多元選修—微積分

課程心得：

最開始接觸微積分是在國中時，那時我看了圖書館的數學書籍，每次看到後半段時，就會出現不曾看過的符號，上網查證後發見竟然是微積分。這埋下了我想學微積分的種子，也讓我在選多元選修時毫不猶豫地選擇了微積分。

在一開始學微積分時，老師先教我們解析幾何與極限的概念。極限是我覺得最難的部分之一，原因是它時常要「有理化分子」，但當熟悉極限的運算後，就沒有以前那麼困難了。接著上到了微分，其中最困難的部分就是連鎖率。很容易把對象弄錯而發生錯誤。而積分對我來說最困難的部分則是變數變換法，它需要另外定義一個變數u，並把x與dx都用u與du表示，可以改變積分的對象去做運算。

在期末考的第五題中，我一開始把它當成隱含數微分來做，但是後來發現應該要利用微分的四則運算搭配連鎖律來解題。在我理清這個觀念後，成功拿到期末考滿分。

在這學期的微積分選修中，我真的學到了很多微分與積分的定義、性質和運算，也在其他題目中發現微積分的解法，很可惜下學期的微積分（下）選修課程沒開成，但我還是會努力把微積分的其他部分學會，更深入數學與微積分的世界。

我的學習檔案與完整微積分上課筆記：https://felicitytomato.github.io/MLP/

台北市私立復興實驗高級中學一〇九年度第一學期 多元選修 微積分(上) 期末考

一、填充題 (每格 4 分，共 80 分)

1. 求下列極限：(如極限存在，請寫出極限值；如極限不存在，請寫「不存在」。)

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2(x+1)}{x+1}=1$

(2) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\dfrac{1}{6}$

(3) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x+2}-\dfrac{x^2+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-1)(x-1)-(x^2+1)(x+2)}{(x+2)(x-1)}$

$\dfrac{(x^2-1)(x-1)-(x^2+1)(x+2)}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x^3}-x^2-x+1-\cancel{x^3}-2x^2-x-2}{x^2+x-2}=\dfrac{-3x^2-2x-1}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{-(3x-1)(x+1)}{(x+2)(x-1)}=-3$

$\dfrac{\cancel{x^3}-x^2-x+1-\cancel{x^3}-2x^2-x-2}{x^2+x+2}=-3$

$3x^2+2x-1$

2. 一個函數的曲線型態大致分為 4 種：

(A)遞增凹向上； (B)遞減凹向上； (C)遞增凹向下； (D)遞減凹向下。

對於函數 $f(x)=x^3+2x^2-x-2$，請判別在下列各指定處，函數圖形是哪一種型態（請填(A)、(B)、(C)、(D)即可）：

$f'(x)=3x^2+4x-1=0$

$x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16+12}}{6}=\dfrac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$

(1) $f(x)$ 在 $x=-2$ 處的圖形是＿＿C＿＿型態。

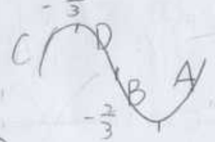
(2) $f(x)$ 在 $x=-1$ 處的圖形是＿＿D＿＿型態。

(3) $f(x)$ 在 $x=0$ 處的圖形是＿＿B＿＿型態。

(4) $f(x)$ 在 $x=1$ 處的圖形是＿＿A＿＿型態。

$f''(x)=6x+4$

$x=-\dfrac{2}{3}$



3. 試求下列函數的導函數：

(1) 若 $f(x)=(3x+5)^{20}$，求 $f'(x)$ $f'(x)=20(3x+5)^{19}\cdot 3=60(3x+5)^{19}$

(2) 若 $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$，求 $f'(x)$ $f(x)=(x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}$ $f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+1)$

(3) 若 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$，求 $f'(x)=\dfrac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2}-\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2+1}$

$3y+3xy'=8x^3+2yy'$ $y'=\dfrac{8x^3-3y}{3x-2y}$ $=\dfrac{2}{-1}$

$y^2=y\cdot y=y\cdot y'+y'\cdot y=2yy'$

4. 已知點 $P(1,-2)$ 在曲線 $y=x^3-2x^2+3x-4$ 上，求過 P 點的切線方程式

$y'=3x^2-4x+3$

$m=3-4+3=2$

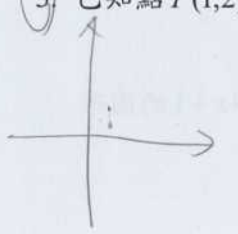
$y+2=2(x-1)$

$y-2=-2(x-1)$

$3x\cdot y=3y+3xy'$

5. 已知點 $P(1,2)$ 在曲線 $2x^4+y^2=3xy$ 上，求過 P 點的切線方程式

$3y+3xy'=8x^3+2yy'$



$3yy'=8x^3+2yy'$ $32+y^2=6y$

$yy'=8x^3$

$y'=8\dfrac{x^3}{y}\Big|_{(1,2)}=\dfrac{8}{2}=4$

$y-2=-2(x-1)$

$2x^4+1=3x$

$x=1$

$y'(3x-2y)=8x^3-3y$

$y'=\dfrac{8x^3-3y}{3x-2y}\Big|_{2}$

$=\dfrac{8-6}{3-4}=-2$

6. 若 $f(x)=x^3+ax^2+bx+5$ 在 $x=1$ 時有相對極小值 3，求 $a-b$

$f'(x)=3x^2+2ax+b$ $\quad$ $f(1)=3=1+a+b+5$

$0=f'(1)=3+2a+b$ $\quad$ $a+b=-3$ $\quad$ $\cancel{a=(-b)}$

$2a+b=-3$ $\quad$ $a=0$, $b=-3$ $\quad$ $0-(-3)=3$ #

7. 若一質點在直線上運動，其位置函數為 $s(t)$，若速度函數為 $v=4t-3$ 且 $s(0)=2$，求 $s(5)$

$s'(t)=4t-3$ $\quad$ $s(5)=2\times25-15+2$

$s(t)=2t^2-3t+C$ $\quad$ $=50-15+2$

$s(0)=2=C$ $\quad$ $=37$

8. 試求下列不定積分：

(1) $\int\sqrt{x}dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$

(2) $\int\frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=-x^{-1}+C$

(3) $\int(3x+1)^5dx=\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}(3x+1)^6+C=\frac{1}{18}(3x+1)^6+C$

$1-2021=$

9. 已知 $f(x)=x^{\frac{1}{2021}}$，求：

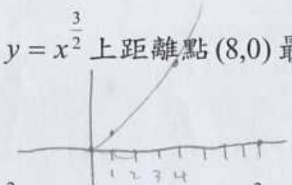
(1) $f'(x)=\frac{1}{2021}x^{\frac{-2020}{2021}}$

(2) 不定積分 $\int f(x)dx=\frac{2021}{2022}x^{\frac{2022}{2021}}+C$

(3) 定積分 $\int_0^1 f(x)dx=\frac{2021}{2022}-0=\frac{2021}{2022}$

二、計算題(共 60 分)

1. (10%) 求曲線 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 上距離點 (8,0) 最近的點坐標



$(2,\ 1)$ $\quad$ $(2,\ 2\sqrt{2})$

2. (10%) 求 $y=x^2-x+1$ 與 $y=-x^2+5x+1$ 的圖形所圍出的區域面積

9

3.(10%) 求 $x=y^4$ 與 $x=y^3$ 的圖形所圍出的區域面積

$\frac{1}{20}$

4.(10%) 求不定積分 $\int x^2(x^3+1)^7dx$

$\frac{1}{24}(x^3+1)^8+C$

5.(20%) 求通過點 (2,6) 且與 $y=-x^2+4x+1$ 相切的直線方程式，並求切線與 $y=-x^2+4x+1$ 的圖形所圍出的區域面積

$-9+12+1=4$

$8y$ $\quad$ $y-6=\pm2(x-2)$ $\quad$ $\frac{2}{3}$

班級：十信 座號：16 姓名：劉蕎熙 得分：140

一、填充題(每格 4 分)

1(1)	1(2)	1(3)	~~2(1)~~
1	$\frac{1}{6}$	-3	C
2(2)	2(3)	2(4)	3(1)
D	B	A	$60(3x+5)^{19}$
3(2)	3(3)	4	5
$\frac{1}{2}(x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+1)$	$\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$	$y+2=2(x-1)$	$y-2=-2(x-1)$
6	7	8(1)	8(2)
3	37	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$	$-x^{-1}+C$
8(3)	9(1)	9(2)	9(3)
$\frac{1}{18}(3x+1)^6+C$	$\frac{1}{2021}x^{\frac{-2010}{2021}}$	$\frac{2021}{2022}x^{\frac{2022}{2021}}+C$	$\frac{2021}{2022}$

+80

二、計算題 (每題 10 分，請自行標註題號，寫下完整計算過程)

2.

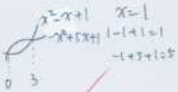
$x^2-x+1=-x^2+5x+1$

$2x^2-6x=0$

$x(2x-6)=0$

$x=0$ or 3

+10



$x=1$

$1-1+1=1$

$-1+5+1=5$

$\int_0^3[(-x^2+5x+1)-(x^2-x+1)]\,dx$

$=\int_0^3(-2x^2+6x)\,dx$

$=-\frac{2}{3}x^3+3x^2\Big|_0^3$

$=-18+27=9$ ※

3.

$x=y^4 \Rightarrow y=x^4$

$x=y^3 \Rightarrow y=x^3$

$x^4=x^3$

$x=0$ or 1

$(\frac{1}{2})^4<(\frac{1}{2})^3$

$\int_0^1(x^3-x^4)\,dx$

$=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$ ※

+10

4.

$x^3+1=u$

$\frac{du}{dx}=3x^2$

$du=3x^2\cdot dx$

$\int u^7\cdot x^2\,dx$

$=\int u^7\cdot\frac{du}{3}$

$=\frac{1}{24}u^8+C$

$=\frac{1}{24}(x^3+1)^8+C$ ※

+10

5. $y'=-2x+4=0$

$x=2$

$b=-a^2+4a+1$

$-2a+4=\frac{b-6}{a-2}$

$(-2a+4)(a-2)=b-6$

$-2a^2+8a-8=b-6$

$b=-2a^2+8a-2$

$-a^2+4a+1=-2a^2+8a-2$

$a^2-4a+3=0$

$a=3$ or 1

$b=4$ or 4

$\begin{cases} y-6=-2(x-2) \\ y=-2x+10 \\ y-6=2(x-2) \\ y=2x+2 \end{cases}$ ※

$\int_2^3[(-2x+10)-(-x^2+4x+1)]\,dx$

$+\int_1^2[(2x+2)-(-x^2+4x+1)]\,dx$

$=\int_2^3(x^2-6x+9)\,dx+\int_1^2(x^2-2x+1)\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\Big|_2^3+\frac{1}{3}x^3-x^2+x\Big|_1^2$

$=(9-27+27)-(\frac{8}{3}-12+18)+(\frac{8}{3}-4+2)-(\frac{1}{3}-1+1)$

$=3-\frac{8}{3}+\frac{7}{3}-2$

$=\frac{2}{3}$ ※

+20

1. $(x, x^{\frac{3}{2}})$

$\min \sqrt{(x-8)^2+(x^{\frac{3}{2}}-0)^2}$

$=\sqrt{x^2-16x+64+x^3}$ min

$f(x)=x^3+x^2-16x+64$

$f'(x)=3x^2+2x-16$

$x=2$ or $-\frac{8}{3}$

$-\frac{8}{3}$ 2

$f(2)=8+4-32+64$

$=44$

$(2,\sqrt{2^3})$

$=(2,2\sqrt{2})$ ※

+10

微積分

Calculus

授課教師：

李俊廷 [redacted]

成績評量方式

期中考	25%
期末考	25%
作業	30%
課堂參與	20%

作業繳交方式

寫在 A4 白紙上，並在開頭寫上班級、座號、姓名。
不需抄題目，只要標明題號即可。

如果不只一張白紙（通常會超過一張，請不要硬擠在一張紙上，很難閱讀），

請用釘書機釘好（釘在左上角）。下週上課時繳交（上課一開始就收）。

可用單面回收紙。

注意事項：

1. 遲交的不收。
2. 用非 A4 大小紙張的不收。
3. 寫在講義上的不收。
4. 沒寫班級、座號、姓名的不收。
5. 超過一張而沒用釘書機釘好的不收。
6. 只有答案，沒有推論過程的不收。

第二章　函數的極限

對一個函數 $f:R\to R$，若說當 $x\to a$（x 趨近於 a）時，$f(x)$ 的極限為 L，

則記為 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$。

大一微積分定義：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$。

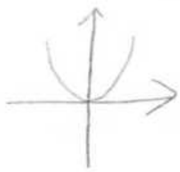
白話文：當 x 很靠近 a 時，$f(x)$ 就會很靠近 L；

　　　　而且要多靠近就可以多靠近，只要 x 夠靠近 a。

例題 1：(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2$ 之值為何？ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ 之值為何？

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$　　　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

$f(x)=x^2$



$\frac{1}{100}=0.01$

$\frac{1}{1000}=0.001$

$\frac{1}{10000}=0.00001$

例題 2：　已知 $y=f(x)$ 的函數圖形如右，

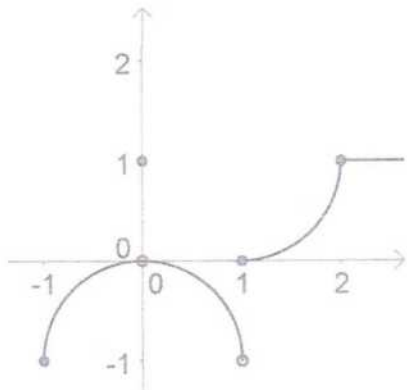
則 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$、$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$、$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 分別為何？

$f(0)=1$　　$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

$f(1)=0$　　$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$ 不存在

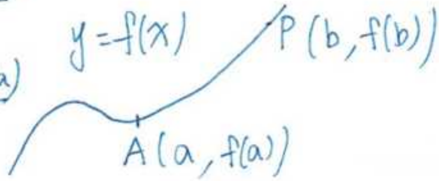
$f(2)=1$　　$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$

$f(-1)=-1$　　$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-1$



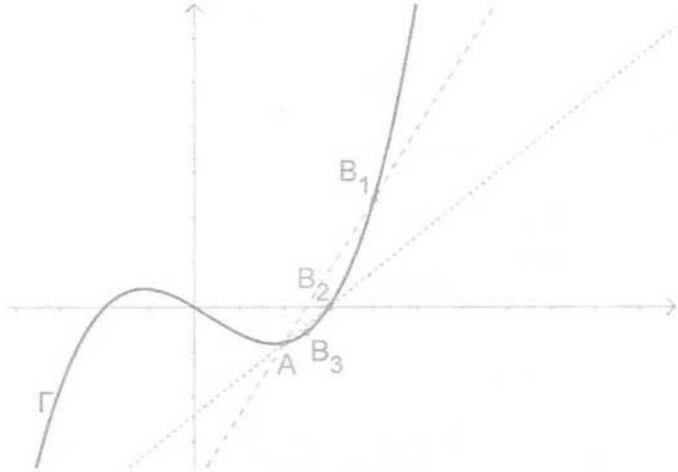
割線 $m_{AP}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

切線 $m=\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



第三章　切線與微分

切線的斜率



曲線$\Gamma: y=f(x)$上有相異兩點 $A(a,f(a))$、$B(b,f(b))$，

則割線$\overline{AB}$的斜率$m=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

而當$B\to A$時，利用極限的計算即可求出過A點的切線斜率。

於是我們可以得出結論：

切線斜率$m=\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，或是$m=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$。

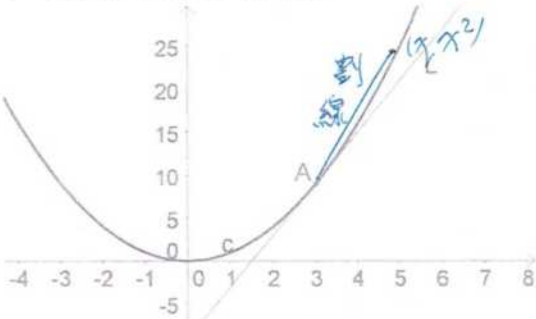
例題 1：　已知$A=(3,9)$在曲線$\Gamma: y=x^2$上，則過A的Γ切線為何？

$$m=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}$$

$$=6$$

$y-9=6(x-3)$ #



練習 2：已知$A(9,3)$在曲線$\Gamma: y=\sqrt{x}$上，則過A的Γ切線為何？

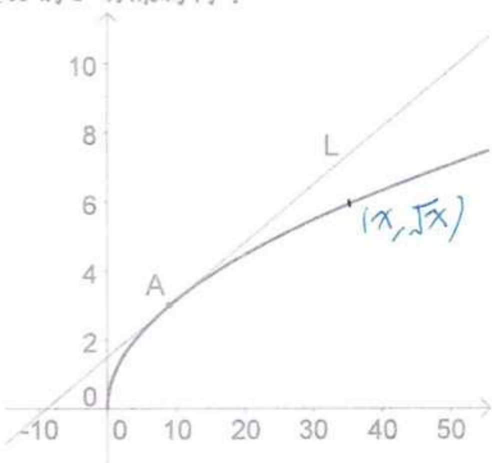
$$m=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{\cancel{\sqrt{x}-3}}{(\sqrt{x}+3)\cancel{(\sqrt{x}-3)}}$$

$$=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{1}{6}$$

$y-3=\frac{1}{6}(x-9)$



第四章　積分

曲線下的面積

已知 $y=f(x)$ 的圖形是一條曲線。在很多時候，我們會想要求「曲線下的面積」。

所謂的「曲線下的面積」，是由 $y=f(x)$、x 軸、y 軸、以及某條鉛直線所夾出的區域面積。

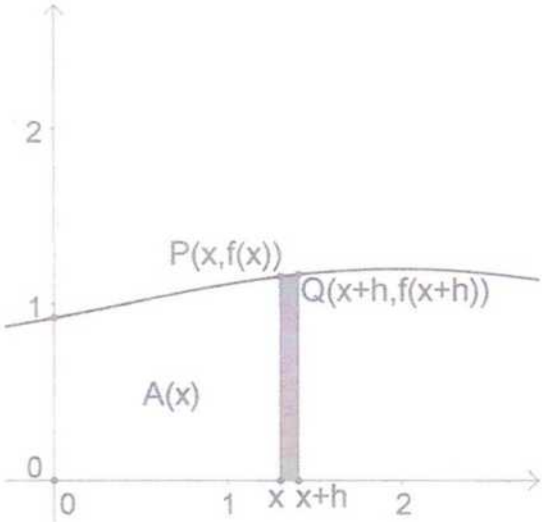
當 $y=f(x)$ 為固定函數時，上述的面積就完全由鉛直線的位置決定，

當鉛直線的位置為 x 時，我們就假設這個面積為 $A(x)$。

定理 1：　（微積分基本定理；*The Fundamental Theorem of Calculus*）

已知 $A(x)$ 為函數 $y=f(x)$ 曲線下的面積函數，若 $A(x)$ 可微分，則

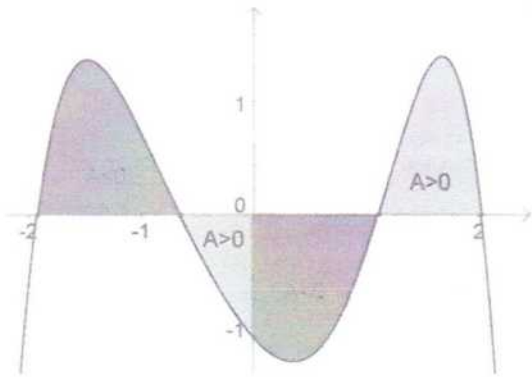
$$\frac{dA}{dx}=f(x)。$$



說明：

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=f(x)$$

$$A(x)\to f(x)\to f'(x)$$



【註】因為我們此處面積函數 $A(x)$ 的定義是由 x 軸、y 軸起算，所以第一、三象限的面積定義為正；第二、四象限的面積則定義為負；如左圖所示。

定理 2：若 $A'(x)=B'(x)$，則函數 A 與 B 只相差一個常數 C，亦即

$A(x)=B(x)+C$。

說明：令 $f(x)=A(x)-B(x)$

$f'(x)=A'(x)-B'(x)$

$=0$

$\Rightarrow f(x)=C$

$A(x)-B(x)=C$

$A(x)=B(x)+C$