Доверительные интервалы

План

- Что такое доверительный интервал
- Асимптотические доверительные интервалы
- Точные доверительные интервалы для нормальных выборок
- Как построить точный доверительный интервал для любого распределения

Что такое доверительный интервал

Схема математической статистики

Выборка: $x_1, \ldots, x_n$ Параметр: θ

$$\hat{\theta} \longrightarrow f_{\hat{\theta}}(t)$$

Точность оценки, прогнозов

доверительные интервалы

Ответы на вопросы

проверка гипотез

Как оценить

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия

Хорошие свойства

- Несмещенная
- Состоятельная
- Эффективная

Союзники

Асимптотические (при большом n)

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi^2_n, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!

Схема математической статистики

Выборка: $x_1, \ldots, x_n$ Параметр: θ

$\hat{\theta} \longrightarrow f_{\hat{\theta}}(t)$

Точность оценки, прогнозов

доверительные интервалы

Как оценить

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия

Хорошие свойства

- Несмещенная
- Состоятельная
- Эффективная

Союзники

Асимптотические (при большом n)

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

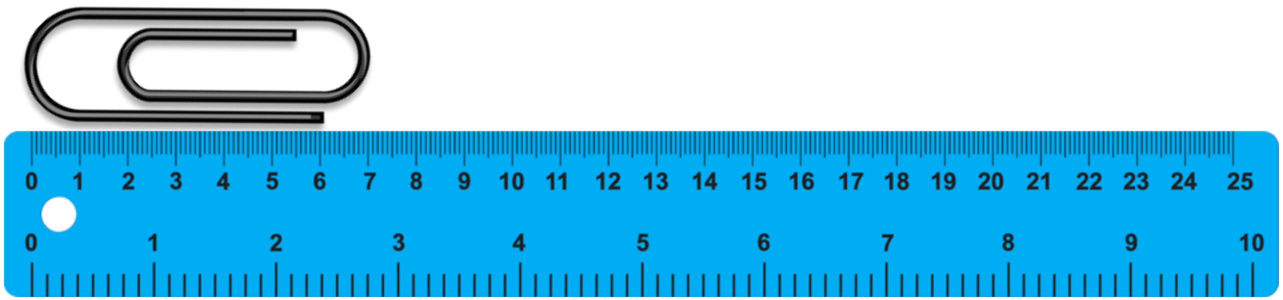
- Теорема Фишера
- $\chi^2_n, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!

Ответы на вопросы

проверка гипотез

Зачем нужны доверительные интервалы

Надо измерить длину скрепки. Её длина 7 см, но мы не знаем наверняка, так как деления на линейке недостаточно точны



- Измерение делается с точностью, которую допускает линейка
- Длина скрепки 7 ± 0.1 см
- При дальнейших расчётах мы должны учитывать погрешность измерения

Предсказательный интервал

- Случайная величина $X \sim F(x)$
- Предсказательный интервал порядка $1 - \alpha$:

$$\mathbb{P}\left(X_{\frac{\alpha}{2}} \leq X \leq X_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

- Для $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ предсказательным интервалом будет

$$\mathbb{P}\left(\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma \leq X \leq \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma\right) = 1 - \alpha$$

❗ Границы предсказательного интервала – константы, случайная величина лежит между ними

Предсказательный интервал

- $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\hat{\sigma}^2}{n}\right) \Rightarrow$ предсказательный интервал для $\bar{X}$:

$$\mathbb{P}\left(\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \le \bar{x} \le \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

- Доверительный интервал для μ:

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Границы доверительного интервала – случайные величины, мы пытаемся получить их по выборке

Доверительный интервал

Интервал $[\theta_L; \theta_U]$ называется **доверительным интервалом** для параметра θ, с уровнем доверия $1 - \alpha$, если при бесконечном повторении эксперимента в $100 \cdot (1 - \alpha)$ процентах случаев этот интервал будет накрывать истинное значение параметра θ

Величину α называют **уровнем значимости**

Если мы много раз измеряем скрепку, то с вероятностью $1 - \alpha$ наш доверительный интервал покрывает её истинную длину

Зачем нужны доверительные интервалы

- Точечная оценка делается по случайной выборке ⇒ неопределённость
- Нужно делать выводы в каком-то диапазоне
- Доверительный интервал показывают, насколько мы уверены в точечной оценке

❗ На практике пытаются построить наиболее короткий доверительный интервал

Зачем нужны доверительные интервалы

Антон:

С вероятностью 95% среднее лежит между 1 и 20

Ширина: 19

Наташа:

С вероятностью 95% среднее лежит между 17 и 23

Ширина: 6

У обоих интервалов надёжность 95% (ошибка в 5% случаев), но разная точность. Наташин интервал уже, то есть точнее.

Зачем нужны доверительные интервалы

Многие метрики, интересные бизнесу, считаются по случайным выборкам, хочется знать, в каком диапазоне они изменяются.

Запасы полезных ископаемых оценивают по образцам пород (случайная выборка). Инвесторам хочется знать объём запасов в лучшем и в худшем случаях, а не только в среднем.

Обычно доверительные интервалы строят для прогнозов.

Асимптотические доверительные интервалы

Схема математической статистики

Выборка: $x_1, \ldots, x_n$ Параметр: θ

$\hat{\theta} \longrightarrow f_{\hat{\theta}}(t)$

Точность оценки, прогнозов

доверительные интервалы

Ответы на вопросы

проверка гипотез

Как оценить

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия

Хорошие свойства

- Несмещенная
- Состоятельная
- Эффективная

Союзники

Асимптотические (при большом n)

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi^2_n, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!

Схема математической статистики

Выборка: $x_1, \ldots, x_n$ Параметр: θ

$\hat{\theta}$ → $f_{\hat{\theta}}(t)$

Точность оценки, прогнозов

доверительные интервалы

Ответы на вопросы

проверка гипотез

Как оценить

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия

Хорошие свойства

- Несмещенная
- Состоятельная
- Эффективная

Союзники

Асимптотические (при большом n)

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi^2_n, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!

Асимптотический интервал для среднего

- ЦПТ позволяет построить доверительный интервал для любого среднего
- Наблюдаем $X_1, \ldots, X_n$
- **Предполагаем:** X_i независимы и одинаково распределены, число наблюдений n велико, нет выбросов

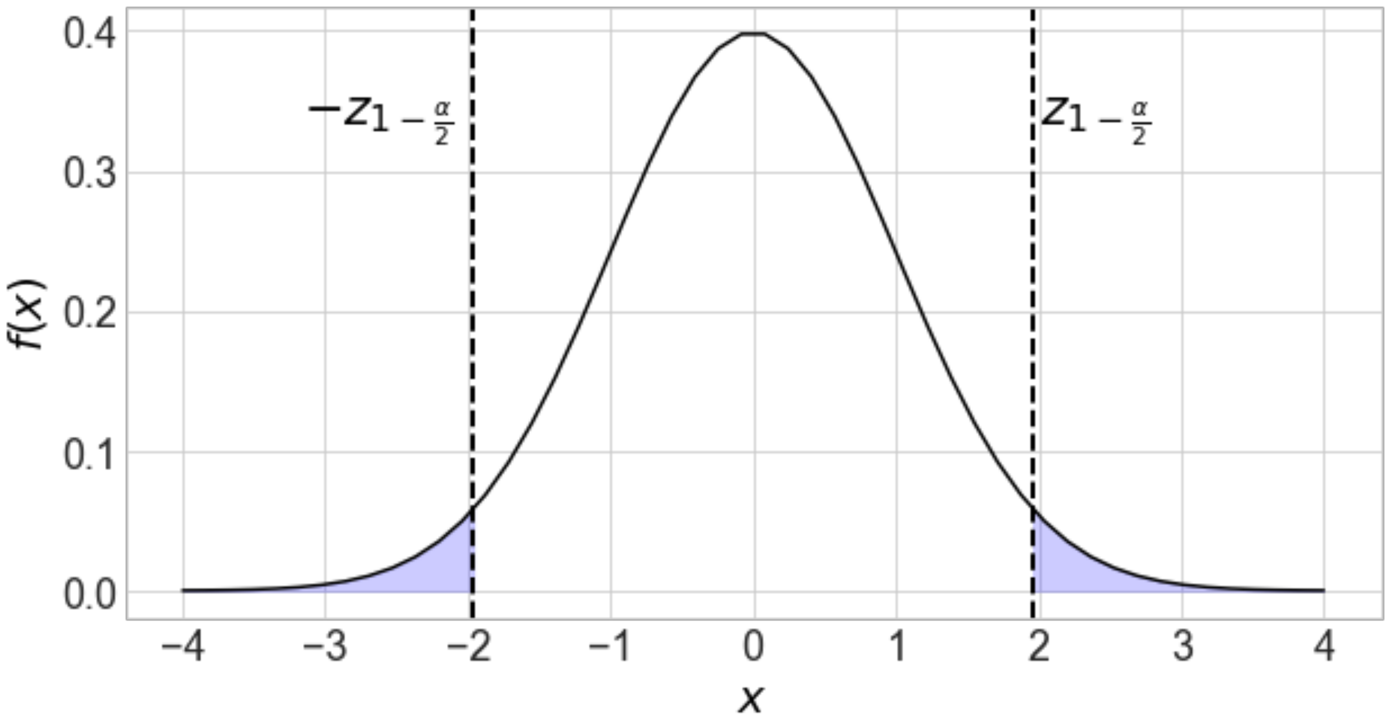
$$\bar{x} \overset{asy}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Leftrightarrow \bar{x} - \mu \overset{asy}{\sim} N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Leftrightarrow \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \overset{asy}{\sim} N(0,1)$$

центрирование нормирование

Асимптотический интервал для среднего

Можно зафиксировать любую надежность $1 - \alpha$
и построить **доверительный интервал:**

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$



Асимптотический интервал для среднего

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\hat{\sigma}^2/n}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Почему можно заменить σ на $\hat{\sigma}$?

Почему можно заменить σ на $\hat{\sigma}$

По ЦПТ: $$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \text{ при } n \to \infty$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}} \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \text{ при } n \to \infty$$

$$\xrightarrow{p} 1 \qquad \xrightarrow{d} 1$$

Так как $\hat{\sigma}^2$состоятельная оценка для σ^2, $\hat{\sigma}^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$

Почему можно заменить σ на $\hat{\sigma}$

По ЦПТ: $$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \text{ при } n \to \infty$$

$$1 \cdot \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}} \xrightarrow{d} N(0,1) \text{ при } n \to \infty$$

Получается, что при замене дисперсии на её оценку, предельное распределение не меняется.

$$\mathbb{P}\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Дельта-метод

Если:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid, \qquad \mathbb{E}(X_1) = \mu, Var(X_1) = \sigma^2$$

$g(t)$ – дифференцируемая функция

Тогда:

$$g(\bar{x}) \sim N\left(g(\mu), \frac{\sigma^2}{n} \cdot g'(\mu)^2\right)$$

Обобщение ЦПТ на случай функции от среднего.

Асимптотический интервал для дисперсии

Выборочную дисперсию можно выразить через средние

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \hat{\sigma}^2 = \frac{n}{n-1}\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right)$$

Немного поупражнявшись с ЦПТ и сходимостями можно получить асимптотическое распределение для выборочной дисперсии:

$$s^2 \sim N\left(\sigma^2, \frac{\mu_4 - \sigma^4}{n}\right), \qquad \mu_4 = \mathbb{E}[(X_i - \mu)^4]$$

Оно может быть использовано для строительства доверительных интервалов

➤ *https://www.stat.umn.edu/geyer/s06/5102/notes/ci.pdf*

Резюме

- Доверительный интервал помогает понять, насколько надёжной получилась точечная оценка
- При большой выборке без выбросов ЦПТ помогает построить асимптотический доверительный интервал для любой функции от среднего
- Если наблюдений мало, нужны другие союзники

Точные доверительные интервалы для нормальных выборок

Схема математической статистики

Выборка: $x_1, ..., x_n$ Параметр: θ

$\hat{\theta}$ → $f_{\hat{\theta}}(t)$

Точность оценки, прогнозов

доверительные интервалы

Ответы на вопросы

проверка гипотез

Как оценить

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия

Хорошие свойства

- Несмещенная
- Состоятельная
- Эффективная

Союзники

Асимптотические (при большом n)

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi^2_n, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!

Схема математической статистики

Выборка: $x_1, ..., x_n$ Параметр: θ

$\hat{\theta} \longrightarrow f_{\hat{\theta}}(t)$

Точность оценки, прогнозов

доверительные интервалы

Ответы на вопросы

проверка гипотез

Как оценить

- Метод моментов
- Метод максимального правдоподобия

Хорошие свойства

- Несмещенная
- Состоятельная
- Эффективная

Союзники

Асимптотические (при большом n)

- ЦПТ
- Дельта-метод

Точные

- Теорема Фишера
- $\chi^2_n, t_n, F_{n,k}$
- Ещё союзники!

Точные доверительные интервалы для нормальных выборок: средние

Доверительные интервалы для нормального

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$$

Строим доверительный интервал для μ:

σ^2 известна

σ^2 неизвестна

Строим доверительный интервал для σ^2:

μ известно

μ неизвестно

Дисперсия известна

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2), \quad \sigma^2 \text{ известна}$$

Известно, что распределение точное, ЦПТ использовать не нужно

Пример: Измеряем что-то, знаем погрешность прибора

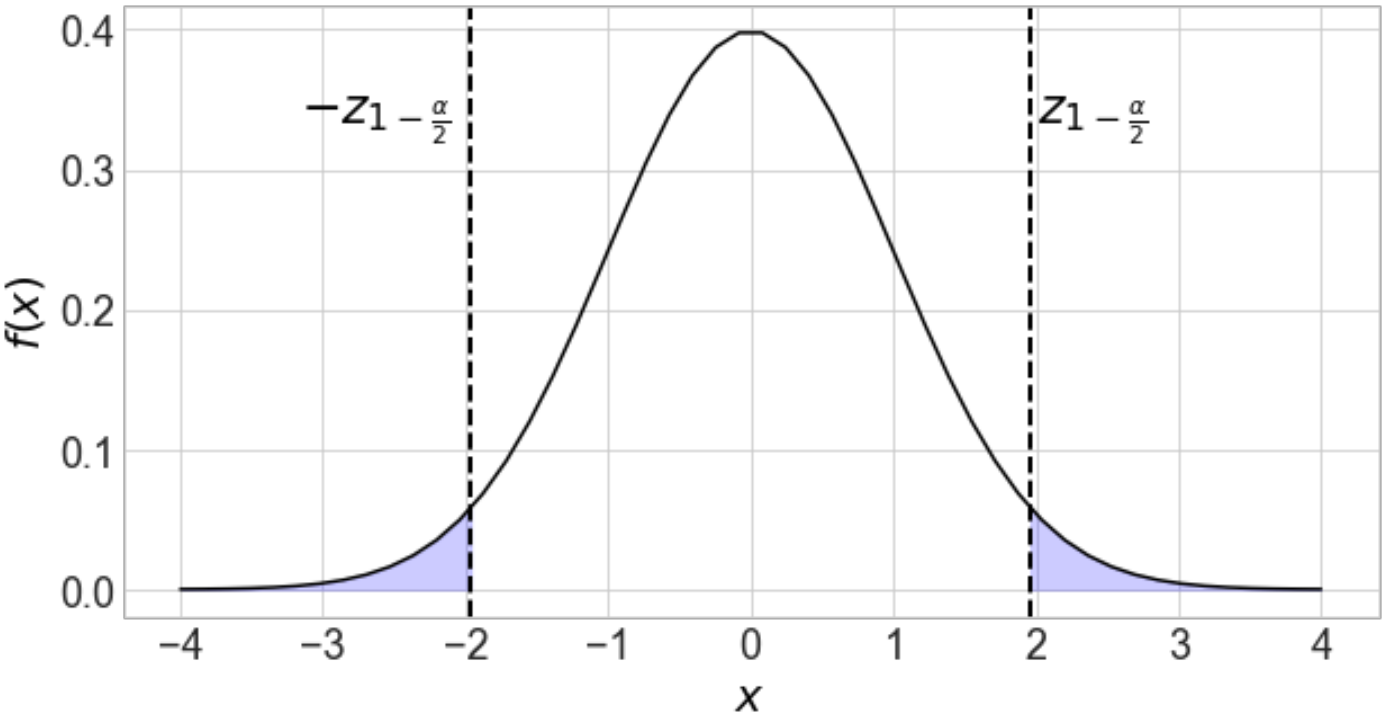
$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Распределение точное, сумма нормальных случайных величин – нормальна.

Дисперсия известна

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2), \quad \sigma^2 \text{ известна}$$

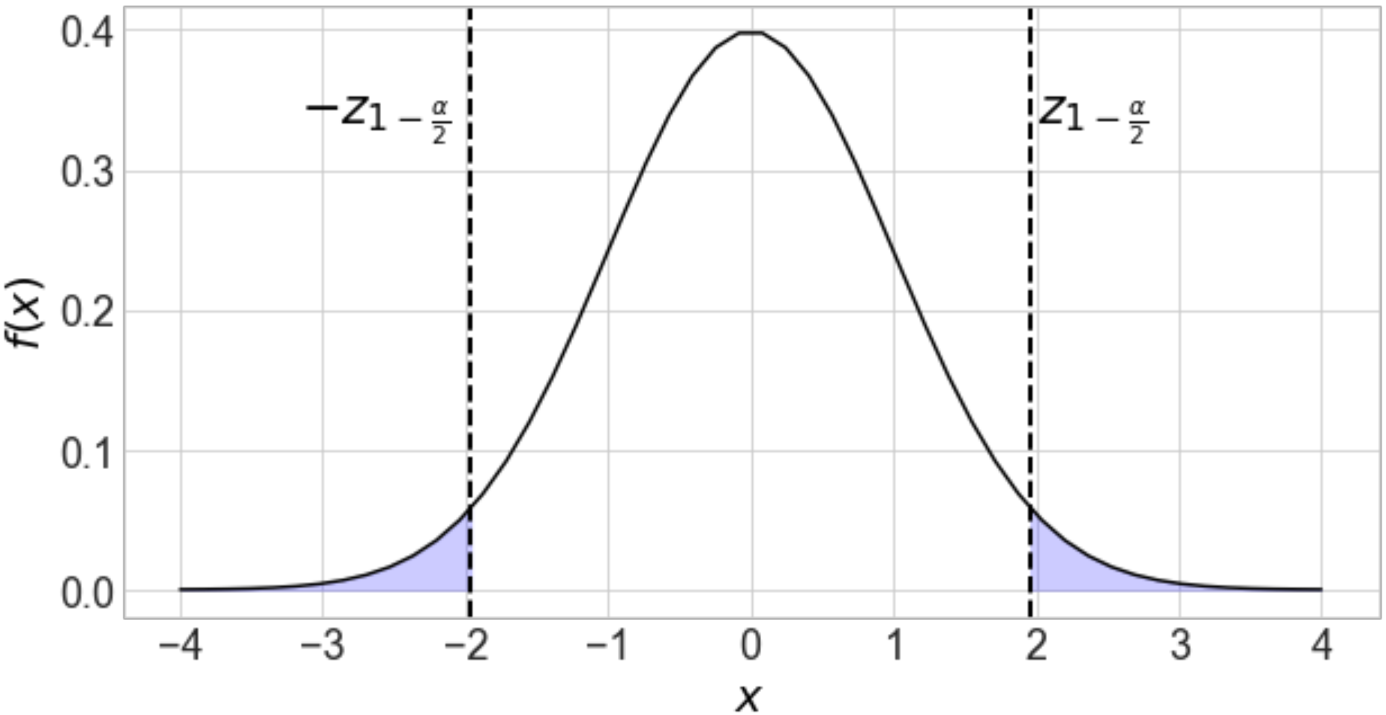
$$\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0, 1)$$



Дисперсия известна

Доверительный интервал строится по аналогии с асимптотикой, но является точным:

$$P\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$



Дисперсия неизвестна

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2),$ σ^2 **не**известна

$$\hat{\mu} = \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\cancel{\hat{\mu} = \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{s^2}{n}\right)}$$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim ???$$

Союзники: распределение хи-квадрат

Случайные величины $X_1, \dots, X_k \sim iid\ N(0,1)$.

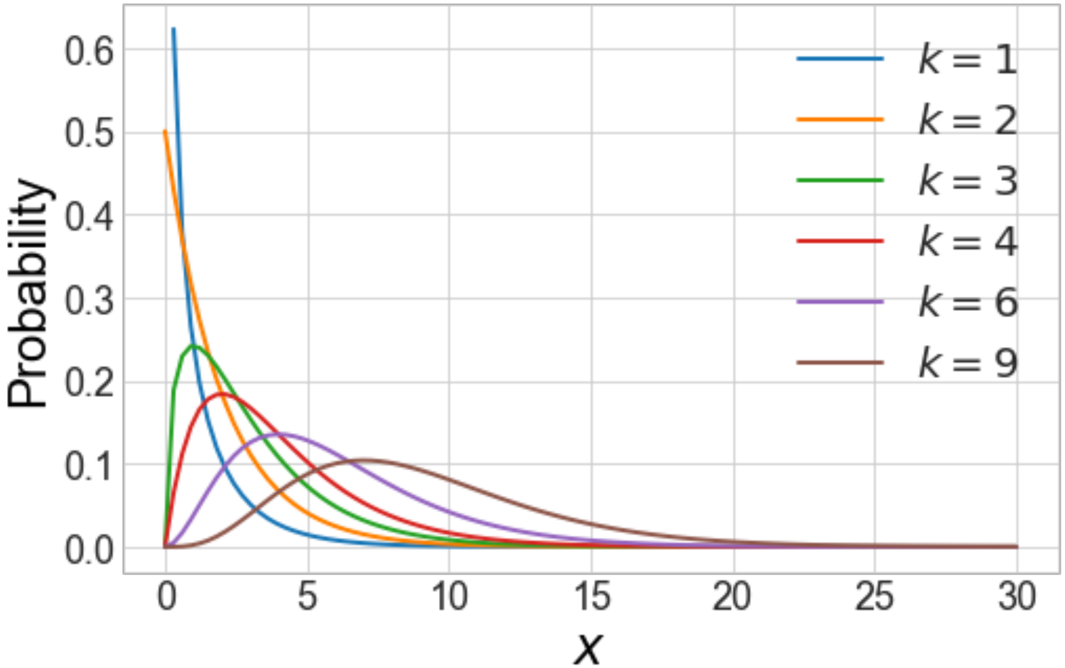
Случайная величина $Y = X_1^2 + \ \dots + X_k^2 \sim \chi_k^2$ имеет "хи-квадрат" распределение с k степенями свободы

Когда возникает на практике:

$$\hat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

- Если выборка пришла из $N(0,1)$, величина $\overline{x^2}$ будет иметь "хи-квадрат" распределение
- Для выборочной дисперсии тоже можно получить "хи-квадрат" распределение

Союзники: распределение хи-квадрат



$$X_1, \dots, X_k \sim iid\ N(0,1)$$

$$Y = X_1^2 + \dots + X_k^2 \sim \chi_k^2$$

Из-за квадратов принимает только положительные значения

Плотность:

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot x^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}}, x \geq 0$$

Характеристики:

$$\mathbb{E}(X) = k$$

$$Var(X) = 2k$$

Союзники: распределение Стьюдента

Независимые случайные величины $\mathrm{X}_0 \sim N(0,1),\ \mathrm{Y} \sim \chi_k^2$.

Тогда случайная величина

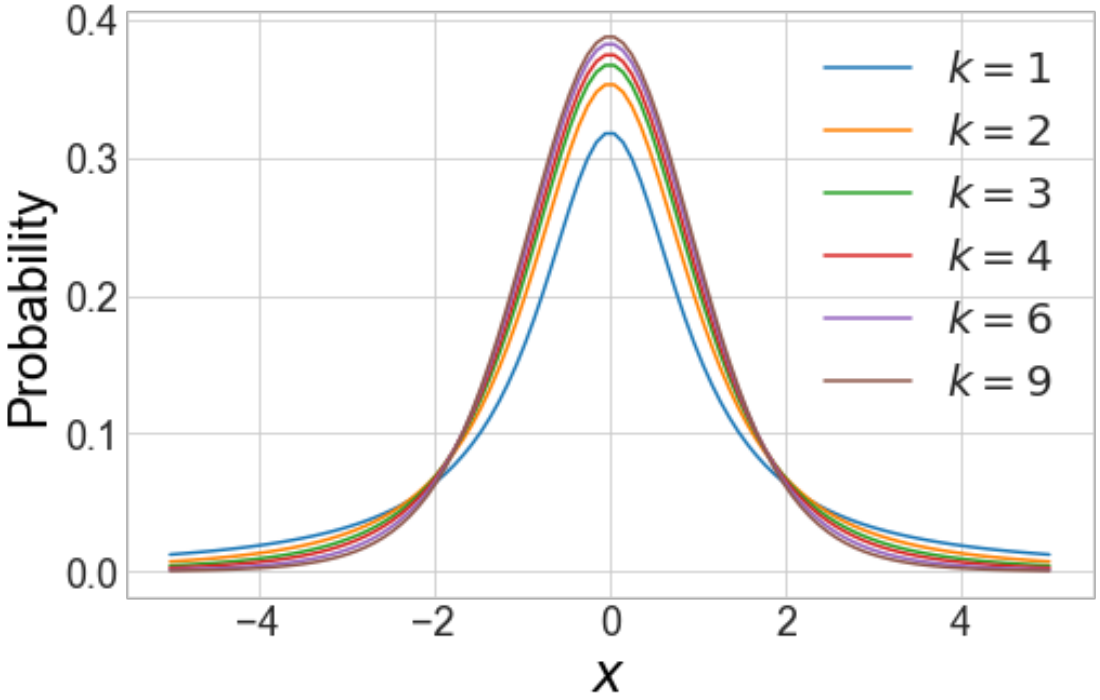
$$\mathrm{t} = \frac{X_0}{\sqrt{Y/k}} \sim t(k)$$

имеет распределение Стьюдента с k степенями свободы.

Когда возникает на практике:

Мы будем часто встречаться с выражением $\dfrac{\bar{x}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}}$,
имеющим распределение Стьюдента

Союзники: распределение Стьюдента



$$X_0 \sim N(0,1),\ Y \sim \chi^2_k,$$

$$t = \frac{X_0}{\sqrt{Y/k}} \sim t(k)$$

Плотность:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi k} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$

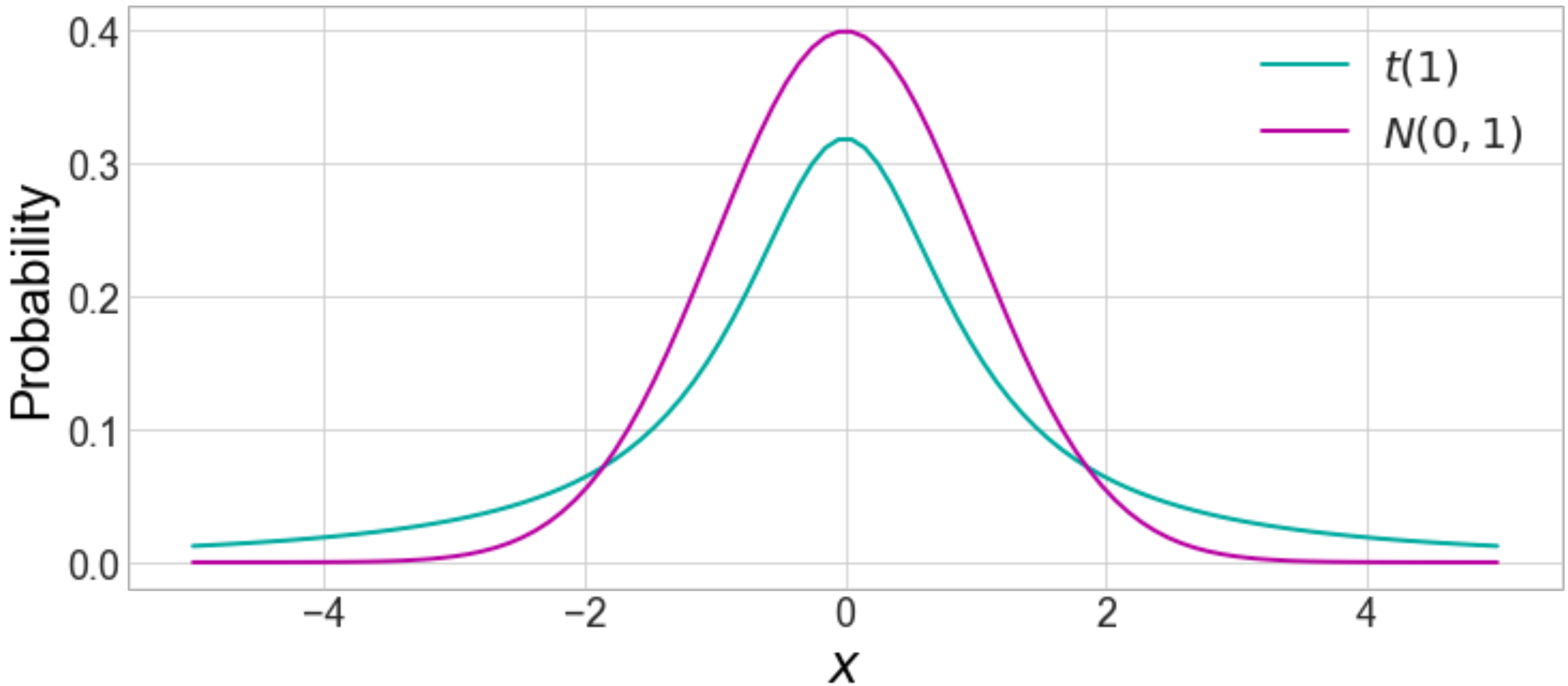
Характеристики:

$$\mathbb{E}(t) = 0$$

$$Var(t) = \frac{k}{k-2}, k > 2$$

Тяжёлые хвосты

Распределение Стьюдента обладает более тяжёлыми хвостами, нежели нормальное



Союзники: теорема Фишера

Теорема:

Пусть $X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(0,1)$, тогда

1. Выборочное среднее $\bar{x}$ и дисперсия s^2 независимы
2. $\frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2}$ имеет χ^2 – распределение с $n-1$ степенью свободы

Дисперсия неизвестна

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2),$ σ^2 **не**известна

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

Надо заменить на σ^2, чтобы получить нормальное

Дисперсия неизвестна

$X_1, \ldots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 **не**известна

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\sigma^2}{(n-1)}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{(n-1)}}} = \boxed{\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}} \cdot \boxed{\frac{\sqrt{\frac{\sigma^2}{(n-1)}}}{\sqrt{\frac{s^2}{(n-1)}}}}$$

$N(0,1)$?

Дисперсия неизвестна

$X_1, \ldots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2),$ σ^2 **не**известна

$$\frac{\sqrt{\frac{\sigma^2}{(n-1)}}}{\sqrt{\frac{s^2}{(n-1)}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(n-1)\cdot s^2}{(n-1)\cdot \sigma^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{\boxed{\frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2}}}_{\chi^2_{n-1}}/(n-1)}}$$

По теореме Фишера (работает только для нормальных выборок)

Дисперсия неизвестна

$$X_1, \ldots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2), \qquad \sigma^2$$ **не**известна

$$\frac{\sqrt{\frac{\sigma^2}{(n-1)}}}{\sqrt{\frac{s^2}{(n-1)}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(n-1)\cdot s^2}{(n-1)\cdot\sigma^2}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{\frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2}/(n-1)}}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}}$$

Дисперсия неизвестна

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 **не**известна

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\sigma^2}{(n-1)}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{(n-1)}}} = \boxed{\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}} \cdot \boxed{\frac{\sqrt{\frac{\sigma^2}{(n-1)}}}{\sqrt{\frac{s^2}{(n-1)}}}}$$

$N(0,1)$

$$\sqrt{\frac{1}{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}}$$

Дисперсия неизвестна

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 **не**известна

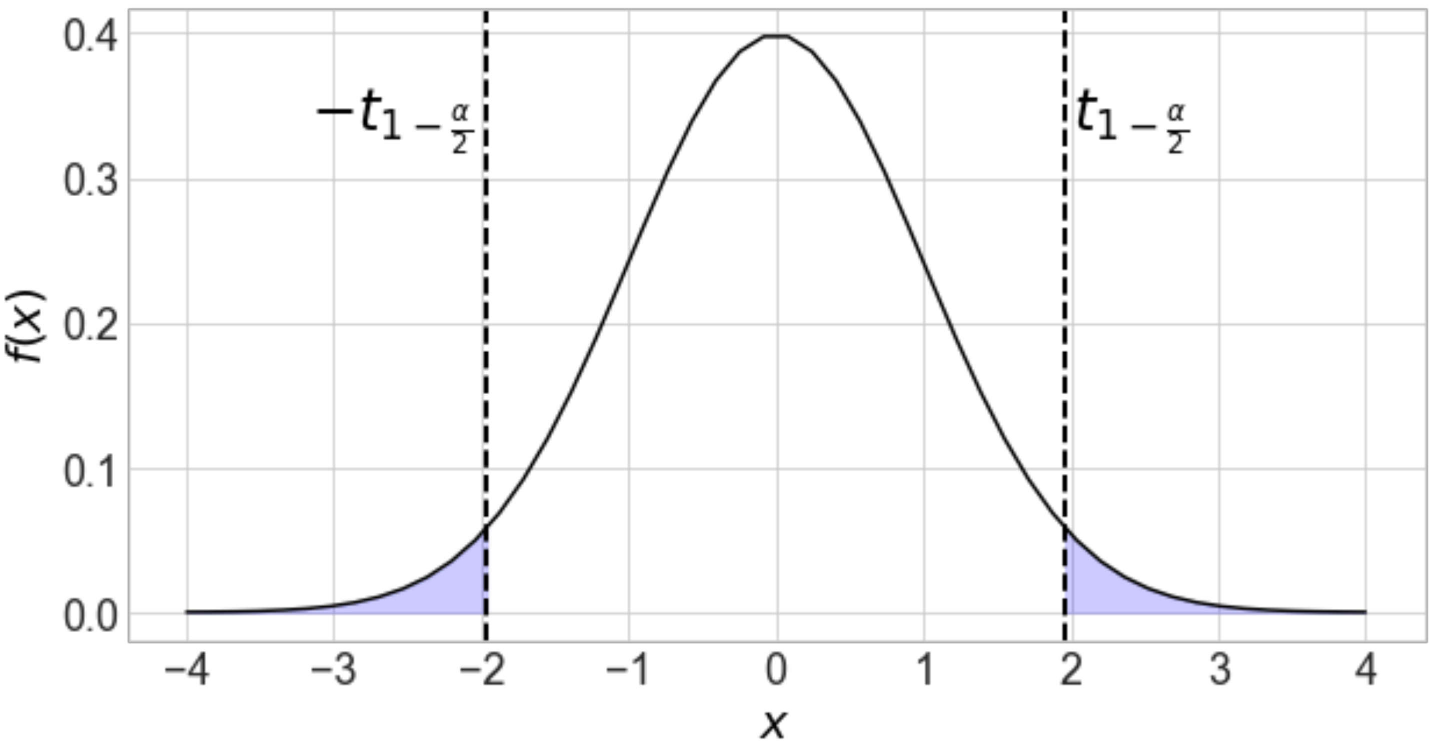
$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\sigma^2}{(n-1)}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{(n-1)}}} = \boxed{\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\sigma^2}{(n-1)}}}{\sqrt{\frac{s^2}{(n-1)}}}}$$

$$\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}} = t(n-1)$$

Дисперсия неизвестна

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2), \qquad \sigma^2$$ **не**известна

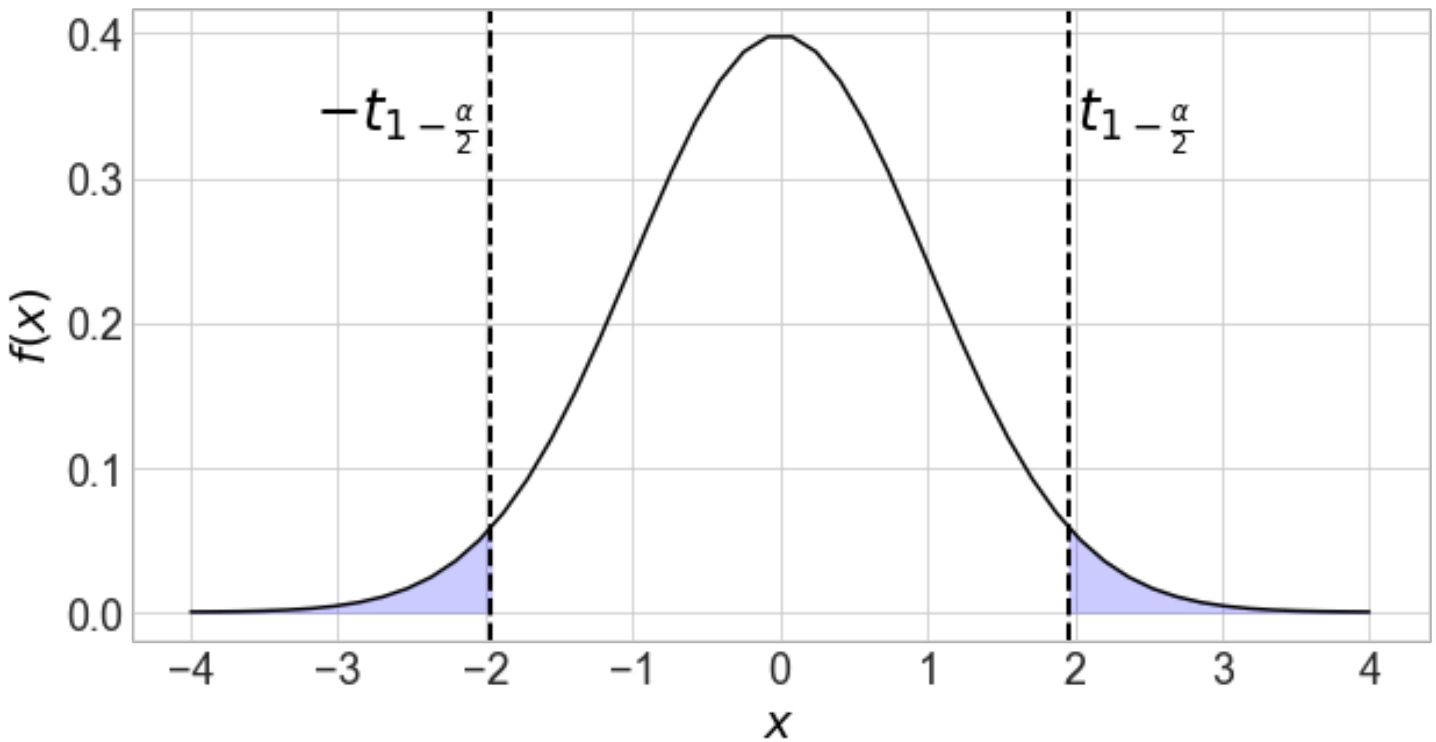
$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \sim t(n-1)$$



Дисперсия неизвестна

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2), \qquad \sigma^2$ **не**известна

$$P\left(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$



Точный vs Асимптотический

Асимптотический

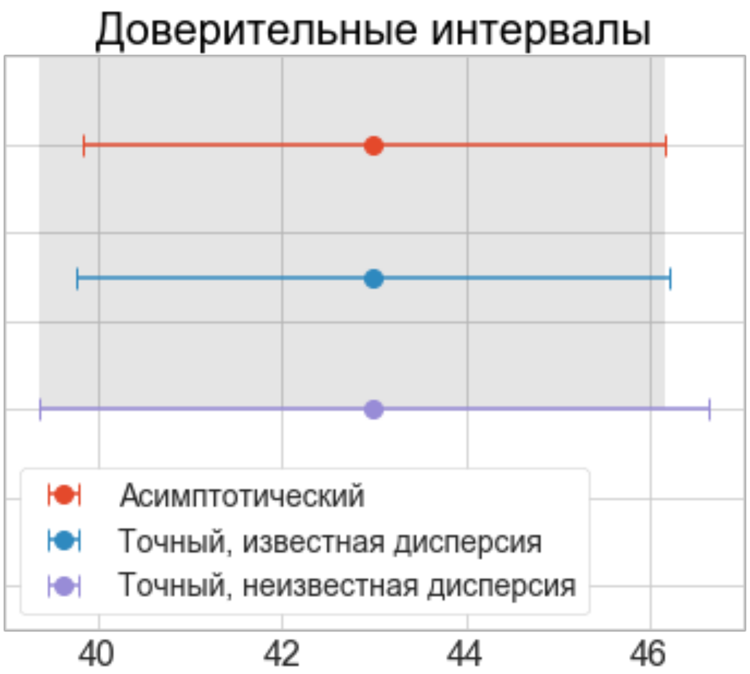
- Союзник: ЦПТ
- Работает при большом n
- Выборка независимая, без аномалий

Точный

- Союзники: теорема Фишера, t-распределение
- Работает при любом n
- Выборка независимая из нормального распределения

Пример

Измерили зарплаты: $\bar{x} = 43$ тыс. и $s = 5.1$ тыс. В выборку попало 10 наблюдений. В реальности $\sigma = 5.2$ тыс. (знаем из переписи населения)



$$\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad 43 \pm 1.96 \cdot \frac{5.1}{\sqrt{10}}$$

$$\bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad 43 \pm 1.96 \cdot \frac{5.2}{\sqrt{10}}$$

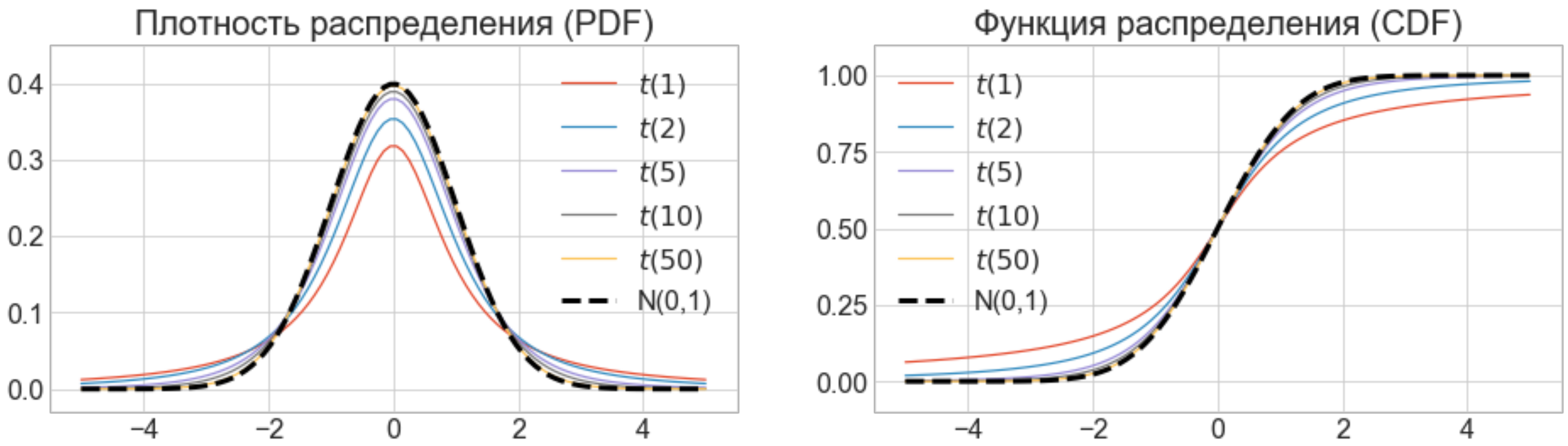
$$\bar{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad 43 \pm 2.26 \cdot \frac{5.1}{\sqrt{10}}$$

✔ Точные доверительные интервалы часто оказываются шире асимптотических

Когда начинаются большие n

Распределение Стьюдента сходится к нормальному по распределению при росте числа степеней свободы:

$$t(n) \xrightarrow{d} N(0,1) \text{ при } n \to \infty$$



При больших выборках разница между точным и асимптотическим интервалами минимальна

Резюме

Если известно распределение, можно строить точные доверительные интервалы

Для нормальных выборок при неизвестной дисперсии в этом помогает распределение Стьюдента

Из-за того, что распределение Стьюдента обладает более тяжёлыми хвостами, чем нормальное, точные доверительные интервалы обычно оказываются шире

Точные доверительные интервалы для нормальных выборок: разность средних

Асимптотический интервал для разности средних

- ЦПТ позволяет построить доверительный интервал для любого среднего
- Наблюдаем $X_1, \dots, X_{n_x}$ и $Y_1, \dots, Y_{n_y}$
- **Предполагаем:** X_i, Y_i независимы и одинаково распределены, число наблюдений велико, нет выбросов, выборки независимы друг от друга

$$\bar{x} \overset{asy}{\sim} N\left(\mu_x, \frac{\sigma_x^2}{n_x}\right) \qquad \bar{y} \overset{asy}{\sim} N\left(\mu_y, \frac{\sigma_y^2}{n_y}\right)$$

$$\bar{x} - \bar{y} \overset{asy}{\sim} N\left(\mu_x - \mu_y, \frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}\right)$$

Асимптотический интервал для разности средних

- ЦПТ позволяет построить доверительный интервал для любого среднего
- Наблюдаем $X_1, \dots, X_{n_x}$ и $Y_1, \dots, Y_{n_y}$
- **Предполагаем:** X_i, Y_i независимы и одинаково распределены, число наблюдений велико, нет выбросов, выборки независимы друг от друга

Теперь хотим построить точный интервал

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_x^2}{n_x} + \frac{\hat{\sigma}_y^2}{n_y}}} \overset{asy}{\sim} N(0,1)$$

$$(\bar{x} - \bar{y}) \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_x^2}{n_x} + \frac{\hat{\sigma}_y^2}{n_y}}$$

Разность средних (независимые выборки)

Выборки не зависят друг от друга:

$$X_1, \dots, X_{n_x} \sim iid\ N(\mu_x, \sigma_x^2) \qquad Y_1, \dots, Y_{n_y} \sim iid\ N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

Нас интересует случайная величина:

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}}$$

дисперсии известны

дисперсии неизвестны, но равны

дисперсии неизвестны, различаются

Разность средних (независимые выборки)

Выборки не зависят друг от друга:

$$X_1, \ldots, X_{n_x} \sim iid\ N(\mu_x, \sigma_x^2) \qquad Y_1, \ldots, Y_{n_y} \sim iid\ N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

Нас интересует случайная величина:

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}} \sim N(0, 1)$$

дисперсии известны

☺

Можем строить точный интервал

Разность средних (независимые выборки)

Выборки не зависят друг от друга:

$$X_1, \dots, X_{n_x} \sim iid\ N(\mu_x, \sigma_x^2) \qquad Y_1, \dots, Y_{n_y} \sim iid\ N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

Нас интересует случайная величина:

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{s^2}{n_x} + \frac{s^2}{n_y}}}$$

$$\boxed{\text{дисперсии неизвестны, но равны}}$$

Разность средних (независимые выборки)

Выборки не зависят друг от друга:

$$X_1, \dots, X_{n_x} \sim iid\ N(\mu_x, \sigma_x^2) \qquad Y_1, \dots, Y_{n_y} \sim iid\ N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

Нас интересует случайная величина:

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{s^2}{n_x} + \frac{s^2}{n_y}}} \sim t(n_x + n_y - 2)$$

Объединённая оценка дисперсии:

$$s^2 = \frac{(n_x - 1)s_x^2 + (n_y - 1)s_y^2}{n_x + n_y - 2}$$

Разность средних (независимые выборки)

Выборки не зависят друг от друга:

$$X_1, \dots, X_{n_x} \sim iid\ N(\mu_x, \sigma_x^2) \qquad Y_1, \dots, Y_{n_y} \sim iid\ N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

Нас интересует случайная величина:

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}}} \sim t(v)$$

дисперсии неизвестны, различаются

Разность средних (независимые выборки)

Выборки не зависят друг от друга:

$$X_1, \dots, X_{n_x} \sim iid\ N(\mu_x, \sigma_x^2) \qquad Y_1, \dots, Y_{n_y} \sim iid\ N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

Нас интересует случайная величина:

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}}} \sim t(v)$$

Распределение приближенное (распределение Уэлча)

$$v = \frac{\left(\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}\right)^2}{\frac{s_x^4}{n_x^2(n_x - 1)} + \frac{s_y^4}{n_y^2(n_y - 1)}}$$

Проблема Беренца-Фишера

Не существует точного распределения для статистики

$$\frac{\bar{x} - \bar{y} - (\mu_x - \mu_y)}{\sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}}}$$

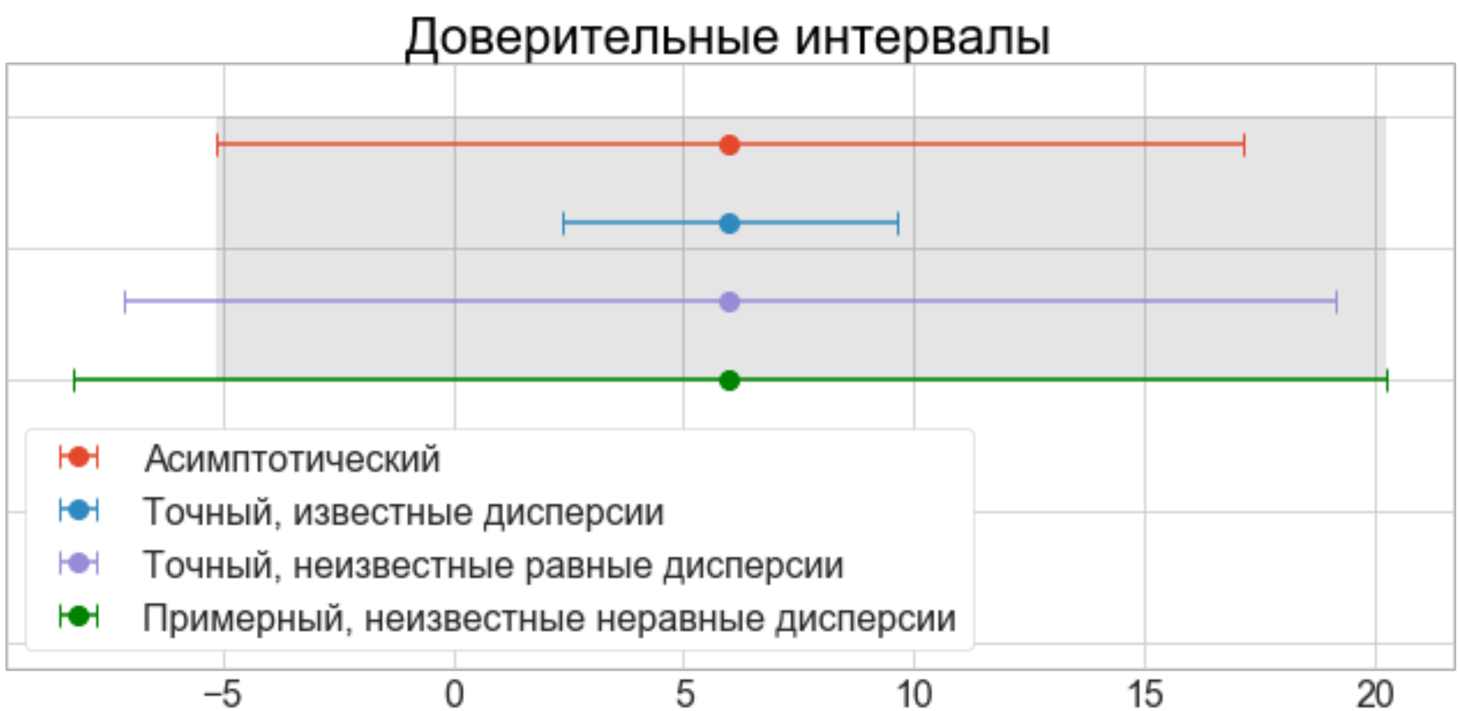
Невозможно точно сравнить средние двух независимых выборок, дисперсии которых неизвестны.

Аппроксимация с предыдущего слайда хорошо работает, если $n_x = n_y$ либо знак неравенства между n_x и n_y такой же как между σ_x и σ_y

Пример 1

Измерили зарплаты мужчин и женщин в тысячах рублей: $\bar{x} = 43$, $s_x = 5.1$, $\bar{y} = 37$, $s_y = 11.7$. В обеих выборках было по 10 наблюдений.

Из переписи известно, что $\sigma_x = 5.2$, $\sigma_y = 12$



Пример 1

Неизвестны (асимптотика):

$$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}} \qquad 43 - 37 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{5.1^2}{10} + \frac{11^2}{10}}$$

Известны (точный):

$$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}} \qquad 43 - 37 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{5.2^2}{10} + \frac{12^2}{10}}$$

Неизвестны, равны (точный):

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t(n_x + n_y - 2)_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n_x} + \frac{s^2}{n_y}} \qquad 43 - 37 \pm 2.3 \cdot \sqrt{\frac{81}{10} + \frac{81}{10}}$$

Неизвестны, не равны (примерный):

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t(v)_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y}} \qquad 43 - 37 \pm 2.51 \cdot \sqrt{\frac{5.1^2}{10} + \frac{11^2}{10}}$$

Разность средних (зависимые выборки)

Выборки зависят друг от друга:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu_x, \sigma_x^2) \qquad Y_1, \dots, Y_n \sim iid\ N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

- Измерения делаются на одних и тех же объектах
- Можем посмотреть прирост на отдельных объектах

$$d_i = X_i - Y_i \qquad\qquad \bar{x} - \bar{y} = \overline{x - y}$$

- Получаем ситуацию с распределением Стьюдента, дисперсию считаем по формуле:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (d_i - \bar{d})^2$$

Пример 2

Измерили зарплаты в 2020 и 2021 годах.
Измеряли для одних и тех же людей.

2020	50	40	45	45	35
2021	60	30	30	35	30
d_i	10	-10	-15	-10	-5

$$\bar{d} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} d_i = -6 \qquad s^2 = \frac{1}{5-1}\sum_{i=1}^{5}\left(d_i - \bar{d}\right)^2 = 92.5$$

Точный, неизвестная дисперсия:

$$\bar{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad -6 \pm 2.78 \cdot \frac{9.62}{\sqrt{5}}$$

Резюме

В зависимости от того, что мы знаем о дисперсии, для разности средних из независимых нормальных выборок
мы получаем разные виды доверительных интервалов

Для средних из зависимых выборок (наблюдаем изменения на одних и тех же объектах) работают те же самые доверительные интервалы, что и для одновыборочных средних

Точные доверительные интервалы для нормальных выборок: дисперсии

Зачем оценивать интервалы для дисперсий

Станок упаковывает чай по 100 грамм с какой-то заданной дисперсией. Если настройки станка расшатываются и погрешность становится слишком большой, получаем много бракованных партий.

Любая ценная бумага оценивается через среднюю доходность. Чем больше риск, тем выше доходность. Инвестору при формировании портфеля важно знать, в каком диапазоне для бумаги могут меняться обе характеристики. Один из способов посчитать риск – оценка дисперсии.

Союзники: теорема Фишера

Теорема:

Пусть $X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(0,1)$, тогда

1. Выборочное среднее $\bar{x}$ и дисперсия s^2 независимы
2. $\frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2}$ имеет χ^2 – распределение с $n-1$ степенью свободы

Распределение Фишера

Независимые случайные величины $X \sim \chi_k^2,\ Y \sim \chi_m^2$.

Случайная величина

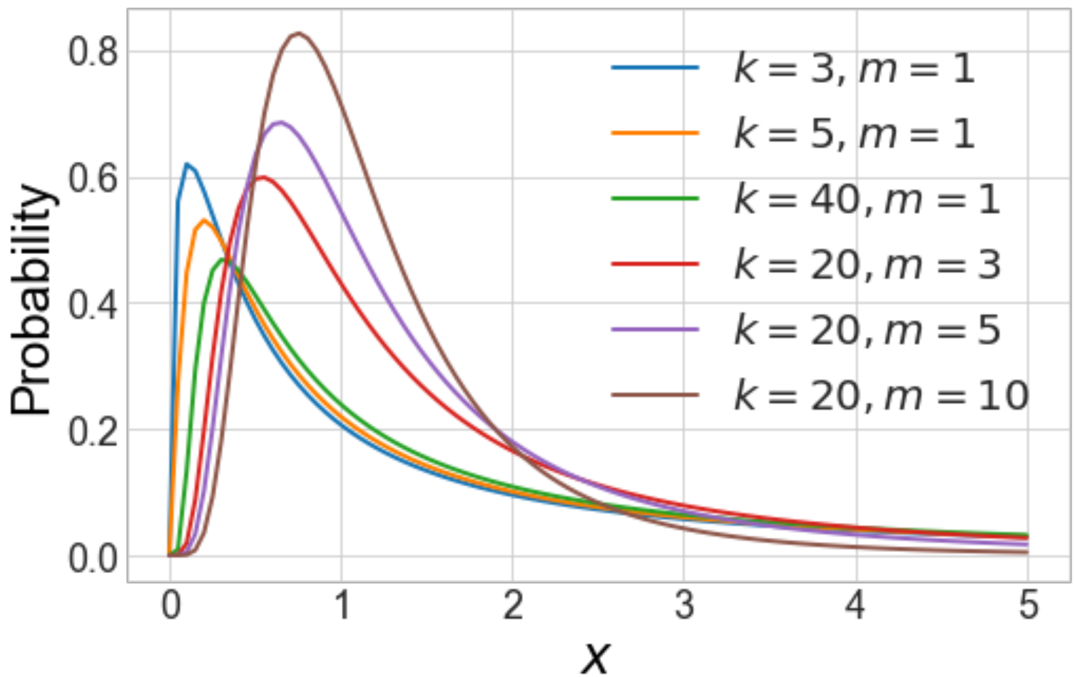
$$\mathrm{F} = \frac{\sqrt{X/k}}{\sqrt{Y/m}} \sim F(k, m)$$

имеет распределение Фишера с k, m степенями свободы.

Когда возникает на практике:

Встречается при сравнении дисперсий.
Чтобы сравнить их между собой, одну дисперсию делят на вторую.

Распределение Фишера



$$X \sim \chi^2_k, \; Y \sim \chi^2_m$$

$$\mathrm{F} = \frac{\sqrt{X/k}}{\sqrt{Y/m}} \sim F(k, m)$$

Из-за квадратов принимает только положительные значения

Характеристики:

$$\mathbb{E}(F) = \frac{m}{m-2}, m > 2$$

$$Var(F) = \frac{2m^2(k+m-2)}{n(m-2)^2(m-4)}$$

Плотность:

Очень громоздкая

Доверительные интервалы для нормального

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$$

Строим доверительный интервал для μ:

σ^2 известна

σ^2 неизвестна

Строим доверительный интервал для σ^2:

μ известно

μ неизвестно

Математическое ожидание известно

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2),\ \mu$ известно

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\boxed{(X_i - \mu)^2}}_{[N(0,\sigma^2)]^2}$$

Надо как-то привести к χ_n^2

Математическое ожидание известно

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2),\ \mu$ известно

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\boxed{\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}} = \frac{\sigma^2}{n}\cdot\chi_n^2$$

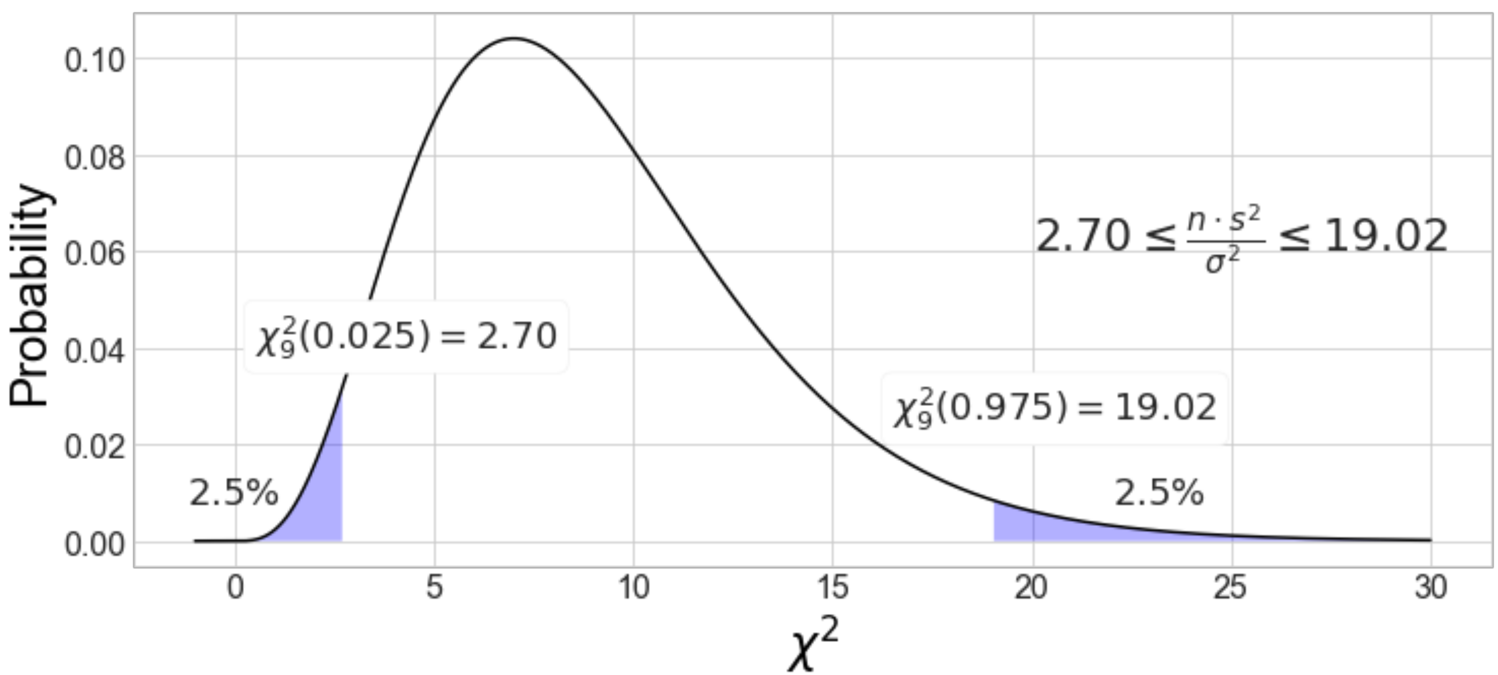
$$[N(0,1)]^2$$

$$\frac{n\cdot s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$

Математическое ожидание известно

$$\frac{n \cdot s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$

$$P\left(\chi_n^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \le \frac{n \cdot s^2}{\sigma^2} \le \chi_n^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \alpha$$



Математическое ожидание известно

$$\frac{n \cdot s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$$

$$P\left(\chi_n^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \le \frac{n \cdot s^2}{\sigma^2} \le \chi_n^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\frac{n \cdot s^2}{\chi_n^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} \le \sigma^2 \le \frac{n \cdot s^2}{\chi_n^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = 1 - \alpha$$

Математическое ожидание неизвестно

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$, μ **не**известно

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Оценка ломает всю логику
Нужен новый союзник

Математическое ожидание неизвестно

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2)$, μ **не**известно

Теорема Фишера:

$$\frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

В ситуации, когда математическое ожидание известно, у статистики n степеней свободы

Когда оно неизвестно, у статистики $n-1$ степень свободы

Интуиция: одна степень свободы используется для оценки математического ожидания

Математическое ожидание неизвестно

$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu, \sigma^2),$ μ **неизвестно**

Теорема Фишера:

$$\frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$P\left(\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \le \frac{(n-1)\cdot s^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = 1-\alpha$$

Пример

Джордан считает, что вложения в бумаги с высокой дисперсией доходности рискованно, и хочет знать, в каком диапазоне колеблется дисперсия для одной из его акций. За последние 10 лет для бумаги $s^2 = 0.05$.

$$\frac{(10-1)\cdot 0.05}{\chi_9^2(0.975)} \le \sigma^2 \le \frac{(10-1)\cdot 0.05}{\chi_9^2(0.025)}$$

$$0.016 \le \sigma^2 \le 0.038$$

Пример

Джордан считает, что вложения в бумаги с высокой дисперсией доходности рискованно, и хочет знать, в каком диапазоне колеблется дисперсия для одной из его акций. За последние 10 лет для бумаги $s^2 = 0.05$.

Джордан инсайдер и знает доходность бумаги (это каким инсайдером надо быть!). Получилось, что $s^2 = 0.04$.

$$\frac{10 \cdot 0.05}{\chi^2_{10}(0.975)} \leq \sigma^2 \leq \frac{10 \cdot 0.05}{\chi^2_{10}(0.025)}$$

$$0.015 \leq \sigma^2 \leq 0.039$$

Резюме

Если известно распределение, можно строить точные доверительные интервалы не только для математических ожиданий, но и для дисперсий

Для нормальных выборок в этом помогают теорема Фишера и распределение “Хи-квадрат”

Точные доверительные интервалы для нормальных выборок: отношение дисперсий

Отношение дисперсий (независимые выборки)

Выборки не зависят друг от друга:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad Y_1, \dots, Y_m \sim iid\ N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

Нас интересует случайная величина:

$$\frac{s_n^2}{s_m^2} \sim ?$$

Из-за квадратов разность оказывается плохой мерой для различия в дисперсиях

Отношение дисперсий (независимые выборки)

Выборки не зависят друг от друга:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad Y_1, \dots, Y_m \sim iid\ N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

Нас интересует случайная величина:

$$\frac{s_n^2}{s_m^2} \sim ?$$

$$\frac{s_n^2 \cdot \sigma_m^2}{s_m^2 \cdot \sigma_n^2}$$

Теорема Фишера:

$$\frac{(n-1) \cdot s_n^2}{\sigma_n^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

$$\frac{(m-1) \cdot s_m^2}{\sigma_m^2} \sim \chi_{m-1}^2$$

$$\boxed{\frac{\frac{(n-1)\cdot s_n^2}{\sigma_n^2}}{n-1} \Big/ \frac{\frac{(m-1)\cdot s_m^2}{\sigma_m^2}}{m-1}} = \boxed{\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1} \Big/ \frac{\chi_{m-1}^2}{m-1}}$$

$$F_{n-1,m-1}$$

Отношение дисперсий (независимые выборки)

Выборки не зависят друг от друга:

$$X_1, \dots, X_n \sim iid\ N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad Y_1, \dots, Y_m \sim iid\ N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

Нас интересует случайная величина:

$$\frac{s_n^2 \cdot \sigma_m^2}{s_m^2 \cdot \sigma_n^2} \sim F_{n-1,m-1}$$

Итоговый интервал:

$$\frac{s_m^2}{s_n^2} \cdot F_{n-1,m-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \le \frac{\sigma_m^2}{\sigma_n^2} \le \frac{s_m^2}{s_n^2} \cdot F_{n-1,m-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Пример

У Джордана есть две бумаги. Он хочет посмотреть, насколько сильно они различались по уровню риска за последние 10 лет, $s_A^2 = 0.05, s_B^2 = 0.04$

$$\frac{s_A^2}{s_B^2} \cdot F_{9,9}(0.025) \leq \frac{\sigma_m^2}{\sigma_n^2} \leq \frac{s_A^2}{s_B^2} \cdot F_{9,9}(0.975)$$

$$0.31 \leq \frac{\sigma_m^2}{\sigma_n^2} \leq 5$$

Резюме

Для того, чтобы посмотреть, насколько дисперсии двух независимых выборок различаются между собой, используется отношение дисперсий

Для нормальных выборок в этом помогают теорема Фишера и распределение Фишера