федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Математический анализ
Расчётно-графическая работа №1
Последовательность и её предел

Выполнили:
Студенты потока 13.3:
Дорошенко Артём
Алвари Юсеф
Кулагин Вячеслав
Знаменский Александр
Преподаватель:
Трушихина Ирина Петровна

Санкт-Петербург
2023

Оглавление

Задание 1. Метод математической индукции *(№ 1.1)*

Пользуясь методом математической индукции, докажите, что при любом n $\in$ N:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}\,при\,n>1$$

Для доказательства будем пользоваться планом из варианта задания.

1. База индукции – проверим утверждение на произвольном номере n, пусть это будет число 2.

$$\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}>\frac{13}{24}$$, база индукции выполняется

2. Предположим, что утверждение верно при n = k, обозначим его как a

$$a=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}\,при\,k>1$$

3. Шаг индукции. Докажем, что утверждение верно при n = k + 1

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k+2}$$ должно быть больше 13/24

Распишем последовательность шире, а также добавим и сразу вычтем $\frac{1}{k+1}$:

$$\frac{-1}{k+1}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$, используя утверждение при n = k получим

$$\frac{-1}{k+1}+a+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$$

$$a+\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$$

4. Таким образом мы видим, что следует добавить к а положительную дробь (т.к. $k>1$), при этом $a>\frac{13}{24}$ (из пункта 2), а если добавить к положительному числу другое положительное, которое больше какого-то значения, то мы получим число, которое заведомом больше нашего значения. Последовательность доказана.

Задание 3. Исследование сходимости *(№3.3)*

Дана последовательность a_n. Исследуйте её поведение при n → ∞.

$$a_n = \frac{3+8+\ldots+(5n-2)}{4+7+\ldots+(3n+1)}$$

1. Найдем, чему равен предел этой последовательности.

Заметим, что и в числителе, и в знаменателе представлены арифметические прогрессии. Чтобы вычислить предел, найдем суммы этих последовательностей, используя формулу $S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Разница первой прогрессии равна 8 – 3 = 5. Тогда d = 5. Вычислим сумму:

$$S = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (n-1)}{2} \cdot n = (5n+1) \cdot \frac{n}{2}$$

Разница второй прогрессии равна 7 – 4 = 3. Тогда d = 3. Вычислим сумму:

$$S = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot (n-1)}{2} \cdot n = (3n+5) \cdot \frac{n}{2}$$

Подставим полученные значения в изначальную последовательнось:

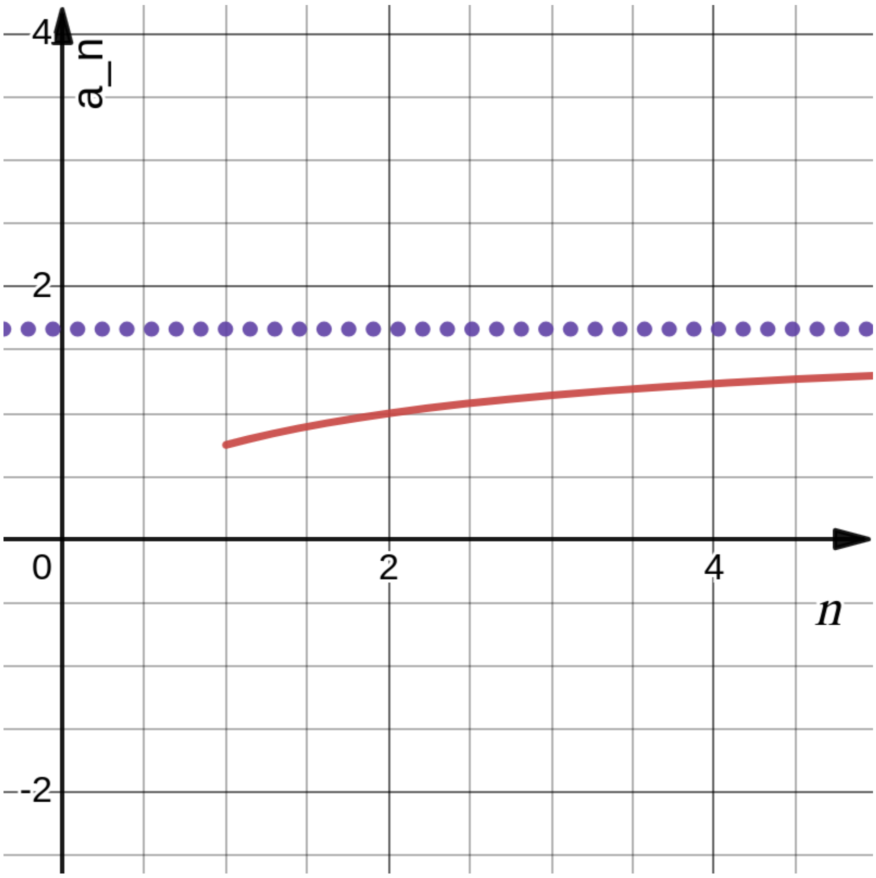
$$a_n = \frac{(5n+1) \cdot \frac{n}{2}}{(3n+5) \cdot \frac{n}{2}} = \frac{5n+1}{3n+5}$$

Теперь найдем предел последовательности:

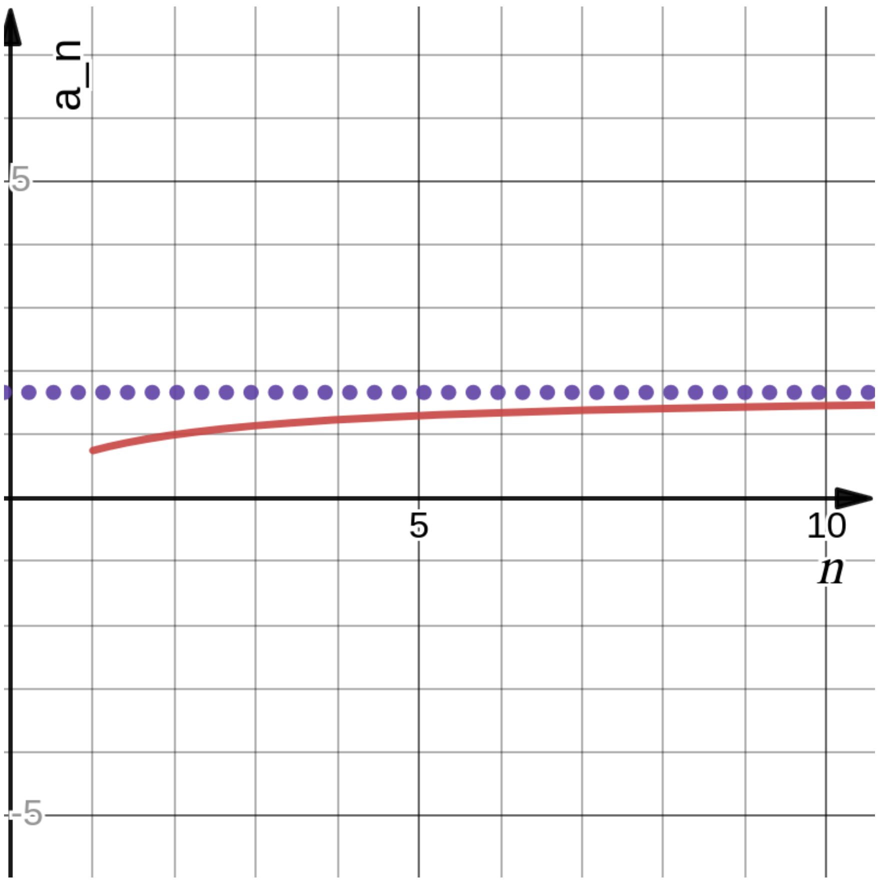
$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+1}{3n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(5+\frac{1}{n})}{n(3+\frac{5}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{5+\frac{1}{n}}{3+\frac{5}{n}} = \frac{5+0}{3+0} = \frac{5}{3}$$

2. Для построения графика будем пользоваться уже полученной последовательностью $a_n = \frac{5n+1}{3n+5}$, построим график зависимости a от n (n > 1)

На графике также выделен предел (5/3) пунктирной линией, видно, что график стремится к этому числу.



a_n
4
2
-2
0
2
4
n



a_n
5
-5
5
10
n

3. Для демонстрации сходимости последовательности выполним несколько промежуточных пунктов:

a. По определению предела последовательности, докажем найденный ранее предел и найдем ε и n_0

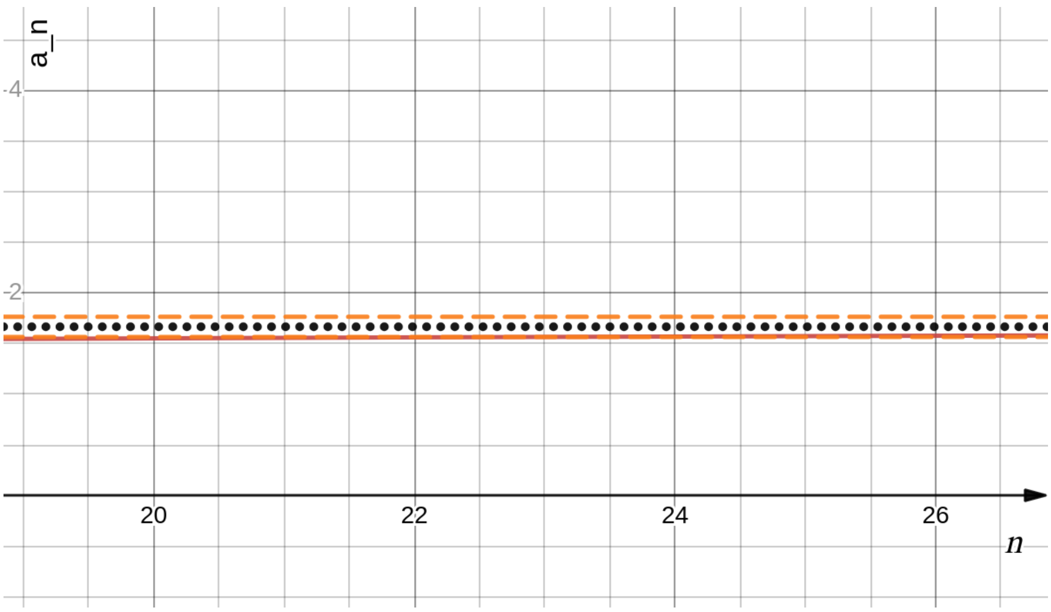
$$\text{Пусть } \varepsilon > 0:$$
$$\left|\frac{5n+1}{3n-5}-\frac{5}{3}\right| < \varepsilon$$
$$\left|\frac{15n+3-15n-25}{9n+15}\right| < \varepsilon$$
$$\left|\frac{-22}{9n+15}\right| < \varepsilon$$
$$\frac{22}{9n+15} < \varepsilon$$
$$\frac{22-15\varepsilon}{9\varepsilon} < n$$
$$n_0 = \left[\frac{22-15\varepsilon}{9\varepsilon}\right]$$

b. Возьмём 3 разных числа $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$. Пусть это будут $\varepsilon_1 = 0{,}1$; $\varepsilon_2 = 0{,}01$; $\varepsilon_3 = 0{,}001$.

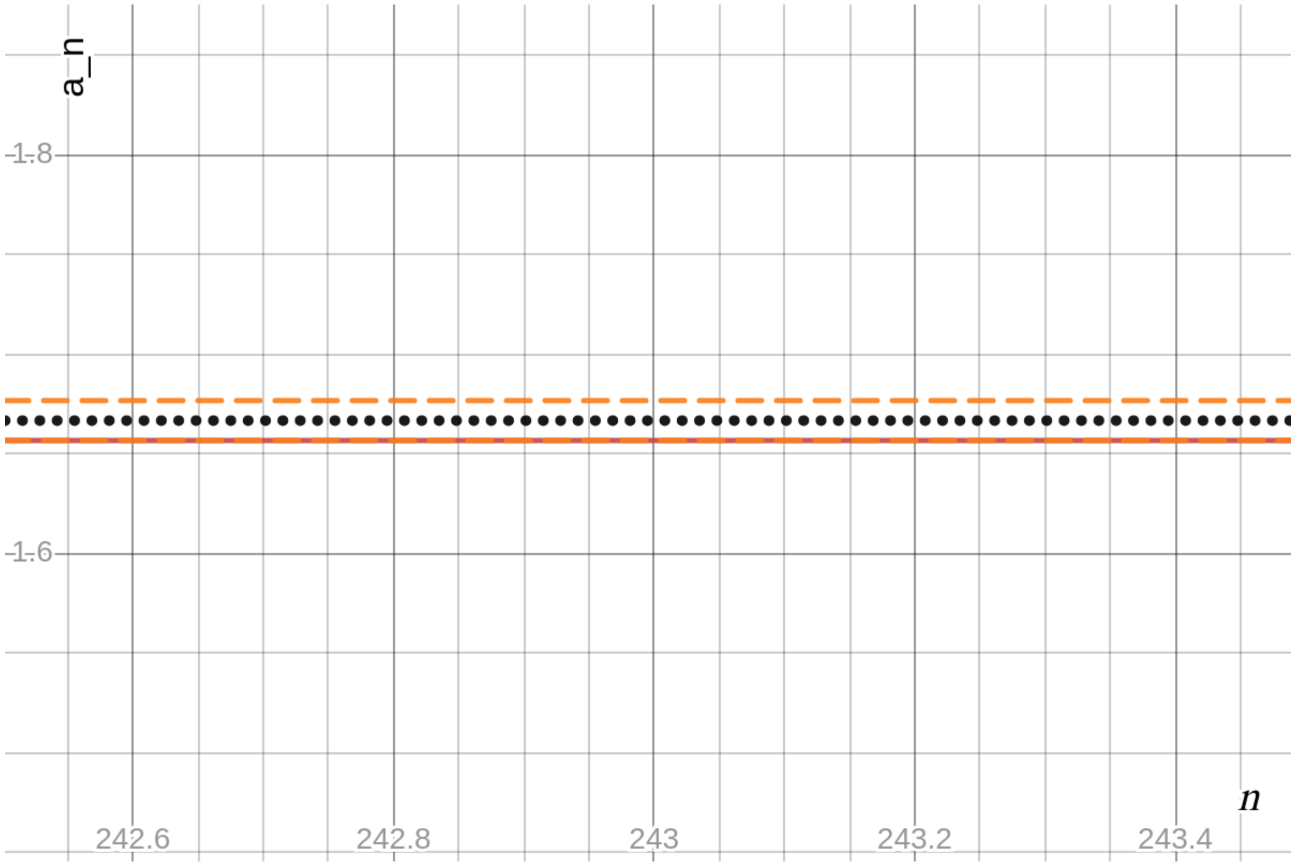
c. Изобразим графики для каждого ε

На рисунках график выполнен красным цветом, предел изображён чёрными точками, а ε-труба выполнена оранжевыми пунктирными линиями.

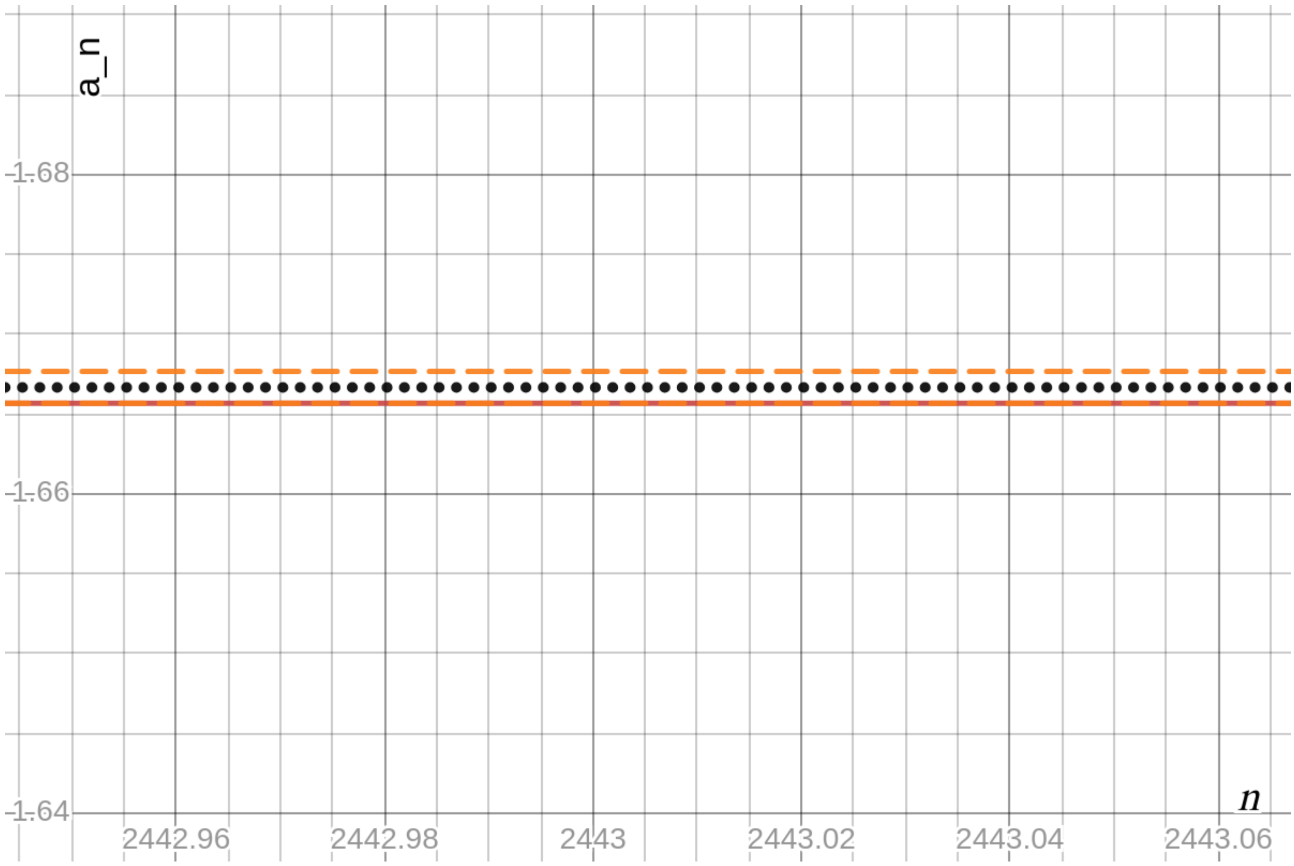
Для $\varepsilon_1 = 0{,}1$:



Для $\varepsilon_2 = 0{,}01$:



Для $\varepsilon_3 = 0{,}001$:



d. Найдем для каждого графика n_0 после которого все элементы попадают в ε-трубу. На скриншотах графиков представлены эти точки.

$$\varepsilon_1=0,1:\ \ n_0=\left[\frac{22-1,5}{0,9}\right]=23$$

$$\varepsilon_2=0,01:\ \ n_0=\left[\frac{22-0,15}{0,09}\right]=243$$

$$\varepsilon_3=0,001:\ \ n_0=\left[\frac{22-0,015}{0,009}\right]=2443$$

Вывод

Проведя данную работу, мы доказали справедливость выражения с помощью метода математической индукции, а также вычислили предел последовательности и исследовали его сходимость.

Оценочный лист

ФИ	Вклад в процентах
Дорошенко Артём	100
Алвари Юсеф	100
Кулагин Вячеслав	100
Знаменский Александр	100