第四章　積分

曲線下的面積

已知 $y=f(x)$ 的圖形是一條曲線。在很多時候，我們會想要求「曲線下的面積」。

所謂的「曲線下的面積」，是由 $y=f(x)$、x 軸、y 軸、以及某條鉛直線所夾出的區域面積。

當 $y=f(x)$ 為固定函數時，上述的面積就完全由鉛直線的位置決定，

當鉛直線的位置為 x 時，我們就假設這個面積為 $A(x)$。

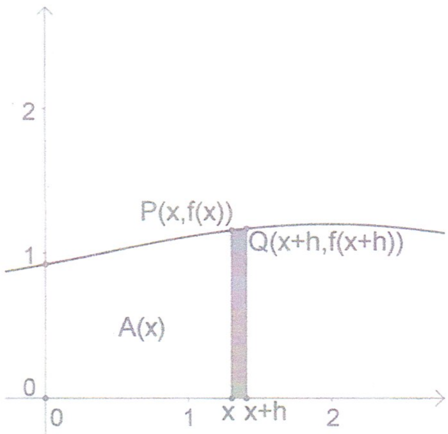
定理 1：　（微積分基本定理；*The Fundamental Theorem of Calculus*）

已知 $A(x)$ 為函數 $y=f(x)$ 曲線下的面積函數，若 $A(x)$ 可微分，則

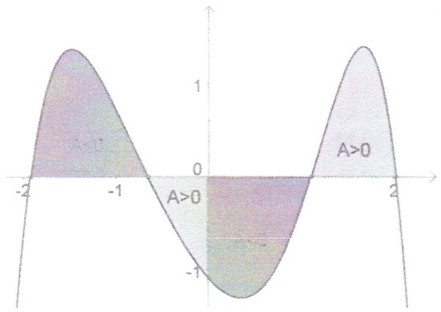
$$\frac{dA}{dx}=f(x)\text{。}$$

說明：

$$A'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=f(x)$$



$$A(x)\to f(x)\to f'(x)$$



【註】因為我們此處面積函數 $A(x)$ 的定義是由 x 軸、y 軸起算，所以第一、三象限的面積定義為正；第二、四象限的面積則定義為負；如左圖所示。

定理 2：若 $A'(x)=B'(x)$，則函數 A 與 B 只相差一個常數 C，亦即

$A(x)=B(x)+C$。

說明：令 $f(x)=A(x)-B(x)$

$f'(x)=A'(x)-B'(x)$

$=0$

$\Rightarrow f(x)=C$

$A(x)-B(x)=C$

$A(x)=B(x)+C$

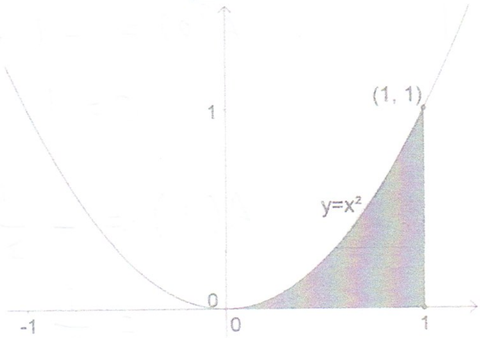
例題 3： 已知 $f(x)=x^2$，則 $y=f(x)$、x 軸、以及鉛直線 $x=1$ 所夾出的區域面積為何？

$A'(x)=f(x)=x^2$

$A(x)=\frac{1}{3}x^3+C$

$A(0)=0 \Rightarrow C=0$

$A(1)=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$ #



練習 4：已知 $f(x)=4-x^2$，則 $y=f(x)$ 與 x 軸所夾出的區域面積為何？

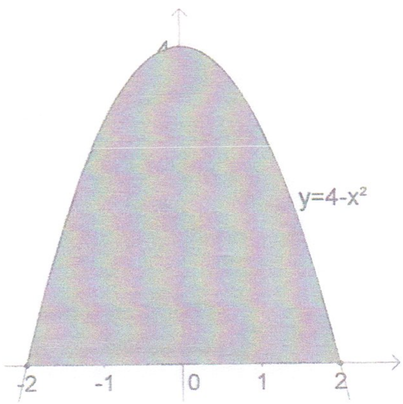
$A'(x)=4-x^2$

$A(x)=-\frac{1}{3}x^3+4x+C$

$A(0)=C=0$

$A(2)=-\frac{8}{3}+8$

$\frac{32}{3}$ #



例題 5： 已知 $f(x)=x(x-1)(x-2)$，則 $y=f(x)$ 與 x 軸所夾出的區域面積為何？

$f(1+t)=(1+t)t(t-1)$

$f(1-t)=(1-t)(-t)(-1-t)$

$=-f(1+t)$

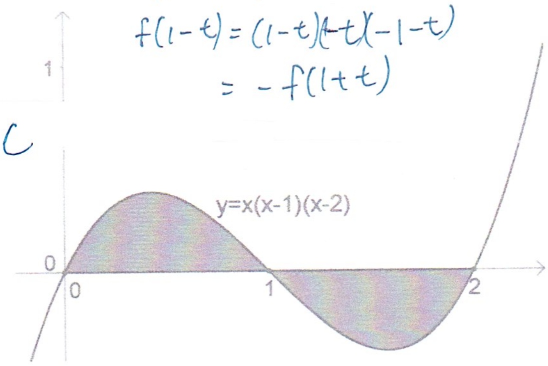
$A'(x)=x^3-3x^2+2x$

$A(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2+C$

$A(0)=0=C$

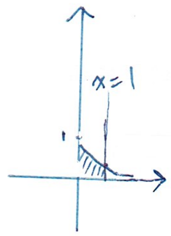
$A(1)=\frac{1}{4}-1+1=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$ #



ex

$y = \frac{1}{(x+1)^2}$. x軸, y軸, $x=1$ Ⓐ



$A(1)$

$A'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} = (x+1)^{-2}$

$A(x) = -(x+1)^{-1} \cdot 1 + C$

$A(0) = -1 + C = 0$

$C = 1$

$A(1) = -\frac{1}{2} + 1$

$= \frac{1}{2}$

積分的定義與符號

$y=f(x)$、x 軸、鉛直線 $x=a$、$x=b$ 所夾的區域面積以符號 $\int_a^b f(x)dx$ 表示。

而前述的面積函數 $A(x)$ 就是 $\int_0^x f(t)dt$。

在符號 $\int_a^b f(x)dx$ 中，dx 代表小小的寬度 Δx；$f(x)$ 代表對應的高度；$\int$ 代表 Σ

也就是把「寬度」×「高度」=「每一條細長的矩形面積」做加總的操作；

而 a 與 b 則代表計算面積的左右界限。所以 $\int f(x)dx$ 其實就是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum f(x)\Delta x$。

對於函數 $y=f(x)$，我們稱 $\int f(x)dx$ 為 $f(x)$ 的積分。

① 如果指定了積分的上下界，即 $\int_a^b f(x)dx$，則稱為定積分。

定積分的結果是一個數值。

② 如果沒有指定積分的上下界，即 $\int f(x)dx$，則稱為不定積分。

若 $F(x)$ 滿足 $F'(x)=f(x)$，我們稱 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的反導函數，

記為 $\int f(x)dx=F(x)+C$。

定理 6：若 f、g 都是可積分函數，則：

① $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$；

② $\int[f(x)-g(x)]dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$。

證明：$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_1)+f(x_2)]\Delta x+[f(x_2)+g(x_2)]\Delta x\cdots$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_1)+\cdots f(x_n)]\Delta x+[g(x_1)+\cdots+g(x_n)\Delta x$

$=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

定理 7：若 $\int f(x)dx=F(x)+C$，則 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。

證明：$\Rightarrow A(x)=F(x)+C' \quad F'(x)=f(x)$

$\int_a^b f(x)dx=\int_0^b f(x)dx-\int_0^a f(x)dx$

$=A(b)-A(a)=F(b)+C'-F(a)-C'=F(b)-F(a)$

【註】由此定理可知 $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$。

例題 8：試求下列各不定積分（1）$\int x^2dx$ （2）$\int(5-2x)dx$ （3）$\int(2x+3)^5dx$

(1) $\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3+C$

(2) $\int(5-2x)dx = -x^2+5x+C$

(3) $\int(2x+3)^5dx = \frac{1}{12}(2x+3)^6+C$

例題 9：試求下列各定積分的值（1）$\int_1^2\frac{1}{x^2}dx$（2）$\int_{-1}^2(x+1)^{99}dx$（3）$\int_9^4\sqrt{x}dx$

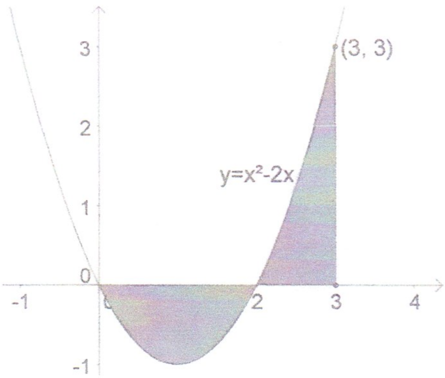
(1) $\int_1^2\frac{1}{x^2}dx = -x^{-1}\Big|_1^2 = -\frac{1}{2}-(-1)=\frac{1}{2}$

(2) $\int_{-1}^2(x+1)^{99}dx = \frac{1}{100}(x+1)^{100}\Big|_{-1}^2 = \frac{3^{100}}{100}-0=\frac{3^{100}}{100}$

(3) $\int_9^4\sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_9^4 = \frac{2}{3}(8-27)=\frac{-38}{3}$

練習 10：試求下列各圖中的區域面積：

（1）



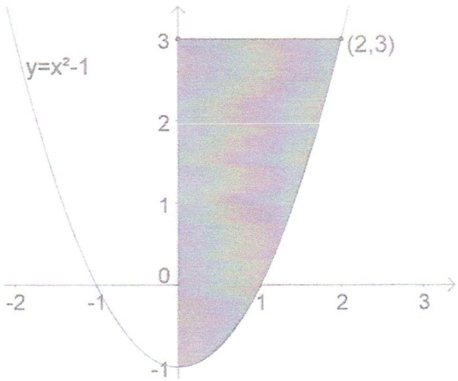
$\int_2^3 x^2-2x\,dx + \int_0^2 2x-x^2\,dx$

$= (\frac{x^3}{3}-x^2)\Big|_2^3+(-\frac{1}{3}x^3+x^2)\Big|_0^2$

$= -(\frac{8}{3}-4) - \frac{8}{3}+4$

$= 8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}$

（2）



$\int_0^2 3-(x^2-1)\,dx$

$= \int_0^2 4-x^2\,dx$

$= -\frac{1}{3}x^3+4x\Big|_0^2$

$= 8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$

變數變換法

如果 $F'(x) = f(x)$，我們也可以寫成 $\dfrac{dF}{dx} = f(x)$。

微分時，我們由連鎖律可知 $\dfrac{dF}{dx} = \dfrac{dF}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$，

則 $\int f(x)dx = \int dF = \int \dfrac{dF}{du} \cdot du = \int F'(u) \cdot du$，可以將 x 的積分轉換為 u 的積分。

例題 11：求不定積分 $\int x(x^2+1)^5\,dx$。

令 $u = x^2+1$

$\dfrac{du}{dx} = 2x$

$du = 2x \cdot dx$

$\dfrac{du}{2} = x \cdot dx$

$\int u^5 \cdot \dfrac{du}{2}$

$= \frac{1}{2}\int u^5$

$= \frac{1}{12}u^6 + C = \frac{1}{12}(x^2+1)^6 + C$

例題 12：求定積分 $\int_{-5}^{-3} x(x+4)^{19}\,dx$ 的值。

$x+4 = u$

$\dfrac{du}{dx} = 1$

$du = dx$

$\int_{-1}^{1} (u-4)u^{19}\,du$

$= \int_{-1}^{1} u^{20} - 4u^{19}\,dx$

$= \frac{1}{21}u^{21} - \frac{1}{5}u^{20}\Big|_{-1}^{1}$

$=$

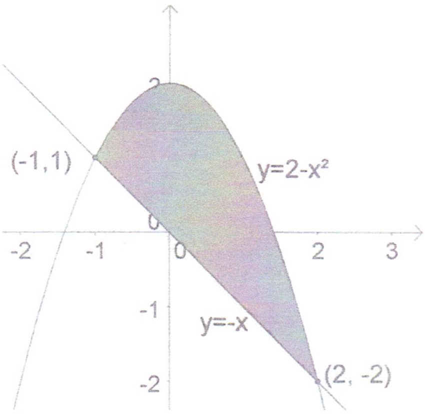
練習 13： 求下列各積分：(1) $\int \dfrac{(\sqrt{x}-2)^7}{\sqrt{x}}dx$；(2) $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \dfrac{x}{(x^2+1)^5}dx$。

作業 14： 試求下列各不定積分：（1） $\int(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})dx$ ；（2） $\int(\frac{1}{2x+1})^5 dx$ 。

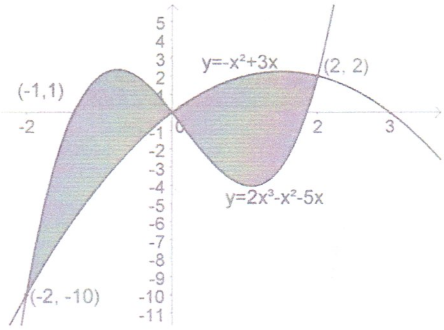
作業 15： 試求下列各定積分的值：（1） $\int_{-2}^{2}(x^3-2x+3)dx$ ；（2） $\int_{32}^{1}x^{\frac{-6}{5}}dx$ 。

作業 16： 試求下列各圖中的區域面積。

（1）



（2）



作業 17： 試求定積分 $\int_0^8 x\sqrt{x+1}\cdot dx$ 的值。（提示：令 $x=u^2-1$ 。）

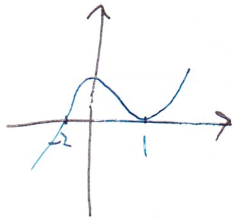
積分應用-面積

例題 18： 求 $y=x^3-3x+2$ 與 x 軸所圍的面積

$1+0-3+2 \mid 1$
$\quad 1+1-2$
$1+1-2 \mid +0$

$x^3-3x+2=0$

$\Rightarrow (x-1)^2(x+2)$



$$\int_{-2}^{1} x^3 -3x+2\,dx$$

$$= \frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2-\cancel{4}+6+\cancel{4} = 8-\frac{5}{4} = \frac{27}{4}$$

例題 19： 求 $y=x^3-3x^2+2x$ 與 $y=-x^3+4x^2-x$ 所圍之面積

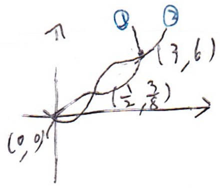
$x^3-3x^2+2x=-x^3+4x^2-x$

$2x^3-7x^2+3x=0$

$x(2x^2-7x+3)=0$

$x(2x-1)(x-3)$

$\begin{matrix} 2 & & -1 \\ 1 & & -3 \end{matrix}$



$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^3-3x^2+2x+x^3-4x^2+x$$

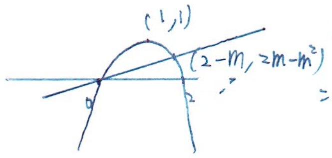
$$+\int_{\frac{1}{2}}^{3} -x^3+4x^2-x-x^3+3x^2-2x$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x^3-7x^2+3x + \int_{\frac{1}{2}}^{3} -2x^3+7x^2-3x$$

$$= \frac{1}{2}x^4-\frac{7}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2\Big|_0^{\frac{1}{2}} + -\frac{1}{2}x^4+\frac{7}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{3}$$

$=$

例題 20： $y=2x-x^2$ 與 x 軸所圍面積被 $y=mx$ 等分，求 m



$\int_0^2 (2x-x^2)dx$

$= -\frac{1}{3}x^3+x^2\Big|_0^2$

$= 4-\frac{8}{3}$

$= \frac{4}{3}$

$mx = 2x-x^2$

$x^2+(m-2)x=0$

$x=0$ or $2-m$

$\int_0^{2-m} -x^2+(2-m)x$

$= -\frac{1}{3}x^3+\frac{2-m}{2}x^2\Big|_0^{2-m}$

$\to -\frac{(2-m)^3}{3}+\frac{(2-m)^3}{2}$

$= \frac{(2-m)^3}{6}$

$= \frac{2}{3}$

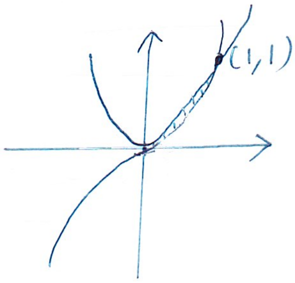
$(2-m)^3=4$

$k^3=4$

$k=\sqrt[3]{4}$

$m=2-\sqrt[3]{4}$

例題 21： 求 $y=x^3$ 與 $y=x^2$ 所圍之面積

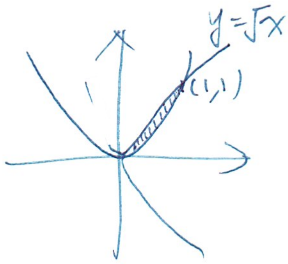


$\int_0^1 x^2-x^3\,dx$

$= \frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\Big|_0^1$

$= \frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ #

例題 22： 求 $y=x^2$ 與 $x=y^2$ 所圍之面積



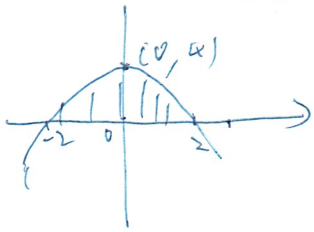
$\int_0^1 (x^{\frac{1}{2}}-x^2)dx$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1$

$= \frac{2}{3}-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

例題 23： 求 $x=4-y^2$ 與 y 軸所圍之面積

$y=4-x^2$ $\quad y \to x$



$\int_{-2}^2 (4-x^2)dx$

$= -\frac{x^3}{3}+4x\Big|_{-2}^2$

$= -\frac{8}{3}+8-(\frac{8}{3}-8)$

$= 16-\frac{16}{3} = \frac{32}{3}$

例題 24： 自原點作 $y=x^3-3x+16$ 的切線，求切線與曲線之間的面積

$y'=3x^2-3=0$

$x=\pm 1$

$b=a^3-3a+16$

$3a^2-3=\frac{b}{a}$

$3a^3-3a=a^3-3a+16$

$2a^3=16$

$\begin{cases} a=2 \\ b=18 \end{cases}$ #

$y=9x \quad x^3-12x+16=0$

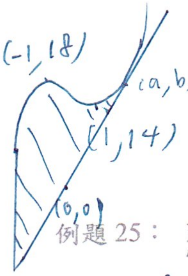
$x=2 \text{ or } -4$

$\int_{-4}^{2}(x^3-3x+16-9x)\,dx$

$\frac{1}{4}x^4-6x^2+16x\Big|_{-4}^{2}$

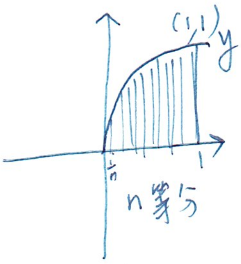
$=4-24+32-\cancel{64}+96+\cancel{64}$

$=108$ #



例題 25： $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots\ldots+\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$



$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+n^2)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)$

$=\int_0^1 x^2\,dx$

$=\frac{1}{3}$

積分應用-旋轉體體積 I ：圓盤法（*The Disc Method*）

已知 $f(x)\geq 0$，其中 $a\leq x\leq b$。假設 $y=f(x)$、$y=0$、$x=a$、$x=b$ 所圍成的區域為 R。則 R 繞 x 軸旋轉一圈所得出的旋轉體體積為 $\int_a^b \pi f^2 dx$。

例題 26：設 R 是 $y=2x-x^2$ 與 x 軸所圍成的區域，試求 R 繞 x 軸的旋轉體體積

例題 27： 一圓錐底圓半徑為r，高為h，求證體積為 $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

例題 28： 設球半徑為r，求證體積為 $\frac{4}{3}\pi r^3$

練習 29： 試求橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$繞$x$軸的旋轉體體積。

練習 30：試求圓$x^2+(y-2)^2=1$繞x軸的旋轉體（輪胎面，Torus）體積。

積分應用-旋轉體體積Ⅱ：圓殼法（*The Shell Method*）

已知 $f(x)\geq 0$，其中 $0\leq a\leq x\leq b$。假設 $y=f(x)$、$y=0$、$x=a$、$x=b$ 所圍成的區域為 R。則 R 繞 y 軸旋轉一圈所得出的旋轉體體積為 $\int_a^b 2\pi xfdx$。

例題 31：設 R 是 $y=2x-x^2$ 與 x 軸所圍成的區域，試求 R 繞 y 軸的旋轉體體積

練習 32：設 R 是 $y=x$ 與 x 軸在 $0\leq x\leq 1$ 的範圍所圍成的區域，試求 R 繞 y 軸的旋轉體體積。

作業 33：設 $y=x^2$ 與 $y=x^3$ 所圍區域為 S，試求
(1) S 繞 x 軸旋轉體積　　(2) S 繞 y 軸旋轉體積

作業 34：$y=e^x$ 的圖形、直線 $y=0$、$x=0$、$x=2$ 所圍成區域為 R，試求
(1) R 繞 x 軸旋轉體積　　(2) R 繞 y 軸旋轉體積

積分應用-曲線的長度

考慮 $y=f(x)$ 的函數圖形在 $a\leq x\leq b$ 的部分，
關鍵的想法：

此曲線長為：

例題 35：試求下列函數圖形在指定區間（範圍）內的長度。

(1) $f(x)=2x-1$，$x\in[1,3]$。

(2) $f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$，$x\in[0,8]$。

作業 36：試求封閉曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 的長度。