1.

2017/09/04

Bemutatkozás. Követelmények. Szabályok.

1. Bűvésztrükk. Gondolj legfeljebb 7 darab 10-nél nagyobb prímszámra. Emeld négyzetre mindegyiket és add össze az így kapott számokat. Áruld el nekem az összeget, én pedig villámgyorsan megmondom, hogy hány számra gondoltál.

2. Fel lehet-e osztani egy négyzetet

   (a) 10

   (b) 11

   négyzetre?

2–3.

2017/09/06

A paritás fogalma. Egy szám paritása azt jelenti, hogy páros vagy páratlan.
Egy szorzat pontosan akkor páros, ha legalább egy tényező páros.
Egy kéttényezős szorzat utolsó számjegyét a két tényező utolsó számjegye határozza meg.

2. (c) Mely n-ekre igaz, hogy egy négyzetet fel lehet osztani n négyzetre?

3. Adott egy 20-nál nem nagyobb szám. Két játékos felváltva csökkenti ezt a számot úgy, hogy minden lépésben legfeljebb 3-mal lehet csökkenteni. Az nyer, aki 0-t mond. Elemezd a játékot.

   (b) Hogyan változik a stratégia, ha legfeljebb 6-tal lehet csökkenteni.

4. A királyi palota várótermébe érkezel. A teremből 8 ajtó nyílik, amelyeken a következő jelek láthatóak:

   $$1, 2, 3, A, B, C, \bigcirc, \triangle$$

   A teremben van egy teremőr is, aki tudja, hogy melyik ajtó vezet a királyhoz, de csak az igen és a nem szavakat tudja kimondani. Minden kérdés után egyre morcosabb lesz. Legkevesebb hány kérdéssel tudod megállapítani biztosan, hogy melyik ajtó mögött találod a királyt?

5. Hány ükszülőd volt? (Nagyszülők nagyszülei.) Általában hány „szülő” van az n-edik szinten?

6. 10 egyenes hány metszéspontot határozhat meg?

Házi feladat: 2c, 3b, 6.

4.

2017/09/07

7. 100 egyenes legfeljebb hány metszéspontot határoz meg?

8. 5 különböző egyenes hány metszéspontot határozhat meg? Add meg az összes lehetőséget.

9. Két játékos felváltva egy korongot mozgat egy számozott táblán, amin 1-től 40-ig vannak mezők. Kezdetben a korong az 1-es mezőn áll. Ha a korong az n számú mezőn van, akkor legalább az $n+1$-esre kell vele lépni, de legfeljebb a $2n$-re. (Ha tehát a korong a 4-es mezőn áll, akkor a soron következő játékos az 5, 6, 7, 8 mezők valamelyikére léphet.) Az nyer, aki rálép a 40-re.
Hogyan kell jól játszani?
   (b) Mi a helyzet, ha 50 a cél?
   (c) Találj gyors módszert annak eldöntésére, hogy kinek kell kezdeni a játékban.

Házi feladat: 7, 9c.
Írásban beadandó házi feladat: 8.

5.

2017/09/11

„Kis-Gauss-módszer": az első n szám összege:

$$\mathbf{1+2+3+\ldots+(n-1)+n} =$$
$$= \frac{(1+2+3+\ldots+(n-1)+n)+(1+2+3+\ldots+(n-1)+n)}{2} =$$
$$= \frac{(1+2+3+\ldots+(n-1)+n)+(n+(n-1)+\ldots+3+2+1)}{2} =$$
$$= \frac{(1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)\ldots+(n-1+2)+(n+1)}{2} = \mathbf{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}$$

10. Egy halmaz elemei páratlan pozitív egészek, mind kisebb mint 100 és nincs egyiknek sem 7-es számjegye. Hány eleme lehet a halmaznak?

11. Kétszemélyes játék. Kezdetben n kavics van, és minden lépésben 1, 2 vagy 4 kavics vehető el. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi.

Házi feladat: 10, 11.

6–7.

2017/09/13

Óra eleji

1. Kétszemélyes játékban az aktuális pozitív egész számot csökkenti a két játékos, minden lépésben legfeljebb 5-tel. Ha a játék 23-ról indul, akkor kezdeni kell vagy átengedni a kezdést? Ha kezdeni, akkor mi a nyerő lépés?
2. 33 egyenesnek legfeljebb hány metszéspontja lehet? Indokolj is.

Halmazok.
A **halmaz** alapfogalom a matematikában, ami azt jelenti, hogy nem definiáljuk.
Egy halmaz eleme bármi lehet, nem csak számhalmazok léteznek. Egy halmazt akkor tekintünk adottnak, ha tetszőleges dologról el tudjuk dönteni, hogy eleme-e a halmaznak. Ennek megfelelően egy halmazt sokféleképpen meg lehet adni. Íme néhány példa:

- Az elemek felsorolásával: {Eiffel-torony; 12; Sherlock Holmes}.
- Körülírással: {páratlan számok}, {Kurt Vonnegut regényei}.
- Képlettel, „szabállyal". Pl. {páros számok} $= \{n \in \mathbb{Z} | n$ osztható 2-vel$\}$.

Fontos számhalmazok: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$.
Részhalmaz, valódi részhalmaz fogalma.
Jelölés (eltér a tankönyvtől!):

- részhalmaz - $A \subset H$
- valódi részhalmaz - $A \subsetneq H$
- üres halmaz: $\emptyset$

12. Hány részhalmaza van a $\{1, 2, \dots, 10\}$ halmaznak?

Házi feladat: 12.

8.

2017/09/14

Tétel: egy n elemű halmaznak pontosan 2^n különböző részhalmaza van.
Osztási maradékok. Ha egy szám 4-gyel osztva 3 maradékot ad, azt jelölhetjük így: $4n+3$, hiszen akkor a nála 3-mal kisebb szám osztható 4-gyel, vagyis 4-nek többszöröse.
Ekkor az is igaz, hogy az őt követő szám is 4 többszöröse, vagyis a $4k-1$ is megfelelő jelölés.
Ha tehát egy szám a-val osztva b maradékot ad, akkor jelölhetjük úgy, hogy $an+b$ alakú, ahol n egy egész szám. (De megfelelő az $am-(a-b)$ jelölés is, ahol m egész szám.)

13. Már megmutattuk, hogy egy négyzetet fel lehet bontani 11 négyzetre. Induljunk ki egy ilyen ábrából. Minden lépésben egy négyzetet négy egybevágó négyzetre bontunk (Koppány-algoritmus :)). Így minden lépésben felbontjuk a négyzetet valahány négyzetre. Hány négyzetre tudjuk így felbontani a négyzetet? Hogyan jellemeznéd ezeket a számokat?

14. Legyen $H = \{1, 2, \dots, 10\}$. Hány

    (a) 1
    (b) 2
    (c) 8

    elemű részhalmaza van H-nak?

15. Rajzolj ábrát, amely szemlélteti a következő halmazok egymáshoz való viszonyát: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}^-, \mathbb{N}, \mathbb{Q}^*$.

Házi feladat: 14, 15.
Hétfőre elolvasni a tankönyvben a 9–14. oldalt.

9.

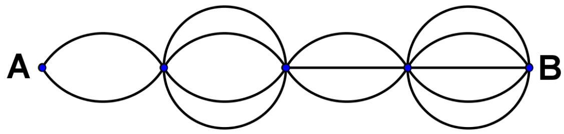
2017/09/18

A komplementer halmaz fogalma.
Definíció: két halmaz **diszjunkt**, ha nincs közös elemük.

16. Kétszemélyes játékban az aktuális pozitív egész számot csökkenti a két játékos, minden lépésben legfeljebb 5-tel. Csak nem-negatív számot lehet mondani. Az veszt, aki 0-t mond. Kinek van nyerő stratégiája?

17. Hány különböző egyenes van, amely egy adott kocka két csúcsára illeszkedik?

18. Hányféleképpen lehet eljutni A-ból B-be, ha csak balról jobbra lehet haladni?



Házi feladat: 16, 17, 18.

10–11.

2017/09/20

Óra eleji

1. Mit nevezünk racionális számnak?
2. Mit jelöl a $\mathbb{Z}^-$?
3. Mit jelent az, hogy $A \subset H$?
4. Legyen az univerzum az $\left\{1, \frac{1}{3}, \text{Mátyás király, Ron Weasley}\right\}$ halmaz. Mi az $\left\{\text{Ron Weasley}, \frac{1}{3}, 1\right\}$ halmaz komplementere?

Szorzási szabály.
Jelölés:

- a eleme H-nak - $a \in H$
- H komplementere - $\overline{H}$
- H elemszáma - $|H|$

Halmazok uniója, metszete, különbsége. Jelölés:

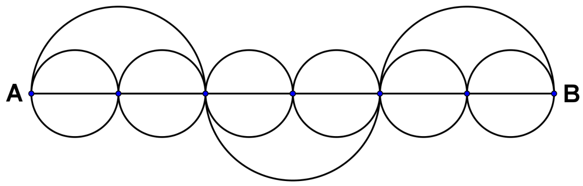
- unió - $A \cup B$
- metszet - $A \cap B$
- különbség - $A \setminus B$

Halmazok ábrázolása Venn-diagrammal.

19. Számelméleti trükk. Gondolj egy 6-jegyű számra. Számold ki a számjegyeinek összegét, és vond ki a kapott számot a gondolt számból. Írj egy számjegyet a szám elejére úgy, hogy egy eggyel nagyobb számjegyű számot kapj. Keverd össze a szám számjegyeit. Mutasd meg a számot, megmondom, milyen számjegyet írtál hozzá.

20. Két játékos felváltva egy korongot mozgat egy számozott táblán, amin 1-től 100-ig vannak mezők. Kezdetben a korong az 1-es mezőn áll. Ha a korong az n számú mezőn van, akkor legalább az $n+1$-esre kell vele lépni, de legfeljebb a $3n$-re. (Ha tehát a korong a 3-as mezőn áll, akkor a soron következő játékos a 4, 5, 6, 7, 8, 9 mezők valamelyikére léphet.) Az nyer, aki rálép a 100-re.
Hogyan kell jól játszani?

21. Hányféleképpen lehet eljutni A-ból B-be, ha csak balról jobbra lehet haladni?



22. Add meg az alábbi halmazokat (ha az alaphalmaz $\mathbb{R}$):

(a) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$

(b) $\overline{\mathbb{Q}^*}$

(c) $(\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Z}^-$

Gyakorló feladatok: Tk. 26. o./2., 27. o./4.

12.

2017/09/21

9-cel való oszthatóság és a számjegyek összegének kapcsolata: egy szám számjegyeinek összege ugyanazt a maradékot adja 9-cel osztva, mint a szám maga.
Ennek speciális esete, hogy egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha a számjegyeinek összege is osztható 9-cel.
Hány üres halmaz van? A válasz: EGY.
Ha H az alaphalmaz (univerzum), akkor $\overline{A} = H \setminus A$.

23. Hány ötjegyű szám van, amelyben az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek mindegyike pontosan egyszer szerepel?

24. Az előbbi feladat ötjegyű számai közül hány osztható

(a) 2-vel?

(b) 3-mal?

(c) 4-gyel?

(d) 5-tel?

(e) 6-tal?

(f) 9-cel?

Házi feladat: 23, 24.

13.

2017/09/25

Az üreshalmaz néhány tulajdonsága. Minden H halmazra:

- $\emptyset \cup H = H$.
- $\emptyset \cap H = \emptyset$.
- $H \setminus \emptyset = H$.
- $\emptyset \setminus H = \emptyset$.

Oszthatósági szabályok.

- Egy egész szám pontosan akkor osztható 3-mal, ha a számjegyeinek összege osztható 3-mal.
- Egy egész szám pontosan akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két számjegyéből álló kétjegyű szám osztható 4-gyel.
- Egy egész szám pontosan akkor osztható 5-tel, ha az utolsó számjegye 0 vagy 5.
- Egy egész szám pontosan akkor osztható 6-tal, ha páros, és osztható 3-mal.

Faktoriális. Ha n egy pozitív egész szám, akkor

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Például:
$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
$6! = 6 \cdot, 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

25. Egy a szám 7-es osztási maradéka 5, egy b számé pedig 3. Mennyi

    (a) $a + b$

    (b) $a - b$

    (c) $b - a$

    (d) $a \cdot b$

    7-es maradéka?

26. Van-e olyan négyzetszám, amelyben a számjegyek összege 5?

Házi feladat: 24c, 25, 26.

14–15.

2017/09/27

Óra eleji

1. Hány részhalmaza van egy kocka csúcsaiból álló halmaznak? (10-es számrendszerben kérem a választ.)
2. Mennyi 4!?
3. Mennyi 1234561-nek a 9-es maradéka?
4. Mi a páros számok halmazának komplementere, ha az alaphalmaz $\mathbb{Z}$?

Jelölés: $\forall$ - minden, mind.
Egy szám 3-as maradéka megegyezik a számjegyek összegének 3-as maradékával.
Két szám összegének, különbségének, illetve szorzatának az osztási maradéka megegyezik az osztási maradékok összegével, különbségével, illetve szorzatával.
Pl. a 13-mal osztva 7, b pedig 9 maradékot ad, akkor $a + b$ 13-as maradéka 16, azaz 3. Hasonlóan $a - b$ maradéka -2, azaz 11, míg az $a \cdot b$ szorzaté $7 \cdot 9 = 63$, azaz 11.

26. (Folytatás.) Megállapítottuk, hogy ha 5 a számjegyek összege, akkor a szám 3-mal osztva 2 maradékot ad. Van-e olyan négyzetszám, ami 3-mal osztva 2 maradékot ad?

27. Egy 3×3-as táblázat minden sorához és minden oszlopához írunk egy számot (pozitív egészt, ami legfeljebb 30). Ezek után minden kis négyzetbe beírjuk a sor és az oszlop számának szorzatát. Minél gyorsabban mondd meg, hogy mennyi az így kapott 9 szám összege.

28. Hány olyan 4-jegyű szám van, amelyben nem szerepel 4-nél kisebb számjegy és minden számjegye különböző?

29. Gondoltam az alábbi téglalap egyik mezőjére. (Pl. b4-re.) A lehető legkevesebb Barkochba kérdéssel találd ki a gondolt mezőt szerencse nélkül.

5			
4			
3			
2			
1			
	a	b	c

Házi feladat: 26, 28, 29.

16.

2017/09/28

30. Hány olyan hárombetűs szó van, amelyben csak az A, B, C, D betűk szerepelnek? (Nem kell, hogy a szó értelmes legyen.)
    (b) És négybetűs?
    (c) Hány olyan van, amelyben van A?
31. Van 6 súlyod, melyek szemre teljesen egyformák, illetve egy kétkarú mérleged. (A súlyokat mindössze a rajtuk lévő feliratok különböztetik meg, az A, B, … , F betűkkel vannak megjelölve.) Az egyik súly azonban egy picit nehezebb, mint a többi, amelyek tömege teljesen egyforma. Legkevesebb hány méréssel tudod kideríteni, hogy melyik a „hibás” súly?
    (b) Két méréssel hány súly közül lehet kiválasztani az egyiket, ami egy picit nehezebb?

Házi feladat: 30c, 31.

17.

2017/10/02

31. (c) Három méréssel?
    (d) n méréssel?
32. Egy páratlan szám négyzete milyen maradékot adhat 8-cal osztva?
33. Hányféleképpen lehet elhelyezni egy világos és egy sötét bástyát a sakktáblán?
    (b) És két sötétet?
    (c) És ha nem ütheti egymást a két bástya?

Házi feladat: 32, 33.

18–19.

2017/10/04

Óra eleji

1. Melyik halmazt jelöli $\mathbb{N}$?
2. Hány olyan 4-jegyű szám van, amelyben csak 6-nál nagyobb számjegyek vannak?
3. Van-e olyan négyzetszám, amelyben a számjegyek összege 8?

Két szomszédos egész szám szorzata mindig páros.

34. Adott egy sorban valahány kék korong. (A korongok másik oldala piros.) Két játékos felváltva megfordíthat korongokat. Csak kéket lehet átfordítani pirosra, és egy lépésben vagy egy tetszőleges kék korongot, vagy két szomszédos kék korongot. Az nyer, aki az utolsó korongo(ka)t átfordítja pirosra. A korongok száma: a) 6 b) 7 c) 8 d) n.

35. Adott 9 súly és egy kétkarú mérleg. Az egyik súly egy kicsit nehezebb, mint a többi. Hány előre leírt méréssel lehet megtalálni a nehezebb súlyt?

Házi feladat: 33bc, 34bcd.

20.

2017/10/05

Tehén-módszer.

36. Egy 0,2 mm vastag papírlapot egymás után 10-szer félbehajtottunk. Milyen vastag most az a dolog, ami a kezünkben van?

37. Hány 13-mérkőzéses totószelvényt kell kitölteni ahhoz, hogy biztosan legyen telitalálatosunk? (A 3 lehetséges tipp: 1- hazai csapat nyer, x - döntetlen, 2 - vendégcsapat nyer.)

38. És ha csak 5 találatot szeretnénk biztosítani?

Házi feladat: 35, 36, 37, 38.

21.

2017/10/09

Mese Erdős Pálról annak apropóján, hogy át kellett mennünk az Erdős terembe. Erdős-szám.
Oszthatóság definíciója. Jelölés: $k|n$, aminek jelentése: n osztható k-val.
$3|12, 10|1000, 5 \nmid 24$

39. Hány olyan 4-jegyű szám van, amelyben nem szerepel 4-es számjegy?

40. Hány osztója van az alábbi számoknak?

    (a) 12
    (b) 36
    (c) 512
    (d) 2160

Házi feladat: 35 (3 méréssel), 38 (3 szelvénnyel), 39, 40.

22–23.

2017/10/11

Óra eleji

1. Mennyi a 12121212123 szám 8-as osztási maradéka?
2. Az n szám 11-es maradéka 4, a k számé pedig 9. Mennyi a szorzat 11-es maradéka?
3. Hányféleképpen lehet feltenni egy 5×5-ös táblára két egyforma bábut úgy, hogy ne legyenek se egy sorban, se egy oszlopban?
4. Az A, B, C, D, E betűkből hány olyan 3-betűs (nem feltétlenül értelmes) szó állítható össze, amelyben van D betű?

Számelmélet alaptétele (SzAT): Bármely 1-nél nagyobb egész szám felbontható prímszámok szorzatára, és ez a felbontás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

41. Két játékos egy közös korongot mozgat a sakktáblán. Minden lépésben vagy lefelé vagy balra akárhány mezőt lehet lépni. Az nyer, aki a bal alsó sarokmezőre lép. Add meg a nyerő stratégiát.
42. Az $1, 2, 3, \dots, n$ számok valamelyikére gondoltam. 5 Barkochba-kérdéssel ki kell találnod, hogy melyik az a szám. Melyik az a legnagyobb n, amelyre lehetséges ez szerencse nélkül?
43. Hány egész szám esetén lehetünk biztosak abban, hogy van közöttük kettő, melyek különbsége osztható 7-tel?

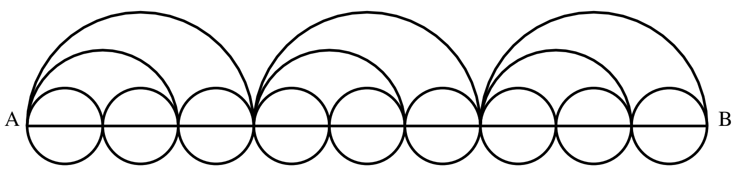
Házi feladat: 35 (2 méréssel), 42, 43.

24.

2017/10/12

Oszthatóság tulajdonságai. Ha $k|m$ és $k|n$, akkor $k|m+n$, $k|m-n$ és $k|mn$.

44. Igaz-e, hogy ha k osztója m-nek és n-nek is, akkor osztója $(n+m)$-nek, $(n-m)$-nek és $(n \cdot m)$-nek is?
45. Az $\{1, 2, \dots, 8\}$ halmaz elemeiből gondoltam két különbözőre. Hány Barkochba-kérdéssel tudod kitalálni a két számot?
46. Hányféleképpen lehet eljutni A-ból B-be?



Házi feladat: 35 (2 méréssel), 45, 46.

25.

2017/10/16

Barkochba általában: ha valaki legfeljebb 2^n dologra gondol, akkor függetlenül a dolgoktól, mindig ki tudjuk találni a gondoltat legfeljebb n kérdéssel.

47. Milyen számjegy lehet d, ha tudjuk, hogy $\overline{123613d4}$ osztható
    (a) 3-mal;
    (b) 4-gyel;
    (c) 6-tal;
    (d) 9-cel;
    (e) 12-vel?
48. Határozzuk meg 2160 és 1520 legnagyobb közös osztóját.
49. Határozzuk meg 36 és 100 legkisebb közös többszörösét.

Házi feladat: 47, 48, 49.

26–27.

2017/10/18

Óra eleji

1. Mondd ki a számelmélet alaptételét.
2. Adott 9 súly (A-I-ig), melyek közül az egyik nehezebb. Kétkarú mérleggel, minél kevesebb előre leírt méréssel találd meg a hibás súlyt.
3. Gondoltam az év egyik napjára. Legkevesebb hány Barkochba-kérdéssel tudod kitalálni a napot szerencse nélkül?

Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös meghatározása a prímfelbontás alapján.
Az osztók számának meghatározása: vegyük a szám prímfelbontását. A felbontásban szereplő kitevők mindegyikéhez adjunk hozzá egyet, és a kapott számokat szorozzuk össze. Az így kapott szám az osztók száma.
Pl. $2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$. Vagyis a kitevők: 4, 3, 1. Mindhez egyet adva, a kapott számokat összeszorozva kapjuk, hogy $(4+1)(3+1)(1+1) = 40$ osztója van 2160-nak.

50. Hány olyan egyenes van, amely egy szabályos 8-szögnek legalább 2 csúcsára illeszkedik?
51. Hány olyan 5-jegyű szám van, amelyben van 4-nél kisebb számjegy?
52. Hányféleképpen lehet megadni 23 különböző, 100-nál kisebb prímszámot?

28.

2017/10/19

Dolgozat

1. Kétszemélyes játék, amelyben a két játékos felváltva lép. Kezdetben 103 kavics van, és minden lépésben legalább 1, legfeljebb 7 kavics vehető el. Az veszt, aki az utolsó kavicsot elveszi. Add meg a nyerő stratégiát. (Te döntöd el, hogy ki kezdjen.)

2. Legyen az alaphalmazunk a 20-nál nem nagyobb pozitív egészek halmaza. $A = \{1, 3, 5, 7\}$, B a 20-nál kisebb pozitív prímek, C pedig a 20-nál kisebb pozitív páros számok halmaza. Add meg az alábbi halmazokat:

   (a) $\overline{B \cap C}$

   (b) $B \setminus A$

   (c) $(A \cup B) \setminus C$

3. Az A, B, C, D, E, F betűkből 4 betűs szavakat állítunk össze. Az első két betű nem lehet E és F, az utolsó kettő pedig nem lehet A és B.

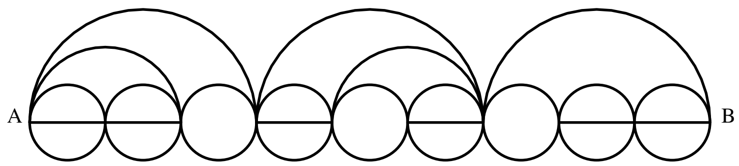
   (a) Hány különböző szó képezhető így?

   (b) Hány különböző szó létezik, amelyben a második és a harmadik betű különböző?

4. Az $\overline{13572a}$ szám osztható 6-tal, a $\overline{240b8}$ szám pedig 4-gyel igen, de 8-cal nem. Mennyi $a \cdot b$ legnagyobb lehetséges értéke?

5. Gondoltam egy háromjegyű számra, amelynek van páros számjegye. Legkevesebb hány Barkochba-kérdésre van szükséged ahhoz, hogy szerencse nélkül kitaláld a gondolt számot?
   Mi lenne az első kérdésed?

6. Hányféleképpen lehet eljutni A-ból B-be?



7. Igaz-e, hogy ha egy egész szám harmadik hátványából kivonjuk magát a számot, akkor az eredmény mindig osztható 3-mal?

8. Egy 6×4-es téglalap kis négyzeteire teszünk fel bábukat. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha

   (a) két egyforma bábut teszünk fel;

   (b) ha két különböző bábut teszünk fel, és nem lehetnek sem egy sorban, sem egy oszlopban;

   (c) három bábut teszünk fel, melyek közül kettő egyforma, a harmadik viszont különböző?

29–30.

2017/10/25

Dolgozat feladatok megbeszélése.

Prímek, összetett számok. Végtelen sok prím van.
Nevezetes azonosság:
$$n^2 - 1 = (n-1)(n+1).$$

53. Legkevesebb hány diák esetén lehetünk biztosak abban, hogy egy osztályban van
    (a) 4 diák, akik ugyanabban a hónapban születtek?
    (b) 3-3 diák, akik egy-egy hónapban születtek?
54. Igazak-e az alábbi állítások?
    (a) Ha egy szám osztható 9-cel és 4-gyel, akkor osztható 18-cal?
    (b) Ha egy szám osztható 18-cal, akkor osztható 4-gyel és 9-cel?
    (c) Ha egy szám osztható 3-mal, akkor a négyzete osztható 9-cel?
    (d) Ha egy szám osztható 84-gyel és 30-cal, akkor osztható 840-gyel?
    (e) Ha egy szám négyzete osztható 3-mal, akkor a szám is osztható 3-mal?
55. Nagy számok esetén a prímfelbontás nagyon lassú, így két szám legnagyobb közös osztójának a meghatározása is lassú. Keress olyan módszert a legnagyobb közös osztó meghatározására, amihez nincs szükség a prímfelbontásra.

Házi feladat: 55.

31.

2017/10/26

Euklideszi algoritmus.
Definíció: a és b relatív prímek, ha legnagyobb közös osztójuk 1, azaz $(a, b) = 1$.
Nevezetes azonosság:
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

56. Euklideszi algoritmussal határozd meg 624 és 252 legnagyobb közös osztóját.
57. Igazak-e az alábbi állítások?
    (a) Ha egy szám négyzete osztható 18-cal, akkor a szám is osztható 18-cal?
    (b) Ha a és b relatív prímek, illetve b és c relatív prímek, akkor a és c is relatív prímek?

32.

2017/11/06

Annak bizonyítása, hogy végtelen sok prím van.
Indirekt bizonyítás.
Hatványozás azonosságai ($a \in \mathbb{R}$, $n, k \in \mathbb{Z}^+$ és $n > k$):

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$$
$$\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}.$$

A fentiek alapján a hatványozást kiterjesztjük az összes egész kitevőre, azaz minden $a \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$
$$a^0 = 1.$$

33–34.

2017/11/08

Óra eleji

1. Add meg 182 és 378 legnagyobb közös osztóját Euklideszi-algoritmussal.
2. Hány osztója van 4000-nek?

---

58. Villámkérdések.
Számold ki fejben:
    (a) $19 \cdot 37$.
    (b) $14 \cdot 18$.
    (c) $95 \cdot 105$.
    (d) $280 \cdot 320$.
    (e) Tizedestört alakban: 3^{-2}.
    (f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$.
59. Két játékos egy közös korongot mozgat a sakktáblán. Minden lépésben vagy lefelé vagy balra akárhány mezőt lehet lépni. Az veszt, aki a bal alsó sarokmezőre lép. Add meg a nyerő stratégiát.
60. Igaz-e, hogy $7^{100} - 1$ osztható
    (a) 6-tal;

(b) 4-gyel?

61. Három közeli sziget: Alfa, Béta és Gamma történetéről már évszázadok óta megemlékeznek a krónikák. Sajnos a krónikák Xes, Yap és Zuf néven emlegetik őket, és nem lehet tudni, hogy melyik melyik. Alapos kutatást végeztünk és megtudtuk,hogy a szigeteken élők egy vallás előírásait követve a templom kincstárába évszázadok óta ünnepekkor 21 aranyat, bő termés idején 33 aranyat fizetnek be. Éhínség idején azonban joguk van 51 aranyat kivenni a kincstárból. (Más forgalom nincs a kincstárakban.) A krónika említést tesz a szigetek kincstáraiban lévő aranyakról. Xes esetében felbukkan egyszer, hogy 917 arany van a kincstárban, Yap esetén 1002, míg Zuf esetén a 157-es adat jelenik meg. Azt tudjuk, hogy ma Alfában 1513, Bétában 824, Gammában pedig 1326 arany található a kincstárban. Meg tudjuk-e állapítani, hogy mi a mai neve Xesnek, Yapnak, illetve Zufnak?

62. Május 35-én a lottót úgy játsszák, hogy a 90 számból csak kettőt húznak ki. Hány szelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen telitalálat?

    (b) Mi a helyzet, ha 3 számot húznak ki?

Házi feladat: 59, 60, 61.

35.

2017/11/09

0^0 esetén két lehetőség van. 1) Nem értelmezzük. 2) Az értéke 1.
A 60. feladat gondolata alapján elmondhatjuk, hogy $n, k \in \mathbb{Z}^+$ esetén:

$$n-1 \mid n^k - 1$$
$$n+1 \mid n^{2k} - 1$$
$$n+1 \mid n^{2k+1} + 1$$

63. Bizonyítsd be, hogy egy szám 9-es maradéka megegyezik a számjegyek összegének 9-es maradékával.

Házi feladat: 60 (segítség: 3-mal oszthatóság), 63.

36.

2017/11/13

Hatványozás további azonosságai ($a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $n, k \in \mathbb{Z}^+$ és $n > k$):

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$
$$(a^n)^k = a^{n \cdot k}.$$

Normálalak.
Ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor létezik $1 \leq |p| < 10$ és $k \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy

$$x = p \cdot 10^k.$$

Ekkor k az x szám karakterisztikája. 0 normálalakja 0.

64. Egy négyzet oldalának hosszát 1 cm-rel megnöveltük. A területe ettől 121 cm^2-rel nőtt meg? Mekkora most a négyzet oldala?

65. Lottó 20 számból 18-at húznak ki. Hány szelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen telitalálatos szelvényünk?

Házi feladat: 64, 65.

37–38.

2017/11/15

Óra eleji

1. Add meg 10-es számrendszerben: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.
2. Bizonyítsd be, hogy $8 \mid 9^{63} - 1$.
3. Lottó: 12 számból 3-at húznak. Hány különböző szelvény van?

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

66. A lottón továbbra is 20 számból húznak 18-at. Hány szelvény kell, hogy biztosan legyen egy legalább 15 találatos szelvényünk?

67. Két sorban korongok helyezkednek el. Két játékos felváltva vesz el korongokat, minden lépésben egy sorból csak lehet elvenni, de onnan akárhányat. (Legalább 1-et.)

    (a) Az nyer, aki az utolsó korongo(ka)t elveszi. (Kezdetben legyen az egyik sorban 5, a másikban 8 korong. Ha ez megvan, akkor oldd meg általánosan a feladatot.)

(b) Az veszt, aki az utolsó korongo(ka)t elveszi.

68. Egy négyzet oldalának hosszát 6 cm-rel megnöveltük. A területe ettől 156 cm^2-rel nőtt meg? Mekkora most a négyzet oldala?

69. Van-e olyan négyzetszám, amelyben a számjegyek összege 150?

70. Ha egy n oldalhosszúságú kocka oldalát 1 egységgel növeljük, akkor hogyan változik a

(a) felszíne;

(b) térfogata?

Házi feladat: 66, 67b, 69, 70.

39.

2017/11/16

71. A lottón továbbra is 20 számból húznak 18-at. Hány szelvény kell, hogy biztosan legyen egy legalább 17 találatos szelvényünk?

72. Igaz-e, hogy ha $3 \mid n \cdot k$, akkor $3 \mid n$ vagy $3 \mid k$?

(b) Milyen b számokra igaz, hogy ha $b \mid n \cdot k$, akkor $b \mid n$ vagy $b \mid k$?

73. Vannak-e olyan n, k egész számok, amelyekre

$$k^2 = 3n + 2.$$

Házi feladat: 67b, 69, 71, 72b, 73.

40.

2017/11/20

74. Villámkérdések:

(a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

(b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

(c) $(a+3)^2$

Házi feladat: 69, 71, 73.

41–42.

2017/11/22

Óra eleji

1. $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}$
2. $(a+1)(a+2)$
3. Lottó: 19 számból húznak 17-et. Hány különböző szelvény van?

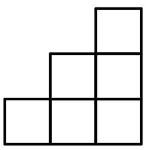
$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1.$

75. Villámkérdések:
    (a) $(a+2)(2a+1)$
    (b) $(a+1)^3$
    (c) $(a+2)^3$
    (d) 1563 normálalakja
    (e) $0,532$ normálalakja
    (f) $\frac{1}{300}$ normálalakja.
    (g) Kettes számrendszerben: 19.
    (h) Négyes számrendszerben: 98.

76. Mennyi a
    (a) 9-es
    (b) 6-os
    (c) 8-as

    maradéka $12341234^3 \cdot 56789$-nek?

77. Az ábrán látható háromemeletes lépcső területe 6 területegység. Mekkora egy hatvanemeletes lépcső területe?



78. Egy négyzet egyik oldalát 5 cm-rel megnöveltük, másik oldalát 5 cm-rel lecsökkentettük. Kisebb vagy nagyobb a kapott téglalap területe az eredeti négyzet területéhez képest? Mekkora a különbség?

79. Egy szám számjegyeinek összege 16. Mi lehet a számjegyek összege a szám kétszeresében?

Házi feladat: 69, 71, 73, 76b, 79.

43.

2017/11/23

Ha egy négyzetszám osztható a p prímmel, akkor a gyöke is osztható.
Formálisan: ha p prím, $n \in \mathbb{Z}^+$, és $p \mid n^2$, akkor $p \mid n$.
Egy szám pontosan akkor négyzetszám, ha prímtényezős felbontásában minden kitevő páros.

80. Mi lehet a 11-gyel való oszthatóság szabálya? (Idézd fel, hogy eddig milyen oszthatósági szabályokat ismerünk, és azokat hogyan bizonyítottuk.)

Házi feladat: 76b, 79 (befejezni), 80.

44.

2017/11/27

81. $(a-b)^3$ felírása zárójel nélkül.

82. Egy négyzetszám osztható 6-tal. Igaz-e, hogy a gyöke is osztható 6-tal?

83. Egy négyzetszám osztható 192-vel. Melyik az a legnagyobb szám, amivel biztosan osztható a gyöke?

Házi feladat: 80 (bizonyítás), 82, 83.

45–46.

2017/11/29

Óra eleji

1. $(a-2)^3$ zárójel nélkül.
2. Hogyan látszik egy szám prímfelbontásából, hogy négyzetszám?
3. $0,0042$ és 65555 normálalakja.
4. Írd fel 73-at 3-as számrendszerben.

---

84. Egy téglalap bal felső sarkából szeretnénk eljutni a jobb alsóba. Minden lépésben egyet jobbra, vagy egyet lefelé léphetünk. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha a téglalap

   (a) 2×9-es;

   (b) 3×7-es;

(c) 4×5-ös?

85. Legyen p a $2x^3 + 3x - 1$ kifejezés, q pedig $x^2 - 6x + 3$. Add meg a következő kifejezéseket:

$$p + q, p - 2q, pq, p^2.$$

Házi feladat: 84bc, 85.

47.

2017/11/30

86. Hány szelvényt kell kitöltenünk az ötöslottón (90 számból húznak 5-öt), hogy biztosan legyen telitalálatosunk?

87. Igaz-e, hogy $2346^{100} - 1399^{88}$ osztható 5-tel?

88. Egy 4×5-ös téglalap bal felső sarkából szeretnénk eljutni a jobb alsóba. Minden lépésben közelednünk kell a jobb alsó sarokhoz és úgy léphetünk, mint egy

   (a) király,
   (b) bástya,
   (c) vezér

   a sakkban. Hányféle útvonal létezik?

Házi feladat: 86, 87, 88.

48.

2017/12/04

Polinom.
$\binom{n}{k}$ fogalma.
Kiszámítása:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Házi feladat: 88bc (ÍRÁSBAN).

45–46.

2017/12/06

Óra eleji

1. Add meg 144 és 120 legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét.
2. Írd fel 120-at 4-es számrendszerben.
3. 3×4-es téglalap bal felső sarkából a jobb alsóba hányféleképpen lehet eljutni, ha csak jobbra egyet vagy lefelé egyet lehet lépni?

Polinom fogalma. Fokszáma, zérushelye (gyöke).

89. Add meg az összes olyan x-et, amelyre

    (a) $(x+3)^2 = 16$;

    (b) $(x-2)(2x+3) = 0$;

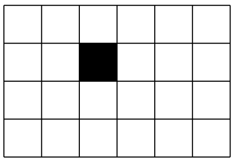
    (c) $5x - 2(x-3) = 3x + 6$.

90. Egy 10×13-as téglalapban hányféleképpen lehet eljutni a bal felső sarokból a jobb alsóba, ha jobbra egyet, illetve lefelé egyet lehet lépni minden lépésben?

91. Melyik szám a nagyobb és mennyivel?

$$12345678910111213 13 \cdot 1234567891011121315 \text{ vagy } 1234567891011121314^2$$

92. Az alábbi ábrán hányféleképpen lehet eljutni a balsó alsó sarokból a jobb felsőbe, ha a fekete négyzetre nem lehet rálépni és minden lépésben egyet jobbra vagy egyet felfelé lehet lépni?

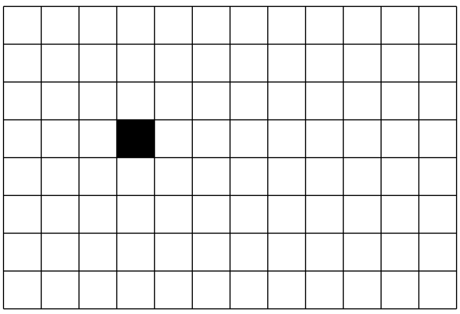


Házi feladat: 90, 91, 92.

47.

2017/12/07

93. Az alábbi ábrán hányféleképpen lehet eljutni a balsó alsó sarokból a jobb felsőbe, ha a fekete négyzetre nem lehet rálépni és minden lépésben egyet jobbra vagy egyet felfelé lehet lépni?



94. Milyen x-re teljesül, hogy

$$\frac{x}{2} - \frac{3x-1}{5} = 4.$$

95. Fel tudjuk-e írni a következő polinomokat két elsőfokú polinom szorzataként?

    (a) $x^2 - 4x + 4$
    (b) $x^2 + 4x + 3$
    (c) $x^2 + 3x - 4$

    Hol vannak a kifejezések gyökei?

96. Van-e olyan négyzetszám, amely 54-re végződik?

97. Van-e olyan polinom, amivel $x - 1$-et megszorozva $x^3 - 1$-et kapunk?

Házi feladat: 93, 95c, 96, 97.

48.

2017/12/11

Induktív gondolkodás mérése.

49–50.

2017/12/06

Óra eleji

1. $(2x^2 + 2)(x^3 - 2x + 3)$.
2. Mennyi $\binom{6}{3}$?
3. Add meg 2^{-3}-t tizedestört alakban.

---

98. Írd fel a prímfelbontását:

    (a) $4 \cdot 6^3$
    (b) $9^2 \cdot 30^4$

99. Mennyi az alábbi számok 7-es maradéka?

    (a) 21^{49}
    (b) 6^{113}
    (c) $13^{88} - 24 \cdot 2^{60}$

100. A diákok javasolnak feladatot. Ld. később.

101. Hány osztója van 84000-nek? Hány páros ezek közül?

Házi feladat Dolgozat utánra: 97, 101.

51.

2017/12/14

Dolgozat

1. Hány osztója van $4^3 \cdot 21^4 \cdot 6^5$-nek?
2. Melyik szám a nagyobb és mennyivel?
$$1444441 \cdot 1444449 \text{ vagy } 1444445^2$$
3. Felbontható-e elsőfokú polinomok szorzatára $x^2 - 4x - 12$?
4. Egy 25×19-es téglalap bal alsó sarkából akarunk eljutni a jobb felsőbe. Minden lépésben jobbra egy mezőt vagy felfelé egy mezőt léphetünk. A téglalap középső mezőjére feltétlenül rá szeretnénk lépni. Hány olyan útvonal van, amely érinti a középső mezőt?
5. Add meg 10-es számrendszerben $8^2 \cdot 2^{-7} \cdot 6^3$ értékét.
6. Mennyi a 8-cal való osztási maradéka a következő számoknak?
   (a) 72^{45};
   (b) 23^{133};
   (c) $13 \cdot 9^{13} - 7 \cdot 3^{27}$.
7. A benáreszi lottón 29 számból húznak ki 5-öt. Minden szelvényen 5 számot kell bejelölni.
   (a) Hány szelvényt kell kitölteni, hogy legyen köztük telitalálatos?
   (b) Hány olyan különböző szelvényt lehet kitölteni, amin van páros szám bejelölve?
8. Írd fel zárójelek nélkül az alábbi polinomot:
$$x(x^2 + 4)(3x^3 - x^2 + 3).$$
9. Van-e olyan négyzetszám, amelyben a számjegyek összege 12?

52.

2017/12/18

Dinamikus problémamegoldás mérése.

53–54.

2017/12/20

Dolgozat feladatainak megbeszélése.

55–56.

2018/01/03

Óra eleji

1. Mennyi $\binom{8}{3}$?
2. Hány osztója van $4^3 \cdot 6^4$-nek?
3. Mennyi a 7-es maradéka: $2(8^{31} - 2)$-nek?
4. Add meg zárójelek nélkül $x(x-1)(x+1)$-et.

Jelölés: $d(n)$ - n osztóinak száma.
$\sqrt{a}$ azt a nem-negatív számot jelenti, amelynek a négyzete a.

100. (Diákok javaslata alapján. Arany Dániel 2017., kezdők, 1. forduló, 2. feladat.)
Hány olyan 7-elemű részhalmaza van az $\{1, 2, \dots, 9\}$ halmaznak, amelyben az elemek összege osztható 3-mal?

102. Szorzattá lehet-e bontani?
   (a) $x^2 - 6x + 5$;
   (b) $x^3 + 6x^2 - 7x$;
   (c) $x^4 - 1$;

103. Melyek azok a számok, amelyeknek páratlan sok osztója van?

104. Oldd meg a következő egyenleteket:
   (a) $x^2 = 4$;
   (b) $x^2 = 7$;
   (c) $x^2 = -1$;
   (d) $x^2 + 2 = 18$;
   (e) $x^2 - 2x + 1 = 25$.

105. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek a 245-szöröse négyzetszám?

Házi feladat: 100, 102bc, 103, 104cde, 105.

57.

2018/01/04

106. Egy négyzet egyik oldalát 2, a másikat 3 cm-rel megnövelve egy olyan téglalapot kapunk, amelynek területe 666 cm^2-rel nagyobb a négyzet területénél. Mekkora volt a négyzet oldala?

Házi feladat: 103, 105, 106.

58.

2018/01/08

107. Hányféleképpen lehet egy ötöslottószelvényt kitölteni úgy, hogy
    (a) van a megjelölt számok között 3-mal osztható?
    (b) pontosan 2 páros és 3 páratlan megjelölt szám van?

108. Oldd meg a következő egyenleteket:
    (a) $x^2 - 4x + 4 = 36$;
    (b) $x^4 - 1 = 0$;
    (c) $x^3 - 2x^2 + x = 0$;
    (d) $x^2 - 6x = 40$.

109. Hányféleképpen választhatunk ki két kétjegyű számot, ha tudjuk, hogy a szorzatuk 5-re végződik?

Házi feladat: 107, 108bd, 109.

59–60.

2018/01/10

Matematika határok nélkül próbafeladatsor.

61.

2018/01/11

110. Négy szomszédos egész szám közül a két középső szorzatából levontuk a két szélső szorzatát. Eredményül 2-t kaptunk. Melyik a négy szomszédos szám?

62.

2018/01/15

111. Írd fel a kifejezéseket zárójel nélkül:

   (a) $(2x-1)^2$;

   (b) $(2x+3)^3$;

112. Egy téglalap egyik oldalát 2, a másikat 3 cm-rel megnövelve egy olyan négyzetet kapunk, amelynek területe 104 cm^2-rel nagyobb a téglalap területénél. Mekkorák voltak a téglalap oldalai?

113. Megoldható-e az egész számok körében az

$$y^2 = 5x - 2$$

egyenlet?

114. Oldd meg az $x^2 - 2x - 1 = 0$ egyenletet.

Házi feladat: 113, 114.

63–64.

2018/01/17

Óra eleji

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ egyszerűsített törtalakban.
2. $(3x-1)^3$ zárójelek nélkül.
3. Hány olyan hatoslottó szelvény van, amelyen van páros szám?

---

115. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek az 1400-szorosa négyzetszám?

116. Oldd meg az $x^2 - 4x + 6 = 0$ egyenletet.

117. Egy téglalap alakú csokoládé jobb felső kiskockája mérgezett. Két játékos felváltva eszik a csokoládéból. A soron következő kiválaszt egy kiskockát, és minden attól balra és lefelé lévő kiskockát meg kell ennie. (A kiskocka által definiált teljes bal alsó téglalapot el kell fogyasztania.) Aki megeszi a mérgezett mezőt, veszít. Add meg a nyerő stratégiát, ha a csoki mérete:

   (a) 2×7;

   (b) 4×4;

   (c) 3×4;

118. Hogyan oldjuk meg általánosan az $x^2 + 2bx + c = 0$ egyenleteket?

Házi feladat: 117bc, 118

65.

2018/01/22

A **függvény** fogalma.

119. Hogyan oldjuk meg általánosan az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenleteket?

Házi feladat: 117c, 119

66.

2018/01/22

Az $ax^2 + bx + c = 0$ másodfokú egyenlet megoldása, gyökei:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Házi feladat: 117c

67–68.

2018/01/24

Óra eleji

1. $\binom{10}{3}$ 10-es számrendszerben.
2. Add meg 77-et 2-es számrendszerben.
3. Egy négyzet oldalait 2-vel megnöveltük, így egy 68-cal nagyobb területű négyzetet kaptunk. Mekkora volt eredetileg a négyzet területe?

Értelmezési tartomány, képhalmaz, értékkészlet. Jelölések: D_f, R_f.

120. Oldd meg a következő egyenleteket:

   (a) $x^2 - 5x + 4 = 0$;
   (b) $2x - x^2 = 1$;
   (c) $6x + x^2 = -10$;
   (d) $2 - 4x + 2x^2 = 0$;
   (e) $x^2 + 2 = 4x$

121. Hány különböző $f : A \to A$ függvény van, ha $A = \{1, 2, \dots, 6\}$?

Házi feladat: 117c, 120bcde, 121.

69.

2018/01/25

122. Az új halastóba pontyokat és harcsákat telepítettek. Két nap alatt összesen 800 hal került a tóba. Az első napon telepített halak 84%-a ponty volt. A második napon már csak pontyokat hoztak, így a két nap alatt a tóba telepített összes hal 85%-a lett ponty.
Hány pontyot telepítettek a második napon?

Házi feladat: 120cde, 121, 122.

70.

2018/02/05

Diszkrimináns. Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet diszkriminánsa: $D = b^2 - 4ac$. Ha a diszkrimináns pozitív, akkor az egyenletnek két különböző megoldása van, ha 0, akkor pontosan egy, ha pedig negatív, akkor nincs megoldása.
Koordináta-rendszer.

123. Hány különböző $f : A \to A$ függvény van, ha $A = \{1, 2, \dots, 6\}$, és tudjuk, hogy $R_f = A$?

Házi feladat: 122, 123.

71–72.

2018/02/07

Óra eleji

1. Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletre vonatkozó megoldóképlet levezetése.

Abszolútérték.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Valós függvény grafikonja:

$$\operatorname{graf} f = \left\{ (x, f(x)) \mid x \in D_f \right\}.$$

.

124. Ábrázold koordináta-rendszerben azt a függvényt, amely minden $x \in \mathbb{R}$-hez:

   (a) x-et;
   (b) $x+2$-t;
   (c) $2x$-et;
   (d) $-3x$-et;
   (e) $3x+5$-öt
   (f) x^2-et

   rendel.

125. Hány különböző függvény van, amelynek értelmezési tartománya $A = \{1, 2, \dots, 6\}$, értékkészlete pedig $B = \{1, 2, \dots, 5\}$?

126. Hol vannak azok a pontok a síkbeli koordináta-rendszerben, amelyekre:

   (a) $x < y$;
   (b) $y \geq 2$ és $x > 3$;

Házi feladat: 124cdef, 125, 126.

73.

2018/02/08

Egyenes meredeksége a koordináta-rendszerben.
Az $f(x) = x^2$ függvény grafikonja egy parabola.

Házi feladat: 125, 126.

74.

2018/02/12

127. Ábrázold az

   (a) $f(x) = |x|$;
   (b) $f(x) = x^2 + 2$

   függvényt.

128. Van-e olyan négyzetszám, amelyben az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek mindegyike pontosan 2-szer szerepel?

129. Legyen $A = \{1, 2, \dots, 8\}$, $B = \{1, 2, \dots, 5\}$. Hány olyan $f : A \to B$ függvény van, amelyben páros szám képe páros, páratlané pedig páratlan?

Házi feladat: 128, 129.

75–76.

2018/02/14

Óra eleji

1. Mit nevezünk diszkriminánsnak?
2. Ábrázold: $f(x) = 2x + 1$.
3. Ábrázold: $f(x) = x^2 - 1$.
4. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Hány különböző $f : A \to B$ függvény van?

---

130. Hol vannak azok a pontok a síkbeli koordináta-rendszerben, amelyekre:

    (a) $|y| \geq 2$;

    (b) $x < 3y$;

    (c) $|x - y| < 1$.

131. Add meg az összes olyan n számot, amelyre $(n, 24) = 6$ és $[n, 40] = 120$.

132. Ábrázold a következő függvényeket:

    (a) $f(x) = 2x - 3$

    (b) $g(x) = (x - 1)^2$

    (c) $h(x) = x^2 - 4x + 4$

133. Legyen $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $B = \{1, 2, \ldots 9\}$. Hány olyan $f : A \to B$ függvény van, amelyre

    (a) $|R_f| = 7$;

    (b) $|R_f| = 6$;

    (c) $|R_f| = 5$?

Házi feladat: 130c, 131, 133.

77.

2018/02/15

134. Ábrázold a következő függvényeket:

    (a) $f(x) = |x| + 2$

    (b) $g(x) = (x - 1)(x - 3)$

    (c) $h(x) = |x + 2|$

    (d) $j(x) = x^2 + 2x - 3$

Házi feladat: 134.

78.

2018/02/19

Geogebra - függvényábrázolás, csúszka

135. Ábrázold a következő másodfokú függvényeket. Határozd meg a megfelelő egyenletek gyökeit. Keresd meg az ezeknek megfelelő pontot a grafikonon.

    (a) $f(x) = x^2 - 6x + 1$
    (b) $g(x) = (x - 2)(x + 3)$
    (c) $h(x) = -2x^2 - 3x + 6$
    (d) $j(x) = 6x^2 + 20x - 3$

136. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c valós számok esetén a következő számok között biztosan van legalább egy olyan, amelyik nem negatív: $4a^2 - 2b + 1$, $b^2 + 2c + 4$, és $c^2 - 8a + 1$.

Házi feladat: 136.

79–80.

2018/02/21

Parabola nevezetes pontjai, gyökök, szélsőérték.
Minimum, maximum.

137. Ábrázold a következő függvényeket:

    (a) $f(x) = |x - 3| + 1$;
    (b) $g(x) = x^2 - 6x + 6$.

138. Hány részhalmaza van az első 10 pozitív egészből álló halmaznak, amelyben pontosan

    (a) 0
    (b) 1
    (c) 2

    páros van?

139. Hány gyöke van a következő polinomoknak?

    (a) $5x - 12$
    (b) $2x^2 - 12x + 3$
    (c) $x^2 - 3x + 2,25$
    (d) $x^3 - 4x^2 - 15x + 18$

Óra végi

1. Ábrázold $f(x) = x^2 + 2x - 1$-et.
2. Ábrázold $f(x) = |x+1| - 2$-t.
3. Diszkrimináns fogalma.
4. Hány részhalmaza van $\{1, 2, \dots, 14\}$-nek, amelyben pontosan egy páros szám van?

Házi feladat: 133c, 139.

81.

2018/02/22

140. Egy 12-jegyű szám két egymást követő szám szorzata. Lehet-e, hogy a számjegyei: 7 darab 1-es és 5 darab 0?

141. Mi az értékkészlete a következő $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeknek?

   (a) $f(x) = -2x + 2$;
   (b) $g(x) = x^2 + 4x - 1$;
   (c) $h(x) = 2x - x^2 + 4$;
   (d) $g(x) = |x + 4| - 3$;

Házi feladat: 139d, 140, 141.

82.

2018/02/26

Wolfram Alpha.
Polinomok ábrázolása, gyökök keresése.
Intervallumok. Pl. $[1; 3],]2; 4], [5; 7[,] - 3; 2[, [6; \infty[,] - 1; \infty[,] - \infty; 4],] - \infty; 11[$.

Házi feladat: 139d, 140, 141bc.

83–84.

2018/02/28

Geometriai fogalmak, ismeretek összegyűjtése kis csoportokban.
Alapfogalmak: pont, egyenes, sík.
Szögek osztályozása, váltószög, csúcsszög.
Bizonyítás: háromszög szögeinek összege 180°.

Óra végi

1. Mi az értékkészlete a $h(x) = x^2 - 6x + 2$ valós függvénynek?
2. 4 és 7 közül melyik eleme a $]4; \infty]$ intervallumnak?
3. Váltószögek.
4. Szögek osztályozása nagyság szerint.

85.

2018/03/01

Összevont óra: Kahoot – csapatverseny

1. Mivel egyenlő az alábbi kifejezés?

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot 2^{16} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{4} \cdot 3^{-2}$$

2. Hány részhalmaza van az első 11 pozitív egészből álló halmaznak, amelyben 3 páros és 2 páratlan szám van?
3. Tekintsük a $3x^2 + 6x - 24 = 0$ egyenletet. Mennyi az egyenlet gyökeinek a szorzata?
4. Hány olyan egész szám van, amelynek van 64-gyel egyenlő pozitív egész kitevőjű hatványa?
5. Egy 4-jegyű, 0-t nem tartalmazó PIN-kódot római számokkal írtunk le:

   IVIIIVI

   Összesen hányféle kód van, amit így írtunk volna le?
6. Egy kör alakú asztalnál 36 ember ül, mindenkinek a kezében van a sapkája. Sípszóra mindenki odaadja a tőle 8-cal jobbra ülőnek a sapkáját. Hányadik sípszóra kapja vissza mindenki a saját sapkáját?
7. Hányféle téglatest van, amelynek minden éle egész hosszúságú és minden él hossza legfeljebb 6?
8. Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben a számjegyek összege pontosan 6?
9. 5-tel osztva mennyi maradékot ad

$$2017^{2017} \cdot 2018^{2018}$$

10. Egy téglalap minden oldalát megnöveltük 1 cm-rel, így a területe 39 cm^2-rel nőtt. Ha ismét megnöveljük minden oldalát 1 cm-rel, akkor hány cm^2-rel nőtt tovább a területe?

86.

2018/03/05

Géptermi óra.

Egészrész ($[x]$), törtrész ($\{x\}$).

142. Ábrázold az

   (a) $f(x) = |x| + |x - 2|$
   (b) $g(x) = ||x - 2| - 2|$
   (c) $h(x) = |x + 1| + |x - 2| + |x - 3|$

   függvényeket. Mi az értékkészletük?

143. Ábrázold az

   (a) $f(x) = [x]$
   (b) $g(x) = [2x]$
   (c) $h(x) = \{x\}$
   (d) $j(x) = \left\{x - \frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2}$

   függvényeket. Mi az értékkészletük?

87–88.

2018/03/07

Összefoglalás:
$\binom{n}{k}$ fogalma, alkalmazása.
Függvény, értelmezési tartomány, értékkészlet.
Polinomok, másodfokú egyenletek: gyökök összege, szorzata, diszkrimináns.
Abszolútérték.
Függvénygrafikonok.
Egyenlőtlenségek ábrázolása koordináta-rendszerben.
Szöveges feladatok algebrai megoldása.

144. Ábrázold az $f(x) = |x - 3| + |x| + |x + 2|$ függvényt.

89.

2018/03/08

Dolgozat párban.

1. Ábrázold a következő függvényeket koordináta-rendszerben:
   (a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$;
   (b) $g(x) = x^2 - 4x - 3$;
   (c) $h(x) = 2 - x^2 + 6x$
   (d) $j(x) = ||x + 1| - 3|$
   (e) $k(x) = |x - 3| + |x + 1| + |x - 1|$

   Add meg a grafikonok „nevezetes pontjainak” koordinátáit.

2. Az 1. feladat függvényeit felhasználva döntsd el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis:
   (a) $f(3) > k(2)$;
   (b) $h(1) = j(9)$;
   (c) $|g(0)| \leq 3$

3. Írd fel az alábbi kifejezéseket zárójel nélkül (a szokásos polinomalakban):
   (a) $(x - 1)(2x + 3)(x + 6)$;
   (b) $(x^2 + 2x - 3)(3x + 2)$;
   (c) $(x - 2)(3x - 4) - (2x + 2)(x - 7)$.

4. A Skandináv lottón 35 számból $(1, 2, \ldots, 35)$ húznak ki 7-et. Hány olyan szelvény van, amelyen pontosan három darab 3-mal osztható szám van és pontosan egy 14-gyel osztható?

5. Hány $f : A \to B$ függvény van, ha $A = \{2, 4, \ldots, 12\}$ és $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$?
   (b) Hány olyan, amelyre $R_f = B$?
   (c) Hány olyan, amelyben minden 4-gyel osztható szám képe prím?

6. Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyekre igaz, hogy
   (a) $y > -1$ és $|x| \leq 1$;
   (b) $x > 1$ és $x + 2y > 2$

7. Add meg az összes n és k egész számot, amelyekre:
   $$2n^2 = 7k + 5.$$

8. Egy négyzet egyik oldalát először 10 cm-rel növeltük, míg a másikat 4 cm-rel csökkentettük. Másodszor ugyanennek a négyzetnek az egyik oldalát kétszeresére növeltük, a másik oldalát pedig 8 cm-rel csökkentettük. Meglepetésünkre a két kapott téglalap területe egyforma lett. Mekkora volt eredetileg a négyzet területe?

9. Vannak-e olyan s és r valós számok, amelyekre

$$r + s = 6 \text{ és}$$
$$2rs = 4.$$

90.

2018/03/12

Géptermi óra.

Szerkesztés GeoGebrában.
Geometriai fogalmak. Szögfelező, szakaszfelező merőleges.

91–92.

2018/03/14

Dolgozat feladatainak alapos megbeszélése

Gyakorló feladatok

1. Ábrázold a következő függvényeket koordináta-rendszerben:
   (a) $f_1(x) = -3x + 6$;
   (b) $f(x) = \frac{2}{3}x - 3$;
   (c) $g_1(x) = x^2 + 8x + 6$;
   (d) $g_2(x) = 3 - 4x + x^2$;
   (e) $h(x) = 5 - x^2 - 2x$
   (f) $j(x) = ||x - 1| - 5|$
   (g) $k_1(x) = |x - 2| + |x + 4|$
   (h) $k_2(x) = |x - 2| + |x + 1| + |x + 4|$

   Add meg a grafikonok „nevezetes pontjainak” koordinátáit.
2. A tuvalui lottón 22 számból $(1, 2, \dots, 22)$ húznak ki 6-ot. Hány olyan szelvény van, amelyen pontosan három darab 4-gyel osztható szám van és pontosan kettő prím?
3. Hány $f : A \to B$ függvény van, ha $A = \{1, 3, 5, \dots, 13\}$ és $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$?
   (b) Hány olyan, amelyben minden 3-mal osztható szám képe 3-mal osztható, a 3-mal nem osztható számok képe pedig nem osztható 3-mal?
4. Az $N = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 11^9$ számnak hány négyzetszám osztója van?
5. Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyekre igaz, hogy
   (a) $x > -3$ és $x + y > 2$
   (b) $|x| > 1$ és $|y| < 1$

(c) $y \leq 3$ és $|x| > 2$;

(d) $2x - y > 4$ és $x + y < 5$

6. Add meg az összes n és k egész számot, amelyekre:

$$3n^3 = 6k + 1.$$

7. Két valós szám összege és szorzata is 7. Mit kapunk, ha a nagyobb számból kivonjuk a kisebbet?

93.

2018/03/19

Gyakorló feladatok megbeszélése

94–95.

2018/03/21

Dolgozat párban.

1. Ábrázold a következő függvényeket koordináta-rendszerben:

   (a) $f(x) = 4 - \frac{3}{4}x$;

   (b) $g(x) = x^2 + 4x - 3$;

   (c) $h(x) = 2 - x^2 + 8x$

   (d) $j(x) = ||x| - 3| - 1$

   (e) $k(x) = |x - 2| + |x + 3| + |x|$

   Add meg a grafikonok „nevezetes pontjainak” koordinátáit.

2. Az 1. feladat függvényeit felhasználva döntsd el, hogy a következő állítások közül melyik igaz, melyik hamis:

   (a) $f(3) > g(2)$;

   (b) $h(-13) = j(-1)$;

   (c) $|k(-1)| \leq 3$

3. Írd fel az alábbi kifejezéseket zárójel nélkül (a szokásos polinomalakban):

   (a) $(x + 1)(3x + 2)(x + 4)$;

   (b) $(x^2 - 2x - 1)(2x + 1)$;

   (c) $(4x - 2)(x + 4) - (2x + 2)(x - 7)$.

4. Az ugandai lottón 25 számból $(1, 2, \dots, 25)$ húznak ki 6-ot. Hány olyan szelvény van,

   (a) amelyen pontosan három darab prím és pontosan 2 négyzetszám van megjelölve?

   (b) legalább két 5-tel osztható szám van megjelölve?

5. Hány $f : A \to B$ függvény van, ha $A = \{4, 8, 12, \dots, 28\}$ és $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

(b) Hány olyan, amelyre $R_f = B$?
(c) Hány olyan, amelyben minden 8-cal osztható szám képe prím?

6. Az $N = 2^7 \cdot 3^6 \cdot 11^3$ számnak hány
   (a) négyzetszám
   (b) 8-cal nem osztható

   osztója van?

7. Ábrázold derékszögű koordináta-rendszerben azokat a pontokat, amelyekre igaz, hogy
   (a) $y < 2$ és $|x| \geq 1$;
   (b) $|x| < 2$ és $x + 2y > 1$
   (c) $2x - y > 1$, $x + y < 2$ és $|y| < 1$.

8. Add meg az összes n és k egész számot, amelyekre:

$$n^3 + 2n + 1 = 8k + 3.$$

9. Egy téglalap egyik oldala kétszer akkora, mint a másik. Először a hosszabb oldalt 9-cel, a rövidebbet 2-vel csökkentettük. Utána az eredeti téglalap mindkét oldalát megnöveltük 2-vel, és így egy háromszor akkora területű téglalapot kaptunk, mint az első változtatás után.
   Mekkora az eredeti téglalap kerülete és területe?

10. Két valós szám összege és szorzata is 9. Mit kapunk, ha a nagyobb számból kivonjuk a kisebbet?

96.

2018/03/22

Váltószögek, egyállású szögek, csúcsszögek, merőleges szárú szögek.
A négyszög belső szögeinek összege 360°.
Szögek mérése, ívmérték, radián. Teljes szög: $360° = 2\pi$ radián.
Kör kerülete: $K_\circ = 2r\pi$, területe $T_\circ = r^2\pi$.
Gömb felszíne: $A_\odot = 4R^2\pi$, térfogata: $V_\odot = \frac{4R^3\pi}{3}$.

97–98.

2018/04/04

Dolgozat feladatainak megbeszélése.

Háromszög, háromszög-egyenlőtlenség.
Pitagorasz-tétel.

145. Mennyi egy hatszög belső szögeinek az összege? Bizonyítsd is be.

146. Egy háromszög egyik oldala 6, másik oldala 8 cm hosszú. A harmadik oldala is egész szám cm-ben mérve. Milyen hosszú lehet a harmadik oldal?

147. Igaz-e, hogy egy háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van?

Óra végi

1. Legyen $a(x) = x^3 - 6x + 2$. Add meg $a(3)$ értékét.
2. Rajzold le az $f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{3}{2}$ függvény grafikonját.
3. Egyállású szögek.
4. Mondd ki a háromszög-egyenlőtlenséget.

99.

2018/04/05

148. Van-e olyan kör, amely egy háromszög minden csúcsán keresztülhalad? Hogyan lehet megszerkeszteni?

149. Az $\{1, 2, 3 \dots, 20\}$ halmaznak hány olyan részhalmaza van, amelyben legalább két 3-mal osztható szám van?

Házi feladat: Pitagorasz-tétel bizonyítása.

100.

2018/04/09

Beszélgetés.

101–102.

2018/04/11

Háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög van.
Egy háromszög külső szöge ugyanakkora, mint a két, nem mellette fekvő szög összege.
Konvex, konkáv sokszög fogalma.
A szakaszfelező merőleges azon pontok mértani helye, amelyek a szakasz két végpontjától egyenlő távolságra vannak. Ez két dolgot jelent: 1) a szakaszfelező merőleges minden pontja egyenlő távolságra van a szakasz két végpontjától. 2) Ha egy pont egyenlő távolságra van a két végponttól, akkor rajta van a szakaszfelező merőlegesen.
Minden háromszögnek van körülírt köre.
A háromszög oldalainak szakaszfelező merőlegesei egy ponton mennek át, ez a körülírt kör középpontja.

150. Átlóbehúzó játék.

(a) 12-szögben;

(b) 13-szögben.

151. Egy szabályos 15-szög csúcsai hány

(a) átlót
(b) háromszöget
(c) szabályos háromszöget
(d) négyszöget

határoznak meg?

152. Egy sokszögnek 54 átlója van. Mekkora a belső szögeinek az összege?

Óra végi

1. Mondd ki a háromszög külső és belső szögeire vonatkozó tételt.
2. Hány átlója van egy konvex 20-szögnek?
3. $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $g(x) = 3x - 7$. Hogy viszonyul egymáshoz $f(2)$ és $g(3)$?
4. Szabályos 8-szög csúcsai hány háromszöget határoznak meg?

103.

2018/04/12

Monty Hall-paradoxon

153. Autó vagy kecske? (Monty Hall-paradoxon)

Házi feladat: Pitagorasz-tétel bizonyítása. 148b, 149cd, 150. Milyen négyszögeket ismertek?

104.

2018/04/16

Négyszögek: négyzet, téglalap, rombusz, paralelogramma.

154. Egy szabályos háromszög kerülete 6 cm. Mekkora a területe?

105–106.

2018/04/18

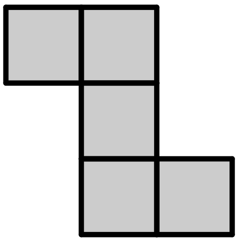
Trapéz, húrtrapéz. Deltoid.
Háromszög területe: $T_{\triangle} = \frac{a \cdot m_a}{2}$. (Héron-képlet: $T_{\triangle} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ahol $s = \frac{K}{2}$.)
Egy a oldalú szabályos háromszög magassága: $m = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, területe: $T = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

155. Ábrázold az alábbi függvényeket
   (a) $f(x) = [2x]$
   (b) $g(x) = \{3x\} - 1$

156. Egy téglalap egyik oldala 3 cm-rel nagyobb a másiknál, a területe pedig nagyobb, mint 40 cm^2. Mit tudunk mondani a téglalap kisebbik oldaláról?

157. Van-e olyan kör, ami egy háromszög minden oldalát érinti?

158. Az alábbi alakzatot két vágással három részre oszthatod. Meg tudod-e ezt úgy tenni, hogy a három részből egy nagy négyzetet lehessen kirakni?



Óra végi

1. Deltoid definíciója.
2. Húrtrapéz definíciója.
3. Grafikon: $f(x) = \{x\} - 2$.
4. Hogyan kapjuk meg egy háromszög körülírt körének középpontját?

107.

2018/04/19

Ismétlés: négyzet, téglalap, paralelogramma területe.
Trapéz területe: $T = \frac{(a+c)\cdot m}{2}$

159. Hogyan lehet meghatározni egy trapéz területét?

160. Ábrázold az alábbi függvényeket

   (a) $f(x) = \frac{1}{x}$

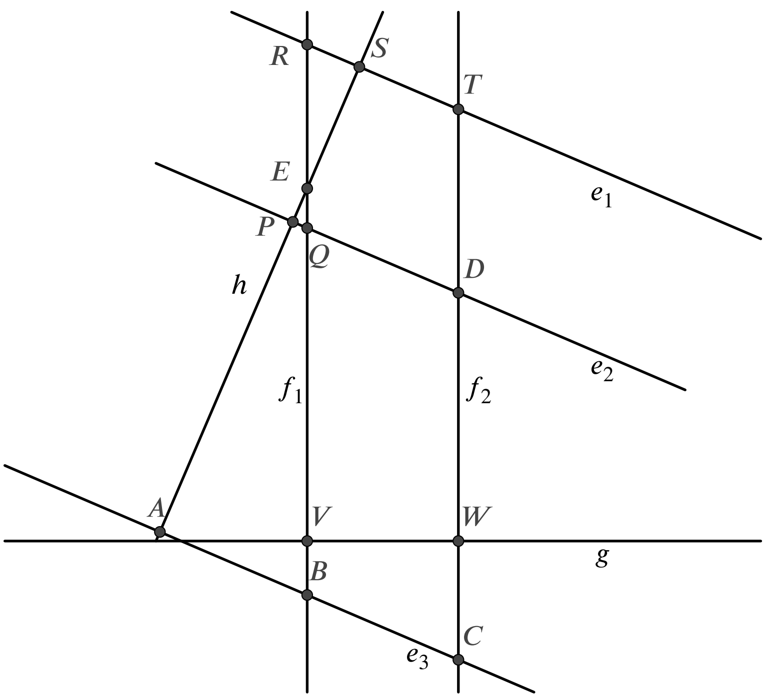
   (b) $g(x) = \frac{1}{x-3}$

161. Egy számból kivontunk 3-at, majd vettük az így kapott szám abszolútértékét, majd ismét kivontunk hármat. Így egy 2-nél kisebb számot kaptunk. Mi lehetett az eredeti szám?

108.

2018/04/23

162. Az ábrán az $e_1 \parallel e_2 \parallel e_3$ és $f_1 \parallel f_2$, illetve $h \perp e_3$ és $g \perp f_2$. Tudjuk, hogy $BQD\sphericalangle = 60^o$. Határozd meg minél több szög nagyságát az ábrán.



163. Egy 1 km-es kötelet kifeszítve lefektettünk a földre és rögzítettük a végpontjait. Ezt követően középen megtoldottuk 1 m-rel és a felezőpontjánál felemeltük, amennyire csak tudtuk. Átfér-e a kötél alatt egy átlagos felnőtt?

109–110.

2018/04/25

A $\sqrt{x}$ definíciója.
Derékszögű háromszög körülírt körének középpontja az átfogó felezőpontja.

164. Ábrázold az alábbi függvényeket
   (a) $f(x) = \frac{2}{x+1} - 3.$
   (b) $g(x) = 2 + \frac{1}{1-x}.$

165. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 12, a másik 16 cm hosszú. Mekkora a körülírt kör sugara? Mekkora a beírt kör sugara?

166. Oldd meg a következő egyenlőtlenséget: $20 - x^2 - 2x \geq 5.$

167. Hány
   (a) páratlan
   (b) 5-tel osztható
   (c) 12-vel nem osztható

   osztója van a 11250-nek?

168. Ábrázold az alábbi függvényeket
   (a) $f(x) = \sqrt{x}.$
   (b) $g(x) = \sqrt{x+4} - 2.$

Óra végi

1. Mit nevezünk trapéznak?
2. Hány páratlan osztója van 9000-nek?
3. $\sqrt{x}$ definíciója.
4. Mekkora egy 22-szög belső szögeinek az összege?

Házi feladat: 164b., 166., 167., 168.

111.

2018/04/26

Jelölési konvenciók a háromszögben:

- Oldalak: a, b, c.
- A szögek (a megfelelő oldalakkal szemköztiek): α, β, γ.
- Terület: T, kerület: K. A kerülete fele: s.
- Beírt kör sugara: r, körülírt kör sugara R.

$T_{\triangle} = r \cdot s$, ahol $s = \frac{K}{2}$.

169. Egy szabályos háromszög kerülete 12 cm. Mekkora a beírt kör sugara?
170. Oldd meg a $\sqrt{x+4} > 2$ egyenlőtlenséget.
171. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelynek pontosan 28 darab 25-tel osztható pozitív osztója van?

Házi feladat: 169., 170., 171.

112–113.

2018/05/02

Thalész-tétel és a megfordítása.

172. Rajzolj a füzetedbe egy szakaszt. Vegyél fel 12–15 pontot a síkban, és vizsgáld meg, hogy mely pontokból látszik a szakasz hegyes-, mely pontokból tompa-, és mely pontokból derékszögben. Milyen sejtést tudsz megfogalmazni?
173. (a) $|x| - 1 < 2$.
   (b) $|x - 1| \geq 2$.
   (c) $||x| - 1| - 2 < 3$.

Házi feladat: 171., 172., 173.

114.

2018/05/03

Thalész-tétel bizonyítása.

Házi feladat: 171., 173.

115–116.

2018/05/09

Kör részei: átmérő, húr, szelő, körcikk, körszelet, körgyűrű.
Kocka lapátlója, testátlója.

174. Milyen hosszú egy egységkocka testátlója?

175. Mekkora egy 2 cm sugarú kör

   (a) 90^o-os
   (b) 45^o-os
   (c) 60^o-os

   körcikkének a területe és a kerülete?

   (d) Mekkora ugyanennek a körnek az 1 cm „vastag”, külső körgyűrűjének a kerülete és a területe?

176. Egy egyenlőszárú derékszögű háromszög alapja 2 cm-rel hosszabb a befogóknál. Mekkora a kerülete?

177. Ábrázold a következő függvényeket:

   (a) $f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$
   (b) $g(x) = \frac{x-2}{x-3}$

Óra végi

1. Mit nevezünk egy kör húrjának?
2. $|x-3| \geq 2$.
3. Bizonyítsd be a Thalész-tételt.

Házi feladat: 175c, 177.

117.

2018/05/10

Az α nyílásszögű körcikk területe és kerülete.

178. $\frac{6-2x}{x+5} \leq 0$
179. Hány olyan szám van, amelynek nincs 10-nél nagyobb prímosztója, és 9-cel osztható osztóinak száma pontosan 10?
180. Mekkora egy 3 cm sugarú körbe írható hatszög területe és kerülete?

Házi feladat: 178., 179., 180.

118.

2018/05/14

181. Ossz fel egy 6×4-es téglalapot a rácsvonalak mentén 3 részre úgy, hogy mindegyik rész
   (a) hatszög
   (b) nyolcszög
   (c) tízszög

   legyen!
182. $\frac{4x-1}{x+2} > 2$
183. Hány olyan kör van, amely egy háromszög minden oldalegyenesét érinti?

Házi feladat: 179. befejezés, 181., 182., 183.

119–120.

2018/05/16

Háromszög hozzáírt körei.

184. Egy szabályos háromszög beírt körének sugara 2. Mekkora a területe?
185. Béla 3 évvel ezelőtt háromszor annyi idős volt, mint András. Három év múlva pedig éppen kétszer annyi lesz. Hány évesek most?
186. $||x-1|-2|-3 \geq 0.$

Óra végi

1. Mekkora egy 2 sugarú, 120°-os nyílásszögű körcikk kerülete és területe?
2. Az órán elhangzott egy állítás a külső

Házi feladat: 184., 185., 186.

121.

2018/05/17

187. Ábrázold a következő függvények grafikonját:

 (a) $f(x) = \frac{2}{x+3} + 1$

 (b) $g(x) = \frac{2x-1}{x-1}$

188. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 10. Ha a számjegyeket felcseréljük, akkor 36-tal nagyobb számot kapunk. Melyik volt az eredeti szám?

189. Egy háromjegyű számból úgy képeztünk egy új számot, hogy fordított sorrendben leírtuk a számjegyeit. Az eredeti számból kivontuk a kapott számot. Így 180-at kaptunk. Melyik volt az eredeti szám?

Házi feladat: 187., 188., 189.

122–123.

2018/05/23

190. (a)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ 3x - 1 &= 4y \end{aligned}$$

 (b)

$$\begin{aligned} x + 3y &= 5 \\ 6y - 10 &= 2x \end{aligned}$$

 (c)

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ 3y - 1 &= -6x \end{aligned}$$

191. Hány olyan pozitív egész van, amely közös osztója a 28224-nek és 164640-nek?

192. $x^2 - 4x - 4 < |x - 2| - 2$

193. Adott egy k kör és egy P pont. Szerkessz érintőt a körhöz, ami illeszkedik P-re.

Házi feladat: 192., 193.

Óra végi

1.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ y - 3x &= 5 \end{aligned}$$

2. Ábrázold az $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ függvényt.

124.

2018/05/24

Módszerek kétismeretlenes egyenletrendszer megoldására.
Kör érintőjének szerkesztése.

194. Ábrázold az $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ függvényt.

195. Oldd meg az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ 15 + 9y &= 6x \end{aligned}$$

Házi feladat: 194., 195.

125.

2018/05/28

Egyenlő együtthatók módszere

196. Hány olyan H részhalmaza van az $\{1, 2, \ldots, 10\}$ halmaznak, amelyre igaz, hogy
   (a) $7 \in H$;
   (b) $1 \in H$ és $2 \in H$;
   (c) $1 \in H$ vagy $2 \in H$?

197. Ha András adna a zsebében lévő pénzből 25 Ft-t Bélának, akkor Bélának 5 Ft-tal több lenne, mint az Andrásnál maradt pénz kétszerese. Ha viszont Béla adna 40 Ft-t Andrásnak, akkor mindkettőjüknek ugyanannyi pénze lenne. Mennyi pénzük van?

198. Ábrázold az $f(x) = \frac{3x-7}{x-3}$ függvényt.

Házi feladat: 196c., 197., 198.

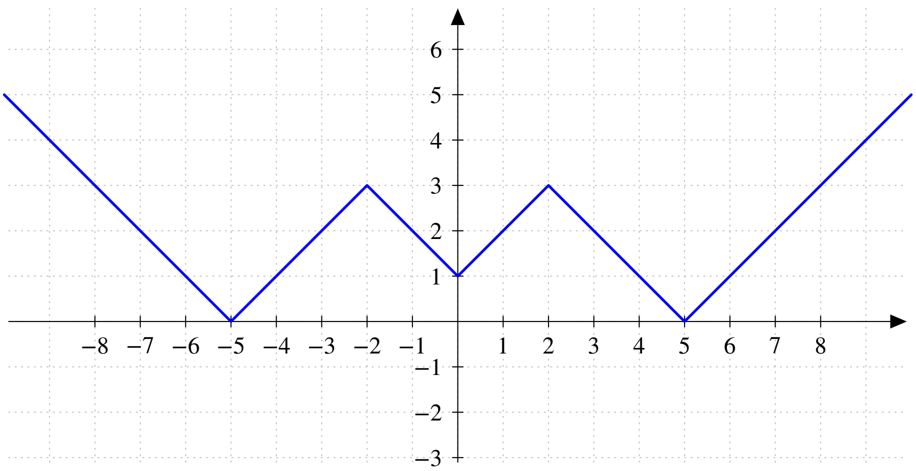
126–127.

2018/05/30

Derékszögű háromszögben: $2r = a + b - c$.

199. Egy deltoid két szögének nagysága: 30º és 50º. Mekkora a másik két szöge?

200. (Robi feladata) Add meg zárt képlettel azt a függvényt, aminek az ábrán láthatod a grafikonját:



(b) Rajzoljuk be a fenti koordináta-rendszerbe a $g(x) = -\frac{1}{3}x + 1$ függvény grafikonját. Számítsd ki az ábrán keletkező legnagyobb háromszög területét.

201. Derékszögű háromszög egyik befogója 6, átfogója 10 hosszú. Mekkora a körülírt és a beírt kör sugara?

202. Ábrázold a következő függvényeket:

(a) $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$;

(b) $g(x) = \left|\frac{x-1}{x-2}\right|$

Házi feladat: 202b.

Óra végi

1. Írd le, hogy hogyan kell külső pontból körhöz érintőt szerkeszteni.
2. Ábrázold: $\frac{1}{x+3}$.
3. Derékszögű háromszög egyik befogója 4, a másik 5. Mekkora R?

128.

2018/05/31

203. Van-e olyan trapéz, amelyben a belső szögek aránya $1 : 2 : 4 : 6$?

204. $3x + 6 > 2x^2$

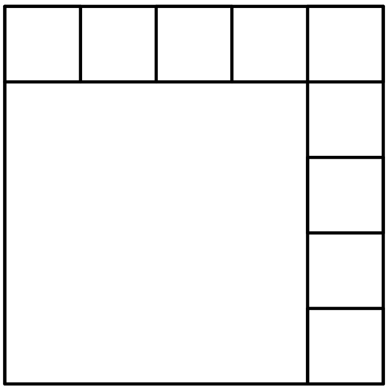
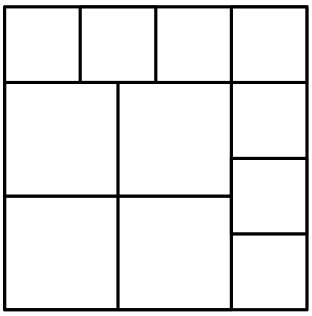
205. Adott egy 4 cm sugarú kör. Szerkeszd meg azoknak a pontoknak a helyét, ahonnan 12 cm hosszú érintőt lehet húzni a körhöz.

206. $\left|x^2 - 4x - 2\right| < ||x - 2| - 4|$.

Házi feladat: 200., 204., 205., 206.

Megoldások

1. Megbeszéltük, hogy a négyzetösszeg paritása megegyezik a prímek számának paritásával. Ennek az az oka, hogy egy 10-nél nagyobb prím mindenképpen páratlan, és páratlan szám négyzete is páratlan. (Egy szorzat pontosan akkor páros, ha legalább egy tényezője páros.)
   Időközben megtanultuk, hogy a páratlan számok négyzetének 8-as maradéka mindig 1 (ld. 32. feladat). Egy 10-nél nagyobb prímszám mindig páratlan, tehát a négyzete mindig 1 maradékot ad 8-cal osztva. Ebből viszont következik, hogy a prímszámok négyzetének az összege annyi maradékot ad 8-cal osztva, ahány prímet eredetileg választottunk. Ha tehát kiszámítjuk a kapott összeg 8-as maradékát, akkor megkapjuk a prímek számát.
   Érdemes megjegyezni, hogy a trükköt 10-nél nagyobb prímek helyett páratlan számokkal is csinálhattuk volna, és azt is megengedhettük volna, hogy legfeljebb 8 számot válasszanak az elején.

2. 2, 3 és 5 kivételével minden pozitív egész n esetén fel lehet bontani a négyzetet n négyzetre.
   (a) Egy lehetséges megoldás:
   
   (b) Egy lehetséges megoldás:
   
   (c) Az a) részben látott módszerrel minden olyan páros n-re fel tudjuk bontani a négyzetet, ami legalább 4. (Ha például 28 négyzetre akarjuk felbontani, akkor a négyzet oldalát felosztjuk 14 egyenlő részre, ilyen oldalhosszúságú négyzetet elhelyezünk a felső és a jobb oldalánál a négyzetnek, és a kimaradó rész lesz a 28-adik négyzet.) A b) résznél látott módszerrel pedig minden legalább 7 páratlan számra meg tudjuk oldani a felbontást. Először felbontjuk a négyzetet a szükségesnél 3-mal kevesebb részre, ami páros, tehát ezt már meg tudjuk tenni. Majd egy tetszőleges meglévő négyzetet felosztunk 4 részre, amitől 3-mal nő a részek száma.
   Mivel minden olyan páros n-re, ami legalább 4, és minden olyan páratlan n-re, ami legalább 7 megadtunk egy felbontást, ezért 2, 3 és 5 kivételével minden n-re megoldottuk a feladatot. 2-re, 3-ra és 5-re nem lehet felbontani, de ezeket nem bizonyítjuk.

3. Ha a kiindulási szám osztható 4-gyel, akkor átengedjük a kezdést az ellenfélnek, egyébként mi kezdünk. Minden lépésben egy 4-gyel osztható számra lépünk. Ha ezt megtesszük, akkor nyerni fogunk. Ha egy szám nem osztható 4-gyel, akkor 1-gyel, 2-vel vagy 3-mal több egy 4-gyel oszthatónál. Emiatt ebben az esetben a megengedett lépések valamelyikével egy 4-gyel osztható számra tudunk lépni. Ha a szám 4-gyel osztható, akkor az ellenfél kezd, és mivel legfeljebb 3-mal csökkenthet, ezért mindenképpen egy 4-gyel nem osztható számra fog lépni. Ezek miatt, minden lépésben tudunk 4-gyel osztható számra lépni, az ellenfél pedig nem. Mivel a 0 osztható 4-gyel, ezért mi fogunk tudni a 0-ra lépni, és így nyerni.

   (b) Ha legfeljebb 6-tal lehet csökkenteni, akkor fenti gondolatmenethez hasonlóan a 7-tel osztható számokra kell lépnünk, hogy nyerjünk. (Ha a kiinduló szám osztható 7-tel, akkor átengedjük a kezdést, egyébként mi kezdünk.)

4. Az első kérdés előtt két 4-es csoportra osztjuk az ajtókat (pl. 1, 2, 3, A, vagy a baloldalról nézve páros helyeken álló ajtók), és azt kérdezzük meg, hogy ezek között van-e a keresett ajtó. A választól függetlenül 4 ajtó maradt versenyben. Ezeket tetszőleges módon két darab 2 ajtót tartalmazó csoportra bontjuk, és rákérdezünk az egyikre. A második választ követően 2 ajtó jön szóba, és azok közül mindenképpen ki tudjuk választani egy kérdéssel, hogy melyik mögött van a király. (A feladat két kérdéssel nem oldható meg szerencse nélkül, ennek bizonyítását később beszéljük meg.)

5. Mindenkinek két szülője van. Minden szülőnek szintén két szülője, így nagyszülőből már $2 \cdot 2 = 4$ van. Minden nagyszülőnek is két szülője van, vagyis a dédszülők száma $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. És minden dédszülőnek két szülője van, akik az ükszülők. Emiatt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ ükszülőnk van.
   Az n-edik szinten lévő szülők számát pedig úgy kapjuk meg, hogy a 2-t n-szer összeszorozzuk önmagával. (A valóságban egy idő után ezek az emberek már nem lesznek mind különbözőek.)

6. Az első két egyenesnek legfeljebb 1 metszéspontja lehet. Ha a harmadik metszi az eddigi kettőt, akkor a metszéspontok száma 2-vel nő. Ha a negyedik metsz minden eddigi egyenest, akkor 3-mal nő a metszéspontok száma. Ez folytatva összesen

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45$$

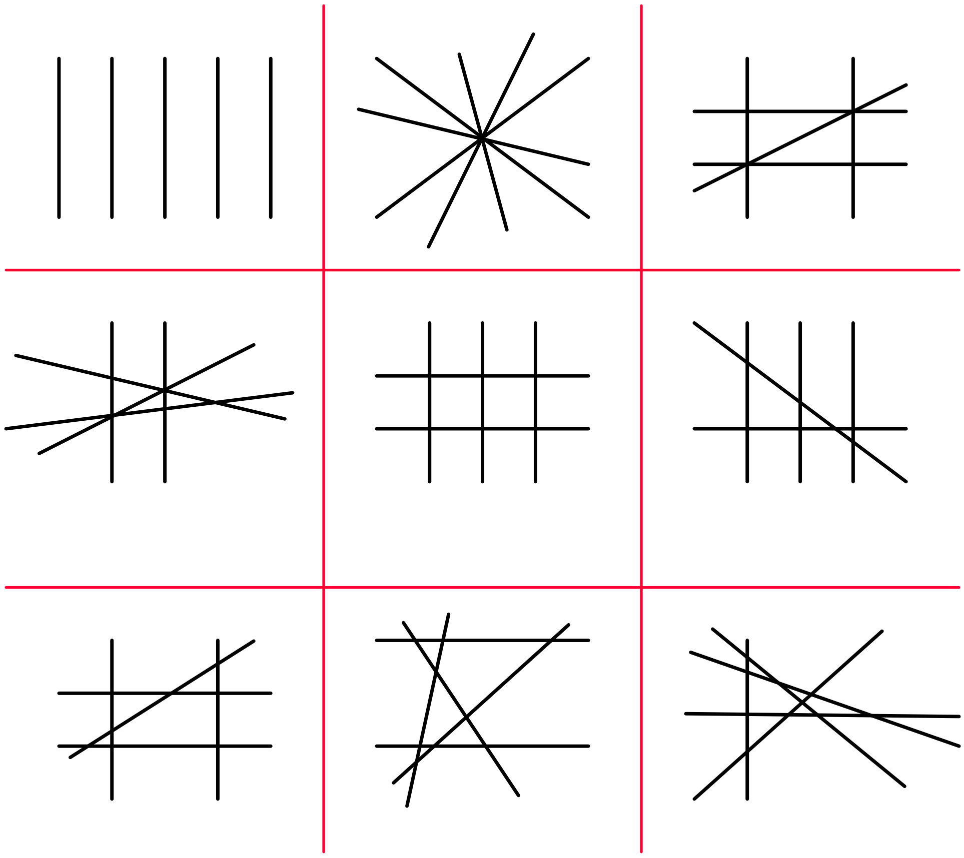
   metszéspontot kaphatunk. Ezt meg is lehet valósítani.

7. Hasonlóan az előző feladathoz, az első két egyenesnek legfeljebb egy metszéspontja lehet, a harmadik legfeljebb 2 pontban metszi az első kettőt, a negyedik legfeljebb 3 pontban az első hármat és így tovább, a századik legfeljebb 99 pontban metszi az első 99-et. Tehát legfeljebb

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 99 = 4950$$

   metszéspontjuk lehet.

8. 5 egyenesnek $0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ metszéspontja lehet. Íme példák az esetekre:



Annak a bizonyítása, hogy 2 és 3 nem lehet egy kicsit nehezebb.
Miért nem lehet 10-nél több? Mert 5 egyenesnek legfeljebb $1+2+3+4+5=10$ metszéspontja lehet. (Ld. előző feladatok.)

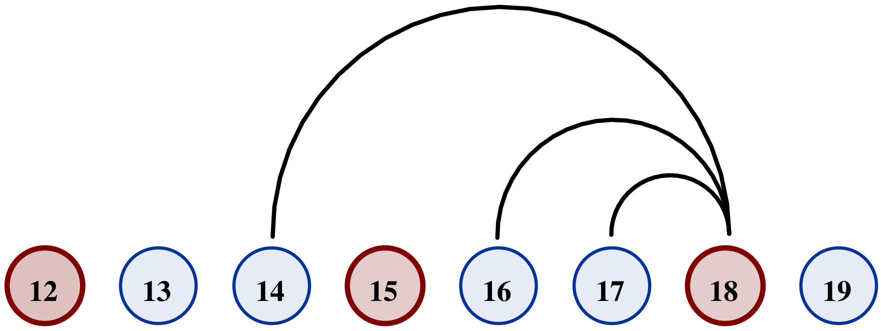
9. (a) Ha 40-re akarunk lépni, akkor nekünk kell a 19-re lépni. Innen ugyanis nem tud az ellenfelünk a 40-re lépni, de bármi lép, mit egy lépésben elérjük a 40-et. Akkor mostantól olyan a játék, mintha 19 lenne a cél. Ehhez a 9-re kell lépnünk, hiszen onnan az ellenfél nem éri el a 19-et, de bármit lép, mi már igen. Akkor tehát 9 a cél, amihez a 4-re kell lépnünk az előzőekhez hasonlóan. Ha 4-re akarunk lépni, akkor át kell engednünk a kezdést, hiszen az első lépésben kötelező 2-re lépni, de onnan azonnal elérhető a 4.

   (b) Az előzőekhez hasonlóan, ha el akarjuk érni az 50-et, akkor nekünk kell a 24-re lépnünk, amihez nekünk kell a 11-re lépni, amihez nekünk kell az 5-re lépni, amihez nekünk kell kezdeni és a 2-re lépni.

   (c) Az általános módszer is teljesen hasonlóan működik.

10. Tudjuk, hogy 50 darab pozitív páratlan szám van 100-ig. Ezek közül nem felelnek meg azok, amik végződik 7-re $(7, 17, 27, \ldots, 97)$, és 5 kezdődik 7-tel $(71, 73, 75, 77, 79)$. De a 77-et így kétszer vontuk le, valójában csak 14 nem megfelelő páratlan szám van. A halmaznak tehát legfeljebb 36 eleme lehet. A válasz tehát: $0, 1, 2, \ldots, 36$.

11. Ha a kiinduló szám osztható 3-mal, akkor átengedjük a kezdést, egyébként mi kezdünk.



Mivel lehet 1-et és 2-t is lépni lefelé, ezért egy 3-mal nem osztható számról mindig tudunk egy 3-mal oszthatóra lépni, hisz az 1-gyel és a 2-vel kisebb számok valamelyike biztosan osztható 3-mal.
Ha pedig egy 3-mal osztható számról ő fog lépni, akkor sosem tud 3-mal oszthatóra lépni. (Ld. ábra.)
Emiatt mi fogunk a 3-mal osztható számokra lépni, így a 0-ra is.
Megjegyzés: vannak olyan helyzetek, ahonnan több nyerő lépés is van. Ha például 16-on állunk, akkor 1-et és 4-et csökkentve is nyerőt lépünk.

12. Egy 10 elemű halmaznak elég sok részhalmaza van, első ránézésre nem látszik, hogy összesen mennyi is. Ilyen esetekben nagyon hasznos, ha megnézzük, hogy a kérdésre mi a válasz „kicsiben”? Hány részhalmaza van mondjuk egy 2 elemű halmaznak? Ha a halmaz az $\{1,2\}$, akkor jól látszik, hogy 4 részhalmaz van: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1;2\}$. Mi történik, ha bővítjük egy új elemmel a halmazt? (Vagyis a halmazunk most mondjuk az $\{1;2;3\}$.) Ekkor az előbbi 4 halmaz továbbra is megfelel, ezek is részhalmazai a bővebb halmaznak, de vannak újak is. Melyek ezek? Azok, amelyekben benne van az új elem: $\{3\}, \{1;3\}, \{2;3\}, \{1;2;3\}$. Ezek pedig csak úgy keletkezhetnek, ha egy már meglévő részhalmazhoz hozzátesszük az új elemet, vagyis a 3-at. Emiatt világos, hogy most 8 részhalmazunk van. Mi történik, ha még egy elemet (mondjuk a 4-et) hozzávesszük az eredeti halmazhoz? Az eddigi 8 részhalmaz továbbra is megfelelő, de kapunk 8 újat is, ha az eddigi összes halmazt bővítjük a 4-gyel. Vagyis most 16 részhalmaz van. Minden lépésben, mikor egy elemmel bővítünk duplázódik a részhalmazok száma. Így 5 elem esetén 32, 6-nál 64, 7-nél 128, 8-nál 256, 9-nél 512, 10-nél pedig 1024.
Ha a sorozat elejét megnézzük, akkor ott is rendben van a „szabály”, 0 elemű halmaz esetén (üres halmaz) 1 részhalmaz van, 1 elemű esetén pedig 2.
Általánosságban elmondhatjuk, hogy egy n elemű halmaznak 2^n részhalmaza van.

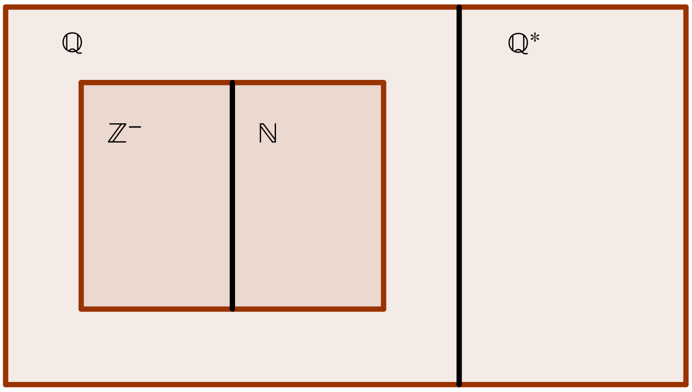
13. Néhány lépést elvégezve látjuk, hogy a részek száma: $11, 14, 17, 20, \ldots$ Minden lépésben 3-mal nő a részek száma, hiszen 4 új négyzetet kapunk, az eredeti négyzetet (amit felnégyeltünk) elveszítjük. Ezek a számok tehát $3n+2$, vagy $3k-1$ alakúak.

14. (a) Minden elem alkot egy megfelelő halmazt, tehát az $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{10\}$ halmazok felelnek meg a feltételnek.

    (b) Az első elemet megválaszthatjuk 10-féleképpen. Minden kiválasztott első elem mellé 9 második elemet választhatunk, hiszen az elsőt már nem. Azonban így kétszer számoltuk meg pl. az $\{5,8\}$ halmazt, hiszen egyszer akkor, amikor az 5 volt az elsőként, a 8 a másodikként választott elem, másodszor pedig akkor, amikor a 8-at először, az 5-öt másodszor választottuk. Mivel minden halmazt pontosan 2-szer számoltunk ezzel a módszerrel, ezért a megfelelő halmazok száma: $\frac{9 \cdot 10}{2} = 45$.

    (c) Ha egy 10 elemű halmaznak tekintjük egy 8 elemű részhalmazát, akkor az eredeti halmazból 2 elem nincs benne a részhalmazban. Vagyis minden ilyen részhalmaznak a komplementere 2 elemű. De a komplementer meghatározza az eredeti halmazt, így éppen annyi 8 elemű halmaz van, mint 2 elemű. Azt pedig már a b) részben megszámoltuk. A válasz tehát 45.
    Ennek kapcsán azt is észrevettük, hogy 3 elemű részhalmaz ugyanannyi van, mint 7 elemű, és a 4 elemű részhalmazok száma megegyezik a 6 elemű részhalmazok számával.

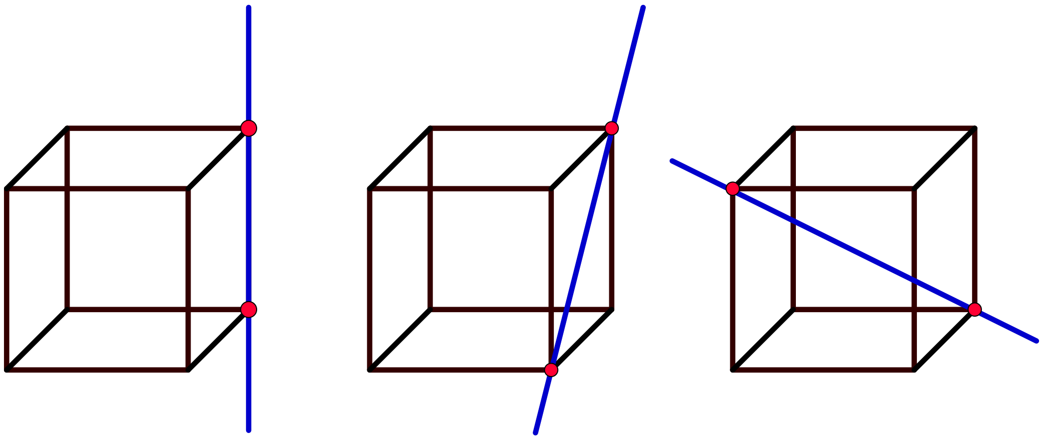
15. Egy lehetséges ábrázolás:



A legnagyobb téglalap a valós számokat ($\mathbb{R}$) jelöli, a negatív egészek ($\mathbb{Z}^-$) és a természetes számok ($\mathbb{N}$) együtt alkotják az egész számokat ($\mathbb{Z}$).

16. Az nyer, aki 1-et mond, hiszen onnan nincs semmi más lehetősége az ellenfélnek, minthogy 0-t mondjon, amivel viszont veszít.
Ha viszont 1 a cél, akkor ez ugyanaz a játék, mintha a 0-ra kellene lépni, csak minden el van tolva 1-gyel. Az előző változatban a 6 többszöröseire kellett lépnünk, ha nyerni akartunk. Mivel most mindent el kell tolni eggyel, ezért most a 6-tal osztva 1 maradékot adó számokat kell mondani.
Ha pl. 35-ről indul a játék, akkor 31-re kell lépni. Ha viszont 43-ről, akkor át kell engedni a kezdést, bármit lép az ellenfél, nekünk 37-et kell mondani stb.

17. A kocka bármely két pontja meghatároz egy ilyen egyenest. Mivel semelyik 3 csúcs nincs egy egyenesen, ezért pontosan annyi megfelelő egyenes van, ahányféleképpen két csúcsot ki tudunk választani. Az első csúcsot 8-féleképpen tudjuk kiválasztani (hiszen a kockának 8 csúcsa van), a másodikat pedig 7-féleképpen (hiszen az elsőként választott csúcsot már nem választhatjuk). A pontok sorrendje azonban nem számít, így összesen $\frac{8\cdot 7}{2} = 28$ ilyen egyenes van.
Vegyük észre, hogy ez a feladat nagyon hasonlít a 14b) feladatra. Itt a halmaz 8 elemű (a csúcsok halmaza) és azt kell megszámolnunk, hogy hány kételemű részhalmaz van, hiszen azok meghatároznak egy-egy egyenest.
Megszámolhatjuk úgy is az egyeneseket, hogy azok hogyan viszonyulnak a kockához. A kockának van 12 éle, ezek egyenesei előállnak. Ha a két pont egy adott oldallap két átellenes csúcsa, akkor a lapátlók egyenesét kapjuk. Mivel 6 lapja van a kockának, és minden lapon két átló, ezért $6 \cdot 2 = 12$ ilyen egyenes van. Ezen kívül választhatjuk még úgy a két csúcsot, hogy azoknak nincs közös lapja. Ekkor a lapátlók egyenesét kapjuk. Ilyenből 4 van. Összesen tehát $12 + 12 + 4 = 28$ egyenest kaptunk.



18. Az első szakaszon 2 út közül választhatunk. Akármelyiket választottuk, négyféleképpen folytathatjuk az utunkat. Az első két szakaszt tehát $2 \cdot 4$-féleképpen tehetjük meg. Mind a 8 lehetséges utat háromféleképpen folytatjuk a harmadik a szakaszon, ezért az első 3 részt $2 \cdot 4 \cdot 3$ különböző módon tehetjük meg. És ezek mindegyike folytatható 5-féleképpen az utolsó szakaszon, vagyis összesen $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ különböző út van A-ból B-be.
(Ez a módszert nevezzük **szorzási szabály**nak, vagyis azt, hogy független döntések esetén a lehetőségek számát összeszorozva kapjuk meg az eredményt.)

19. Ha egy számból kivonjuk a számjegyeinek az összegét, akkor egy 9-cel osztható számot kapunk. Ennek az az oka, hogy egy szám 9-es maradéka megegyezik a számjegyei összegének 9-es maradékával.
A számjegyek összegének kivonása után tehát egy 9-cel osztható számot kapunk. Amikor a szám elé írunk egy számjegyet, akkor éppen a számjegy értékével növekszik a 9-es maradék. (Hiszen eddig 9-cel osztható volt a számjegyek összege is, most pedig a hozzáadott számjeggyel nőtt.) A számjegyek megkeverése után a számjegyek összege nem változik, így a számjegyek összegének 9-es maradéka továbbra is megmondja, hogy melyik számjegyet tettük hozzá az eredeti számhoz.
Vagyis a trükk a következőképpen hajtandó végre. A kapott szám számjegyeinek összegét kiszámítjuk, és vesszük ennek a 9-es maradékát. Ez a hozzáadott számjegy. Figyelni kell arra, hogy ha az összeg osztható 9-cel, akkor a maradék 0, de 0-t nem tehettünk a szám elejére, tehát ilyenkor a helyes válasz a 9.
Zsófi módszere: a kapott szám számjegyeit összeadja, majd az így kapott számét is, és ezt addig folytatja, amíg egyjegyű számot kap. Ez a szám lesz a hozzáadott számjegy. (A fentiek miatt Zsófi módszere tökéletes, hiszen minden lépésben egy olyan számot kap, amelynek a 9-es maradéka megegyezik az eredeti szám 9-es maradékával.)

20. Válasszuk azt, hogy mi kezdünk és lépjünk a 3-ra. Ekkor az ellenfél 4 és 9 között léphet bármit. Akármi is a lépése, mi tudunk a 10-re lépni. Tegyük ezt. Ekkor az ellenfél 11 és 30 között tud mezőt választani. Bármit is választ, mi tudunk a 33-ra lépni. Ekkor az ellenfél lehetőségei 34-től 99-ig terjednek. Bármit is lép, mi meg tudjuk nyerni a játékot, hiszen 100-ra tudunk lépni.

21. Osszuk fel az ábrát 3 részre, minden második elágazásnál. Az kiinduló pont és a második elágazás közötti részt 10-féleképpen tudjuk megtenni. Ha ugyanis nem a „hosszú" úton megyünk, akkor $3 \cdot 3 = 9$ lehetőség van, és ehhez jön még az az egy, hogy a „hosszú" utat választjuk. Ezt mindhárom részre elmondhatjuk, és ezeken a részeken egymástól függetlenül dönthetünk, hogy hogyan haladunk. Ezért alkalmazhatjuk a szorzási szabályt, így az eredmény: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$.

22. (a) Mivel $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, vagyis minden természetes szám egész szám, ezért a két halmaz metszete a szűkebb halmaz, vagyis $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$.

(b) Mivel $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$, ezért $\overline{\mathbb{Q}^*} = \mathbb{Q}$.

(c) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \emptyset$, hiszen $N \subset \mathbb{Z}$. Vagyis $(\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}) \cup \mathbb{Z}^- = \emptyset \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}^-$.

23. A szám első számjegye 5-féle lehet. Mivel számjegyet pontosan egyszer kell felhasználnunk, ezért a szám második számjegye már nem lehet ugyanaz, mint az első, vagyis itt már csak 4 lehetőségünk van. A harmadik számjegynek az első két számjegy mindegyikétől különböznie kell, így az már csak 3 féle lehet. Végül az utolsó számjegyre már csak egy lehetőség marad. Ezek a választások függetlenek egymástól, ezért a szorzási szabály alapján a lehetőségek szám a a szorzatuk.
Vagyis: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$.

24. (a) Az utolsó számjegynek párosnak kell lennie, így arra két lehetőségünk van: 2 vagy 4. A többi helyen bármi lehet, de minden számjegyet csak egyszer használhatunk, így az előző feladat megoldása alapján $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$ páros szám van közöttük.

(b) Mivel minden ilyen számnak $1+2+3+4+5 = 15$ a számjegyeinek az összege, így minden ilyen szám osztható 3-mal. Vagyis a válasz: 120.

(c) Az utolsó két számjegyből álló számnak oszthatónak kell lennie 4-gyel. Ezekből a számjegyekből 4-féleképpen tudunk 4-gyel osztható számot előállítani: 12, 24, 32, 52. Bármelyiket tesszük az utolsó két számjegy helyére, akkor a szám osztható lesz 4-gyel. Minden esetben 3 számjegy maradt, azokat $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sorrendben tehetjük a szám elejére. Összesen tehát 24 ilyen szám van.

(d) Az utolsó számjegynek 5-nek kell lennie. Az első 4 viszont bármi lehet, ezért a megoldás: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

(e) A számnak 2-vel és 3-mal kell oszthatónak lennie, hogy osztható legyen 6-tal. Azt tudjuk, hogy minden ilyen szám osztható 3-mal, és pontosan 48 osztható 2-vel. Ekkor tehát pontosan ez a 48 szám osztható 6-tal.

(f) Mivel a számjegyek összege 15, ezért egyetlen szám sem osztható ezek közül 9-cel.

25. Legyen $a = 7n + 5$, és $b = 7k + 3$.

(a) Ekkor $a + b = (7n + 5) + (7k + 3) = 7n + 7k + 8 = 7(n + k) + 8 = 7(n + k + 1) + 1$. Amiből jól látszik, hogy a maradék 1.

(b) Az előzőekhez hasonlóan: $a - b = (7n + 5) - (7k + 3) = 7n - 7k + 2 = 7(n - k) + 2$. Vagyis a maradék 2.

(c) A maradék -2, azaz 5.

(d) $a \cdot b = (7n+5) \cdot (7k+3) = 7n \cdot 7k + 3 \cdot 7n + 5 \cdot 7k + 3 \cdot 5 = 49nk + 21n + 35k + 15 = 7(7nk + 3n + 5k) + 15$. Vagyis a maradék 15, azaz 1.

Ezt a módszert általánosan végiggondolva láthatjuk, hogy két szám összegének, különbségének, illetve szorzatának osztási maradéka, a maradékok összege, különbsége, illetve szorzata.

26. Ha egy szám számjegyeinek az összege 5, akkor a 3-as maradéka 2. Egy négyzetszám 3-as maradéka azonban nem lehet 2. Egy szám 3-as maradéka 0, 1 vagy 2. A négyzetreemelés azt jelenti, hogy a számot önmagával megszorozzuk. Mivel tudjuk, hogy a szorzat maradékát kiszámíthatjuk úgy, hogy a maradékokat szorozzuk össze, ezért a maradékok rendre:

n	n^2
0	$0 \cdot 0 = 0$
1	$1 \cdot 1 = 1$
2	$2 \cdot 2 = 4$ vagyis 1

Ebből látszik, hogy a maradék sosem lehet 2. Így a számjegyek összege sem lehet egy négyzetszám esetén 5.

27. Nézzünk egy konkrét példát.

6	$6 \cdot 11$	$6 \cdot 23$	$6 \cdot 19$
21	$21 \cdot 11$	$21 \cdot 23$	$21 \cdot 19$
17	$17 \cdot 11$	$17 \cdot 23$	$17 \cdot 19$
	11	23	19

Első megközelítés:
Nézzük az első sorban lévő számokat: $6 \cdot 11, 6 \cdot 23, 6 \cdot 19$. Ezeknek az összege $6 \cdot (11 + 23 + 19)$.
Hasonlóan a második sorban: $21 \cdot 11, 21 \cdot 23, 21 \cdot 19$. Ezeknek az összege $21 \cdot (11 + 23 + 19)$.
Végül a harmadik sorban: $17 \cdot 11, 17 \cdot 23, 17 \cdot 19$. Ezeknek az összege $17 \cdot (11 + 23 + 19)$. Világos, hogy a 9 szám összege $(6 + 21 + 17) \cdot (11 + 23 + 19)$.
Második megközelítés:
Ha egy téglalapot rajzolunk és minden sor, illetve oszlop olyan széles, mint amekkora a száma, akkor a mezőkbe írt számok épp az adott téglalap területét adják meg, vagyis a 9 szám összege épp a nagy téglalap területe. Amit persze megkaphatunk a nagy téglalap oldalhosszainak szorzataként. Ez pedig: $(6 + 21 + 17) \cdot (11 + 23 + 19)$. (Ez meggyőző érvelés, de nem általános érvényű bizonyítás, mert negatív számok esetén nem működik.)

28. Összesen 6 számjegyet használhatunk (4, 5, 6, 7, 8, 9). Tehát az első számjegy lehet 6-féle, a második 5-féle, a harmadik 4-féle, a negyedik 3-féle. Összesen $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ ilyen szám van.

29. 4 kérdéssel ki lehet találni szerencse nélkül. Egy lehetséges jó első első kérdés, hogy „az *a* oszlopban van vagy az 5-ös sorban?” Ha igen a válasz, akkor 7, ha nem, akkor 8 mező jöhet számításba. Figyelve arra, hogy mindig „felezzük” a lehetséges mezők számát, elérhető, hogy 4 kérdés elég legyen. (Később ezt tisztességesen megbeszéljük még.)

30. Minden helyen 4 féle betű lehet egymástól függetlenül, tehát a válasz 4^3.

    (b) Hasonlóan az előzőhöz 4^4 ilyen szó van.

    (c) Könnyebb megszámolni azokat a szavakat, amelyekben nincs A betű. Hiszen ekkor minden helyen csak 3 betű közül választhatunk. Vagyis 3^3 (illetve 3^4) ilyen szó van. De tudjuk az összes lehetséges szó számát is, így ha abból kivonjuk azok számát, amikben nincsen A betű, akkor megkapjuk azokét, amikben van. A válasz tehát: $4^3 - 3^3 = 37$ (illetve $4^4 - 3^4 = 175$).

31. Két mérés elegendő. Két különböző stratégia is eredményre vezet.
Első megoldás:
Az első mérés legyen ez: $AB \bowtie CD$. Ebből a mérésből kiderül, hogy az AB, CD és EF párok közül melyikben van a hibás súly, hiszen ha elbillen, akkor abban a párban, ha egyensúlyban van, akkor az EF-ben. A második mérés ezek után legyen az, hogy a pár két tagját összemérjük. Ezek között ott van a nehezebb, tehát amerre lebillen, az a hibás súly.
Második megoldás:
Az első mérés: $ABC \bowtie DEF$. Ez biztosan elbillen, így tudjuk, hogy melyik 3 súly között kell keresni a hibását. Ha a második mérésben a három ból egyet-egyet felteszünk a mérlegre, akkor megtudj, hogy melyik a hibás, hiszen ha elbillen, akkor az, amerre billen, ha nem, akkor az, ami kimaradt a mérésből.

(b) 9 súlyból még ki lehet választani szerencse nélkül, 10-ből már nem.
A második megoldást vegyük alapul, legyen ugyanaz az első mérés, vagyis $ABC \bowtie DEF$. Ebből a mérésből az derül ki, hogy az ABC, DEF, GHI hármasok közül melyikben van a hibás. (Ha nem billen el, akkor GHI között van.) A második mérés pedig hasonlóan, mint az előző feladatban: a három lehetséges súly közül tegyünk fel egyet-egyet, ebből kiderül, hogy melyik a hibás.
Nagyon fontos a része a feladatnak, hogy belássuk, 9-nél több súlyból szerencse nélkül nem lehet kiválasztani a hibásat. Ehhez vegyük észre, hogy minden mérés három részre osztja a súlyokat. Az egyik rész a bal serpenyőben lévő súlyok, a második a jobb serpenyőben lévők, a harmadik pedig azokból a súlyokból áll, amik nem kerültek fel a mérlegre. Ha a mérleg két serpenyőjében ugyanannyi súly van, akkor a mérés megmondja, hogy az így keletkező 3 rész közül melyikben van a hibás.
Ebből következik, hogy egy méréssel legfeljebb 3 súly közül tudjuk kiválasztani a hibásat, hiszen ha 3-nál több súlyunk van, akkor az egyik részben 1-nél több súly lesz, és ha a mérés azt jelzi, hogy ott a hibás súly, akkor nem tudjuk, hogy melyik az.
Ebből viszont következik, hogy két méréssel 10 súlyból nem tudjuk kiválasztani a hibásat. Hiszen az első mérésnél legalább egy részben legalább 4 súly lesz. Ha mindháromban legfeljebb 3 lenne, akkor legfeljebb 9 súlyunk lenne. Ha viszont valamelyik részben 4 súly van, és a mérés azt jelzi, hogy ott a hibás, akkor az előzőek miatt 1 méréssel már nem tudjuk biztosan megtalálni a hibásat.

(c) A fentiekhez hasonló gondolatmenet alapján 27 a maximum. (Első mérésként csináljuk 3 darab 9 súlyból álló csoportot, és két ilyet mérjünk össze.)

(d) Az előzőekből következőn n mérés esetén 3^n a maximum.

32. Első megoldás.
Egy páratlan szám 8-cal osztva 1, 3, 5 vagy 7 maradékot ad. Nézzük meg minden esetben a maradékot.

n	n^2
1	$1 \cdot 1 = 1$
3	$3 \cdot 3 = 9$ vagyis 1
5	$5 \cdot 5 = 25$ vagyis 1
7	$7 \cdot 7 = 49$ vagyis 1

Második megoldás.
Egy páratlan szám mindig $2k + 1$ alakú, ha k egész szám, így a négyzete $(2k + 1)^2$. Alakítsuk át ezt a kifejezést:

$$(2k + 1)^2 = (2k + 1)(2k + 1) = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1.$$

$4k(k+1)$ mindig osztható 8-cal. Ennek az az oka, hogy k és $k+1$ közül az egyik szám mindig páros, így a $k(k + 1)$ szorzat mindig páros. Ekkor viszont a 4-szerese 8-cal osztható. Vagyis $4k(k + 1) + 1$ mindig 1 maradékot ad 8-cal osztva.

33. Az világos bástyát a 64 mező bármelyikére tehetjük, tehát 64 lehetőségünk van. Bárhová került a világos bástya, 63 mező marad üresen a sötétnek. Tehát függetlenül az első bástya helyétől 63 helyre tehetjük a sötétet. Így összesen $64 \cdot 63$ különböző módon tehetjük fel a két bástyát.

(b) Az első bástyát most is 64 mezőre tehetjük, míg a másodikat 63-ra. A válasz mégsem, $64 \cdot 63$, hiszen minden állást pontosan 2-szer számoltunk meg. Ugyanis teljesen mindegy ebben az esetben, hogy melyik bástyát tesszük le először, melyiket másodszor, mert a két bástya egyforma. (Az előző esetben előbb a világos, aztán a sötét bástyát helyeztük le, és az így kapott $64 \cdot 63$ állás mind különböző is volt.) Mivel minden állást kétszer számoltunk, ezért a válasz: $\frac{64 \cdot 63}{2}$.

(c) A helyzet annyiban változik most, hogy az elsőként lehelyezett bástya sora és oszlopa tiltott a második bástya számára. Akárhová tesszük az első bástyát 15 mező lesz tiltott a második számára, vagyis 49 lehetőség marad. Ha tehát két fekete bástyánk van, akkor a válasz: $\frac{64 \cdot 49}{2}$.

34. Két különböző stratégiával is lehet nyerni.
Első stratégia: fordítsuk meg balról a második korongot. Könnyen végiggondolható, hogy ha 2-2 korong, vagy 1-1 korong kék, és én jövök, akkor az kedvezőtlen nekem. Ezek alapján látható, hogy a fenti kezdőlépés után minden válaszlépés esetén van jó folytatás.
Második stratégia: fordítsuk meg a középső két korongot. Ha az ellenfél megfordítja az egyik oldalon mindkettőt, akkor én is a másikon, és nyertem. Ha csak egy korongot fordít át, akkor a másik oldal én is átfordítok egyet. Így egy-egy korong marad, ami világos, hogy nekem kedvez.

(b) 7 korong esetén a fentiekhez hasonlóan két stratégia közül választhatunk. Az elsőnek az felel meg, hogy balról a második és a harmadik korongot fordítjuk meg. Ekkor pontosan ugyanazt a helyzetet hagytuk, amit a 6 korongos feladatnál, ha a balról második korongot fordítjuk meg.
A második lehetőség, hogy a középső korongot fordítjuk meg. Ezt követően pedig másoljuk az ellenfél játékát. Vagyis amit ő csinál az egyik oldalon, annak a tükörképét csináljuk a másik oldalon.

(c) 8 korong esetén jól működik a második stratégia, ha a középső két korongot fordítjuk meg.

(d) A játékot általánosan is tudjuk elemezni. Válasszunk szét két esetet: ha n páros, illetve ha n páratlan. Ha n páratlan, akkor fordítsuk meg a középső korongot. Ha n páros, akkor a középső kettőt. Innentől kezdve csináljuk azt, hogy az első lépésben megfordított mező(k)re tükrözzük az ellenfelünk lépését.

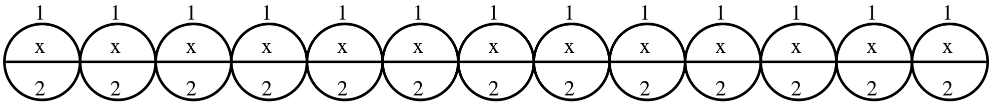
35. Könnyen megoldható a feladat 4 méréssel.
1. $A \mid B$
2. $C \mid D$
3. $E \mid F$
4. $G \mid H$
Ha bárhol elbillen, akkor ott a nehezebb súly, ha nem, akkor I a hibás.
Megoldható a feladat 3 méréssel is, de az igazán meglepő az, hogy ilyenkor is elég 2 mérés.
Legyen az első mérés ugyanaz, mint amikor nem kellett előre leírni a méréseket, vagyis:
1. $ABC \mid DEF$
A mérés eredményének függvényében választottuk meg a második mérésünket eddig. Ha az derült ki, hogy az első serpenyő a nehezebb, akkor a következő mérés: $A \mid B$, ha a második, akkor $D \mid E$, egyébként pedig $G \mid H$. Vegyük észre, hogy ezek a mérések nem zavarják egymást, egyszerre is végre lehet hajtani őket. Az első méréssel ugyanis nem csak azt tudjuk meg, hogy melyik 3 súly között van a hibás, hanem mindjárt találunk 6 hibátlan súlyt is. Ha tehát a második mérésben egyszerre feltesszük az $ADG \mid BEH$ súlyokat, akkor az jó lesz. Mert utólag, amikor megtudjuk a két mérés eredményét, akkor a második mérésben 4 súlyról tudni fogjuk, hogy jó. Ha pl. az első mérésben a második serpenyő volt nehezebb, akkor a második mérésben A, G, E és H biztosan jó súlyok, így praktikusan ez a mérés D-t és E-t hasonlítja össze. Ez a két mérés tehát jó.
Másképp megfogalmazva: helyezzük el a súlyokat egy négyzetben:

A	B	C
D	E	F
G	H	I

A fent leírt mérések közül az első megmondja, hogy melyik sorban van a hibás súly, a második pedig, hogy melyik oszlopban. Ha pedig mindkét információt tudjuk, akkor tudjuk azt is, hogy melyik a hibás súly.

36. Minden hajtás során kétszeresésre nő a vastagság. Az első hajtás után $0,2 \cdot 2$ mm, a második után $0,2 \cdot 2^2$, a harmadik után $0,2 \cdot 2^3$ stb. Világos, hogy 10 hajtás után $0,2 \cdot 2^{10} = 204,8$ mm vastag lesz.

37. Minden lehetséges szelvényt elő kell állítanunk. Minden mérkőzésre egymástól függetlenül 3-féle tippet lehet adni, vagyis összesen 3^{13} szelvény lehetséges, így ennyire szükség is van.
Elképzelhetjük ezt a feladatot egy térképes feladatként is. Egy olyan térképre gondoljunk, amin minden szakaszon 3 lehetőség van (ezek meg is vannak címkézve az 1, x, 2 tippekkel), és 13 szakasz van.



Ezen a térképen világos, hogy a két végpont között 3^{13} út vezet. Könnyen látható az is, hogy minden szelvénynek megfelel egy út, és minden útnak megfelel pontosan egy szelvény.

38. 3 szelvény elegendő. Az első szelvényen minden tipp 1-es legyen, a másodikon mindegyik x, a harmadikon mindegyik 2. Ekkor valamelyik szelvényen lesz legalább 5 találatunk. Vegyük észre, hogy minden meccset eltalálunk valamelyik szelvényen. Vagyis összesen 13 találatunk lesz a 3 szelvényen együttesen. Mit jelent az, hogy nem teljesül, hogy valamelyik szelvényen van legalább 5 találat. (Mi ennek az állításnak a tagadása?) Azt jelentené, hogy minden szelvényen legfeljebb 4 találatunk van. Ha viszont minden szelvényen legfeljebb 4 találatunk van, akkor összesen legfeljebb $3 \cdot 4 = 12$ találatunk lenne. Ez viszont ellentmond annak, hogy pontosan 13 találatunk van.
Vagyis igaz, hogy a fenti szelvényeket használni legalább az egyik szelvényen legalább 5 találatunk lesz.

39. Az első számjegy 8-féle lehet, hiszen nem lehet 0 és 4. A második, harmadik és negyedik számjegy 9-féle lehet egymástól függetlenül. Vagyis: $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 8 \cdot 9^3$ darab ilyen szám van.

40. (a) 12 osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Vagyis $2^2 \cdot 3$-nak 6 osztója van.
   (b) 36 osztói: az előzők, illetve 9, 18, 36. Vagyis $2^2 \cdot 3^2$-nek 9 osztója van.
   (c) 512 osztói: $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^9$. Vagyis 2^9-nek 10 osztója van.
   (d) (A megoldást csak jóval később gondoltuk át.) 2160-nak sok osztója van, nem érdemes egyesével felírni őket. Tudjuk, hogy $2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$. A számelmélet alaptételéből következik, hogy minden osztója $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ alakú. Már csak az a kérdés, hogy mi lehet a, b és c. Ha a szám osztó, akkor a legfeljebb 4 lehet. Vagyis 5 lehetséges érték jön szóba: $0, 1, 2, 3, 4$. Hasonlóan b-re $0, 1, 2, 3$. Viszont c-re csak kettő, 0 vagy 1. Vegyük észre, hogy a, b és c értékeit egymástól függetlenül választhatjuk meg, és minden megfelelő választás ad egy osztót. (A számelmélet alaptétele miatt minden különböző választás különböző osztót ad meg.) Mivel a értéke 5, b értéke 4, c értéke 2 féle lehet, ezért összesen $5 \cdot 4 \cdot 2 = 40$ lehetőség van, így pontosan 40 osztója van 2160-nak.
   Ez a megoldás alkalmas arra, hogy tetszőleges prímfelbontással megadott szám esetén megmondjuk az osztók számát.

41. Ha a kiindulási helyzetben a korong nem az átlón helyezkedik el, akkor kezdeni jó, egyébként pedig átengedni a kezdést. Minden lépésünkben az átlóra lépjünk. Ekkor az ellenfél minden lépésben kénytelen lelépni az átlóról, de akárhová lép, onnan mi ismét az átlóra tudunk lépni. Ez garantálja, hogy mindig mi lépünk az átlóra, így a bal alsó mezőre is.

42. 32 szám a maximum. Először megmutatjuk, hogy ennyiből ki tudjuk találni. Első kérdésünk: 16-nál nagyobb? Bármi a válasz, tudjuk, hogy 16 szám között kell keresnünk tovább. Tegyük fel, hogy a válasz igen volt. (Nem esetén is hasonlóan kell eljárnunk.) Következő kérdésünk: 24-nél nagyobb a szám? Ekkor két 8-as részre osztottuk a számokat, a választ ismerve már csak 8 dolog között lehet a gondolt szám. Ezt a felezős módszert folytatva 5 kérdéssel azonosítani tudjuk a gondolt számot.
Miért nem lehet több számból szerencse nélkül kitalálni? Erre két gondolatmenetet is megnézünk. Előtte

azonban egy vegyük észre a következőt, amit használunk mindkét gondolatmenetben.
Egy kérdéssel mindig két részre osztjuk a számokat. Az egyik részben vannak azokra, amik esetén IGEN a válasz, a másikban, amik esetén NEM. (Ezeket IGEN-résznek és NEM-résznek nevezzük.)
Az első gondolatmenet: Tegyük fel, hogy legalább 33 számunk van az elején, és feltesszük az első kérdésünket. Ez a kérdés is két részre osztja a számokat. Mivel legalább 33 számunk volt, ezért az egyik részben legalább 17 szám lesz. Tegyük fel, hogy ez a kedvezőtlen eset áll fenn, az ennek megfelelő választ kaptuk. A következő kérdés ismét két részre oszt, az egyik részben legalább 9 szám lesz. Kedvezőtlen esetben megint az ennek megfelelő választ kapjuk. A harmadik kérdés után lesz egy olyan rész, amelyben legalább 5, a negyedik után, amelyben legalább 3 és az ötödik után, amelyben legalább 2 szám van. Ez viszont baj, mert akkor a kérdéseink segítségével legalább 2 számot nem tudunk megkülönböztetni.
A második gondolatmenet: Nézzük meg, hogy mi a helyzet, ha kevesebb kérdésünk van. Ha összesen 1 kérdést tehetünk fel, akkor legfeljebb 2 szám közül tudjuk kiválasztani a gondoltat. Ha két kérdésünk van, akkor az első kérdés után az IGEN-részben és a NEM-részben is legfeljebb 2 szám lehet, hiszen már csak egy kérdésünk marad, és azt már tudjuk, hogy egy kérdéssel legfeljebb 2 szám közül tudjuk kiválasztani a gondoltat. Vagyis az elején legfeljebb 4 számunk lehet. Ha három kérdésünk van, akkor az első kérdés után az IGEN-részben is és a nem részben is legfeljebb 4 szám lehet, hiszen már tudjuk, hogy két kérdéssel legfeljebb ennyiből tudjuk kitalálni a gondolt számot. Vagyis 3 kérdés esetén legfeljebb 8 szám lehet. Folytatva ezt a gondolatmenetet 4 kérdés esetén legfeljebb 16, 5 kérdés esetén legfeljebb 32, n kérdés esetén pedig legfeljebb 2^n számból tudjuk kitalálni a gondoltat.

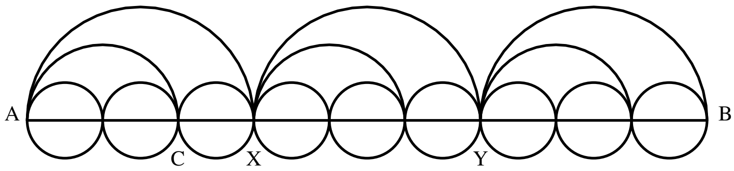
43. 7 szám esetén még nem feltétlenül találunk két olyat, amelyeknek a különbsége osztható 7-tel. Pl. ha a számaink $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Azonban 8 szám esetén már biztosan lehetünk ebben. Ennek oka a következő: a számok 7-féle maradékot adhatnak 7-tel osztva $(0, 1, 2, \dots, 7)$. Képzeljünk el 7 dobozt, mindegyiket feliratozzuk az egyik maradékkal. Minden számot beledobjuk abba a dobozba, amin a felirat megegyezik a szám maradékával. Mivel 8 számunk van, és csak 7 dobozunk, ezért biztosan lesz legalább két szám, amelyek ugyanabba a dobozba kerülnek. Abban tehát biztosak lehetünk, hogy ha 8 szám van megadva, akkor biztosan van két olyan, amelyeknek a 7-es maradéka megegyezik. Ekkor azonban a különbségük osztható 7-tel.

44. Ha $k|m$, akkor n-nek k-val vett osztási maradéka 0. Ugyanez igaz m-re is. Tudjuk, hogy az összeg, különbség, szorzat maradéka a maradékok összege, különbsége, szorzata. Vagyis $m+n$ maradéka $0+0 = 0$, $m-n$ maradéka $0-0 = 0$, mn maradéka pedig $0 \cdot 0 = 0$. Vagyis mindhárom szám osztható k-val.

45. Összesen $\frac{8 \cdot 7}{2}$ számpárra gondolhatunk, hiszen az első szám 8-féle lehet, emellé választhatunk 7-féle párt. De a számok sorrendje mindegy, ezért osztunk 2-vel. (Hiszen a $(3; 7)$ párt megszámoltuk úgy is, hogy a 3-at választottuk először, aztán a 7-et, és úgy is, hogy a 7-et először és aztán a 3-at.) Számozzuk meg a számpárokat az $1, 2, 3, \dots, 28$ számokkal. Mostantól ne is foglalkozzunk a számpárokkal, csak a sorszámukkal, és azt próbáljuk meg kitalálni. Ezt a problémát a 42. feladatban már megoldottuk. Ha n kérdésünk van, akkor 2^n szám kzül tudjuk kiválasztani a gondoltat. Mivel $2^4 < 28 \geq 2^5$, ezért 5 kérdésre van szükségünk.
Általánosságban elmondhatjuk, hogy a Barkochba játékban csak azt kell tudnunk, hogy hány dologra gondolhat a másik. Legyen a gondolható dolgok száma N. Számozzuk meg ezeket a dolgokat 1-től N-ig, és a játék során a gondolt dolog sorszámát találjuk ki. A 42. feladat alapján csak azt a kitevőt kell megtalálnunk, amire 2-t emelve legalább akkora számot kapunk, mint N. Ha tehát $2^{k-1} < N \leq 2^k$, akkor pontosan k kérdéssel tudjuk kitalálni a gondolt dolgot szerencse nélkül.

46. Osszuk fel 3 részre az útvonalat, $A \to X$, $X \to Y$ és $Y \to Z$. Ez három egyforma rész, számoljuk meg, hogy egy ilyenen hányféleképpen lehet végigmenni. Ehhez nézzük először az A és C közötti utak számák. Ez 10, hiszen $3 \cdot 3 + 1$. minden utat háromféleképpen folytathatunk X felé, vagyis $3 \cdot 10$ út van, ha nem használjuk a nagy ívet. De azt is használhatjuk, így A-ból X-be 31 különböző módon juthatunk

el. Ugyanez igaz az X és Y, illetve az Y és B közötti utakra. Vagyis összesen $31^3 = 29791$ különböző útvonal van.



47. Ha $\overline{123613d4}$ osztható

  (a) 3-mal pontosan akkor, ha a számjegyek összege osztható 3-mal, vagyis $d =, 1, 4, 7$ lehet.

  (b) 4-gyel pontosan akkor, ha az utolsó két számjegyből álló szám osztható 4-gyel. Vagyis $\overline{d4}$ osztható 4-gyel. Ez pontosan akkor teljesül, ha $d = 0, 2, 4, 6, 8$.

  (c) 6-tal pontosan akkor, ha 2-vel és 3-mal is. A szám 2-vel mindenképpen osztható, tehát csak arra van szükség, hogy 3-mal is osztható legyen. Ezt pedig már az a) részben megválaszoltuk. A válasz tehát: $d =, 1, 4, 7$.

  (d) 9-cel pontosan akkor, ha a számjegyek összege osztható 9-cel. Ebből kapjuk, hogy $d = 7$.

  (e) 12-vel pontosan akkor, ha 3-mal és 4-gyel is. Vagyis azok a számjegyek jók, amelyek jó megoldások voltak az a) és a b) részben is. Egyetlen ilyen számjegy van. Tehát $d = 4$.

48. $2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$, míg $1520 = 2^4 \cdot 5 \cdot 19$. Vagyis 2160 minden osztójában csak a 2, 3, 5 prímtényezők szerepelnek, mégpedig legfeljebb akkora hatványon, mint a 2160-ban. Ugyanez igaz 1520-ra, és a 2, 5, 19 prímekre. A közös osztóban tehát csak közös prímek szerepelhetnek, és legfeljebb akkora hatványon, mint a két számban. A legnagyobb közös osztót tehát úgy kapjuk, ha vesszük az összes közös prímtényezőt (esetünkben 2, 5), és a legnagyobb kitevőre emeljük, ami nem nagyobb egyik számban szereplő kitevőnél sem. A legnagyobb közös osztó tehát $2^4 \cdot 5 = 80$.

49. A legkisebb közös többszörös meghatározásánál hasonló szempontokat kell figyelembe venni. Minden többszörös olyan, hogy a prímtényezős felbontásban az eredeti szám minden prímosztója szerepel, és legalább akkora kitevőn, mint az eredeti számban. A legkisebb közös többszöröst tehát úgy kapjuk, ha vesszük az összes prímtényezőt, amely valamelyik számban előfordul. Ezeket a prímeket a legnagyobb olyan hatványra emelni, ami előfordul valamelyik szám felbontásában, mert különben annak a számnak nem lenne többszöröse. Mivel $36 = 2^2 \cdot 3^2$ és $100 = 2^2 \cdot 5^2$, ezért a legkisebb közös többszörösük $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900$.

50. Az egyik pontot 8, a másikat már csak 7 közül választhatom. Ez $8 \cdot 7$ lehetőség, de így minden egyenest kétszer számoltuk, hiszen a választott pontok sorrendje nem számít. A válasz: $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$.

51. Összesen $9 \cdot 10^4$ ötjegyű szám van. Vonjuk le ezekből azokat, amik nem felelnek meg a feltételnek. Ezek épp azok a számok, amelyekben nincs 4-nél kisebb számjegy, vagyis a számjegyeik csak: 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ilyen számból 6^5 van, hiszen minden számjegye 6-féle lehet, és 5 számjegy van. Emiatt a végeredmény: $9 \cdot 10^4 - 6^5$.

52. 100-ig 25 prím van. Ha ezek közül kiválasztunk 23-at, akkor 2 marad. De ha tudjuk, hogy melyik ez a kettő, akkor az meghatározza a 23-at. Tehát elég azt megszámolni, hogy a két megmaradót hányféleképpen tudjuk kiválasztani. Ez pedig nyilván $\frac{25 \cdot 24}{2}$.

53. (a) 37 diák esetén biztosak lehetünk ebben. Tegyük fel, hogy nincs ilyen hónap. Akkor az azt jelenti, hogy minden hónapban legfeljebb 3 gyerek született. Mivel 12 hónap van, ezért ez legfeljebb 36 gyereket jelent. Nekünk viszont 37 van.

36 gyerek esetén viszont még nem lehetünk biztosak ebben, mert elképzelhető, hogy minden hónapban pontosan 3 gyerek született.

(b) Nincs ilyen szám. Ugyanis elképzelhető akármekkora osztálylétszám esetén, hogy minden gyerek ugyanabban a hónapban született.

54. (a) Igen, mert ekkor a szám osztható 36-tal is. Amiből következik, hogy 18-cal is.

(b) Nem. A 18 ellenpélda, hiszen nem osztható 4-gyel.

(c) Igen. Ugyanis ekkor a szám felírható $3n$ alakban. Ekkor a négyzete $3n \cdot 3n$, ami $9n^2$, vagyis osztható 9-cel.

(d) Nem. 420 osztható 30-cal és 84-gyel is, de nem osztható 840-nel.

(e) Ez igaz, erre később térünk vissza.

55. Euklideszi algoritmus.
Induljunk ki a két számból. A példa kedvéért legyenek a számok: 2896 és 622. Osszuk el a nagyobb számot a kisebbel maradékosan. A példánkban:

$$\begin{aligned}
2896 &= 4 \cdot 622 + 408 \\
622 &= 1 \cdot 408 + 214 \\
408 &= 1 \cdot 214 + 194 \\
214 &= 1 \cdot 194 + 20 \\
194 &= 9 \cdot 20 + 14 \\
20 &= 1 \cdot 14 + 6 \\
14 &= 2 \cdot 6 + 2 \\
6 &= 3 \cdot 2 + 0
\end{aligned}$$

Az utolsó nem 0 maradék 2, ezért a két szám legnagyobb közös osztója 2.

56. Az algoritmus gyorsan megadja a legnagyobb közös osztót:

$$\begin{aligned}
624 &= 2 \cdot 252 + 120 \\
252 &= 2 \cdot 120 + 12 \\
120 &= 10 \cdot 12 + 0
\end{aligned}$$

A legnagyobb közös osztó 12.

57. (a) Nem igaz. Ellenpélda: $n = 6$, hiszen $18 | 6^2$, de $18 \nmid 6$.

(b) Nem igaz. Legyen $a = c = 2$ és $b = 3$. Ekkor $(2; 3) = 1$, $(3; 2) = 1$, de $(2; 2) \neq 1$.

58. (a) $20 \cdot 37$-ről könnyen látszik, hogy 740, ebből kell levonnunk 37-et, ami 703.

(b) $20 \cdot 14 = 280$ és most ebből kell levonni 14 kétszeresét, vagyis 28-at. Így 252-t kapunk.

(c) $95 \cdot 105 = (100 - 5)(100 + 5) = 100^2 - 5^2 = 9975$.

(d) $280 \cdot 320 = (300 - 20)(300 + 20) = 300^2 - 20^2 = 89600$.
Megjegyzés: a b) feladat is számolható úgy, hogy $14 \cdot 18 = (16-2)(16+2) = 16^2 - 2^2 = 256 - 4 = 252$. (A 2-hatványokat illik egy ideig fejből tudni. :)

(e) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} = 0,111\cdot$. Ez utóbbit így is jelöljük: $0,\dot{1}$

(f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{2^4}} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16.$

59. Elemezzük ki egyesével a mezőket, hogy szívesen lépünk oda vagy sem. Nevezzük vesztő (V) mezőnek azt, ahová nem akarunk lépni, mert ha ezt tesszük, akkor az ellenfél nyer. Nevezzük nyerőnek (Ny) a mezőt, ha szívesen lépünk oda, mert ha ezt tesszük, akkor tudunk nyerni. ...

60. (a) Igen. Mivel 7-nek a 6-os maradéka 1, ezért minden hatványának 1 lesz a maradéka. (Tudjuk, hogy a maradékokkal a szorzást elvégezhetjük.) Így 7^{100}-on 6-os maradéka is 1. Ha ebből 1-et kivonunk, akkor 6-tal osztható számot kapunk.

    (b) 7-nek a 4-es maradéka 3. Akkor 7^2-nek a 4-es maradéka 1 ($3 \cdot 3 = 9$, aminek a 4-es maradéka 1). Ha újra szorzunk 3-mal, akkor a maradék 3, majd megint 1 stb. Jól látható, hogy minden páros hatvány maradéka 1, így 7^{100}-nak a 4-es maradéka is 1. Vagyis $7^{100} - 1$ osztható 4-gyel. (Számolhattunk volna úgy is, hogy 7-nek a 4-es maradéka (-1).)

61. Az a döntő észrevétel, hogy a befizetendő és kivehető összege mindegyike 3-mal osztható. Így a pénzmozgás során a templomokban lévő pénzösszeg hármas maradéka nem változhat. Nézzük meg az egyes sziget templomában lévő aranyak hármas maradékát:

Xes	2	Alfa	1
Yap	0	Béta	2
Zuf	1	Gamma	0

Ebből következik, hogy Alfa régi neve Zuf, Bétáé Xes és Gammáé Yap.

62. Minden lehetséges szelvényt elő kell állítanunk, csak így lehetséges, hogy biztosan legyen telitalálatunk. Az első számot 90-féleképpen választhatjuk, a másodikat 89-féleképpen. Így minden párt kétszer számoltunk, vagyis $\frac{90 \cdot 89}{2}$ különböző szelvényre van szükségünk.

    (b) Az előzőhöz hasonlóan az első számot 90, a másodikat 89, a harmadikat 88-féleképpen választhatjuk meg. A kérdés most az, hogy így egy szelvényt (amelyen a sorrend nem számít) hányszor számoltunk meg. A három szám (a, b, c) sorrendje 6-féle lehet:

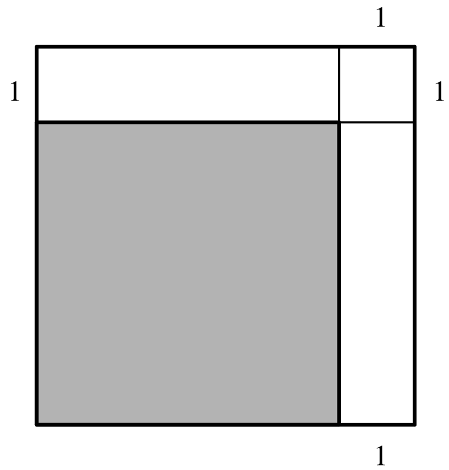
$$abc, acb, bac, bca, cab, cba.$$

Vagyis minden szelvényt a fenti módszerrel 6-szor számoltunk meg. A válasz tehát:

$$\frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{6}.$$

63.

64. Rajzoljunk egy ábrát.



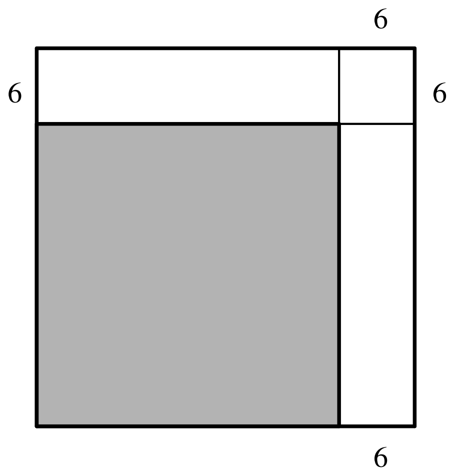
A jobb felső kis négyzet területe 1 cm^2. Emiatt a két egyforma fehér téglalap területének összege 120 cm^2, vagyis egy téglalapé 60 cm^2. Mivel a téglalapok egyik oldala 1 cm, így a másik 60 cm. Tehát a négyzet oldalhossza most 61.

65. 18 számot úgy tudunk kiválasztani, hogy megmondjuk, hogy melyik kettőt nem választjuk ki. Vagyis pont annyi különböző szelvény van, amin 18 szám van megjelölve, mint ahány olyan, amin 2 szám van megjelölve. Ez utóbbit könnyen meg tudjuk számolni, hiszen az első szám lehet 20-féle, a második 19. Ezzel a módszerrel, mindent kétszer számolunk, hiszen a sorrend nem számít. Vagyis $\frac{20\cdot 19}{2} = 190$ szelvény van, és ezeket mind le is kell gyártanunk, hogy biztosan legyen telitalálatunk.

66. Egyetlen tetszőleges szelvény elegendő. Ha ugyanis a szelvényen bejelölünk 18 számot, akkor az azt jelenti, hogy kettőt kihagyunk. Ha a legnagyobb pechünk van a húzáskor, akkor a két kihagyott számot kihúzzák és olyat hagynak ki, amiket mi bejelöltünk. De ez azt jelenti, hogy ezt a két számot (amit mi kihagytunk) nem találjuk el, vagyis egész biztosan lesz 16 találatunk. Egy szelvénnyel tehát nem csak biztosítunk 15 találatot, hanem mindjárt 16-ot is. És még ügyesnek sem kell lenni hozzá.

67.

68. A 64-es feladat gondolatmenetét követhetjük:



A jobb felső négyzet területe 36 cm^2. Emiatt a két egyforma fehér téglalap területének összege 120 cm^2, vagyis egy téglalapé 60 cm^2. Mivel a téglalapok egyik oldala 6 cm, így a másik 10 cm. Tehát a négyzet

oldalhossza most 16.
Az előző feladatot és ezt is meg tudjuk oldani másképpen is. Legyen az eredeti négyzet oldala b. Ekkor a terület eredetileg b^2, a változtatás után pedig $(b+6)^2$. Mivel tudjuk, hogy az utóbbi 156-tal nagyobb, mint az előbbi, ezért:

$$\begin{aligned}(b+6)^2 &= b^2+156\\ b^2+12b+36 &= b^2+156\\ 12b+36 &= 156\\ 12b &= 120\\ b &= 10.\end{aligned}$$

Vagyis a négyzet oldala eredetileg 10 volt, így most 16. (A 64-es feladatban a $(b+1)^2 = b^2+121$ egyenletet kapjuk.)

69. Nincs ilyen szám. Indirekten fogjuk ezt bizonyítani. Tegyük fel, hogy van, legyen egy ilyen szám N. Mivel N számjegyeinek összege 150, ezért N osztható 3-mal. Mivel 150 nem osztható 9-cel, ezért azt is tudjuk, hogy N nem osztható 9-cel.
Ha egy négyzetszám osztható 3-mal, akkor a gyöke is. Ekkor ugyanis $N = n^2$ alakban írható. Mivel N osztható 3-mal, ezért a prímtényezős felbontásában szerepel a 3. Ekkor a két tényező (n és n) valamelyikében, vagyis n-ben is szerepelnie kell, vagyis n is osztható 3-mal. Ha viszont szerepel n-ben a 3, akkor az n^2-ben legalább kétszer szerepel, vagyis N osztható 9-cel.
Ugyanez a gondolatmenet elvezet minket ahhoz, hogy ha egy p prím osztója egy négyzetszámnak, akkor p osztója a gyöknek is.

70. Ha az eredeti kocka élének hossza a volt, akkor az új kocka élhossza $a+1$.

(a) Ekkor az eredeti kocka felszíne $6a^2$, hiszen 6 lapja van, mindegyiknek a területe a^2. Az új kocka felszíne $6(a+1)^2$, azaz $6a^2+12a+6$. Vagyis az új kocka felszíne $12a+6$ cm^2-rel nagyobb, mint az eredeti kocka felszíne.

(b) Az eredeti kocka térfogata a^3. A nagyobb kocka térfogata pedig $(a+1)^3$. Mivel $(a+1)^3 = (a+1)(a+1)(a+1) = (a^2+2a+1)(a+1) = a^3+3a^2+3a+1$. Vagyis a nagyobb kocka térfogata $3a^2+3a+1$ cm^2-rel nagyobb, mint az eredeti kocka térfogata.

71. Már tisztáztuk, hogy érdemes úgy gondolkodni, hogy két számot jelölünk be, és kettőt húznak ki. Hiszen a nem kihúzott számokra akarunk tippelni ilymódon, és az ugyanaz, mintha a kihúzottakra tippelnénk. Ha mindkét nem kihúzott számot „eltaláljuk", akkor az eredeti feladatban 18 találatunk lesz. Mikor lesz 17? Akkor, ha a két nem kihúzott közül pontosan egyet „nem találunk el". (Ha egyiket sem találjuk el, akkor van 16 találatunk, erre épül a 66. feladat megoldása.)
Akkor tehát két számot tippelünk, kettőt húznak, és szeretnénk legalább egy legalább egy-találatos szelvényt. Ezt 10 szelvénnyel el tudjuk érni, ha az első szelvényen 1, 2, a második 3, 4 stb., a tizediken 19, 20 van megjelölve.
Ahhoz, hogy lássuk, hogy 10 a minimum, még be kell látnunk, hogy 9 szelvény sehogyan sem lehet elég. Tegyük fel, hogy van olyan 9 szelvény, ami garantál 1 (eredetileg 17) találatot. 9 szelvényen legfeljebb 18 számot tudunk megjelölni, vagyis biztosan lesz két nem megjelölt szám. (Ne feledjük, hogy az átfogalmazott feladat szerint gondolkozunk, vagyis a nem kihúzottakat jelöljük meg.) Ha épp ezt a két számot nem húzzák ki a lottóhúzáskor, akkor csak 16 találatunk lesz. Vagyis 9 szelvény nem garantálhat egy legalább 17-találatos szelvényt.

72. Igaz. Tegyük fel, hogy egyik szám sem osztható 3-mal. Ekkor mindkét szám 3-as maradéka 1 vagy 2. Ekkor a szorzatuk 3-as maradéka $1\cdot 1 = 1$, $1\cdot 2 = 2$ és $2\cdot 2 = 1$ lehet. Vagyis, ha egyik sem osztható 3-mal, akkor a szorzatuk sem lehet osztható 3-mal. Ez épp azt jelenti, hogy ha a szorzat osztható 3-mal, akkor legalább az egyik tényezőnek oszthatónak kell lennie 3-mal.

(b) Ez pontosan akkor teljesül, ha b prím.
Ha b nem prím, akkor felírható két 1-nél nagyobb egész szám szorzataként. Legyen ez a két szám c és d. Vagyis $b = c \cdot d$. Ekkor igaz az, hogy $b|cd$, de b nem osztója sem c-nek, sem d-nek.
Ha b prím, akkor $n \cdot k$ prímtényezős felbontásában szerepel b. Ha sem n, sem k nem lenne osztható b-vel, akkor nk szorzatot felírhatnánk olyan prímtényezős felbontásban, amelyben nem szerepel b (n és k prímtényezős felbontásának az összeszorzásával). Ez viszont ellentmondana a számelmélet alaptételének, vagyis annak, hogy a prímtényezős felbontás a sorrendtől eltekintve egyértelmű.

73. Nincsenek. $3n + 2$ azt jelenti, hogy a szám 3-as maradéka 2. Korábban már beláttuk, hogy egy négyzetszám 3-as maradéka sosem lehet 2. (Csak 0 és 1.)

74. (a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$.

(b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{25}} = \frac{25}{4}$.

(c) $(a + 3)^2 = (a + 3)(a + 3) = a^2 + 6a + 9$.

75. (a) $(a + 2)(2a + 1) = 2a^2 + 5a + 2$.

(b) $(a + 1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$.

(c) $(a + 2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$

(d) 1563 normálalakja: $1,563 \cdot 10^3$.

(e) $0,532$ normálalakja: $0,532 \cdot 10^{-1}$.

(f) $\frac{1}{300}$ normálalakja: $\frac{1}{300} = \frac{\frac{1}{3}}{100} = \frac{3,\dot{3} \cdot 10^{-1}}{10^2} = 3,\dot{3} \cdot 10^{-3}$.

(g) $19 = 10011_2$, hiszen $19 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$.

(h) $98 = 1202_4$, hiszen $98 = 1 \cdot 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0$.

76. (a) Az 12341234 szám 9-es maradéka 2. Emiatt 12341234^3 szám 9-es maradéka $2^3 = 8$. 56789 maradéka szintén 8, ezért a szorzat maradéka $8 \cdot 8$, ami 1.

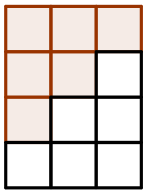
(b) Hogyan tudjuk megállapítani egy szám 6-os maradékát? Először állapítsuk meg a 3-as maradékot, arra már ismerünk módszert. 12341234 esetén a 3-as maradék 2. Emiatt a 6-os maradék 2 vagy 5 lehet. Azért lesz most 2, mert a szám páros, és ha egy szám 6-os maradéka 5, akkor az feltétlenül páratlan. Ugyanígy megkaphatjuk, hogy 56789 szám 6-os maradéka 5. Vagyis a kérdéses szám maradéka $2^3 \cdot 5$, vagyis 4.

(c) 12341234 egy páros szám. A prímtényezős felbontásában tehát szerepel a 2-es. Ha köbre emeljük, akkor a kapott szám prímfelbontásában lesz legalább 3 darab 2-es, vagyis 12341234^3 osztható 8-cal. Bármivel szorozzuk meg ezt a számot, a kapott szám osztható lesz 8-cal, vagyis a kérdéses szám 8-as maradéka 0.

77. A lépcső első oszlopában 1, a másodikban 2, ..., a hatvanadikban 60 négyzet van. A területe ez alapján:

$$T = 1 + 2 + 3 + \ldots + 59 + 60.$$

Ezt pedig már korábban megbeszéltük, hogy könnyen összegezhető Gauss módszerével. Az eredmény: $\frac{60 \cdot 61}{2} = 1830$.
Gondolkodhatunk geometriailag is:



Ha a lépcsőt az ábrán látható módon még egyszer lerajzoljuk, akkor épp egy téglalapot kapunk, aminek az egyik oldala a lépcső magassága, a másik pedig 1-gyel nagyobb. Ha a lépcső 60-emeletes, akkor a téglalap szélessége 60, a magassága 61. Ennek területe $60 \cdot 61$, és ennek a fele a kérdéses lépcső területe. Így (nem meglepő módon) ugyanazt kapjuk, mint az első megoldás esetében.

78. Ha az eredeti négyzet oldala a, akkor területe a^2. Ekkor a téglalapunk oldalai $(a+5)$ és $(a-5)$. Mivel $T = (a+5)(a-5) = a^2 - 25$, ezért a téglalap területe kisebb, és a négyzet oldalhosszától függetlenül 25 cm^2-rel.

79. Az alábbi példákat találtuk ($S(n)$ jelöli a számjegyek összegét):

n	$2n$	$S(n)$
4444	8888	32
844	1688	23
88	176	14
5551	11102	5

Észrevettük, hogy minden szám az $S(n)$ oszlopban 3-mal osztva 2 maradékot ad. Sőt, azt is észrevettük, hogy minden szám 9-es maradéka 5. Ezt könnyen be is tudjuk látni. Mivel n számjegyeinek összege 16, ezért a 9-es maradéka 7. Emiatt a kétszeresésnek a 9-es maradéka $2 \cdot 7$, ami 5.
Kérdés azonban, hogy miért nem lehet a számjegyek összege egyéb olyan szám, aminek a 9-es maradéka 5? Pl. 41, 50? Azért nem, mert ha minden számjegyet megdupláznánk (eltekintve attól, hogy számjegyet kell kapnunk), akkor lenne pontosan 32 a számjegyek összege a kétszeresben. Ha azonban van tízes átvitel, akkor csökken a számjegyek összege. Egy számjegy kétszerese kisebb, mint 20, így az átvitel mindig 1, így a csökkenés minden átvitelnél éppen 9.
Ha megnézzük a fenti táblázatot, akkor az első sorban 0, a másodikban 1, a harmadik 2, a negyedikben 3 tízes átvitel történik. Ezért lesz a számjegyek összege mindig 9-cel kevesebb.

80. Nézzük meg a szabályt egy konkrét példán. Mennyi 673983-nak a 11-es maradéka? Vegyük a következő összeget: $-6+7-3+9-8+3=2$. (Az utolsó számjegy pozitív előjellel, onnantól kezdve váltakozó előjellel.) Emiatt a szám 11-es maradéka 2.
Ismét egy konkrét példát követve végezzük el a bizonyítást.

$$673983 = 6 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 3 \cdot 1.$$

Nézzük a 11-es maradékokat. Mivel 10-nek a 11-es maradéka -1, így a hatványai felváltva -1 és 1. Vagyis 1-nek 1, 10-nk -1, 100-nak 1, 1000-nek -1 stb. Vagyis 673983-nak a 11-es maradéka:

$$6 \cdot (-1) + 7 \cdot +3 \cdot (-1) + 9 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = -6 + 7 - 3 + 9 - 8 + 3 = 2.$$

Ezt az észrevételt felhasználva általánosan is bizonyíthatjuk a fent megállapított szabály helyességét.

81. $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
Ezt úgy is megkapjuk, hogy tudjuk: $(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Ha itt b helyére $-b$-t képzelünk, akkor megkapjuk a fenti formulát.

82. Kétféleképpen is megközelíthetjük a problémát.
Tegyük fel, hogy lehetséges, hogy a gyök nem osztható 6-tal. Ekkor a 6-os maradéka 1, 2, 3, 4 vagy 5.

Ilyen esetben a maradékok rendre: 1, 4, 3, 4, 1. Vagyis sosem kapunk 0-t. Ha tehát a gyök nem osztható 6-tal, akkor a négyzetszám sem. Ami épp azt jelenti, hogy ha a négyzetszám osztható 6-tal, akkor a gyök is. (Hátránya ennek a megközelítésnek, hogy ha 35-tel való oszthatóságról lenne szó, akkor elég sok esetet kellene megvizsgálnunk.)
A megoldáshoz használhatjuk a számelmélet alaptételét is. Ha a négyzetszám osztható 6-tal, akkor a prímtényezős felbontásában szerepel legalább egy 2-es és egy 3-as. Mivel négyzetszám, így minden prím kitevője páros, vagyis a 2 és a 3 kitevője is legalább 2. Ha gyököt vonunk belőle (vagyis minden kitevőt a felére csökkentünk), akkor is marad legalább egy 2-es és egy 3-as prímtényező, vagyis a gyök is osztható 6-tal. (Ennek a gondolatmenetnek előnye, hogy ez szó szerint alkalmazható akkor is, ha 6 helyett 35-tel való oszthatóságról van szó. Hátránya, hogy használja a számelmélet alaptételét, aminek a bizonyítását nem ismerjük.)

83. Tudjuk, hogy $192 = 2^6 \cdot 3$. Ezek a prímtényezők tehát szerepelnek a négyzetszám prímfelbontásában. A négyzetre emelés során minden prím kitevője a kétszeresére nő, emiatt a gyökben legalább 2^3-nak kell szerepelnie. Ezen kívül biztosan van 3-as is a gyökben, hiszen ha nem lenne, akkor a négyzetben sem lenne. Ezek alapján látszik, hogy a gyök biztosan osztható $2^3 \cdot 3 = 24$-gyel. Ennél nagyobb számot pedig nem tudunk mondani, hiszen 576 egy 192-vel osztható négyzetszám, aminek a gyöke 24, ez tehát nem lehet 24-nél nagyobb számmal osztható.

84. (a) 2×9: Egy útvonalat meghatároz az, hogy hányadik oszlopban lépünk lefelé. Mivel 9 oszlop van, ezért 9 különböző útvonal van.

(b) 3×7: Írjuk be minden mezőre, hogy oda hányféleképpen lehet eljutni. A bal felső sarokba és a felső sor mezőibe, illetve a bal oldali oszlop mezőibe csak egyféleképpen lehet eljutni. A többi mezőbe pedig annyiféleképpen ahányféleképpen a felette lévő és a tőle balra lévő mezőbe lehet eljutni összesen. Tehát úgy kell kitölteni a táblázatot, hogy a még ismeretlen helyekre a felette és a tőle balra lévő mezőben lévő szám összegét írjuk. Így megkapjuk a jobb alsó mezőben az összes lehetséges útvonal számát:

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7
1	3	6	10	15	21	28

Máshogy is eljuthatunk a helyes eredményhez. Hogyan tudnánk leírni egy jó útvonalat? Például úgy, hogy leírjuk az egyes lépéseket. J jelenti, hogy jobbra lépünk, L pedig azt, hogy lefelé. Ekkor egy lehetséges útvonal például: JJLJLJJJ. Milyenek a jó sorozatok? Egyrészt 8 a hosszuk, mert jobbra 6-ot kell lépnünk, lefelé pedig kettőt. Másrészt pontosan 2 darab L betű van benne. Különböző sorozat különböző utat is ír le, így annyi út van, ahány megfelelő sorozat. Abból pedig $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ van, hiszen az első L betű lehet 8 helyen, a második 7 helyen, de a sorrendjük nem számít, ezért osztunk 2-vel. (Éppen ennyi különböző lottószelvény van, ha 8 számból húznak 2-t.)

(c) 4×5: Az előző két megoldás itt is eredményre vezet. A táblázat:

1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10	20	35

A J és L betűs megoldás esetén most 7 hosszú a sorozat, hiszen 4-et kell lépni jobbra és 3-at lefelé. Vagyis akkor jó egy sorozat, ha 7 betűből áll és pontosan 3 darab L betű van közöttük. Pl. LJJJLLJ. Hány ilyen sorozat van? Az első L kerülhet 7 helyre, a második 6-ra, a harmadik 5-re. Ez eddig $7 \cdot 6 \cdot 5$ lehetőség. Így azonban minden megfelelő sorozatot annyiszor számoltunk ahányféle sorrendben a 3 L betűt le tudtuk rakni erre a 3 helyre. Ezt pedig már tudjuk, hogy 6 (3!) vagyis a végeredmény: $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$. (Éppen ennyi különböző lottószelvény van, ha 7 számból húznak 3-at.)

85. (a) $p+q=(2x^3+3x-1)+(x^2-6x+3)=2x^3+x^2-3x+2$.
(b) $p-2q=(2x^3+3x-1)-2(x^2-6x+3)=2x^3-2x^2+15x-7$.
(c) $pg=(2x^3+3x-1)(x^2-6x+3)=2x^5-12x^4+9x^3-19x^2+15x-3$.
(d) $p^2=(2x^3+3x-1)^2=4x^6+12x^4-4x^3+9x^2-6x+1$.

86. Készítsünk el gondolatban egy szelvényt. Az első számot 90 közül választhatjuk. A másodikat (függetlenül attól, hogy mi volt az első) már csak 89 szám közül. Ez folytathatjuk, az ötödik számra már csak 86 lehetőségünk van. Ez eddig $90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86$ lehetőség. Minden szelvényt pontosan egyszer számoltunk? Nem. Minden szelvényt pontosan $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5!$-szor számoltunk meg, hiszen nekünk a számok kiválasztásának sorrendje nem számít, és minden számötöst ennyi sorrendben választhattunk ki, vagyis ennyiszer számoltuk meg az előző módszerrel. Az eredményünk tehát:

$$\frac{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=43\,949\,268.$$

Ezt a számot röviden úgy is szoktuk jelölni, hogy $\binom{90}{5}$.

87. Nézzük meg a szám 5-ös maradékát: 2346 maradéka 1, így 2346^{100} maradéka $1^{100}=1$. 1399 maradéka 4 vagy másképpen (-1). Így minden páratlan hatvány maradéka -1, minden párosé pedig 1. Így tehát 1399^{88} maradéka is 1. A különbségüké pedig emiatt $1-1=0$, vagyis a szám osztható 5-tel.
Megvizsgálhatjuk a szám utolsó számjegyét is. 2346 minden hatványa 6-ra végződik, hiszen minden szorzásnál két 6-ra végződő számot szorzunk össze, ami 6-ra végződik. 1399 hatványai felváltva végződnek 9-re és 1-re, hiszen először két 9-re végződő számot szorzunk össze, ami 1-re végződik, ezt kell ismét megszoroznunk egy 9-re végződővel, ami így 9-re végződik stb. Tehát a végén egy 6-ra végződő számból vonunk ki egy 1-re végződőt, ami nyilván 5-re fog végződni, és így osztható 5-tel. (Ebben a megoldásban valójában a szám 10-es maradékát állapítottuk meg, hiszen az utolsó számjegy megegyezik a 10-es maradékkal.)

88. Alkalmazzuk a 84-es feladatban látott módszert, vagyis írjuk be minden mezőre, hogy oda hányféleképpen lehet eljutni.

(a) Ha egy királlyal lépünk, akkor ez a felette, a balra, és a balra felette lévő mezőn álló számok összege, hiszen a király ezekről a mezőkről léphet az adott mezőre.

1	1	1	1	1
1	3	5	7	9
1	5	13	25	41
1	7	25	63	129

Tehát 129 különböző úton juthatunk el egy királlyal a jobb alsó sarokba.

(b) Ha bástyával lépünk, akkor az adott mező sorából és oszlopából bárhonnan léphetünk a mezőre. Ezért minden mezőbe az összes felette, illetve tőle balra lévő mezőbe írt szám összegét kell írnunk.

1	1	2	4	8
1	2	5	12	28
2	5	14	37	94
4	12	37	106	289

(c) Ha vezérrel lépünk, akkor akkor az adott mező sorából, oszlopából és „átlójából” is bárhonnan léphetünk a mezőre. Ezért az ezeken a mezőkön lévő számokat kell összeadnunk, hogy megkapjuk, hányféleképpen juthatunk el egy adott mezőre.

1	1	2	4	8
1	3	7	17	40
2	7	22	60	158
4	17	60	188	543

89. (a) $(x+3)^2 = 16$.
Minek a négyzete 16? A 4-nek. És még? A -4-nek is! Másnak viszont nem. Tehát tudjuk, hogy $x+3$ értéke van 4, vagy -4. Az első esetben $x = 1$, a másodikban $x = -7$. Tehát két olyan x érték van, amelyre teljesül az egyenlőség, az 1 és a -7.

(b) $(x-2)(2x+3) = 0$.
Egy szorzat értéke pontosan akkor 0, ha legalább az egyik tényezője 0. Vagyis $x - 2 = 0$ vagy $2x + 3 = 0$. Az előbbi esetben $x = 2$, az utóbbiban pedig $x = -\frac{3}{2}$. Tehát két olyan x érték van, amelyre teljesül az egyenlőség, a 2 és a $-\frac{3}{2}$.

(c) $5x - 2(x-3) = 3x + 6$.
Vizsgáljuk meg alaposabban a bal oldalt: $5x-2(x-3) = 5x-(2x-6) = 5x-2x-(-6) = 3x+6$. Vagyis a két oldal teljesen megegyezik, így az egyenlőség minden x-re teljesül, minden x gyök.

90. Ahhoz, hogy eljussunk a bal alsó sarokba, 21 lépést kell tennünk. Ebből 12 lépést vízszintesen, 9-et pedig függőlegesen. Annyi különböző útvonal van, ahányféleképpen meg tudjuk választani a lépések sorrendjét. Ha 21 lépésnél 9 helyen kell függőlegesen lépni, akkor $\binom{21}{9}$ különböző útvonal van. (Ha a vízszintes lépések alapján akarjuk megszámolni, akkor $\binom{21}{12}$, tehát $\binom{21}{9} = \binom{21}{12}$.)

91. Ha n-nel jelöljük az 1234567891011121314 számot, akkor az első szám $(n-1)(n+1)$, a második pedig n^2. De azt is tudjuk, hogy $(n-1)(n+1) = n^2-1$, vagyis a második szám a nagyobb, mégpedig pontosan 1-gyel.

92. Ahogy már korábban is, beírhatjuk minden mezőbe, hogy oda hányféleképpen lehet eljutni:

1	4	4	8	17	32
1	3	■	4	9	15
1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1

93.

94. Az egyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{3x-1}{5} &= 4 \\ 5x - 2(3x-1) &= 40 \\ -x + 2 &= 40 \\ x &= -38. \end{aligned}$$

95. (a) $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

(b) $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$

(c) $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$

Arra kell törekednünk, hogy két olyan számot találjunk, amiknek az összege az x együtthatója, a szorzata pedig a konstans tag.

96. Nincs. Ha egy szám 54-re végződik, akkor páros, de nem osztható 4-gyel. Viszont ha egy négyzetszám páros, akkor biztosan osztható 4-gyel, így nincsen 54-re végződő négyzetszám.

97. Van. Ugyanis $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$.
Hogyan lehet erre rájönni? Az $x - 1$-et akarjuk megszorozni valamivel, hogy $x^3 - 1$-et kapjunk. Akkor kell a kifejezésben egy x^2, amit x-szel megszorozva x^3-öt kapunk. Ha viszont van x^2, akkor a -1 miatt keletkezik egy $-x^2$ tényező, amit nem szeretnénk. Ezt egy x^2-tel tudjuk ellensúlyozni, mégpedig úgy, hogy a kifejezésünkben van egy x, amit x-szel megszorozva x^2-et kapunk. Ekkor azonban keletkezik egy $-x$ tag is. Ezt egy x-szel tudnánk ellensúlyozni, amit egy $+1$ taggal érhetünk el. Szerencsénkre ez a $+1$ megszorozva -1-gyel épp -1-et ad, amire szükségünk is van.

98. (a) $4 \cdot 6^3 = 2^2 \cdot (2 \cdot 3)^3 = 2^2 \cdot 2^3 \cdot 3^3 = 2^5 \cdot 3^3$.

(b) $9^2 \cdot 30^4 = \left(3^2\right)^2 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^4 = 3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4 = 2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^4$.

99. (a) 21^{49} osztható 7-tel, hiszen 21 osztható 7-tel. Vagyis a maradék 0.

(b) 6^{113} maradéka -1, vagy 6. Ugyanis 6 maradéka -1, mikor hatványozzuk, akkor a maradékok felváltva -1 és 1 lesznek. Páratlan kitevő esetén -1, páros esetén 1, hiszen $-1 \cdot -1 = 1$ és $1 \cdot -1 = -1$. Mivel 113 páratlan, ezért a maradék -1.

(c) 13 maradéka -1, ezért az előbbi feladat gondolatmenete alapján 13^{88} maradéka 1. A 2 hatványainak a maradéka is ismétlődik: $2, 4, 1, 2, 4, 1, \ldots$ Mivel a következő kitevő esetén a maradékot úgy kapjuk, hogy az előzőt szorozzuk meg 2-vel, ezért ez a 3 maradék fog ismétlődni ebben a sorrendben. A 60. tag a sorozatban 1, vagyis 2^{60} pontosan 1 maradékot ad. Ennek a 24-szerese nyilván 3-at. Összességében a $13^{88} - 24 \cdot 2^{60}$ kifejezés -2 vagy 5 maradékot ad.

100. A halmazban a számok összege 45, vagyis osztható 3-mal. Ha van egy megfelelő 7-elemű halmazunk, akkor annak a 2-elemű komplementerére is igaz, hogy az elemek összege osztható 3-mal. Vagyis elég megszámolni azokat a kételemű részhalmazokat, amikben az elemek összege osztható 3-mal, hiszen pontosan ezek komplementerei lesznek a megoldások. Két szám összege kétféleképpen lehet 3-mal osztható. 1) mindkét szám osztható 3-mal. Mivel 3 darab 3-mal osztható szám van a halmazban (3, 6, 9), ezért erre 3 lehetőség van ($\{3, 6\}, \{3, 9\}, \{6, 9\}$). 2) Az egyik szám 1, a másik 2 maradékot ad 3-mal osztva. Mivel 1és 2 maradékot adó számból is 3 darab van, ezért ilyen részhlamzból éppen $3 \cdot 3 = 9$ különböző van. Tehát 12 olyan 7-elemű részhalmaz van, amelyben az elemek összege osztható 3-mal.

101. 84000 prímtényezős felbontását megkaphatjuk például így: $84000 = 84 \cdot 1000 = 4 \cdot 21 \cdot 10^3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$. Az ismert okok miatt az osztók száma a kitevőknél eggyel nagyobb számok szorzata, vagyis: $6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 96$.
A páros osztók számát kétféle gondolatmenettel is megkaphatjuk.
1) Ha az osztó páros, akkor a prímtényezős felbontásában szerepelnie kell a 2-esnek, vagyis a 2 kitevője nem lehet 0. Azaz ott 6 helyett csak 5 választási lehetőségünk van (1-től 5-ig, nem 0-tól 5-ig). Ezért a páros osztók száma: $5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 80$.
2) Hány páratlan osztó van? Ha páratlan, akkor nem szerepelhet benne a 2, vagyis a lehetőségek száma: $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$. Mivel összesen 96 osztó van, így a páros osztók száma $96 - 16 = 80$.

102. (a) Igen: $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$.

(b) $x^3 + 6x^2 - 7x = x(x^2 + 6x - 7) = x(x - 1)(x + 6)$.

(c) $x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$.
Mindkét lépésben használjuk az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosságot.

103. Kétféleképpen is átgondolhatjuk a feladatot:
1) Írjunk fel minden osztót úgy, hogy osztópárokat képezünk. (Pl. 6 osztópárjai: 1-6, 2-3.) Vagyis minden osztónak van egy párja, kivéve, ha a szám négyzetszám, mert akkor a gyökének önmaga a párja. Vagyis pontosan akkor lesz páratlan sok osztó, ha a szám négyzetszám.
2) Nézzük a szám prímfelbontásában a prímek kitevőit. Ezekhez egyet hozzáadva és a kapott számokat összeszorozva az osztók számát kapjuk meg. Vagyis ennek a számnak páratlannak kell lennie. Ami azt jelenti, hogy minden tényező páratlan. Mivel a tényezők eggyel nagyobbak a kitevőknél, ezért azt kaptuk, hogy minden kitevő páros. Ami pontosan akkor teljesül, ha a szám négyzetszám.

104. (a) Ha $x^2 = 4$, akkor a gyökök: $x_1 = 2$ és $x_2 = -2$. Ezt tudhatjuk onnan, hogy csak a 2 és a -2 négyzete 4. Kicsit formálisabban a következőt is csinálhatjuk:

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ x^2 - 4 &= 0 \\ (x-2)(x+2) &= 0. \end{aligned}$$

Egy szorzat pedig csak akkor lehet 0, ha legalább az egyik tényezője 0. Vagyis $x - 2 = 0$ vagy $x + 2 = 0$. Ebből kapjuk a két fenti gyököt.

(b) Ha $x^2 = 7$, akkor a gyökök: $x_1 = \sqrt{7}$ és $x_2 = -\sqrt{7}$. Itt is követhetjük az előző gondolatmenetet is, itt az $x^-7 = (x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7})$ azonosságot fogjuk használni.

(c) $x^2 = -1$. Nincs ilyen x, hiszen minden szám négyzete nemnegatív.

(d)

$$\begin{aligned} x^2 + 2 &= 18 \\ x^2 &= 16 \\ x^2 - 16 &= 0 \\ (x+4)(x-4) &= 0. \end{aligned}$$

A szorzat csak úgy lehet 0, ha legalább az egyik tényező 0, vagyis $x + 4 = 0$, amiből $x_1 = -4$, vagy $x - 4 = 0$, amiből $x_2 = 4$.

(e)

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 1 &= 25 \\ (x-1)^2 &= 25 \\ (x-1)^2 - 25 &= 0 \\ (x-1-5)(x-1+5) &= 0 \\ (x-6)(x+4) &= 0. \end{aligned}$$

A szorzat csak úgy lehet 0, ha legalább az egyik tényező 0, vagyis $x + 4 = 0$, amiből $x_1 = -4$, vagy $x - 6 = 0$, amiből $x_2 = 6$.

105. Tudjuk, hogy $245n$ prímfelbontásában minden kitevőnek párosnak kell lennie. Mivel $245 = 5 \cdot 7^2$, ezért $n = 5$ a legkisebb ilyen szám.

106. Jelöljük a négyzet oldalát n-nel. Ekkor a négyzet területe n^2. A téglalap oldalai $n+2$ és $n+3$, vagyis a területe $(n+2)(n+3)$. Tudjuk tehát, hogy

$$\begin{aligned}(n+2)(n+3) &= n^2+666\\ n^2+5n+6 &= n^2+666\\ 5n &= 660\\ n &= 132.\end{aligned}$$

A négyzet oldala tehát 132 cm volt.

107. (a) Most is hasznos az az ötlet, hogy az összes lehetséges szelvény számából vonjuk ki azokat, amik nem megfelelőek. Összesen $\binom{90}{5}$ szelvény van, hiszen 90 számból kell 5-öt választanunk és a sorrend nem számít. Mik a nem megfelelő szelvények? Amiken csak 3-mal nem osztható számok vannak. Ilyenből 60 darab van, tehát $\binom{60}{5}$ nem megfelelő szelvény van. A válasz tehát $\binom{90}{5}-\binom{60}{5} =$ 38487756.

(b) Mivel 45 páros szám van, ezért a két párosat $\binom{45}{2}$-féleképpen választhatjuk ki. A páratlanokat teljesen hasonló gondolatmenet alapján $\binom{45}{3}$-féleképpen. A két választás egymástól független, ezért a megfelelő szelvények száma: $\binom{45}{2}\cdot\binom{45}{3} = 14048100$.

108. (a)

$$\begin{aligned}x^2-4x+4 &= 36\\ (x-2)^2 &= 36\\ x-2 &= \pm 6\\ x_1 = 8 \mid x_2 &= -4\end{aligned}$$

(b) $x^4-1=0$, ami azt jelenti, hogy egy szám 4-edik hatványa 1. Ha egy szám se nem 1, se nem -1, akkor a hatványai sem lesznek 1 és -1. Vagyis csak az 1 és a -1 jöhet szóba lehetséges megoldásként. Mindkét szám meg is felel a feltételnek, vagyis a negyedik hatványa 1. Az egyenlet megoldásai tehát: $x_1=1$ és $x_2=-1$.

(c) Alakítsuk szorzattá a bal oldalon álló kifejezést: $x^3-2x^2+x = x(x^2-2x+1) = x(x-1)^2$. Ha egy szorzat értéke 0, akkor legalább az egyik tényezője 0. Vagyis $x=0$ vagy $x-1=0$. Az egyenlet gyökei tehát: $x_1=0$ és $x_2=1$.

(d) $x^2-6x=40$. Hol láttunk már olyan kifejezést, amelyben szerepelt x^2-6x? Eszünkbe juthat, hogy $(x-3)^2 = x^2-6x+9$. Vagyis a bal oldal $x^2-6x = (x-3)^2-9$. Használjuk ezt fel.

$$\begin{aligned}x^2-6x &= 40\\ (x-3)^2-9 &= 40\\ (x-3)^2 &= 49\\ x-3 &= \pm 7.\end{aligned}$$

Két eset lehetséges, mindkettőből kapunk egy-egy gyököt. Ha $x-3=7$, akkor $x=10$, ha pedig $x-3=-7$, akkor $x=-4$. Vagyis az egyenlet két gyöke: $x_1=10$ és $x_2=-4$.

109. Ahhoz, hogy két szám szorzata 5-re végződjön két feltételnek kell teljesülnie. Legalább az egyik legyen 5-tel osztható és mindkettő páratlan legyen. Hányféleképpen tudunk két páratlan számot választani a kétjegyűek közül? Összesen 90 kétjegyű van, ezek közül 45 páratlan, ha tehát kettőt kell választani, akkor erre $\binom{45}{2}$ lehetőség van. Szükségünk van még arra is, hogy legalább az egyik 5-tel osztható legyen,

vagyis nem jó nekünk, ha egyik sem osztható 5-tel. Hány olyan páratlan számokból álló számpár van, amelyben egyik szám sem osztható 5-tel? Mivel 36 darab páratlan, 5-tel nem osztható szám van, ezért $\binom{36}{2}$. Ezek a nem megfelelő számpárok, ezért a válasz: $\binom{45}{2} - \binom{36}{2} = 360$.

110. Jelöljük a legkisebb számot n-nel, ekkor az ezt követő 3 szám: $n+1, n+2, n+3$. Vagyis a feladat állítása a következőt jelenti: $(n+1)(n+2)-n(n+3) = 2$. Vizsgáljuk meg, hogy milyen n-re teljesül ez a feltétel, vagyis oldjuk meg ezt az egyenletet:

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2) - n(n+3) &= 2\\ (n^2+3n+2) - (n^2+3n) &= 2\\ 2 &= 2.\end{aligned}$$

Ami azt jelenti, hogy egy azonosságot kaptunk, vagyis a fenti egyenlet minden n-re teljesül. Vagyis bármely 4 szomszédos egész szám esetén igaz, hogy a két középső szorzatából kivonva a két szélső szorzatát 2-t kapunk.
(Megjegyzés: nem is használtuk ki, hogy n egész, az állítás például a $1,3; 2,3; 3,3; 4,3$ számnégyesre is igaz.)

111. (a) $(2x-1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$;
(b) $(2x+3)^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$;

112. Jelöljük a négyzet oldalhosszát x-szel. Ekkor a téglalap oldalali: $x-2$ és $x-3$. A négyzet területe x^2, a téglalapé pedig $(x-2)(x-3)$. Mivel az előbbi 104 cm^2-rel nagyobb, ezért felírhatjuk a következő egyeneltet:

$$\begin{aligned}x^2 &= (x-2)(x-3) + 104\\ x^2 &= x^2 - 5x + 6 + 104\\ 5x &= 110\\ x &= 22\end{aligned}$$

Vagyis a négyzet oldala 22 cm, így a téglalap oldalai 19 és 20 cm voltam. (Ha ellenőrizzük az adatokat, akkor látjuk, hogy a téglalap területe $39 \cdot 20 = 380$, míg a négyzeté $22^2 = 484$, ami tényleg 104-gyel nagyobb.)

113. Nem. A jobb oldalon egy olyan szám áll, amely 5-tel osztva 3 maradékot ad. A bal oldalon pedig egy négyzetszám, ami viszont 5-tel osztva csak 0, 1, és 4 maradékot adhat. (Ezt ellenőrizhetjük a maradékok négyzetreemelésével: 0, 1, 4, 9, ami 4-nek felel meg és 25, ami 1-nek.)

114. Nézzük meg, hogy hol láttunk már az x^2-2x-1-hez hasonló kifejezést. $(x-1)^{=}x^2-2x+1$ nagyon hasonló ehhez. Világos, hogy $x^2-2x-1 = (x-1)^2-2$. Vagyis ez azt jelenti a mi esetünkben, hogy

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 1 &= 0\\ (x-1)^2 - 2 &= 0\\ (x-1)^2 &= 2\\ x - 1 &= \pm\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Vagyis két lehetőség áll fenn x értékére. Az egyik, hogy $x-1=\sqrt{2}$, vagyis $x = 1+\sqrt{2}$. A másik, hogy $x-1 = -\sqrt{2}$, vagyis $x = 1-\sqrt{2}$. Az egyenletnek tehát két gyöke van: $x_1 = 1+\sqrt{2}$ és $x_2 = 1-\sqrt{2}$. Ezt röviden így is írhatjuk: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

115. 1400 többszöröseinek prímfelbontásában szerepel minden tényező, ami az 1400-ban. Vagyis a szám $2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$-nek a többszöröse és négyzetszám. Ez utóbbi azt jelenti, hogy minden kitevő páros. Ehhez feltételnül szükségünk van még egy 2-esre és még egy 7-esre. Másra nincs, így a legkisebb ilyen szám $2 \cdot 7 = 14$.

116.

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4x + 6 &= 0 \\
(x-2)^2 + 2 &= 0 \\
(x-2)^2 &= -2.
\end{aligned}
$$

Tudjuk, hogy ha egy számot négyzetre emelünk, akkor az nem lehet negatív, vagyis nincs az egyenletnek megoldása.

117.

118. Mi jut eszünkbe a $x^2 + 2bx + c$ kifejezésről? Hasonlít valamire? Igen, nagyon hasonlóan „kezdődik" az $(x+b)^2$ zárójel nélküli alakja, hiszen az $x^2 + 2bx + b^2$ Nézzük meg, hátha ebből ki tudunk sütni valamit. Hogyan tudjuk átírni ennek alapján a bal oldalt? Az $(x+2)^2$-ben van egy felesleges b^2, viszont nincs c. Vagyis $x^2 + 2bx + c = (x+2)^2 - b^2 + c$. Tehát:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 2bx + c &= 0 \\
(x+b)^2 - b^2 + c &= 0 \\
(x+b)^2 &= b^2 - c
\end{aligned}
$$

Most alapvetően két eset van.
Ha $b^2 - c < 0$, akkor készen is vagyunk, hiszen a bal oldalon egy szám négyzete áll, ami nem lehet negatív. Vagyis ebben az esetben nincs megoldása (gyöke) az egyenletnek.
Ha $b^2 - c \geq 0$, akkor viszont tudunk belőle gyököt vonni, vagyis értelmes a $\sqrt{b^2 - c}$ kifejezés. Viszont vigyáznunk kell, mert ez a kifejezés sosem negatív, viszont a -1-szeresének a négyzete is $b^2 - c$. Vagyis így tudjuk folytatni, ha $b^2 - c \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
(x+b)^2 &= b^2 - c \\
x + b &= \pm\sqrt{b^2 - c} \\
x &= -b \pm \sqrt{b^2 - c}.
\end{aligned}
$$

Összefoglalva: ha $b^2 - c < 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása.
Ha $b^2 - c \geq 0$, akkor van megoldás, és ezek: $x_1 = -b + \sqrt{b^2 - c}$, illetve $x_2 = -b - \sqrt{b^2 - c}$.
Röviden ezt így is írhatjuk:

$$
x_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c}.
$$

Érdemes még megjegyezni, hogy ha $b^2 - c = 0$, akkor ez a két szám megegyezik, vagyis ekkor csak egy gyöke van az egyenletnek. Ekkor ugyanis $c = b^2$, vagyis az egyenlet $x^2 + 2bx + b^2 = 0$ alakú. De ekkor a bal oldal éppen $(x+b)^2$. Vagyis azt kapjuk, hogy $(x+b)^2 = 0$, tehát $x + b = 0$, vagyis: $x = -b$.

119. Alakítsuk át az egyenletet az előző feladat megoldásához hasonlóan. Most az x^2-nek nem 1 az együtthatója, pedig az kellemes volt a múltkor. Szerencsére ezen könnyen segíthetünk, ha az egész egyenletet elosztjuk a-val. (Feltehetjük, hogy $a \neq 0$, hiszen ha 0 lenne, akkor nem is lenne másodfokú az egyenlet.) Ekkor az egyenlet így néz ki:

$$
x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.
$$

Az előbb is segített az az ötlet, hogy próbáljunk egy olyan kifejezést találni, ami $x^2+\frac{b}{a}x$-szel „kezdődik". Tudjuk, hogy ez igaz $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$-re. Ez azonban nem tartalmaz $\frac{c}{a}$-t, cserébe viszont feleslegesen van benne $\frac{b^2}{(2a)^2}$. Ezek alapján folytathatjuk, hogy az átalakítást:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{(2a)^2}+\frac{c}{a}=0.$$

Hagyjuk meg a bal oldalon a teljes négyzetet, a többit vigyük át a jobb oldalra, mert így négyzetgyököt tudunk vonni, és közelebb kerülünk ahhoz, hogy x-et kifejezzük.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}.$$

Ha a jobb oldalon negatív szám áll, akkor nincs megoldása az egyenletnek, hiszen egy szám négyzete nem lehet negatív. Ha viszont $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\geq 0$, akkor tudunk gyököt vonni. De ne felejtsük el, hogy ha egy szám négyzete d, akkor a szám lehet $\sqrt{d}$ és $-\sqrt{d}$ is! Vagyis a gyökvonással két szálon fut tovább a megoldás, de az egyszerűség kedvéért ezt a $\pm$ jel használatával jelezzük.

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}.$$

Innen pedig már csak mindkét oldalból ki kell vonnunk $\frac{b}{2a}$-t, és meg is kaptuk x-et.

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}.$$

A jobb oldali kifejezést még kicsit tudjuk csinosítani (bár ez erősen szubjektív). A következőt tehetjük meg:

$$-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Csak a végeredményt összefoglalva tehát azt kapjuk, hogy az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek 0, 1 vagy 2 gyöke van aszerint, hogy a b^2-4ac kifejezés negatív, 0 vagy pozitív. Ha a $b^2-4ac\geq 0$, akkor a gyök(ök) a következő(k):

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

120. (a) $x^2-5x+4=0$;

Két módon is megoldhatjuk a feladatot.

1) Szorzattá tudjuk alakítani a bal oldali kifejezést. $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$. Tudjuk, hogy ennek a szorzatnak az értéke 0, vagyis legalább az egyik tényezője 0. Ha $x-1=0$, akkor $x=1$, ha pedig $x-4=0$, akkor $x=4$. Az egyenletnek tehát két gyöke van, 1 és 4.

2) Alkalmazhatjuk a megoldóképletet. Mi a szereposztás? Mivel x^2 együtthatója 1, ezért $a=1$, x együtthatója -5, tehát $b=-5$, és a konstans tag 4, vagyis $c=4$. A képlet alapján:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2}.$$

Vagyis két gyök van: $x_1=\frac{5+3}{2}=4$ és $x_2=\frac{5-3}{2}=1$.

(b) $2x - x^2 = 1$;
Ha -ra rendezzük az egyenletet, akkor ezt kapjuk:

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Innen kétféle folytatás is elképzelhető:
1) Észrevehetjük, hogy $x^2-2x+1 = (x-1)^2$. És ha ez a szorzat 0, akkor az azt jelenti, hogy legalább az egyik tényezője 0. Mivel mindkét tényező $x - 1$, ezért ebből az következik, hogy $x - 1 = 0$, vagyis $x = 1$. Ez az egyenlet egyetlen megoldása.
2) Alkalmazzuk a megoldóképletet. A szereposztás most a következő: $a = 1, b = -2, c = 1$.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4-4}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2}.$$

Mivel a gyökjel alatt 0 van, így az egyenletnek csak 1 megoldása van, ami $x = 1$.

(c) $6x + x^2 = -10$;
Adjunk az egyenlet mindkét oldalához 9-et:

$$x^2 + 6x + 9 = -1$$

(Hogy miért pont 9-et? Mert a bal oldalon azt látjuk, hogy $x^2 + 6x$, és az $(x + 3)^2$ nagyon hasonlít ehhez, de ott a konstans tag.) Mivel $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$, vagyis a bal oldal semmiképpen nem negatív, de a jobb oldalon -1 áll, ezért nincs megoldása az egyenletnek.
Ha a megoldóképletet használjuk, akkor is erre jutunk, hiszen a gyökjel alatt szereplő $b^2 - 4ac$ kifejezés (a diszkrimináns) negatív. Az egyenlet ugyanis $x + 2 + 6x + 10 = 0$ alakú, vagyis $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4$.

(d) $2 - 4x + 2x^2 = 0$;
Osszuk le az egyenletet 2-vel, és írjuk a tagokat a bal oldalon a megszokott sorrendbe:

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

A bal oldalon jól ismert kifejezés áll, hiszen az éppen egyenlő $(x-1)^2$-nel. Ahhoz, hogy ez 0 legyen az kell, hogy $x - 1 = 0$ legyen, vagyis az egyenlet egyetlen megoldása $x = 1$.
Ebben az esetben is kijön ugyanez a megoldás a megoldóképlettel is, hiszen most $a = 2, b = -4, c = 2$, vagyis

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16-16}}{4} = \frac{4 \pm 0}{4} = 1.$$

(e) $x^2 + 2 = 4x$;
Ez az egyenlet $x^2 - 4x + 2 = 0$ alakba írható. Alkalmazhatjuk a megoldóképletet, és a következőt kapjuk:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Persze a megoldóképlet alkalmazása nélkül is megkapjuk ezt az eredményt.

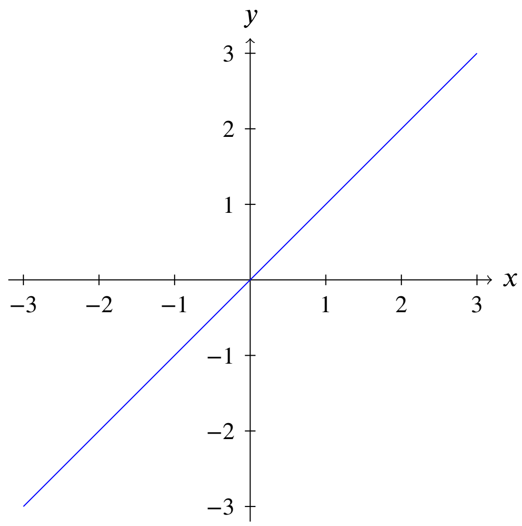
$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 2 &= 0 \\ (x-2)^2 &= 2 \\ x - 2 &= \pm\sqrt{2} \\ x &= 2 \pm \sqrt{2}. \end{aligned}$$

121. Hány lehetőség van az 1 képének, azaz $f(1)$-nek a megválasztására? Nyilván 6, hiszen az A halmaz bármely eleme lehet $f(1)$. Ettől függetlenül $f(2)$ is lehet bármelyik eleme A-nak. És ez igaz az értelmezési tartomány mind a 6 elemére. Mivel ezek független választások, és mind a 6 esetben 6 lehetőségünk van, ezért a függvények száma $6^6 = 46656$.

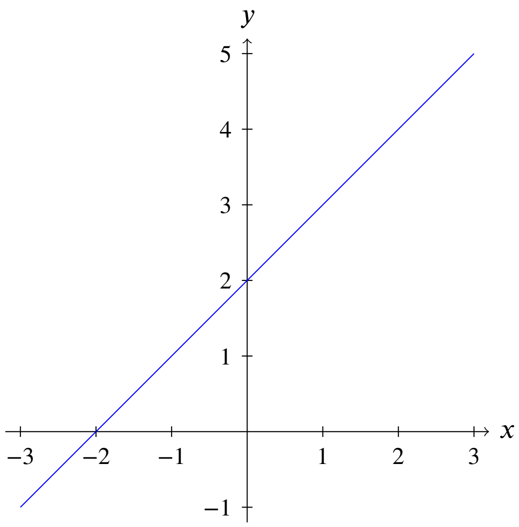
122. Mivel az összes hal 85%-a ponty, ezért összesen 680 ponty van a tóban összesen ($800 \cdot 0,85 = 680$). Vagyis 120 harcsa van a tóban. A harcsák mind az első napon érkeztek, és az első napi halállomány 16%-át tették ki. Ha 120 hal 16%, akkor a teljes halmennyiség 750 halból áll: hiszen $120 \cdot \frac{100}{16} = 750$. Vagyis az első nap 750 hal érkezett, így a második napon 50. MIvel a második napon csak ponty érkezett, ezért a kérdésre a válasz: 50.

123. A feltétel azt jelenti, hogy minden A-beli elemhez különböző elemet kell rendelnünk, mert ha lenne két elem, amelyeknek a képe ugyanaz, akkor lenne olyan elem A-ban, ami semminek sem képe. Nézzük ennek fényében, hogy hányféle lehetőség van $f(1)$ választására. Nyilván ez még bármi lehet, vagyis 6 lehetőségünk van. Mi a helyzet $f(2)$-vel? Itt már nincs ilyen nagy szabadságunk, mert az elején említett feltétel miatt $f(1)$-et már nem választhatjuk. Vagyis csak 5 lehetőségünk van. Tehát az első két függvényérték megválasztása $6\dot{5} = 30$ féle lehet. Amikor $f(3)$ értékét keressük, akkor már sem $f(1)$-et, sem $f(2)$-t nem választhatjuk, így már csak 4 lehetőségünk van. Folytatva ezt a gondolatmenetet a függvények száma: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6! = 720$.

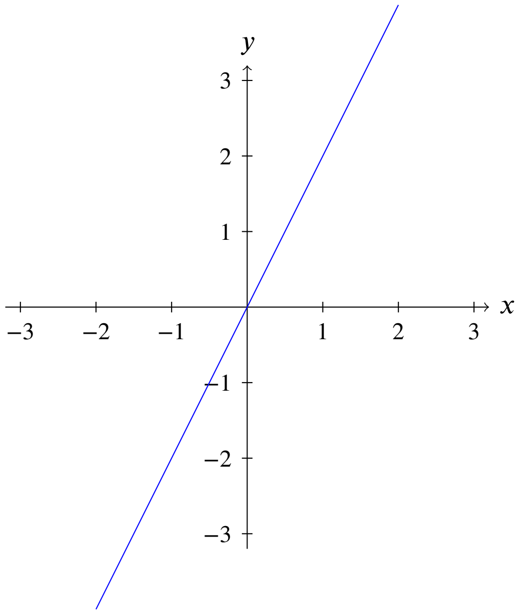
124. (a) $f(x) = x$:



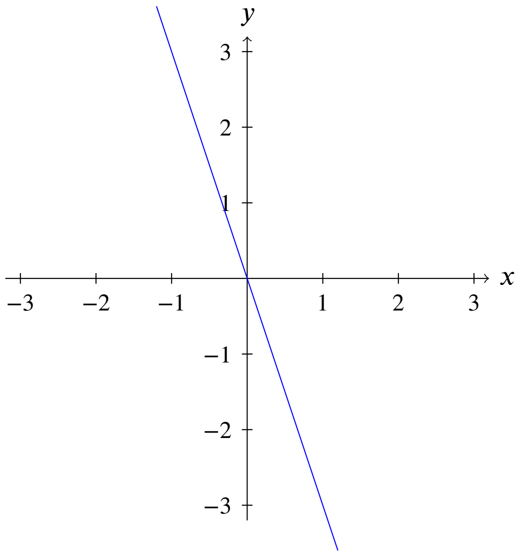
(b) $f(x) = x + 2$:



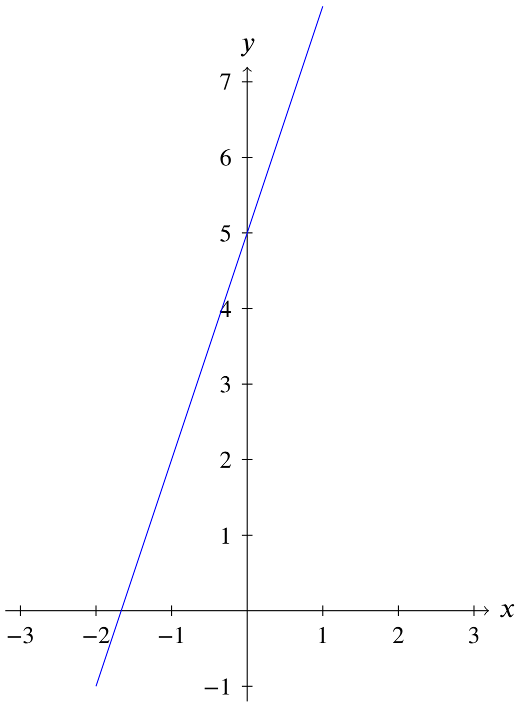
(c) $f(x) = 2x$:



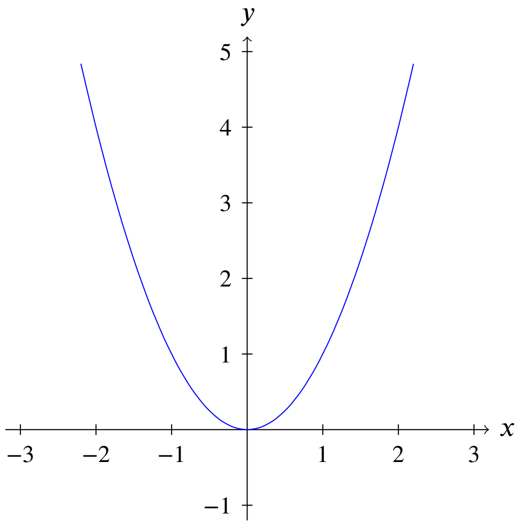
(d) $f(x) = -3x$:



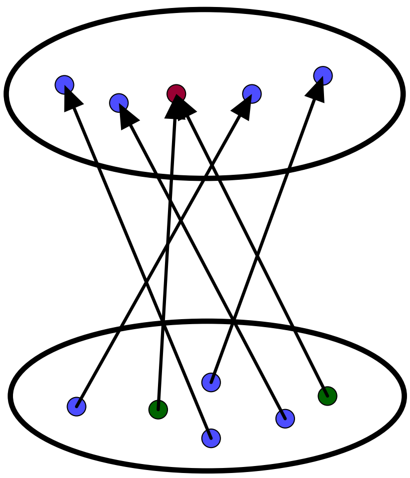
(e) $f(x) = 3x + 5$:



(f) $f(x) = x^2$:

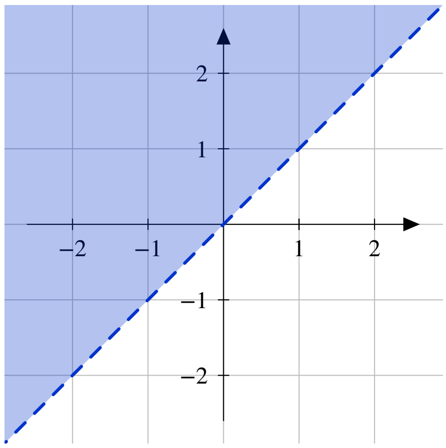


125. Csak úgy lehet az értékkészlet 5-elemű, ha két elemhez ugyanazt rendeljük, az összes többi elemhez pedig különböző elemeket.



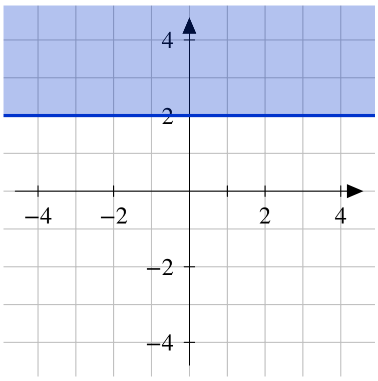
Válasszuk ki azt a két elemet, amelyekhez ugyanazt az értéket fogjuk rendelni. Ezt megtehetjük $\binom{6}{2} = 15$-féleképpen. Ehhez a két elemhez 5-féle értéket rendelhetünk rendelhetünk. A halmaz további elemeihez pedig rendre 4, 3, 2, 1 lehetőségünk van. Így tehát a függvények száma: $\binom{6}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \binom{6}{2} \cdot 5! = 15 \cdot 120 = 1800$.

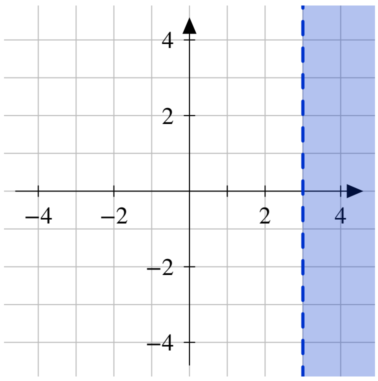
126. (a) $x < y$:

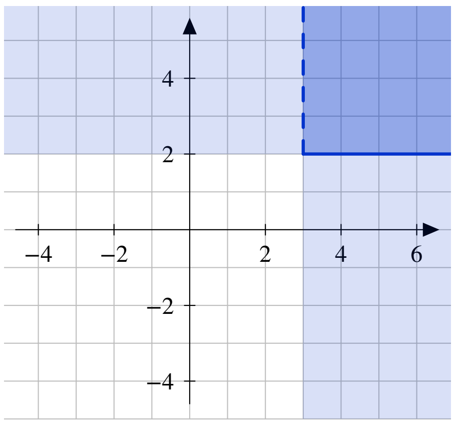


(b) $y \geq 2$ és $x > 3$:

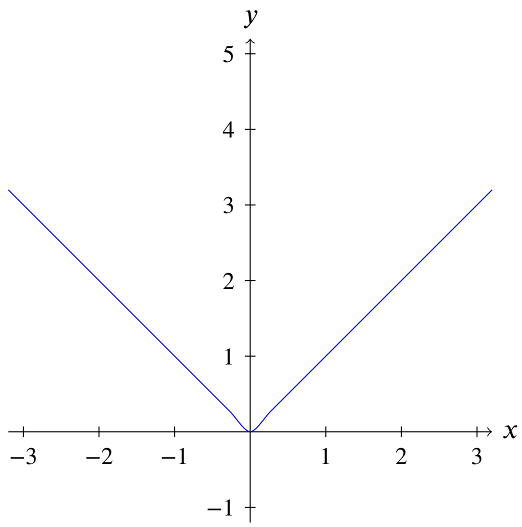
Az első két ábrán láthatjuk a két feltételnek külön megfelelő ponthalmazokat. Mivel a két feltétel **és**sel van összekötve, ezért mindkettőnek teljesülnie kell, vagyis a két halmaz **metszet**e adja meg a helyes eredményt, amit a harmadik ábrán láthatunk sötétkékkel jelölve.



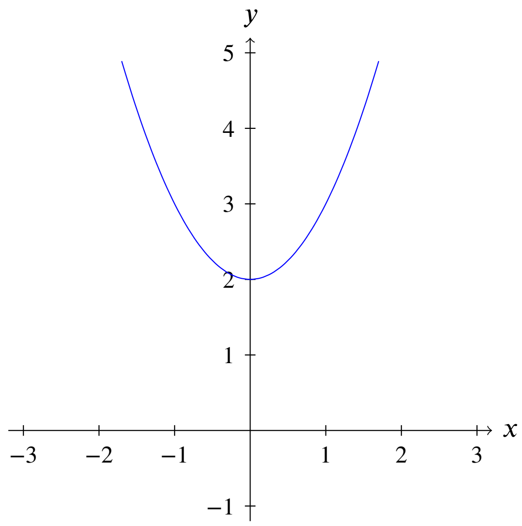




127. (a) $f(x) = |x|$:



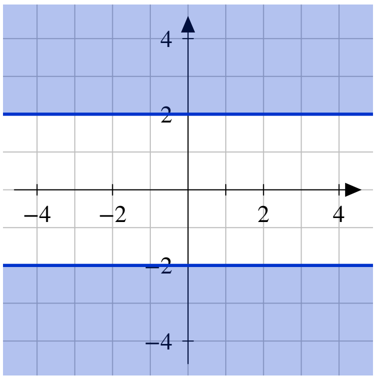
(b) $f(x) = x^2 + 2$:



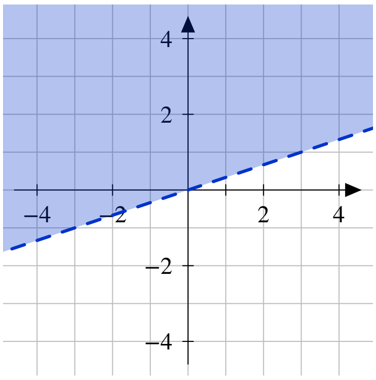
128. Ilyen szám nincs. A szám jegyeinek összege 30, vagyis a szám osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel. Viszont ilyen négyzetszám nem létezhet, hiszen a szám prímfelbontásában szerepel a 3, de mivel négyzetszám, így legalább 2-szer. Ekkor azonban osztható lenne 9-cel.

129. Nézzük meg, hogy a különböző függvényértékekre hány lehetőségünk van. Mivel 1 páratlan, ezért $f(1)$ is páratlan, vagyis 1, 3 vagy 5, azaz 3 lehetőségünk van. Ez igaz minden páratlan számra, vagyis $f(3)$, $f(5)$ és $f(7)$ is 3-féle lehet.
Mi a helyzet $f(2)$-vel? Mivel 2 páros, ezért $f(2)$ is páros, vagyis csak 2 vagy 4 lehet.
Emiatt $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ és $f(8)$ értéke kétféle lehet. Így összesen: $2^4 \cdot 3^4 = 6^4 = 36^2 = 1296$ megfelelő függvény van.

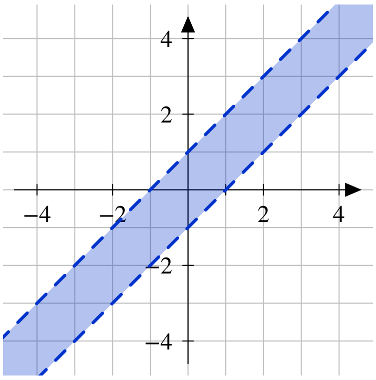
130. (a) $|y| \geq 2$:



(b) $x < 3y$:
Segít, ha megnézzük, hogy mikor teljesül egyenlőség, vagyis $x = 3y$. Ezt átalakíthatjuk így: $y = \frac{1}{3}x$, vagyis ez egy origón átmenő, $\frac{1}{3}$ meredekségű egyenes pontjaiban igaz. Nézzük meg, hogy az egyenlőtlenség az egyenes melyik oldalán teljesül. Mivel a $(0; 1)$ pontra igaz, hogy $x < 3y$, ezért a „felső” félsíkban teljesül az eredeti egyenlőtlenség.

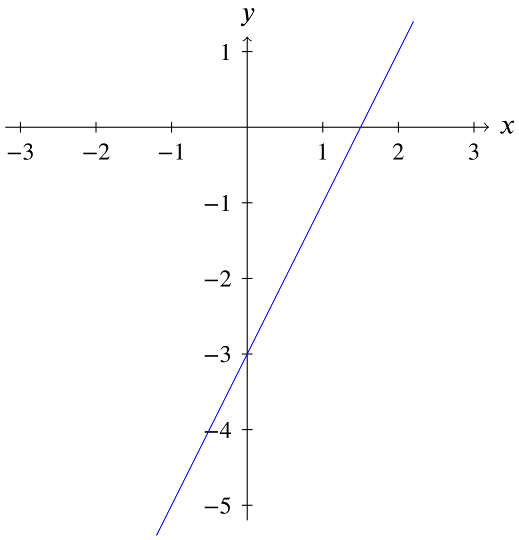


(c) $|x - y| < 1$:

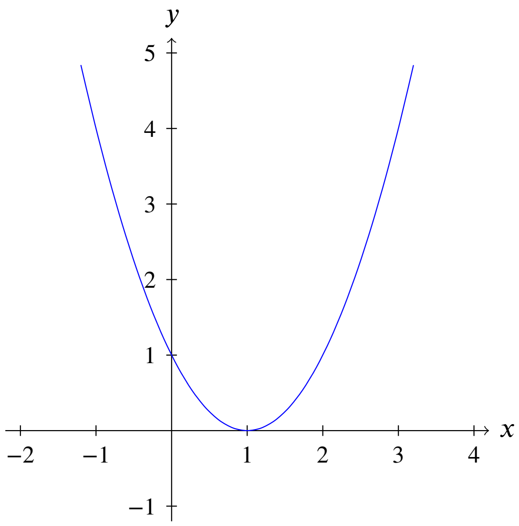


131. Mivel $(n, 24) = 6$, ezért n biztosan osztható 6-tal, vagyis a prímtényezői között biztosan szerepel egy 2-es és egy 3-as. Szerepelhet-e több 2-es? Nem, mert 24 osztható 4-gyel, ezért ha n-ben több 2-es lenne, akkor osztható lenne 4-gyel, és akkor nem 6 lenne a legnagyobb közös osztójuk. Milyen prímtényezők szerepelhetnek még n-ben? Csak olyanok, amelyek a 120-ban is szerepelnek, és legfeljebb annyiszor, ahányszor ott, hiszen a 120 többszöröse n-nek. Mivel $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, ezért a 2 és a 3 csak első kitevőn lehet n-ben. Annyi választásunk maradt, hogy az 5-öt bevesszük vagy sem. Vagyis két szám jön szóba, a 6 és a 30. Ellenőrizhetjük, hogy mindkét szám megfelel a feltételeknek.

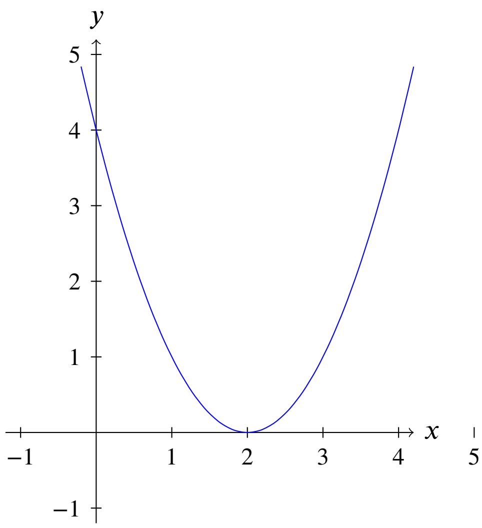
132. (a) $f(x) = 2x - 3$:



(b) $g(x) = (x-1)^2$



(c) $h(x) = x^2 - 4x + 4$



133. (a) $|R_f| = 7$:
Mivel az értelmezési tartomány 6-elemű, ezért az értékkészlet is legfeljebb 6-elemű, hiszen minden elemhez pontosan egy másikat rendelünk.
Vagyis nincs ilyen függvény.

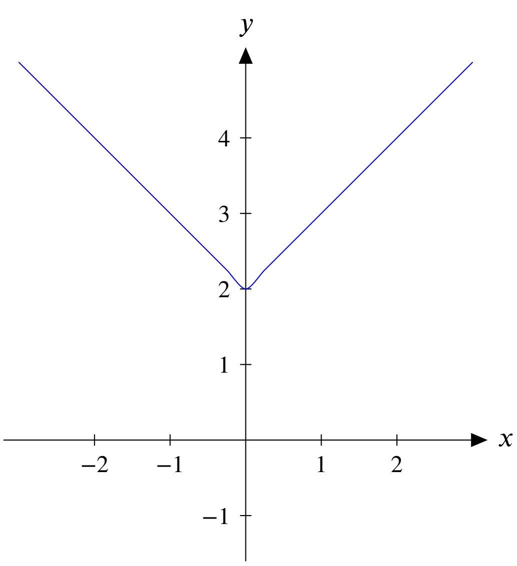
(b) $|R_f| = 6$:
Ebben az esetben minden elemhez különböző értéket kell rendelnünk. $f(1)$ értéke 9-féle lehet, hiszen a $\boldsymbol{B}$ halmaz bármely elemét választhatjuk. $f(2)$ értéke bármi lehet, kivéve $f(1)$-et, vagyis már csak 8 lehetőségünk van. $f(3)$ értéke bármi lehet, kivéve $f(1)$-et és $f(2)$-t, vagyis már csak 7 lehetőségünk van. Ezt folytatva végül azt kapjuk, hogy $f(6)$ már csak 4-fél lehet. Vagyis a függvények száma $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60480$.
Észrevettük, hogy ez így is írható:

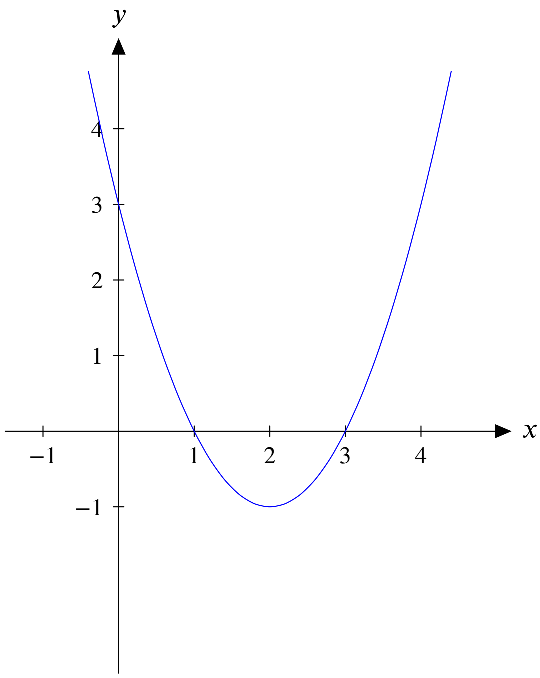
$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{9!}{3!}.$$

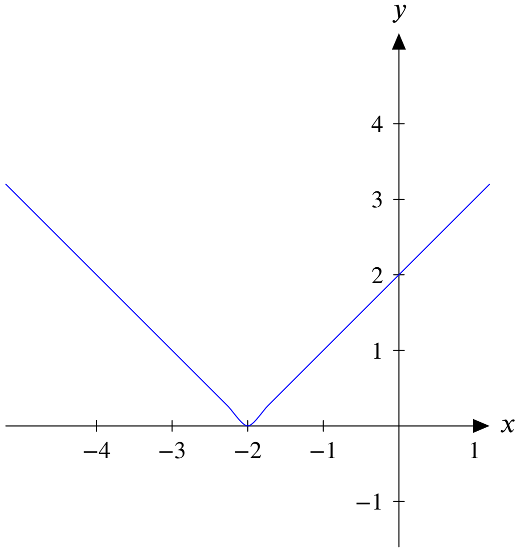
(c) $|R_f| = 5$:
Ha 5-elemű az értékkészlet, akkor van két elem az értelmezési tartományban, amihez ugyanazt az elemet rendeltük, a többi 4 elemhez pedig csupa különbözőt, amelyek különböznek attól az elemtől is, amit kettőhöz rendeltünk.
Az értelmezési tartomány két elemét, amihez ugyanazt rendeljük, $\binom{6}{2}$-féleképpen választhatjuk meg, és az ehhez a két számhoz rendelt érték 9-féle lehet, hiszen $\boldsymbol{B}$ bármely elemét választhatjuk. A következő elemhez már csak 8-félét rendelhetünk, hisz amit az előbb hozzárendeltünk, azt már nem választhatjuk. A következő elemhez megint eggyel kevesebbet és így tovább. Vagyis a függvények száma:

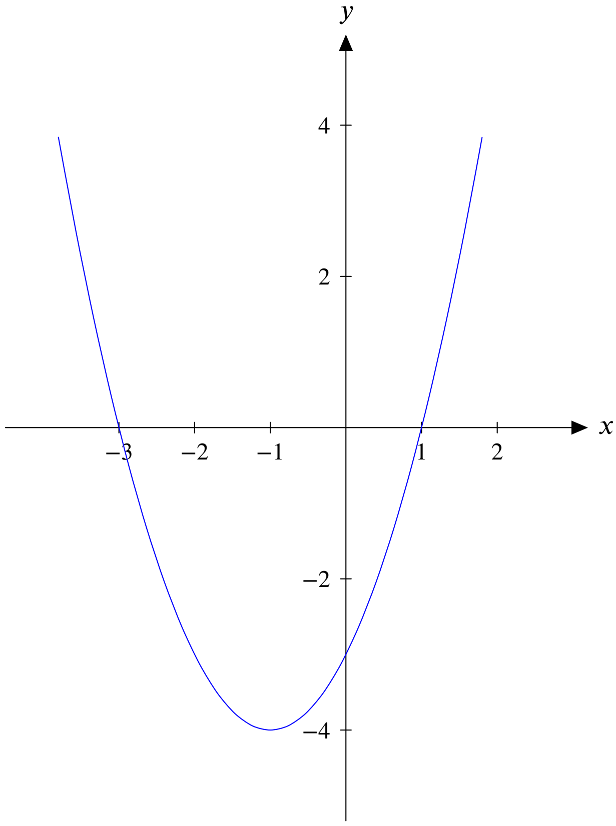
$$\binom{6}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5.$$

134. A függvények grafikonjai:

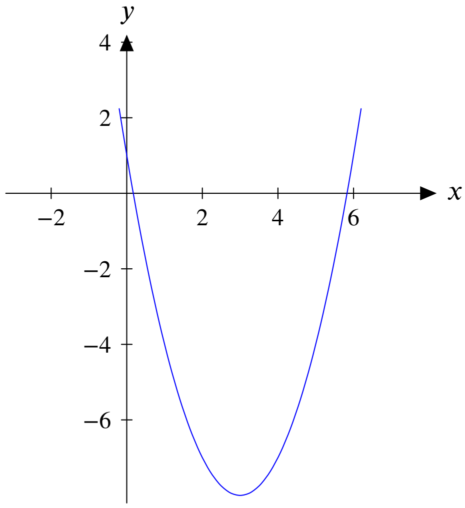


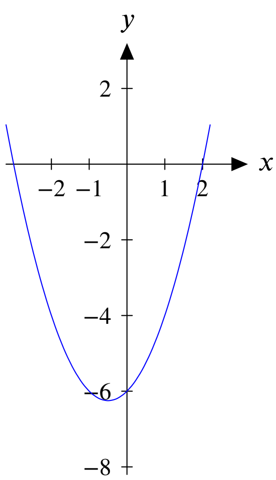


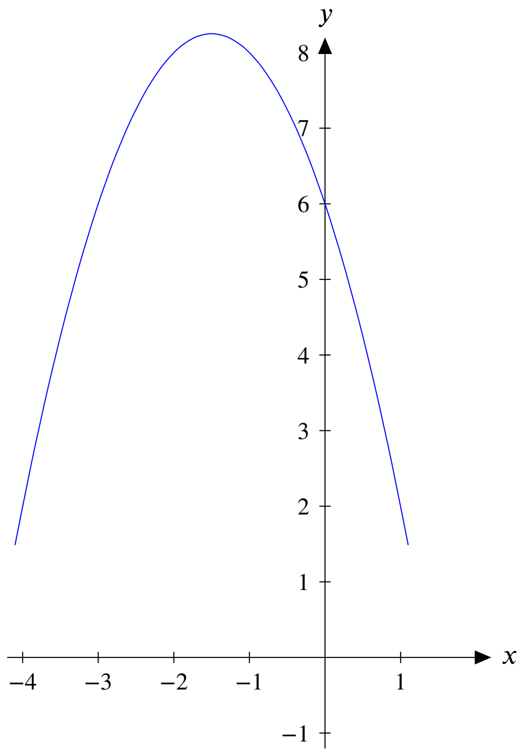


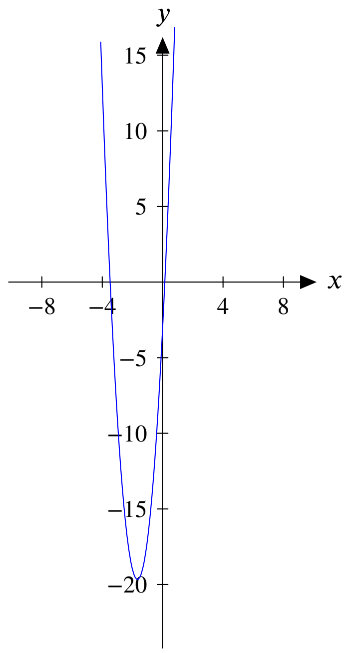


135. A függvények grafikonjai:









136.

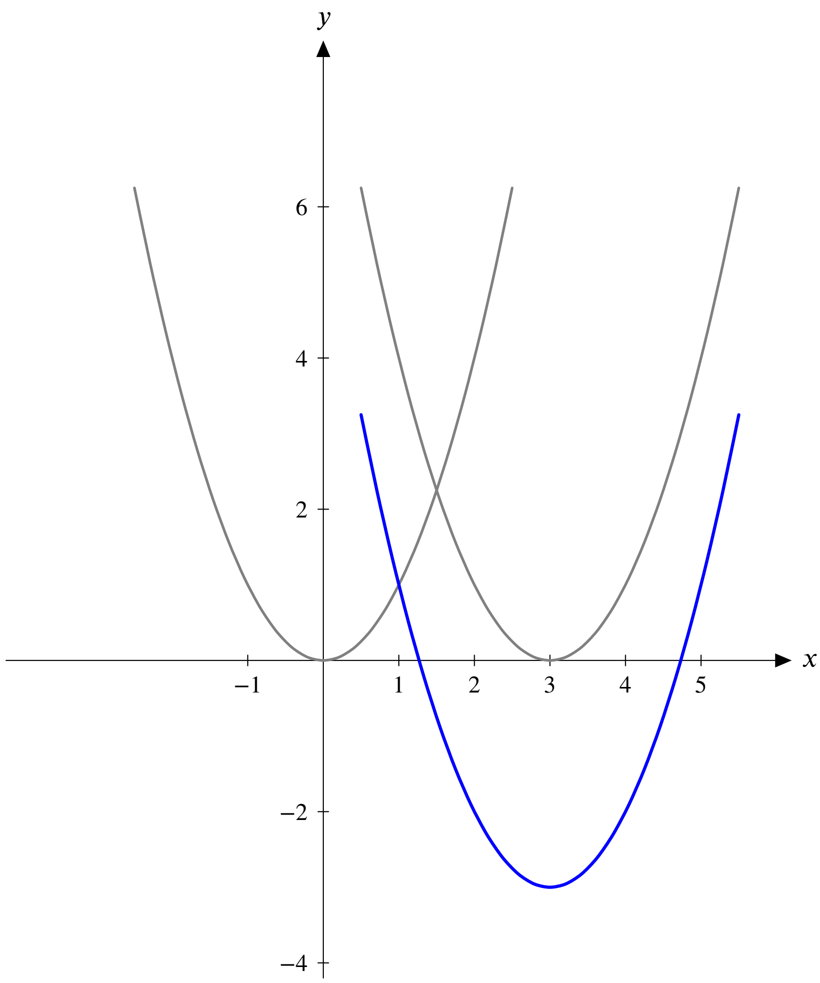
137. Rajzoljuk fel a grafikonokat lépésenként:

(a) $f(x) = |x - 3| + 1$
Először gondoljuk meg, hogy milyen az $f_1(x) = |x|$ függvény grafikonja, aztán, hogy milyen az $f_2(x) = |x - 3|$ függvényé, és végül, hogy milyen a kérdéses függvényé:

(b) $g(x) = x^2 - 6x + 6$.
Kicsit alakítsuk át a polinomot:

$$g(x) = x^2 - 6x + 6 = (x - 3)^2 - 3.$$

Ezt követően gondoljuk meg, hogy milyen a $g_1(x) = x^2$ függvény grafikonja, aztán, hogy milyen a $g_2(x) = (x - 3)^2$ függvényé, és végül, hogy milyen a kérdéses függvényé:



138. (a) 0 páros elem:
Ez azt jelenti, hogy csak a páratlanok közül választhatunk. 5 páratlan szám van, ennek az 5-elemű halmaznak 32 (2^5) részhalmaza van, így a válasz 32.

(b) 1 páros elem:
5-féleképpen megválaszthatjuk azt az egyetlen páros elemet (hiszen 5 páros szám van), és tetszőlegesen választhatunk páratlanokat, amire szintén 32 lehetőségünk van. Vagyis a megfelelő halmazok száma $5 \cdot 2^5 = 160$.

(c) 2 páros elem:
$\binom{5}{2}$-féleképpen megválaszthatjuk azt a két páros elemet (hiszen 5 páros szám van és abból kell kettőt választani), és tetszőlegesen választhatunk páratlanokat, amire ismét 32 lehetőségünk van. Vagyis a megfelelő halmazok száma $\binom{5}{2} \cdot 2^5 = 320$.

139. (a) $5x - 12$:
Ha $5x - 12 = 0$, akkor $5x = 12$, vagyis $x = \frac{12}{5}$. Tehát a polinomnak pontosan 1 gyöke van?
Onnan is látszik ez, hogy a függvény grafikonja egy egyenes, amelynek a meredeksége 5, így pontosan 1 pontban metszi az x-tengelyt.
Általában igaz az, hogy egy elsőfokú polinomnak pontosan 1 gyöke van.

(b) $2x^2 - 12x + 3$:
Ha megvizsgáljuk a diszkriminánst, akkor a következőt kapjuk: $D = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 144 - 24 = 120$. Vagyis $D > 0$, így a polinomnak pontosan 2 gyöke van.

Elképzelhetjük a grafikont is:

$$2x^2 - 12x + 3 = 2(x^2 - 6x + 1,5) = 2((x-3)^2 - 7,5).$$

Vagyis az x^2 parabolát eltoljuk 3-mal jobbra, majd lefelé 7,5-tel, és mindent megszorzunk 2-vel. Mivel lefelé toltuk a parabolát, így két metszéspontja lesz az x tengellyel és ezen a 2-vel szorzás sem változtat. Vagyis 2 gyök van.

(c) $x^2 - 3x + 2,25$:
Ismét nézhetjük a diszkriminánst: $D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2,25 = 9 - 9 = 0$. Vagyis $D = 0$, így a polinomnak pontosan 1 gyöke van.
Ha átalakítjuk a kifejezést, akkor ezt kapjuk: $x^2 - 3x + 2,25 = (x - 1,5)^2$, vagyis a grafikon érinti az x tengelyt, így pontosan 1 gyöke van.

(d) $x^3 - 4x^2 - 15x + 18$

140. Nem lehetséges. Ha egy számnak 7 darab 1-es és 5 darab számjegye van, akkor a számjegyek összege 7, vagyis a szám 3-mal osztva 1 maradékot ad. Ha a két szomszédos szám közül az egyik osztható 3-mal, akkor a szorzat is, így nem lehet a 3-as maradék 1. De az is elképzelhető, hogy a két szám között nincs 3-mal osztható. Ez viszont csak úgy lehet, ha az egyik 1, a másik 2 maradékot ad 3-mal osztva. Ezek szorzatának maradéka viszont 2. Ezzel beláttuk, hogy két szomszédos egész szám szorzata van osztható 3-mal, vagy 2 maradékot ad 3-mal osztva.

141. (a) $f(x) = -2x + 2$:
Tetszőleges előre megadott c szám esetén van megoldása a $-2x + 2 = c$ egyenletnek. Ebből következik, hogy a függvény minden valós értéket felvesz, vagyis $R_f = \mathbb{R}$.

(b) $g(x) = x^2 + 4x - 1$:
A kifejezést átalakítva ezt kapjuk: $g(x) = x^2 + 4x - 1 = (x+2)^2 - 5$. Ebből látszik, hogy a függvény -5-nél kisebb értéket nem vehet fel, hiszen $(x+2)^2$ nem lehet negatív. Viszont -5-öt és minden nagyobb értéket felvesz. Vagyis $D_g = [5; \infty[$.

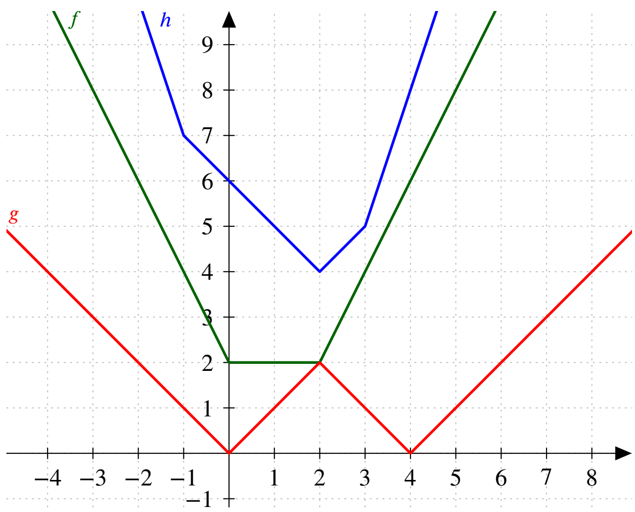
(c) $h(x) = 2x - x^2 + 4$:
Alakítsuk át egy kicsit a kifejezést:

$$h(x) = 2x - x^2 + 4 = -x^2 + 2x + 4 = -(x^2 - 2x - 4) = -\left((x-1)^2 - 8\right)$$

(d) $j(x) = |x + 4| - 3$;

A függvények grafikonját felrajzolva is könnyen megállapítható az értékkészlet.

142. Mindhárom függvényt egy koordináta-rendszerben ábrázoljuk:



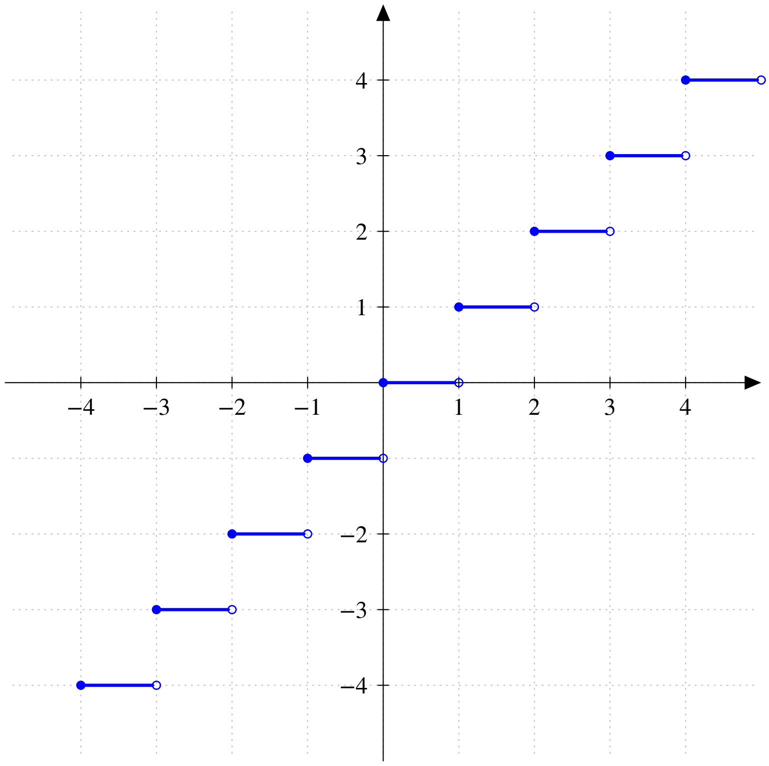
Az értékkészleteket leolvashatjuk a grafikonokról:

(a) $D_f = [0; \infty[$.

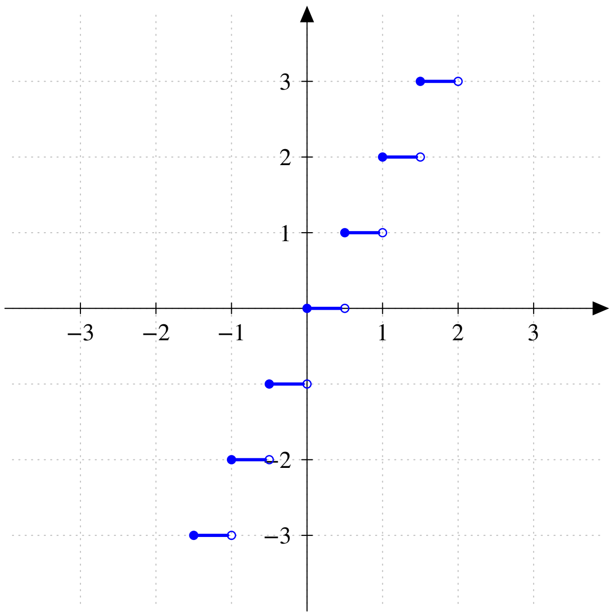
(b) $D_g = [2; \infty[$.

(c) $D_h = [4; \infty[$.

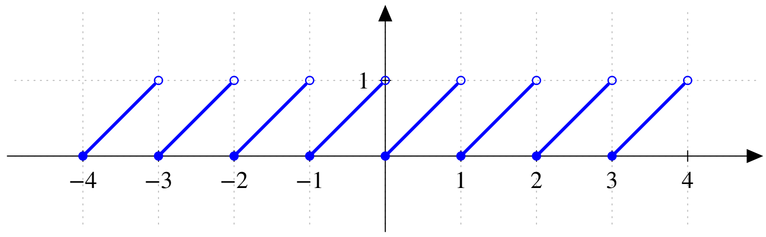
143. (a) $f(x) = [x]$



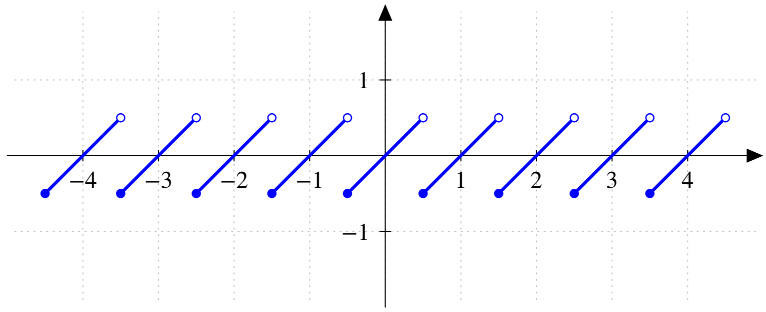
(b) $g(x) = [2x]$



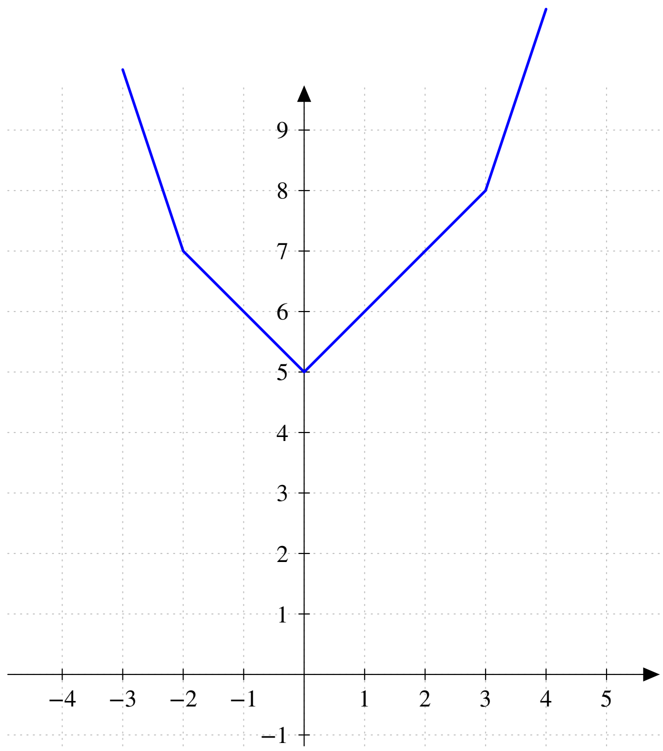
(c) $h(x) = \{x\}$



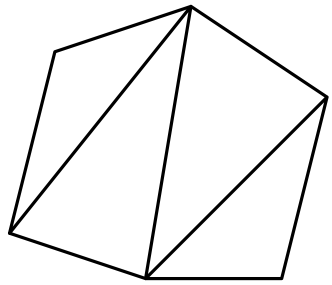
(d) $j(x) = \left\{x - \frac{1}{2}\right\} - \frac{1}{2}$



144. $f(x) = |x - 3| + |x| + |x + 2|$



145. Egy hatszög szögeinek összege mindig 720°. Egy hatszöget 3 átlójával mindig 4 háromszögre bonthatunk, és a háromszögek belső szögei éppen kiadják a hatszög belső szögeit. Azt pedig már tudjuk, hogy egy háromszög belső szögeinek összege 180°, így a hatszögé $4 \cdot 180° = 720°$.

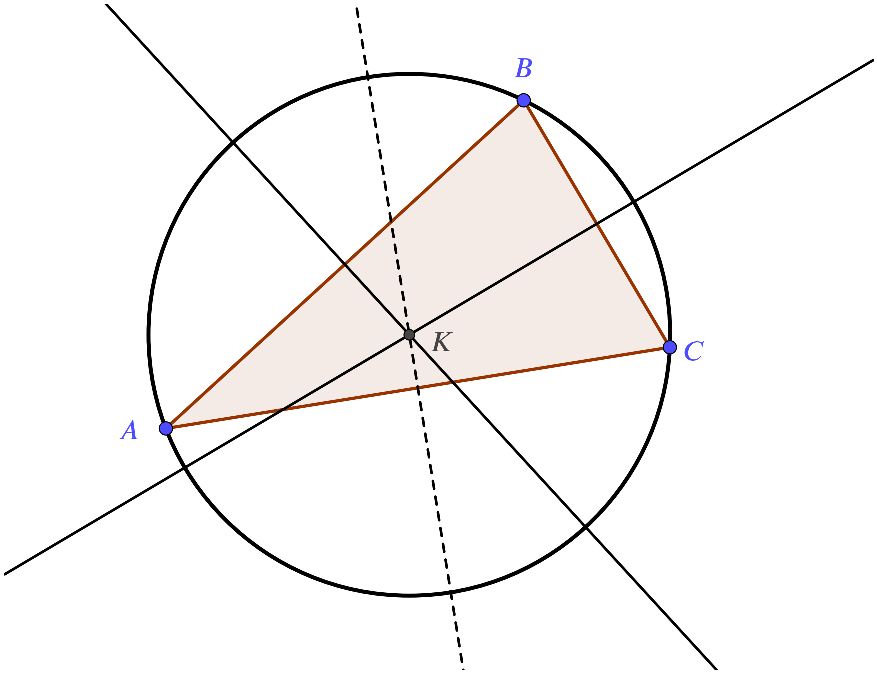


Konvex hatszög esetén viszonylag nyilvánvaló, hogy mindig 4 háromszögre lehet bontani, de konkávra ez már nem teljesen triviális.
Általában is igaz, hogy egy n-szöget mindig $n-2$ háromszögre lehet felbontani az átlói segítségével, így az n-szög belső szögeinek összege mindig $(n-2) \cdot 180^{\circ}$.

146. Teljesülnie kell a háromszögegyenlőtlenségnek, vagyis a két legrövidebb oldal hosszának összege határozottan nagyobb, mint a legnagyobb oldal hossza. Emiatt legalább 3 cm és legfeljebb 13 cm lehet a háromszög harmadik oldala, hiszen az oldalak egész számok.

147.

148. Igen, ilyen kör mindig van.
Mit tudunk ennek a körnek a középpontjáról? Hogy a háromszög minden csúcsától egyenlő távolságra van. Hogy tudunk ilyen pontot találni?
Először keressünk olyanokat, amelyek két csúcstól (mondjuk A-tól és B-től) egyenlő távolságra vannak. Ilyen pont rengeteg van, hiszen ezek a pontok éppen az AB felezőmerőlegesének pontjai. (Vagyis a felezőmerőleges minden pontja rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, és csak ezek a pontok, vagyis az egyenesen kívüli pontok egyike sincs egyenlő távolságra A-tól és B-től.)
Vagyis a kör középpontja biztosan rajta van az AB felezőmerőlegesén.
De hasonló gondolatmenettel látható, hogy rajta kell lennie a BC oldal felezőmerőlegesén is, hiszen a B és C csúcsoktól is egyenlő távolságra kell lennie. Mivel ez a két egyenes sosem lehet párhuzamos, ezért pontosan egy metszéspontjuk van (K), ez lesz a kör középpontja.
Érdemes megjegyezni, hogy a harmadik oldal felezőmerőleges is átmegy persze K-n. Hiszen a K pont rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy minden csúcstól egyenlő távolságra van, így speciálisan az A és C csúcsoktól vett távolsága is egyenlő, vagyis rajta van az AC szakasz felezőmerőlegesén.



149. Tudjuk, hogy összesen 2^{20} részhalmaza van ennek a halmaznak. Ezek közül azok **nem** felelnek meg a feltételnek, amelyekben nincs, vagy pontosan egy hárommal osztható elem van. Mivel összesen hat 3-mal osztható szám van, ezért azok száma, amelyekben nincs 3-mal osztható: 2^{14}.
Ha éppen egy 3-mal osztható elemet akarunk garantálni a halmazban, akkor ezt választhatjuk 6-féleképpen, és a 14 darab 3-mal nem osztható szám közül még tetszőlegesen válogathatunk. Vagyis az ilyen halmazok száma: $6 \cdot 2^{14}$.
Vagyis a kérdésre a válasz:

$$2^{20} - 2^{14} - 6 \cdot 2^{14} = 2^{20} - 7 \cdot 2^{14} = 57 \cdot 2^{14}.$$

150.

151. (a) Egy átlót meghatároz a két csúcsa. Az első csúcsot kiválaszthatjuk 15-féleképpen, a másodikat pedig 12-féleképpen, hiszen az elsőre választott csúcsot, illetve a két szomszédját nem választhatjuk. Így minden átlót kétszer számoltunk, vagyis az átlók száma:

$$\frac{15 \cdot 12}{2} = 90.$$

(b) Bármely három csúcsot kiválasztjuk, azok meghatároznak egy háromszöget. (Mivel a szabályos 15-szög semelyik 3 csúcsa nem esik egy egyenesre.) Emiatt $\binom{15}{3} = 455$ átlója van a sokszögnek.

(c) Mindössze 5 szabályos háromszöget határoznak meg a csúcsok.

(d) A b) feladathoz hasonlóan most is igaz, hogy ha kiválasztunk 4 csúcsot, akkor azok meghatároznak pontosan egy négyszöget. Így a négyszögek száma: $\binom{15}{4} = 1365$.

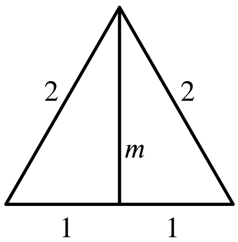
152. Egy n-szög átlóinak száma $\frac{n(n-3)}{2}$. Tudjuk, hogy esetünkben ez a szám 54. Vagyis:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 54$$
$$n(n-3) = 108$$
$$n^2 - 3n = 108$$
$$n^2 - 3n - 108 = 0$$
$$(n-12)(n+9) = 0$$

Ebből látszik, hogy $n = 12$ vagy $n = -9$. Mivel n a sokszög csúcsainak száma, így nem lehet negatív. Vagyis egy 12-szögről van szó.

153.

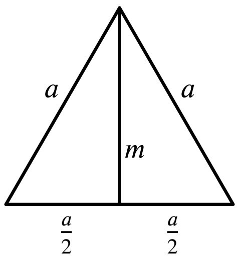
154. Mivel szabályos a háromszög, így minden oldala egyenlő hosszúságú. Ebből következik, hogy az oldalai 2 cm hosszúak. Húzzuk be a háromszög egyik magasságát. Ez két egybevágó, derékszögű háromszögre osztja a háromszöget.



Pitagorasz-tétel segítségével könnyen ki tudjuk számítani a magasság hosszát (m), hiszen:

$$1^2 + m^2 = 2^2$$
$$m^2 = 2^2 - 1^2$$
$$m = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

Általában is elmondható, hogy az a oldalú szabályos háromszög magassága: $m = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.



$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + m^2 = a^2$$
$$m^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$m = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

155.

156. Legyen a téglalap rövidebbik oldala x. Ekkor a hosszabb oldal $x + 3$, a téglalap területe pedig $x(x + 3)$. Vagyis

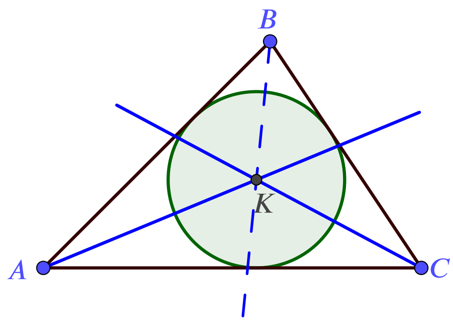
$$x(x + 3) > 40.$$

Ezt átalakíthatjuk a

$$x^2 + 3x - 40 > 0$$

formára. Milyen x-ekre lesz a másodfokú kifejezés pozitív? Tudjuk, hogy egy ilyen függvény grafikonja egy parabola. Mivel most x^2 együtthatója pozitív, ezért ez egy „felfelé" néző parabola. Vagyis a két gyökön kívüli tartományban lesz pozitív a függvényérték. Mi a két gyök? Mivel $x^2 + 3x - 40 = (x + 8)(x - 5)$, ezért a gyökök -8 és 5. (Ezt a megoldóképlettel is megkaphatjuk.) Vagyis két esetben pozitív a kifejezés értéke, ha $x < -8$ vagy $x > 5$. Mivel egy téglalap oldalhosszát jelöli x, így az csak pozitív lehet, tehát azt állapíthatjuk meg, hogy a téglalap rövidebbik oldala legalább 5 cm hosszúságú.

157. Igen, ilyen kör mindig van. Egy ilyen kör középpontja egyenlő távolságra van minden oldaltól. Hol keressünk ilyen pontot? Először keressünk olyan pontokat, amik két oldaltól egyenlő távolságra vannak. Ezek a pontok a két oldal által létrehozott szög szögfelezőjén vannak. Ha tehát olyan pontot keresünk, ami az AB és AC oldalakról egyenlő távolságra van, akkor az a $BAC\sphericalangle$ szögfelezőjén lesz. Hasonlóan a $BCA\sphericalangle$ szögfelezőjén lévő pontok egyenlő távolságra vannak a BC és az AC oldalaktól. Így a két szögfelező metszéspontja olyan pont, ami mindhárom oldaltól egyenlő távolságra. Ha tekintjük ezt a távolságot és ezt választjuk a kör sugarának, és a pontot a kör középpontjának, akkor egy olyan kört kapunk, ami érinti a háromszög minden oldalát. Ezt nevezzük a háromszög **beírt kör**ének.



Érdemes észrevenni, hogy a harmadik szögfelező is átmegy a másik két szögfelező metszéspontján. Hiszen az a pont egyenlő távolságra van mindhárom oldaltól, így az AB és BC oldalaktól is. Elmondhatjuk tehát, hogy a háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást.

158.

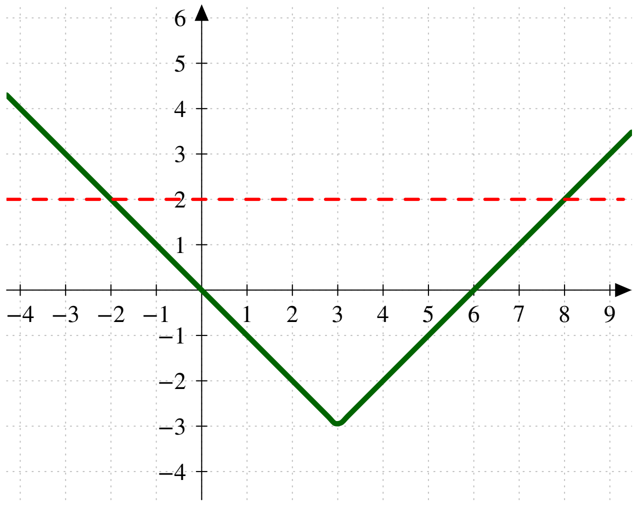
159.

160.

161. Nevezzük a számot x-nek. Ekkor ezt tudtuk meg x-ről:

$$|x - 3| - 3 < 2.$$

Innen két úton is célba érhetünk.
1) Ábrázoljuk a jobb oldalon lévő függvény grafikonját:



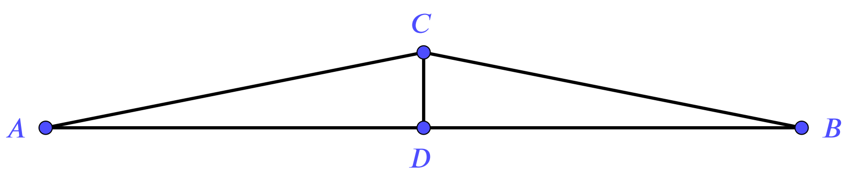
Az a kérdés, hogy a grafikon mikor van az $y = 2$ egyenes alatt.
Az ábráról könnyen leolvashatjuk, hogy ez akkor teljesül, ha $-2 < x < 8$.
2) Algebrai út:

$$\begin{aligned} |x-3| - 3 &< 2 \\ |x-3| &< 5 \end{aligned}$$

Két részre bonthatjuk a lehetőségeket.
Ha $x - 3 \geq 0$, akkor az abszolútérték nem változtat az értékén, vagyis $x > 3$ esetén az egyenlőtlenség: $x-3 < 5$ alakú. Ami azt jelenti, hogy $x < 8$. Ebből tehát azt kapjuk, hogy $3 \leq x < 8$ értékek megoldásai az egyenlőtlenségnek.
Ha $x - 3 < 0$, akkor az abszolútérték ellentettjére változtatja $x - 3$ értékét, vagyis $x < 3$ esetén az egyenlőtlenség: $3-x < 5$ alakú. Ami azt jelenti, hogy $x > -2$. Ebből tehát azt kapjuk, hogy $-2 \leq x < 3$ értékek megoldásai az egyenlőtlenségnek.
A megoldás tehát ennek a két halmaznak az uniója, vagyis $-2 < x < 8$.
Másképpen írva: $x \in]-2; 8[$.

162.

163. Rajzoljunk egy ábrát.



A kötél eredetileg 1000 m hosszúságú volt, így $AB = 1000$ m, vagyis $AD = DB = 500$ m. Miután 1 m-t betoldottunk, kaptuk az ACB töröttvonalat, emiatt $AP = PB = 500,5$ m. Kérdés az, hogy mekkora a CD szakasz hossza. Ezt azonban Pitagorasz-tétellel könnyen kiszámíthatjuk, hiszen:

$$\begin{aligned} AD^2 + CD^2 &= AC^2 \\ 500^2 + CD^2 &= 500,5^2 \\ CD^2 &= 500,5^2 - 500^2 \\ CD &= \sqrt{500,5^2 - 500^2} = \sqrt{500,25} \approx 22,37. \end{aligned}$$

Azt kaptuk, hogy így több mint 22 méterrel megemelhető a kötél a középső pontnál, vagyis egy átlagos ember (de még egy jól megtermett zsiráf is) könnyedén átfér alatta.

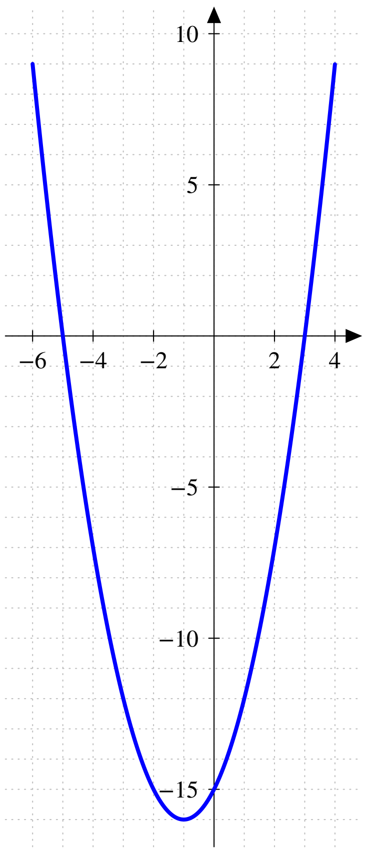
164.

165.

166. Rendezzük 0-ra az egyenlőtlenséget:

$$20 - x^2 - 2x \geq 5$$
$$0 \geq x^2 + 2x - 15.$$

A jobb oldal képe egy „felfelé” nyíló parabola:



így akkor lesz nempozitív a jobb oldal, ha x a két gyök közé esik.
A grafikonból (de akár a megoldóképletből is) jól látszik, hogy a gyökök: $x_1 = -5$ és $x_2 = 3$.
Vagyis a megoldás: $-5 \leq x \leq 3$. (Más módon: $x \in [-5; 3]$.)

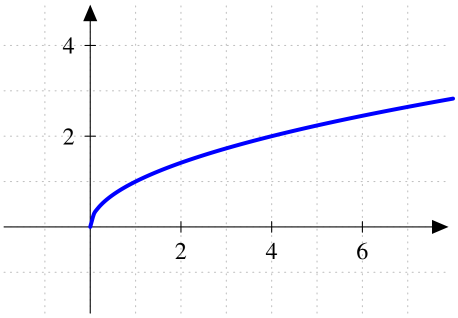
167. Tudjuk, hogy $11250 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^4$.

(a) Páratlan osztóban nem lehet 2-es prímtényező, de a 3 és az 5 kitevője tetszőleges lehet, így $3 \cdot 5 = 15$ lehetősg van a kitevőkre, így 15 páratlan osztó van.

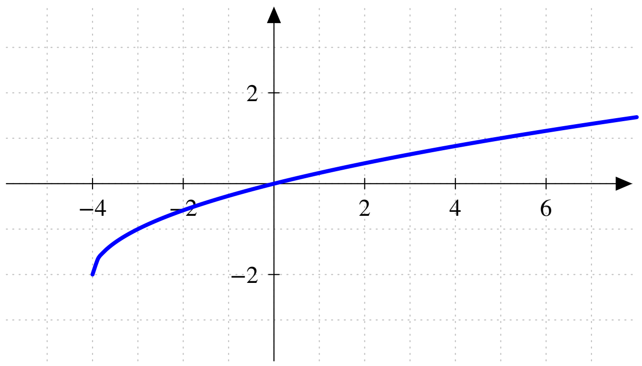
(b) Ahhoz, hogy 5-tel osztható legyen egy osztó, az 5 kitevőjének legalább 1-nek kell lennie. Vagyis a 2 kitevője lehet kétféle, a 3 kitevője háromféle, és az 5 kitevője négyféle. Vagyis $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ olyan osztója van, ami 5-tel osztható.

(c) Mivel az eredeti szám sem osztható 12-vel, így egyetlen osztója sem.

168. (a) $f(x) = \sqrt{x}$.



(b) $g(x) = \sqrt{x+4} - 2$.
Ha a $\sqrt{x}$ függvény grafikonját ismerjük, akkor ebből könnyen megkapjuk a $\sqrt{x+4}$ grafikonját, hiszen csak el kell tolnunk 4-gyel balra. Ha ebből kivonunk 2-t, akkor a grafikont lefelé kell letolnunk 2-vel.



169. Ha a háromszög kerülete 12 cm, akkor minden oldala 4cm hosszú. Tudjuk, hogy egy a oldalú szabályos háromszög területe: $T = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Ez alapján ennek a háromszögnek a területe: $T = \frac{\sqrt{3}}{4}4^2 = 4\sqrt{3}$.
Azt is tudjuk, hogy $T = rs$, és már tudjuk T és s értékét is, hiszen: $s = \frac{K}{2} = 6$. Ebből: $r = \frac{T}{s} = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

170. Először vegyük észre, hogy a gyökjel alatt nem lehet negatív kifejezés, így $x \geq -4$. Másrészt, ahhoz, hogy egy szám gyöke nagyobb legyen mint 2, az kell, hogy a négyzete nagyobb legyen, mint 4. (Ez azért igaz, mert nem-negatív számok körében nagyobb szám négyzete nagyobb.) Vagyis:

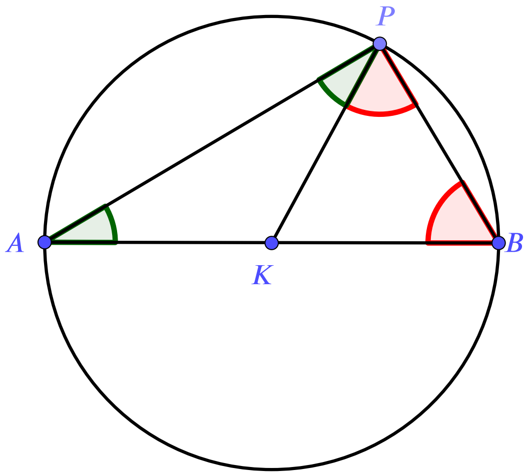
$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} &> 2 \\ x+4 &> 4 \\ x &> 0 \end{aligned}$$

Mivel $x > 0$ esetben a gyökjel alatt pozitív szám van, így az egyenlőtlenség megoldása $x > 0$.

171. Ennek a számnak a prímtényezős felbontásában feltétlenül kell szerepelnie két 5-ösnek, hiszen egyébként egyetlen osztója sem lenne, ami osztható 25-tel. Az egyéb prímek kitevőinél annyi döntési lehetőségünknek kell lennie, hogy azok szorzata 28 legyen. Mivel $28 = 2^2 \cdot 7$, ezért 28 osztóinak kell lennie a döntési lehetőségek számának.
Végtelen sok megfelelő szám van.
Pl. 5^{29}, hiszen ekkor azok a jó osztók, amelyekben az 5 kitevője legalább 2. Ez éppen 28 lehetőség, hiszen 2-től 29-ig bárminek választhatjuk a kitevőt.

Hasonlóan jó a $2^{27} \cdot 5^2$, hiszen itt az 5 kitevőjében nincs döntési lehetőségünk, a 2 kitevője pedig 0-tól 27-ig bármi lehet.
Megfelelő szám a $2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^6$ is. Itt ugyanis a 2 kitevőjénél 2, a 3 kitevőjénél 2, a 7 kitevőjénél pedig 7 lehetőségünk van, tehát 28 megfelelő osztó van.
Precíz bizonyítás nélkül állapítjuk meg, hogy a legkisebb megfelelő szám: $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2$.

172. A kísérletezés azt mutatja, hogy azok a pontok, amelyekből derékszögben látszik a szakasz, éppen egy körön vannak. Ennek a körnek a középpontja épp a szakasz felezőpontja, a sugara pedig a szakasz hosszának a fele. Ezt nevezzük a szakasz, mint átmérő fölé írt körnek. Ennek a körnek – a szakasz két végpontját leszámítva – minden pontjából derékszögben látszik a szakasz. (Ez Thalész-tétele.) A többi pontból pedig nem derékszögben látszik. (Ez Thalész-tételének megfordítása, amit úgy is fogalmazhatunk, hogy ha a szakasz egy pontból derékszögben látszik, akkor rajta van ezen a körön.) A körön belüli pontokból tompa-, a körön kívüli pontokból pedig hegyesszögben látszik a szakasz.
A Thalész-tétel egy lehetséges bizonyítása:



Vegyünk fel az AB szakasz, mint átmérő fölé írt körön egy P pontot. Thalész-tétele szerint ekkor az $APB\sphericalangle$ derékszög. Kössük össze P-t a kör középpontjával, K-val. Ekkor két egyenlőszárú háromszög keletkezik. Az egyik az APK, a másik a BPK háromszög. Az egyenlőszárú háromszög két alapon fekvő szöge egyenlő, vagyis $KAP\sphericalangle = APK\sphericalangle$, illetve $KBP\sphericalangle = BPK\sphericalangle$. (Ezt az ábrán az egyforma színek jelölik.) Az ABC háromszög szögeinek összegét épp két piros és két zöld szög összege adja ki, vagyis ennek a négy szögnek az összege 180^o. Az $APB\sphericalangle$ éppen egy piros és egy zöld szög összege, vagyis az éppen derékszög, és ezt akartuk belátni.

173. (a)

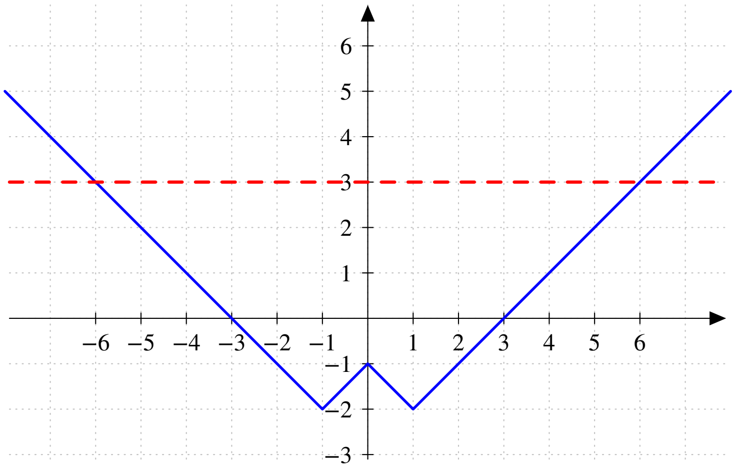
$$|x| - 1 < 2$$
$$|x| < 3$$

Vagyis $-3 < x < 3$, amit így is írhatunk: $x \in]-3; 3[$.

(b) $|x - 1| \geq 2$.
Ez azt jelenti, hogy az x távolsága a számegyenesen az 1-től nagyobb, mint 2. Vagyis ez azt jelenti, hogy $x \leq -1$ vagy $x \geq 3$. Intervallumokkal kifejezve: $x \in]-\infty; -1] \cup [3; \infty[$.

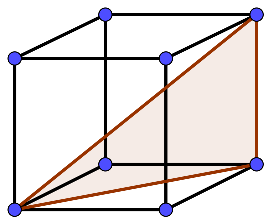
(c) $||x| - 1| - 2 < 3$.
Oldjuk meg a feladatot grafikusan. Ábrázoljuk először a bal oldalt: az $|x|$ grafikonját le kell tolnunk

1 egységgel, ezt követően az x tengely alatti részt tükrözzük az x tengelyre, majd a kapott grafikont ismét letoljuk 2-vel.



Az ábrán jól látható, hogy mikor lesznek a függvényértékek 3-nál kisebbek: ha $x < -6$ vagy $x > 6$. Másképpen: $x \in]-\infty; 6[\cup]6; \infty[$.

174. Tekintsük az alábbi ábrát.



Ebben a piros háromszög egyik oldala a kocka egyik éle, a másik egy lapátlója, a harmadik pedig a testátlója. Tudjuk, hogy az él 1cm hosszú, a lapátló $\sqrt{2}$ cm hosszú, így a t testátló hosszára fel tudjuk írni a Pitagorasz-tételt:

$$t^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 = 3$$

Ebből kapjuk, hogy $t = \sqrt{3}$.

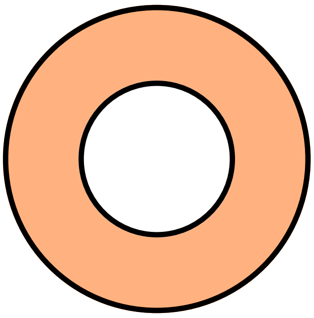
175. Tudjuk, hogy az r sugarú kör kerülete $2r\pi$, területe pedig $r^2\pi$.

(a) A 90°-os körcikk épp egy negyedkör. Így területe a teljes kör területének negyede: $T_1 = \frac{2^2\pi}{4} = \pi$. A kerülete két sugárnyi szakaszból áll, illetve a kör kerületének negyedéből. Vagyis $K_1 = 2{\cdot}2 + \frac{2\cdot 2\cdot \pi}{4} = 4 + \pi$.

(b) A helyzet nagyon hasonló a 45°-os körcikknél, hiszen az éppen nyolcada a teljes körnek. Emiatt a területe: $T_2 = \frac{\pi}{2}$, kerülete pedig: $K_2 = 4 + \frac{\pi}{2}$.

(c) Hasonló a helyzet a 60°-os körcikk esetében is. Ez a teljes kör hatoda. Ennek megfelelően a területe:$T = \frac{2^2\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$. A határoló körív hossza pedig hatoda a teljes körívnek, vagyis $\frac{2\cdot 2\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$. Tehát a teljes kerület: $4 + \frac{2}{3}\pi$.

(d) A teljes kör területéből le kell vonnunk a középen lévő kör területét. $T_4 = 2^2\pi - 1^2\pi = 3\pi$. A kerülete pedig a két kör kerültének az összege: $K_4 = 2 \cdot 2 \cdot \pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi = 6\pi$.



176. Legyen a befogók hossza x, ekkor az átfogó hossza $x + 2$. Mivel a háromszög derékszögű, ezért a Pitagorasz-tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$x^2 + x^2 = (x+2)^2.$$

Ez egy másodfokú egyenlet, amit meg tudunk oldani:

$$\begin{aligned} 2x^2 &= x^2 + 4x + 4 \\ x^2 &= 4x + 4 \\ x^2 - 4x - 4 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{4^2 + 4 \cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} = 2 \pm \sqrt{8}. \end{aligned}$$

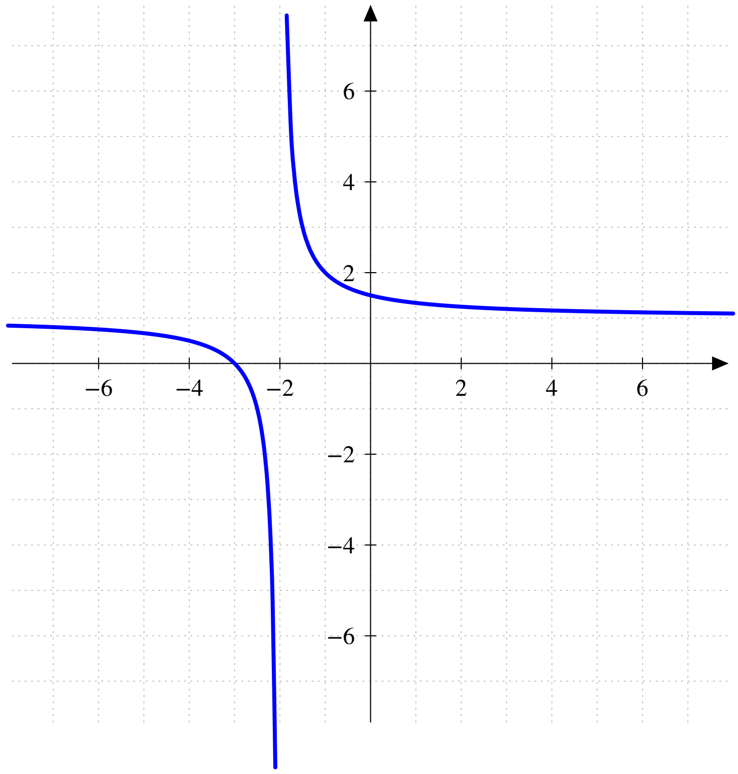
Mivel $2 - \sqrt{8}$ negatív, és egy háromszög oldalhossza nem lehet negatív, ezért egyetlen megoldás van, amikor $x = 2 + \sqrt{8}$. Ekkor a kerület:

$$K = x + x + (x+2) = 3x + 2 = 3\left(2 + \sqrt{8}\right) + 2 = 8 + 3\sqrt{8} \approx 16{,}5.$$

177. (a) $f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$

Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvény grafikonját már ismerjük, ez alapján induljunk el.

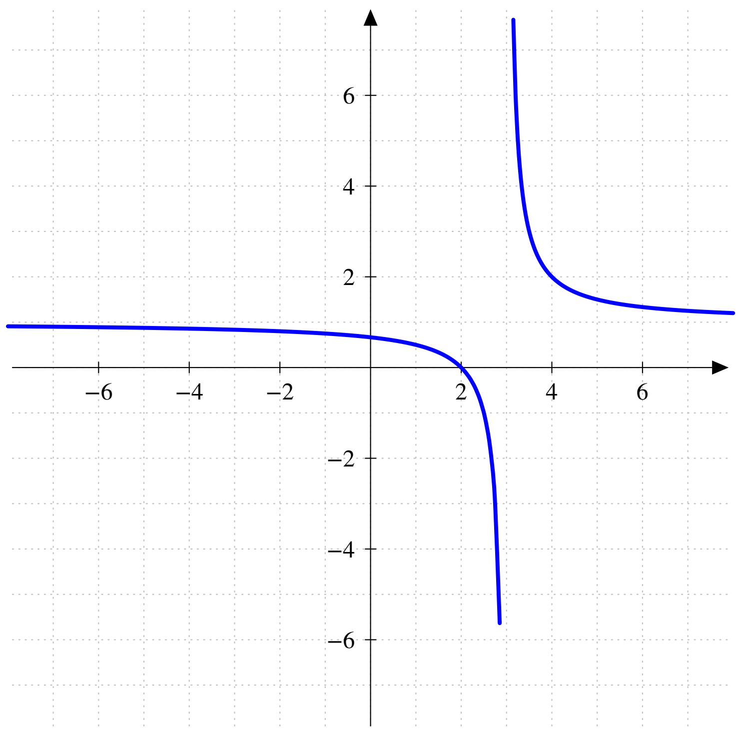
A nevezőben lévő $x + 2$ miatt toljuk el a grafikont balra, majd a $+1$ miatt 1-gyel felfelé. Így kapjuk a helyes grafikont.



(b) $g(x) = \frac{x-2}{x-3}$
Alakítsuk át egy kicsit az algebrai kifejezést.

$$g(x) = \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-3+1}{x-3} = 1 + \frac{1}{x-3}.$$

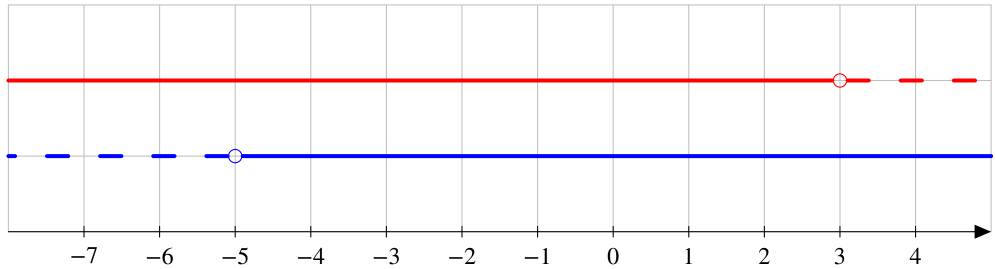
Ez pedig az előző feladat alapján könnyen tudjuk ábrázolni, hiszen most 3-mal jobbra és 1-gyel felfelé kell tolni az $\frac{1}{x}$ grafikonjaként előálló hiperbolát.



178. Két lehetőséget is mutatunk a megoldásra:
Az első.

$$\frac{6-2x}{x+5} \leq 0$$

A tört értéke 0, ha a nevező nem 0, a számláló pedig 0. Tehát $x = 3$ esetén a jobb oldal 0.
Egy tört értéke akkor negatív, ha a számláló és a nevező előjele különböző. Mikor lesz $6 - 2x$ pozitív? Ha $x < 3$.
Mikor lesz $x + 5$ pozitív? Ha $x > -5$.
Ábrázolhatjuk az előjeleket:



Az eredményt most már könnyen leolvashatjuk az ábráról: a tört értéke tehát akkor negatív vagy 0, $x < -5$ vagy $x \geq 3$.
(Intervallumokkal: $x \in]-\infty; -5[\cup [3; \infty[$.)
A második.
A nevezőt szívesen eltüntetnénk, ami egy szorzással lehetséges is. De nagyon óvatosnak kell lennünk, ugyanis nem tudjuk, hogy a nevező milyen előjelű. Márpedig ha negatív, akkor meg kell fordítanunk a relációs jelet. Ezért a nevező előjelétől függően két részre kell választanunk a megoldást.
Az első rész, amikor a nevező pozitív, vagyis $x > -5$. Ekkor:

$$\begin{aligned}
\frac{6-2x}{x+5} &\leq 0 \\
6-2x &\leq 0 \cdot (x+5) \\
6-2x &\leq 0 \\
6 &\leq 2x \\
3 &\leq x.
\end{aligned}$$

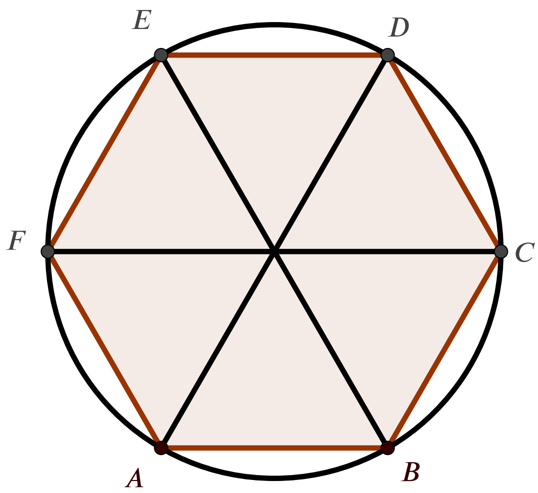
Vagyis azt kaptuk, hogy ha $x \geq 3$, akkor teljesül az eredeti egyenlőtlenség is.
A második rész, amikor a nevező negatív, vagyis $x < -5$. Ekkor:

$$\begin{aligned}
\frac{6-2x}{x+5} &\leq 0 \\
6-2x &\geq 0 \cdot (x+5) \\
6-2x &\geq 0 \\
6 &\geq 2x \\
3 &\geq x.
\end{aligned}$$

Vagyis azt kaptuk, hogy ha $x < -5$, akkor teljesül az eredeti egyenlőtlenség is, hiszen ebben az esetben az a feltétel, hogy $3 \geq x$, de az ezen a tartományon automatikusan teljesül.
Tehát így is azt kapjuk, hogy $x < -5$ vagy $x \geq 3$ esetén teljesül az egyenlőtlenség.

179. A szám prímtényezős felbontásában biztosan van két 3-as, hiszen csak így lehetnek 9-cel osztható osztói. Ezen kívül csak 2, 5 és 7 lehetnek a prímosztók, hiszen nincs 10-nél nagyobb prímosztója. A megfelelő osztók megszámolásánál 10-et kapunk, ami kétféleképpen jöhet ki. Vagy egy helyen van 10 választási lehetőségünk, vagy két választási lehetőség van, az egyik esetben 2, a másik esetben 5 lehetséges opcióval.
10 lehetőség: $3^{11}, 2^9 \cdot 3^2, 3^2 \cdot 5^9, 3^2 \cdot 7^9$. Az első esetben ha meg akarjuk számolni a 9-cel osztható osztókat, akkor a 3 kitevője legalább 2, legfeljebb 11, ami éppen 10 lehetőség. Hasonlóan pl. $3^2 \cdot 5^9$ esetén a 3 kitevőjénél nincs választási lehetőségünk, az 5 kitevője viszont 0-tól 9-ig bármi lehet.
$2 \cdot 5$ lehetőség: Amikor a 3 kitevőjénél is van választásunk: $2^4 \cdot 3^3, 3^3 \cdot 5^4, 3^3 \cdot 7^4$, illetve $2 \cdot 3^6, 3^6 \cdot 5, 3^6 \cdot 7$.
Amikor a 3 kitevőjénél nincs választásunk: $2 \cdot 3^2 \cdot 5^4, 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5, 2 \cdot 3^2 \cdot 7^4, 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7, 3^2 \cdot 5 \cdot 7^4, 3^2 \cdot 5^4 \cdot 7$.

180. Nezzük meg az alábbi ábrát:

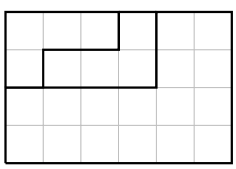
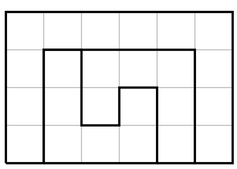
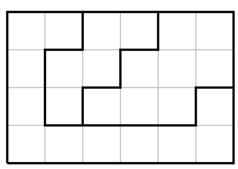


Mivel 6 egyenlő részre osztottuk a kör középpontjánál lévő szöget, így mindegyik keletkező szög 60°-os. A középpontból a csúcsokhoz vezető szakaszok mind egyenlők a kör sugarával, tehát az ábrán látható háromszögek 60°-os, egyenlőszárú háromszögek, vagyis szabályosak. Emiatt a hatszög oldala is 3 cm. Vagyis a kerülete 18 cm. A területét pedig megkapjuk 6 szabályos háromszög területének összegeként. Mivel tudjuk, hogy az a oldalú szabályos háromszög területe $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, ezért a hatszög területe:

$$T = 6\frac{\sqrt{3}}{4}3^2 = \frac{27\sqrt{3}}{2}.$$

181. Minden esetben több megoldás is elképzelhető. Egy-egy példa:

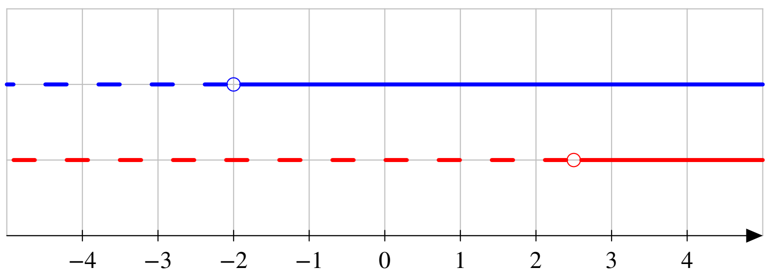
(a) Három hatszög: (b) Három nyolcszög: (c) Három tízszög:

182. Most is két lehetőséget is mutatunk a megoldásra:
Az első.

$$\frac{4x-1}{x+2} > 2$$
$$\frac{4x-1}{x+2} - 2 > 0$$
$$\frac{4x-1}{x+2} - \frac{2(x+2)}{x+2} > 0$$
$$\frac{(4x-1)-2(x+2)}{x+2} > 0$$
$$\frac{2x-5}{x+2} > 0$$

Innentől már működik az a módszer, hogy egy tört értéke akkor pozitív, ha a számláló és a nevező előjele megegyezik. Mikor lesz $2x-5$ pozitív? Ha $x > 2,5$.
Mikor lesz $x+2$ pozitív? Ha $x > -2$. Ábrázolhatjuk az előjeleket:



A tört értéke tehát akkor pozitív, ha a két előjel megegyezik, vagyis $x < -2$ vagy $x > 2,5$ esetén.
(Intervallumokkal: $x \in]-\infty; -2[\cup]2,5; \infty[$.)
A második.
A nevezőt szívesen eltüntetnénk, ami egy szorzással lehetséges is. De ahogy már korábban is láttuk, óvatosnak kell lennünk. Ugyanis nem tudjuk, hogy a nevező milyen előjelű. Márpedig ha negatív, akkor meg kell fordítanunk a relációs jelet. Ezért a nevező előjelétől függően két részre kell választanunk a megoldást.
Az első rész, amikor a nevező pozitív, vagyis $x > -2$. Ekkor:

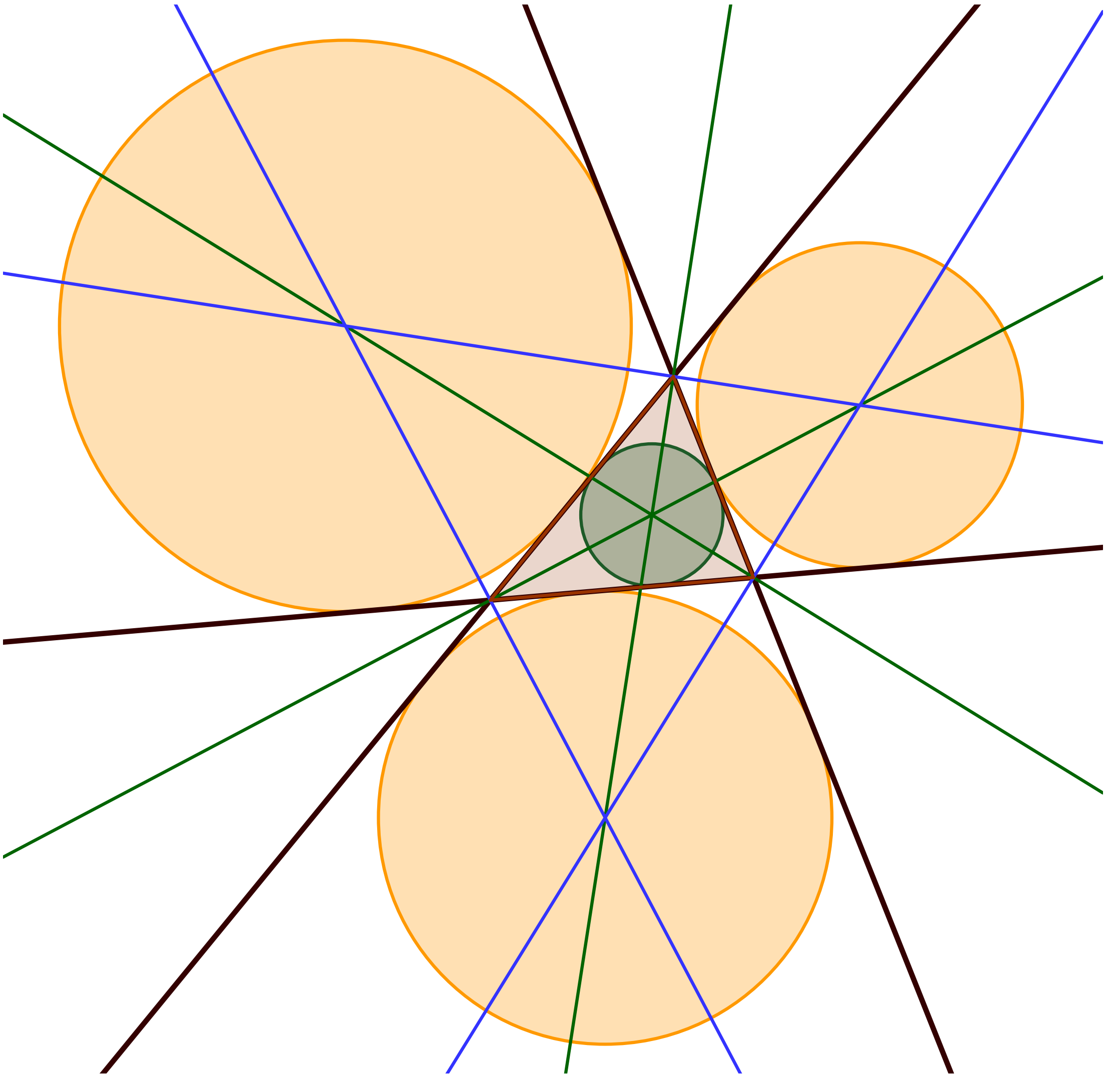
$$\frac{4x-1}{x+2} > 2$$
$$4x-1 > 2(x+2)$$
$$4x-1 > 2x+4$$
$$2x > 5$$
$$x > 2,5$$

Vagyis azt kaptuk, hogy ha $x > 2,5$, akkor teljesül az eredeti egyenlőtlenség is.
A második rész, amikor a nevező negatív, vagyis $x < -2$. Ekkor:

$$\frac{4x-1}{x+2} > 2$$
$$4x-1 < 2(x+2)$$
$$4x-1 < 2x+4$$
$$2x < 5$$
$$x < 2,5$$

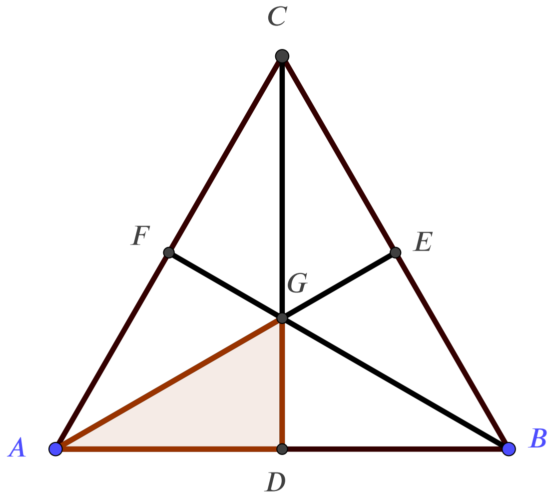
Vagyis azt kaptuk, hogy ha $x < -2$, akkor teljesül az eredeti egyenlőtlenség is, hiszen ebben az esetben az a feltétel, hogy $x < 2,5$, de az ezen a tartományon automatikusan teljesül.
Tehát így is azt kapjuk, hogy $x < -2$ vagy $x > 2,5$ esetén teljesül az egyenlőtlenség.

183. Négy ilyen kör van. Egyet már ismerünk, hiszen a beírt kör megfelel a feltételeknek. Van azonban még három, ezeket **hozzáírt kör**öknek nevezzük.



Az ábrán a zöld egyenesek a háromszög **belső szögfelező**i, a kékek a **külső szögfelező**i. A beírt körhöz hasonlóan könnyen meggondolható, hogy a hozzáírt kör középpontja két külső és egy belső szögfelező metszéspontja.

184. Első megoldás. Osszuk fel a háromszöget az ábrán látható módon 6 derékszögű háromszögre:



A jelzett derékszögű háromszög (ADG) egyik befogója (DG) épp a beírt kör sugara, vagyis 2 egység. Másrészt tudjuk, hogy ez egy szabályos háromszög fele, vagyis az átfogója (AG) 4 egység. Emiatt a másik befogó $\sqrt{4^2-2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Így ki tudjuk számolni egy ilyen kis háromszög területét, hiszen az a két befogó szorzatának a fele. $t = \frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Mivel 6 ilyen háromszög alkotja a szabályos háromszöget, így:

$$T = 6t = 6\cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

Második megoldás.

Tudjuk, hogy az x oldalú szabályos háromszög területe: $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$. Másrészt a háromszög területéről azt is tudjuk, hogy $T = r\cdot s$. Most $r = 2$, $s = \frac{3}{2}x$. Vagyis ennek a két mennyiségnek egyenlőnek kell lennie:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 2\cdot\frac{3}{2}x$$
$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 3x$$
$$\frac{\sqrt{3}}{4}x = 3$$
$$x = \frac{3\cdot 3}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

Megkaptuk tehát a háromszög oldalának hosszát. Ezt akkor be tudjuk helyettesíteni a területre kapott képletekbe:

$$T = 3x = 12\sqrt{3}.$$

(A másik képletbe is behelyettesíthettünk volna, de így sokkal egyszerűbb a számolás.)

185. Első megoldás.

Legyen András 3 évvel ezelőtti életkora a. Ez azt jelenti, hogy 3 éve Béla $3a$ éves volt. 3 év múlva András $a+6$ éves lesz, míg Béla $3a+6$. De erről az életkorról tudjuk, hogy kétszerese annak, ahány éves András akkor lesz, vagyis $2(a+6)$.

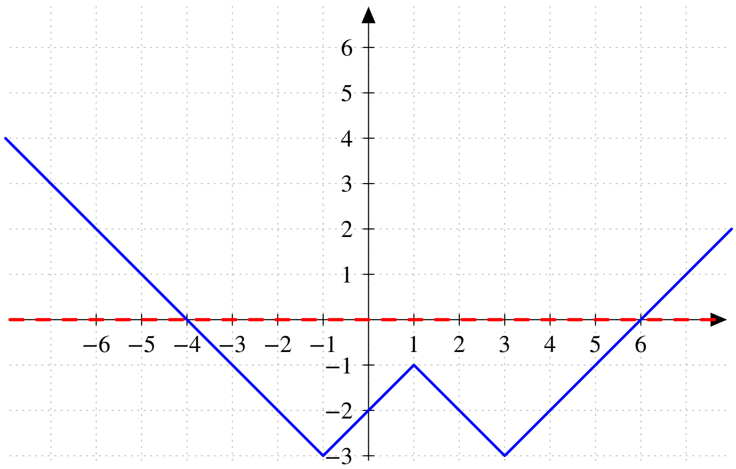
$$3a+6 = 2(a+6)$$
$$3a+6 = 2a+12$$
$$a = 6.$$

Mivel ez a 3 évvel ezelőtti állapotra vonatkozik, ezért ma András 9, Béla pedig 21 éves.
Második megoldás.
Legyen András életkora ma a, Béláé b. Akkor két dolgot tudunk. Egyrészt, hogy $3(a-3) = b-3$, illetve hogy $2(a+3) = b+3$. Az első egyenletből azt kapjuk, hogy $b = 3a - 6$. Ezt be tudjuk helyettesíteni a második összefüggésbe:

$$\begin{aligned} 2(a+3) &= b+3 \\ 2(a+3) &= 3a-6+3 \\ 2a+6 &= 3a-3 \\ a &= 9. \end{aligned}$$

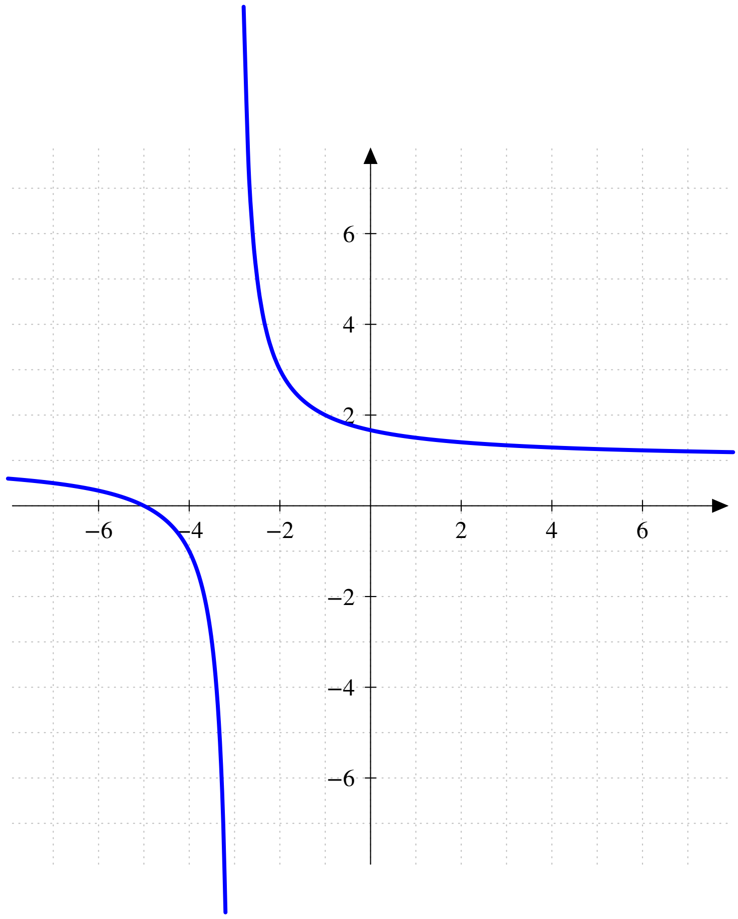
Vagyis András jelenleg 9 éves, Béla pedig 21, hiszen $b = 3a - 6 = 21$.

186. Ábrázoljuk az egyenlet bal oldalát:



Az grafikonról könnyen leolvashatjuk, hogy mikor lesz nem-negatív a bal oldal: $x \leq -4$ vagy $x \geq 6$ esetén. Ez tehát az egyenlőtlenség megoldása.

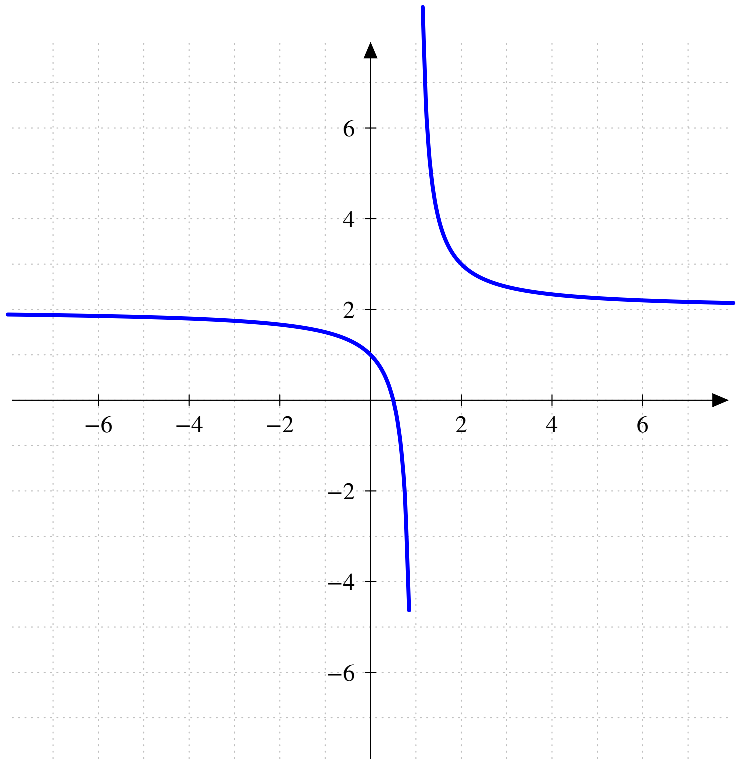
187. (a) $f(x) = \frac{2}{x+3} + 1$.
Az $\frac{1}{x+3}$ grafikonját már ismerjük. A $\frac{2}{x+3}$ függvény grafikonja nagyon hasonló ehhez, csak minden érték a kétszerese az előzőekhez képest. A grafikon az y tengely irányában, vagyis függőlegesen „kétszeresére megnyúlik". Ezt kapjuk, ha még 1-et hozzáadunk az így kapott grafikonhoz, vagyis feltoljuk 1-gyel:



(b) $g(x) = \frac{2x-1}{x-1}$.
Alakítsuk át egy kicsit a kifejezést:

$$g(x) = \frac{2x-1}{x-1} = \frac{2(x-1)+1}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}.$$

Ezt pedig már tudjuk ábrázolni, hiszen a jól ismert $\frac{1}{x}$ hiperbolát kell először jobbra tolnunk 1-gyel, majd az egész grafikont 2-vel felfelé.



188. Összesen 9 olyan kétjegyű szám van, amelyben a jegyek összege 10, hiszen ekkor az első számjegy egyértelműen meghatározza a másodikat, az első számjegy pedig 9-féle lehet. Egyesével megvizsgálhatjuk ezt a 10 számot $(19, 28, 37, \dots, 91)$, és kapjuk, hogy egyedül a 37 felel meg a feltételeknek.
Máshogy is gondolkozhatunk. Legyen a szám első számjegye x. Ekkor a második $10 - x$. Ekkor az eredeti szám: $10x + (10 - x)$, míg az, amelyikben fordítva vannak a jegyek: $10(10 - x) + x$. A két számról tudjuk, hogy az előbbi 36-tal kisebb, mint az utóbbi, vagyis:

$$10x + (10 - x) + 36 = 10(10 - x) + x.$$

Az egyenletet megoldva kapjuk, hogy $x = 3$, amiből adódik, hogy az eredeti szám a 37.
Mondhattuk volna az is, hogy az első számjegy a, a második b. Ekkor két dolgot tudunk. Egyrészt

$$a + b = 10,$$

illetve

$$10a + b + 36 = 10b + a.$$

Ez nagyon hasonlít az előző megoldáshoz, és ha megoldjuk az egyenletrendszert, akkor kapjuk, hogy $a = 3$, $b = 7$.

189. Képzeljük el a kivonást a szokásos módon:

	a	b	c
-	c	b	a
	1	8	0

Jól látható, hogy $c - a = 0$ vagyis a két számjegy megegyezik. Vagyis nincs átvitel a következő oszlopba, így $b - b$ nem lehet 8. Vagyis nincsenek a feltételeknek megfelelő számok.
Ez a megoldás kihasználta, hogy a különbség utolsó jegye 0. Ha 182 lett volna a különbség, akkor ezen

az úton lényegesen nehezebb dolgunk lett volna. Ezért nézzünk egy másik megközelítést is.
Legyen az eredeti szám: $\overline{abc}$. Ekkor ez a szám $100a + 10b + c$. A jegyeket megfordítva $\overline{cba}$-t kapunk, ami $100c + 10b + a$. A két szám különbsége:

$$\overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c).$$

Mivel a számjegyek egész számok, ezért $a - c$ is egész, így a különbség mindig osztható 99-cel. 180 nem osztható 99-cel, ezért nincsenek ilyen számok.

190. Mindhárom esetben azt a módszert alkalmazzuk, hogy az egyik egyenlet alapján fejezzük ki az egyik ismeretlent a másikkal, és a kapott eredményt helyettesítsük be a másik egyenletbe.

(a)

$$\begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ 3x - 1 &= 4y \end{aligned}$$

Az első egyenlet alapján kapjuk, hogy $x = 7 - 2y$. Ekkor a második egyenlet így írható:

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 4y \\ 3(7 - 2y) - 1 &= 4y \\ 21 - 6y - 1 &= 4y \\ 20 &= 10y \\ z &= 2. \end{aligned}$$

Végül pedig $x = 7 - 2y = 7 - 2 \cdot 2 = 3$. Vagyis az egyenlet megoldása: $x = 3, y = 2$.

(b)

$$\begin{aligned} a + 3b &= 5 \\ 6b - 10 &= 2a \end{aligned}$$

Az első egyenlet alapján kapjuk, hogy $a = 5 - 3b$. Ekkor a második egyenlet így írható:

$$\begin{aligned} 6b - 10 &= 2a \\ 6b - 10 &= 2(5 - 3b) \\ 6b - 10 &= 10 - 6b \\ 12b &= 20 \\ b &= \frac{20}{12} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Végül pedig $a = 5 - 3b = 5 - 3 \cdot \frac{5}{3} = 0$. Vagyis az egyenlet megoldása: $a = 0, b = \frac{5}{3}$.

(c)

$$\begin{aligned} 2e + f &= 0 \\ 3f - 1 &= -6e \end{aligned}$$

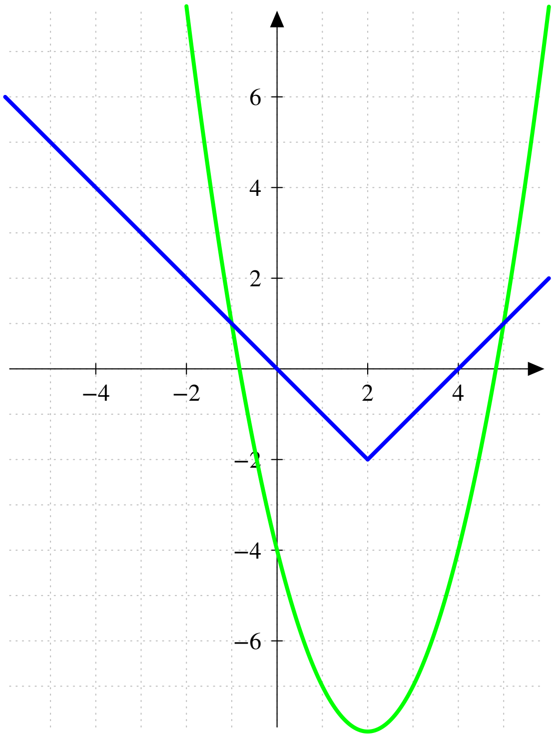
Az első egyenlet alapján kapjuk, hogy $f = -2e$. Ekkor a második egyenlet így írható:

$$\begin{aligned} 3f - 1 &= -6e \\ 3(-2e) - 1 &= -6e \\ -6e - 1 &= -6e \\ -1 &= 0 \end{aligned}$$

Ez ellentmondás, vagyis nincs megoldása az egyenletnek.

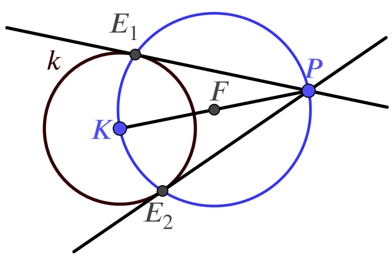
191. A két szám prímfelbontása: $28224 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7^2$, $164640 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^3$. Ebből következik, hogy a legnagyobb közös osztójuk: $2^5 \cdot 3 \cdot 7^2$. Minden közös osztó osztója a legnagyobb közös osztónak, így az a kérdés valójában, hogy a legnagyobb közös osztónak hány pozitív osztója van. Ez pedig nyilván: $6 \cdot 2 \cdot 3 = 36$.

192. Oldjuk meg az egyenlőtlenséget grafikusan. Ábrázoljuk a jobb és a bal oldalt, és vizsgáljuk meg, hogy mely x-ek esetén lesz a bal oldal grafikonja a jobb oldal grafikonja „alatt”.

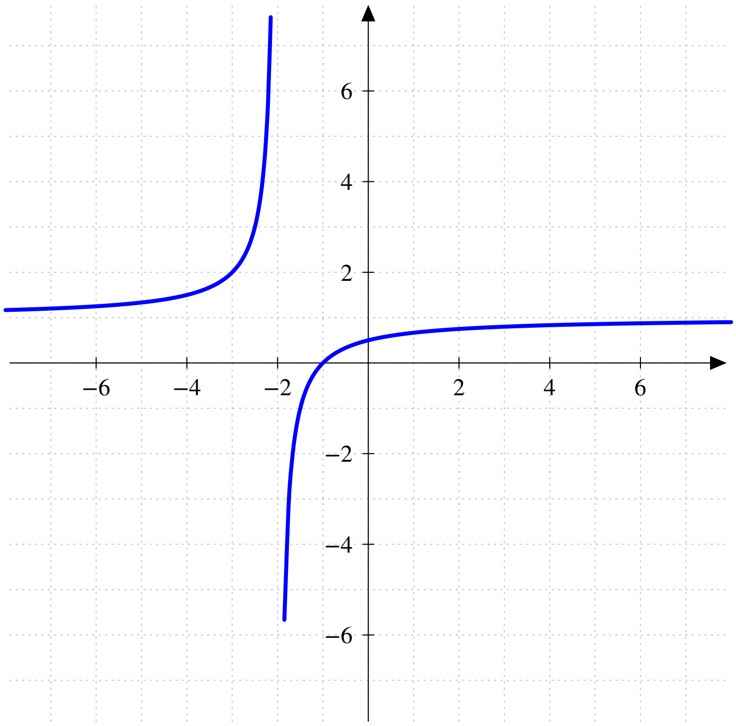


Jól látható, hogy a két grafikon $x = -1$ és $x = 5$ esetén metszi egymást (ekkor egyenlő a két oldal), így a megoldás: $-1 < x < 5$, azaz $x \in]-1; 5[$.

193. Az érintő P pontja adott, vagyis még egy pontot kell találnunk az egyenesen, akkor meg tudjuk szerkeszteni az érintőt. Legyen ez a pont az érintési pont. Egyrészt tudjuk, hogy ez rajta van a k körön, másrészt, hogy a ponthoz tartozó sugár merőleges az érintőre. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a KP szakasz derékszögben látszik az érintési pontból. A Thálesz-tétel (megfordítása) miatt tudjuk, hogy akkor ez a pont rajta van a KP szakasz, mint átmérő fölé írt körön. Ezt viszont meg tudjuk szerkeszteni, hiszen a KP felezőpontját meg tudjuk szerkeszteni (F), és ebből a középpontból FP sugárral kell kört rajzolnunk. Ahol ez a kör (kék) elmetszi a k-t, ott lesznek az érintési pontok (E_1, E_2).



194. $f(x) = \frac{x+1}{x+2} = \frac{x+2-1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}$:



195. Alakítsuk át a $2x-3y=5$ egyenletet: $2x=3y+5$, majd $6x=9y+15$, vagyis $15+9y=6x$. Vagyis ez a két egyenlet pont ugyanazt a feltételt szabja a két számra. Ha egy számpár megfelel az egyik egyenletnek, akkor automatikusan a másiknak is. Így végtelen sok megoldás van. Bármely valós szám lehet x, és ha megválasztottuk x-et, akkor $y=\frac{2x-5}{3}$. Például $x=1, y=-1$, $x=2, y=\frac{-1}{3}$ megoldások.
Ha grafikusan oldanánk meg az egyenletet, akkor azt látnánk, hogy mindkét egyenletnek ugyanaz az egyenes felel meg a koordinátarendszerben, így az egyenes minden pontja megoldás.

196. (a) $7 \in H$.
A 7 esetében nincs döntési lehetőségünk, de a maradék 9 elemnél dönthetünk, hogy eleme a részhalmaznak, vagy sem. Ez összesen 9 független döntés két lehetséges kimenetellel, vagyis a részhalmazok száma: 2^9.

(b) $1 \in H$ és $2 \in H$.
Az előzőhöz hasonlóan a $3, 4, \dots, 10$ elemek esetén van döntésünk, vagyis a részhalmazok száma: 2^8.

(c) $1 \in H$ vagy $2 \in H$.
Nézzünk 3 különböző megközelítést:
A $3, 4, \dots, 10$ számok esetében akárhogyan dönthetünk, ez 2^8 lehetőség. Az 1 és a 2 esetében 3 jó lehetőség van: $1, 2 \in H$, $1 \in H$, $2 \in H$. Vagyis a megfelelő részhalmazok száma: $3 \cdot 2^8$.
Mikor nem jó egy részhalmaz? Ha se az 1, se a 2 nem eleme. Ilyen halmazból 2^8 van, vagyis a halmazok száma: $2^{10}-2^8$.
Ha az $1 \in H$, akkor biztosan megfelel a halmaz a feltételnek. Ilyen halmazból 2^9 darab van. Ha $1 \notin H$, akkor a $2 \in H$, hogy teljesüljön a feltétel. Ilyen halmazból 2^8 van. Összesen tehát 2^9+2^8 halmaz van.
Természetesen:
$$3 \cdot 2^8 = 2^{10} - 2^8 = 2^9 + 2^8.$$

197. Legyen Andrásnál a, Bélánál b forint kezdetben. Ekkor két dolgot tudunk:

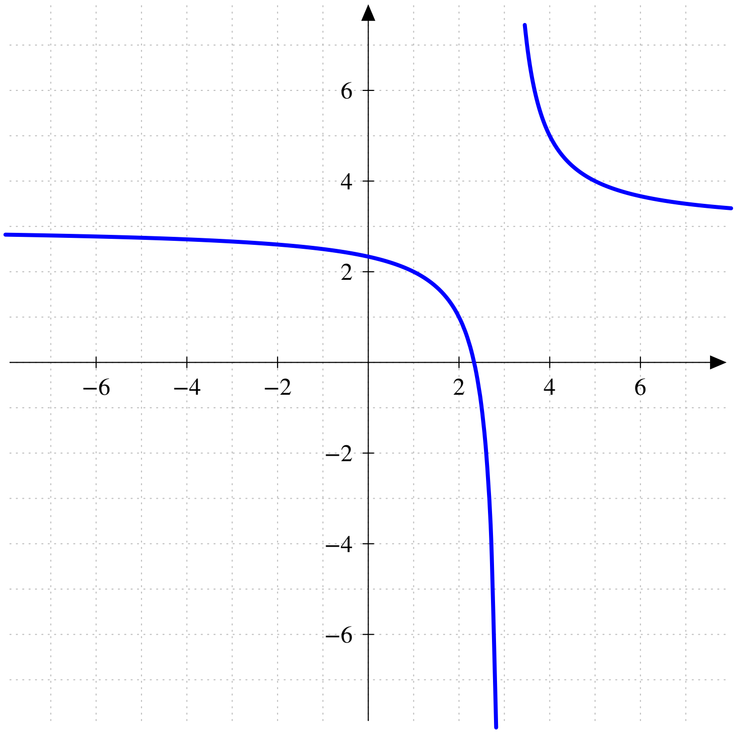
$$2 \cdot (a-25)+5 = b+25$$
$$a+40 = b-40.$$

A tanult módszerek valamelyikével megoldva az egyenletrendszert kapjuk, hogy $a = 150$, $b = 230$.

198. Először alakítsuk át egy kicsit algebrailag a függvény hozzárendelési szabályát:

$$f(x) = \frac{3x-7}{x-3} = \frac{3(x-3)+2}{x-3} = 3 + \frac{2}{x-3}.$$

Ezt pedig már tudjuk ábrázolni, hiszen az $\frac{1}{x-3}$-at tudjuk, ezt kell kétszeresen nyújtani az x tengely irányában, hogy $\frac{2}{x-3}$-at kapjunk, majd pedig a kapott grafikont 3-mal kell „felfelé” tolni.

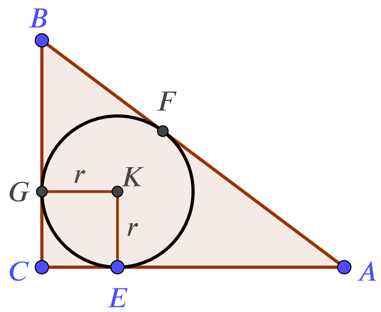


199. Egy deltoidnak van két azonos nagyságú szöge, és mivel négyszög, így szögeinek összege 360°. Ezek alapján 3 eset lehetséges:
1. Két 30°-os szöge van, akkor a másik két szög 50° és 250°.
2. Két 50°-os szöge van, akkor a másik két szög 30° és 230°.
3. Két egyenlő szöge van, és egy 30°-os és egy 50°-os.
Ekkor a két egyforma szög nagysága: $\frac{360-30-50}{2} = 140°$.

200.

201. A Thalész-tétel miatt a derékszögű háromszög körülírt körének sugara mindig az átfogó fele, vagyis a mi esetünkben 5.
A beírt kör sugarát több módon is meghatározhatjuk.
A háromszög harmadik oldala (a Pitagorasz-tétel miatt) 8. A derékszögű háromszög területe mindig a

két befogó szorzatának a fele, vagyis most 24. Másrészt tudjuk, hogy $T = r \cdot s$, és hogy $s = \frac{6+8+10}{2} = 12$. Amiből kapjuk, hogy $r = 2$.
Nézzük a következő ábrát:



Az ábrán $AF = AE$ és $BF = BG$, hiszen azonos pontból húzott érintőszakaszok. Másrészt $CEKG$ egy négyzet, hiszen van 3 derékszöge ($GCE\sphericalangle$, $KEC\sphericalangle$, $KGC\sphericalangle$), így a negyedik szög is derékszög. Ebből már következik, hogy ez egy téglalap, de ráadásul $KE = KG$, hiszen mindkét szakasz a beírt kör sugara, így $CEKG$ tényleg négyzet. Ebből következik, hogy $CG = CE = r$. Vagyis:

$$a + b = AC + BC = AE + EC + BG + CG = AF + r + BF + r = AB + 2r = c + 2r.$$

Kaptuk tehát minden derékszögű háromszögre, hogy

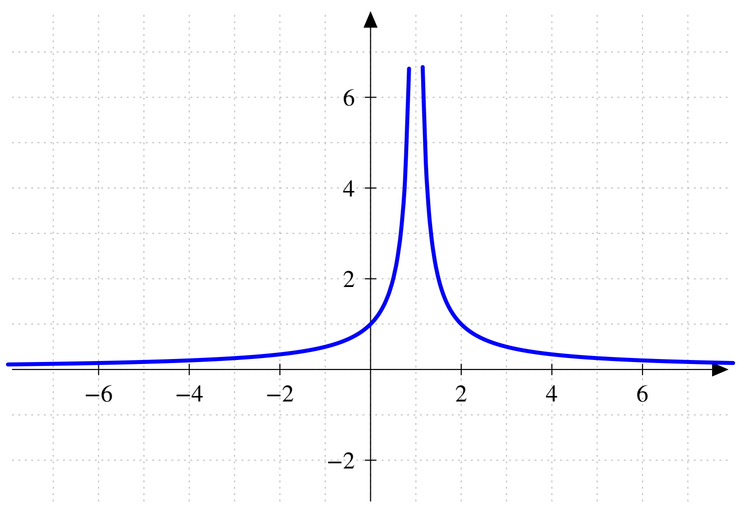
$$a + b = c + 2r.$$

Ebből az adott háromszög esetén kapjuk, hogy

$$6 + 8 = 10 + 2r,$$

vagyis $r = 2$.

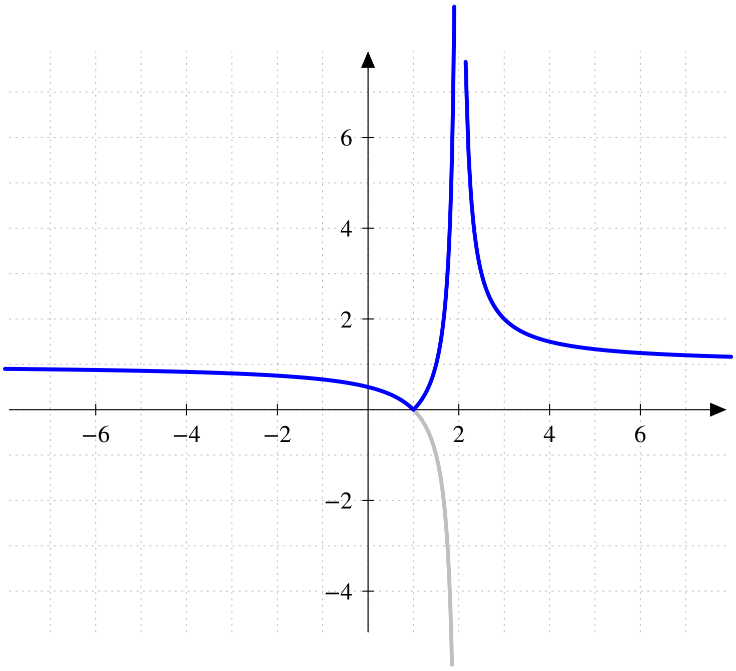
202. (a) $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$.
Mivel a számláló mindig pozitív, ezért $\frac{1}{|x-1|} = \left|\frac{1}{x-1}\right|$. Innen pedig már nincs nehéz dolgunk, hiszen az $\frac{1}{x-1}$ függvényt tudjuk ábrázolni, az abszolútérték pedig azt jelenti, hogy az x tengely alatti részt tükröznünk kell az x tengelyre.



(b) Itt is alakítsuk át először egy kicsit a kifejezést:

$$g(x) = \left|\frac{x-1}{x-2}\right| = \left|\frac{x-2+1}{x-2}\right| = \left|1 + \frac{1}{x-2}\right|.$$

Az abszolútérték belsejében lévő részt már tudjuk ábrázolni, innen már csak az van hátra, hogy az x tengely „alatti” részt tükrözzük az x tengelyre.



203. A trapéz szögeinek összege 180°. Emiatt a négyszög szögei $\frac{1}{13} \cdot 180^\circ$, $\frac{2}{13} \cdot 180^\circ$, $\frac{4}{13} \cdot 180^\circ$, $\frac{6}{13} \cdot 180^\circ$. Egy ilyen négyszög viszont nem lehet trapéz, mert egy trapéz két-két szögének az összege 180°, viszont eközött a 4 szög között semelyik kettő összege sem ennyi.

204.

205.

206.

207.

208.

209.