微積分

Calculus

授課教師：

李俊廷 [redacted]

成績評量方式

期中考	25%
期末考	25%
作業	30%
課堂參與	20%

作業繳交方式

寫在 A4 白紙上，並在開頭寫上班級、座號、姓名。
不需抄題目，只要標明題號即可。

如果不只一張白紙（通常會超過一張，請不要硬擠在一張紙上，很難閱讀），

請用釘書機釘好（釘在左上角）。下週上課時繳交（上課一開始就收）。

可用單面回收紙。

注意事項：

1. 遲交的不收。
2. 用非 A4 大小紙張的不收。
3. 寫在講義上的不收。
4. 沒寫班級、座號、姓名的不收。
5. 超過一張而沒用釘書機釘好的不收。
6. 只有答案，沒有推論過程的不收。

Contents

第一章　解析幾何

直線方程式（點斜式）

例題 1：已知直線 L 的斜率為 2，且 L 通過點 $(-1,3)$，則 L 的直線方程式為何？

$L: y-3=2(x+1) \Rightarrow 2x-y=-5$

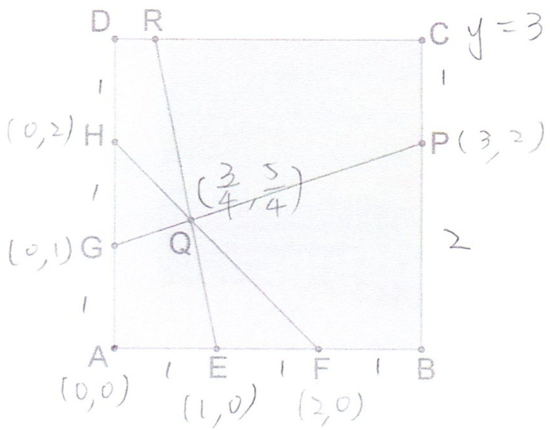
例題 2：已知直線 L 通過 $(2,8)$、$(-1,2)$ 兩點，則 L 的直線方程式為何？

$L: y-2=\frac{8-2}{2-(-1)}(x+1) \Rightarrow 2x-y=-4$

練習 3：如圖，已知 $ABCD$ 為正方形，且 $\overline{AE}=\overline{EF}=\overline{FB}=\overline{AG}=\overline{GH}=\overline{HD}$

$=\overline{CP}=1$，Q 為 $\overline{HF}$ 和 $\overline{GP}$ 的交點，連接 $\overline{EQ}$ 再與 $\overline{CD}$ 相交於點 R，

則 $\overline{DR}$ 的長度為何？



$\overline{HF}: y=-(x-2)$

$x+y=2$

$\overline{GP}: y-1=\frac{1}{3}x$

$x-3y=-3$

$\overline{EQ}: y=\frac{\frac{5}{4}}{-\frac{1}{4}}(x-1)$

$5x+y=5$

$5x+3=5$

$x=\frac{2}{5}$ ※

平面上兩點的距離

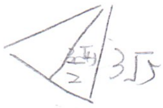
例題 4：若 $A(-1,4)$、$B(3,6)$，則 $\overline{AB}$ 的長度為何？

$\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$(-\frac{1}{2}, 2)$ $m=\frac{1}{2}$

例題 5：已知$\triangle ABC$為正三角形，且$B=(-2,5)$、$C=(1,-1)$，則A點的坐標為何？

$L=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$ $A(-\frac{1}{2}+2t, 2+t)$



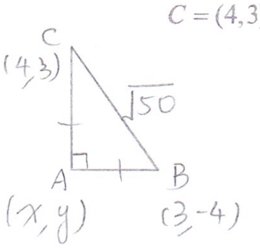
$\sqrt{(2t)^2+t^2}=\frac{3\sqrt{15}}{2}$

$t=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$A(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \frac{4+3\sqrt{3}}{2})$

$A(-\frac{3\sqrt{3}+1}{2}, -\frac{3\sqrt{3}-2}{2})$

練習 6：已知$\triangle ABC$為等腰直角三角形，且$\angle A=90°$。若$B=(3,-4)$、$C=(4,3)$，則A點的坐標為何？



$\frac{y-3}{x-4}\times\frac{y+4}{x-3}=-1$

$y^2+y-12=-x^2+7x-12$

$x^2+y^2-7x+y=0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=(x-3)^2+(y+4)^2$

$-8x-6y+25=-6x+8y+25$

$-2x=14y$

$x=-7y$

$50y^2+50y=0$

$y=0$ or -1

$x=0$ or 7

$(0,0)$

$(7,-1)$ #

斜率的性質

若L_1的斜率為m_1、L_2的斜率為m_2，則

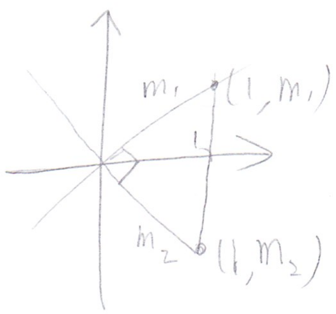
① $L_1 // L_2 \Leftrightarrow m_1=m_2$ ② $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1m_2=-1$。

例題 7：過$A(-1,2)$作$L: y=5x-2$的平行線M，則M的直線方程式為何？

$m=5$

$M: y-2=5(x+1)$ $5x-y=-7$ #

定理 8：若L_1的斜率為m_1、L_2的斜率為m_2，則$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1m_2=-1$。



$1+m_1^2+1+m_2^2=(m_1-m_2)^2$

$m_1^2+m_2^2+2=m_1^2+m_2^2-2m_1m_2$

$2=-2m_1m_2$

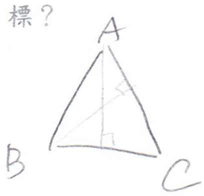
$m_1m_2=-1$

例題 9：若 $A(-1,4)$、$B(3,6)$，則 $\overline{AB}$ 的中垂線方程式為何？

$(1,5)$ $m=\frac{2}{4}$ $2x+y=7$

$y-5=-2(x-1)$

例題 10： 已知 $A(3,8)$、$B(5,2)$、$C(-1,-4)$，若令△ABC 的垂心 H，求 H 的坐標？



$y-2=-\frac{1}{3}(x-5)$

$3y-6=-x+5$

$x+3y=11$

$y-8=-(x-3)$

$x+y=11$

$2y=0$

$y=0$

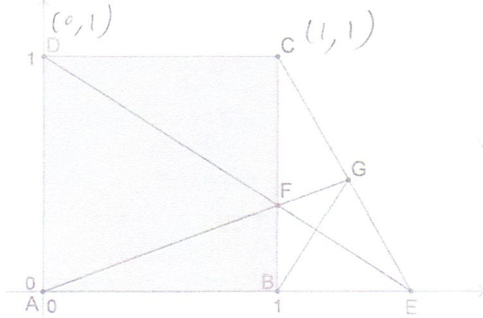
$x=11$

$H\ (11,0)$ #

例題 11： （幾何證明題）若 $ABCD$ 為正方形，在 $\overline{AB}$ 取一點 E，
連接 $\overline{DE}$ 交 $\overline{BC}$ 於 F 點。連接 $\overline{CE}$ 與 $\overline{AF}$ 交於點 G，連接 $\overline{BG}$，
試證明：$\overline{BG}\perp\overline{DE}$。

$y=(1+\frac{1}{a})x$

證明：將 $ABCD$ 置於坐標平面，如圖：
$A=(0,0)$、$B=(1,0)$、$C=(1,1)$、$D=(0,1)$。
不妨設 $E=(a,0)$，



$x=1$

則 $\overleftrightarrow{DE}$ 方程式為 $y-1=-\frac{1}{a}(x-0)$，

所以 F 點坐標為 $(1,1-\frac{1}{a})$。

又 $\overleftrightarrow{CE}$ 方程式為 $y-1=\frac{1}{a-1}(x-1)$

$y=\frac{1}{1-a}(x-a)$

$x-(1-a)y=a$

$(1-a)(1+\frac{1}{a})x-(1-a)y=0$

$1-(1+\frac{1}{a}-a-1)x=0$

$x=\frac{1}{\frac{1}{a}-a}$

$\overleftrightarrow{AF}$ 方程式為 $y=(1-\frac{1}{a})x$，

故其交點 G 的坐標為 $(\frac{a^2}{a^2-a+1},\frac{a^2-a}{a^2-a+1})$，

於是可得 $\overline{BG}$ 的斜率為 a。

又因為 $\overline{DE}$ 的斜率為 $-\frac{1}{a}$（以上空格均需以 a 表示）

所以兩者斜率相乘為 -1，故 $\overline{BG}\perp\overline{DE}$。

$(1-a)y=x-a$

$x-(1-a)y=a$

點到直線的距離公式

定理 12：若 $A(p,q)$ 且 $L: ax+by+c=0$，則點 A 到直線 L 的距離為

$$\frac{|ap+bq+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

證明：

例題 13：若 $A(4,-3)$ 且 $L: 3x-4y+1=0$，則點 A 到直線 L 的距離為何？

練習 14：若直線 L 與 $7x-y+3=0$ 平行，且距離為 $\sqrt{2}$，則 L 的方程式為何？

作業 15：已知$\triangle ABC$為等腰直角三角形，且$\angle A=90°$。若 $A=(-3,5)$、$B=(4,6)$，則 C 點的坐標為何？

作業 16：已知 $A(3,8)$、$B(5,2)$、$C(-1,-4)$，若令$\triangle ABC$的外心 K，則 K 的坐標為何？

42
×7
294

作業 17：已知 $L // L_1 // L_2$ 且 $L_1: 3x-2y+5=0$、$L_2: 3x-2y-1=0$。如果「L 與 L_1 的距離」是「L 與 L_2 的距離」的 2 倍，則 L 的方程式為何？

挑戰題：（幾何證明題）若 ABC 為三角形，作 $\overline{BC}$ 上的高，D 為垂足且在 B、C 之間。在 $\overline{AD}$ 取另一點 P，連接 $\overleftrightarrow{CP}$ 與 $\overline{AB}$ 交於點 E，連接 $\overleftrightarrow{BP}$ 與 $\overline{AC}$ 交於點 F。連接 $\overline{DE}$ 與 $\overline{DF}$，試證明：$\angle PDE=\angle PDF$。

圓的方程式

若動點 $P(x,y)$ 到一定點 $K(a,b)$ 的距離為 R，
則 $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=R^2$，此即為圓方程式，
其中圓心為 $K(a,b)$，半徑為 R。

例題 18： 圓心為 $(3,-5)$ 、半徑為 6 的圓方程式為何？

例題 19： 已知 $A(-2,1)$ 、 $B(4,-7)$。則以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓方程式為何？

點與圓的關係

圓心為 $K(a,b)$，半徑為 R 的圓 C 方程式為 $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$。
則點 $P(x,y)$ 在圓 C 內部、圓上、外部的區分，以「$\overline{PK}$ 長度」及「半徑 R」的大小作判別。

例題 20： 已知圓 C 方程式為 $(x-2)^2+(y+3)^2=50$，則點 $D(0,4)$ 、 $E(1,4)$ 、 $F(2,4)$ 與圓 C 的關係為何？

$x^2+10x+25+49x^2-196x+196=25$

$=50x^2-186x+\cancel{22}196$

$7x-14$ $=25x^2-93x+98$

直線與圓的關係

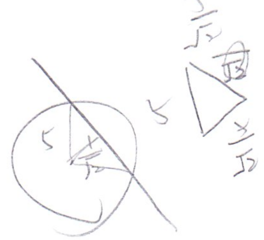
一直線 L 與圓 C：$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ 的關係可能為相割、相切、相離，其區分以「圓心 $K(a,b)$ 到直線 L 的距離」和「半徑 R」的大小作判別，且直線 L 與圓 C 相割、相切、相離時，分別有 2、1、0 個交點。

例題 21： 已知圓 C 方程式為 $(x+2)^2+(y-3)^2=50$，且直線 L：$7x+y+k=0$ 點與圓 C 相切，則 k 值為何？

$\dfrac{|-14+3+k|}{\sqrt{50}}=\sqrt{50}$

$|k-11|=50$ $k=61$ or -39

例題 22： 已知圓 C 方程式為 $(x+5)^2+(y-2)^2=25$，且直線 L 為 $7x-y+12=0$，則 L 與 C 的交點為何？



$\dfrac{|-35-2+12|}{\sqrt{50}}=\dfrac{25}{\sqrt{50}}$ $=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\dfrac{25}{\sqrt{50}}$ $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

$25-\dfrac{1}{4}$ $\sqrt{\dfrac{99}{4}}$ $=\dfrac{2\sqrt{55}}{2}$ $5<\sqrt{50}$

$y=7x+12$

圓與圓的關係

兩圓的關係可能為相割（交於 2 點）、相切（交於 1 點）、相離（沒有交點），其區分以「連心線段長度」和「兩圓半徑」的關係作判別。：

例題 23： 已知圓 C_1 為 $(x+1)^2+(y-1)^2=9$，圓 C_2 為 $x^2+(y+3)^2=64$，則兩圓關係為何？

例題 24： 已知圓 C_1：$(x-4)^2+(y+2)^2=25$ 與圓 C_2：$x^2+(y+5)^2=50$ 交於 2 點，則交點坐標為何？