第二章　函數的極限

對一個函數 $f:R\to R$，若說當 $x\to a$（x 趨近於 a）時，$f(x)$ 的極限為 L，則記為 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$。

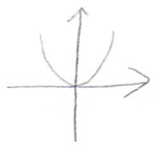
大一微積分定義：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$。

白話文：當 x 很靠近 a 時，$f(x)$ 就會很靠近 L；
　　　　而且要多靠近就可以多靠近，只要 x 夠靠近 a。

例題 1：（1）$\lim\limits_{x\to 0} x^2$ 之值為何？（2）$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{x}$ 之值為何？

(1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$　　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

$f(x)=x^2$



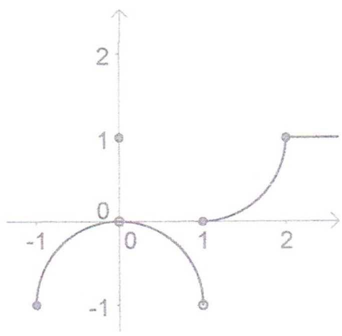
$\dfrac{1}{100}=0.01$

$\dfrac{1}{1000}=0.001$

$\dfrac{1}{10000}=0.00001$

例題 2：　已知 $y=f(x)$ 的函數圖形如右，

則 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$、$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$、$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 分別為何？



$f(0)=1$　　$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$

$f(1)=0$　　$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=$ 不存在

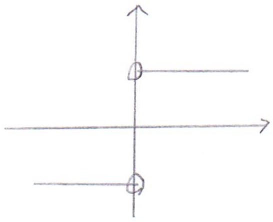
$f(2)=1$　　$\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$

$f(-1)=-1$　　$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-1$

例題 3： 說明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在。

① $x>0$ 時

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$



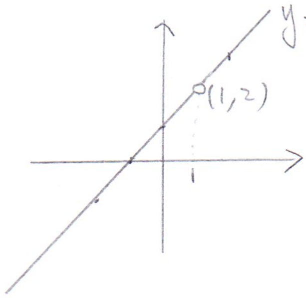
② $x<0$ 時

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

⇒ 不存在：右極限 ≠ 左極限

例題 4： $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 之值為何？

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}x+1=2 \ \#$$



$y=x+1,\ x\neq 1$

練習 5： $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^5-1}{x-1}$ 之值為何？

$$=\lim_{x\to 1}x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$=5$

函數極限的性質

定理 6： 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ 且 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=M$ ，c 為任意常數，則

① $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=L+M$ ； ② $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-g(x)]=L-M$ ；

③ $\lim\limits_{x\to a}[f(x)g(x)]=LM$ ； ④若 $M\neq 0$ ，則 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ ；

⑤若 $L>0$ ，則 $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=L^M$ 。

例題 7：（1）$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ 之值為何？（2）$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}\right)$ 之值為何？

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+1)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+x-\cancel{1}}{\cancel{x}(\sqrt{1+x}+1)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$

$=\frac{1}{2}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x+1-x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1-\cancel{\frac{1}{x^2}}}=2$ #

例題 8：（1）$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+\cancel{5}}{3x-\cancel{8}}$ 之值為何？（2）$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+5}{3x^2-8}$ 之值為何？

（3）$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+5}{\sqrt{3x^2-8}}$ 之值為何？

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{5}{x}}{3-\frac{8}{x}}$ 0

$=\frac{6}{3}$

$=2$

(2) $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}}{3-\frac{8}{x^2}}$

$=\frac{0}{3}$

$=0$

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{6+\cancel{\frac{5}{x}}}{\sqrt{\frac{3x^2-\cancel{8}}{x^2}}}$

$=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$

練習 9：$\lim_{x\to 4}\frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$ 之值為何？

$\lim_{x\to 4}\frac{x(4-x)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}$

$=\lim_{x\to 4}\frac{(4-x)x(2+\sqrt{x})}{4-x}$

$=\lim_{x\to 4}x(2+\sqrt{x})=16$ #

作業 10：（1）$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}$ 之值為何？（2）$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2}{x+1}\right)$ 之值為何？

$=\frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{\cancel{(x-3)}(x-1)}=\frac{x+1}{x-1}$

$\frac{x^2(x+1)-x^2(x-1)}{x^2-1}=\frac{2x^2}{x^2-1}$

$=\frac{2}{1-\frac{1}{x^2}}$

作業 11：（1）$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^3-8}}{\sqrt[3]{x^5}+5}$ 之值為何？（2）$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$ 之值為何？

$\frac{3}{2}$ $\times\frac{3}{5}$ $\div x^{\frac{5}{3}}$

$\frac{5}{3}$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$