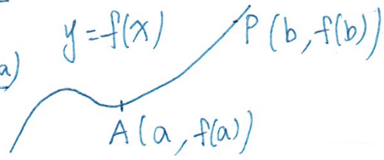
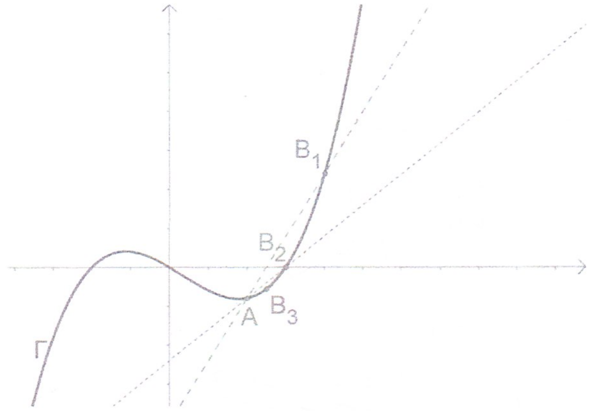
割線 $m_{AP}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

切線 $m=\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



第三章　切線與微分

切線的斜率



曲線$\Gamma: y=f(x)$上有相異兩點
$A(a,f(a))$、$B(b,f(b))$，
則割線$\overline{AB}$的斜率$m=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

而當$B\to A$時，利用極限的計算
即可求出過A點的切線斜率。

於是我們可以得出結論：

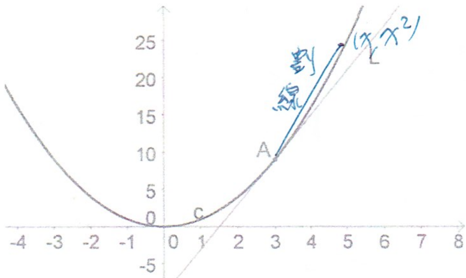
切線斜率$m=\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，或是$m=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$。

例題1：　已知$A=(3,9)$在曲線$\Gamma: y=x^2$上，則過A的Γ切線為何？

$m=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+3)\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}$

$=6$



$y-9=6(x-3)$ #

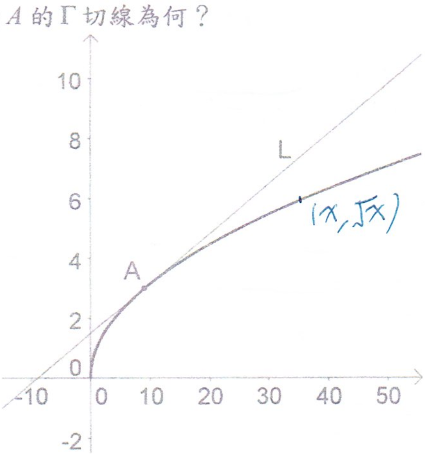
練習2：已知$A(9,3)$在曲線$\Gamma: y=\sqrt{x}$上，則過A的Γ切線為何？

$m=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

$=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\cancel{\sqrt{x}-3}}{(\sqrt{x}+3)\cancel{(\sqrt{x}-3)}}$

$=\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$

$=\dfrac{1}{6}$



$y-3=\dfrac{1}{6}(x-9)$

微分的定義

對於函數 $y=f(x)$ 圖形上的一點 $A(a,f(a))$ 而言，若 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在，則稱函數 f 在 $x=a$ 處「可微分」(*differentiable*)，且稱此極限值為 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 處的微分值（或稱「導數」，*derivative*），記為 $f'(a)$。
若極限不存在，則稱函數 f 在 $x=a$ 處不可微分。

例題 3：請判定下列函數在指定處是否可微分；如果可微，那麼微分值為何？。

(1) $f(x)=3$ 在 $x=2$ 處。　(2) $f(x)=x^3$ 在 $x=2$ 處。　(3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=-1$ 處。

(4) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ 在 $x=3$ 處。　(5) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ 在 $x=1$ 處。

(6) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $x=4$ 處。　(7) $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ 在 $x=-1$ 處。

(8) $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 處。　(9) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, 當x\ge 0時\\ \sqrt{-x}, 當x\le 0時\end{cases}$ 在 $x=0$ 處。

(2) $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(2+h)^3-8}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3+6h^2+12h+\cancel{8-8}}{h}=\lim\limits_{h\to 0} h^2+6h+12=12$

(4) $f'(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{9-(3+h)^2}-\sqrt{9-9}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{-6h-h^2}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}-\sqrt{\dfrac{-6h-h^2}{(-h)^2}}=\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{\dfrac{-6h-h^2}{h^2}}$

$=\lim\limits_{h\to}-\sqrt{\dfrac{-6-h}{h}}=\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{\dfrac{-h-6}{h}}$

$=-\infty$ 不存在

(6) $f'(4)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{4+h}}-\frac{1}{\sqrt{4}}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{2-\sqrt{4+h}}{2\sqrt{4+h}}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2-\sqrt{4+h}}{2h\sqrt{4+h}}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{4-(4+h)}{2h\sqrt{4+h}(2+\sqrt{4+h})}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{2\sqrt{4+h}(2+\sqrt{4+h})}$

$=-\dfrac{1}{16}$

導函數的定義

如果函數 f 在定義域 D 內處處可微分，我們就稱這個函數是可微分的。
對於一個可微分函數 f，如果有另一個函數 g 滿足：$\forall a\in D$，均有 $g(a)=f'(a)$
則我們稱 $g(x)$ 為 f 的導函數，記為 $g(x)=f'(x)$，或 $g(x)=\dfrac{d}{dx}f(x)=\dfrac{df}{dx}$。

$$f(0)' = \lim_{h\to 0} \frac{|h|-|0|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

(1) $$f(2)' = \lim_{h\to 0} \frac{3-3}{h} = 0$$

(3) $$f(-1)' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{-1+h} - \frac{1}{-1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(h-1)}$$

$$= -1$$

(4) $$f(-1)' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h-1-2}{h-1+1} - \frac{-1-2}{-1+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h-3}{h}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h-3}{h^2}$$

$= \infty$ 不存在

(9) $$f(0)' = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h}+0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\sqrt{h}}$$

$$= \infty$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{-h}+0}{h}$$

$$= -\infty$$

不存在

(5) $$f(1)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9-(1+h)^2} - \sqrt{9-1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{-h^2-2h+8} - \sqrt{8}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h^2-2h\cancel{+8-8}}{h\left(\sqrt{-h^2-2h+8}+\sqrt{8}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2-h}{\sqrt{-h^2-2h+8}+\sqrt{8}}$$

$= \infty$ 不存在

例題 4： 請證明 $f(x)=x^2$ 在 R 上處處可微，並求出 $f'(x)$。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0} 2x+h$$
$$=2x$$

練習 5： 請證明 $f(x)=x^4$ 在 R 上處處可微，並求出 $f'(x)$。

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^4}+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-\cancel{x^4}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0} 4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3$$
$$=4x^3$$

定義域 $x\in R$

$x^{\frac{1}{2}}$

練習 6： 請證明 $f(x)=\sqrt{x}$ 在正實數集合 R^+ 上處處可微，並求出 $f'(x)$。

定義域 $x\geq 0$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x}+h-\cancel{x}}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

定義域 $x>0$

微分四則運算（加、減、係數積）

已知 f、g 為兩個可微分函數，且 c 為常數，則

①$(f+g)'=f'+g'$；②$(f-g)'=f'-g'$；③$(c\cdot f)'=c\cdot f'$。

例題 7： 已知 $A(1,-2)$ 在曲線 $\Gamma: y=3x^4-5x^2$ 上，則過 A 的 Γ 切線為何？

$$y'=12x^3-10x$$
$$y'(1)=12-10=2$$
$$y+2=2(x-1)\ \#$$

$y=x^r$的微分

定理 8： 已知$n\in N$且$f(x)=x^n$，則$f'(x)=nx^{n-1}$。

證明：

$$f(x)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^n+nx^{n-1}h+h^2(k(x))-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{nhx^{n-1}+h^2(k(x))}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}nx^{n-1}+h(k(x))$$

$$=nx^{n-1}\ \#$$

定理 9： 已知$r\in R$且$f(x)=x^r$（定義域為正實數集合R^+），則$f'(x)=rx^{r-1}$。

證明：略。

練習 10：寫出下列函數的導函數。

（1）$f(x)=x^{2011}$。　（2）$f(x)=3$。　（3）$f(x)=\frac{1}{x^2}$。 x^{-2}

（4）$f(x)=\sqrt[3]{x}$。 $\Rightarrow x^{\frac{1}{3}}$　（5）$f(x)=\frac{2x-4}{\sqrt{x}}$。 $\frac{2x}{\sqrt{x}}-\frac{4}{\sqrt{x}}=2x^{\frac{1}{2}}-4\cdot x^{-\frac{1}{2}}$

(1) $f'(x)=2011x^{2010}$

(5) $f'(x)=x^{-\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{3}{2}}$

(2) $f'(x)=0$

(3) $f'(x)=-2x^{-3}$

(4) $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

作業 11：已知$A(1,-2)$在曲線$\Gamma: y=x^3-3x^2$上，則過A的Γ切線為何？

作業 12：已知$n\in \mathrm{N}$且$f(x)=(x+1)^n$，請證明$f'(x)=n(x+1)^{n-1}$。(提示：利用二項式定理)

作業 13：請證明$f(x)=|x^3|$在R上處處可微，並求出$f'(x)$。

作業 14：已知$n\in N$且$f(x)=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$（定義域為正實數集合$R^+$），請證明$f'(x)=-nx^{-n-1}$。

微分四則運算（乘、除）

定理 15： 已知f、g為兩個可微分函數，且c為常數，則（需$g\neq 0$）

① $(f\times g)'=f'\times g+f\times g'$；

② $(\frac{1}{g})'=\frac{-g'}{g^2}$（需$g\neq 0$）；　　③ $(\frac{f}{g})'=\frac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$（需$g\neq 0$）。

證明：

① $(f\times g)'=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times g(x+h)+f(x)\times\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'\times g+f\times g'$

② $(\frac{1}{g})'=\lim\limits_{h\to\infty}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to\infty}\frac{g(x)-g(x+h)}{h\cdot g(x+h)g(x)}=\lim\limits_{h\to\infty}-\frac{1}{g(x)g(x+h)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{-g'}{g^2}$

①②合併即得③。

【註 1】由①可遞推出

$(f_1\times f_2\times\cdots\cdots\times f_n)'=$ $(f_1'\cdot f_2\cdot f_3\cdots f_n)+(f_1f_2'f_3f_4\cdots f_n)+\cdots+(f_1f_2\cdots f_n')$ 。

【註 2】承上，令$f_1=f_2=\cdots\cdots=f_n=f$，可得

$(f^n)'=$ $nf'f^{n-1}$ 。

例題 16： 已知$f(x)=(x^2+1)(x^2-3)$，則$f'(x)$為何？

$f'(x)=2x(x^2-3)+(x^2+1)2x$

$=2x(2x^2-2)$

例題 17： 已知$f(x)=(x^2+1)^{10}$，則$f'(x)$為何？

$f'(x)=10\times 2x\cdot(x^2+1)^9$

$=20x(x^2+1)^9$

例題 18： 已知 $f(x)=\dfrac{2x+5}{3x-2}$，則 $f'(x)$ 為何？

$$f'(x)=\frac{2(3x-2)-(2x+5)3}{(3x-2)^2}=\frac{-19}{(3x-2)^2}$$

微分 < 0，遞減函數

練習 19： 試求下列各函數的導函數：

（1） $f_1(x)=(x+\dfrac{1}{x})^8$；　（2） $f_2(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$；　（3） $f_3(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$。

$$f_1'(x)=8(x+\tfrac{1}{x})'(x+\tfrac{1}{x})^7$$
$$=8(1-x^{-2})(x+\tfrac{1}{x})^7$$

$$2x^3+2x^2-2x-2 \qquad -x^3-x^2+2x-1$$
$$f_2'(x)=\frac{2x(x^2+x-2)-(2x+1)(x^2-1)}{(x^2+x-2)^2}$$
$$=\frac{x^3+x^2+4x-3}{(x^2+x-2)^2}$$

$$f_3'(x)=\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+1)-(x^{\frac{1}{2}}-1)(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})}{(\sqrt{x}+1)^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x}+1)^2}$$
$$=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$f_2'(x)=\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{(x+2)\cancel{(x-1)}}$$
$$=\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{1}{(x+2)^2}$$

例題 20：若多項式方程式 $f(x)=0$ 有三重根 $x=a$，請證明

$f''(a)=f'(a)=f(a)=0$。

（f'' 代表 f 連做 2 次微分，類似地有 $f''',f^{(4)},f^{(5)},\ldots\ldots$）

$$f(x)=(x-a)^3\cdot g(x)$$
$$f'(x)=3(x-a)^2\cdot g(x)+(x-a)^3\cdot g'(x)$$
$$f''(x)=6(x-a)\cdot g(x)+3(x-a)^2\cdot g'(x)+3(x-a)^2\cdot g'(x)+(x-a)^3\cdot g''(x)$$
$$f(a)=f'(a)=f''(a)=0$$

微分的意義

$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 意指：

當 x 有小小的變化 h 時，「f 的變化」與「x 的變化」的比值。

ex:

(1) $f(x)=\sqrt[4]{(2x^5-3x^2+7)^3}$

$f(x)=(2x^5-3x^2+7)^{\frac{3}{4}}$

$=\frac{3}{4}(2x^5-3x^2+7)^{-\frac{1}{4}}\cdot(10x^4-6x)$

例題 24：若 $f(x)=\sqrt{x^2+5x+3}$，請求出 $f'(x)$。

$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2+5x+3)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+5)$

(2) $f(x)=\sqrt[3]{(3x^2+4)^3(2x+1)^2}$

$f(x)=(3x^2+4)(2x+1)^{\frac{2}{3}}$

$=6x(2x+1)^{\frac{2}{3}}+(3x^2+4)\cdot\frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2$

練習 25：若 $f(x)=(x^2+1)^{\frac{5}{2}}$，請求出 $f'(x)$。

$f'(x)=\frac{5}{2}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\cdot 2x$

例題 26：已知 $f=\sqrt{u}$、$u=v+\dfrac{1}{v}$、$v=x^4+1$，請求出 $f'(x)$。

$f'(x)=\frac{df}{dx}=\frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$

$=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-v^{-2})\cdot 4x^3$

隱函數微分

若曲線 Γ 方程式為 $f(x,y)=c$（c 為常數），

則可利用 $\dfrac{d}{dx}f(x,y)=0$ 求出過 Γ 上一點的切線斜率。

這樣的例子在現實世界中處處可見，例如

① 直線運動中，位置 s 可以表為時間 t 的函數 $s(t)$，
則 $s'(t)$ 表示速度 $v(t)$。（位置的瞬時變化量）

② 直線運動中，速度 v 可以表為時間 t 的函數 $v(t)$，則 $v'(t)$ 表示加速度 $a(t)$。

③ 電路中，電量 q 可以表為時間 t 的函數 $q(t)$，則 $q'(t)$ 表示電流 $I(t)$。

④ 經濟學中，利潤 π 可以表示為產量 Q 的函數，
則可推出最大利潤發生在 $\pi'(Q)=0$ 時。

於是 $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 亦可寫為 $\dfrac{df}{dx}$，意即 $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ 的極限。

定理 21： 已知 f 為可微分函數，若 $f(x)$ 在 $a<x<b$ 時遞增，則 $f'(x)\ge 0$；
若 $f(x)$ 在 $a<x<b$ 時遞減，則 $f'(x)\le 0$。

說明：$f(x)$ $a<x<b$ 遞增 $\Rightarrow f'(x)\ge 0$

if $(a<c<b)$

$f'(c)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}=\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$\lim\limits_{x\to c^+}\dfrac{f(x)-f(c)\ \to +}{x-c\ \to +}\ge 0$

$\lim\limits_{x\to c^-}\dfrac{f(x)-f(c)\ \to -}{x-c\ \to -}\ge 0$

例題 22： 已知 $-4\le x\le 4$，請求出 $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$ 的最大值與最小值。

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$=3(x^2-2x-3)$

$=3(x-3)(x+1)$

$f(x)$: ↗ ↘ ↗

$f'(x)$: + − +

−4 −1 3 4

Max $f(-1)=-1-3+9+4=9$

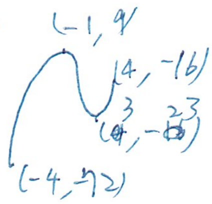
$f(4)=64-48-36+4=-16$

Max $=9$ #

Min $f(3)$ $27-27-27+4=-23$

$f(-4)$ $-64-48+36+4=-72$

Min $=-72$



連鎖律（*Chain Rule*）

定理 23： 若 f 可以表示成 u 的函數，而 u 可以表示成 x 的函數，
則顯然 f 也可以表示成 x 的函數。

若前提中的兩函數都是可微分的，則 $f'(x)=\dfrac{df}{dx}=\dfrac{df}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$。

例題 27： 已知圓 C 方程式為 $x^2+y^2=25$，且點 $P(3,4)$ 在圓 C 上。
若 L 為過 P 點的圓 C 切線，則 L 的方程式為何？

$2x+2y\cdot y'=0$

$(y-4)=-\frac{3}{4}(x-3)$

$y'=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y}\Big|_{(3,4)}=-\frac{3}{4}$

練習 28： 已知橢圓 C 方程式為 $4x^2+y^2=4$，且點 $P(\frac{3}{5},-\frac{8}{5})$ 在橢圓 C 上。
若 L 為過 P 點的橢圓 C 切線，則 L 的方程式為何？

$8x+2y\cdot y'=0$

$y'=-\frac{4x}{y}\Big|_{(\frac{3}{5},-\frac{8}{5})}=\frac{4\times 3}{8}=\frac{3}{2}$

$y+\frac{8}{5}=\frac{3}{2}(x-\frac{3}{5})$

作業 29： 已知 $A(1,2)$ 在曲線 $\Gamma: y=\sqrt{x^3+3x}$ 上，則過 A 的 Γ 切線為何？

作業 30： 已知 $-4\le x\le 4$，
請求出 $f(x)=3x^4+4x^3-30x^2+36x+7$ 的最大值與最小值。

作業 31： 已知曲線 C 方程式為 $3x^5-2xy^2+y^3=33$，且點 $P(2,-3)$ 在曲線 C 上。若 L 為過 P 點的曲線 C 切線，則 L 的方程式為何？

作業 32： 已知 $g(x)$ 為 $f(x)$ 的反函數，意即 $g(f(x))=x$。若 f 與 g 均是可微分函數，請證明著名的微積分繞口令：「一個函數的反函數的導函數等於原函數的導函數的倒數。」
（即：若 $f(a)=b$，則 $g(b)=a$，此時必有 $g'(b)=\frac{1}{f'(a)}$。）

函數的極值判別

如果 $y=f(x)$ 是$\boxed{\text{可微分函數}}$，而且 $f(x)$ 在 $x=a$ 處有相對極大值（local maximum）或相對極小值（local minimum），則 $f'(a)=0$。
於是對於一般函數 $y=f(x)$，我們可以知道相對極值只出現在三種地方：
(1)滿足 $f'(x)=0$ 的點；(2)不可微分點；(3)定義域端點。

例 33： 求函數 $f(x)=\left|x^2-9\right|$ 的極值，其中 $-5\le x\le 4$。

$x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3$　　① $x\le -3$ $f(x)=x^2-9$　　② $-3\le x\le 3$ $f(x)=9-x^2$　　③ $x\ge 3$ $f(x)=x^2-9$

① ② ③
-3　3

$f(x)\begin{cases} f(x)=x^2-9, & x\le -3 \text{ or } x\ge 3 \\ f(x)=9-x^2, & -3\le x\le 3 \end{cases}$　　$f'(x)=0 \Rightarrow x=0$

$f'(x)\begin{cases} f'(x)=2x, & x<-3 \text{ or } x>3 \\ f'(x)=-2x, & -3<x<3 \end{cases}$

$f'(-3), f'(3)$ 不存在

$\begin{cases} f(0)=9 \\ f(-3)=0 \ \text{min} \\ f(3)=0 \\ f(4)=7 \\ f(-5)=16 \ \text{max} \end{cases}$

函數圖形的凹向

一個函數的曲線型態大致分為 4 種：

型態	(1)遞增凹向上	(2)遞減凹向上	(3)遞增凹向下	(4)遞減凹向下
圖形				
f'	≥ 0	≤ 0	≥ 0	≤ 0
f''	≥ 0	≥ 0	≤ 0	≤ 0

想一想：

遞增遞減的現象和一階微分有關，那麼為什麼圖形的凹向和二階微分有關？

結論：

如果 $f'(a)=0$ 且 $f''(a)>0$，則 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 處 有最小值 local min 。

如果 $f'(a)=0$ 且 $f''(a)<0$，則 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 處 有最大值 local max 。

如果 $f'(a)=0$ 且 $f''(a)=0$，則 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 處 無法??判定 。