Reporte PDEs:

Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Parciales.

Feliciano Robles Andrade

2 de Mayo

"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"

Índice

1. *Introducción del reporte*

En el presente reporte se abarcara los temas que se tuvieron que analizar para poder desarrollar las 3 mas recientes actividades del curso de física computacional, enfocándonos en la interpretación de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales parciales como lo son para el caso de la ecuación de calor, la ecuación de onda y la ecuación de Poisson. Para poder desarrollar esto nos auxiliamos del método de diferencias finitas y el concepto de condiciones a la frontera, siendo de gran ayuda las herramientas tecnológicas a nuestra disposición como lo es programar en Phyton, contar con bibliotecas que nos faciliten esto, así como bastos recursos a través de la red de internet.

2. *Descripción de las tres grandes familias de Ecuaciones Diferenciales Parciales*

En matemáticas una ecuación en derivadas parciales (a veces abreviada como EDP) es aquella ecuación diferencial cuyas incógnitas son funciones de diversas variables independientes, con la peculiaridad de que en dicha ecuación figuran no solo las propias funciones sino también sus derivadas. Tienen que existir funciones de por lo menos dos variables independientes. O bien una ecuación que involucre una función matemática u de varias variables independientes $x, y, z, ...,$ y las derivadas parciales de u respecto de esas variables. Las ecuaciones en derivadas parciales se emplean en la formulación matemática de procesos de la física y otras ciencias que suelen estar distribuidos en el espacio y el tiempo. Problemas típicos son la propagación del sonido o del calor, la electrostática, la electrodinámica, la dinámica de fluidos, la elasticidad, la mecánica cuántica y muchos otros. Se las conoce también como ecuaciones diferenciales parciales.

2.1. Parabólicas

Una ecuación parabólica en derivadas parciales es una ecuación diferencial parcial de segundo orden del tipo:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

en donde la matriz: $Z = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ tiene un **determinante igual a 0**.
Ejemplos de ecuaciones parabólicas:

- Ecuación de Schrödinger
- Ecuación del calor

2.2. Hiperbólicas

Una ecuación hiperbólica en derivadas parciales es una ecuación diferencial parcial de segundo orden del tipo:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

en donde la matriz: $Z = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ cuyos coeficientes pueden ser constantes o funciones continuas en las variables (x, y), tiene un **determinante negativo**.
Ejemplo de ecuaciones hiperbólicas:

- Ecuación de ondas

2.3. Elípticas

En análisis matemático, una ecuación elíptica en derivadas parciales es una ecuación diferencial parcial tal que los coeficientes de las derivadas de grado máximo son positivas. Se trata de la aplicación de un operador elíptico, un operador diferencial definido sobre un espacio de funciones que generaliza al operador de Laplace.
Por ejemplo, una ecuación elíptica en derivadas parciales de segundo orden tiene la forma:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

en donde la matriz: $Z = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ es definida positiva, o bien **coeficientes de las derivadas positivos**.
Ejemplos de ecuaciones elípticas:

- Ecuación de Poisson.
- Ecuación de Laplace.
- Ecuación Biarmónica.
- Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.

3. *Descripción de los tres tipos de Condiciones a la Frontera*

En matemáticas, en el campo de las ecuaciones diferenciales, un problema de valor de frontera (también llamados como problemas de valor o condición, de borde o contorno) se lo denomina al conjunto de una ecuación diferencial y a las condiciones de frontera o contorno. Una solución de un problema de condiciones de frontera es una solución de una ecuación diferencial que también satisface condiciones de frontera.

3.1. Dirichlet

En matemáticas, la condición de frontera de Dirichlet (o de primer tipo) es un tipo de condición de frontera o contorno, denominado así en honor a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), cuando en una ecuación diferencial ordinaria o una en derivadas parciales, se le especifican los valores de la solución que necesita la frontera del dominio. La cuestión de hallar las soluciones a esas ecuaciones con esta condición se le conoce como problema de Dirichlet.

3.2. Neumann

En matemáticas, la condición de frontera de Neumann (o de segundo tipo) es un tipo de condición de frontera o contorno, llamada así en alusión a Carl Neumann.Se presenta cuando a una ecuación diferencial ordinaria o en derivadas parciales, se le especifican los valores de la derivada de una solución tomada sobre la frontera o contorno del dominio.

3.3. Robin(Mixto)

En matemáticas, la condición de frontera de Robin (o de tercer tipo) es un tipo de condición de frontera o contorno, denominado así en honor a Victor Gustave Robin (1855-1897), cuando en una ecuación diferencial ordinaria o en una derivadas parciales, se le específica una combinación lineal de los valores de una función y y los valores de su derivada sobre la frontera del dominio.

4. *Descripción del Método de Diferencias Finitas*

En análisis numérico, el método de las diferencias finitas es utilizado para calcular de manera numérica las soluciones a las ecuaciones diferenciales usando ecuaciones diferenciales finitas para aproximar derivadas.

5. *Solución de la Ecuación de Calor*

- Solución Numérica de la Ecuación del Calor

La ecuación del calor es de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

donde la constante κ es el coefficiente de difusividad.
La Ecuación del Calor describe el flujo de calor en una región mediante los cambios de la Temperatura $u(x, t)$.

En un medio unidimensional x, la ecuación se simplifica

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

- Solución de la Ecuación de Calor mediante Diferencias Finitas.

El método de diferencias finitas utiliza Series de Taylor para aproximar las derivadas.

Aproximación de la primer derivada.

Si se conoce el valor de una función $f(x)$ en un punto x_0, se puede conocer el valor en una vecindad $x_0 + h$, con h pequeño, utilizando una Serie de Taylor

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \mathcal{O}(h^2)$$

de la ecuación anterior, obtenemos el valor aproximado de la primer derivada

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

El término $\mathcal{O}(h^2)$ denota términos de orden h^2 y superior.

Esta aproximación de la primera derivada, se le conoce como diferencias finitas de $f'(x_0)$ hacia enfrente, porque involucra un punto hacia enfrente en la derivada.

De la misma forma se obtiene el término de diferencias finitas hacia atrás

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Podemos promediar las dos ecuaciones anteriores y se obtiene una diferencia finita centrada de orden superior

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^3)$$

Aproximación de la segunda derivada.

Podemos utilizar esta última ecuación para calcular la aproximación de la segunda derivada

$$f''(x_0) \approx \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

y substituimos $f(x_0 + h)$ por una diferencia finita hacia atrás

$$f'(x_0 + h) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

y la derivada $f'(x_0)$ por una diferencia finita hacia atrás

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Finalmente obtenemos la diferencia finita centrada de segundo orden para $f''(x_0)$ que involucra los valores en 3 puntos.

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^3)$$

Solución de la Ecuación de Calor por un método híbrido (EDP > EDO).

Podemos escribir la ecuación del calor como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \kappa \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \\ &\approx \kappa \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2} \end{aligned}$$

y luego integrar en el tiempo como si tuviéramos una ecuación diferencial ordinaria.

Formalmente, para un determinado punto (jh, t), tendremos la ecuación diferencial ordinaria $u(jh, t) = u_j(t)$

$$\frac{du_j(t)}{dt} = \kappa \frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2}$$

para la cual requerimos proporcionar la condición inicial al tiempo $t = 0$

$$u(0) = f(x)$$

Y condiciones a la frontera:

- $u_0 = c_1, u_N = c_2$, para el tipo de Dirichlet
- Del tipo Neumann, $du_0/dx = 0$ ó $dx_N/dx = 0$, para casos de equilibrio térmico.

Condiciones a la frontera tipo Neumann

Tenemos que definir cómo estimar la derivada en la frontera, digamos en la frontera $x = L$. Recordando que estamos usando un aproximación de segundo orden para $\partial^2 u/\partial x^2$, debemos encontrar una aproximación para la primer derivada también de orden h^2

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2h} = 0 \\ u_{N+1} &= u_{N-1} \end{aligned}$$

aunque formalmente u_{N+1} esta "fuera"de nuestro dominio, pero utilizamos esto para determinar la ecuación que se satisface en la frontera, reemplazando $u_{N+1} = u_{N-1}$ en la ecuación del calor obteniendo

$$\boldsymbol{\frac{du_N(t)}{dt} = \kappa \frac{2u_{N-1}(t) - 2u_N(t)}{h^2}}$$

Actividad 10 (Ejercicios de la ecuación de Calor)

6. *Solución de la Ecuación de Onda*

La ecuación de onda es una ecuación diferencial parcial de segundo orden en el tiempo y las coordenadas espaciales y tiene la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t)$$

donde c^2 es la velocidad de propagación de la información. La función $u(x, y, z, t)$ representa la presión en una onda acústica, la intensidad de un campo electromagnético, el desplazamiento respecto a un nivel de referencia como lo puede ser la amplitud de una onda superficial en la superficie del agua o el desplazamiento respecto a la horizontal de una cuerda vibrante.

En una dimensión, por ejemplo el caso de una cuerda vibrante, la Ecuación de Onda se simplifica a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + f(x, t) \qquad x \in (0, L], t \in (0, T]$$

Requerimos definir 4 condiciones: 2 iniciales (derivada de segundo orden en t) y 2 a la frontera (segundo orden en el espacio), para encontrar la solución.

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= I(x) \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) &= 0 \\ u(0, t) &= 0 \\ u(L, t) &= 0 \end{aligned}$$

Se requiere también especificar el valor de la constante c y la función $I(x)$.

Solución de la Ecuación de Onda en una dimensión por el Método de Diferencias Finitas.

Podemos comenzar aproximando las segundas derivadas por diferencias finitas centradas de segundo orden.

Si h es el incremento en la dirección $x = \Delta x$ y $k = \Delta t$ es el incremento en el tiempo. Entonces en un punto de la malla discreta (x, t) tendremos

$$\frac{u(x,t+k) - 2u(x,t) + u(x,t-k)}{k^2} = c^2 \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

La ecuación anterior define un esténcil computacional de 5 puntos. El cual nos permite calcular los valores de $u(x,t)$ en el espacio discretizado: $x_0 = 0, x_1, x_2, \ldots, x_M = L$, $t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_N = T$, espaciados uniformemente por $h = \Delta x$ y $k = \Delta t$.

Para inicial el algoritmo tendremos que calcular el primer nivel de $u(x,k)$ en $t = k$, usando sólo la información de la condición inicial, con otro esténcil de 4 puntos similar al que utilizamos en la Ecuación de Calor.

Una vez hecho esto, ya podremos calcular todos los valores futuros de $u(x,t+k)$ ya que se conocen los valores de $u(x,t)$ y $u(x,t-k)$.

Ecuación de Onda en diferencias finitas

Si definimos $u(x,t) = u(jh, nk) = u_j^n$, la ecuación de onda la podemos expresar

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{k^2} = c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

y despejamos para el valor desconocido u_j^{n+1}

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + C^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

donde hemos introducido la constante $C^2 = c^2 k^2 / h^2$, conocida como la constante de Courant.

Iniciando el algoritmo

Como no se puede aplicar el esténcil de 5 puntos pata calcular el primer nivel usaremos un esténcil similar de 4 puntos con la información de la condición inicial para calcular $u(x, t = k)$.

Remplazamos la condición inicial por diferencias finitas centradas de segundo orden

$$\frac{\partial}{\partial t} u_j^0 = \frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2k} = 0$$

lo que indica que $u_j^1 = u_j^{-1}$.

Sustituimos la igualdad anterior en la ecuación de onda y nos queda que

$$\boldsymbol{u_j^1 = u_j^0 + \frac{C^2}{2}(u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0)}$$

Y ya tendremos dos niveles de valores para $u(x,t)$ para calcular los valores de u_j^{n+1} usando el esténcil de 5 puntos.

Actividad 11 (Ejercicios de la ecuación de Onda)

7. *Solución de la Ecuación de Poisson*

7.1. Descripción del algoritmo de solución y condiciones de solución

Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales de tipo Elíptico

Veremos en esta semana la solución de la Ecuación de Poisson

$$-\nabla^2 u(x,y,z) = f(x,y,z)$$

con distintas condiciones a la frontera:

- Condiciones de Dirichlet (especificando valores de la función u)
- Condiciones de Neumann (especificando valores de la derivada de la función u perpendicular a la frontera $\partial u/\partial n$).

La Ecuación de Poisson aparece en problemas de campos gravitatorios, campos eléctricos y otros problemas en la Física.

La Ecuación de Poisson es la generalización de la Ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 u = 0$$

Solución Numérica de la Ecuación de Poisson por diferencias finitas en 2-D con condiciones a la frontera de tipo Dirichlet.

Se busca la solución de la ecuación

$$-\nabla^2 u = f$$

dadas las condiciones en la frontera Γ

$$u(x,y)_\Gamma = g(x,y)$$

No requerimos una condición inicial, pues no hay dependencia en el tiempo. Sólo requerimos conocer los valores a la frontera.

Supongamos que tenemos un dominio rectangular cartesiano $\Gamma = (a,b) \times (c,d)$, sobre el cual generamos una malla

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih_x \quad i = 0,1,2,\ldots,M \\ y_k &= c + kh_y \quad k = 0,1,2,\ldots,N \end{aligned}$$

donde los incrementos h_x y h_y estan definidos como

$$\begin{aligned} h_x &= \frac{(b-a)}{M} \\ h_y &= \frac{(d-c)}{N} \end{aligned}$$

Si aproximamos las derivadas parciales de segundo orden de la ecuación de Poisson por diferencias finitas centradas de segundo orden

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x_i,y_k)}{\partial x^2} &= \frac{u(x_{i+1},y_k)-2u(x_i,y_k)+u(x_{i-1},y_k)}{h_x^2} + \mathcal{O}(\langle^{\ni}_{\S}) \\
\frac{\partial^2 u(x_i,y_k)}{\partial y^2} &= \frac{u(x_i,y_{k+1})-2u(x_i,y_k)+u(x_i,y_{k-1}}{h_y^2} + \mathcal{O}(\langle^{\ni}_{\dagger})
\end{aligned}
$$

Si denotamos por $U_{i,k}$ el valor aproximado de $u(x_i,y_k)$, la ecuación de Poisson se puede aproximar por

$$
-\frac{U_{i+1,k}-2U_{i,k}+U_{i-1,k}}{h_x^2} - \frac{U_{i,k+1}-2U_{i,k}+U_{i,k-1}}{h_y^2} = f_{i,k} + \mathcal{O}(\langle^{\ni}_{\S}, \langle^{\ni}_{\dagger})
$$

Simplificando la expresión anterior y eliminando errores de orden superior, tendremos

$$
\begin{aligned}
- & \left(\frac{U_{i+1,k}+U_{i-1,k}}{h_x^2} + \frac{U_{i,k+1}+U_{i,k-1}}{h_y^2}\right) \\
+ & \;2\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right)U_{i,k} = f_{i,k}
\end{aligned}
$$

donde los valores de $i = 1, 2, \ldots, M-1$ y $k = 1, 2, \ldots, N-1$ representan los puntos del interior del dominio. Los valores en la frontera ya han sido determinados en la definición del problema.

La ecuación anterior requiere un esténcil de 5 puntos como el que ya hemos utilizado con anterioridad.

Supongamos por conveniencia que $h_x = h_y = h$, entonces el algoritmo para resolver la ecuación de Poisson se simplifica

$$
4U_{i,k} - U_{i-1,k} - U_{i,k-1} - U_{i+1,k} - U_{i,k+1} = h^2 f_{i,k}
$$

Resolvamos el caso $M = N = 5$.

Y definamos las siguientes matrices de los puntos internos

$$
\mathbf{U_1} = \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U_2} = \begin{bmatrix} U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U_3} = \begin{bmatrix} U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \end{bmatrix};
$$

las cuales las integramos en un vector $\mathbf{U}$

$$
\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{U_1} \\ \mathbf{U_2} \\ \mathbf{U_3} \end{bmatrix}
$$

Los puntos de la frontera se encuentran definidos por las condiciones de Dirichlet.

Trabajamos sobre el primer grupo de valores internos:

$$
\begin{aligned}
i = 1, k = 1 \quad &: \quad 4U_{1,1} - U_{1,2} - U_{2,1} = h^2 f_{1,1} + U_{1,0} + U_{0,1} \\
i = 2, k = 1 \quad &: \quad 4U_{2,1} - U_{1,1} - U_{3,1} - U_{2,2} = h^2 f_{2,1} + U_{2,0} \\
i = 3, k = 1 \quad &: \quad 4U_{3,1} - U_{2,1} - U_{3,2} = h^2 f_{3,1} + U_{3,0} + U_{4,1}
\end{aligned}
$$

Matricialmente el sistema anterior se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ f_{3,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{1,0} + U_{0,1} \\ U_{2,0} \\ U_{3,0} + U_{4,1} \end{bmatrix}$$

De forma similar, trabajando en la segunda columna interior se obtiene una ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,1} \\ U_{2,1} \\ U_{3,1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,2} \\ f_{2,2} \\ f_{3,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{0,2} \\ 0 \\ U_{4,2} \end{bmatrix}$$

Y por último de la tercera columna interior se obtiene la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,2} \\ U_{2,2} \\ U_{3,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,3} \\ U_{2,3} \\ U_{3,3} \end{bmatrix} = h^2 \begin{bmatrix} f_{1,3} \\ f_{2,3} \\ f_{3,3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{0,3} + U_{1,4} \\ U_{2,4} \\ U_{4,3} + U_{3,4} \end{bmatrix}$$

En resumen, las expresiones anteriores se pueden expresar como

$$-\mathbf{U}_{i-1} + B\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i+1} = h^2 \mathbf{f}_i + \mathbf{g}_i$$

donde B es la matriz tridiagonal $(M-2) \times (M-2)$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

El vector $\mathbf{g}$ surge de los valores de la frontera superior e inferior

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_{0,i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{M,i} \end{bmatrix}$$

Cuando $i = 1$ ó $i = M - 1$, los valores de las fornteras verticales se aplican

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{g}_0 = \begin{bmatrix} g_{0,1} \\ g_{0,2} \\ \vdots \\ g_{0,M-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U}_M = \mathbf{g}_M = \begin{bmatrix} g_{M,1} \\ g_{M,2} \\ \vdots \\ g_{M,M-1} \end{bmatrix}$$

Finalmente, la ecuación matricial de diferencias se puede compactar como

$$A\mathbf{U} = \mathbf{F}$$

donde la matriz A es una matriz de estructura tridiaginal de $(M-2)^2 \times (M-2)^2$ de la forma

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} B & -I & & & \\ -I & B & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & B & -I \\ & & & -I & B \end{bmatrix}$$

y la matriz de valores desconocidos $\mathbf{U}$ y valores conocidos $\mathbf{F}$ son de dimensiones $R^{(M-2)^2}$.

La matriz I es la matriz identidad $(M-2) \times (M-2)$ y el vector $\mathbf{F}$ de la derecha de dimensiones $(M-2)^2 \times 1$, está dado por

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f_1 + (g_0 + g_1)/h^2} \\ \boldsymbol{f_2 + g_2/h^2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{f_{M-2} + g_{M-2}/h^2} \\ \boldsymbol{f_{M-1} + (g_{M-1} + g_M)/h^2} \end{bmatrix}$$

Es importante a la hora de crear las matrices A y B sólo guardar los valores distintos de cero (sparse matrix o matriz rala)

Actividad 12 (Ejercicios de la ecuación de Poisson)

8. *Resumen y conclusiones*

Utilizamos los distintos tipos de condiciones de frontera para exploramos a detalle como se comportan las ecuaciones diferenciales parciales que podría decirse que son las mas populares como lo son la ecuación de calor, onda, y Poisson. Para ello utilizamos distintas herramientas en la programación de Phyton, tanto conceptos de algoritmos como paquetes que facilitaron el proceso y evitaron hacer cálculos por nuestra cuenta, disminuyendo así el error humando y teniendo mas seguridad de lo que se hace, ya que al final del día nosotros nos encargamos de hacer lo analítico, y el programa lo numérico. Y en la cuestión analítica, al momento de interpretar los resultados algo que me di cuenta que se debe de tener cuidado con las gráficas es como se eligen nuestra escala y los límites, ya que puede que por limitar cierto resultado, podamos pensar que se comporta de una manera la ecuación, cuando no es así y simplemente era cuestión de ampliar el canvas.

9. *Bibliografía empleada*

- https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuación_en_derivadas_parciales
- https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuación_parabólica_en_derivadas_parciales
- https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuación_hiperbólica_en_derivadas_parciales
- https://es.wikipedia.org/wiki/Ecuación_elíptica_en_derivadas_parciales
- https://es.wikipedia.org/wiki/Problema_de_condición_de_frontera
- https://es.wikipedia.org/wiki/Condición_de_frontera_de_Dirichlet
- https://es.wikipedia.org/wiki/Condición_de_frontera_de_Neumann

- https://es.wikipedia.org/wiki/Condición_de_frontera_de_Robin
- https://github.com/carloslizarragac/FisicaComputacional1/blob/master/Actividad10.ipynb
- https://github.com/carloslizarragac/FisicaComputacional1/blob/master/Actividad11.ipynb