"Machine Learning estadístico para interfaces Cerebro-Computadora"

MODULO III - parte III

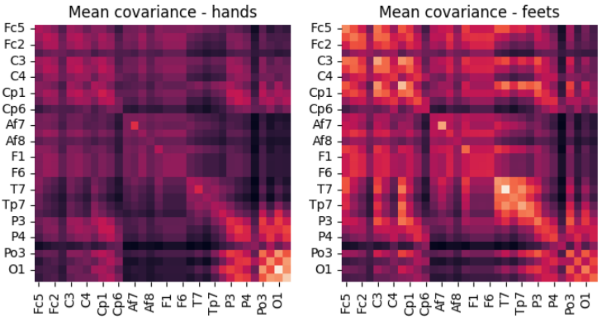
Dra. Victoria Peterson
vpeterson@santafe-conicet.gov.ar

Nov 2023

NiCALab

Motivación

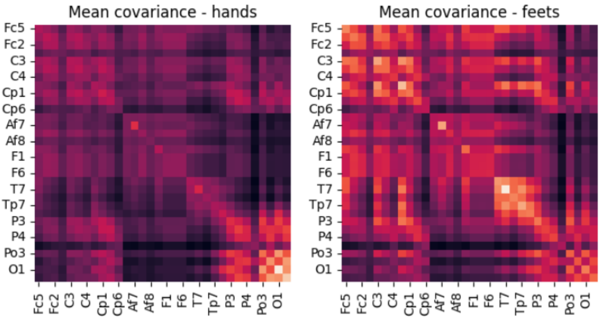
La matrices de covarianza espaciales



Fuente: pyRiemann

Motivación

La matrices de covarianza espaciales

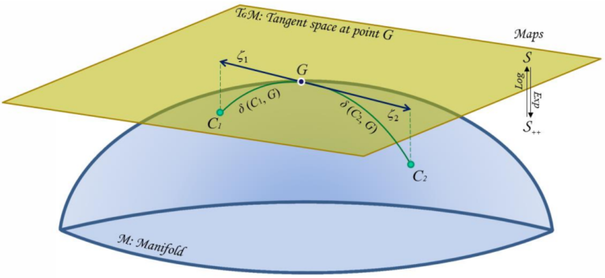


Fuente: pyRiemann

¿Podré trabajar directamente en el espacio de las matrices de covarianza?

Variedad (Manifold) de Riemannian

Una variedad de Riemannian es una variedad diferenciable en el cual el plano tangente en cada punto es un espacio Euclideo.



Fuente: [Congedo et al., 2017]

Definiciones

$S(p) = \{\mathbf{S} \in M(p), \mathbf{S}^T = \mathbf{S}\}$, es el espacio de todas las matrices $p \times p$ simétricas en un espacio de matrices cuadradas.
$Q(p) = \{\mathbf{Q} \in S(p), \mathbf{Q} > 0\}$, es el conjunto de matrices $p \times p$ simétricas definidas-positivas (SPD).

Definiciones

$S(p) = \{\mathbf{S} \in M(p), \mathbf{S}^T = \mathbf{S}\}$, es el espacio de todas las matrices $p \times p$ simétricas en un espacio de matrices cuadradas.
$Q(p) = \{\mathbf{Q} \in S(p), \mathbf{Q} > 0\}$, es el conjunto de matrices $p \times p$ simétricas definidas-positivas (SPD).

⚠

Las matrices de covarianza Σ son SPD

Definiciones

$S(p) = \{\mathbf{S} \in M(p), \mathbf{S}^T = \mathbf{S}\}$, es el espacio de todas las matrices $p \times p$ simétricas en un espacio de matrices cuadradas.
$Q(p) = \{\mathbf{Q} \in S(p), \mathbf{Q} > 0\}$, es el conjunto de matrices $p \times p$ simétricas definidas-positivas (SPD).

Distancia de Riemmannian

$\delta_R(\mathbf{\Sigma}_1, \mathbf{\Sigma}_2) = \|Log(\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{\Sigma}_2)\|_F = \left(\sum_{j=1}^{p} \log^2 \sigma_j\right)^{\frac{1}{2}}$, donde $\sigma_j = eigen(\mathbf{\Sigma}_1^{-1}\mathbf{\Sigma}_2)$

Propiedades:

- $\delta_R(\mathbf{\Sigma}_1, \mathbf{\Sigma}_2) = \delta_R(\mathbf{\Sigma}_2, \mathbf{\Sigma}_1)$.
- $\delta_R(\mathbf{\Sigma}_1, \mathbf{\Sigma}_2) = \delta_R(\mathbf{\Sigma}_1^{-1}, \mathbf{\Sigma}_2^{-1})$.
- $\delta_R(\mathbf{\Sigma}_1, \mathbf{\Sigma}_2) = \delta_R(\mathbf{W}^T\mathbf{\Sigma}_1\mathbf{W}, \mathbf{W}^T\mathbf{\Sigma}_2\mathbf{W})$, siendo $\mathbf{W}$ una matriz $p \times p$ invertible.

Media aritmética

$\bar{\mathbf{\Sigma}}_a = \arg\min_{\mathbf{\Sigma}\in Q(p)} \sum_{i=1}^{n} \delta_E^2(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Sigma}_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Sigma}_i.$

Media de Reimannian

$\bar{\mathbf{\Sigma}}_R = \arg\min_{\mathbf{\Sigma}\in Q(p)} \sum_{i=1}^{n} \delta_R^2(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Sigma}_i).$

Geodésica

En el espacio de Riemannian de matrices SPD, se define como *geodésica* $\gamma(t)$, con $t \in [0,1]$ a la distancia más corta entre dos puntos Σ_1 y Σ_2,

$$\gamma(t) = \mathbf{\Sigma}_1^{1/2}\left(\mathbf{\Sigma}_1^{-1/2}\mathbf{\Sigma}_2\mathbf{\Sigma}_1^{-1/2}\right)^t \mathbf{\Sigma}_1^{1/2},$$

donde para cualquier matriz $\mathbf{A}$ diagonalizable $\mathbf{A}^t = \mathbf{U}\mathbf{D}^t\mathbf{U}^{-1}$

Media aritmética

$\bar{\mathbf{\Sigma}}_a = \arg\min_{\mathbf{\Sigma}\in Q(p)} \sum_{i=1}^{n} \delta_E^2(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Sigma}_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Sigma}_i.$

Media de Reimannian

$\bar{\mathbf{\Sigma}}_R = \arg\min_{\mathbf{\Sigma}\in Q(p)} \sum_{i=1}^{n} \delta_R^2(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Sigma}_i).$

No tiene solución explícita. Debe hallarse mediante algoritmos iterativos.

Geodésica

En el espacio de Riemannian de matrices SPD, se define como *geodésica* $\gamma(t)$, con $t \in [0,1]$ a la distancia más corta entre dos puntos Σ_1 y Σ_2,

$$\gamma(t) = \mathbf{\Sigma}_1^{1/2}\left(\mathbf{\Sigma}_1^{-1/2}\mathbf{\Sigma}_2\mathbf{\Sigma}_1^{-1/2}\right)^t \mathbf{\Sigma}_1^{1/2},$$

donde para cualquier matriz $\mathbf{A}$ diagonalizable $\mathbf{A}^t = \mathbf{U}\mathbf{D}^t\mathbf{U}^{-1}$

Media aritmética

$\bar{\mathbf{\Sigma}}_a = \arg\min_{\mathbf{\Sigma}\in Q(p)} \sum_{i=1}^{n} \delta_E^2(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Sigma}_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{\Sigma}_i.$

Recordar cálculo $\mathbf{\Sigma}_c$ en CSP.

Media de Reimannian

$\bar{\mathbf{\Sigma}}_R = \arg\min_{\mathbf{\Sigma}\in Q(p)} \sum_{i=1}^{n} \delta_R^2(\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Sigma}_i).$

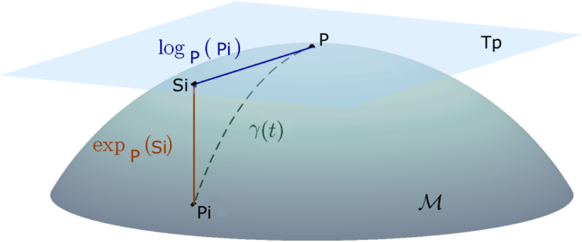
No tiene solución explícita. Debe hallarse mediante algoritmos iterativos.

Geodésica

En el espacio de Riemannian de matrices SPD, se define como *geodésica* $\gamma(t)$, con $t \in [0,1]$ a la distancia más corta entre dos puntos Σ_1 y Σ_2,

$$\gamma(t) = \mathbf{\Sigma}_1^{1/2}\left(\mathbf{\Sigma}_1^{-1/2}\mathbf{\Sigma}_2\mathbf{\Sigma}_1^{-1/2}\right)^t \mathbf{\Sigma}_1^{1/2},$$

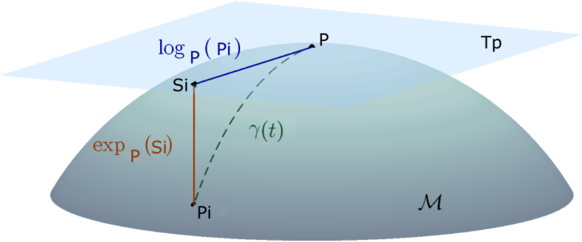
donde para cualquier matriz $\mathbf{A}$ diagonalizable $\mathbf{A}^t = \mathbf{U}\mathbf{D}^t\mathbf{U}^{-1}$



Fuente: [Barachant et al., 2010]

$$Log_{\mathbf{\Sigma}} : \mathbf{\Sigma}(n) \rightarrow \mathbf{S}(n)$$

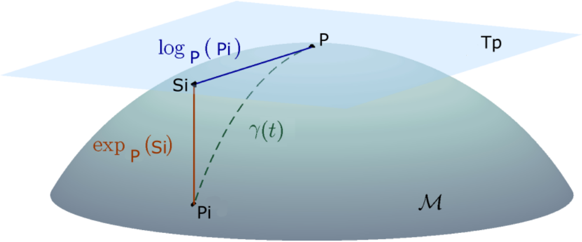
$$Exp_{\mathbf{S}} : \mathbf{S}(n) \rightarrow \mathbf{\Sigma}(n)$$



Fuente: [Barachant et al., 2010]

$$Log_{\mathbf{\Sigma}}\left(\mathbf{\Sigma}_i\right) = \mathbf{S}_i$$

$$Exp_{\mathbf{S}}\left(\mathbf{S}_i\right) = \mathbf{\Sigma}_i$$

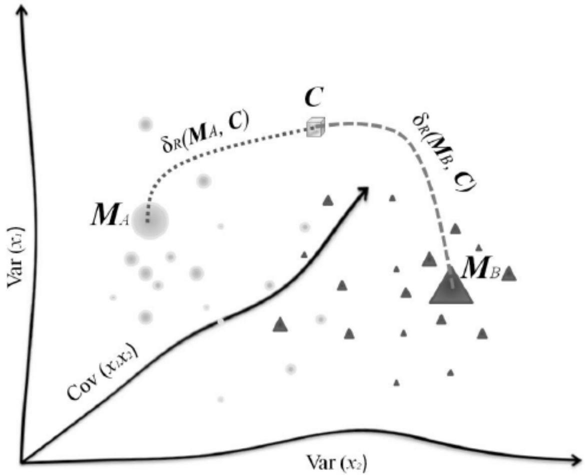


Fuente: [Barachant et al., 2010]

$$Log_{\mathbf{\Sigma}}\left(\mathbf{\Sigma}_i\right) = \mathbf{\Sigma}^{1/2} Log\left(\mathbf{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{\Sigma}_i\mathbf{\Sigma}^{-1/2}\right)\mathbf{\Sigma}^{1/2}$$

$$Exp_{\mathbf{S}}\left(\mathbf{S}_i\right) = \mathbf{\Sigma}^{1/2} Exp\left(\mathbf{\Sigma}^{-1/2}\mathbf{S}_i\mathbf{\Sigma}^{-1/2}\right)\mathbf{\Sigma}^{1/2}$$

Distancia mínima a la media Riemannian (MDM)



Distancia mínima a la media Riemannian (MDM)

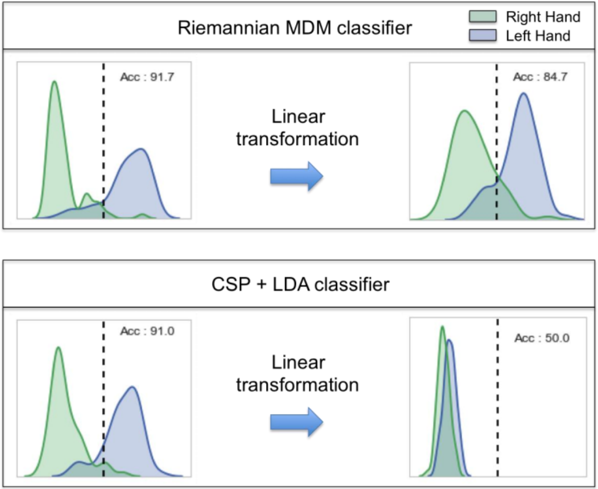
Algorithm 1 Minimum Distance to Riemannian Mean

Input: a set of trials $\mathbf{X}_i$ of K different known classes.
Input: $\mathbf{X}$ an EEG trial of unknown class.
Input : $\mathfrak{I}^{(k)}$ the set of indices of the trials corresponding to the k-th condition.
Output: $\hat{k}$ the estimated class of test trial $\mathbf{X}$.

```
Compute SCMs of X_i to obtain P_i, (1).
Compute SCM of X to obtain P, (1).
for k = 1 to K do
    P_G^(k) = G(P_i, i ∈ I^(k)), (10).
end for
k̂ = arg min_k δ_R(P, P_G^(k)), (4).
return k̂
```

Compute SCMs of $\mathbf{X}_i$ to obtain $\mathbf{P}_i$, (1).
Compute SCM of $\mathbf{X}$ to obtain $\mathbf{P}$, (1).
for $k = 1$ to K **do**
$\quad \mathbf{P}_{\mathfrak{G}}^{(k)} = \mathfrak{G}\left(\mathbf{P}_i, i \in \mathfrak{I}^{(k)}\right)$, (10).
end for
$\hat{k} = \arg\min_k \delta_R(\mathbf{P}, \mathbf{P}_{\mathfrak{G}}^{(k)})$, (4).
return $\hat{k}$

Invarianza a la transformación



Fuente: [Congedo et al., 2017]

1. Geometría Riemanniana

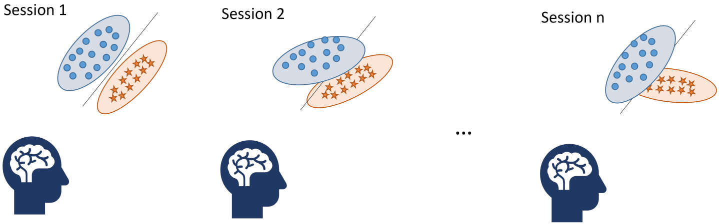
2. Desafíos de ML en BCI

1 Geometría Riemanniana

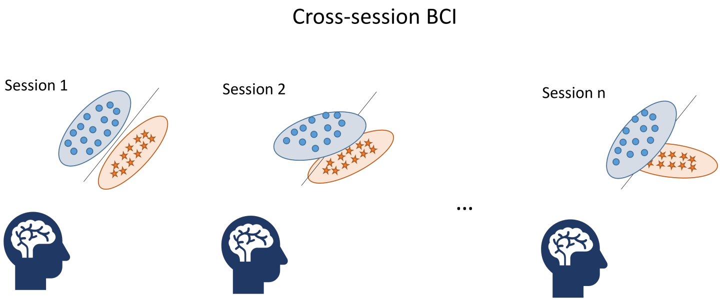
2 Desafíos de ML en BCI

Variabilidad entre sesiones

Cross-session BCI

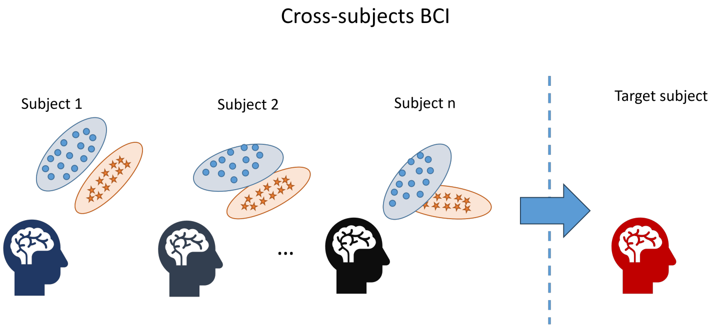


Variabilidad entre sesiones

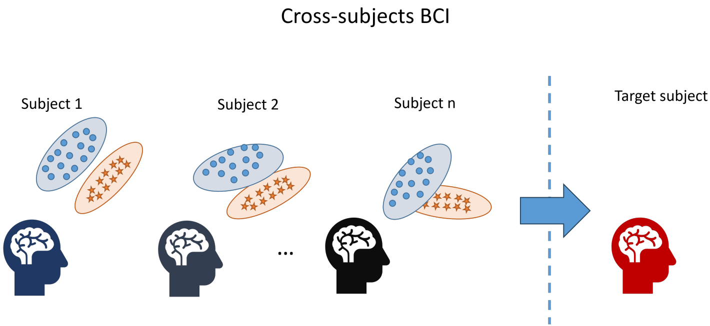


Domain adaptation, domain invariant, model robustness

Variabilidad entre sujetos

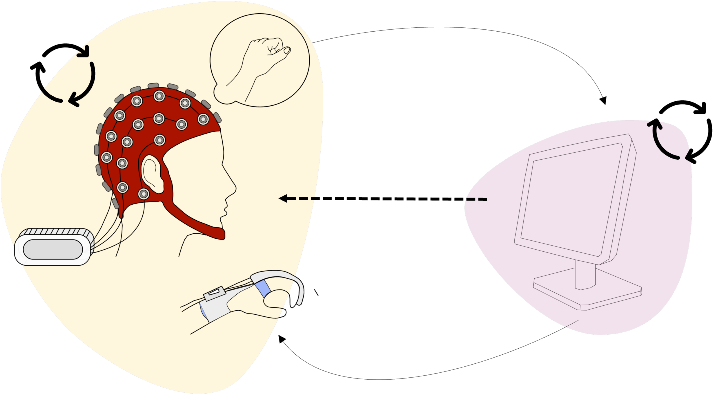


Variabilidad entre sujetos

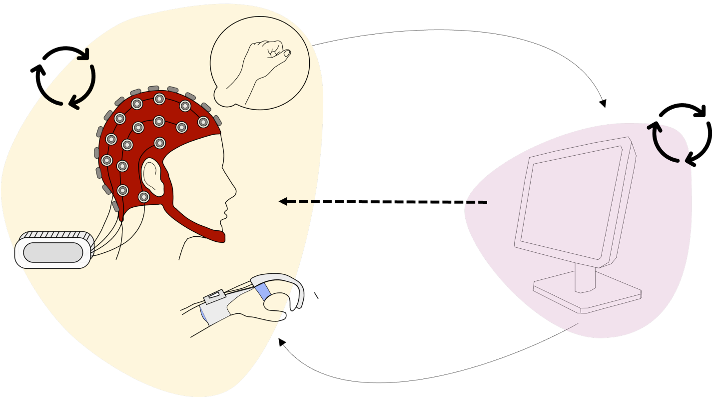


Transfer learning, zero-training, minimal-recalibration

Considering the user within the loop

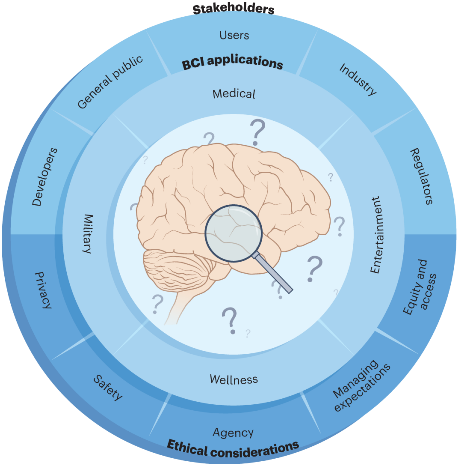


Considering the user within the loop



Feedback, model adaptability, illiteracy

Neuroética



Fuente: [Cabrera and Weber, 2023]

Y muuucho más

Fuente: REVISTA KNOWABLE

Bibliografía utilizada I

Barachant, A., Bonnet, S., Congedo, M., and Jutten, C. (2010). Riemannian geometry applied to bci classification. In *International Conference on Latent Variable Analysis and Signal Separation*, pages 629–636. Springer.

Cabrera, L. Y. and Weber, D. J. (2023). Rethinking the ethical priorities for brain–computer interfaces. *Nature Electronics*, 6(2):99–101.

Congedo, M., Barachant, A., and Bhatia, R. (2017). Riemannian geometry for eeg-based brain-computer interfaces; a primer and a review. *Brain-Computer Interfaces*, 4(3):155–174.