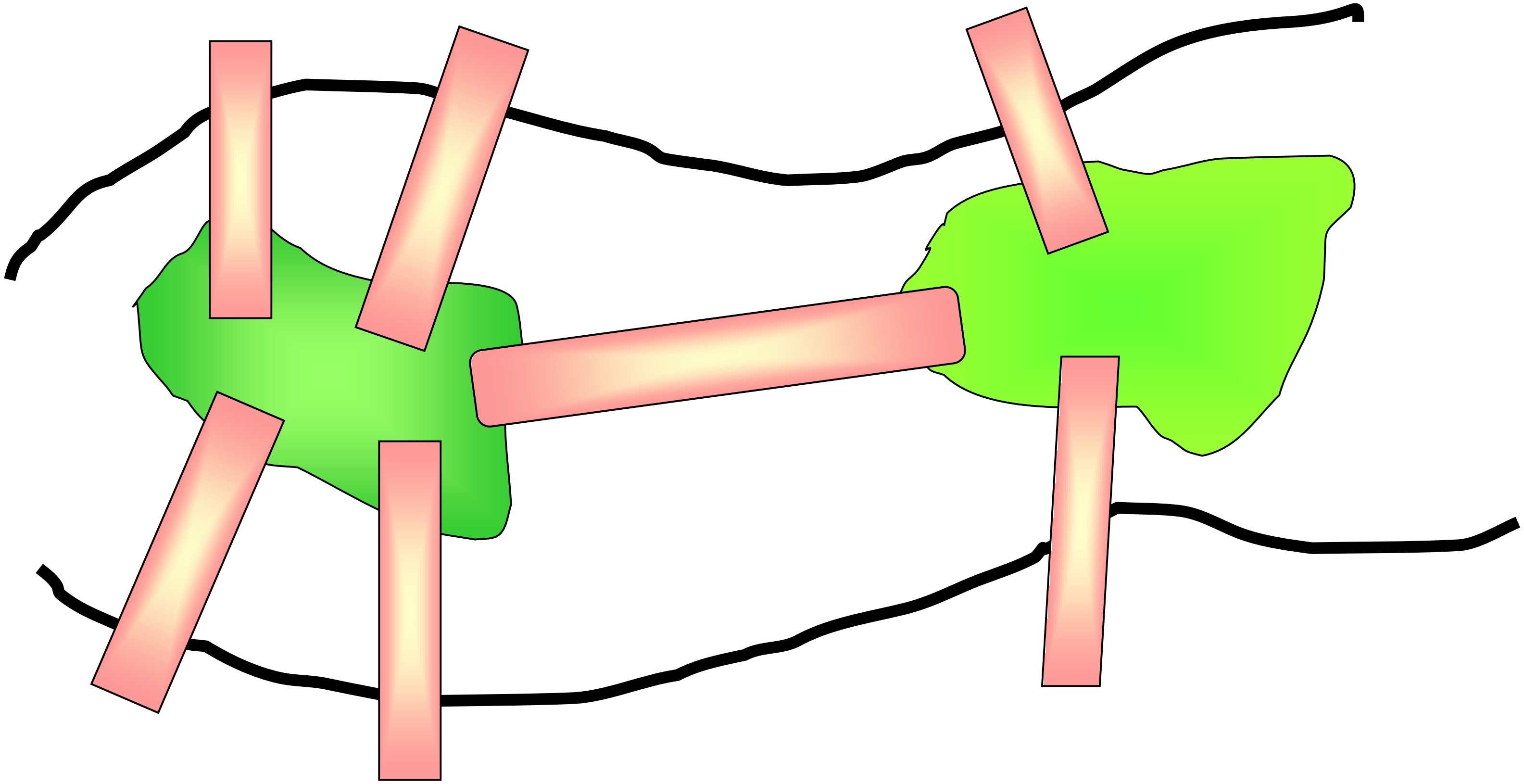
第4章 图结构及其应用算法

哥尼斯堡七桥问题



- 从某个陆地区域出发，是否存在一条能够经过每座桥一次且仅一次，最后回到出发地?

图论——欧拉

欧拉1707年出生在瑞士的巴塞尔城，19岁开始发表论文，直到76岁。几乎每一个数学领域都可以看到欧拉的名字，从初等几何的欧拉线，多面体的欧拉定理，立体解析几何的欧拉变换公式，四次方程的欧拉解法到数论中的欧拉函数，微分方程的欧拉方程，级数论的欧拉常数，变分学的欧拉方程，复变函数的欧拉公式等等。据统计他那不倦的一生，共写下了886本书籍和论文，其中分析、代数、数论占40%，几何占18%，物理和力学占28%，天文学占11%，弹道学、航海学、建筑学等占3%。1733年，年仅26岁的欧拉担任了彼得堡科学院数学教授。1741年到柏林担任科学院物理数学所所长，直到1766年，重回彼得堡，没有多久，完全失明。欧拉在数学上的建树很多，对著名的哥尼斯堡七桥问题的解答开创了图论的研究。

学习目标

- 图结构是一种非线性结构，反映了数据对象之间的任意关系，在计算机科学、数学和工程中有着非常广泛的应用。
- 了解图的定义及相关的术语，掌握图的逻辑结构及其特点；
- 了解图的存储方法，重点掌握图的邻接矩阵和邻接表存储结构；
- 掌握图的遍历方法，重点掌握图的遍历算法的实现；
- 了解图的应用，重点掌握最小生成树算法、最短路径算法、拓扑排序和关键路径算法的基本思想、算法原理和实现过程。

主要内容

- 4.1 图的基本概念
- 4.2 图的存储结构
- 4.3 图的遍历
- 4.4 图与树的关系、最小生成树算法
- 4.5 无向图的双连通性
- 4.6 拓扑排序算法
- 4.7 关键路径算法
- 4.8 最短路径算法
- 本章小结

4.1 基本定义

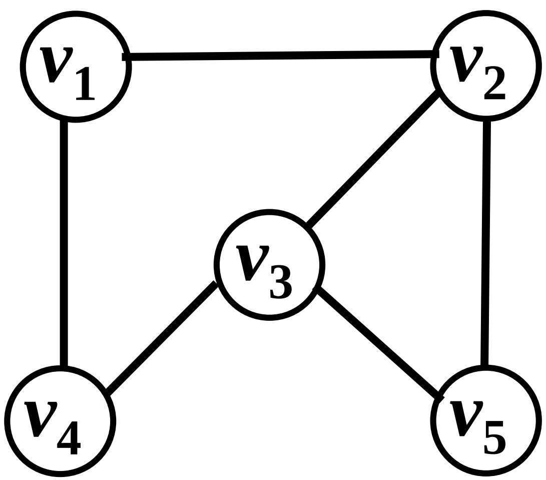
定义1 图(Graph)

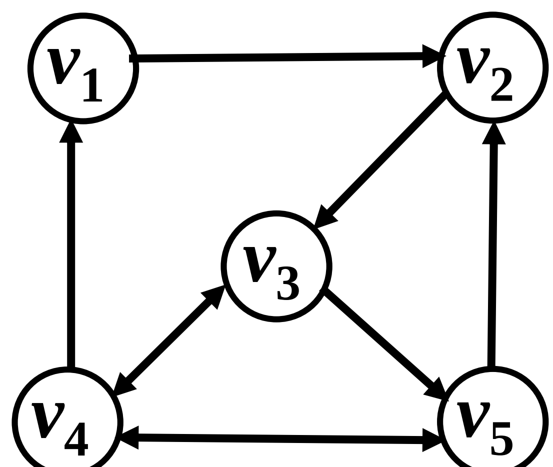
- 图是由顶点（vertex）的有穷非空集合和顶点之间边（edge）的集合组成的一种数据结构，通常表示为：

$$G = (V, E)$$

其中：G表示一个图，V是图G中顶点的集合，E是图G中顶点之间边的集合。

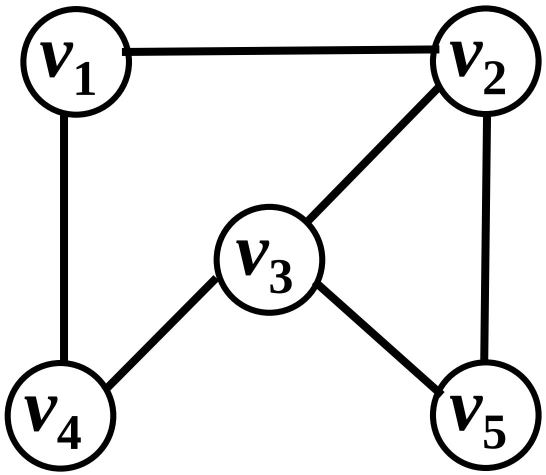
顶点表示数据对象；边表示数据对象之间的关系。



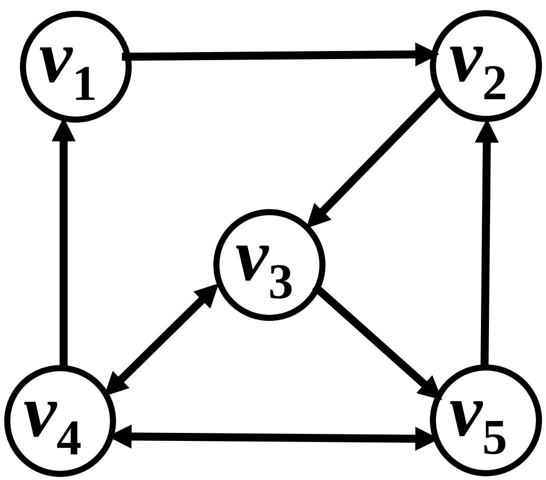


4.1 基本定义(cont.)

定义1 图



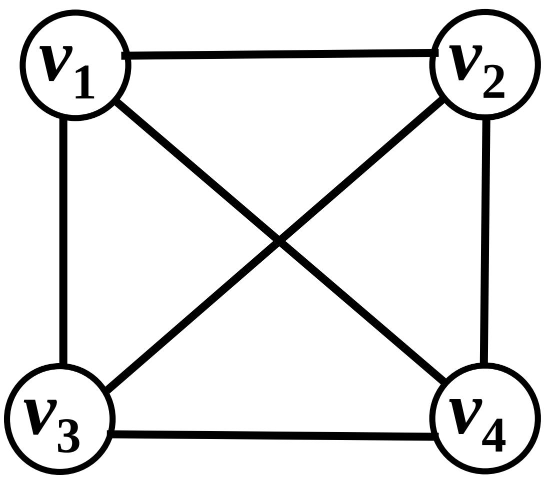
- 无向图：
  - 若顶点v_i和v_j之间的边没有方向，则称这条边为无向边，表示为(v_i,v_j)。
  - 如果图的任意两个顶点之间的边都是无向边，则称该图为无向图。

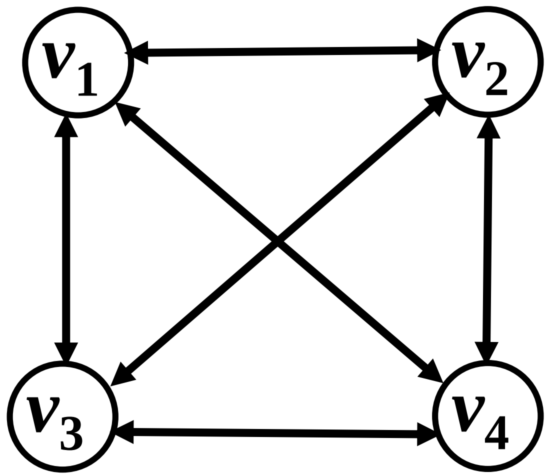


- 有向图：
  - 若顶点v_i和v_j之间的边都有方向，则称这条边为有向边(弧)，表示为<v_i,v_j>。
  - 如果图的任意两个顶点之间的边都是有向边，则称该图为有向图。

4.1 基本定义(cont.)

- 无向完全图：在无向图中，如果任意两个顶点之间都存在边，则称该图为无向完全图。
- 有向完全图：在有向图中，如果任意两个顶点之间都存在方向相反的两条弧，则称该图为有向完全图。

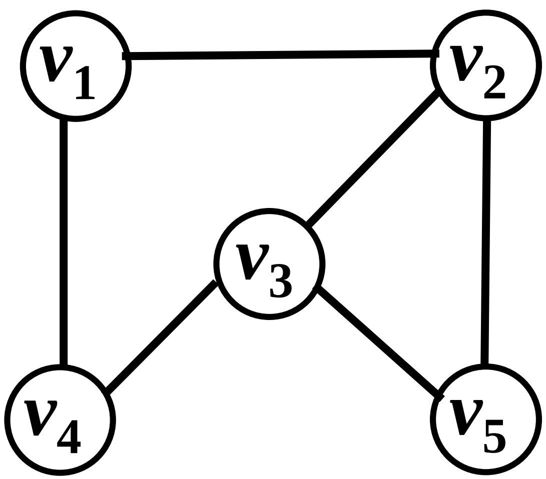


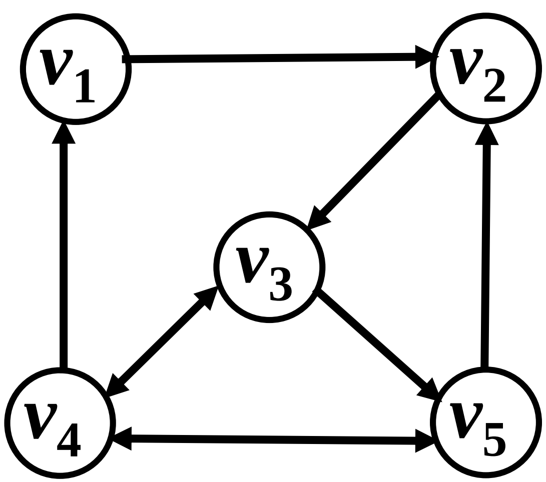


- 含有n个顶点的无向完全图有多少条边?
- 含有n个顶点的有向完全图有多少条弧?

4.1 基本定义(cont.)

定义1 图

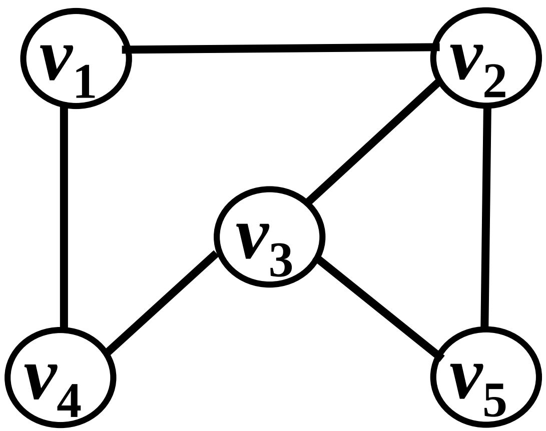


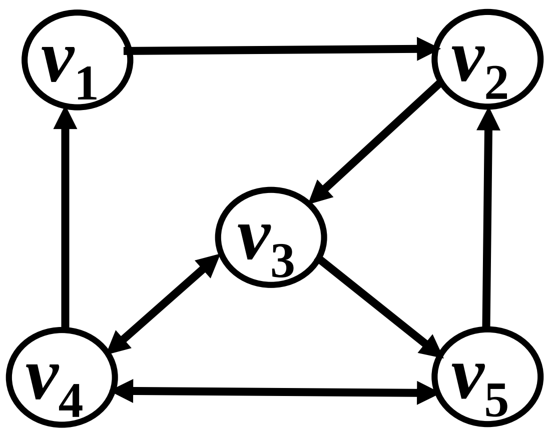


- 邻接、依附
  - 在无向图中，对于任意两个顶点v_i和顶点v_j，若存在边(v_i，v_j)，则称顶点v_i和顶点v_j相邻，互为邻接点，同时称边(v_i，v_j)依附于顶点v_i和顶点v_j。
  - 如：v_2的邻接点：v_1，v_3，v_5
  - 在有向图中，对于任意两个顶点v_i和顶点v_j，若存在有向边<v_i，v_j>，则称顶点v_i邻接到顶点v_j，顶点v_j邻接于顶点v_i，同时称弧<v_i，v_j>依附于顶点v_i和顶点v_j。
  - 如：v_1邻接到v_2，v_1邻接于v_4

4.1 基本定义(cont.)

定义2 度(Dgree)

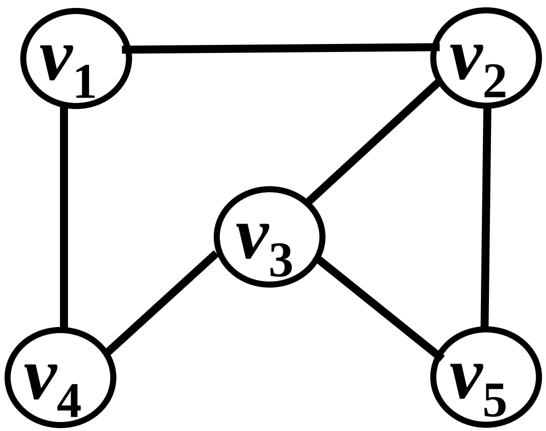


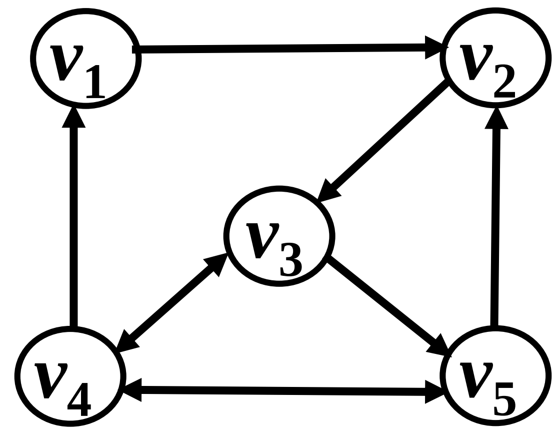


- 顶点的度：在无向图中，顶点*v*的度是指依附于该顶点的边数，通常记为D (*v*)。
- 顶点的入度：在有向图中，顶点v的入度是指以该顶点为弧头的弧的数目，记为ID (*v*)；
- 顶点的出度：在有向图中，顶点v的出度是指以该顶点为弧尾的弧的数目，记为OD (*v*)。
- 在有向图中， D (*v*)= ID (*v*) + OD (*v*)

4.1 基本定义(cont.)

定义2 度(Dgree)





- 在具有n个顶点、e条边的无向图G中，各顶点的度之和与边数之和的关系？

$$\sum_{i=1}^{n} D(v_i) = 2e$$

- 在具有n个顶点、e条边的有向图G中，各顶点的入度之和与各顶点的出度之和的关系？与边数之和的关系？

$$\sum_{i=1}^{n} ID(v_i) = \sum_{i=1}^{n} OD(v_i) = e$$

4.1 基本定义(cont.)

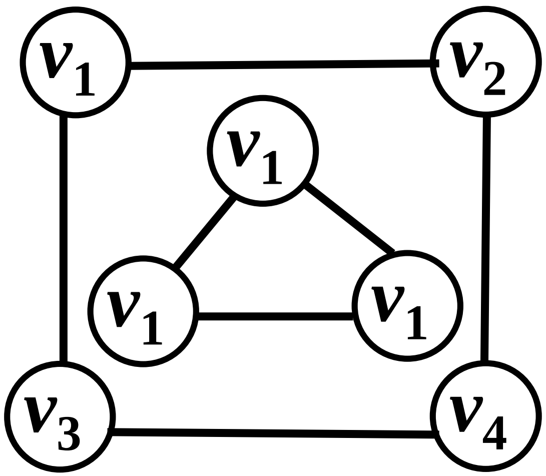
定义3 路径（Path）和路径长度、简单路和简单回路

- 在无向图G=(V, E) 中，若存在一个顶点序列$v_p, v_{i1}, v_{i2}, \ldots v_{im}, v_q$，使得（$v_p, v_{i1}$），（$v_{i1}, v_{i2}$），…，（$v_{im}, v_q$）∈E(G)，则称顶点$v_p$路到$v_q$有一条路径。
- 在有向图G =(V, E)中，若存在一个顶点序列$v_p, v_{i1}, v_{i2}, \ldots v_{im}, v_q$，使得有向边$<v_p, v_{i1}>, <v_{i1}, v_{i2}>, \ldots, <v_{im}, v_q>$∈E(G)，则称顶点$v_p$路到$v_q$有一条有向路径。
- 非带权图的路径长度是指此路径上边的条数。
- 带权图的路径长度是指路径上各边的权之和。
- 简单路径：若路径上各顶点 $v_1, v_2, \ldots, v_m$ 均互不相同(第一个顶点和最后一个顶点可以相同）, 则称这样的路径为简单路径。
- 简单回路：若路径上第一个顶点 v_1与最后一个顶点v_m重合, 则称这样的简单路径为简单回路或环。
- 一条环路的长度至少为1（无向图为3），且起点和终点相同的简单路径。

4.1 基本定义(cont.)

定义4 图的连通性

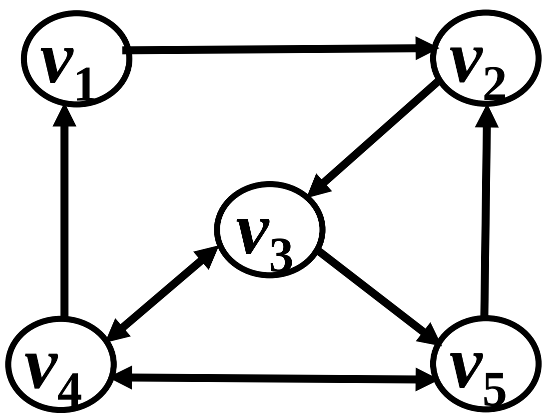
- 连通图与连通分量
  - 顶点的连通性：在无向图中，若从顶点v_i到顶点v_j ($i \neq j$)有路径，则称顶点v_i与v_j是连通的。
  - 连通图：如果一个无向图中任意一对顶点都是连通的，则称此图是连通图。
  - 连通分量：非连通图的极大连通子图叫做连通分量。



4.1 基本定义(cont.)

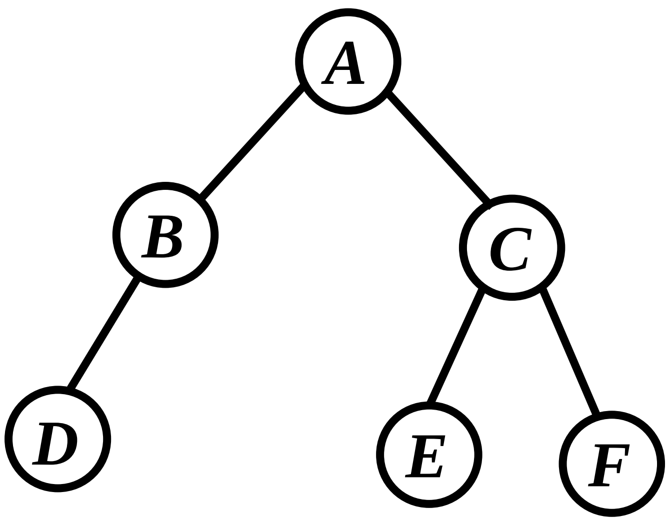
定义4 图的连通性

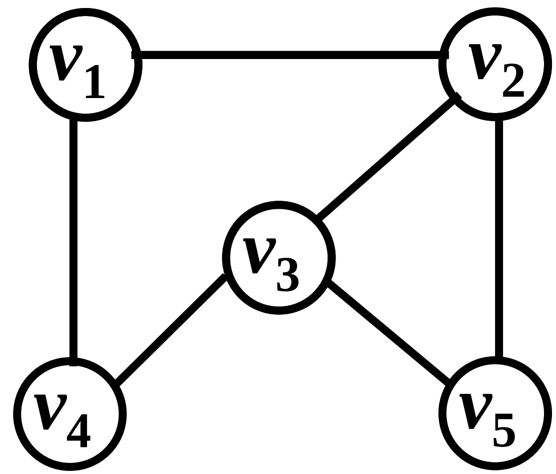
- 强连通图与强连通分量
  - 顶点的强连通性：在有向图中，若对于每一对顶点v_i和v_j ($i \neq j$)，都存在一条从v_i到v_j和从v_j到v_i的有向路径，则称顶点v_i与v_j是强连通的。
  - 强连通图：如果一个有向图中任意一对顶点都是强连通的，则称此有向图是强连通图。
  - 强连通分量:非强连通图的极大强连通子图叫做强连通分量



4.1 基本定义(cont.)

不同逻辑结构之间的比较

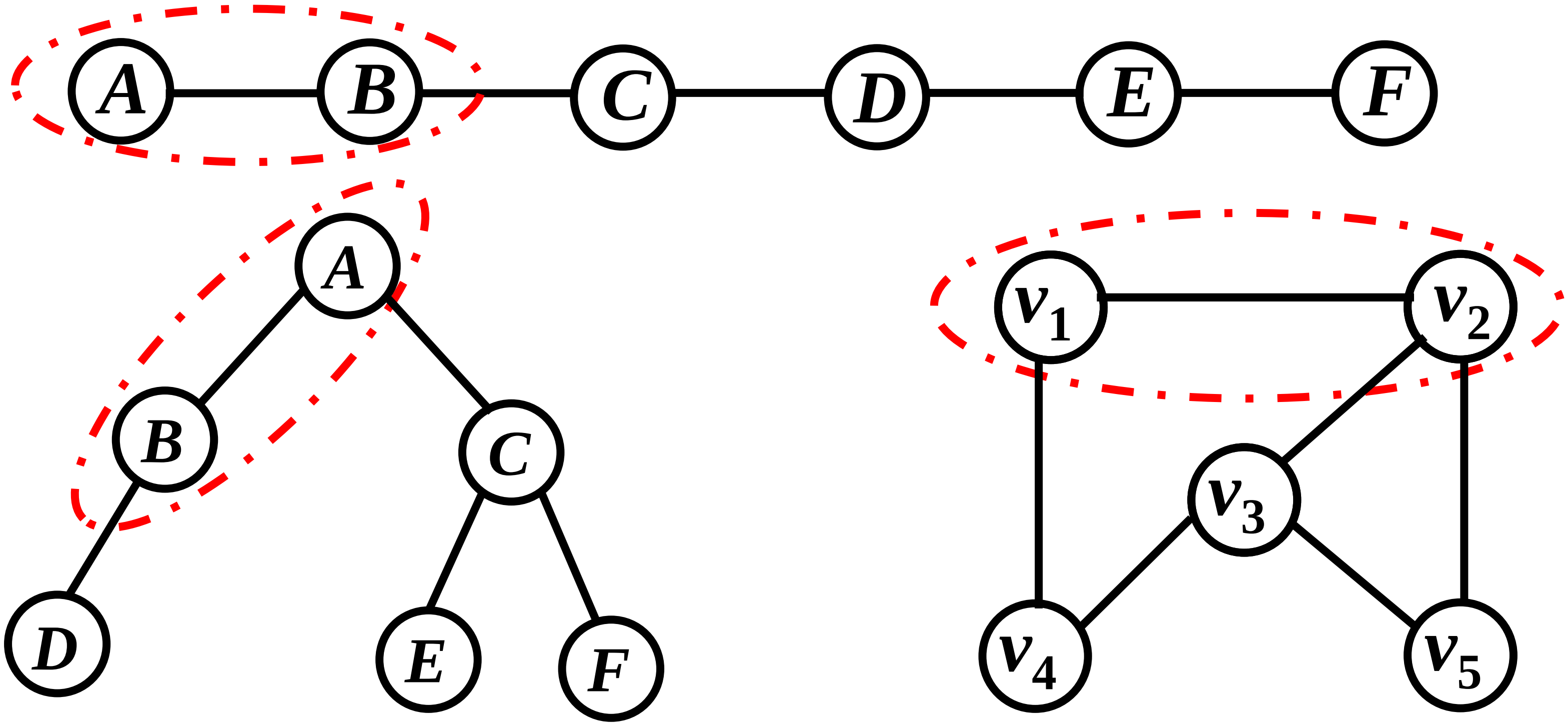




- 在线性结构中，数据元素之间仅具有线性关系(1:1)；
- 在树型结构中，结点之间具有层次关系(1:m)；
- 在图型结构中，任意两个顶点之间都可能有关系(m:n)。

4.1 基本定义(cont.)

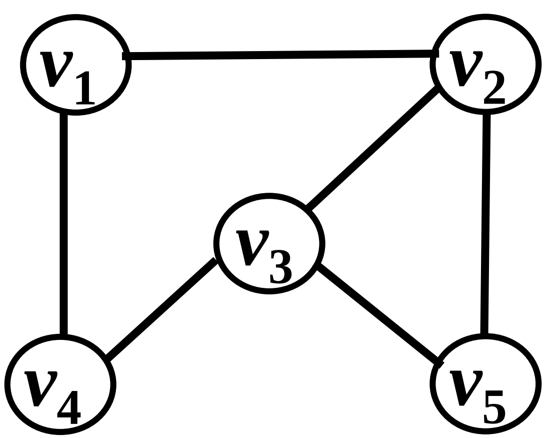
不同逻辑结构之间的比较

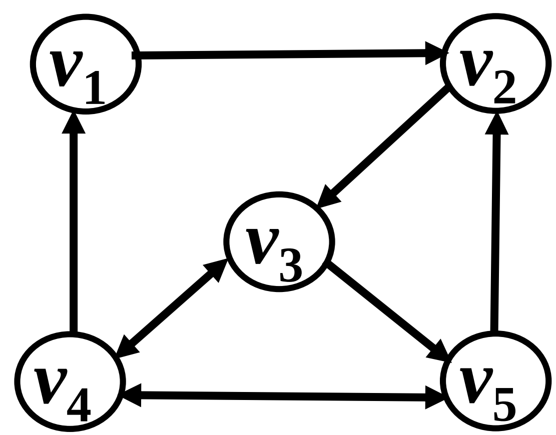


- 在线性结构中，元素之间的关系为前驱和后继；
- 在树型结构中，结点之间的关系为双亲和孩子；
- 在图型结构中，顶点之间的关系为邻接。

4.2 图的存储结构

- **是否可以采用顺序存储结构存储图(一维数组）？**
  - 图的特点：顶点之间的关系是*m*:*n*，即任何两个顶点之间都可能存在关系（边），无法通过存储位置表示这种任意的逻辑关系，所以，图无法采用顺序存储结构。
- **如何存储图？**
  - 考虑图的定义，图是由顶点和边组成的；
  - 如何存储顶点、如何存储边----顶点之间的关系。



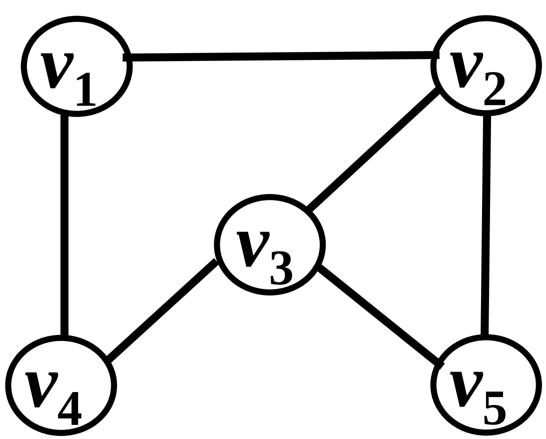


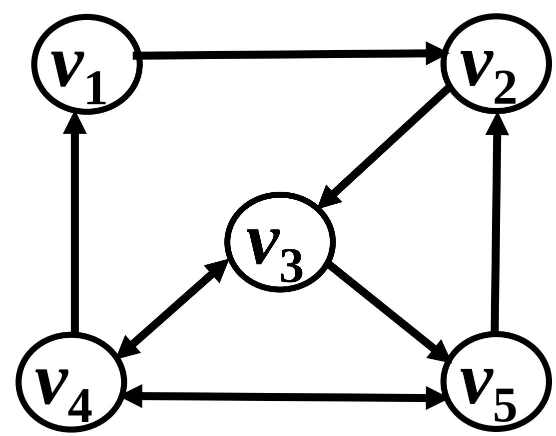
4.2 图的存储结构(cont.)

邻接矩阵 （*Adjacency Matrix*）表示（数组表示法）

- **基本思想：**
  - 用一个一维数组存储图中顶点的信息，用一个二维数组（称为邻接矩阵）存储图中各顶点之间的邻接关系。
  - 假设图$G=(V, E)$有n个顶点，则邻接矩阵是一个$n \times n$的方阵，定义为：

$$\text{edge}[i][j] = \begin{cases} 1 & \text{若}\ (i, j) \in E\ \text{或}\ \langle i, j \rangle \in E \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

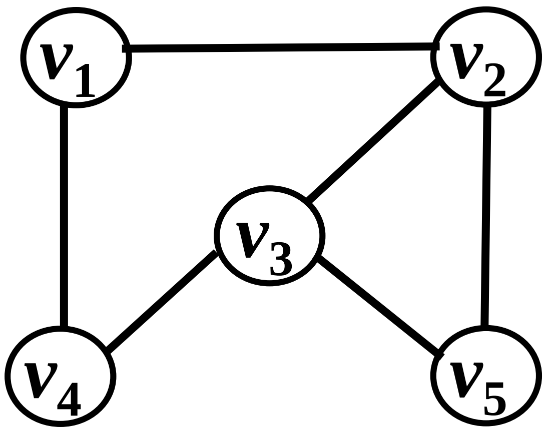




4.2 图的存储结构(cont.)

邻接矩阵 （*Adjacency Matrix*）表示（数组表示法）

- 无向图的邻接矩阵：



vertex= | v_1 | v_2 | v_3 | v_4 | v_5 |

$$\text{edge} = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}$$

- 存储结构特点：
  - 主对角线为 0 且一定是对称矩阵；

问题：1. 如何求顶点v_i的度？

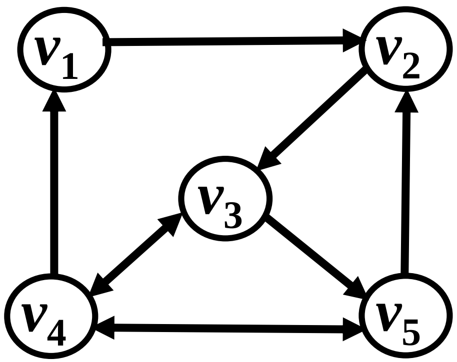
2.如何判断顶点 v_i和 v_j 之间是否存在边？

3.如何求顶点 v_i的所有邻接点？

4.2 图的存储结构(cont.)

邻接矩阵 （*Adjacency Matrix*）表示（数组表示法）

- 有向图的邻接矩阵：



vertex=

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5

$$
\textbf{edge} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
$$

- 存储结构特点：
  - 有向图的邻接矩阵一定不对称吗？

问题：**1.**如何求顶点v_i的出度？

2. 如何判断顶点 v_i和 v_j 之间是否存在有向边？

3.如何求邻接于顶点 v_i的所有顶点？

4.如何求邻接到顶点 v_i的所有顶点？

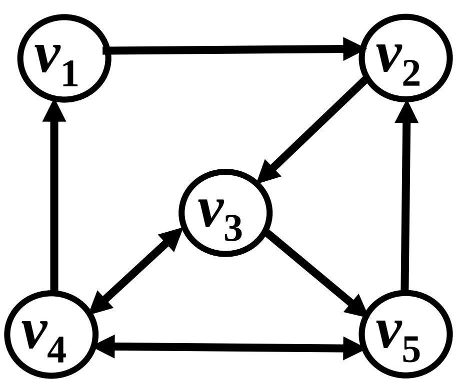
4.2 图的存储结构(cont.)

邻接矩阵 （*Adjacency Matrix*）表示（数组表示法）

- 存储结构定义：

假设图*G*有*n*个顶点e条边，则该图的存储需求为 $O(n+n^2) = O(n^2)$，与边的条数e无关。

```
typedef struct {
    VertexData verlist [NumVertices];   //顶点表
    EdgeData edge[NumVertices][NumVertices];
        //邻接矩阵—边表, 可视为边之间的关系
    int n, e;  //图的顶点数与边数
} MTGraph;
```



vertex

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5

$$
\text{edge}=\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}
$$

4.2 图的存储结构(cont.)

- 存储结构的建立----算法实现的步骤：

1.确定图的顶点个数n和边数e；

2.输入顶点信息存储在一维数组vertex中；

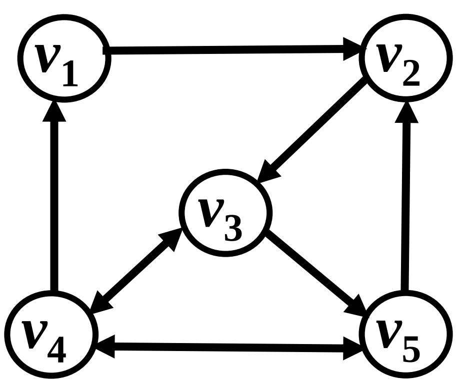
3.初始化邻接矩阵；

4.依次输入每条边存储在邻接矩阵edge中；

4.1 输入边依附的两个顶点的序号i, j；

4.2 将邻接矩阵的第i行第j列的元素值置为1；

4.3 将邻接矩阵的第j行第i列的元素值置为1。



vertex

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5

$$\textbf{edge}=\begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \end{array}$$

4.2 图的存储结构(cont.)

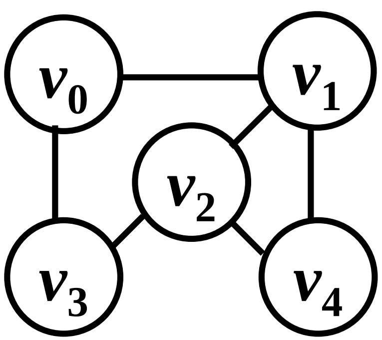
- 存储结构的建立算法的实现：

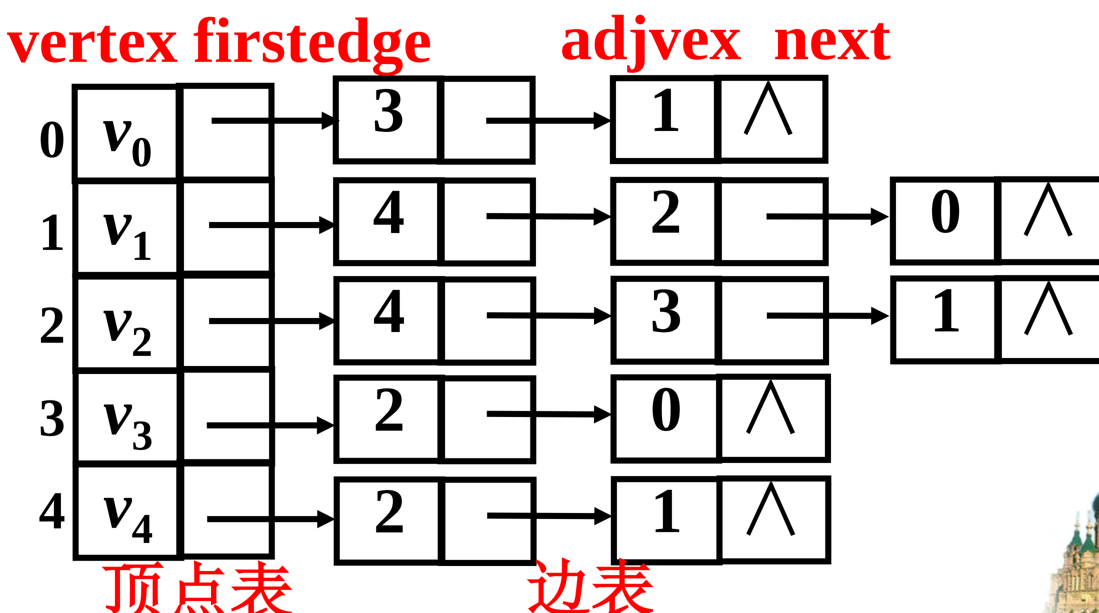
```
void  CreateMGragh (MTGragh *G) //建立图的邻接矩阵
{     int  i, j, k, w;
      cin>>G→n>>G→e;             //1.输入顶点数和边数
      for (i=0; i<G→n; i++)       //2.读入顶点信息，建立顶点表
           G→vertlist[i]=getchar( );
      for (i=0; i<G→n; i++)
           for (j=0;j<G→n;j++)
                G→edge[i][j]=0;        //3.邻接矩阵初始化
      for (k=0; k<G→e; k++) {      //4.读入e条边建立邻接矩阵
           cin>>i>>j>>w;              // 输入边（i,j）上的权值w
           G→ edge[i][j]=w; G→ edge[j][i]=w;
      }
} //时间复杂度：T = O( n+ n² +e) 。当e < <n, T = O( n² ) ?
```

4.2 图的存储结构(cont.)

邻接表（Adjacency List）表示

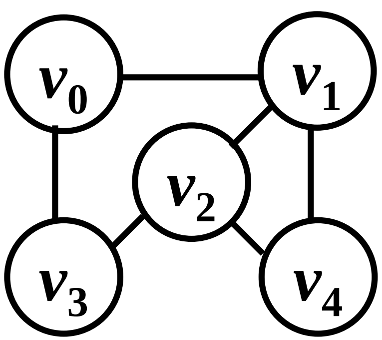
- 无向图的邻接表：
  - 对于无向图的每个顶点v_i，将所有与v_i相邻的顶点链成一个单链表，称为顶点v_i的边表（顶点v_i的邻接表）；
  - 再把所有边表的指针和存储顶点信息的一维数组构成顶点表。

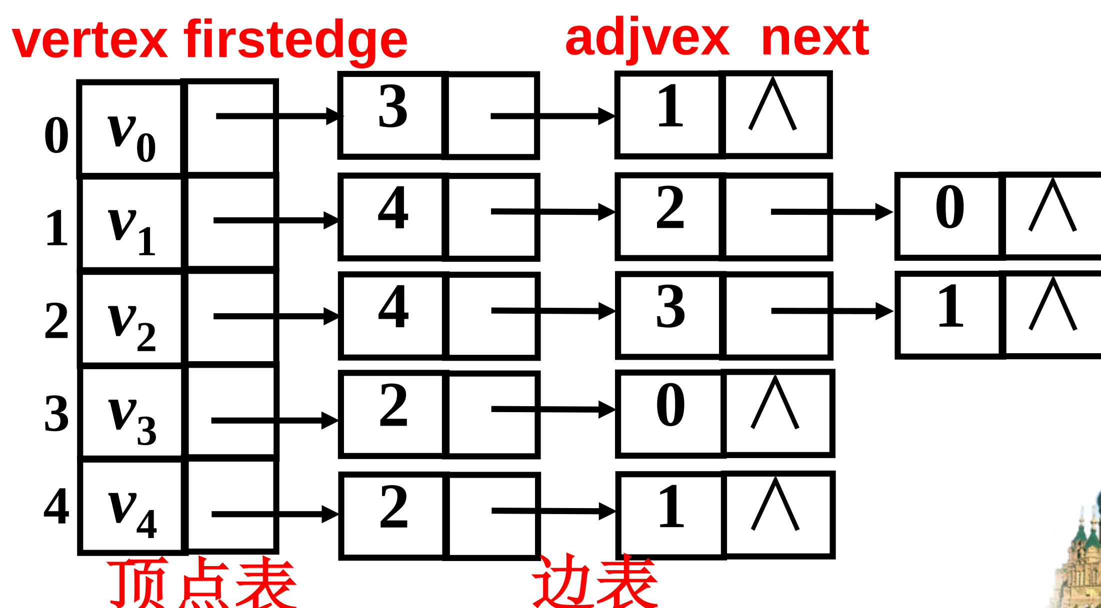




4.2 图的存储结构(cont.)

- 无向图的邻接表存储的特点：
  - 边表中的结点表示什么?
  - 如何求顶点 v_i的度?
  - 如何判断顶点v_i和顶点v_j之间是否存在边?
  - 如何求顶点 v_i的所有邻接点?
  - 空间需求O(n+2e)

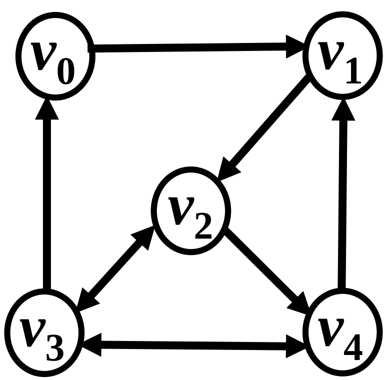


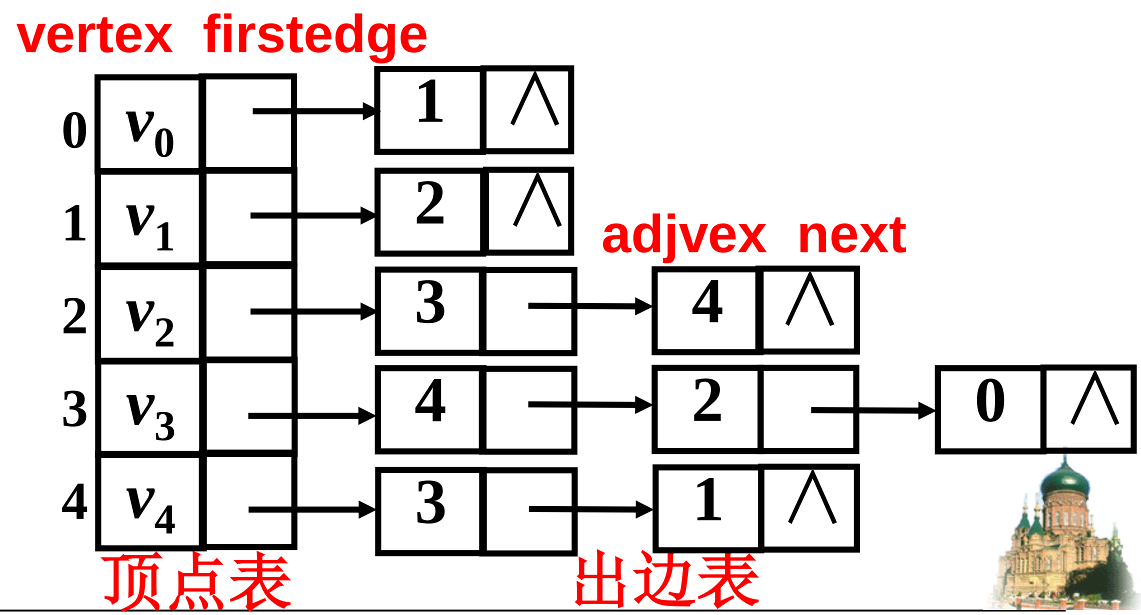


4.2 图的存储结构(cont.)

邻接表（Adjacency List）表示

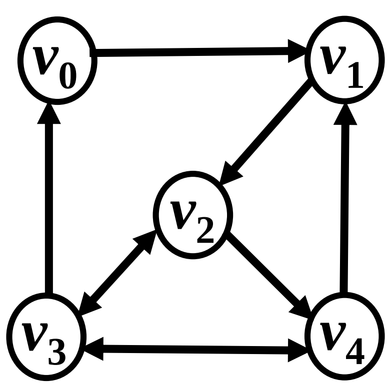
- 有向图的邻接表---正邻接表
  - 对于有向图的每个顶点v_i，将邻接于v_i的所有顶点链成一个单链表，称为顶点v_i的出边表；
  - 再把所有出边表的指针和存储顶点信息的一维数组构成顶点表。

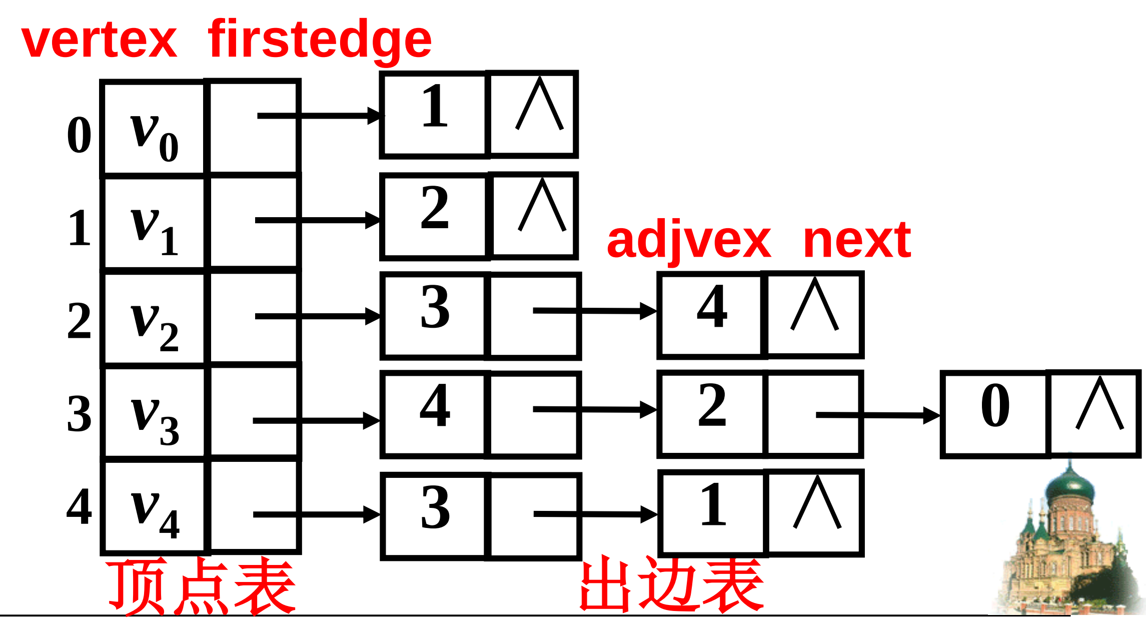




4.2 图的存储结构(cont.)

- 有向图的正邻接表的存储特点
  - 出边表中的结点表示什么？
  - 如何求顶点 v_i的出度？ 如何求顶点 v_i的入度？
  - 如何判断顶点 v_i和顶点v_j之间是否存在有向边?
  - 如何求邻接于顶点 v_i的所有顶点?
  - 如何求邻接到顶点 v_i的所有顶点?
  - 空间需求:O(n+e)

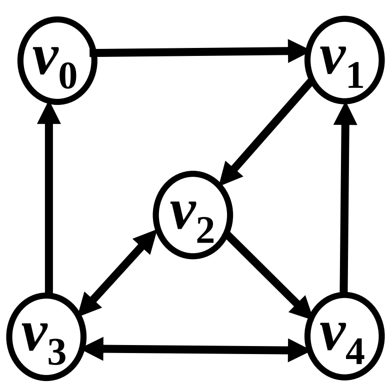


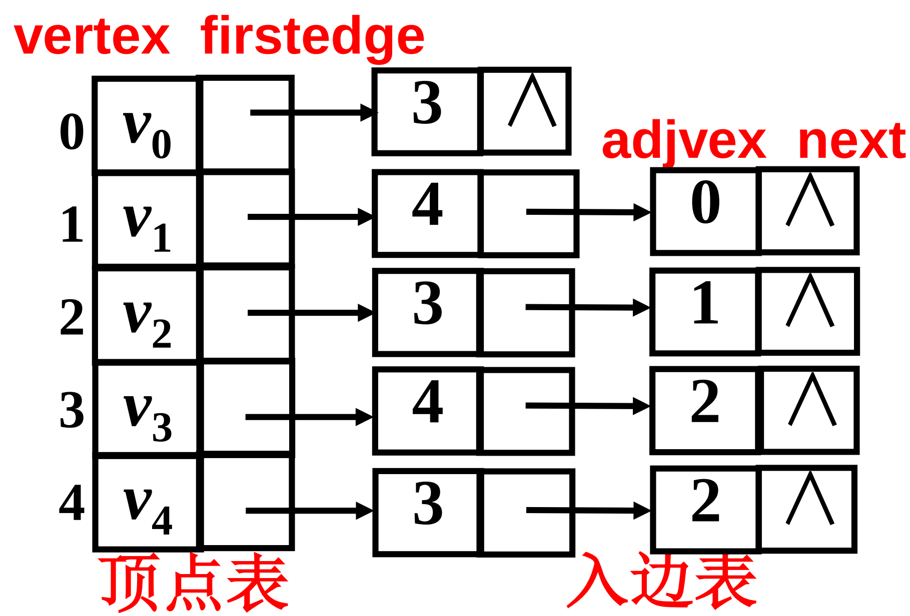


4.2 图的存储结构(cont.)

邻接表（Adjacency List）表示

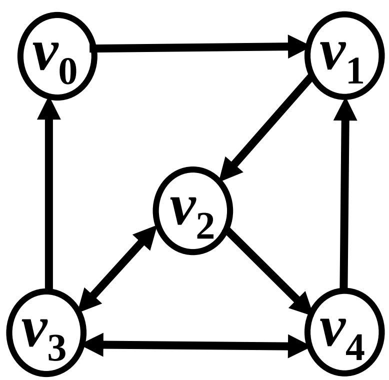
- 有向图的邻接表----逆邻接表
  - 对于有向图的每个顶点v_i，将邻接到v_i的所有顶点链成一个单链表，称为顶点v_i的入边表；
  - 再把所有入边表的指针和存储顶点信息的一维数组构成顶点表。

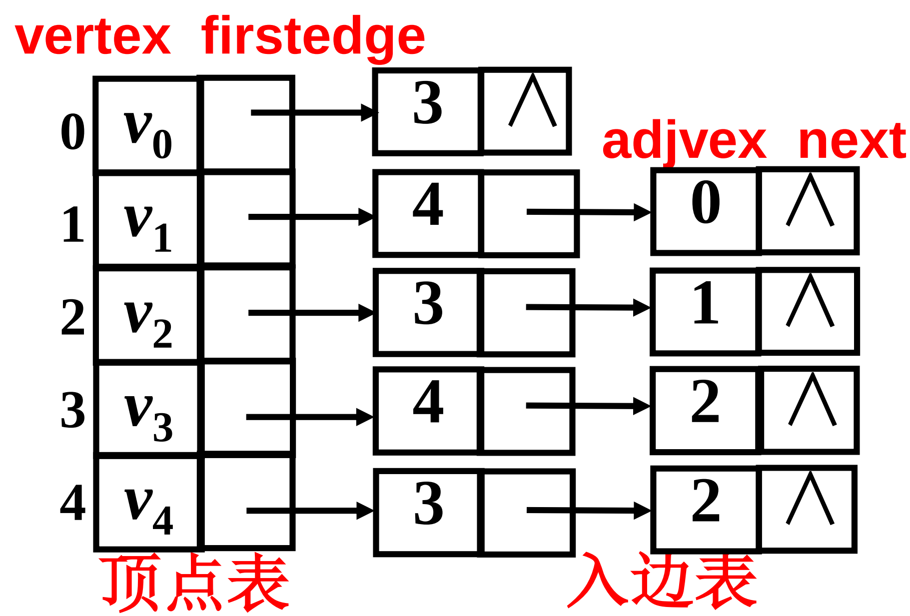




4.2 图的存储结构(cont.)

- 有向图的逆邻接表的存储特点
  - 出边表中的结点表示什么？
  - 如何求顶点 v_i的入度？ 如何求顶点 v_i的出度？
  - 如何判断顶点 v_i和顶点v_j之间是否存在有向边?
  - 如何求邻接到顶点 v_i的所有顶点?
  - 如何求邻接于顶点 v_i的所有顶点?
  - 空间需求:O(n+e)





4.2 图的存储结构(cont.)

- 邻接表存储结构的定义

```
typedef struct node {//边表结点
    int adjvex;          //邻接点域（下标）
    EdgeData cost;          //边上的权值
    struct node *next; //下一边链接指针
} EdgeNode;
typedef struct {            //顶点表结点
    VertexData  vertex; //顶点数据域
    EdgeNode * firstedge;//边链表头指针
} VertexNode;
typedef struct {        //图的邻接表
   VertexNode vexlist [NumVertices];
    int n, e;            //顶点个数与边数
} AdjGraph;
```

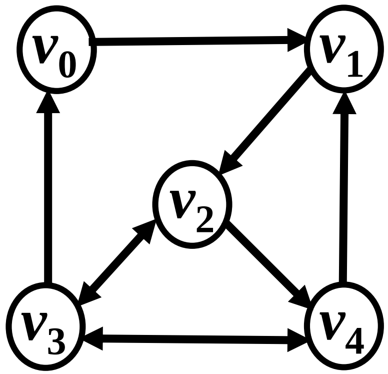
边表结点

adjvex	cost	next

顶点表结点

vertex	firstedge

4.2 图的存储结构(cont.)



- 邻接表存储结构建立算法实现的步骤：

1. 确定图的顶点个数和边的个数；

2. 建立顶点表：

   2.1 输入顶点信息；

   2.2 初始化该顶点的边表；

3. 依次输入边的信息并存储在边表中；

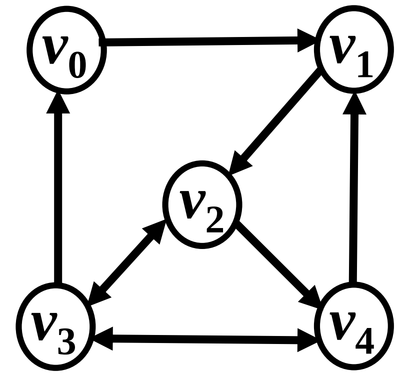
   3.1 输入边所依附的两个顶点的序号tail和head和权值w；

   3.2 生成邻接点序号为head的边表结点p；

   3.3 设置边表结点p；

   3.4 将结点p插入到第tail个边表的头部；

4.2 图的存储结构(cont.)



- 邻接表存储结构建立算法的实现：

```
void CreateGraph (AdjGraph G)
{  cin >> G.n >> G.e;                          //1.输入顶点个数和边数
   for ( int i = 0; i < G.n; i++) {            //2.建立顶点表
      cin >> G.vexlist[i].vertex;              //2.1输入顶点信息
      G.vexlist[i].firstedge = NULL; } //2.2边表置为空表
   for ( i = 0; i < G.e; i++) {                //3.逐条边输入,建立边表
      cin >> tail >> head >> weight;           //3.1输入
      EdgeNode * p = new EdgeNode;             //3.2建立边结点
      p→adjvex = head;   p→cost = weight; //3.3设置边结点
      p→next = G.vexlist[tail].firstedge;      //3.4链入第 tail 号链表的前端
      G.vexlist[tail].firstedge = p;
      p = new EdgeNode;
      p→adjvex = tail;   p→cost = weight;
      p→next = G.vexlist[head].firstedge; //链入第 head 号链表的前端
     G.vexlist[head].firstedge = p; }
} //时间复杂度：O(2e+n)
```

4.2 图的存储结构(cont.)

- 图的存储结构的比较——邻接矩阵和邻接表

	空间性能	时间性能	适用范围	唯一性
邻接矩阵	O（n^2）	O（n^2）	稠密图	唯一 ?
邻接表	O（n+e）	O（n+e）	稀疏图	不唯一 ?

◆ 十字链表(有向图)

- 十字链表是有向图的另一种链式存储结构。
- 将有向图的邻接表和逆邻接表结合起来的结构。
- 在十字链表中有两种结点：
  - 弧结点：存储每一条弧的信息，用链表链接在一起。

弧结点结构:

ivex	jvex	jlink	ilink	info

  - jlink:指向j的边；ilink:i发出的边

  - 顶点结点：存储每一个顶点的信息，使用一维数组来存储。

顶点结点结构:

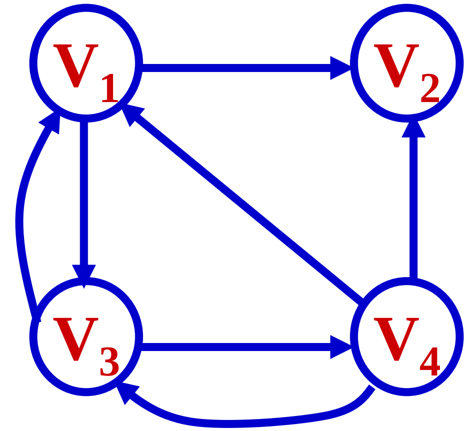
data	firstin	firstout

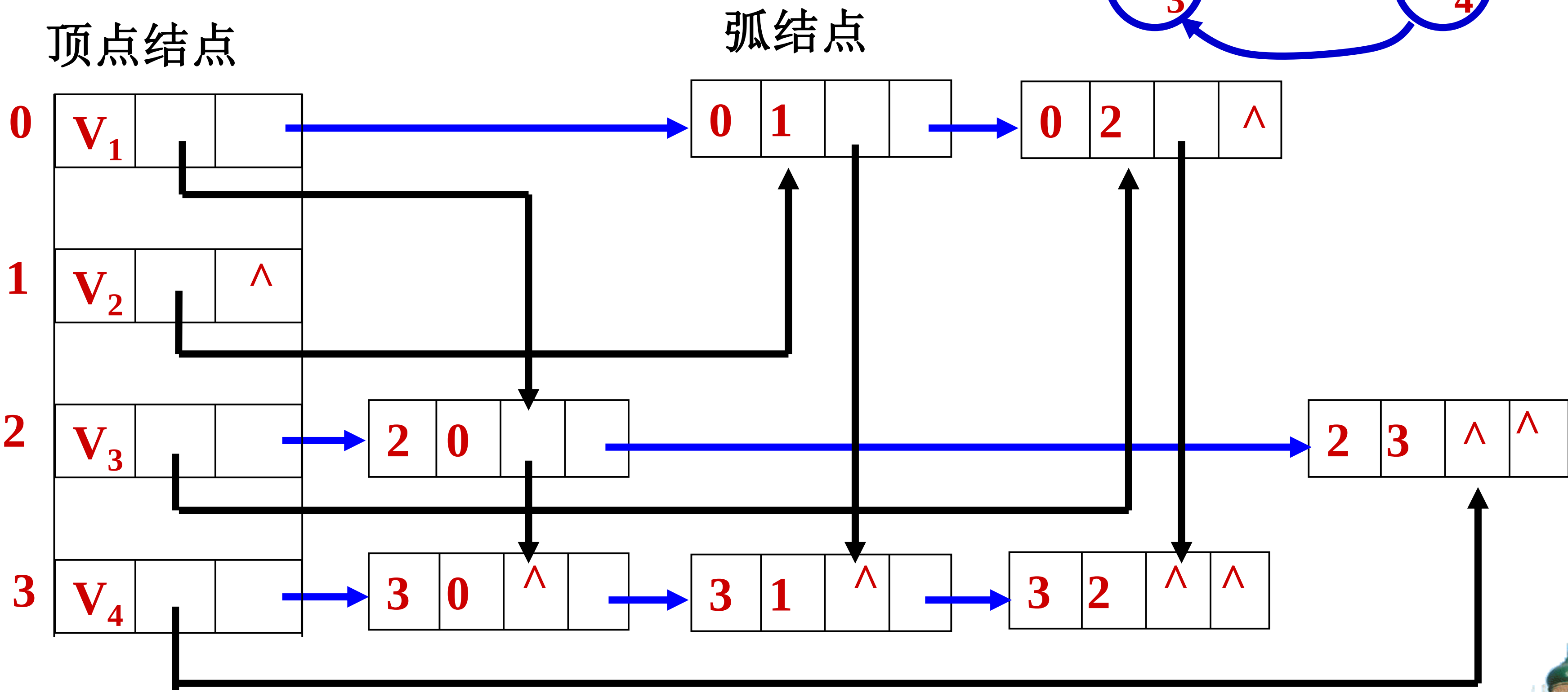
firstin: 指向该顶点的入边表中第一个结点

firstout: 指向该顶点的出边表中第一个结点

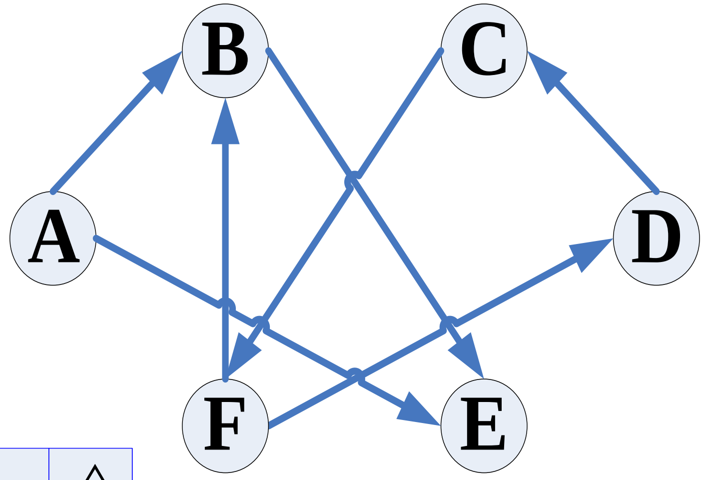
ivex	jvex	jlink	ilink	info

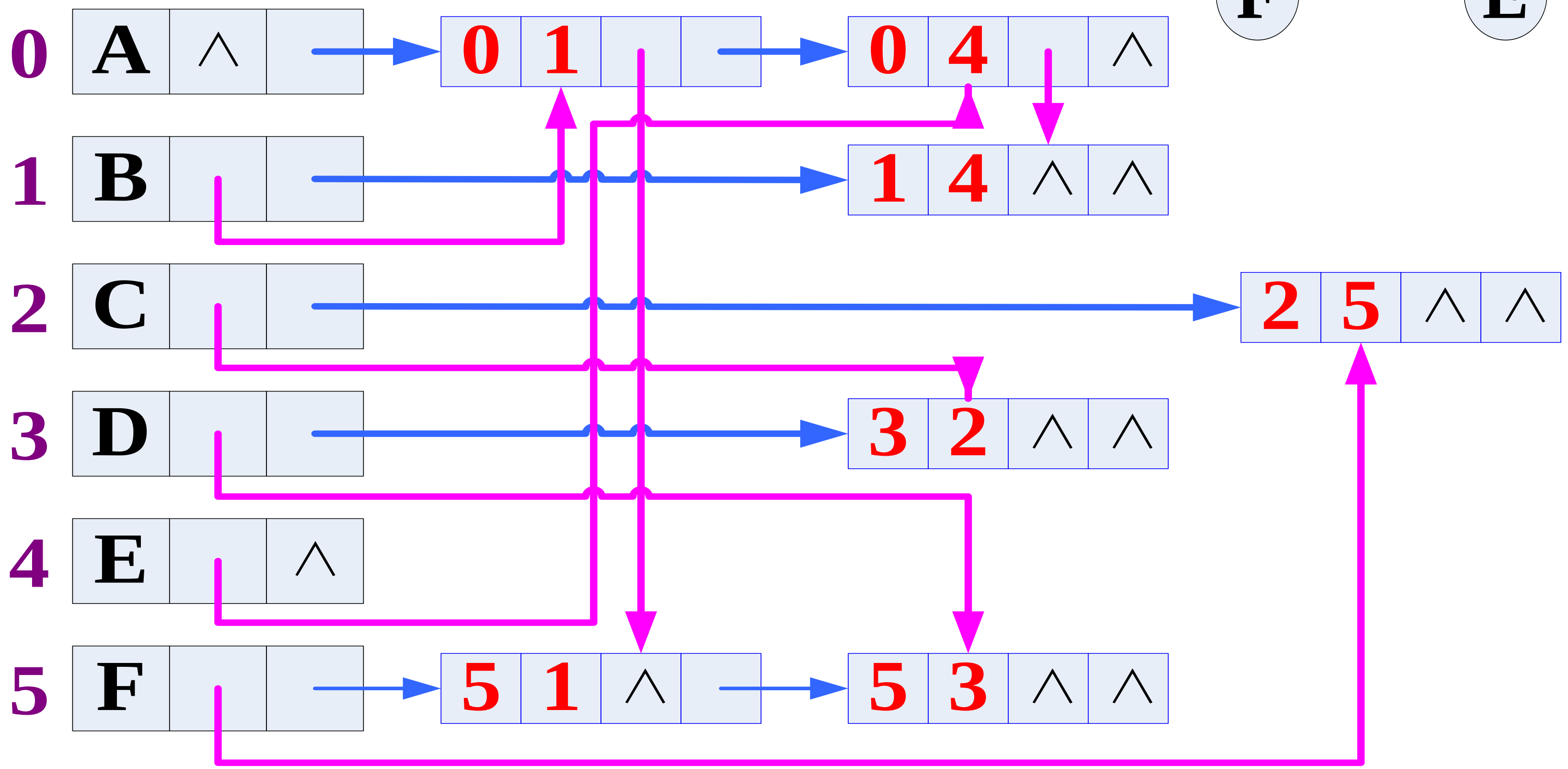
data	firstin	firstout





➢十字链表中既容易找到以v_i为尾的弧，也容易找到以v_i为头的弧，因而容易求得顶点的出度和入度。





◆ 邻接多重表(无向图)

- 邻接多重表是无向图的另一种链式表示结构。
- 和十字链表类似。邻接多重表中，每一条边用一个结点表示。
- 在邻接多重表中有两种结点：
  - 边结点：存储每一条边的信息，用链表链接在一起。

边结点结构:

mark	ivex	ilink	jvex	jlink	info

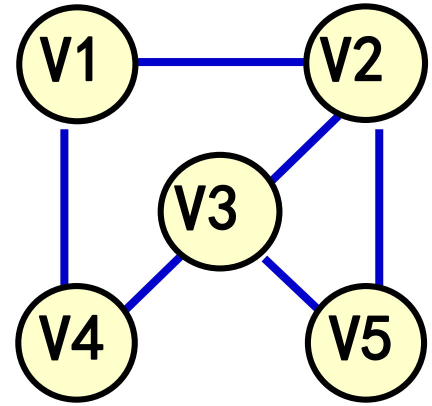
  - **mark:**标识边是否被搜索过
  - **ilink** 指向下一条依附于顶点ivex的边;
  - **jlink** 指向下一条依附于顶点jvex 的边。
  - 顶点结点：存储每一个顶点的信息，使用一维数组来存储。

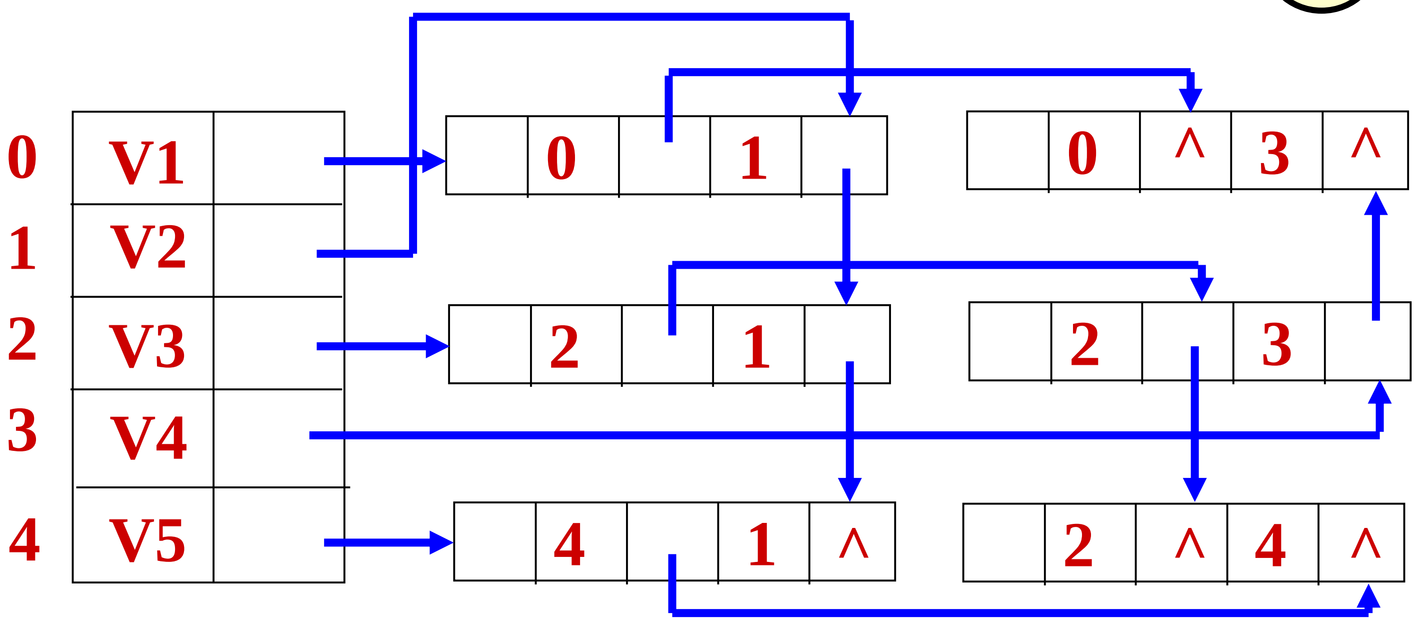
顶点结点结构:

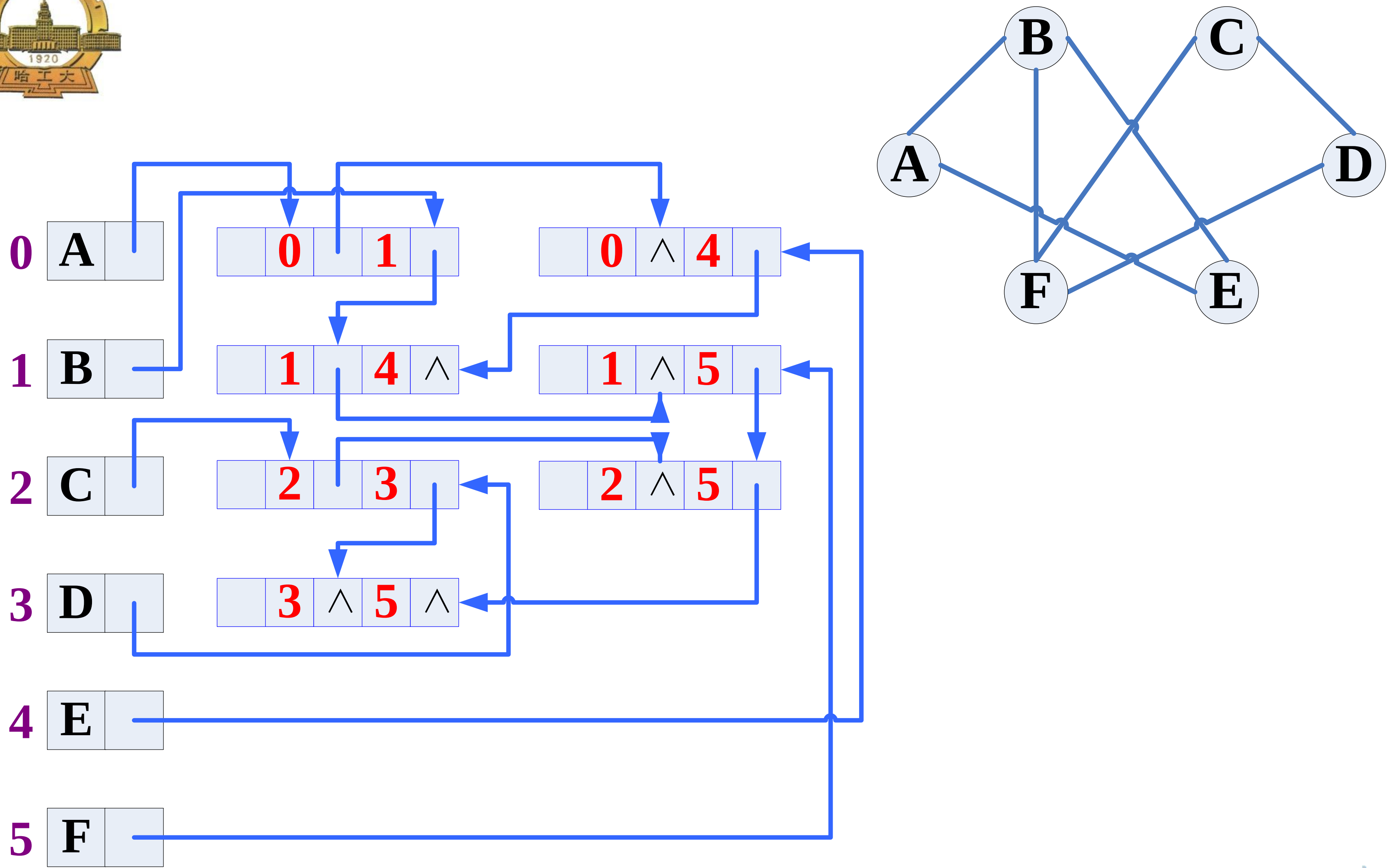
data	firstedge

mark	ivex	ilink	jvex	jlink	info

data	firstedge






0 A
1 B
2 C
3 D
4 E
5 F
0 1
0 ∧ 4
1 4 ∧
1 ∧ 5
2 3
2 ∧ 5
3 ∧ 5 ∧
A
B
C
D
E
F

4.3 图的搜索（遍历）

John Edward Hopcroft

Robert Endre Tarjan

1986年图灵奖获得者

约翰·霍普克洛夫特1939年生于西雅图。美国国家科学院和工程院院士、康奈尔大学智能机器人实验室主任。1962和1964年获斯坦福大学硕士和博士学位。先后在普林斯顿大学、斯坦福大学等工作，也曾任职于一些科学研究机构如NSF和NRC。著作很多如《算法设计与分析基础》《 数据结构与算法》《自动机理论、语言和计算导论》《形式语言及其与自动机的关系》

罗伯特·塔扬普林斯顿大学计算机科学系教授，1948年4月30日生于加利福尼亚州。1969年本科毕业，进入斯坦福大学研究生院，1972年获得博士学位。平面图测试的高效算法；合并-搜索问题；“分摊”算法的概念；八字形树；持久性数据结构

4.3 图的搜索（遍历）(cont.)

- 图的遍历（图的搜索）
  - 从图中某一顶点出发，对图中所有顶点访问一次且仅访问一次。
  - 访问：抽象操作，可以是对结点进行的各种处理
- 图结构的复杂性
  - 在线性表中，数据元素在表中的编号就是元素在序列中的位置，因而其编号是唯一的；
  - 在树结构中，将结点按层序编号，由于树具有层次性，因而其层序编号也是唯一的；
  - 在图结构中，任何两个顶点之间都可能存在边，顶点是没有确定的先后次序的，所以，顶点的编号不唯一。

4.3 图的搜索（遍历）(cont.)

- 图的遍历要解决的关键问题
  - 在图中，如何选取遍历的起始顶点？
    - 解决办法：从编号小的顶点(任取一顶点，适合编程）开始 。
  - 从某个起点始可能到达不了所有其它顶点，怎么办？
    - 解决办法：多次调用遍历图（起点选没有用过的）的算法。
  - 图中可能存在回路，且图的任一顶点都可能与其它顶点“相通”，在访问完某个顶点之后可能会沿着某些边又回到了曾经访问过的顶点。如何避免某些顶点可能会被重复访问？
    - 解决办法：设访问标志数组visited[n] 。
  - 在图中，一个顶点可以和其它多个顶点相连，当这样的顶点访问过后，如何选取下一个要访问的顶点？
    - 解决办法：深度优先搜索（Depth First Search）和广度优先搜索（Breadth First Search）。

4.3 图的搜索（遍历）(cont.)

- 深度优先搜索----类似于树结构的先序遍历

设图G的初态是所有顶点都“未访问过（False）”，在G中任选一个顶点 v 为初始出发点(源点)，则深度优先搜索可定义为:

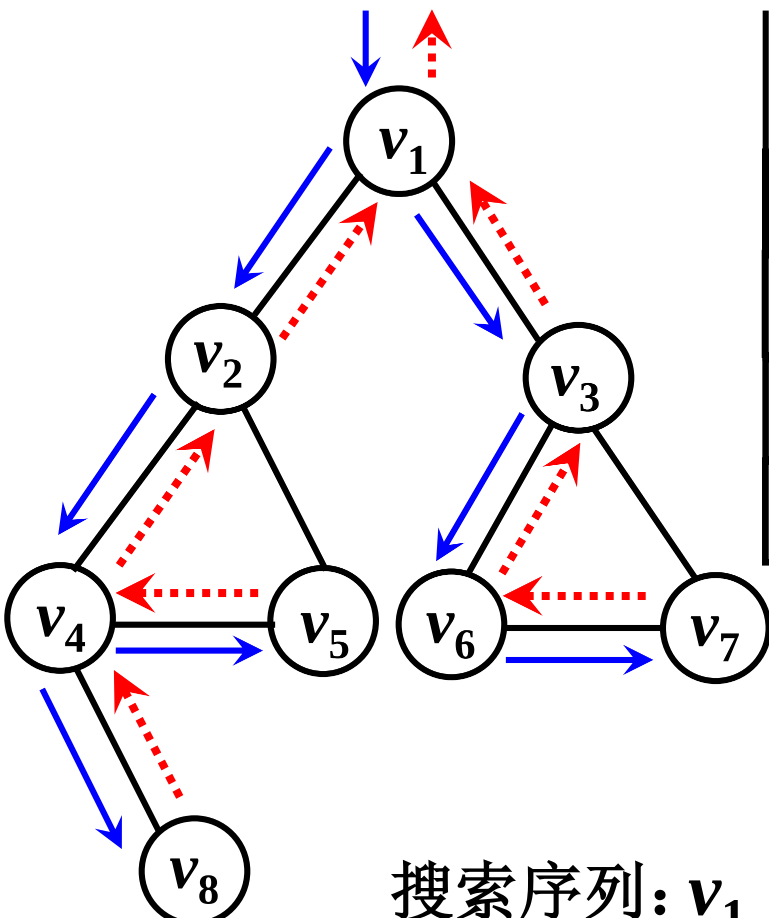
①首先访问出发点 v，并将其标记为“访问过（True）”；

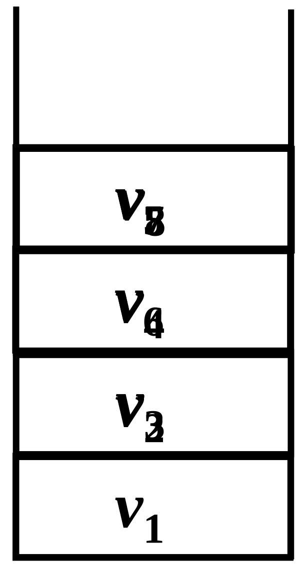
②然后，从 v 出发，依次考察与 v 相邻的顶点 w；若 w“未访问过（False）”，则以 w 为新的出发点递归地进行深度优先搜索，直到图中所有与源点 v 有路径相通的顶点（亦称从源点可到达的顶点）均被访问为止；

③若此时图中仍有未被访问过的顶点，则另选一个“未访问过”的顶点作为新的搜索起点，重复上述过程，直到图中所有顶点都被访问过为止。

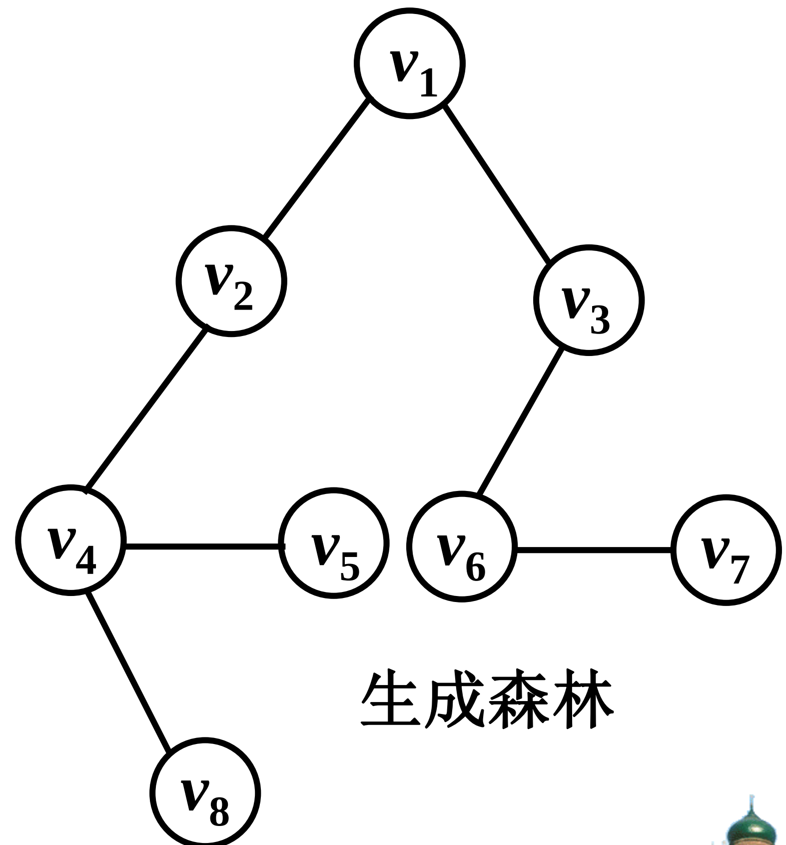
4.3 图的搜索（遍历）(cont.)

- 深度优先搜索示例
  - 深度优先遍历序列?入栈序列?出栈序列?





栈



生成森林

搜索序列：v_1 v_2 v_4 v_5 v_8 v_3 v_6 v_7

4.3 图的搜索（遍历）(cont.)

- 深度优先搜索特点：
  - 是递归的，是尽可能对纵深方向上进行搜索，故深度优先搜索。
- 深度优先编号。
  - 搜索过程中，根据访问顺序给顶点进行的编号，称为深度优先编号。
- 深度优先搜索（DFS）序列：
  - 深度优先搜索过程中，根据访问顺序得到的顶点序列，称为先深深度优先搜索序列或DFS序列。
- 生成森林（树）：
  - 有原图的所有顶点和搜索过程中所经过的边构成的子图。
- 深度优先搜索结果不唯一
  - 即图的DFS序列、深度优先搜索编号和生成森林不唯一。

4.3 图的搜索（遍历）(cont.)

- 深度优先搜索主算法：

```
bool visited[NumVertices];  //访问标记数组是全局变量
int dfn[NumVertices];  //顶点的深度优先搜索编号
void DFSTraverse (AdjGraph G)     //主算法
//深度优先搜索----邻接表表示的图G；而以邻接矩阵表示G时，算法完全
    相同
{   int i , count = 1;
    for ( int i = 0; i < G.n; i++ )
        visited [i] =False;   //标志数组初始化
    for ( int i = 0; i < G.n; i++ )
       if ( ! visited[i] )
            DFSX ( G, i ); //从顶点 i 出发的一次搜索，DFSX(G, i )
}
```

4.3 图的搜索（遍历）(cont.)

- 从一个顶点出发的一次深度优先搜索算法：
  - 实现步骤：

1. 访问顶点v; visited[v]=1;
2. w=顶点v的第一个邻接点；
3. while (w存在)

    3.1 if (w未被访问) 从顶点w出发递归执行该算法;

    3.2 w=顶点v的下一个邻接点;

4.3 图的搜索（遍历）(cont.)

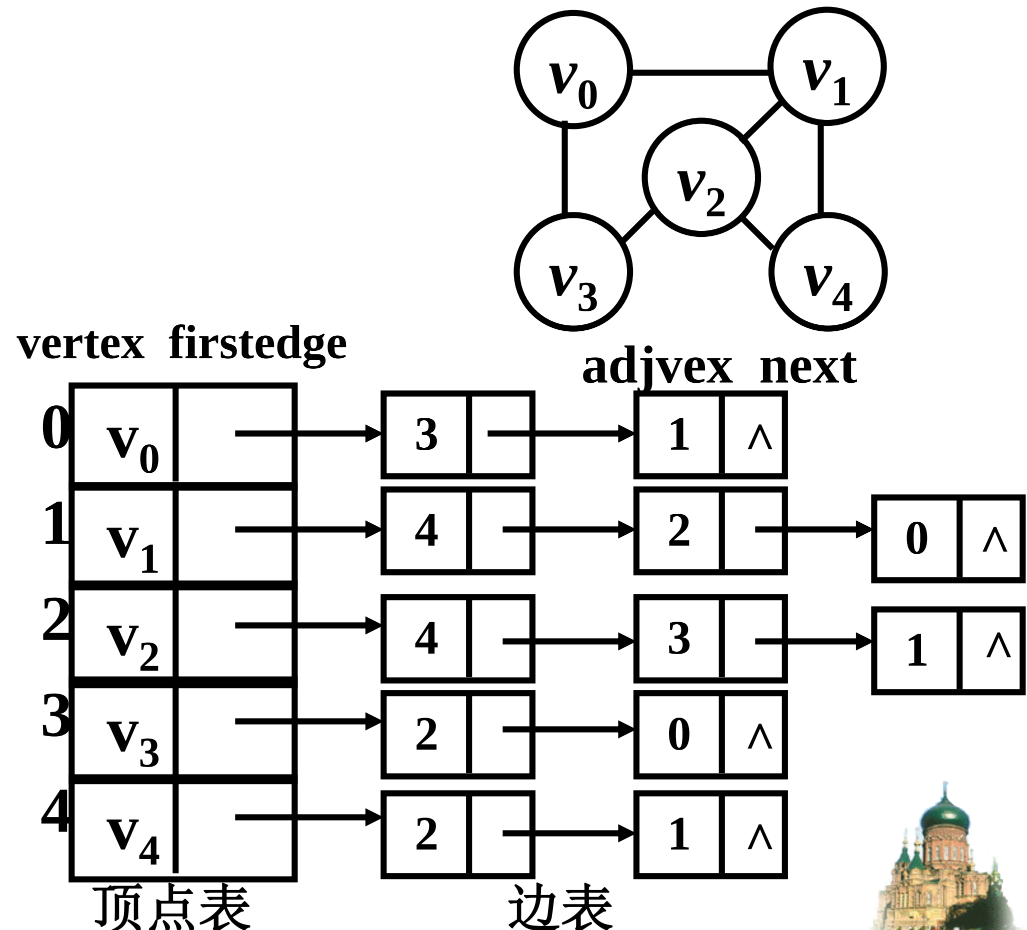
- 从一个顶点出发的一次深度优先搜索算法：

```
void DFS1 (AdjGraph* G, int i)
//以vi为出发点时对邻接表表示的图G进行深度优先搜索{     EdgeNode
   *p;
    cout<<G→vexlist[i].vertex;     //访问顶点vi;
    visited[i]=True;                //标记vi已访问
    dfn[i]=count++;                 //对vi进行编号
    p=G→vexlist[i].firstedge;      //取vi边表的头指针
    while( p ) {    //依次搜索vi的邻接点vj, 这里j=p->adjvex
        if( !visited[ p→adjvex ] )  //若vj尚未访问
            DFS1(G, p→adjvex);  //则以vj为出发点深度优先搜索
   p=p→next;
    }
} //DFS1
```

4.3 图的搜索（遍历）(cont.)

- 从一个顶点出发的一次深度优先搜索算法：

```
void DFS1 (AdjGraph* G, int i)
//以vi为出发点时对邻接表表示的图G进行深度优先搜索
{     EdgeNode *p;
      cout<<G→vexlist[i].vertex;
      visited[i]=True;
      dfn[i]=count++;
      p=G→vexlist[i].firstedge;
      while( p ) {
          if( !visited[ p→adjvex ] )
              DFS1(G, p→adjvex);
          p=p→next;
      }
} //DFS1
```

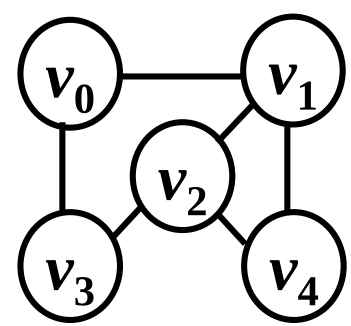


4.3 图的搜索（遍历）(cont.)

- 从一个顶点出发的一次深度优先搜索算法：

```
void DFS2(MTGraph *G, int i)
//以vi为出发点对邻接矩阵表示的图G进行深度优先搜索
{   int j;
    cout<<G→vexlist[i];        //访问定点vi
    visit[i]=True;             //标记vi已访问
    dfn[i]=count;              //对vi进行编号
    count ++;                  //下一个顶点的编号
    for( j=0; j<G→n; j++ )  //依次搜索vi的邻接点
        if ( (G→edge[i][j] == 1)&&！ visited[j] ) //若vj尚未访问
            DFS2( G, j );
}//DFS2
```

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



4.3 图的搜索（遍历）(cont.)

- 广度优先搜索----类似于树结构的层序遍历

设图G的初态是所有顶点都“未访问过（False）”，在G中任选一个顶点 v 为源点，则广度优先搜索可定义为:

①首先访问出发点 v，并将其标记为“访问过 （True）”；

②接着依次访问所有与 v 相邻的顶点w_1，w_2…w_t;

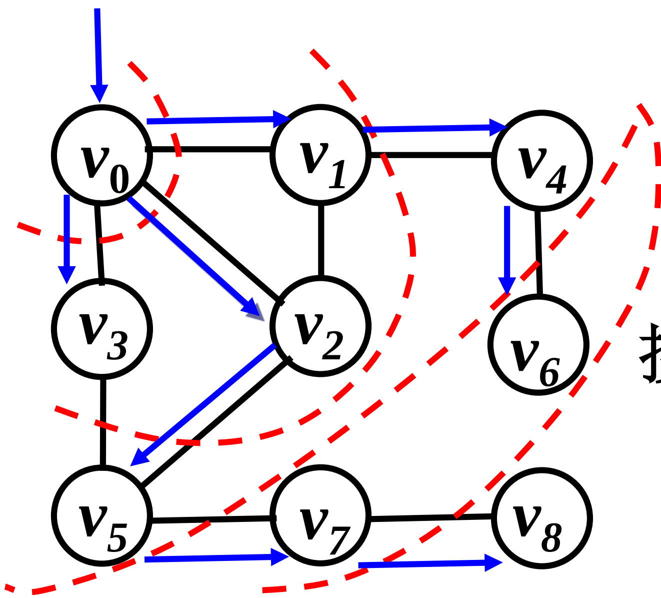
③然后依次访问与w_1，w_2… w_t相邻的所有未访问的顶点;

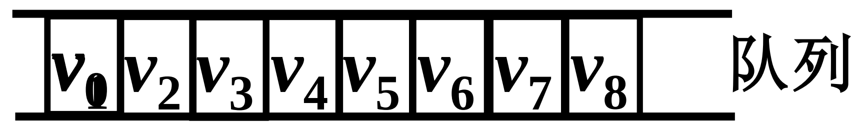
④依次类推，直至图中所有与源点v有路相通的顶点都已访问过为止；

⑤此时，从 v 开始的搜索结束，若G是连通的，则遍历完成；否则在G中另选一个尚未访问的顶点作为新源点，继续上述搜索过程，直到G中的所有顶点均已访问为止。

4.3 图的搜索（遍历）(cont.)

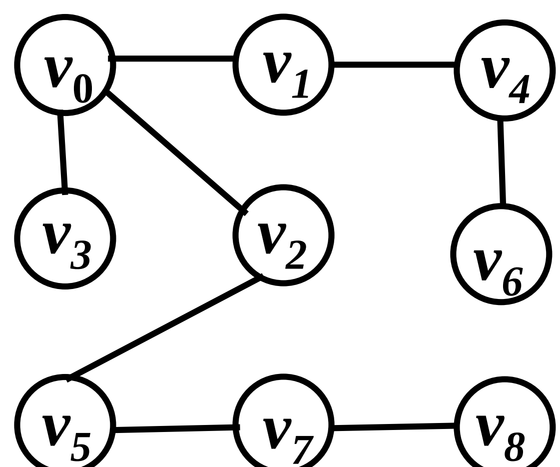
- 广度优先搜索示例
- 广度优先搜索序列?入队序列?出队序列?





搜索序列: v_0 v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8

生成森林



4.3 图的搜索（遍历）(cont.)

- 广度优先搜索特点：
  - 尽可能横向上进行搜索，并使“先被访问的顶点的邻接点”先于“后被访问的顶点的邻接点”被访问，故称广度优先搜索。
- 广度优先编号：
  - 搜索过程中，根据访问顺序给顶点进行的编号，称为广度优先编号
- 广度优先搜索序列或BFS序列：
  - 广度优先搜索过程中，根据访问顺序得到的顶点序列，称为广度优先搜索序列或BFS序列。
- 生成森林（树）：
  - 有原图的所有顶点和搜索过程中所经过的边构成的子图。
- 广度优先搜索结果不唯一：
  - 即图的BFS序列、广度优先搜索编号和生成森林不唯一。

4.3 图的搜索（遍历） (cont.)

- 广度优先搜索主算法：

```
bool visited[NumVertices];  //访问标记数组是全局变量
int bfn[NumVertices];  //顶点的先深编号
void BFSTraverse (AdjGraph G)     //主算法
//*广度优先搜索--邻接表表示的图G；而以邻接矩阵表示G时，算
    法完全相同
{   int i , count = 1;
    for ( int i = 0; i < G.n; i++ )
        visited [i] =False;   //标志数组初始化
    for ( int i = 0; i < G.n; i++ )
        if ( ! visited[i] )
            BFSX ( G, i ); //从顶点 i 出发的一次搜索，BFSX (G, i )
}
```

4.3 图的搜索（遍历）(cont.)

- 从一个顶点出发的一次广度优先搜索算法：
  - 实现步骤：

1 . 初始化队列Q;

2. 访问顶点v; visited [v]=1; 顶点v入队Q;

3. while (队列Q非空)

    3.1 v=队列Q的队头元素出队;

    3.2 w=顶点v的第一个邻接点;

    3.3 while (w存在)

        3.3.1 如果w 未被访问，则

            访问顶点w; visited[w]=1; 顶点w入队列Q;

        3.3.2 w=顶点v的下一个邻接点;

4.3 图的搜索（遍历）(cont.)

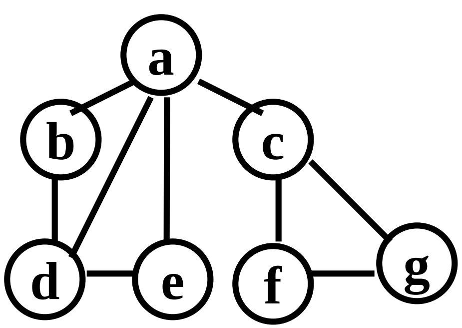
```
void BFS1 (AdjGraph *G, int k)//这里没有进行广度优先搜索编号
{    int i; EdgeNode *p; Queue Q;   MakeNull(Q);
     cout << G→vexlist[ k ] .vertex;   visited[ k ] = True;
     EnQueue (k, Q);                              //进队列
     while ( ! Empty (Q) ) {                        //队空搜索结束
          i=DeQueue(Q);                          //vi出队
          p =G→vexlist[ i ].firstedge;        //取vi的边表头指针
          while ( p ) {                          //若vi的邻接点 vj (j= p→adjvex)存在,依次搜索
               if ( !visited[ p→adjvex ]) {  //若vj未访问过
                    cout << G→vexlist[ p→adjvex ].vertex;   //访问vj
                    visited[ p→adjvex ]=True;               //给vj作访问过标记
                    EnQueue ( p→adjvex , Q );             //访问过的vj入队
               }
               p = p→next;                             //找vi的下一个邻接点
          } /              / 重复检测 vi的所有邻接顶点
     }                          //外层循环，判队列空否
}//以vk为出发点时对用邻接表表示的图G进行先广搜索
```

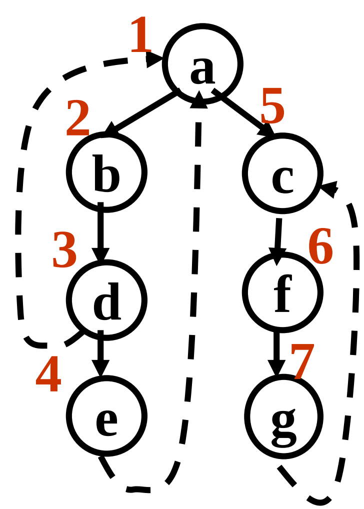
4.3 图的搜索（遍历）(cont.)

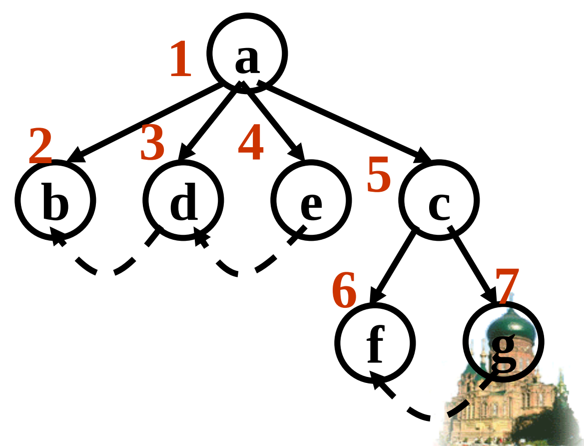
```
void BFS2 (MTGraph *G, int k) //这里没有进行广度优先搜索编号
{    int i , j; Queue Q;   MakeNull(Q);
     cout << G→vexlist[ k ];   //访问vk
     visited[ k ] = True; //给vk作访问过标记
     EnQueue (k, Q);   // vk进队列
     while ( ! Empty (Q) ) {  //队空时搜索结束
          i=DeQueue(Q); //vi出队
          for(j=0; j<G→n; j++) {   //依次搜索vi的邻接点 vj
               if ( G→edge[ i ][ j ] ==1 && !visited[ j ]) { //若vj未访问过
                    cout << G→vexlist[ j ];//访问vj
                    visited[ j ]=True;  //给vj作访问过标记
                    EnQueue ( j , Q ); //访问过的vj入队
               }
          } //重复检测 vi的所有邻接顶点
     } //外层循环，判队列空否
} // 以vk为出发点时对用邻接矩阵表示的图G进行广度优先搜索
```

无向图（的搜索）及其应用

- 无向图连通性判定
  - 不连通：若干个生成树
    - 求连通分量个数；
    - 求出每个连通分量；
  - 连通：一棵生成树
    - 判断是否有环路；
    - 求带权连通图的最小生成树;4.3和4.4
    - 判断是否是双连通的;4.5
    - 求关节点和双连通分量。

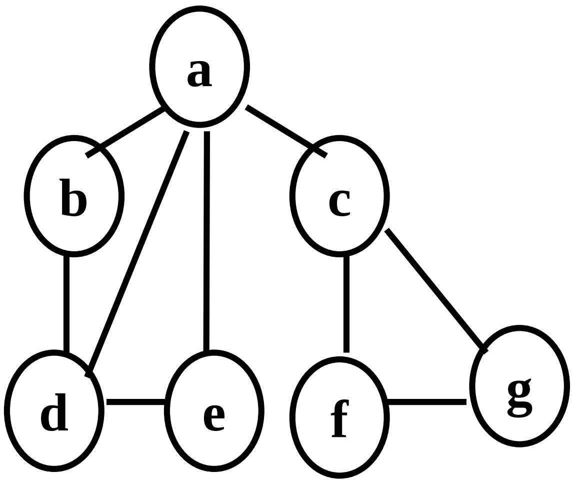


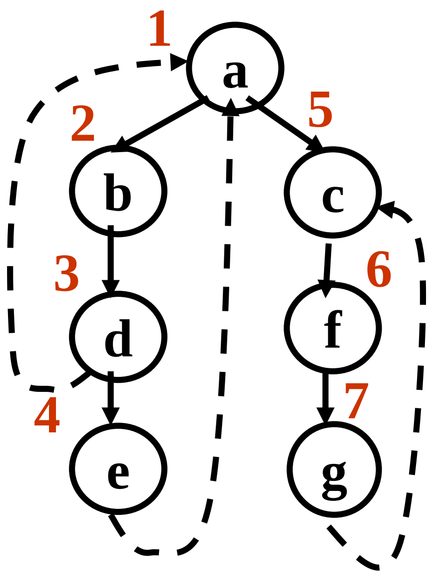


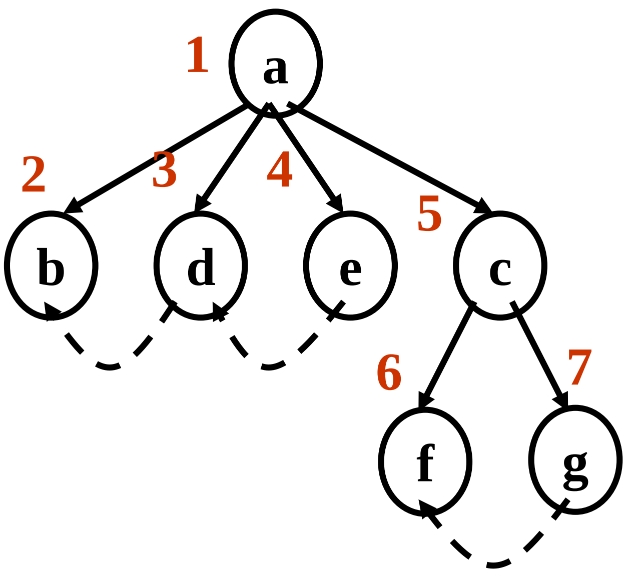


4.4 图与树的联系

4.4.1 先深生成森林和先广生成森林







一、搜索的结果

生成森林和（先深或先广）编号—顶点的线性序列。

树边 与 非树边

连通图 一个生成树

非连通图 生成森林 连通子图（连通分量）

二、搜索过程中对边的分类

1. 先深搜索对边的分类

- 两类： 树边—在搜索过程中所经过的边；回退边—图中的其它边.
- 特点：树边是从先深编号较小的指向较大的顶点;回退边相反;

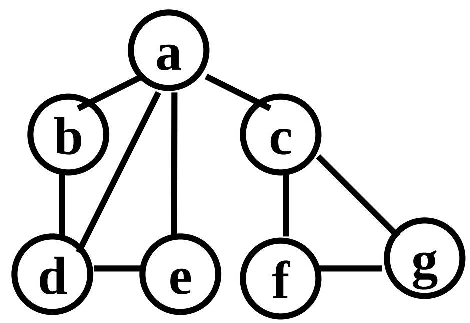
如何在搜索过程中区分树边和回退边?

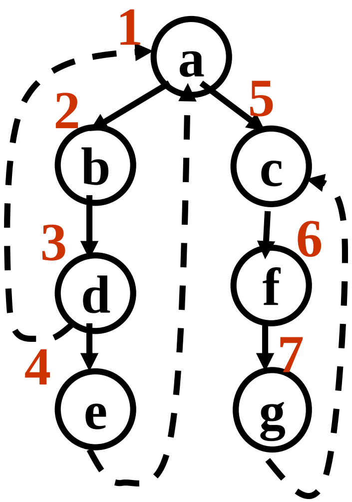
设v是当前访问过的顶点old，而下面搜索到 w， 则w 有三种情况:

1.w是new， 则(v,w)是树边，将其加入T;

2.w是old， 且w是v的父亲， 则(w,v)是树边， 但是第二次遇到， 不再加入T;例v=e,w=d

3.w是old且w不是v的父亲,则(v,w),是回退边;例v=e,w=a

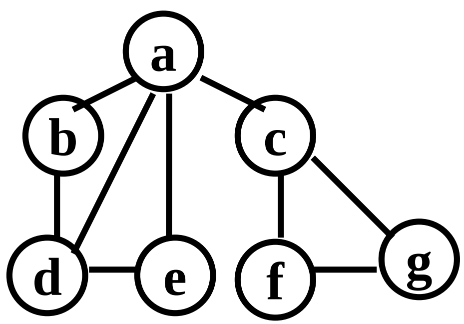


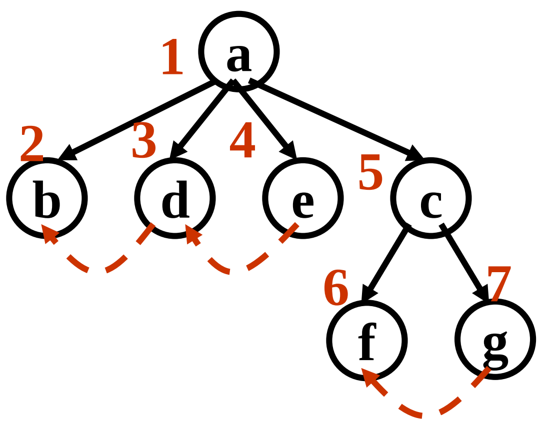


- 结论:若G中存在环路,则在先深搜索过程中必遇到回退边;反之亦然

2. 先广搜索对边的分类

- 两类：树边—在搜索过程中所经过的边；横边—图中的其它边.
- 特点：树边是从先深编号较小的指向较大的顶点；
  而横边不一定与之相反，但可规定：大→小.





- 结论:若G中存在环路,则在先广搜索过程中必遇到横边;反之亦然

4.4.2 无向图与开放树的联系

定义：连通而无环路的无向图称作开放树（Free Tree）

开放树的性质：（证明见教材P154～155）

（1）具有n≥1个顶点的开放树包含n-1条边；

（2）如果在开放树中任意加上一条边，便得到一条回路。

联系：如果指定开放树中的一个顶点为根(如搜索起点)，并且把每条边看成是背离根的，则一株开放树变成一株树.

4.4.3 最小生成树算法

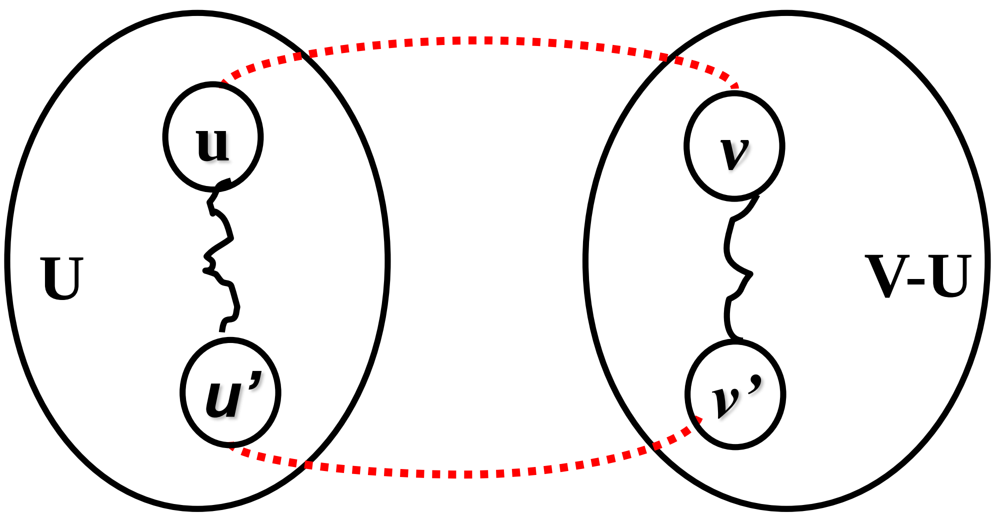
- 生成树的代价
  - 设G=（V, E）是一个无向连通网， E中每一条边（u, v）上的权值c（u, v），称为（u, v）的边长。
  - 图G的生成树上各边的权值（边长）之和称为该生成树的代价。
- 最小生成树(Minimum-Cost Spanning Tree，MST)
  - 在图G所有生成树中，代价最小的生成树称为最小生成树
- 最小生成树的概念可以应用到许多实际问题中。
  - 例如，在*n*个教室之间建造局域网络，至少要架设*n*-1条通信线路，而每两个教室之间的距离可能不同，从而架设通信线路的造价就是不一样的，那么如何设计才能使得总造价最小？

- 构造最小生成树的准则
  - 必须使用且仅使用该连通图中的n-1 条边连接结图中的 n 个顶点；
  - 不能使用产生回路的边；
  - 各边上的权值的总和达到最小。

4.4 最小生成树算法(cont.)

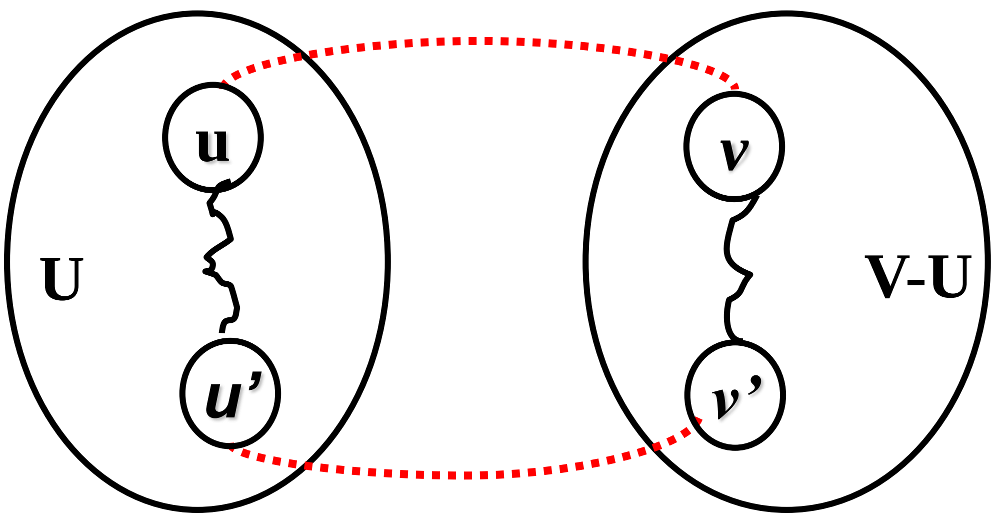
最小生成树的性质

- 假设G = （V, E）是一个连通网，U是顶点V的一个非空子集。若（u, v）是一条具有最小权值（代价）的边，其中u∈U, v∈V-U, 则必存在一棵包含边（u, v）的最小生成树。
- 此性质保证了Prim和Kruskal贪心算法的正确性

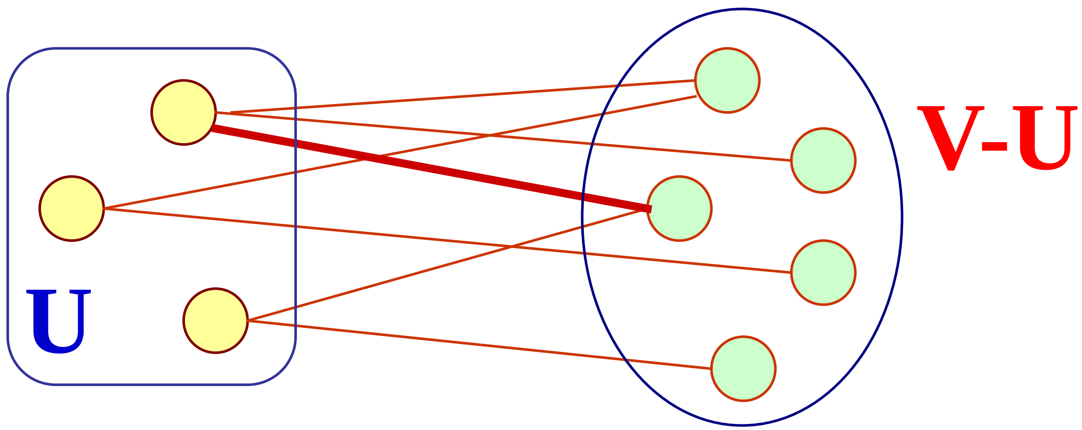


4.4 最小生成树算法(cont.)

- MST性质的证明
  - [反证]假设G的任何一棵最小生成树都不包含（u,v），设 T 是连通网上的一棵最小生成树，当将边（u,v）加入到 T中时，由生成树的定义，T 中必包含一条（u,v）的回路。另一方面，由于 T是生成树，则在T上必存在另一条边（u',v'），且u和u'、v和v'之间均有路径相通。删去边(u',v')便可消去上述回路，同时得到另一棵最小生成树T'。但因为(u, v)的代价不高于(u',v')，则T'的代价亦不高于T，T'是包含（u，v）的一棵最小生成树。



在生成树的构造过程中，图中n个顶点分属两个集合：已落在生成树上的顶点集U和尚未落在生成树上的顶点集V-U，则应在所有连通U中顶点和V-U中顶点的边中选取权值最小的边。



4.4 最小生成树算法(cont.)

- 普里姆（Prim）算法
  - 基本思想

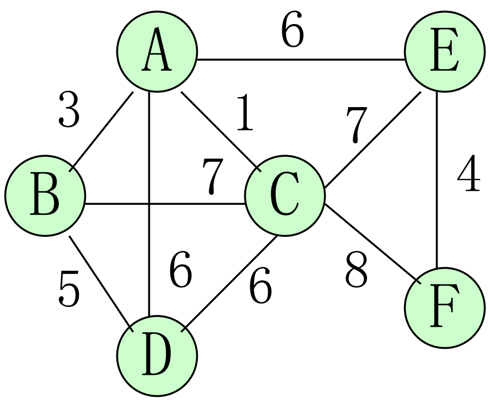
① 首先从集合V中任取一顶点(如顶点v_0)放入集合U中。这时U={v_0}，边集TE={ }

② 然后找出权值最小的边(u，v)，且u∈U，v∈(V-U)，将边加入TE，并将顶点v加入集合U

③ 重复上述操作直到U=V为止。这时TE中有n-1条边，T=(U，TE)就是G的一棵最小生成树

  - 如何找到连接U和V-U的最短边
    - 利用MST性质，可以用下述方法构造候选最短边集：对于V-U中的每个顶点，保存从该顶点到U中的各顶点的最短边。

Prim算法思想：



图G

$$
\begin{array}{c}
\\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 3 & 1 & 6 & 6 & \infty \\
3 & 0 & 7 & 5 & \infty & \infty \\
1 & 7 & 0 & 6 & 7 & 8 \\
6 & 5 & 6 & 0 & \infty & \infty \\
6 & \infty & 7 & \infty & 0 & 4 \\
\infty & \infty & 8 & \infty & 4 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

初始化

黄色表示U的顶点，其他为V-U的顶点

A

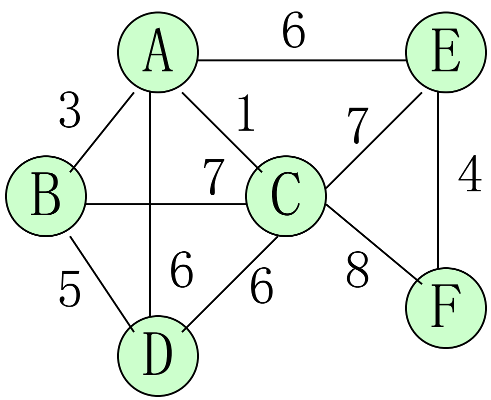
V-U中各顶点到U的最短直接路径：

A	B	C	D	E	F
0	3	1	6	6	∞

相邻顶点：

A	B	C	D	E	F
A	A	A	A	A	A

Prim算法:



图G

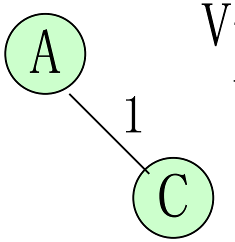
$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & A & B & C & D & E & F \\
\hline
A & 0 & 3 & 1 & 6 & 6 & \infty \\
B & 3 & 0 & 7 & 5 & \infty & \infty \\
C & 1 & 7 & 0 & 6 & 7 & 8 \\
D & 6 & 5 & 6 & 0 & \infty & \infty \\
E & 6 & \infty & 7 & \infty & 0 & 4 \\
F & \infty & \infty & 8 & \infty & 4 & 0
\end{array}
$$

比较大小

0	3	1	6	6	∞

V-U中各顶点到顶点集U的最短直接路径:

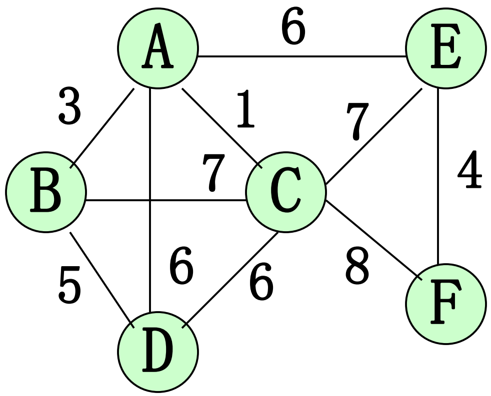
A	B	C	D	E	F
0	3	1	6	6	8



相邻顶点:

A	A	A	A	A	A
A	A	A	A	A	C

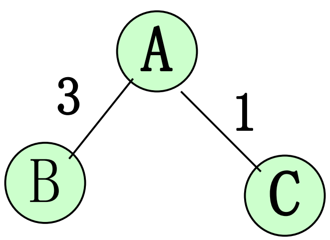
Prim算法:



图G

	A	B	C	D	E	F
A	0	3	1	6	6	∞
B	3	0	7	5	∞	∞
C	1	7	0	6	7	8
D	6	5	6	0	∞	∞
E	6	∞	7	∞	0	4
F	∞	∞	8	∞	4	0

比较大小



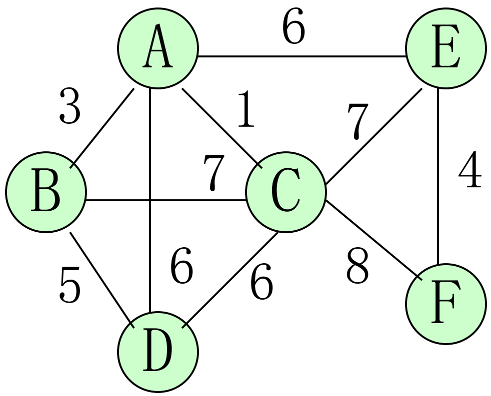
V-U中各顶点到顶点集U的最短直接路径

0	3	1	6	6	8
0	3	1	5	6	8

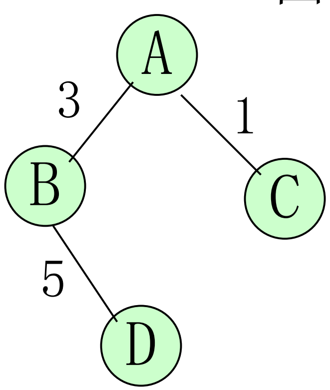
相邻顶点:

A	B	C	D	E	F
A	A	A	A	A	C
A	A	A	B	A	C

Prime算法:



图G



	A	B	C	D	E	F
A	0	3	1	6	6	∞
B	3	0	7	5	∞	∞
C	1	7	0	6	7	8
D	6	5	6	0	∞	∞
E	6	∞	7	∞	0	4
F	∞	∞	8	∞	4	0

比较大小

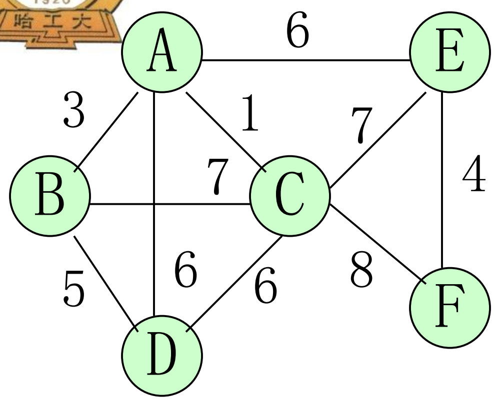
V-U中各顶点到顶点集U的最短直接路径

A	B	C	D	E	F
0	3	1	5	6	8
0	3	1	5	6	8

相邻顶点:

A	B	C	D	E	F
A	A	A	B	A	C
A	A	A	B	A	C

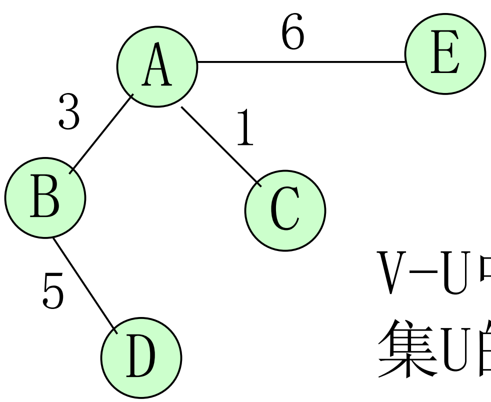
Prime算法:



图G

	A	B	C	D	E	F
A	0	3	1	6	6	∞
B	3	0	7	5	∞	∞
C	1	7	0	6	7	8
D	6	5	6	0	∞	∞
E	6	∞	7	∞	0	4
F	∞	∞	8	∞	4	0

比较大小



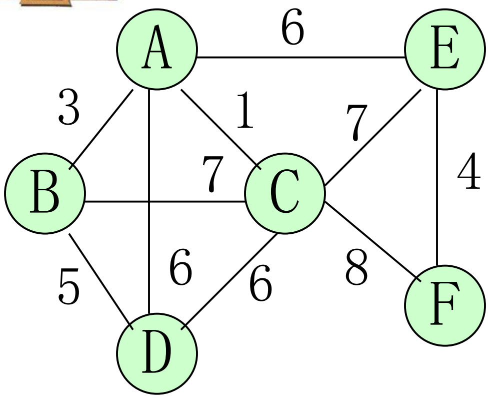
V-U中各顶点到顶点集U的最短直接路径

0	3	1	5	6	8
0	3	1	5	6	4

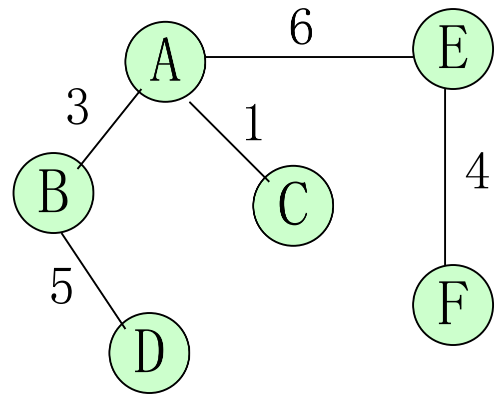
相邻顶点:

A	B	C	D	E	F
A	A	A	B	A	C
A	A	A	B	A	E

Prime算法：



图G



0	3	1	5	6	4

U 和 V-U最短路径：

A	B	C	D	E	F
0	3	1	5	6	4

A	A	A	B	A	E

相邻顶点：

A	A	A	B	A	E

4.4 最小生成树算法(cont.)

普里姆（Prim）算法的实现

数据结构

- 数组LOWCOST[n]：用来保存集合V-U中各顶点与集合U中顶点最短边的权值，LOWCOST[v]=infinity表示顶点*v*已加入最小生成树中；
- 数组CLOSEST[n] ：用来保存依附于该边的（集合V-U中各顶点与集合U中顶点的最短边）在集合U中的顶点。

如何用数组LOWCOST[n]和CLOSEST[n]表示候选最短边集？

- LOWCOST[i]=w
- CLOSEST[i]=k

表示顶点v_i和顶点v_k之间的权值为w，其中：$v_i \in$ V-U 且$v_k \in$U

如何更新？

$$\begin{cases} \text{LOWCOST[j]}=\min\{\text{cost}(v_k, v_j) \mid v_j \in U, \text{LOWCOST[j]}\} \\ \text{CLOSEST[j]}=k \end{cases}$$

4.4 最小生成树算法(cont.)

- 实现步骤：

1. 初始化两个辅助数组LOWCOST和CLOSEST；
2. 输出顶点v_0，将顶点v_0加入集合U中；
3. 重复执行下列操作n-1次

   3.1 在LOWCOST中选取最短边，取CLOSEST中对应的顶点序号k；

   3.2 输出顶点k和对应的权值；

   3.3 将顶点k加入集合U中；

   3.4 调整数组LOWCOST和CLOSEST；

$$\begin{cases} \text{LOWCOST[j]=min}\{\text{cost}(v_k, v_j) \mid v_j \in \text{U}, \text{LOWCOST[j]}\} \\ \text{CLOSEST[j]}=k \end{cases}$$

4.4 最小生成树算法(cont.)

普里姆（Prim）算法的实现

```
void  Prim(Costtype  C[n+1][n+1]  )
{ costtype  LOWCOST[n+1];   int  CLOSEST[n+1];   int i,j,k;  costtype  min;
      for( i=2; i<=n; i++ )
      {    LOWCOST[i] = C[1][i];      CLOSEST[i] = 1;    }
      for(  i = 2;  i <= n; i++ )
      {      min = LOWCOST[i];
             k = i;
             for(  j = 2;   j <= n;  j++ )
                    if ( LOWCOST[j] < min )
                     {  min = LOWCOST[j] ;     k=j;  }
             cout << "("  << k << "," << CLOSEST[k] <<  ")"  <<  end1;
             LOWCOST[k] = infinity ;
             for ( j = 2;  j <= n;  j++ )
                  if  ( C[k][j] <  LOWCOST[j] && LOWCOST[j] < infinity )
                  {     LOWCOST[j]=C[k][j];   CLOSEST[j]=k;    }
     }
} /* 时间复杂度：O( |V|² )
```

算法分析

分析Prim算法，该算法由两个并列的循环组成，第一个循环次数为vex_num(即顶点的个数n)；第二个循环，外层循环的次数为n-1，内层的循环次数为n。所以总体来说，Prim的时间复杂度为O（n^2），并且该算法与图中边数的多少无关，所以该算法适合于求边稠密的图的最小生成树。

4.4 最小生成树算法(cont.)

- 克鲁斯卡尔（Kruskal）算法
  - 基本思想：
    - 设无向连通网为G＝(V, E)，令G的最小生成树为T＝(U, TE)，其初态为U＝V，TE＝{ }，
    - 然后，按照边的权值由小到大的顺序，依次考察G的边集E中的各条边。
    - 若被考察的边连接的是两个不同连通分量，则将此边作为最小生成树的边加入到T中，同时把两个连通分量连接为一个连通分量；
    - 若被考察的边连接的是同一个连通分量，则舍去此边，以免造成回路，
    - 如此下去，当T中的连通分量个数为1时，此连通分量便为G的一棵最小生成树。

4.4 最小生成树算法(cont.)

- 克鲁斯卡尔（Kruskal）算法
  - 实现步骤：

1. 初始化：U=V； TE={ }；

2. 循环直到T中的连通分量个数为1

2.1 在E中选择最短边(*u*，*v*);

2.2 如果顶点*u*、*v*位于T的两个不同连通分量，则

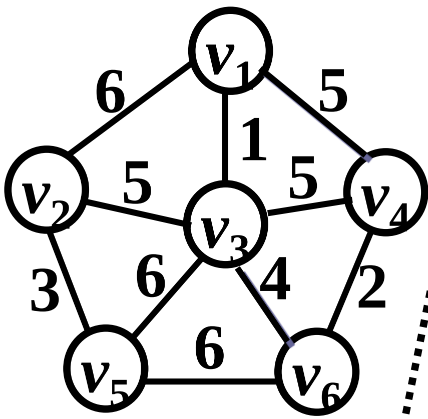
2.2.1 将边(*u*，*v*)并入TE；

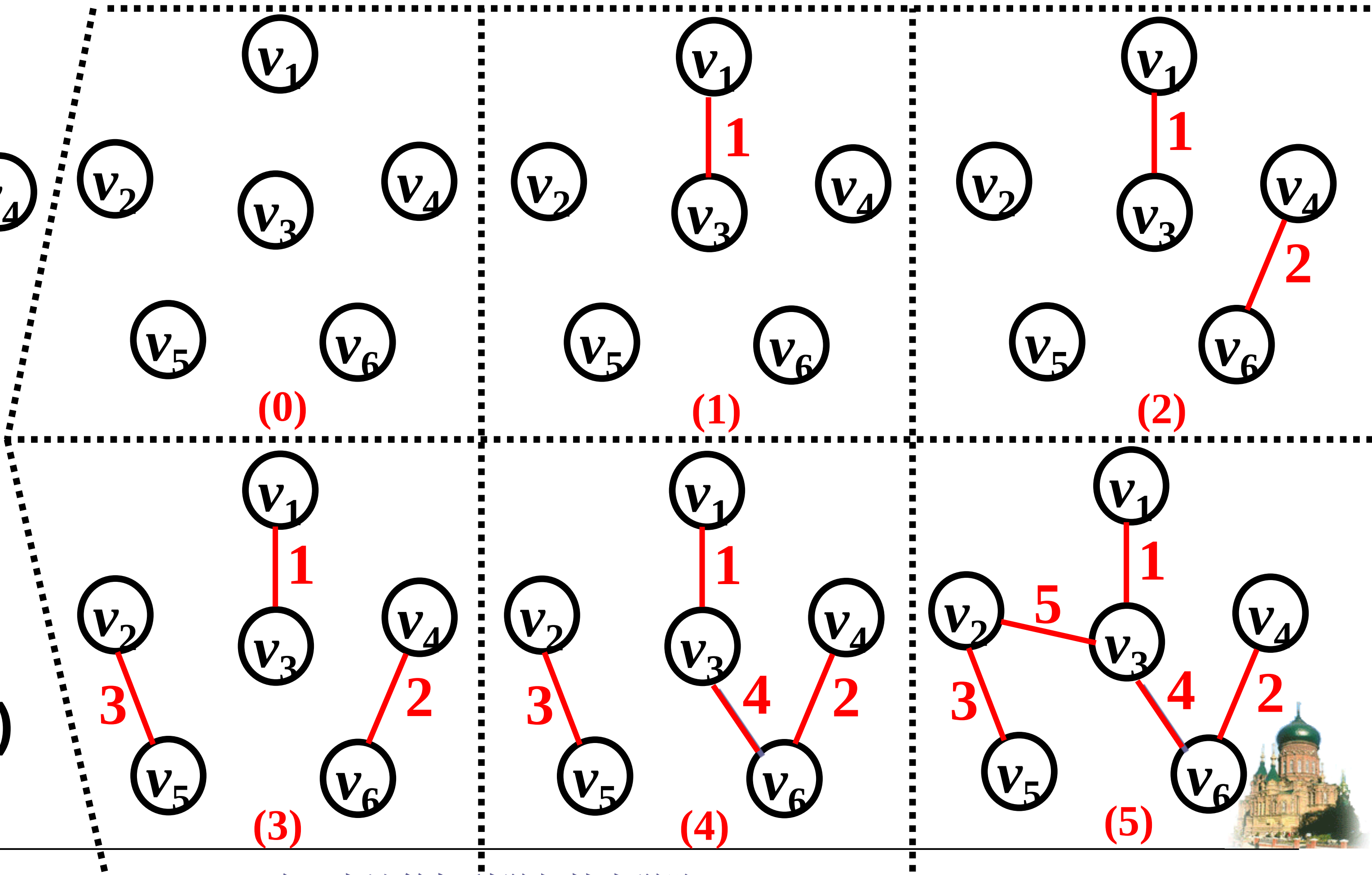
2.2.2 将这两个连通分量合为一个；

2.3 在E中标记边(*u*，*v*)，使得(*u*，*v*)不参加后续最短边的选取

4.4 最小生成树算法(cont.)

(v_1,v_3)	(v_4,v_6)	(v_2,v_5)	$(v3,v_6)$	(v_1,v_4)	(v_3,v_4)	(v_2,v_3)	(v_1,v_2)	(v_3,v_5)	(v_5,v_6)
1	2	3	4	5	5	5	6	6	6





O (|E|*log|E|)

算法分析

Kruskal算法至多对e条边各扫描一次，假若用堆来存放网中的边，则每次选择最小代价的边仅需O(loge)的时间。又生成树T的每个连同分量可看成是一个等价类，则构造T加入新的边的过程类似于求等价类的过程，有算法保证其时间复杂度可以达到O(eloge)。因此，Kruskal算法的时间复杂度为O(eloge)。所以该算法适合求边稀疏的图的最小生成树。

kraskal算法(要求边权值以不减顺序排列）

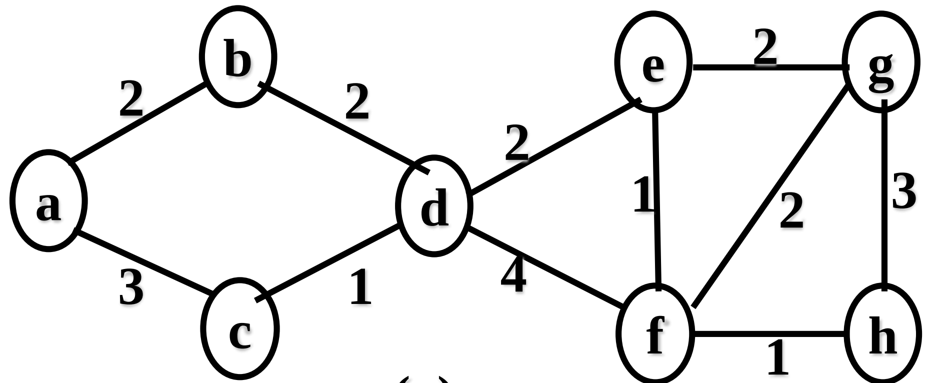
```
typedef struct edge{
        int bgn , end, wet;
        }Egde;

void Kraskal (Egde edges[], int e)
{
        int father[], bnf, edf, i;
        for (i=1;i<=e;i++)
                father[i]=0;
        for ( i=1;i<=e; i++)
        {
         bnf= Find (father, edgs[i]. bgn);
         edf= Find (father, edges[i]. end);
         if (bnf != edf)
           father [bnf] = edf;
        }
}
```

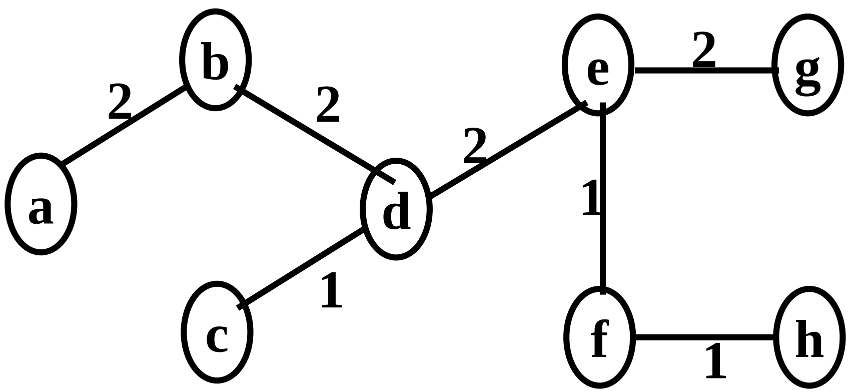
```
void main()
      {
     Edge edges [max];
       e= Getedges (edges);//边的个数
       Sort( edges, e);
       Kruskal (edges, e);
      }
```

```
int Find( int father[], int v)
 {
        int f = v;
        while ( father[f] >0)
          f = father [f];
         return (f);
 }
```

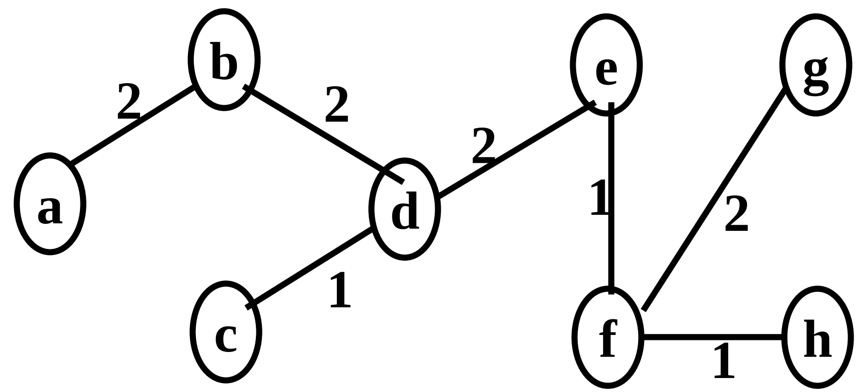
例



(a)



(b)



(c)

当各边有相同权值时，由于选择的任意性，产生的生成树可能不唯一

当各边的权值不相同时，产生的生成树是唯一的。

作业：农夫过河

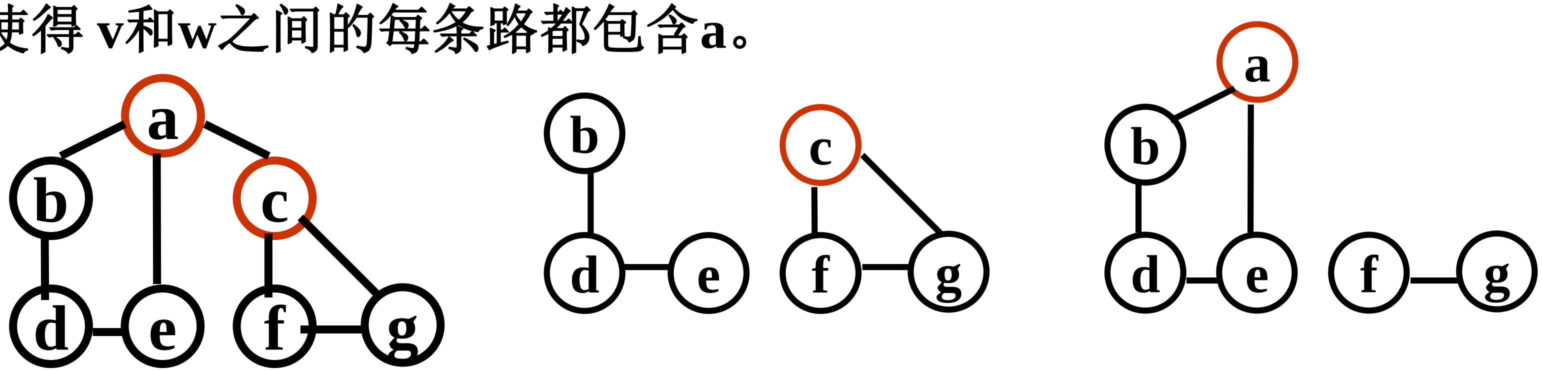
农夫需要把狼、羊、菜和自己运到河对岸去，只有农夫能够划船，而且船比较小，除农夫之外每次只能运一种东西，还有一个棘手问题，就是如果没有农夫看着，羊会偷吃菜，狼会吃羊。请考虑一种方法，让农夫能够安全地安排这些东西和他自己过河。

4. 5 无向图的双连通性

4.5.1 无向图的双连通分量（Biconnected Component）

设 G = (V, E)是一个连通的无向图

称顶点a ∈V是关节点（articulation point），如果存在v , w ∈V，v≠w≠a 且使得 v和w之间的每条路都包含a。

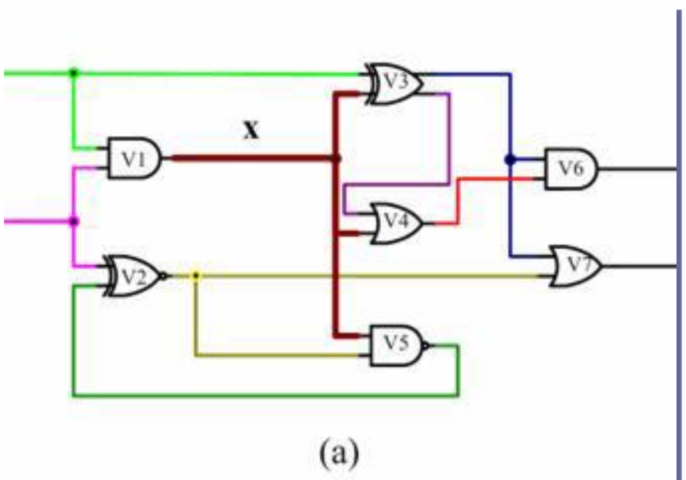


若在删去顶点 v 以及与之相邻的边之后，将图的一个连通分量分割成两个或两个以上的连通分量，则称该顶点为关节点。

定义 若对V中每个不同的三元组v,w,a；在v和w之间都存在 一条不包含 a的路，就说G是双连通的（biconnected）

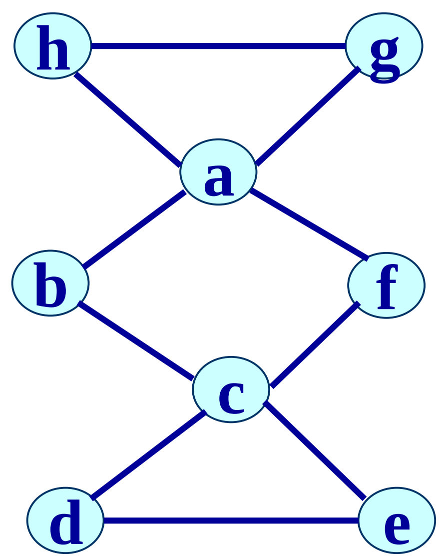
没有关节点的连通图称为双连通图。

- 双连通的无向图是连通的，但连通的无向图未必双连通。
- 一个连通的无向图是双连通的，当且仅当它没有关节点。
- 在双连通图上, 任何一对顶点之间至少存在有两条路径，在删去某个顶点及与该顶点相关联的边时, 也不破坏图的连通性。
- 一个连通图G如果是重连通图，那么它可以包括几个双连通分量。



(a)

下列连通图中，

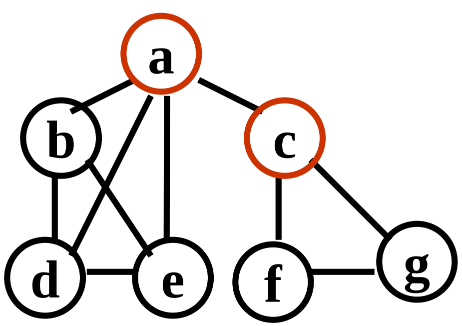


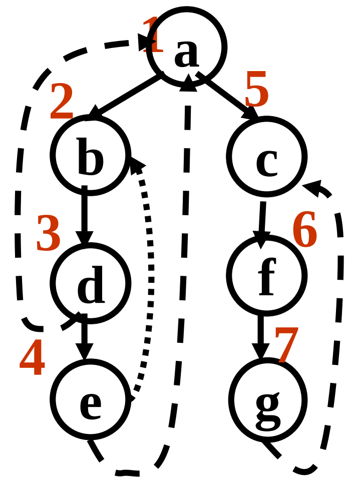
顶点a和顶点c是关节点

4.5.2 求关节点—对图进行一次先深搜索便可求出所有的关节点

由先深生成树可得出两类关节点的特性：

- 若生成树的根有两株或两株以上子树，则此根结点必为关节（第一类关节点）。因为图中不存在连接不同子树中顶点的边，因此，若删去根顶点，生成树变成生成森林。
- 若生成树中非叶顶点v，其某株子树的根和子树中的其它结点均没有指向v 的祖先的回退边，则v 是关节点（第二类关节点）。 因为删去v，则其子树和图的其它部分被分割开来





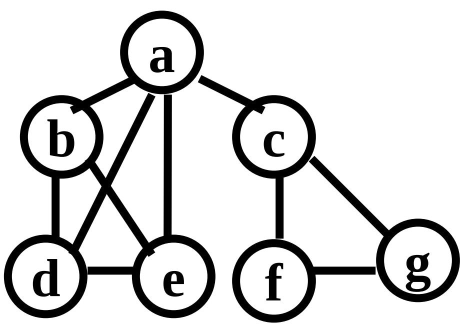
定义 low[v] : 设对连通图G＝（V, E）进行先深搜索的先深编号为dfn[v]，产生的先深生成树为S＝（V, T），B为回退边之集。

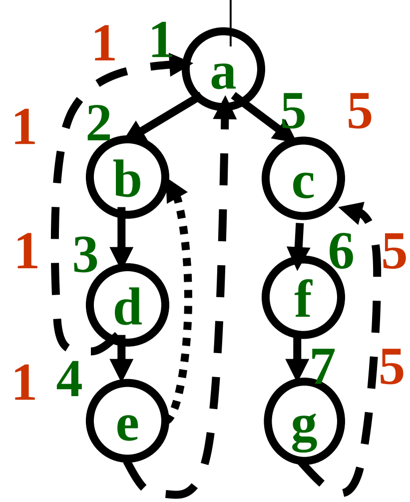
对每个顶点v，low[v]定义如下：

low[v]=min { dfn[v], dfn[w], low[y] }

(w, v) ∈B，w 是顶点v 在先深生成树上有回退边连接的祖先结点；

(v, y) ∈T， y 是顶点v 在先深生成树上的孩子顶点

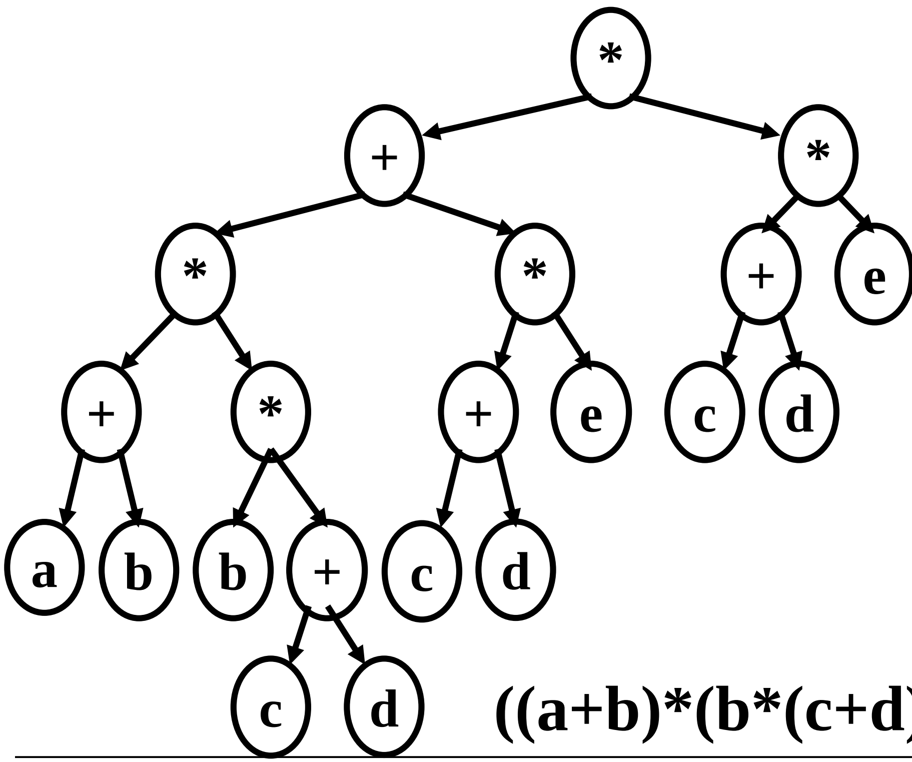




dfn[ ]　low[ ]

4.6 拓扑(topology)排序算法

- 无环路有向图：不存在环路的有向图的简称。
- 注意：无环路的有向图对应的无向图可能存在环路。
- 无环路的有向图可以描述含有公共子式的表达式(节省空间)。
- 无环路的有向图可用于表示偏序集。

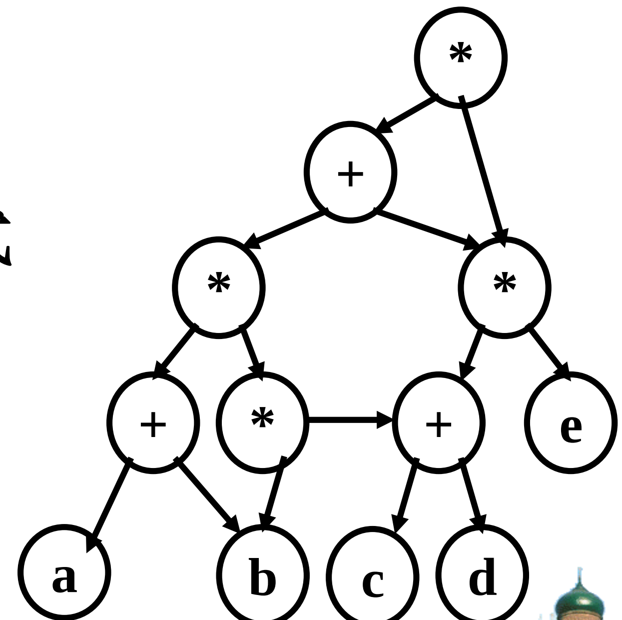


公共子式

b

(c+d)

(c+d)*e



((a+b)*(b*(c+d))+(c+d)*e)*((c+d)*e)

4.6 拓扑排序算法(cont.)

- 偏序关系：若集合X上的关系R是自反的、反对称的和传递的
  - 自反性：任意x∈X,（x，x）∈R
  - 反对称性：任意x、y∈X，若(x，y)∈R且(y，x)∈R，则x=y
  - 传递性：任意x, y, z∈X, (x，y)∈R且(y，z)∈R，则(x，z)∈R

  则称R是集合X上的偏序关系。
- 全序关系：
  - 设R是集合X上的偏序关系，如果对每个x、y∈X，必有（x，y）∈R或（y，x）∈R，则称R是集合X上的全序关系
- 直观上，偏序指集合上只有部分元素之间可比较，而全序是指全体元素均可比较。

4.6 拓扑排序算法(cont.)

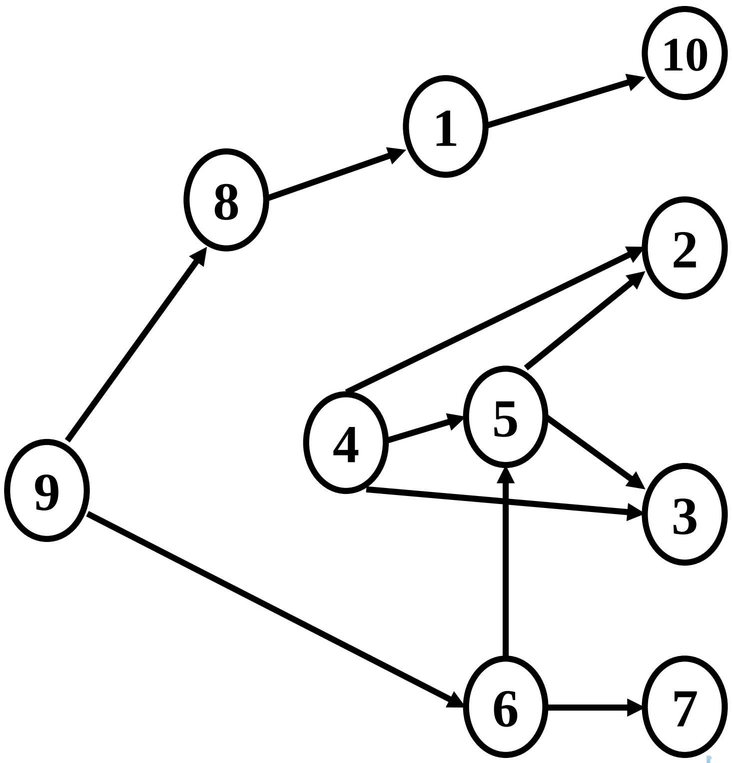
- 如何用无环路的有向图表示偏序关系？
  - 设R是有穷集合X上的偏序关系，对X中每个 v，用一个以 v 为标号的顶点表示，由此构成顶点集V；对任意$(u, v)\in$R，$(u\neq v)$，由对应两个顶点建立一条有向边，由此构成边集E，则G =(V，E)是无环路有向图。
- 拓扑排序：是由某个集合上的一个偏序得到该集合上的一个全序的过程。所得到的线性序列称为拓扑序列。
- AOV网：在一个表示工程的有向图中，用顶点表示活动，用弧表示活动之间的优先关系，称这样的有向图为顶点表示活动的网，简称AOV网。
  - AOV网中的弧表示活动之间存在的某种制约关系。
  - AOV网中不能出现回路 。
  - 在AOV网中，若从顶点 i 到 j 有一条有向路，则称 i 为 j 的前驱，j 为 i 的后继。若（i，j）∈E，则 i 称为 j 的直接前驱，j 称为 i 的直接后继。

4.6 拓扑排序算法(cont.)

AOV网示例：

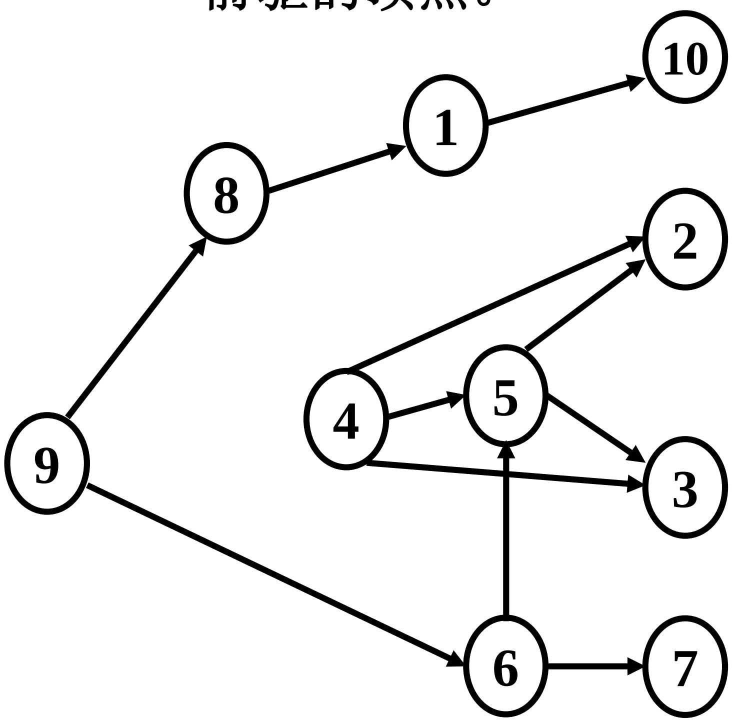
- 课程及课程间的先修关系是偏序关系，可以用AOV网表示

课程代号	课程名称	先修课代号
1	计算机原理	8
2	编译原理	4,5
3	操作系统	4,5
4	程序设计	无
5	数据结构	4,6
6	离散数学	9
7	形式语言	6
8	电路基础	9
9	高等数学	无
10	计算机网络	1



4.6 拓扑排序算法(cont.)

- 利用AOV网进行拓扑排序的基本思想：
  - (1) 从AOV网中选择一个没有前驱的顶点并且输出它；
  - (2) 从AOV网中删去该顶点和所有以该顶点为尾的弧；
  - (3) 重复上述两步，直到全部顶点都被输出，或AOV网中不存在没有前驱的顶点。



任何无环路的AOV网，其顶点都可以排成一个拓扑序列，并且其拓扑序列不一定是唯一的。

（9 8 6 1 4 5 7 2 3 1 0）

（9 4 8 6 5 1 10 2 3 7）

4.6 拓扑排序算法(cont.)

- 拓扑排序算法——实质是广度优先搜索算法
  - 输入：有向图的邻接表，输出：所有顶点组成的拓扑序列
  - 算法实现步骤：（使用队列）

☞图中还有未输出的顶点，但已跳出循环处理。说明图中还剩下一些顶点，它们都有直接前驱。这时网络中必存在有向环；或

☞全部顶点均已输出，拓扑有序序列形成，拓扑排序完成。

```
1.建立入度为零的顶点排队
2.扫描顶点表，将入度为0的顶点入队；
3.while（排队不空）{
      输出队头结点；
      记下输出结点的数目；
      删去与之关联的出边；
      若有入度为0的结点，入队
}
4.若输出结点个数小于n，则输出有环路；否则拓扑排序
  正常结束。
```

4.6 拓扑排序算法(cont.)

- 拓扑排序算法——实质是广度优先搜索算法

```
void   Topologicalsort( AdjGraph G )
{   Queue  Q ; nodes = 0 ;
    MakeNull( Q ) ;
    for( v=1; v<=G.n ; ++v )
        if ( indegree[v] ==0 )  EnQueue( v, Q ) ;
    while ( !Empty( Q ) ) {
        v = Front(Q) ;
        DeQueue( Q ) ;
        cout << v ;   nodes ++ ;
        for( 邻接于 v 的每个顶点 w )
            if( !(--indegree[w])) EnQueue(w,Q) ;
        }
     if ( nodes < n )  cout<<"图中有环路" ;
}
```

```
for(p=G.verlist[v].firstedge； p； p=p->next)
{  w=p->adjvex;
   if( !(--indegree[w]))
    EnQueue(w,Q) ;
}
```

4.6 拓扑排序算法(cont.)

- 关于广度优先拓扑排序的几点说明
  - 与先广搜索的差别：
    - 搜索起点是入度为0的顶点；
    - 需判断是否有环路；
    - 需对访问并输出的顶点计数（引入计数器nodes）。
    - 需删除邻接于 v 的边（引入数组indegree[ ]或在顶点表中增加一个属性域indegree）。
  - 也可以采用栈数据结构进行广度优先拓扑排序。
  - 亦可采用无后继顶点优先的拓扑排序算法
  - 也可以利用DFS遍历进行拓扑排序

4.6 拓扑排序算法(cont.)

- 利用栈结构进行拓扑排序
  - 输入：有向图的邻接表，输出：所有顶点组成的拓扑序列
  - 算法实现步骤：（使用栈）

```
1.建立入度为零的顶点栈
2.扫描顶点表，将入度为0的顶点栈；
3.while（栈不空）{
      输出栈顶结点；
      记下输出结点的数目；
      删去与之关联的出边；
      若有入度为0的结点，入栈
}
4.若输出结点个数小于n，则输出有环路；否则拓
  扑排序正常结束。
```

4.6 拓扑排序算法(cont.)

- 利用栈结构进行拓扑排序

```
void   Topologicalsort( AdjGraph  G )
{    MakeNull( S ) ; count = 0 ;
     for( v=0; v<n ; ++v )
          if ( !indegree[v] )  Push( v, S ) ;
     while ( !Empty( S ) ) {
          v = Pop ( S ) ; printf( v );  ++count ;
          for( 邻接于 v 的每个顶点 w ) {
               if( !(--indegree[w]))
                    Push(S, w) ;
          }
     }
     if ( count < n )  cout<<"图中有环路" ;
}
```

4.6 拓扑排序算法(cont.)

- 基于DFS的拓扑排序

```
void topodfs  ( v )
{   Push( v ,S ) ;
    mark[v]=True;
    for ( L[v] 中的每一个顶点w)
        if ( mark[w] = False )
            topodfs ( w ) ;
    printf ( Top( S ) ) ;
    Pop ( S ) ;
}
```

```
void  dfs-topo ( GRAPH  L )
{  MakeNull( S );
   for( u=1;u<=n; u++)
       mark[u]=False;
   for( u=1;u<=n;u++)
       if ( !mark[u] )
           topodfs( u ) ;
}
```

思想：借助栈，在DFS中，把第一次遇到的顶点入栈，到达某一顶点递归返回时，从栈中弹出顶点并输出。

4.7 关键路径算法

案例场景

- 某软件公司承接一家企业的信息系统集成任务。作为该系统集成项目的项目经理，接到任务后，应该制定项目进度表，这样项目才可以依照进度表进行。
- 在与项目团队成员探讨后，已经确认了11项基本任务。所有这些任务的名称、完成每项任务所需的时间，以及与其他任务之间的约束关系如右侧表：

任务名称	必需的时间(天)	前置任务
a1	6	
a2	4	
a3	5	
a4	1	a1
a5	1	a2
a6	2	a3
a7	9	a4,a5
a8	7	a4,a5
a9	4	a6
a10	2	a7
a11	4	a8,a9

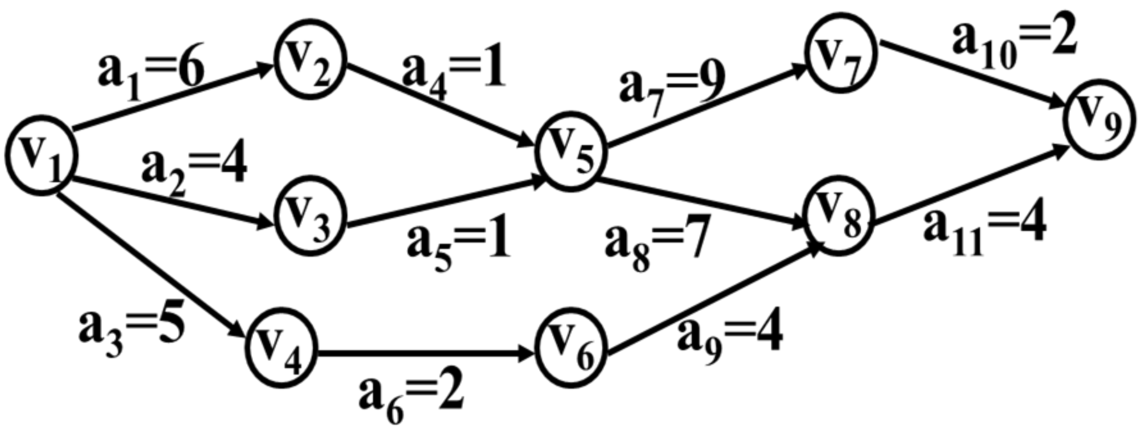
4.7 关键路径算法(cont.)

- **问题1：** 如何描述项目进度？
- **问题2：** 完成整个项目至少需要多少时间？
- **问题3：** 如果在任务a5上推迟了3天，对项目进度有何影响？作为项目经理，将如何处理这个问题？

任务名称	必需的时间(天)	前置任务
a1	6	
a2	4	
a3	5	
a4	1	a1
a5	1	a2
a6	2	a3
a7	9	a4,a5
a8	7	a4,a5
a9	4	a6
a10	2	a7
a11	4	a8,a9

项目关键路径是一种网络图方法，由雷明顿-兰德公司(Remington- Rand)的JE克里(JE Kelly)和杜邦公司的MR沃尔克(MR Walker)在1957年提出的，用于对化工工厂的维护项目进行日程安排。它适用于有很多项目而且必须按时完成的项目。

关键路径是一个动态系统，它会随着项目的进展不断更新，该方法采用单一时间估计法，其中时间被视为一定的或确定的。

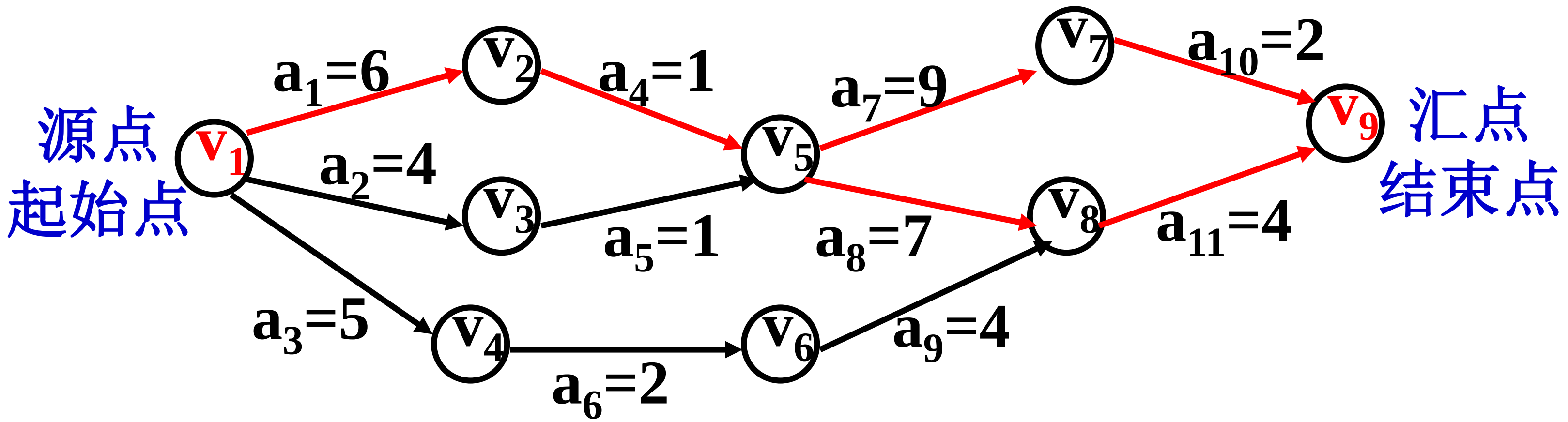


任务名称	必需的时间(天)	前置任务
a1	6	
a2	4	
a3	5	
a4	1	a1
a5	1	a2
a6	2	a3
a7	9	a4,a5
a8	7	a4,a5
a9	4	a6
a10	2	a7
a11	4	a8,a9

4.7 关键路径算法(cont.)

AOE网（Activity On Edge Network）

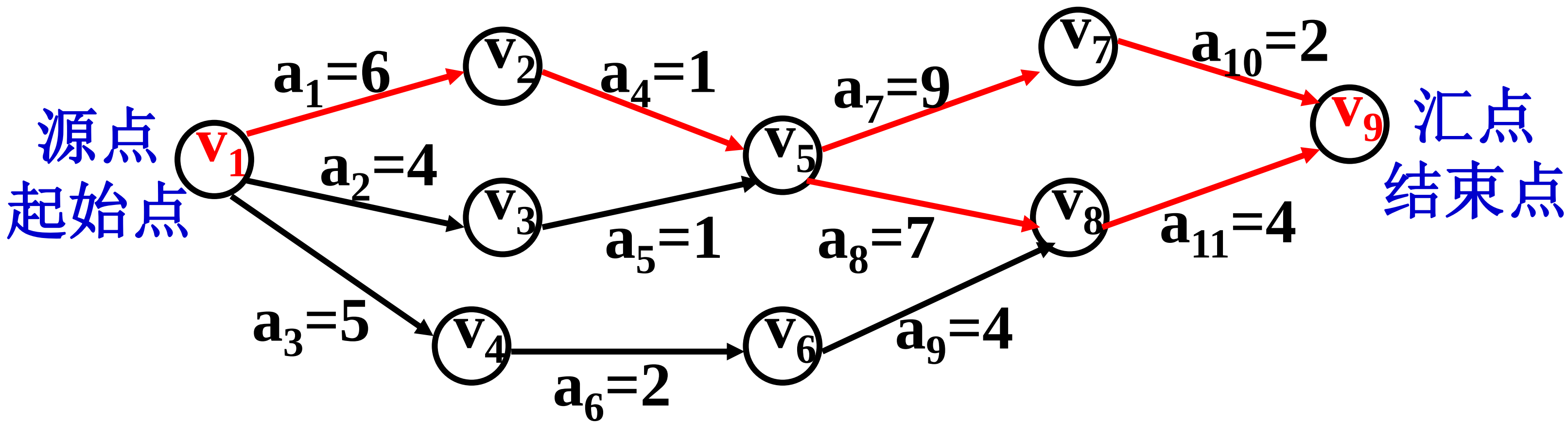
- 在带权的有向图中，用顶点表示事件，用边表示活动，边上权表示活动的开销（如持续时间），则称此有向图为边表示活动的网络，简称AOE网。
- 下图是有11项 活动，9个事件的AOE网，每个事件表示在它之前的活动已经完成, 在它之后的活动可以开始。



4.7 关键路径算法(cont.)

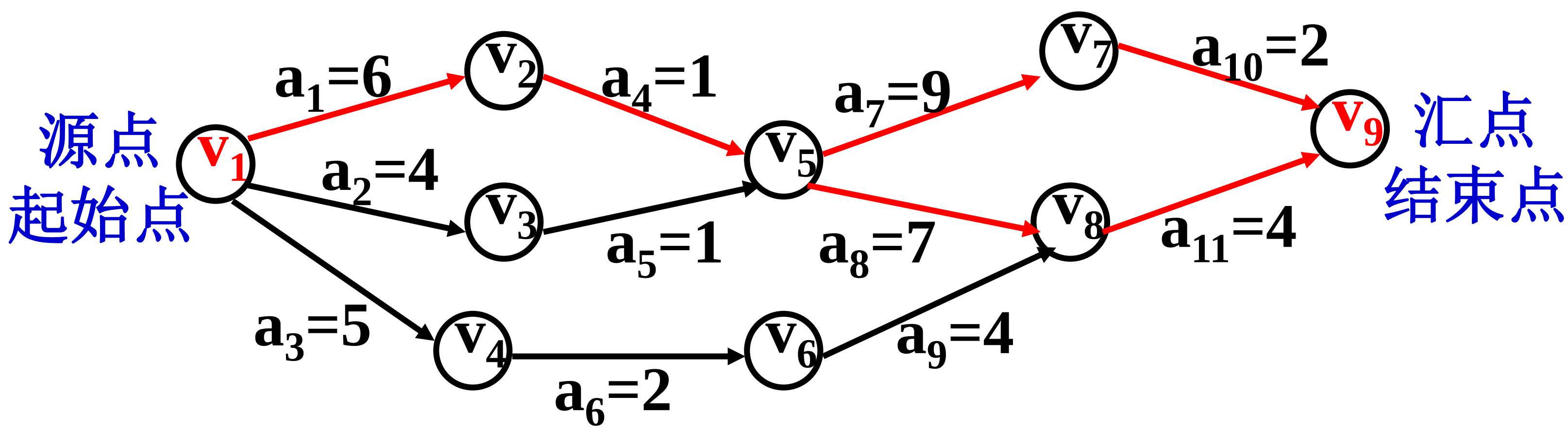
AOE网的性质

- 只有在某个顶点所代表的事件发生后，从该顶点出发的各有向边代表的活动才能开始;
- 只有在进入某一顶点的各有向边代表的活动已经结束，该顶点所代表的事件才能发生;
- 表示实际工程计划的AOE网应该是无环的，并且存在唯一的入度为0的开始顶点（源点）和唯一的出度为0的结束点（汇点）。



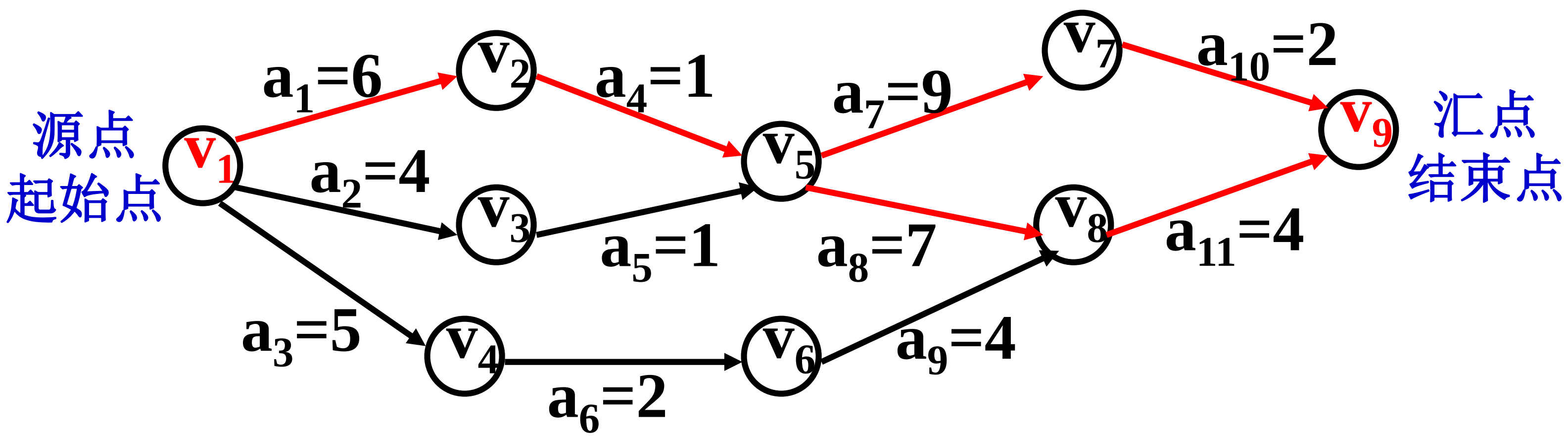
4.7 关键路径算法(cont.)

- **AOE网研究的主要问题：**
  - 如果用AOE 网表示一项工程，那么仅仅考虑工程之间的优先关系还不够，更多地是关心整个工程完成的最短时间是多少，哪些活动的延迟将影响整个工程进度，而加速这些活动能否提高整个工程的效率，因此AOE网有待研究的问题是:
    - (1)完成整个工程至少需要多少时间？
    - (2)哪些活动是影响工程进度的关键活动？



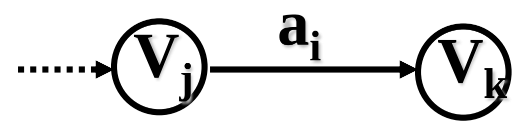
4.7 关键路径算法(cont.)

- 路径长度、关键路径、关键活动：
  - 路径长度：是指从源点到汇点路径上所有活动的持续时间之和。
  - 关键路径：在AOE网中，由于有些活动可以并行，所以完成工程的最短时间是从源点到汇点的最大路径长度。因此，把从源点到汇点具有最大长度的路径称为关键路径。
  - 一个AOE中，关键路径可能不只一条。
  - 关键活动：关键路径上的活动称为关键活动。



4.7关键路径算法(cont.)

- 关键路径和关键活动性质分析------与计算关键活动有关的量
  - ①事件V_j 的最早可能发生时间VE(j)
    - 是从源点V_1 到顶点V_j 的最长路径长度。
  - ②活动a_i 的最早可能开始时间 E(i)
    - 设活动a_i 在边< V_j ， V_k>上，则E(i)也是从源点V_1到顶点V_j 的最长路径长度。这是因为事件V_j发生表明以V_j为起点的所有活动a_i可以立即开始。因此，
      - E(i) = VE(j) ············(1)



有多个前驱顶点：

VE(v_5)=max{ve(前驱顶点)+前驱活动时间}

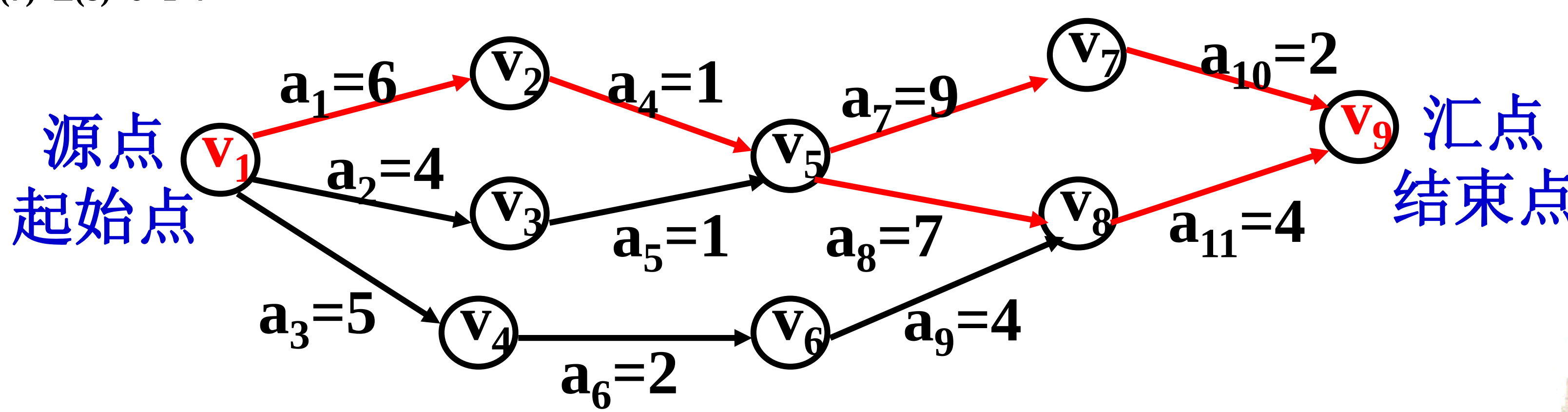
=max{6+1, 4+1}=7

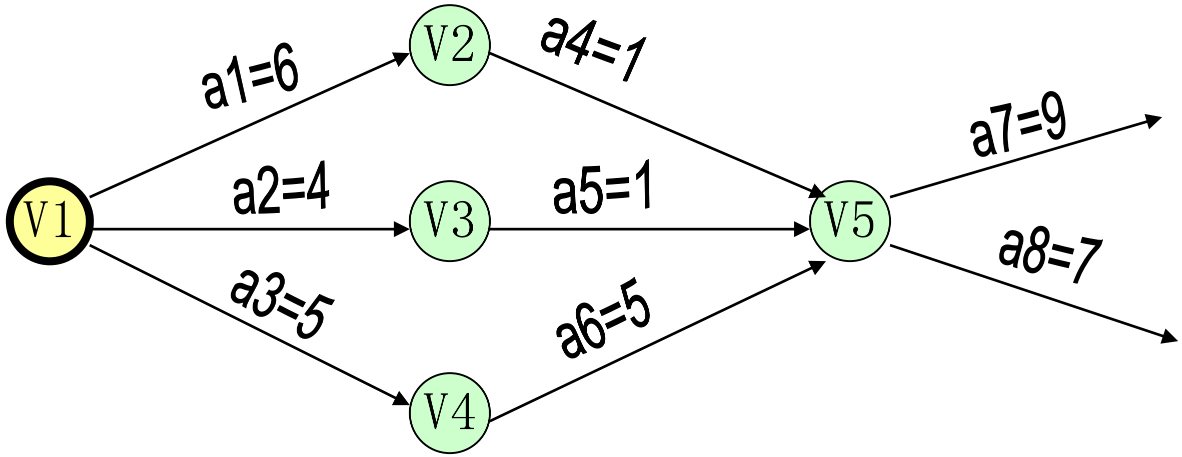
事件V5的最早发生时间

a1+a4=6+1=7

活动a7,a8的最早发生时间

E(7)=E(8)=6+1=7





各项点事件最早开始时间：

VE(v1)=0　VE(v2)=6

VE(v3)=4　VE(v4)=5

VE(v5)=10

各活动最早开始时间：

E(a1)= E(a2)=E(a3)=VE(v1)=0

E(a4)=VE(v2)=6

E(a5)=VE(v3)=4

E(a6)=VE(v4)=5

E(a7)=E(a8)=VE(v5)=10

4.7 关键路径算法(cont.)

- 关键路径和关键活动性质分析-----与计算关键活动有关的量

$$\cdots\cdots \to V_j \xrightarrow{a_i} V_k$$

③事件V_k的最迟发生时间VL(k)

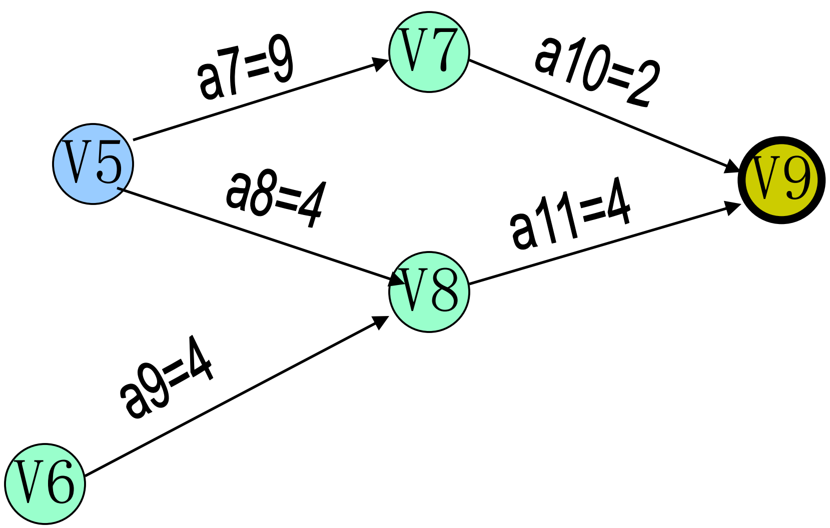
- 在VE(n)时刻完成的前提下，事件V_k的允许的最迟开始时间。
- 一个事件最迟发生时间VL(k)应该等于汇点的最早发生时间VE(n)减去从V_k到V_n的最大路径长度。

④ 活动a_i 的最迟允许开始时间 L(i)

- 不影响工期的前提下，活动a_i允许的最迟开始时间。
- 因为事件V_k发生表明以V_k为终点的入边所表示的所有活动均已完成，所以事件V_k的最迟发生时间VL(k)也是所有以V_k为终点的入边$< V_j , V_k>$所表示的活动a_i可以最迟完成时间。
- 显然，为不推迟工期，活动a_i的最迟开始时间L(i)应该是V_k的最迟完成时间VL(k)减去a_i的持续时间，即
  - L(i) = VL(k) - ACT[j][k] …………..(2)
  - 其中, ACT[j][k]是活动a_i的持续时间（$< V_j , V_k>$上的权）。

不推迟整个工程完成的前提下，（顶点）事件Vi允许的最迟开始时间VL(i)：完成点（汇点）V_n的的最早发生时间VE(n)减去Vk到Vn的最长路径长度。

（V_n的的最早发生时间VE(n)等于最迟开始时间VL(n)）。



仅有一个后继顶点：

假定工程18天完成(VE(V9)=18)，则：

VL(V9)=18

VL(V7)= VL(V9)-2=16

VL(v8)=VL(V9)-4=14

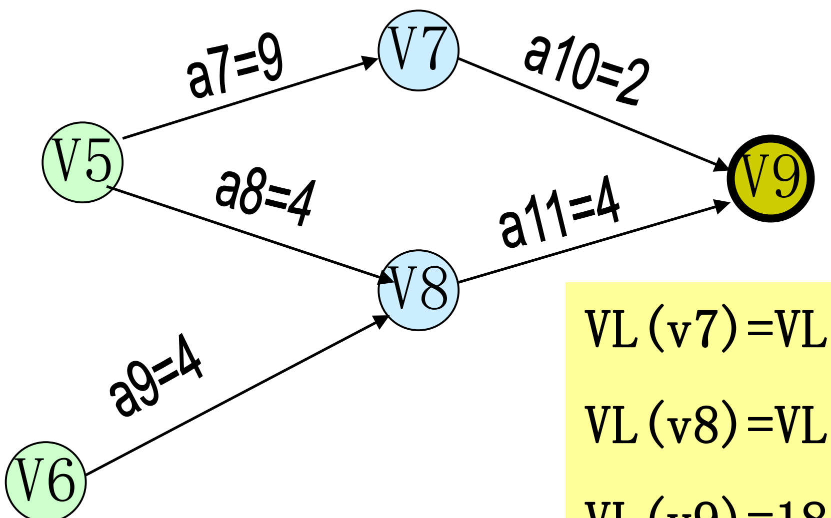
VL(v6)=VL(v8)-4=10

有多个后继顶点：

VL(v5)= min{VL(v7)-9, VL(v8)-4}=min{7,10}=7

确定了顶点vi的最迟开始时间后，确定所有以vi为弧头的活动ak的最迟开始时间L(k)：表示在不推迟整个工程完成的前提下，活动ak最迟必须开始的时间。

L(ak)=VL(ak弧头对应顶点)-活动ak的持续时间



VL(v7)=VL(v9)-2=16

VL(v8)=VL(v9)-4=14

VL(v9)=18

L(a11)=VL(v9)-4=18-4=14

L(a10)=VL(v9)-2=18-2=16

L(a9)=VL(v8)-4=14-4=10

L(a8)=VL(v8)-4=14-4=10

L(a7)=VL(v7)-9=16-9=7

L(i)-E(i)意味着完成活动ai的时间余量。

关键活动： L(i)=E(i)的活动。

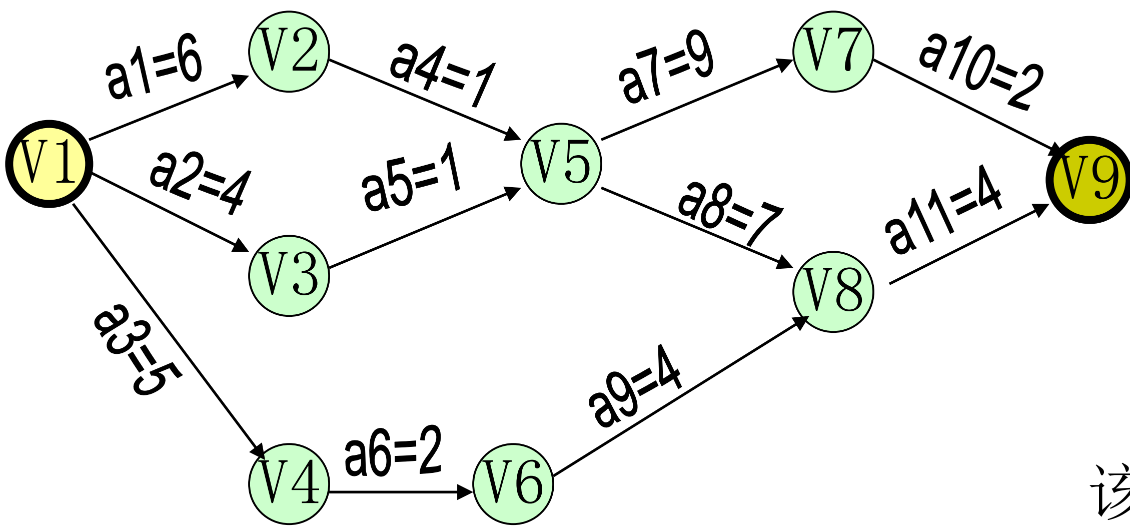
关键路径算法步骤：

（1）从开始点V1出发，令VE(1)=0,按拓朴排序序列求其它各顶点的最早发生时间

VE(k)=max{VE(j)+act(<j,k>)}

(vj为以顶点vk为弧头的所有弧的弧尾对应的顶点集合)

顶点	VE(i)	VL(i)
v_1	0	
v_2	6	
v_3	4	
v_4	5	
v_5	7，5	
v_6	7	
v_7	16	
v_8	14，11	
v_9	18，18	



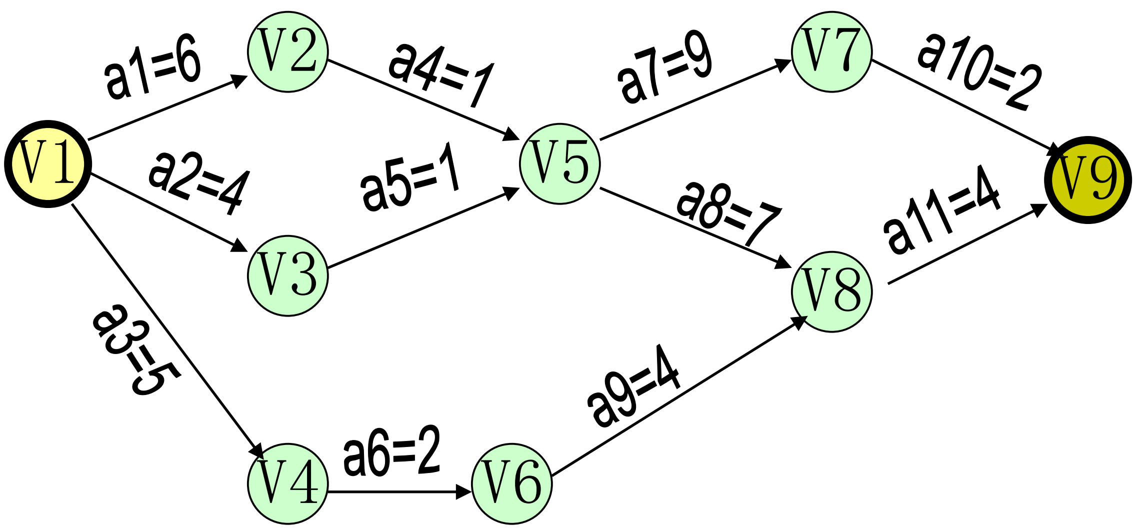
该表次序为一拓扑排序序列

关键路径算法步骤：

（2）从完成点v_n出发，令VL(n)=VE(n),按逆拓朴排序序列求其它各顶点的最迟发生时间

VL(j)=min{VL(k)-ACT(<j,k>)}

(vk为以顶点vj为弧尾的所有弧的弧头对应的顶点集合)

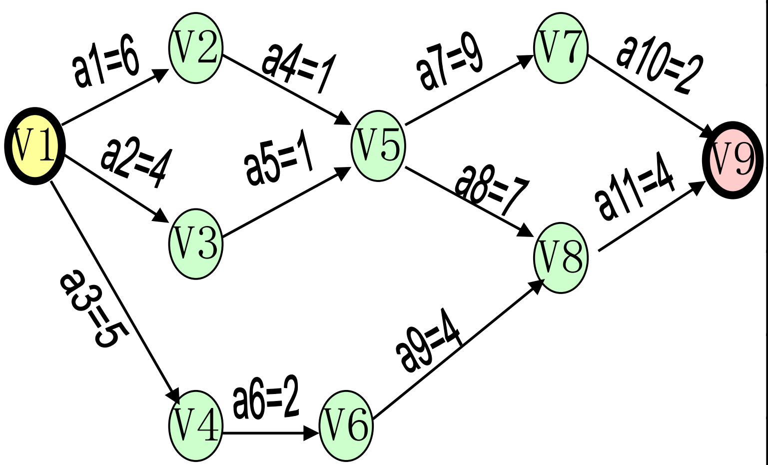


顶点	VE(i)	VL(i)
v_1	0	0，2，3
v_2	6	6
v_3	4	6
v_4	5	8
v_5	7	7，7
v_6	7	10
v_7	16	16
v_8	14	14
v_9	18	18

关键路径算法步骤：

（3）求每一项活动ai(vj,vk)：

E(i)=VE(j)　　L(i)=VL(k)-ACT(ai)



顶点	VE(i)	VL(i)
v_1	0	0
v_2	6	6
v_3	4	6
v_4	5	8
v_5	7	7
v_6	7	10
v_7	16	16
v_8	14	14
v_9	18	18

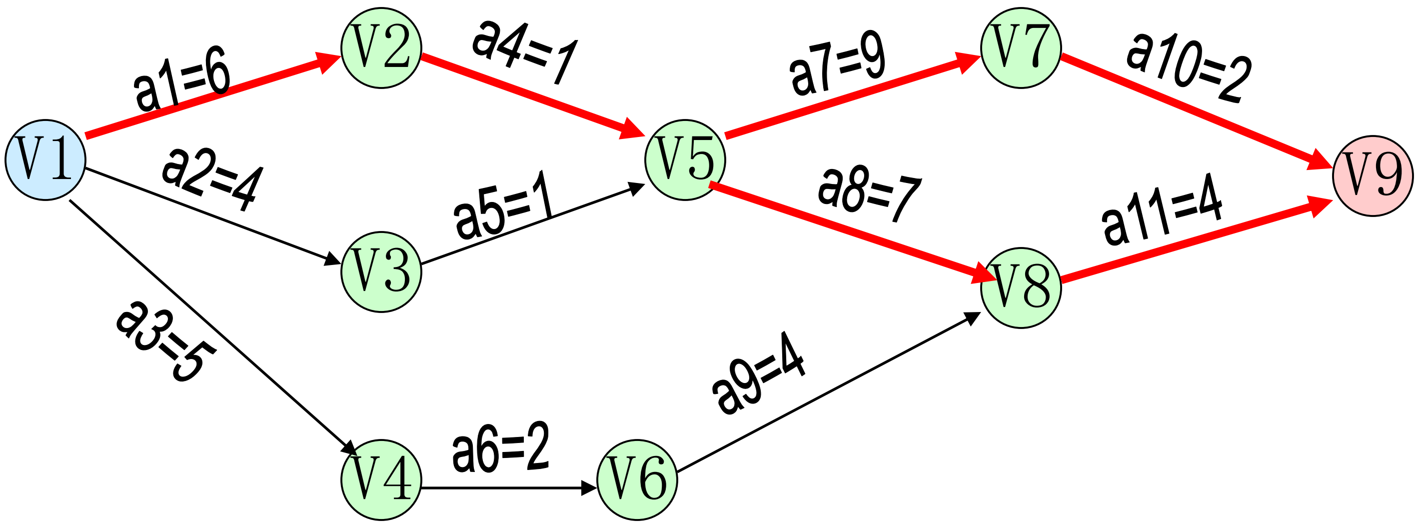
活动	E(i)	L(i)	L(i)-E(i)
a_1	0	0	0
a_2	0	2	2
a_3	0	3	3
a_4	6	6	0
a_5	4	6	2
a_6	5	8	3
a_7	7	7	0
a_8	7	7	0
a_9	7	10	3
a_{10}	16	16	0
a_{11}	14	14	0

关键活动：选取E(i)=L(i)的活动。

关键路径：

（1） v1→ v2 → v5 → v7 → v9

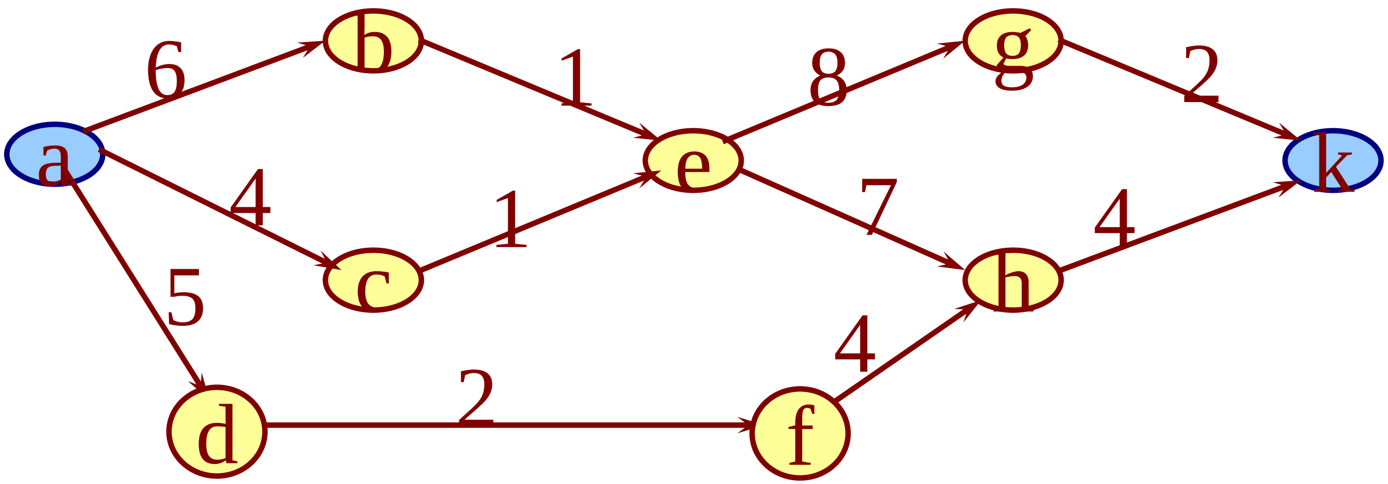
（2） v1→ v2 → v5 → v8 → v9



4.7 关键路径算法(cont.)

- **AOE**网可以用邻接矩阵或邻接表表示；矩阵中行下标**i**表示起点，列下标**j**表示终点，**ACT[i][j]>0**表示时间，**ACT[i][j]=-1**表示无边。

关键路径和关键活动分析计算示例：



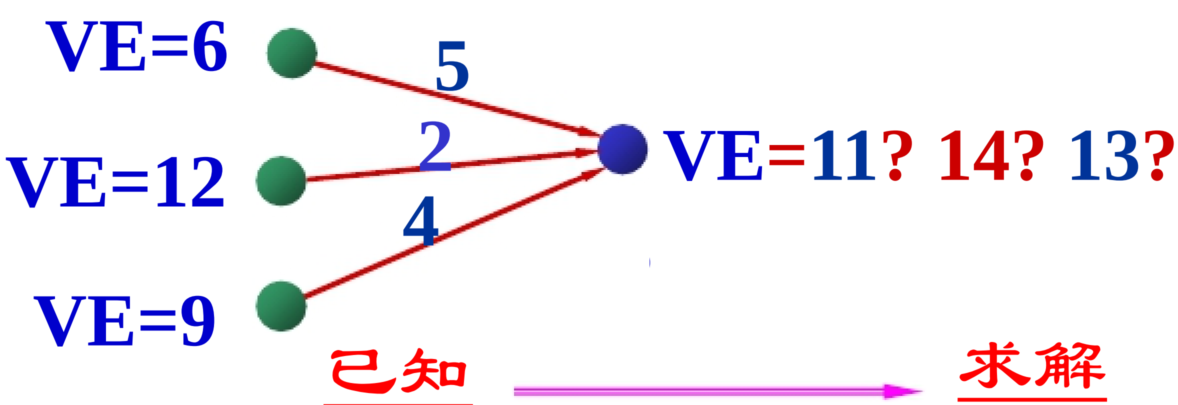
	a	b	c	d	e	f	g	h	k
ve	0	6	4	5	7	7	15	14	18
vl	0	6	6	8	7	10	16	14	18

4.7 关键路径算法(cont.)

- 利用拓扑排序算法求关键路径和关键活动
  - （1）前进阶段：计算VE[j]。从源点V_1出发，令VE(1) = 0，按拓扑序列次序求出其余各顶点事件的最早发生时间：

$$VE(j) = \max_{j \in T}\{ VE(i)+ACT[i][j] \}$$

- 其中T是以顶点V_j为尾的所有边的头顶点的集合$(2 \le j \le n)$
- 如果网中有回路，不能求出关键路径则算法中止；否则转（2）

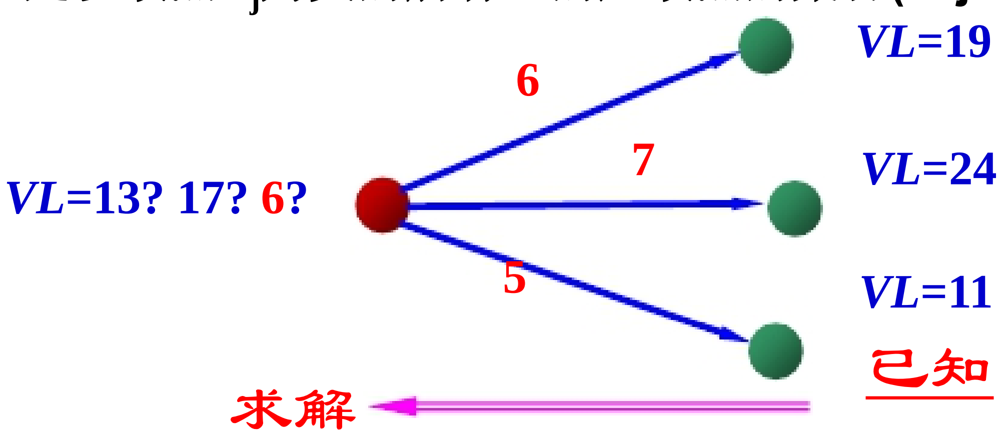


4.7 关键路径算法(cont.)

- 利用拓扑排序算法求关键路径和关键活动
  - （2）回退阶段：计算VL[j]从汇点V_n出发，令VL(n) = VE(n)，按逆拓扑有序求其余各顶点的最晚发生时间(用逆邻接矩阵ACT转置即可）：

$$VL(j) = \min_{k \in S}\{ VL(i)-ACT[j][i] \}$$

- 其中S是以顶点V_j为头的所有边的尾顶点的集合(2≤j≤n-1)



■ （3）计算E(i) 和L(i)

求每一项活动a_i的最早开始时间:

$$E(i) = VE(j)$$

求每一项活动a_i的最晚开始时间:

$$L(i) = VL(k) - ACT[j][k]$$

■ （4）若某条边满足E(i) = L(i)，则它是关键活动。

◆为了简化算法，可以在求关键路径之前已经对各顶点实现拓扑排序，并按拓扑有序的顺序对各顶点重新进行了编号。

◆不是任意一个关键活动的加速一定能使整个工程提前。

◆想使整个工程提前，要考虑各个关键路径上所有关键活动。

作业：工程安排

一项工程由多道工序组成， 按照施工过程的要求，这些工序之间，客观上有一个必须遵守的先后关系。 对那些紧接在已知工序前的工序叫紧前工序，把在已知工序后边紧接的工序叫后项工序， 只有已知工序的所有紧前工序都完成，已知工序才能开始施工。例如某工程的工序表如下：

序代号	紧前工序	完成时间	序代号	紧前工序	完成时间
A	-	6	F	C	2
B	-	2	G	D	3
C	A	3	H	B,E	4
D	A	5	I	H	2
E	A	3	J	F,G,I	2

一天中可以同时进行若干道工序。

编程实现：工程最少在几天内完成，并找出一种工程施工安排方案。

4.8 最短路径算法

最短路径(Shortest Path)问题

- 如果图中从一个顶点可以到达另一个顶点，则称这两个顶点间存在一条**路径**。
- 从一个顶点到另一个顶点间可能存在多条路径，而每条路径上经过的**边数**并不一定相同。
- 如果图是一个带权图，则路径长度为路径上各边的权值的总和，两个顶点间路径长度最短的那条路径称为两个顶点间的**最短路径**，其路径长度称为**最短路径长度**。
- 如何找到一条路径使得沿此路径上各边上的权值总和达到最小？
- 集成电路设计、GPS导航、路由选择、铺设管线等

4.8 最短路径算法(cont.)

- 问题解法
  - 边上权值非负情形的单源最短路径问题
    - — Dijkstra算法
  - 所有顶点之间的最短路径问题
    - — Floyd算法
- 边上权值非负情形的单源最短路径问题：
  - 问题描述：给定一个带权有向图G=（V，E）与源点 *v* ∈V ，求从 *v* 到G中其它顶点的最短路径。限定各边上的权值大于或等于0。

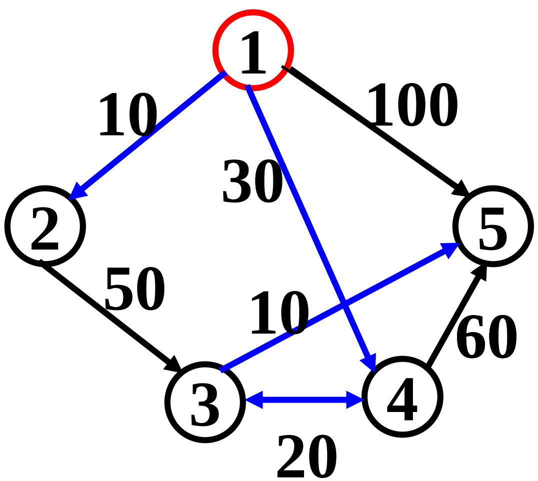
4.8最短路径算法(cont.)

- 艾兹格·W·迪科斯彻 (Edsger Wybe Dijkstra，1930年5月11日~2002年8月6日)荷兰人。计算机科学家，毕业就职于荷兰Leiden大学，早年钻研物理及数学，而后转为计算学。曾在1972年获得过素有计算机科学界的诺贝尔奖之称的图灵奖，之后，他还获得过1974年 AFIPS Harry Goode Memorial Award、1989年ACM SIGCSE计算机科学教育教学杰出贡献奖、以及2002年ACM PODC最具影响力论文奖。

1 提出“goto有害论”；结构程序设计之父
2 提出信号量和PV原语;
3 解决了有趣的“哲学家聚餐”问题;
4 最短路径优先算法（SPF）的创造者;
5 第一个Algol 60编译器的设计者和实现者;
6 THE操作系统的设计者和开发者;
7 提出银行家算法，解决操作系统中资源分配问题
8 与D. E. Knuth并称为我们这个时代最伟大的计算机科学家。

4.8 最短路径算法(cont.)

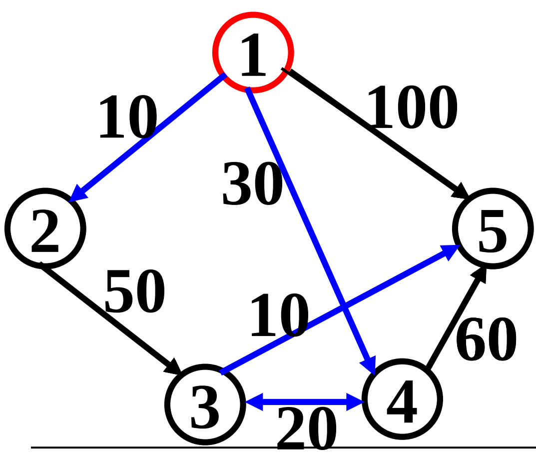
- Dijkstra算法的基本思想
  - Dijkstra提出按路径长度的递增次序，逐步产生最短路径的贪心算法----Dijkstra算法（SPF算法）。
  - 首先求出长度最短的一条最短路径,再参照它求出长度次短的一条最短路径，依次类推，直到从顶点*v* 到其它各顶点的最短路径全部求出为止。



源点S	中间结点	终点	路径长度
1		2	1 0
1		4	3 0
1	4	3	5 0
1	4　3	5	6 0

4.8 最短路径算法(cont.)

- Dijkstra算法的数据结构
  - 假设带权有向图G=（V, E），其中V={ 1, 2, ...n }，顶点1为源点。图G的存储结构：采用带权的邻接矩阵C表示。
  - 一维数组**D[*n*]**：**D[*i*]**表示源点**1**到顶点***i***的当前最短路径长度，初始时，**D[*i*]=C[1][*i*]**；
  - 一维数组**P[n]**：**P[*i*]**表示源点**1**到顶点***i***的当前最短路径上，最后经过的顶点，初始时，**P[*i*]=1**（源点）；
  - **S[n]**：存放源点和已生成的终点，其初态为只有一个源点**v**



$$C=\begin{pmatrix} \infty & 10 & \infty & 30 & 100 \\ \infty & \infty & 50 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 20 & 10 \\ \infty & \infty & 20 & \infty & 60 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

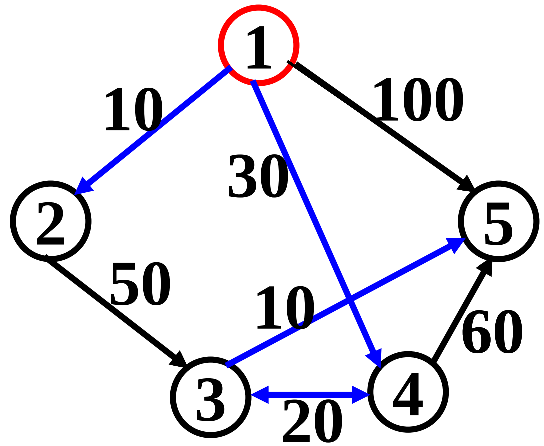
D		10	∞	30	100
P		1	1	1	1
S	T	F	F	F	F

4.8 最短路径算法(cont.)

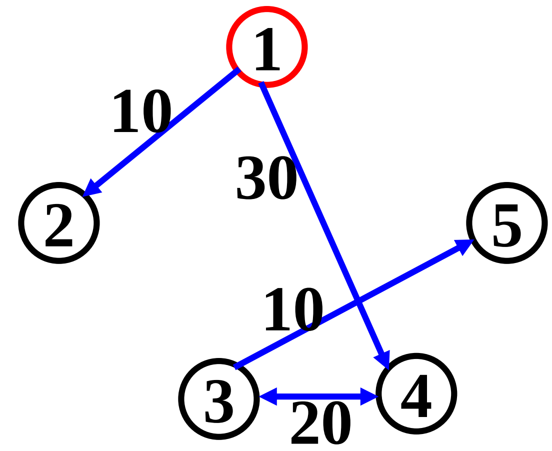
- Dijkstra算法实现步骤：
  - 1. 将V分为两个集合S（最短路径已经确定的顶点集合）和V-S（最短路径尚未确定的顶点集合。初始时，S={ 1 }，D[i]=C[1][i]（i=2,3,…n），P[i]=1(源点，i≠1) 。
  - 2. 从S之外即V-S中选取一个顶点w，使D[w]最小（即选这样的w，D[w]=min{ D[i]| i∈V-S }），于是从源点到达w只通过S中的顶点，且是一条最短路径（选定路径），并把w加入集合S。
  - 3. 调整D中记录的从源点到V-S中每个顶点的最短距离，即从原来的D[v]和D[w]＋C[w][v]中选择最小值作为D[v]的新值，且P[v]=w。
  - 4. 重复2和3，直到S中包含V的所有顶点为止。结果数组D就记录了从源到V中各顶点的最短 距离（数组P记录最短路径）。

4.8 最短路径算法(cont.)

- Dijkstra算法示例



$$C=\begin{pmatrix} \infty & 10 & \infty & 30 & 100 \\ \infty & \infty & 50 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 20 & 10 \\ \infty & \infty & 20 & \infty & 60 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$$



循环	S	w	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]	P[2]	P[3]	P[4]	P[5]
初态	{1}	-	10	∞	30	100	1	1	1	1
1	{1,2}	2	10	60	30	100	1	2	1	1
2	{1,2,4}	4	10	50	30	90	1	4	1	4
3	{1,2,4,3}	3	10	50	30	60	1	4	1	3
4	{1,2,4,3,5}	5	10	50	30	60	1	4	1	3

4.8最短路径算法(cont.)

Dijkstra算法的实现

```
void  Dijkstra(GRAPH  C, costtype D[n+1]， int P[n+1]，  bool S[n+1])
{   for ( i=2 ; i<=n; i++ )
    {     D[i]=C[1][i] ;  S[i]=False ;P[i]=1;}
   S [1]= True ;
   for( i=1; i<=n-1; i++)
   {  w=MinCost ( D, S ) ;
       S[w]=True ;
       for ( v=2 ; v<= n ; n++ )
           if ( S[v]!=True )
           {    sum=D[w] + C[w][v] ;
                if (sum < D[v] ){D[v] = sum ; P[v]=w;}}
   }
}//   时间复杂度：O（n²）
```

```
costtype MinCost (D, S)
{
temp = INFINITY ;
 w = 2 ;
 for ( i=2 ; i<=n ; i++ )
   if (!S[i]&&D[i]<temp)
    {  temp = D[i] ;
        w = i ;
    }
return  w ;
}
```

普里姆（Prim）算法的实现

```
void Prim(Costtype C[n+1][n+1] )
{ costtype LOWCOST[n+1]; int CLOSEST[n+1]; int
    i,j,k; costtype min;
  for( i=2; i<=n; i++ )
  { LOWCOST[i] = C[1][i]; CLOSEST[i] = 1; }
  for( i = 2; i <= n; i++ )
  { min = LOWCOST[i];
      k = i;
      for( j = 2; j <= n; j++ )
          if ( LOWCOST[j] < min )
          { min = LOWCOST[j] ; k=j; }
      cout << "(" << k << "," << CLOSEST[k] << ")"
    << end1;
      LOWCOST[k] = infinity ;
      for ( j = 2; j <= n; j++ )
 if ( C[k][j] < LOWCOST[j] && LOWCOST[j] < infinity )
     { LOWCOST[j]=C[k][j]; CLOSEST[j]=k; }
   }
} /* 时间复杂度：O( |V|² )
```

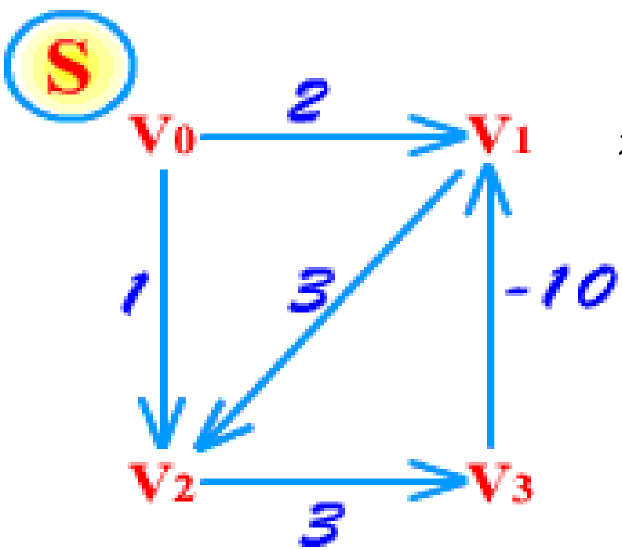
Dijkstra算法的实现

```
void Dijkstra(GRAPH C, costtype D[n+1] , int P[n+1], bool
    S[n+1])
{ for ( i=2 ; i<=n; i++ )
  { D[i]=C[1][i] ; S[i]=False ;P[i]=1;}
  S [1]= True ;
  for( i=1; i<=n-1; i++)
  { w=MinCost ( D, S ) ;
    S[w]=True ;
    for ( v=2 ; v<= n ; v++ )
       if ( S[v]!=True )
       { sum=D[w] + C[w][v] ;
          if (sum < D[v] ){D[v] = sum ; P[v]=w;}}
  }
}// 时间复杂度：O（n²）
```

```
costtype MinCost (D, S)
{
temp = INFINITY ;
 w = 2 ;
 for ( i=2 ; i<=n ; i++ )
   if (!S[i]&&D[i]<temp)
   { temp = D[i] ;
       w = i ;
   }
return w ;
}
```

负权最短路径问题

Dijkstra算法要求边的权值非负。事实上，一旦某些边的权值为负，那么Dijkstra算法就无法得出正确的最小路径长度。因为根据选取规则选取V访问时，得到Dv，但此时的路径可能没有经过顶点u，而weight(<u,v>)<0，如果Du+weight(<u,v>)<Dv，那么Dv就不是v的最小路径长度。



如图，D0=0,D0-2=1,D0-1=2,D0-2-3=4，但从S到V1还有其它路径：路径V0-V2-V3-V1的长度为-6；路径V0-V2-V3-V1-V2-V3-V1的长度为-10，如此下去，V1的最小路径长度是-∞。

出现这种情况的原因是图中出现了包括负权边的回路，我们称这种回路为负开销回路。

4.8 最短路径算法(cont.)

- 其它最短路径问题及解法
  - 单目标最短路径问题:
    找出图中每个顶点*v* 到某个指定结点*c* 最短路径
    - 只需每边取反?
  - 单结点对间最短路径问题:
    对于某对顶点*u* 和 *v*,找出*u* 到*v* 的一条最短路径
    - 以*u* 为源点
  - 所有顶点间的最短路径问题:
    对图中每对顶点*u* 和*v*，找出*u* 到*v* 的最短路径
    - 以每个顶点为源点
    - 直接用Floyd算法

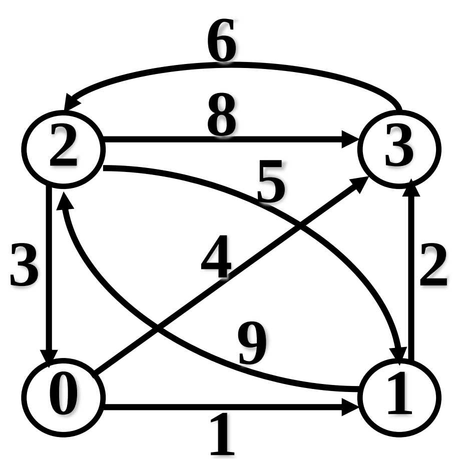
4.8 最短路径算法(cont.)

任意两个顶点之间的最短路径

- 问题描述：已知一个带权的有向图G=（V，E），对每一对顶点v_i，$v_j \in$ V，（$i \neq j$），要求：求出v_i与v_j之间的最短路径和最短路径长度。
- 限制条件：不允许有负长度的环路。
- Floyd算法的基本想法：动态规划算法
  - 如果v_i与v_j之间有有向边，则v_i与v_j之间有一条路径，但不一定是最短的；也许经过某些中间点会使路径长度更短。
  - 经过哪些中间点会使路径长度缩短呢?经过哪些中间点会使路径长度最短呢?
    - 只需尝试在原路径中间加入其它顶点作为中间顶点。
  - 如何尝试?
    - 系统地在原路径中间加入每个顶点，然后不断地调整当前路径(和路径长度)即可。

4.8 最短路径算法(cont.)

- 示例：
  - <2,1>5 <2,0><0,1> 4 a[2][1]=a[2][0]+a[0][1] 调整
  - 注意:考虑v_0做中间点可能还会改变其它顶点间的距离:
    <2,0,3>7 <2,3>8 a[2][3]=a[2][0]+a[0][3]
  - <2,3>: <2,0><0,3>: <2,0><0,1><1,3>=<2,0,1,3> a[2][3]=6 调整
  - 注意：有时加入中间顶点后的路径比原路径长 保持



$$
A=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc}
\infty & 1 & \infty & 4 \\
\infty & \infty & 9 & 2 \\
3 & 5 & \infty & 8 \\
\infty & \infty & 6 & \infty
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
$$

4.8 最短路径算法(cont.)

- Floyd算法的基本思想：
  - 假设求顶点v_i到顶点v_j的最短路径。如果从 v_i 到 v_j 存在一条长度为C[*i*][*j*]的路径，该路径不一定是最短路径，尚需进行 *n* 次试探。
  - 首先考虑路径（v_i，v_0，v_j）是否存在。如果存在，则比较（v_i，v_j）和（v_i，v_0，v_j）的路径长度取长度较短者为从 v_i 到 v_j 的中间顶点的序号不大于0的最短路径。
  - 假设在路径上再增加一个顶点 v_1，也就是说，如果（v_i ,…，v_1)和（v_1,…，v_j）分别是当前找到的中间顶点的序号不大于0的最短路径,那么（v_i,…，v_1 ,…，v_j)就是有可能是从v_i到v_j的中间顶点的序号不大于1的最短路径。将它与已经得到的从v_i到v_j中间顶点序号不大于0的最短路径相比较，从中选出中间顶点的序号不大于1的最短路径，再增加一个顶点v_2，继续进行试探。
  - 一般情况下，若（v_i ,…，v_k）和（v_k，…，v_j）分别是从 v_i到v_k和从v_k到v_j的中间顶点序号不大于 k-1 的最短路径，则将（v_i ,…，v_k ,…，v_j）和已经得到的从 v_i到 v_j且中间顶点序号不大于k-1的最短路径相比较，其长度较短者便是从v_i到 v_j 的中间顶点的序号不大于 *k* 的最短路径。

- 假设已求出$A_{k-1}[i][j]$ $(1\leq i,\ j\leq n)$，怎样求出 $A_k[i][j]$,

- 如果从顶点i到顶点j的最短路径不经过顶点k， 则由 $A_{k-1}[i][j]$ 的定义可知， 从i到j的中间顶点序号不大于k的最短路径长度就是 $A_{k-1}[i][j]$, 即$A_k[i][j]= A_{k-1}[i][j]$

- 如果从顶点i到顶点j的最短路径经过顶点k，则这样的一条路径是由i到k和由k到j的两条路径所组成。
  若$A_{k-1}[i][k]+A_{k-1}[k][j]<A_{k-1}[i][j]$，
  则$A_k[i][j]=A_{k-1}[i][k]+A_{k-1}[k][j]$

4.8 最短路径算法(cont.)

- **Floyd算法的数据结构**
  - 图的存储结构：
    - 带权的有向图采用邻接矩阵C[n][n]存储
  - 数组A[n][n]：
    - 存放在迭代过程中求得的最短路径长度。迭代公式：

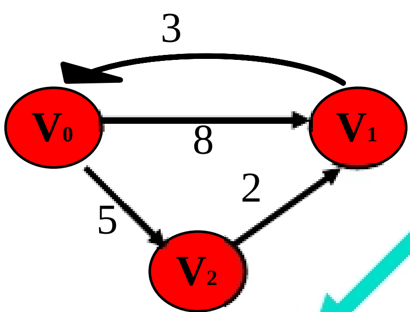
$$\begin{cases} A_0[i][j]=C[i][j] \\ A_k[i][j]=\min\{A_{k-1}[i][j], A_{k-1}[i][k]+A_{k-1}[k][j]\} & 0\le k\le n-1 \end{cases}$$

  - 数组P[n][n]：
    - 存放从 v_i 到 v_j求得的最短路径。初始时, P[i][j]= -1

Floyd 算法的求解过程

- 实例及求解过程:

图采用邻接矩阵存储，c[i][j] 为 <i, j> 的权值。



$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & \infty \\ 2 & \infty & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A初值　　　　A_0

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A_1

1、A[n][n]用于存储计算的最短路径。
初始时， A[i,j] = c[i,j]

2、进行 n 次迭代

在进行第 k 次迭代时，将使用如下的公式:

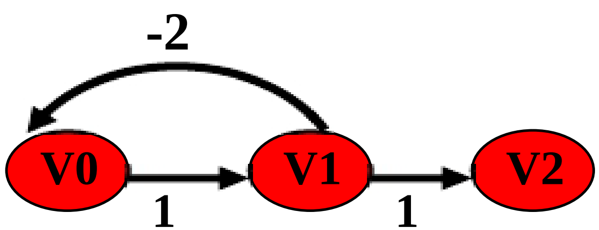
$$A_k[\,i, j\,] = \min\begin{cases} A_{k-1}[\,i, j\,] \\ A_{k-1}[\,i, k\,] + A_{k-1}[\,k, j\,] \end{cases}$$

注意：第 k 次迭代时，原 A_{k-1}矩阵的第 k行，第 k 列保持不变。左上至右下的对角线元素也不变。

实例中: k = 0 ~ (n-1)。

Floyd 算法的求解过程

- 应用范围:无负长度的圈，可有负长度的边。



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ -2 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

A初值

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

A_1

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty \\ -2 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

A_0

$A_1[\,0,\ 2\,] \mathrel{!=} 2$

$MIN\{\,A_0[\,0,\ 2\,],$

$A_0[\,0,\ 1\,]$

$+\ A_0[\,1,\ 2\,]$

$\}$

因为 V0->V1->V0 可以有许多圈。

4.8 最短路径算法(cont.)

- **Floyd算法的实现**

```
void   Floyd( costtype A[][], costtype C[][], int P[][], int n)
{   for ( i = 0; i < n; i++ )
          for ( j = 0; j< n; j++ )
           {   A[i][j] = C[i][j];
               P[i][j] = 0;    }
      for ( k = 0; k < n; k++ )
           for ( i = 0; i < n; i++ )
                for ( j = 0; j < n; j++ )
                     if ( A[i][k] + A[k][j] < A[i][j] )
                        {  A[i][j] = A[i][k] + A[k][j] ;
                           P[i][j] = k;}
}
/* 时间复杂度：O(n³) */
```

Warshall算法

求有向图邻接矩阵C的传递闭包D

$A[i][j]=A[i][j]\cup(A[i][k]\cap A[k][j])$;

可以判定有向图任意两点间是否存在有向路。

4.8 最短路径算法(cont.)

- 用 path 数组记录经过的路径

path 的定义如下:

path[i][j] = k 表示最短路径 i->……>j 且j的直接前驱为 k 即是：i-->...............-->k ->j

比如：

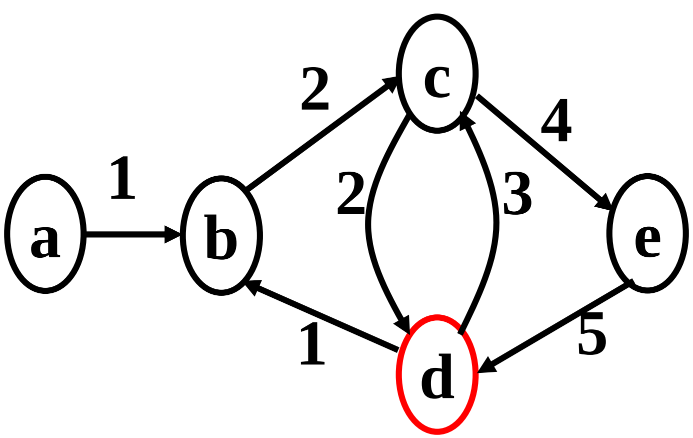
1-> 5->4， 4->3->6 此时 path[1][6] = 0； 0表示 1->6 不通，当引入结点 k = 4 此时有 1->5->4->3->6 显然有 path[1][6] = 3 = path[4][6] = path[k][6]

- 于是有 path[i][j] = path[k][j]
- 对于 1->5 相邻边， 在初始化时候 paht[1][5] = 1;
- 对于 最短路径 1->5->4->3->6 有 paht[1][6] = 3; paht[1][3]= 4; paht[1][4] = 5; paht[1][5] =1 如此逆推可以得到最短路径记录值

4.8 最短路径算法(cont.)

Floyd算法的应用----求有向图的中心点

- 顶点的偏心度：
  - 设G=(V, E)是一个带权有向图，D[i][j]表示从 i 到 j的最短距离。对任意一个顶点k, E(k) = max{ d[i][k] | i ∈V }称作顶点 k 的偏心度。
- 图G 的中心点：
  - 称具有最小偏心度的顶点为图G的中心点。



最短路径矩阵D

$$
\begin{array}{c}
 \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc}
0 & 1 & 3 & 5 & 7 \\
\infty & 0 & 2 & 4 & 6 \\
\infty & 3 & 0 & 2 & 4 \\
\infty & 1 & 3 & 0 & 7 \\
\infty & 6 & 8 & 5 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

顶点	偏心度
a	∞
b	6
c	8
d	5
e	7

本章小结

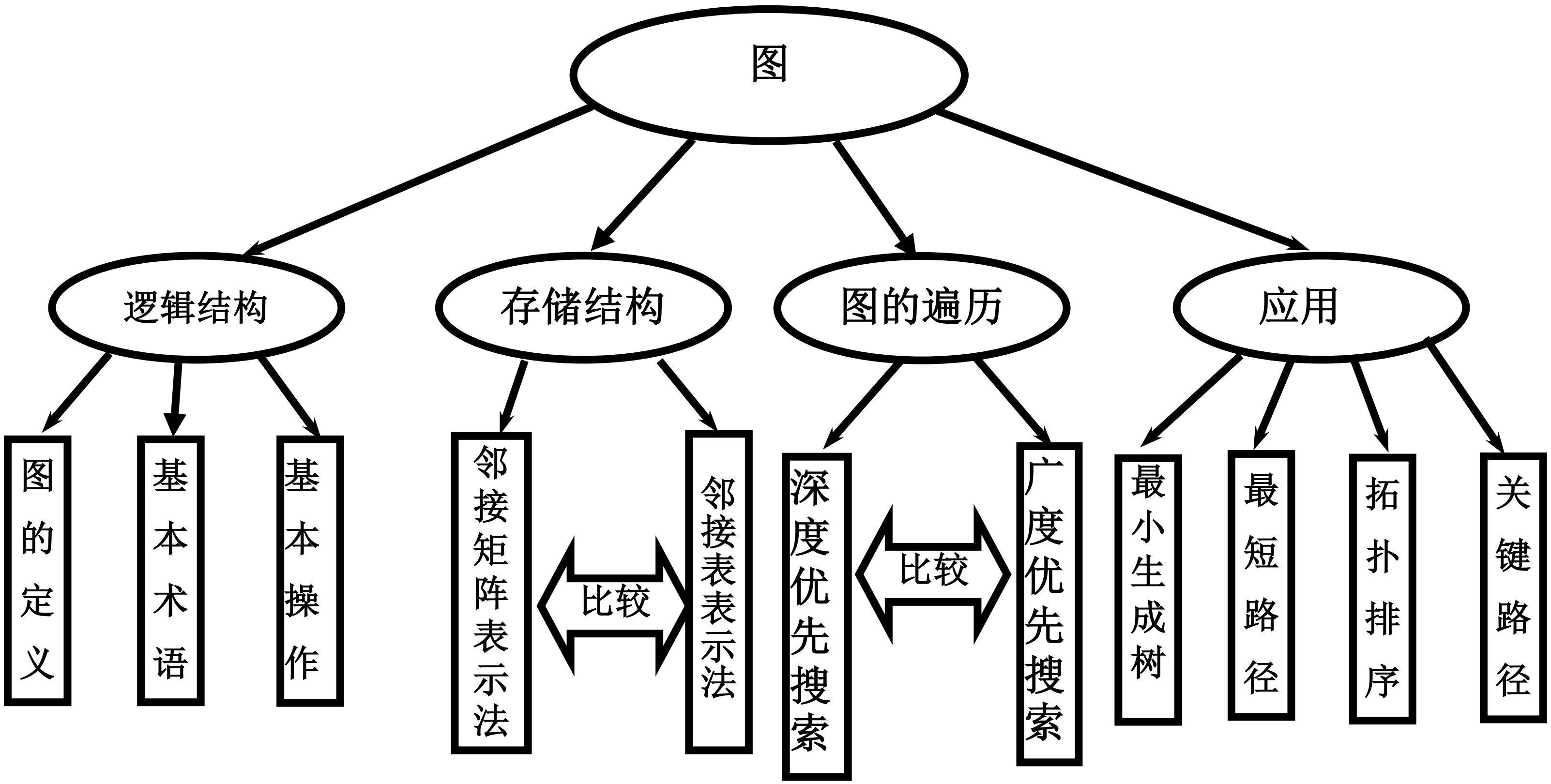


图
逻辑结构
存储结构
图的遍历
应用
图的定义
基本术语
基本操作
邻接矩阵表示法
比较
邻接表表示法
深度优先搜索
比较
广度优先搜索
最小生成树
最短路径
拓扑排序
关键路径