

# ***Problem spełniania ograniczeń – sprawozdanie z przeprowadzonych badań***

*Mateusz Broncel*

Problemy związane ze spełnianiem ograniczeń są matematycznymi pytaniami zdefiniowanymi jako zbiór obiektów, których stan musi spełniać szereg ograniczeń. W moich badaniach, problemy, na których będę testować algorytmy, to problem Kolorowania Mapy oraz problem Zagadki Einsteina.

## ***Badania:***

Wszystkie badania, zostaną przeprowadzone na obydwu problemach. Dla problemu kolorowania mapy, przyjąłem stałą liczbę kolorów: 4. Zakres wielkości problemu, jako  $\langle n = 3, n = 14 \rangle$ , a badania są przeprowadzone zarówno dla znalezienia pierwszego rozwiązania, jak i znalezienia wszystkich rozwiązań. W przypadku problemu Zagadki Einsteina, zakres wielkości problemu się nie zmienia, a rozwiązanie jest tylko jedno.

## ***Badanie wpływu zastosowania heurystyk wyboru zmiennej***

### **Cel:**

Celem badania będzie porównanie wpływu zmiany zastosowanej heurystyki wyboru zmiennej na liczbę przeszukiwanych stanów (węzłów) oraz całkowity czas wykonania.

### **Stałe:**

- Heurystyka wyboru wartości: następna wartość z dziedziny
- Algorytm: back tracking rozbudowany o forward checking

### **Zmienna:**

- Heurystyka wyboru zmiennej

**Tabela porównująca liczbę odwiedzonych węzłów dla wszystkich rozwiązań (Problem Zagadki Einsteina):**

Heurystyka wyboru zmiennej	Liczba odwiedzonych węzłów
Next unassigned variable (NUV)	2002
Minimum remaining value (MRV)	835
Degree heuristic (DH)	14574

**Tabela porównująca całkowity czas wykonania algorytmu dla wszystkich rozwiązań (Problem Zagadki Einsteina):**

Heurystyka wyboru zmiennej	Całkowity czas wykonania (s)
Next unassigned variable (NUV)	0.53
Minimum remaining value (MRV)	0.24
Degree heuristic (DH)	4.86

**Tabela porównująca liczbę odwiedzonych węzłów dla jednego rozwiązania (Problem Zagadki Einsteina):**

Heurystyka wyboru zmiennej	Liczba odwiedzonych węzłów
Next unassigned variable (NUV)	25
Minimum remaining value (MRV)	30
Degree heuristic (DH)	2429

**Tabela porównująca całkowity czas wykonania algorytmu dla jednego rozwiązania (Problem Zagadki Einsteina):**

Heurystyka wyboru zmiennej	Całkowity czas wykonania (s)
Next unassigned variable (NUV)	0.008
Minimum remaining value (MRV)	0.009
Degree heuristic (DH)	0.79

Tabela porównująca liczbę odwiedzonych węzłów dla wszystkich rozwiązań (Problem Kolorowania mapy):

Heurystyka/N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
NUV	40	88	160	280	616	1240	1624	1360	5680	9976	14296	29920
MRV	40	64	160	280	496	1240	952	1096	3136	6112	6064	13360
DH	40	88	160	292	548	1096	1000	1564	3592	6280	7024	18280

Wykres liczby odwiedzonych węzłów dla wszystkich rozwiązań od wielkości problemu:

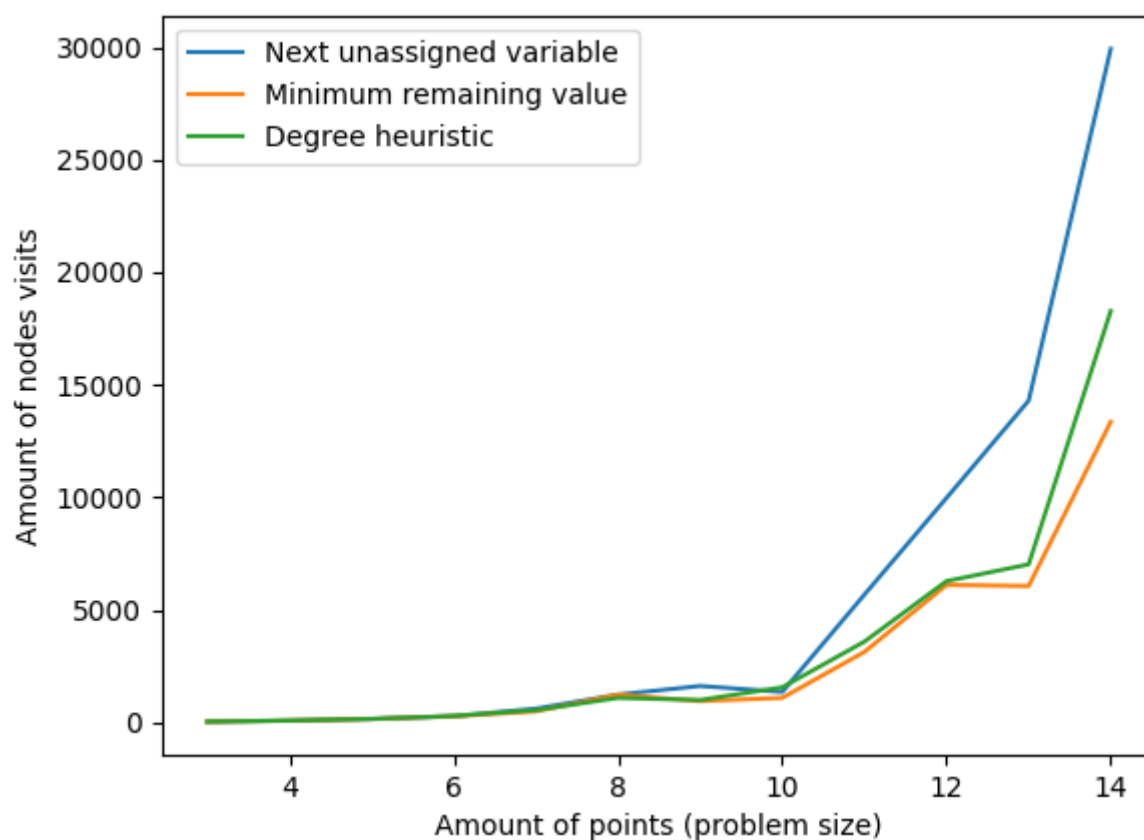


Tabela porównująca całkowity czas wykonania algorytmu dla wszystkich rozwiązań (Problem Kolorowania mapy):

Heurystyka/N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
NUV	0.0	0.01	0.03	0.06	0.15	0.34	0.5	0.48	2.17	4.31	6.88	14.84
MRV	0.0	0.01	0.03	0.06	0.12	0.34	0.3	0.38	1.24	2.72	2.84	6.64
DH	0.0	0.01	0.03	0.06	0.14	0.29	0.32	0.59	1.45	2.73	3.37	9.4

Wykres upłyńniętego czasu dla wszystkich rozwiązań od wielkości problemu:

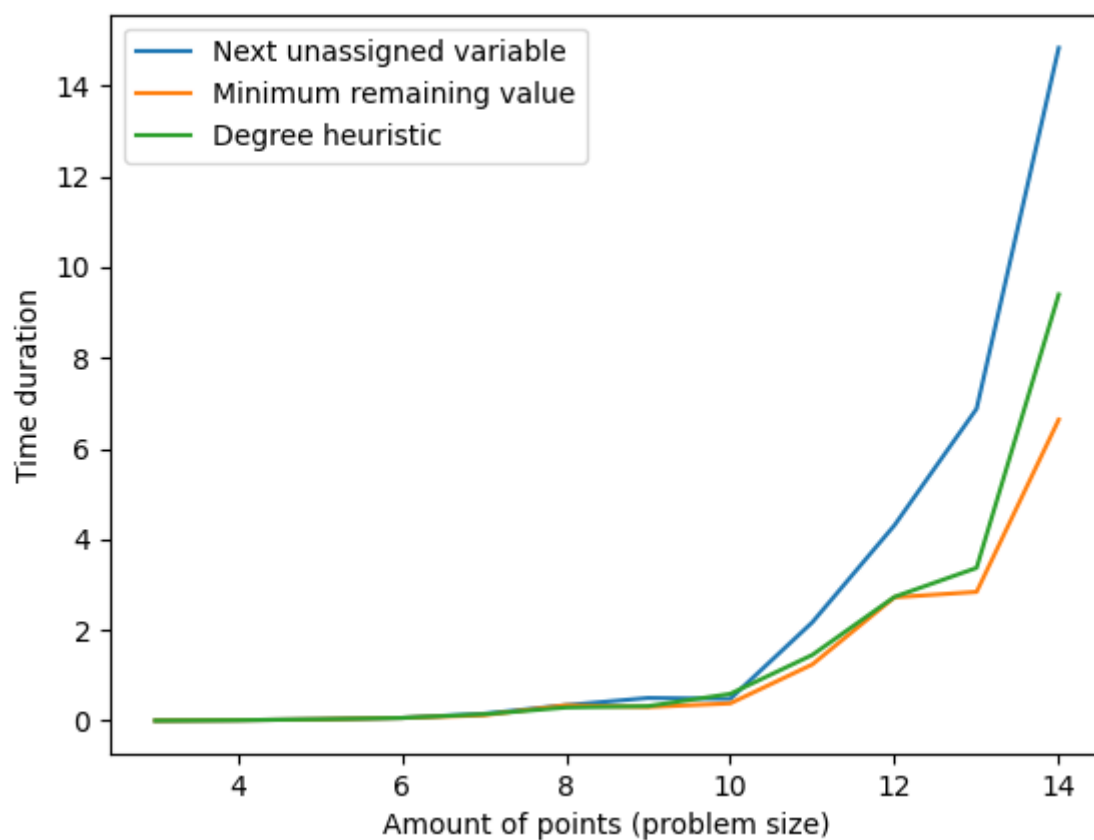


Tabela porównująca liczbę odwiedzonych węzłów dla jednego rozwiązania (Problem Kolorowania mapy):

Heurystyka/N	3	10	18	19	20	24	25	26	27	28	29	30
NUV	3	10	76	31	20	141	84	424	169	13807	150	1144
MRV	3	10	18	19	20	24	25	35	27	28	29	70
DH	3	10	18	19	20	24	25	321	40	28	1000	873

Wykres liczby odwiedzonych węzłów dla jednego rozwiązania od wielkości problemu:

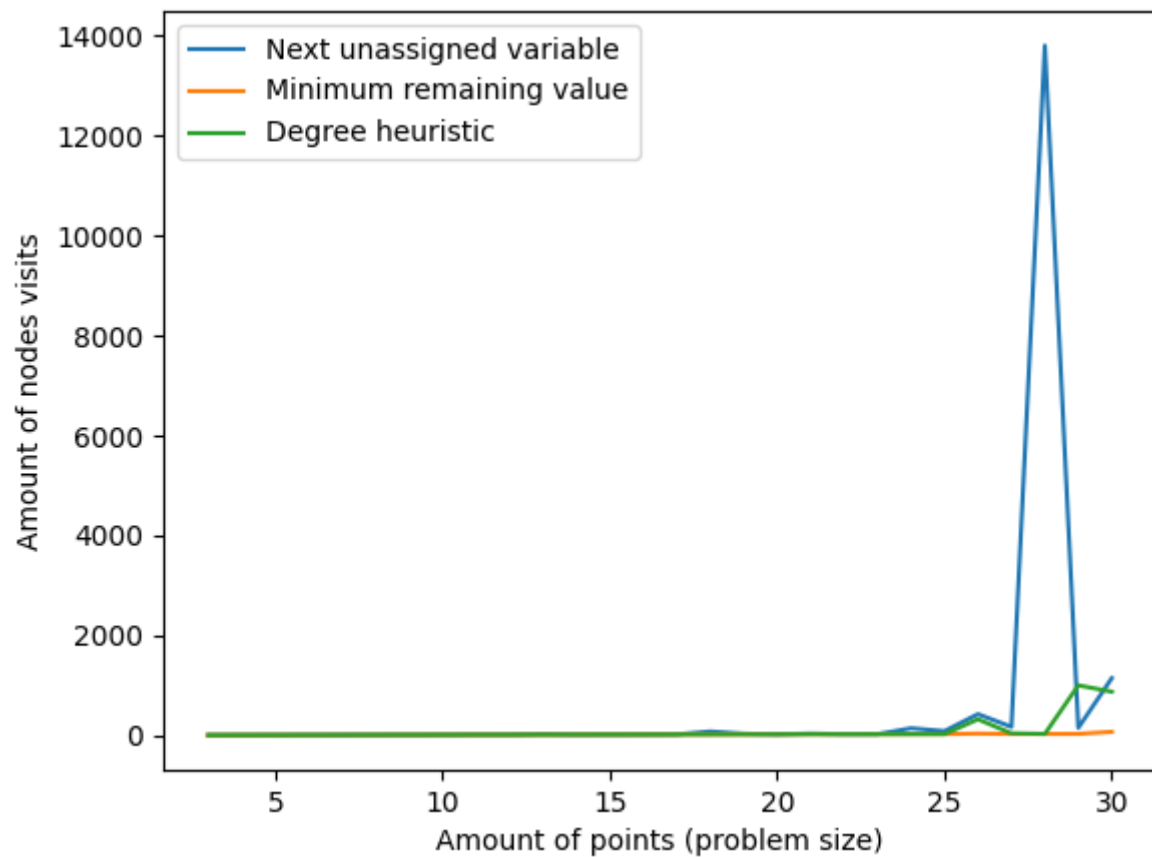
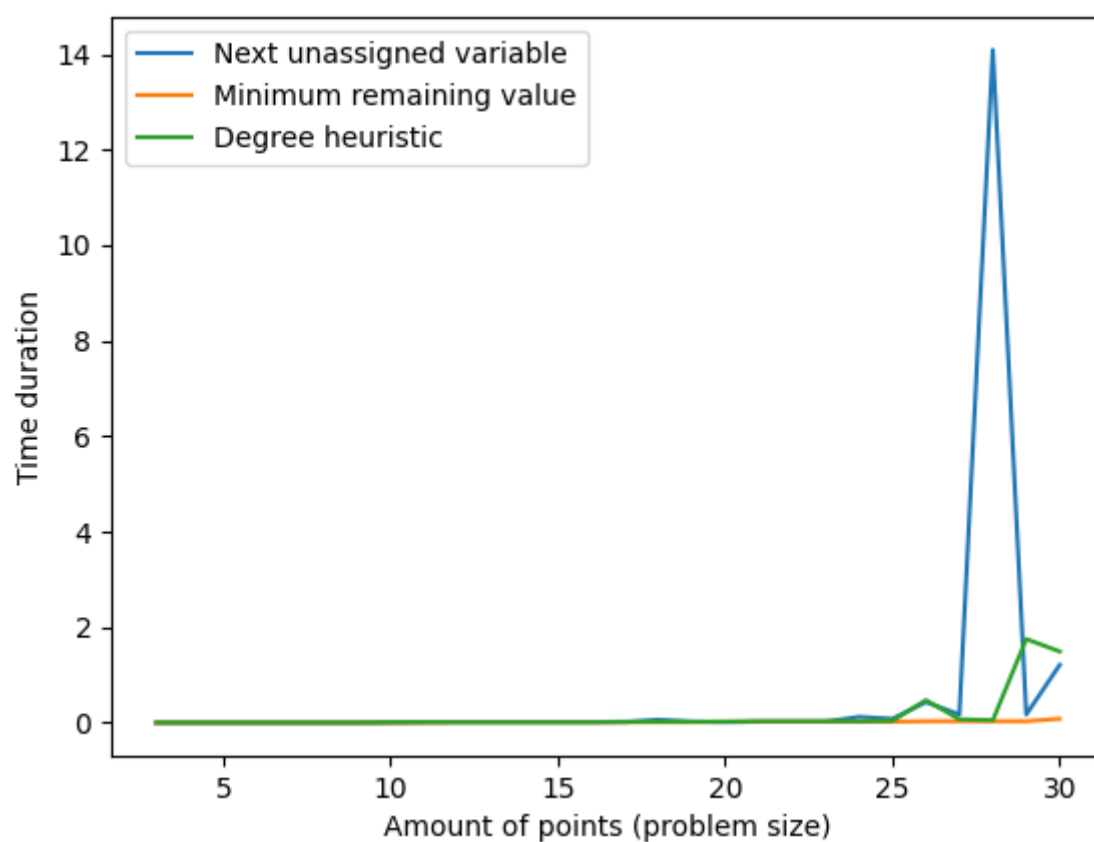


Tabela porównująca całkowity czas wykonania algorytmu dla jednego rozwiązania (Problem Kolorowania mapy):

Heurystyka/N	3	10	18	19	20	24	25	26	27	28	29	30
NUV	0	0.01	0.01	0.02	0.02	0.12	0.08	0.43	0.17	14.09	0.17	1.21
MRV	0	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.03	0.03	0.03	0.03	0.08
DH	0	0.01	0.02	0.02	0.03	0.03	0.04	0.47	0.07	0.05	1.75	1.49

Wykres upłyniętego czasu dla jednego rozwiązania od wielkości problemu:



## **Wnioski:**

### **- Zagadka Einsteina:**

Można zauważyć, że dla problemu Zagadki Einsteina, Heurystyka najmniejszej pozostałej wartości (MRV) zmniejsza zarówno czas wykonywania algorytmu jak i liczbę odwiedzonych węzłów, jednak heurystyka stopnia (DH), dla tego konkretnego problemu znacznie spowalnia działanie algorytmu oraz znacząco zwiększa liczbę odwiedzonych węzłów.

### **- Kolorowanie Mapy:**

Przy szukaniu wszystkich rozwiązań problemu, widać, że zastosowanie heurystyk innych niż przypisywanie do zmiennej „po kolei” powoduje, że zarówno czas działania algorytmu jak i liczba odwiedzonych przez niego węzłów znacząco spada (ok. 2 krotnie). MRV okazuje się nieco szybszy i wydajniejszy od DH.

Przy szukaniu jednego rozwiązania, widać, że często liczba odwiedzonych węzłów (przy użyciu forward checkingu) jest równa wielkości problemu, jednak, szczególnie dla podstawowej heurystyki wyboru zmiennej, zdarzają się przypadki, że liczba ta jest kilka rzędów wielkości większa.

## ***Badanie wpływu zastosowania heurystyk wyboru wartości***

### **Cel:**

Celem badania będzie porównanie wpływu zmiany zastosowanej heurystyki wyboru wartości na liczbę przeszukiwanych stanów (węzłów) oraz całkowity czas wykonania.

### **Stałe:**

- Heurystyka wyboru zmiennej: następna nieprzypisana zmienna
- Algorytm: back tracking rozbudowany o forward checking

### **Zmienna:**

- Heurystyka wyboru wartości

**Tabela porównująca liczbę odwiedzonych węzłów dla wszystkich rozwiązań (Problem Zagadki Einsteina):**

Heurystyka wyboru wartości	Liczba odwiedzonych węzłów
Next value from domain (NVFD)	2002
Least constraining values (LCV)	1104

**Tabela porównująca całkowity czas wykonania algorytmu dla wszystkich rozwiązań (Problem Zagadki Einsteina):**

Heurystyka wyboru wartości	Całkowity czas wykonania (s)
Next value from domain (NVFD)	0.54
Least constraining values (LCV)	0.56

**Tabela porównująca liczbę odwiedzonych węzłów dla jednego rozwiązania (Problem Zagadki Einsteina):**

Heurystyka wyboru wartości	Liczba odwiedzonych węzłów
Next value from domain (NVFD)	25
Least constraining values (LCV)	1079

**Tabela porównująca całkowity czas wykonania algorytmu dla jednego rozwiązania (Problem Zagadki Einsteina):**

Heurystyka wyboru wartości	Całkowity czas wykonania (s)
Next value from domain (NVFD)	0.08
Least constraining values (LCV)	0.57



Tabela porównująca liczbę odwiedzonych węzłów dla wszystkich rozwiązań (Problem Kolorowania mapy):

Heurystyka/N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
NVFD	40	88	88	280	568	904	2032	2656	6064	6856	23104	26368
LCV	40	88	88	280	568	904	2032	2656	6064	6856	23104	26368

Wykres liczby odwiedzonych węzłów dla wszystkich rozwiązań od wielkości problemu:

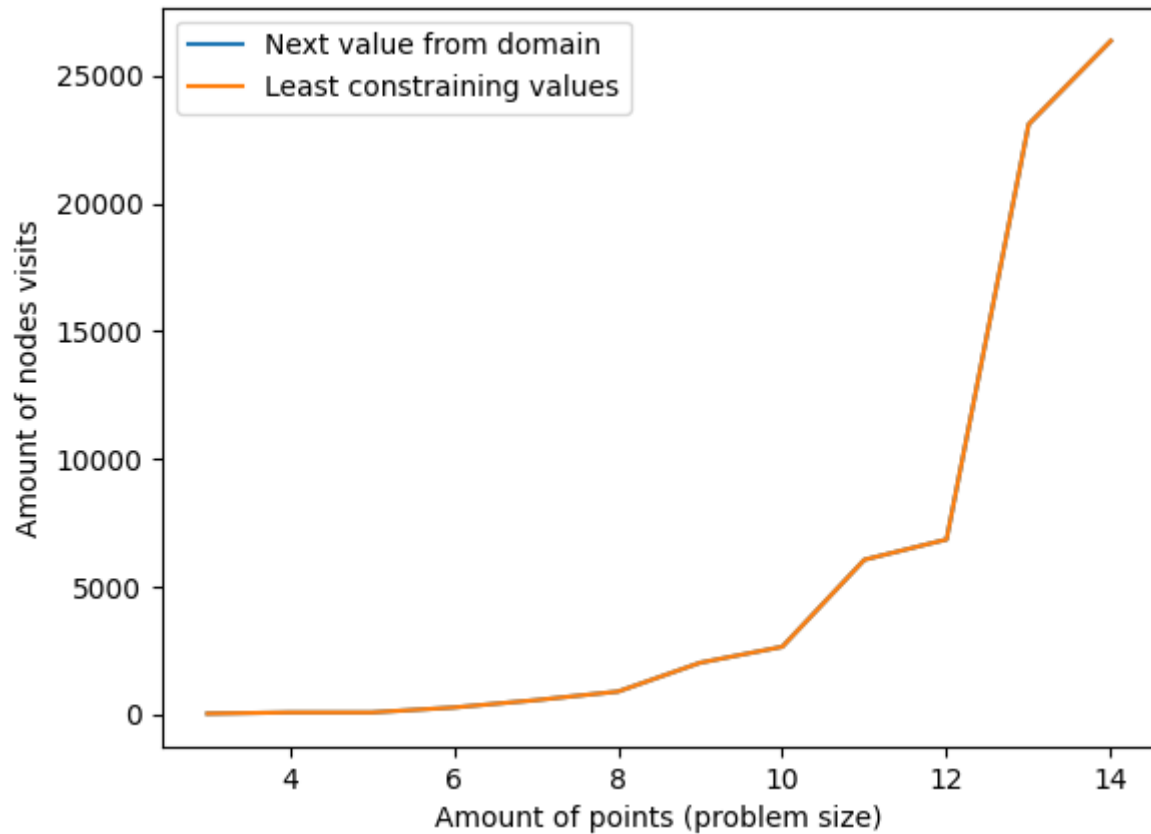


Tabela porównująca całkowity czas wykonania algorytmu dla wszystkich rozwiązań (Problem Kolorowania mapy):

Heurystyka/N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
NVFD	0	0.01	0.01	0.06	0.14	0.25	0.65	0.96	2.52	3.0	10.73	13.43
LCV	0	0.01	0.02	0.08	0.17	0.33	0.84	1.31	2.98	4.28	13.2	17.54

Wykres upłyniętego czasu dla wszystkich rozwiązań od wielkości problemu:

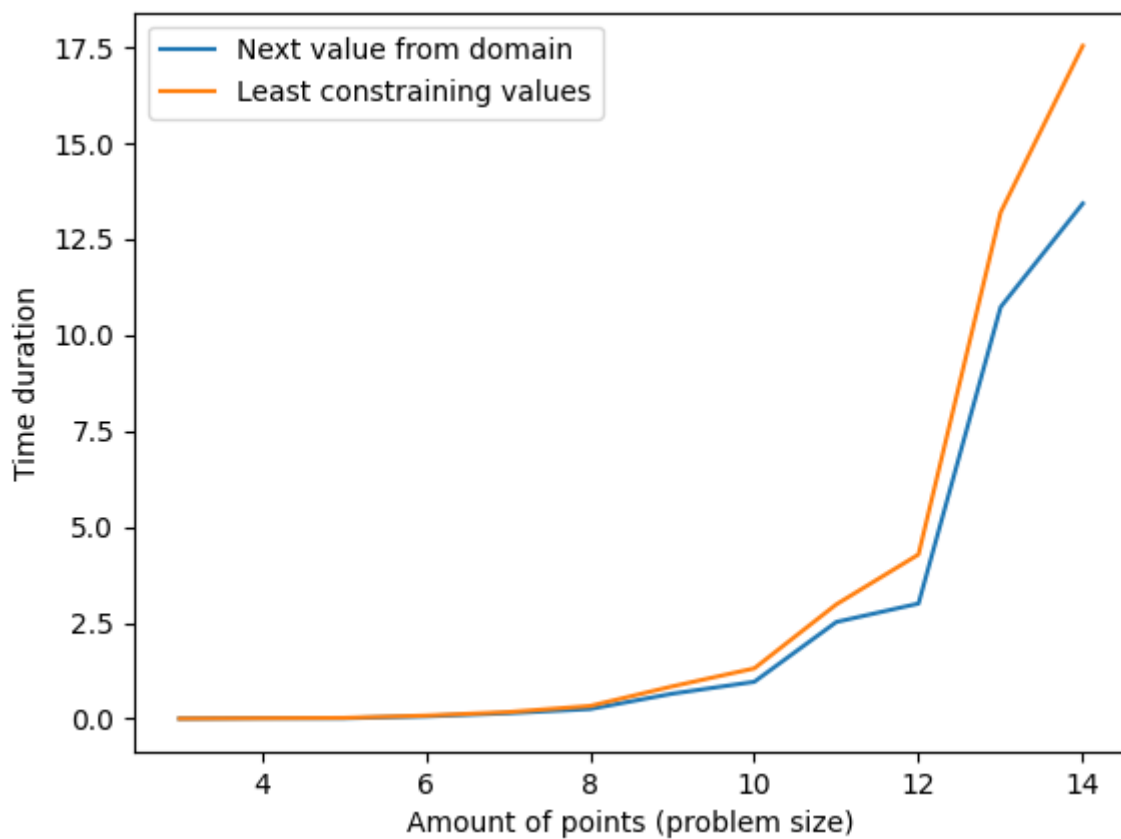


Tabela porównująca liczbę odwiedzonych węzłów dla jednego rozwiązania (Problem Kolorowania mapy):

Heurystyka/N	3	15	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
NVFD	3	16	22	743	137	107	698	42	27	1986	605	79
LCV	3	15	25	751	137	65	124	41	27	92	48	77

Wykres liczby odwiedzonych węzłów dla jednego rozwiązania od wielkości problemu:

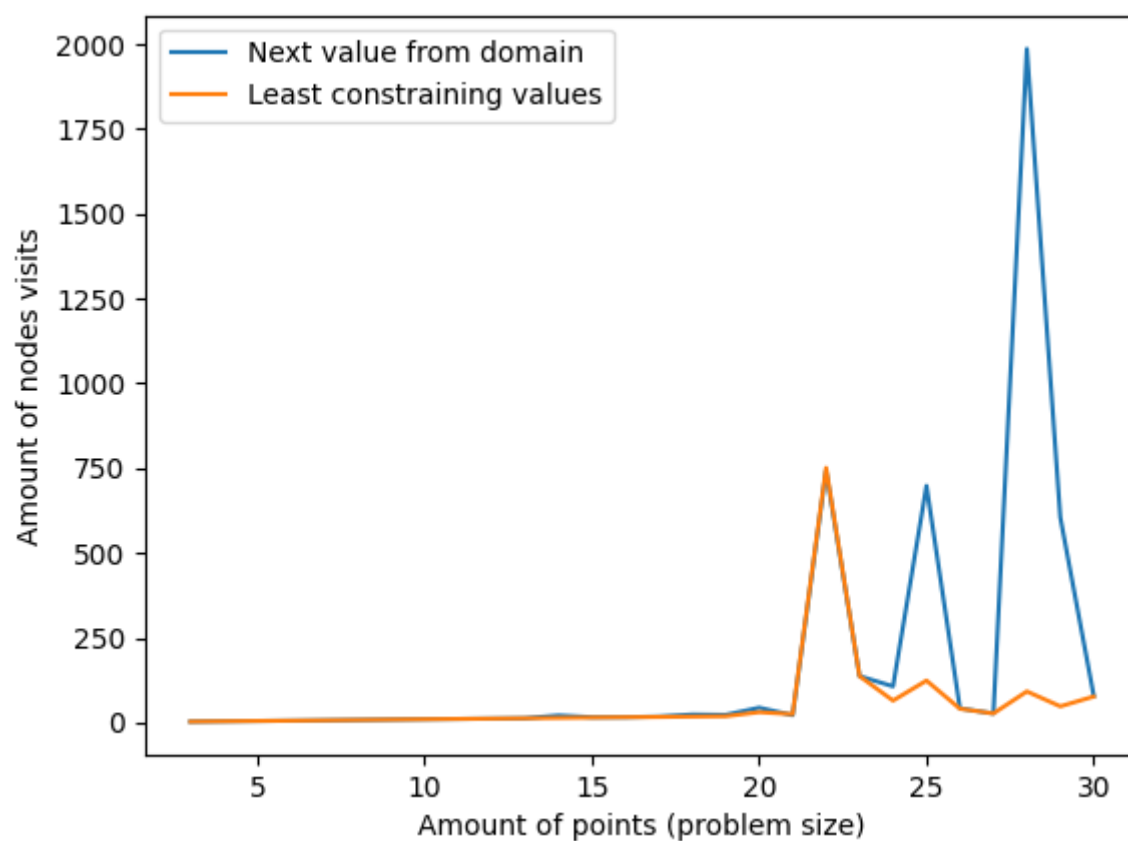
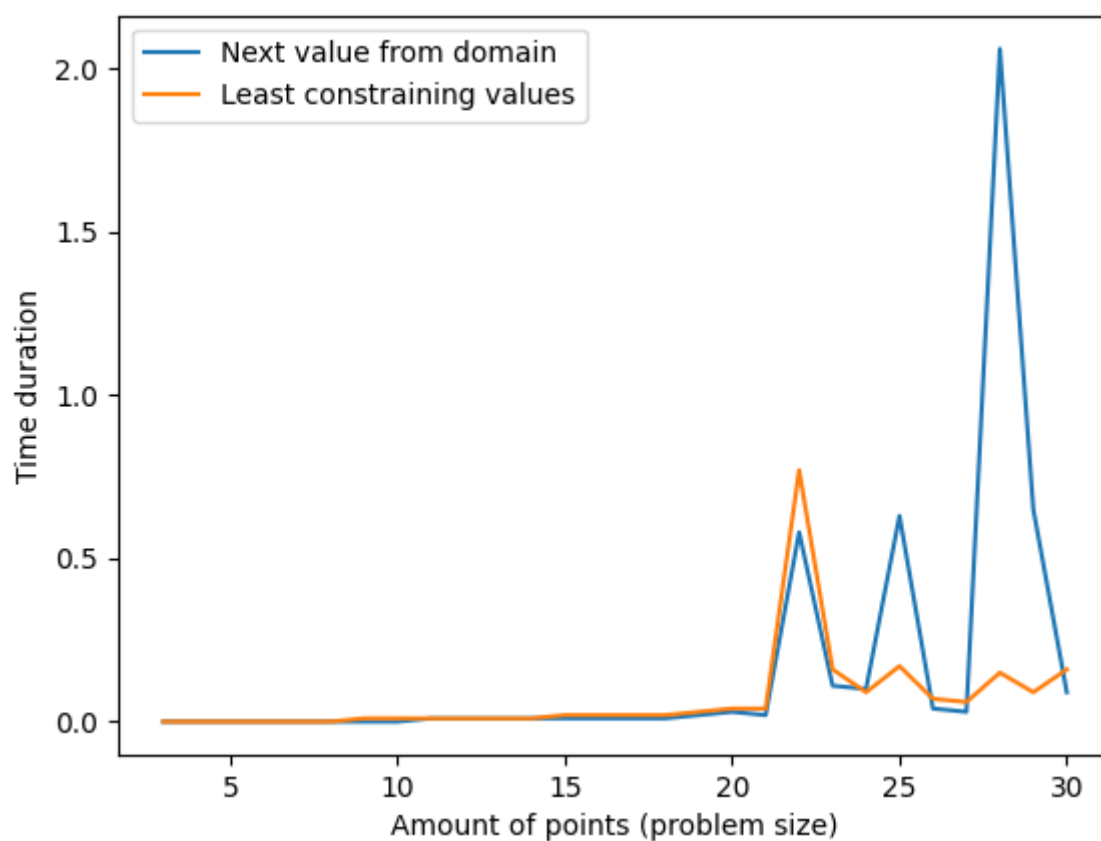


Tabela porównująca całkowity czas wykonania algorytmu dla jednego rozwiązania (Problem Kolorowania mapy):

Heurystyka/N	3	15	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
NVFD	0	0.01	0.02	0.58	0.11	0.1	0.63	0.04	0.03	2.06	0.65	0.09
LCV	0	0.02	0.04	0.77	0.16	0.09	0.17	0.07	0.06	0.15	0.09	0.16

Wykres upłyniętego czasu dla jednego rozwiązania od wielkości problemu:



## **Wnioski:**

### **- Zagadka Einsteina:**

Można zauważyć specyficzne zachowanie, przy szukaniu wszystkich rozwiązań, heurystyka LCV zmniejsza o około połowę liczbę przeszukiwanych węzłów, ale dla szukania jednego rozwiązania, znacznie zwiększa ich liczbę. Jest to spowodowane specyfiką tego problemu.

### **- Kolorowanie Mapy:**

Warto zauważyć, że dla wyszukiwania wszystkich rozwiązań i tak przejdziemy przez całą dziedzinę, niezależnie od wybranej heurystyki wyboru zmiennej, co pokazują pierwsze 2 wykresy oraz tabelki.

Przy szukaniu jednego rozwiązania, znowu zauważamy początkowo liniową proporcję liczby odwiedzonych węzłów do wielkości problemu, im jednak problem większy, tym częściej zdarzają się (generują) problemy, które potrzebują znacznie więcej czasu oraz liczby odwiedzonych węzłów na otrzymanie rozwiązania i wtedy w większości przypadków heurystyka najmniej ograniczonych wartości (LCV) radzi sobie lepiej.

## ***Badanie metod sprawdzania wprzód oraz przeszukiwania z nawrotami***

### **Cel:**

Celem badania będzie porównanie metody sprawdzania wprzód oraz przeszukiwania z nawrotami i sprawdzenia ich wpływu na liczbę przeszukiwanych stanów (węzłów) oraz całkowity czas wykonania.

### **Stałe:**

- Heurystyka wyboru wartości: następna wartość z dziedziny
- Heurystyka wyboru zmiennej: następna nieprzypisana zmienna

### **Zmienna:**

- Algorytm: BT/FC

### **Tabela porównująca liczbę odwiedzonych węzłów dla wszystkich rozwiązań (Problem Zagadki Einsteina):**

<b>Algorytm</b>	<b>Liczba odwiedzonych węzłów</b>
Backtracking (BT)	5520
Forward checking (FC)	2002

### **Tabela porównująca całkowity czas wykonania algorytmu dla wszystkich rozwiązań (Problem Zagadki Einsteina):**

<b>Algorytm</b>	<b>Całkowity czas wykonania (s)</b>
Backtracking (BT)	0.78
Forward checking (FC)	0.56

### **Tabela porównująca liczbę odwiedzonych węzłów dla jednego rozwiązania (Problem Zagadki Einsteina):**

<b>Algorytm</b>	<b>Liczba odwiedzonych węzłów</b>
Backtracking (BT)	75
Forward checking (FC)	25

### **Tabela porównująca całkowity czas wykonania algorytmu dla jednego rozwiązania (Problem Zagadki Einsteina):**

<b>Algorytm</b>	<b>Całkowity czas wykonania (s)</b>
Backtracking (BT)	0.001
Forward checking (FC)	0.008

Tabela porównująca liczbę odwiedzonych węzłów dla wszystkich rozwiązań (Problem Kolorowania mapy):

Heur/N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
BT	68	164	356	1028	1220	3428	3236	7268	10340	19364	51620	214532
FC	40	88	160	448	472	1192	1096	2344	4216	6664	17320	57520

Wykres liczby odwiedzonych węzłów dla wszystkich rozwiązań od wielkości problemu:

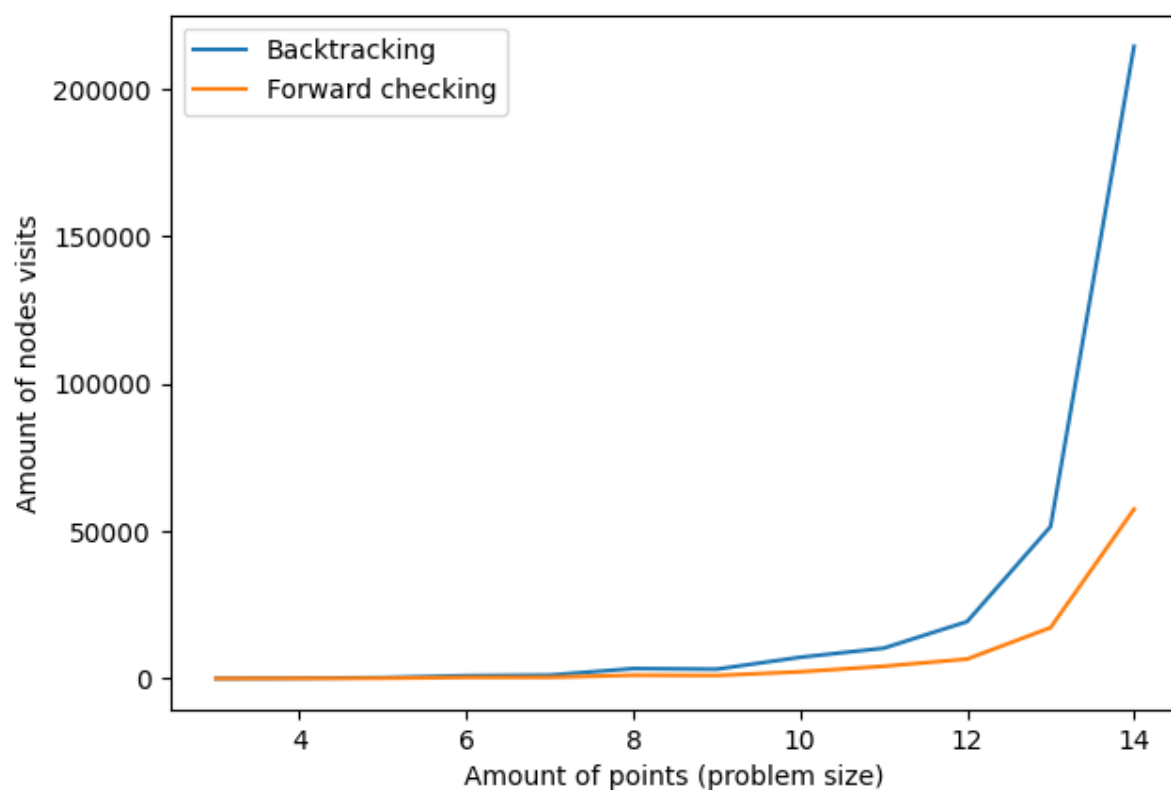


Tabela porównująca całkowity czas wykonania algorytmu dla wszystkich rozwiązań (Problem Kolorowania mapy):

Heurystyka/N	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
BT	0	0	0	0.01	0.03	0.05	0.06	0.14	0.26	0.57	1.57	5.73
FC	0	0.02	0.03	0.1	0.12	0.34	0.39	0.92	1.64	2.99	8.78	29.85

Wykres upłyniętego czasu dla wszystkich rozwiązań od wielkości problemu:

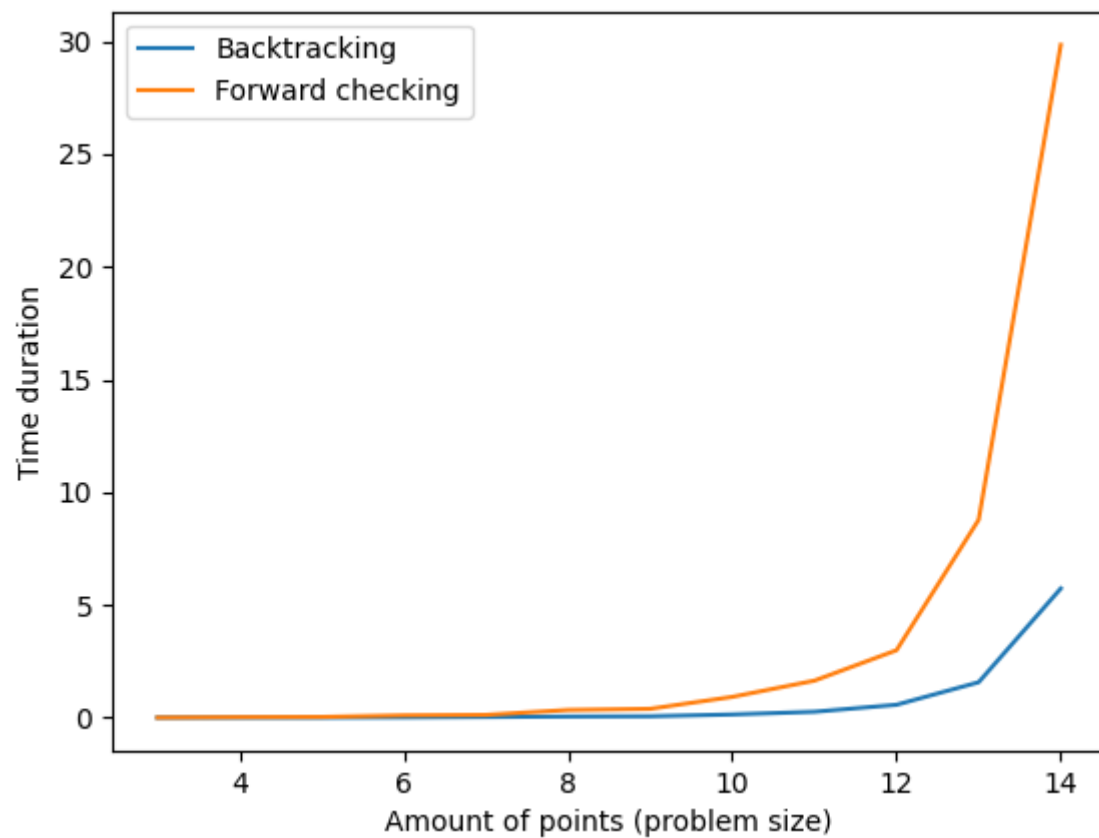




Tabela porównująca liczbę odwiedzonych węzłów dla jednego rozwiązania (Problem Kolorowania mapy):

Heurystyka/N	3	15	19	24	30	32	34	36	37	38	39	40
BT	6	37	6245	2098	67	1817	9629	526	9658	122	97247	22063
FC	3	18	1570	534	30	468	2421	146	2431	46	24328	5532

Wykres liczby odwiedzonych węzłów dla jednego rozwiązania od wielkości problemu:

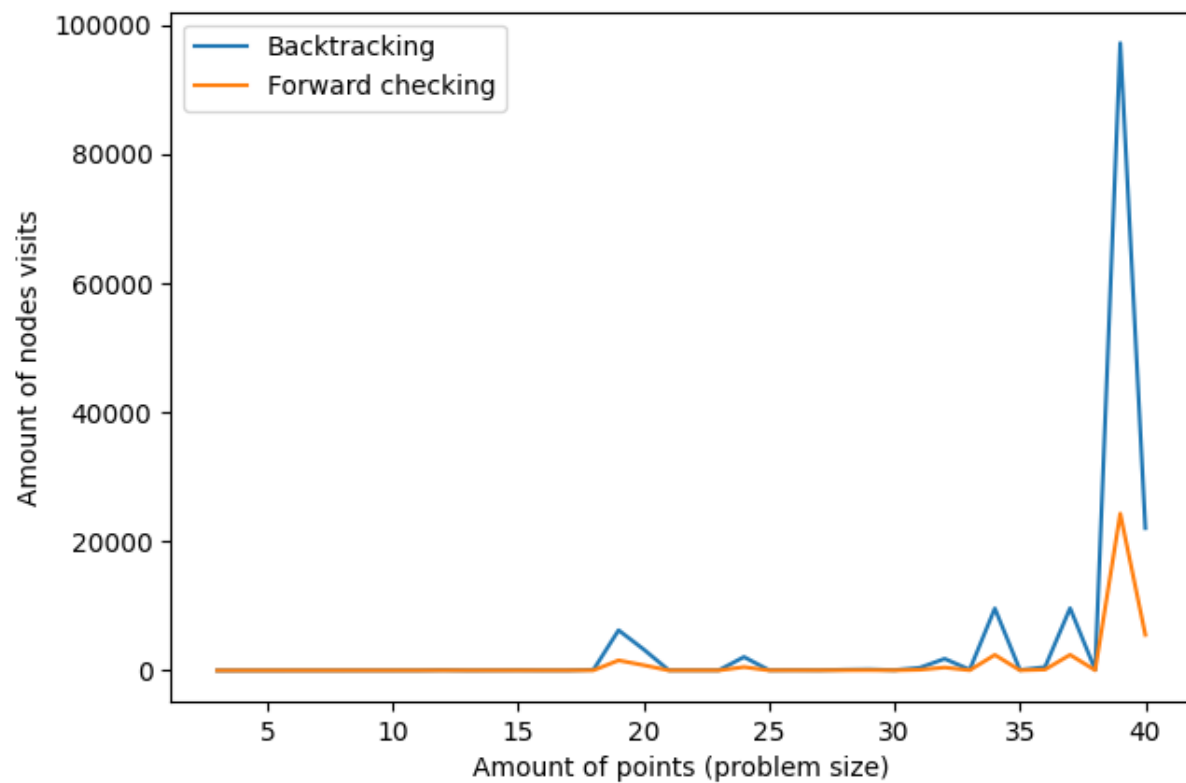
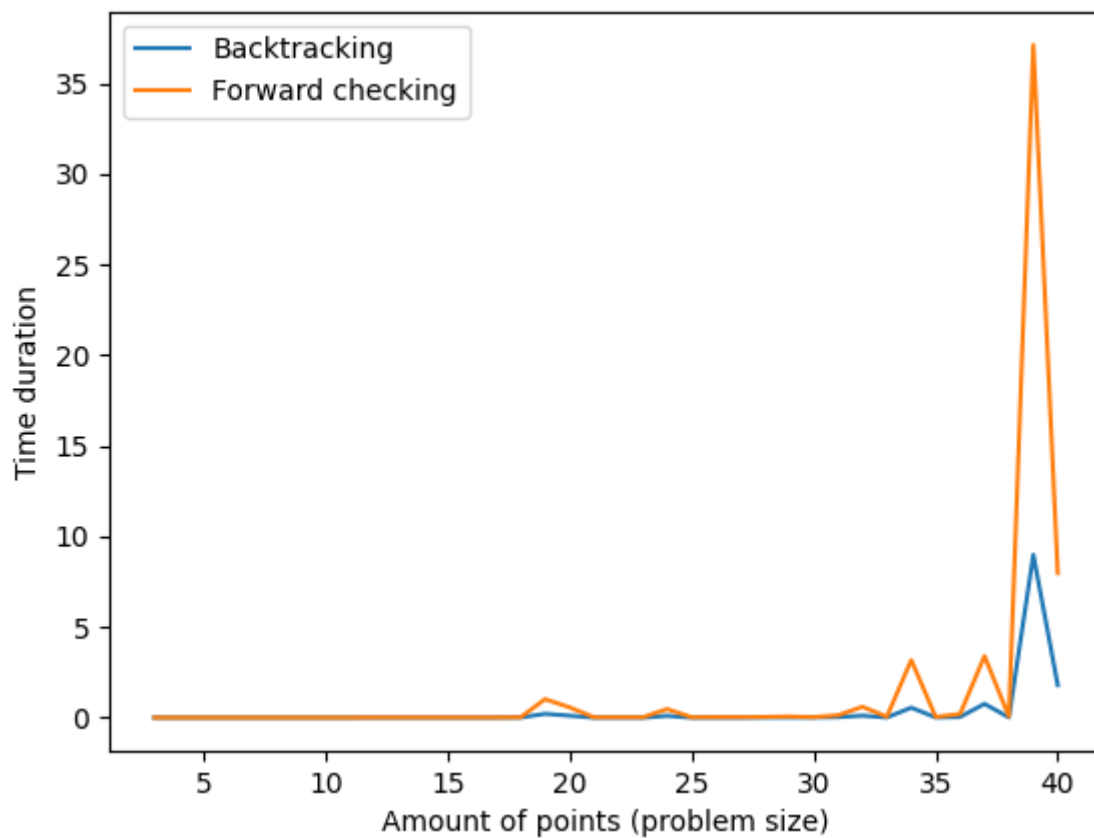


Tabela porównująca całkowity czas wykonania algorytmu dla jednego rozwiązania (Problem Kolorowania mapy):

Heurystyka/N	3	15	19	24	30	32	34	36	37	38	39	40
BT	0	0	0.21	0.1	0.01	0.01	0.55	0.04	0.76	0.01	8.99	1.79
FC	0	0.01	1.02	0.47	0.13	0.05	0.04	0.2	3.4	0.06	37.14	7.98

Wykres upłyńniętego czasu dla jednego rozwiązania od wielkości problemu:



## **Wnioski:**

### **- Zagadka Einsteina:**

Można zauważyć, że dla szukania wszystkich rozwiązań, forward checking odwiedza ponad dwukrotnie mniej węzłów oraz trwa krócej od backtrackingu, dla znajdowania pojedynczego rozwiązania, również odwiedza mniej węzłów, aczkolwiek trwa dłużej.

### **- Kolorowanie Mapy:**

Widzimy, że dla szukania wszystkich rozwiązań, forward checking odwiedza znacznie mniej węzłów, jednak jego wykonywanie się jest dłuższe. Prawdopodobnie ma to swoją przyczynę w nieoptymalnej implementacji forward checkingu (musi sprawdzać wszystkie ograniczenia dla każdej zmiennej). Przy implementacji optymalnej, czas trwania algorytmu powinien być krótszy od backtrackingu.

Przy szukaniu jednego rozwiązania, znowu zauważamy, że liczba odwiedzonych węzłów jak i czas wykonania algorytmu zależą od wielkości rozwiązania, jednak mocno zależą też one od instancji wygenerowanego problemu. Tutaj podobnie jak dla szukania wszystkich rozwiązań, zauważmy, że backtracking trwa średnio krócej, mimo mniejszej liczby węzłów do przeszukania.