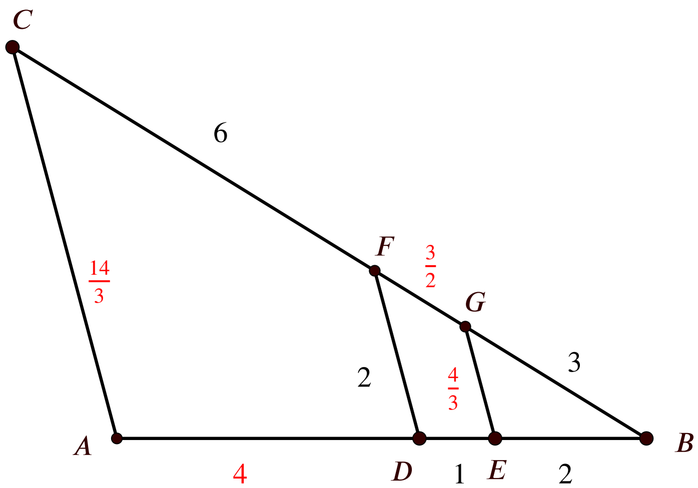
amiből kapjuk, hogy $|AD| = 4$.
A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján pedig

$$\frac{|FD|}{|GE|} = \frac{|DB|}{|EB|},$$

amiből kapjuk, hogy $|GE| = \frac{4}{3}$.
Hasonlóan

$$\frac{|CA|}{|FD|} = \frac{|AB|}{|DB|},$$

amiből kapjuk, hogy $|AC| = \frac{14}{3}$.



303.

304. Tudjuk, hogy ha két dobókockával dobunk, akkor az összeg valószínűsége az alábbiak szerint alakul:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Két öttel osztható összeg van, az 5 és a 10, tehát a keresett valószínűség: $\frac{4+3}{36} = \frac{7}{36}$.

305.

306.

307. Kényelmesebb megszámolni azokat az eseteket, amikor a szorzat páratlan. Az ugyanis csak úgy fordulhat elő, ha minden dobott szám páratlan.
Első megközelítés. Összesen $6^3 = 216$ elemi esetünk van, amelyek egyformán valószínűek, hiszen a kockákon egymástól függetlenül 6-féle értéket dobhatunk. Ezek közül $3^3 = 27$ esetben lesz minden dobott szám páratlan. Ezek a alapján a keresett valószínűség: $\frac{216-27}{216} = \frac{189}{216} = \frac{7}{8}$.
Második megközelítés. Annak a valószínűsége, hogy egy kockán páratlan számot dobunk: $\frac{1}{2}$. Emiatt annak a valószínűsége, hogy mindhárom kockán egyszerre dobunk páratlan számot: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Mivel nekünk ennek a komplementerére van szükségünk, ezért a keresett valószínűség: $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

308. (a) Bármit dobunk az első két kockával, az utolsó kockán pontosan 2 szám dobása esetén lesz az összeg 3-mal osztható. Ha az első két kockán az összeg osztható 3-mal, akkor 3-at vagy 6-ot kell dobnunk. Ha az első kettő összege 1 maradékot ad 3-mal osztva, akkor 2-t vagy 5-öt. Ha 2 a maradék, akkor 1-et vagy 4-et. Tehát a kereset valószínűség: $\frac{1}{3}$.

(b) Hasonlóan a 307. feladathoz, könnyebb a komplementert nézni. Akkor nem lesz a szorzat 3-mal osztható, ha egyik dobott szám sem osztható 3-mal. Vagyis minden kockán 4 lehetőségünk van, így a valószínűség: $1 - \frac{4^3}{6^3} = \frac{152}{216} = \frac{19}{27}$.
Ha a másik megközelítést nézzük, akkor $\frac{2}{3}$ valószínűséggel dobunk 3-mal nem osztható számot a kockával, így $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ a valószínűsége annak, hogy egyik kockán sem dobunk 3-mal osztható számot.
Ezért a keresett valószínűség: $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$.

309. Az előzmények alapján a következőket mondhatjuk:

(a) Számoljuk ismét a komplementert, a keresett valószínűség:

$$p = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{65}{81}.$$

(b) Az előzőhöz hasonlóan:

$$p = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}.$$

(c) 0, hiszen a szorzat csak úgy lehet héttel osztható, ha van 7-es prímtényezője, de kockával ilyen számot nem tudunk dobni.

310. Sok minden kerülhet a ★ helyére, íme néhány példa:
félsík, egyenes, félegyenes, szakasz, kör, négyzet, szabályos háromszög, egyenlőszárú derékszögű háromszög.

311. A háromszögek egybevágóságának négy alapesete alapján az alábbiakra jutottunk: két háromszög hasonló, ha

- megfelelői oldalaik hosszának aránya megegyezik;
- két oldalpár aránya és a közbezárt szögek megegyeznek;
- mindhárom szögük megegyezik;
- két oldalpár aránya és a nagyobbikal szemközti szögek megegyeznek.

312.

313. Szokás szerint a 36 lehetséges kimenetelt tekintsük, és számoljuk meg azokat, amelyekben a szorzat osztható 4-gyel. Két esetet különböztessünk meg:

- Van 4-es a dobott számok között. Ekkor mindegy, hogy mit dobunk a másik kockával, a szorzat biztosan osztható 4-gyel. Ha az egyikkockán 4-et dobunk, akkor 6-félét dobhatunk a másikon, és fordítva, ami 12 eset, de ekkor a $(4;4)$ dobást kétszer számoljuk. Vagyis 11 ilyen eset van.
- Ha nincs 4-es, akkor mindkét kockán páros számot kell dobnunk, hogy a szorzat 4-gyel osztható legyen. Vagyis mindkét kockán 2-n vagy 6-ot kell dobni, ez 4 lehetőség.

Ezek alapján a valószínűség:

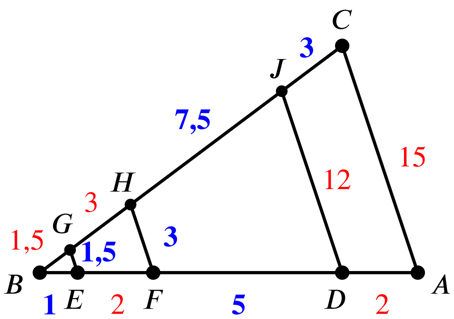
$$p = \frac{11+4}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

314.

315. Használjuk a párhuzamos szelők tételét és a párhuzamos szelőszakaszok tételét.
Mivel GH kétszer akkora, mint BG, ezért EF is kétszer akkora, mint BE, vagyis $|BE| = 1$. Mivel EF és DA egyenlő hosszúak, ezért GH és JC is azok, vagyis $JC = 3$.
Párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt

$$\frac{|AC|}{|DJ|} = \frac{|AB|}{|DB|},$$

ezért ha $|FD| = x$, akkor $\frac{15}{12} = \frac{5+x}{3+x}$. Ebből kapjuk, hogy $x = |FD| = 5$. A korábbiak miatt $|HJ| = 7,5$. Szintén a párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján: $|HF| = 4,5$ és $|GE| = 1,5$.



316.

317. (a) Számoljuk a komplementert. 48 olyan lap van, ami nem ász, tehát a valószínűség:

$$p = 1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} \approx 0,341.$$

(b) Számoljuk a komplementert. 39 olyan lap van, ami nem kőr, tehát a valószínűség:

$$p = 1 - \frac{\binom{39}{5}}{\binom{52}{5}} \approx 0,778.$$

(c) Válasszuk először a 3 treffet, erre $\binom{13}{3}$ féle mód van. A 39 nem treff lapból kell még választanunk kettőt. Vagyis a valószínűség:

$$p = \frac{\binom{13}{3} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{52}{5}} \approx 0,081.$$

(d)

318. Először számítsuk ki a TB szakasz hosszát. Ezt kétféleképpen is megtehetjük:
Egyrészt magasságtétellel, hiszen tudjuk, hogy

$$|AT| \cdot |TB| = |CT|^2.$$

Mivel $|AT| = 4$ és $|CT| = 3$, kapjuk, hogy $|TB| = \frac{9}{4}$.
Másrészt hasonlósággal is megkaphatjuk ezt, hiszen az $ATC\triangle \sim TCB\triangle$, és a hasonlóság aránya $\frac{3}{4}$, hiszen az AT oldal megfelelője a TC. Emiatt

$$|TB| = \frac{3}{4} \cdot |CT| = \frac{9}{4}.$$

A 3, 4 befogójú derékszögű háromszög átfogója 5, így $|AC| = 5$. Innen már könnyen számítható a két kívánt terület:

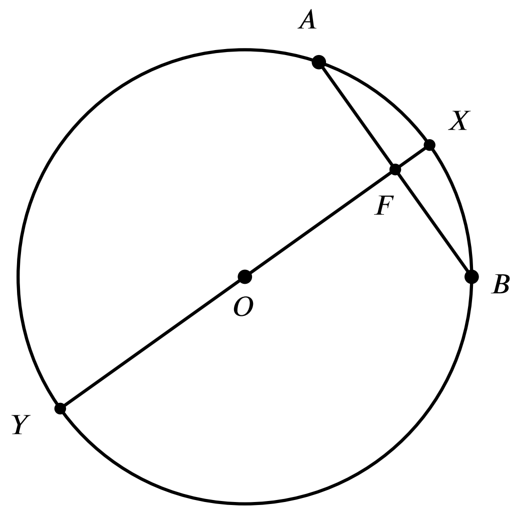
$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{4} \cdot 3 = \frac{75}{8},$$
$$T_{TBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot 3 = \frac{27}{8}.$$

319. (a) 0, hiszen 7 lépésben nem érhető el ez a pont.

(b) 8 lépésben elérhető ez a pont. 8 lépéssel 2^8 különbző utat járhat be a bolha. Ezek mind egyformán valószínűek, hiszen minden lépésben egyformán valószínű, hogy fel vagy jobbra ugrik a bolha. Hány ilyen út fog a (3; 5) pontban végződni? Éppen azok az utak végződnek itt, amelyek 8 lépésből állnak, és pontosan 3-szor ugrik jobbra a bolha (és 5-ször felfelé). Vagyis minden ilyen utat meghatároz, hogy melyik az a 3 lépés, amikor jobbra ugrik. Mivel 8 lépés van, ezért $\binom{8}{3}$ különöző út van, amiben pontosan 3 jobbra ugrás van. Vagyis a valószínűség:

$$\frac{\binom{8}{3}}{2^8} = \frac{56}{256} = \frac{7}{32}.$$

320. A feladat szövege alapján $YF = 24$ és $FX = 3$. Először vegyük észre, hogy a Thálesz-tétel miatt XYA háromszög derékszögű, és az A-nál lévő szöge derékszög.

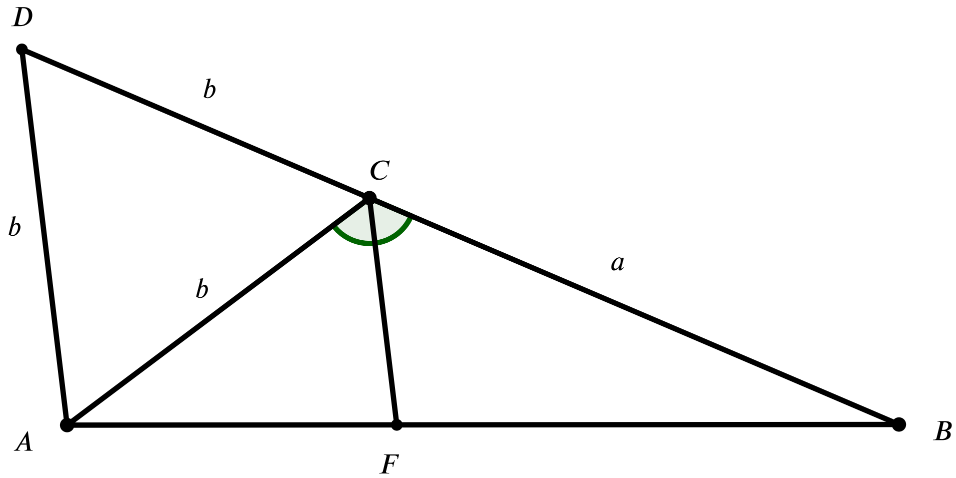


Emiatt használhatjuk a magasságtételt az XYA háromszögben, ami alapján:

$$|AF|^2 = |YF| \cdot |FX|.$$

Vagyis $|AF|^2 = 24 \cdot 3$, amiből $|AF| = 6\sqrt{2}$. Mivel $|AB| = 2 \cdot |AF|$, ezért $|AB| = 12 \cdot \sqrt{2}$.

321. Használjuk a szögfelezőtétel bizonyításában megismert ötletet, hosszabbítsuk meg a BC oldalt C-n túl, és húzzunk A-n keresztül párhuzamost a szögfelezővel. Az így kapott egyenes D-ben metszi a BC egyenest és jelöljük F-fel azt a pontot, ahol a szögfelező metszi az AB oldalt. Ekkor az alábbi ábrát kapjuk:



Mivel CF szögfelező, ezért $BCF\sphericalangle = FCA\sphericalangle = ACD\sphericalangle = 60^o$, hiszen a háromszög C-nél lévő szöge 120^o-os. Mivel $AD \parallel CF$, ezért $ADC\sphericalangle = FCB\sphericalangle = 60^o$, vagyis az ACD háromszög szabályos. Emiatt $|AC| = |AD| = |DC| = b$. Tudjuk, hogy $|CF| = f$ és $|BC| = a$.
Írjuk fel a párhuzamos szelőszakaszok tételét:

$$\frac{|AD|}{|CF|} = \frac{|BD|}{|BC|}.$$

Helyettesítsük be ebbe az ismert hosszakat, és kapjuk, hogy

$$\frac{b}{f} = \frac{a+b}{a}.$$

Összunk le b-vel és alakítsuk át kicsit a jobb oldalt:

$$\frac{1}{f} = \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}.$$

322.

323. Első megoldás.
Algebrai úton bizonyítsuk be:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} + \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{(k+1)!} = \\ &= \frac{(k+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) + n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)}{(k+1)!} = \\ &= \frac{(k+1+n-k)(n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1))}{(k+1)!} = \\ &= \frac{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{(k+1)!} = \\ &= \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

Második megoldás.
Nézzünk rá a Pascal-háromszögre. A bal oldalon az n-edik sor k-adik és $(k+1)$-edik elemének összege áll. De tudjuk, hogy ez éppen az alattuk lévő elem, ami pedig pontosan az $(n+1)$-edik sor $(k+1)$-edik eleme.

324.

325. Gondolhatunk úgy a Pascal-háromszög elemeire, hogy megmondják, hogy az aodtt helyre hányféleképpen lehet eljutni a háromszögben, ha minden lépésében balra lefelé, vagy jobbra lefelé kell lépnünk. Vagyis az n-edik sor elemeinek összege azt mondja meg, hogy hányféleképpen lehet eljutni az n-edik sorba. Ez csak azt jeleneti, hogy n lépést kell tennünk. Mivel minden lépés kétféle lehet (balra lefelé vagy jobbra lelfelé), így 2^n különböző út van. Vagyis az elemek összege 2^n.
Azt is tudjuk, hogy az n-edik sok elemei rendre: $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$, vagyis azt kaptuk, hogy

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Ha ezt nézzük, akkor egy másik megoldás is eszünkbe juthat az eredeti feladatra. Az n-edik sor k-adik eleme éppen $\binom{n}{k}$, vagyis az n-elemű halmaz k elemű részhalmazainak száma. A sorban minden lehetséges k-ra szerepel ez az érték, vagyis a sorban lévő elemek összege éppen az n-elemű halmaz részhalmazainak a száma, ami pedig 2^n.

326. Az eredmények:

(a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
(b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
(c) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^2$.
(d) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

(e) Ezt már nincs kedve az embernek kisipari módszerekkel kiszámolnia. Ezért érdemes általánosságban megpróbálni megoldani a kérdést. Sejtsük meg az eredményt, majd bizonyítsuk be, hogy a sejtásünk helyes. Ld. 329. feladat.

327.

328.

329.

330.

331.

332.

333. A 325. feladatban már általában beláttuk, hogy rögzített n esetén az $\binom{n}{k}$ számok összege, ha $0 \leq k \leq n$, éppen 2^n. Vagyis a keresett összeg $2^9 = 512$.

334.

335.

336. Első megoldás.
Legyen a téglalap egyik oldala x, akkor a másik oldala $50 - x$. Az tehát a kérdés, hogy ha $x > 0$, akkor mikor maximális az $x(50 - x)$ kifejezés értéke. Használhatjuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget. Legyen a két szám x és $50 - x$. Ekkor tudjuk, hogy

$$\sqrt{x(50-x)} \leq \frac{x + (50 - x)}{2}.$$

Vagyis $\sqrt{x(50-x)} \leq 25$, amiből $x(50 - x) \leq 625$. A terület tehát nem lehet 625-nél nagyobb, és azt is tudjuk, hogy akkor és csak akkor lehet 625, ha $x = 50 - x$. Vagyis akkor maximális a terület, ha $x = 25$, vagyis a téglalap éppen egy négyzet.
Második megoldás.
Legyen a téglalap hosszabbik oldala $25 + x$, a rövidebbik oldala pedig $25 - x$. Ekkor a terület $T = (25+x)(25-x) = 625-x^2$. A terület akkor a legnagyobb, ha x^2 a lehető legkisebb. Mivel x^2 nemnegatív, ezért $x = 0$ esetén a legkisebb. Ismét azt kaptuk (nem meglepő módon), hogy a 25 oldalú négyzet esetén maximális a terület.

337. Számoljuk meg az összes lehetséges utat, és aztán vonjuk le ezekből a rosszakat, vagyis azokat, amik áthaladnak az f4 mezőn.
7-szer kell felfelé lépnünk és 7-szer jobbra, hogy elérjük a h8 mezőt. Vagyis összesen 14 lépést kell megtenni, amiből pontosan 7 lépés lesz jobbra. Vagyis $\binom{14}{7}$ lehetséges út van összesen.
Amelyek áthaladnak f4-en, azok olyanok, hogy eljutnak f4-re és onnan h8-ra. Ahhoz, hogy f4-re lépjünk 5-öt kell jobbra és 3-at felfelé lépni. Vagyis 8 lépésből 5-nek kell jobbra menni, ilyen útból tehát $\binom{8}{5}$ van. Innen a h8-ra jutáshoz 2 jobbra és 4 felfelé lépés kell, amit az előzőkhöz hasonlóan $\binom{6}{2}$-féle módon lehet véghez vinni. Vagyis az eredmény:

$$\binom{14}{7} - \binom{8}{5} \cdot \binom{6}{2} = 2592.$$

338. Használjuk a binomiális-tételt, vagy annak gondolatát:

(a) $(a-b)^4 = \binom{4}{0}a^4 - \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 - \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$.

(b)

$$(3x-2)^5 = \binom{5}{0}(3x)^5 + \binom{5}{1}(3x)^4 \cdot (-2) + \binom{5}{2}(3x)^3 \cdot (-2)^2 + \binom{5}{3}(3x)^2 \cdot (-2)^3 + $$
$$+ \binom{5}{4}(3x) \cdot (-2)^4 + \binom{5}{5}(-2)^5 =$$
$$= 243x^5 - 810x^4 + 1080x^3 - 720x^2 + 240x - 32.$$

339. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közötti összefüggést két számra a-ra és $\frac{1}{a}$-ra. Ekkor azt kapjuk, hogy:

$$\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} \le \frac{a + \frac{1}{a}}{2}.$$

Jól látható, hogy a bal oldal 1 áll, így 2-vel beszorozva mindkét oldalt, kapjuk, hogy

$$2 \le a + \frac{1}{a}.$$

Vagyis a kifejezés értéke mindig legalább 2. Mivel tudjuk, hogy egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = \frac{1}{a}$, ezért azt is megkaptuk, hogy csak $a = 1$ esetén lesz a kifejezés értéke 2.

340.

341. (a) Tudjuk, hogy 500 páros és 333 3-mal osztható szám van 1000-ig. Elsőre tehát úgy tűnik, hogy $500 + 333 = 833$ megfelelő szám van. De ez tévedés, hiszen a 6-tal osztható számokat így kétszer számoltuk, ezért azokat le kell vonnunk. Vagyis a helyes eredmény: $500+333-166 = 667$. Vegyük észre, hogy a konkrét halmazoknak nincs jelentősége. Ha két halmaz uniójának az elemszámát akarjuk kiszámolni, akkor általában igaz, hogy a két halmaz elemszámának összegéből a metszet elemszámát levonva kapjuk a helyes eredményt. Azaz:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

(b) Hasonlóan gondolkozzunk, mint az előző részben. Van 500 páros, 333 3-mal osztható és 200 5-tel osztható szám. Ha így számolunk, akkor a metszeteiket, vagyis a 6-tal, 10-zel és 15-telosztható számokat két helyen is megszámoljuk, ezért azokat le kell vonni. Ezekből rendre 166, 100 és 66 darab van. Most azonban jól meg kell gondolnunk, hogy mi lett azokkal a számokkal, amikre mindhárom tulajdonság teljesül, vagyis a 30-cal oszthatókkal. Az első lépésben mindhárom halmazban benne voltak, így 3-szor számoltuk meg őket. Aztán a második lépésben is mindhárom metszetben benne voltak, így háromszor levontuk őket. Eddig tehát egyszer sem számoltuk meg ezeket a számokat, pedig egyszer meg akarjuk számolni őket. Vagyis az eredmény:

$$500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734.$$

És ahogy az előbb, most is elmondhatjuk ezt általánosan is, a halmazok konkrét tualjdonságait nem figyelembe véve:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

342.

343.

344.

345.

346.

347.

348.

349.

350.

351. Íme a megfelelő értékek:

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
1 rad	0,841	0,54	1,557	0,642

352.

353. Rendezzük át az egyenletet:

$$x^2 - 3x - 2 \leq 0.$$

Mivel a baloldali függvény képe egy felfelé nyíló parabola, ezért a két gyök között (beleértve a határokat is) lesznek a függvényértékek nem-negatívak. Az egyenlet gyökei $\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ és $\frac{3+\sqrt{17}}{2}$, így a megoldás: $x \in \left[\frac{3-\sqrt{17}}{2}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right]$.

354.

355. Emeljük négyzetre mindkét oldalt. (Ezzel a lépéssel vigyázni kell, mert nem ekvivalns átalakítás, hiszen akkor is egyenlővé válhat az egyenlet két oldala, ha korábban nem egyenlők, hanem egymás ellentettjei voltak.)

$$\sqrt{2x-5} = x - 12x - 5 \qquad = x^2 - 2x + 1$$
$$0 = x^2 - 4x + 6.$$

Ennek az egyenletnek nincs megoldása, hiszen $D = -8$. Ebből kifolyólag az eredeti egyenletnek sincs megoldása.

356. A rombusz átlói merőlegesek egymásra és felezik egymást. Vagyis a két átló 4 egybevágó, derékszögű háromszögre bontja rombuszt. Így ezeknek a derékszögű háromszögeknek az átfogói 4 és 5 hosszúak. Vagyis a háromszög egyik szögének tangense $\frac{4}{5}$. Ha $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}$, akkor $\alpha \approx 38,66^{\circ}$. Ennek kétszerese a rombusz egyik szöge, vagyis $77,32^{\circ}$. A másik szöge pedig egy 180°-ra egészíti ki, vagyis $102,68^{\circ}$.

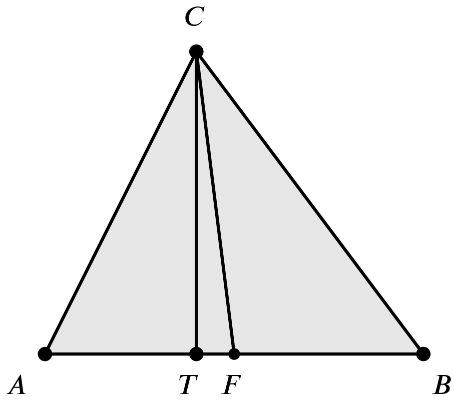
357.

358.

359.

360.

361. Tekintsük az alábbi ábrát. Az oldalakat két Pitagorasz-tétel segítségével megkapjuk: $AC = 5$, $BC = \sqrt{20}$. Vagyis $K = 10 + \sqrt{20}$.
Ebből az is látható, hogy a háromszög egyenlőszárú, így $ABC\sphericalangle = BCA\sphericalangle$. Mivel $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$, ezért $\beta \approx 53,13^{\circ}$. Tudjuk, hogy $\beta = \gamma$, és így $\alpha = 180 - 2\beta = 73,74^{\circ}$.



362. A fenti ábrán tekintsük a TFC háromszöget. Ebben az F-nél lévő szöget kérdezi a feladat. Tudjuk, hogy $CT = 4$, és azt is, hogy $TF = 0,5$, hiszen F az AB felezőpontja, illetve $AT = 2$. Vagyis a keresett δ szögre teljesül, hogy $\operatorname{tg}\delta = \frac{4}{0,5} = 8$. Ebből $\delta \approx 82,87^{\circ}$.

363. Egy n-oldalú konvex sokszögnek $\frac{n(n-3)}{2}$ átlója van. Vagyis:

$$\frac{n(n-3)}{2} = n + 33$$
$$n^2 - 3n = 2n + 66$$
$$n^2 - 5n - 66 = 0$$
$$(n+5)(n-11) = 0.$$

Vagyis $n = -5$ és $n = 11$ felel meg a fenti egyenletnek. De -5 nyilván nem lehet a csúcsok száma, tehát egy 11-oldalú sokszögről van szó.

364.

365.

366.

367.

$$\begin{aligned}\sqrt{4x+9}-\sqrt{x-1}&=4\\ 5x+8-2\sqrt{(4x+9)(x-1)}&=16\\ 5x-8&=2\sqrt{(4x+9)(x-1)}\\ 25x^2-80x-64&=4(4x+9)(x-1)=16x^2+20x-36\\ 9x^2-100x+100&=0\end{aligned}$$

Ennek az egyenletnek két megoldása van: $x = \frac{10}{9}$ és $x = 10$. Mivel négyzetre emeltünk a megoldás során, ezért fennáll annak a veszélye, hogy hamis gyököket is kaptunk. Ellenőrizve a két megoldást, látjuk, hogy $x = \frac{10}{9}$ nem gyöke az eredeti egyenlet, $x = 10$ viszont igen.

368. Osszuk három részre az útvonalat. Az első részen $2\cdot 2+1$ útvonal lehetséges, a másodikon $3\&dot3+1$, a harmadikon pedig ismét $2\cdot 2+1$. Ezek az útvonalak egymástól függetlenek, így összesen $5\cdot 10\cdot 5 = 250$ lehetéges útvonal van A-ból B-be.

369.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-4}&=\sqrt{2x^2-6x+1}\\ x^2-4&=2x^2-6x+1\\ 0&=x^2-6x+5\\ 0&=(x-1)(x-5)\end{aligned}$$

Vagyis $x = 1$ vagy $x = 5$. Mivel a megoldás során négyzetre emeltünk, ezért számolnunk kell azzal, hogy hamis gyökeink vannak, így ellenőrizni kell, hogy a kapott értékek megoldásai-e az eredeti egyenletnek. Azt kapjuk, hogy az 5 igen, az 1 nem, hiszen akkor nincs is értelme egyik oldalnak sem.
Vagyis az egyenlet egyetlen gyöke: $x = 5$.

370.

371.

372. Tekintsük a két szám prímfelbontását: $15^{20} = 3^{20}\&dot5^{20}$, illetve $20^{15} = 2^{30}\cdot 5^{15}$. Ebből látható, hogy a legnagyobb közös osztójuk 5^{15}. Az összes közös osztó halmaza megegyezik ezen szám osztóinak halmazával, vagyis 16 közös osztójuk van.

373.

374.

375.

376.

377.

378. Legyen a két sok sokszög oldalainak száma: n és k. Tudjuk, hogy egy m-oldalú sokszögnek $\frac{m(m-3)}{2}$ átlója van és a belső szögeinek összege pedig $(m-2) \cdot 180^o$. Ezek alapján két egyenletet kapunk:

$$\frac{n(n-3)}{2} + \frac{k(k-3)}{2} = 158$$
$$(n-2) \cdot 180^o + (k-2) \cdot 180^o = 4320^o.$$

Tekintsük a második egyenletet, és alakítsuk át egy kicsit.

$$(n-2) + (k-2) = 24$$
$$n + k = 28.$$

Ebből kapjuk, hogy $n = 28 - k$. Kicsit átalakítva a második egyenletet kapjuk, hogy

$$n^2 - 3n + k^k - 3k = 316.$$

Helyettesítsük be ebbe $n = 28 - k$-t:

$$(28-k)^2 - 3(28-k) + k^2 - 3k = 316$$
$$k^2 - 56k + 784 - 84 + 3k + k^2 - 3k = 316$$
$$2k^2 - 56k + 384 = 0$$
$$k^2 - 28k + 192 = 0$$
$$(k-12)(k-16) = 0.$$

Vagyis k értéke 12 vagy 16. Ekkor n értéke 16, illetve 12, vagyis egyetlen megoldás van, amikor az egyik sokszög 12-, a másik pedig 16-oldalú.

379.

380.

381.

382.

383.

384.

385.

386. Ha összeadjuk a két egyenletet, akkor azt kapjuk, hogy $2x^2 = 98$. Ebből $x^2 = 49$, vagyis $x_1 = 7$ vagy $x_2 = -7$. Ha ezt behelyettesítjük bármelyik egyenletbe, akkor kapjuk, hogy $y^2 = 9$, vagyis $y_1 = 3$ vagy $y_2 = -3$. Így az egyenletrendszernek 4 megoldása van az $(x; y)$ számpárra: $(7; 3)$, $(-7; 3)$, $(7; -3)$, $(-7; -3)$

387.

388. Tudjuk, hogy

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Vagyis $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Így az egyenlet átírható arra, hogy $1 - \sin^2 x - 1 = \sin x$. Vagyis $\sin^2 x = \sin x$. Vagyis egy szám egyenlő a négyzetével. Ez a szám csak 0 vagy 1 lehet. De $\sin x$ nem lehet 0 és 1 sem (egyelőre). Vagyis az egyenletnek (a mostani tudásunk szerint) nincs megoldása.

389. Ez a szám a 24. Össze kell gyűjtenünk 20 darab 2-es tényezőt. Ha nézzük a számokat sorban, akkor a 2 ad 1-et, a 4 2-t, a 6 1-et, a 8 3-at, a 10 1-et, a 12 2-t, a 14 1-et, a 16 4-et, a 18 1-et, 20 2-t a 22 1-et, és végül a 24 3-at, amivel a szorzat már 2^{22}-nel is osztható, de 23! még csak 219-nel.

390.

391.

392.

393.

394.

395.

396.

397.

398.

399. Tudjuk, hogy $\underline{a}(2;7), \underline{b}(-3;4)$.

(a) $\underline{a}+\underline{b}=(-1;11)$.

(b) $\underline{a}-\underline{b}=(5;3)$.

(c) $3\underline{b}+\underline{a}=(-7;19)$

(d) $5\underline{a}-7\underline{b}=(31;7)$

(e) $\sqrt{2}\underline{b}-\sqrt{3}\underline{a}=(-3\sqrt{2}-2\sqrt{3};4\sqrt{2}-7\sqrt{3})$

400. (a) $\sin(2\pi)=0$

(b) $\sin(5\pi)=0$

(c) $\cos(-3\pi)=-1$

(d) $\cos\left(\frac{7}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}$

(e) $\sin\left(-\frac{11}{2}\pi\right)=0$