

Национальный исследовательский университет ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

**Лабораторная работа №2**  
**Синтез помехоустойчивого кода**  
Вариант 84

Выполнил:

Кулагин Вячеслав Дмитриевич, Р3109

Проверила:

Рудникова Тамара Владимировна

Санкт-Петербург

2023

## Оглавление

Задание.....	3
Исходные данные.....	4
1 часть.....	4
2 часть.....	4
Решение основного задания.....	5
Схема декодирования классического кода Хэмминга (7;4).....	5
1 часть.....	5
Схема декодирования классического кода Хэмминга (15; 11).....	10
2 часть.....	11
3 часть.....	12
Решение дополнительного задания.....	13
Листинг программы.....	13
Результат работы программы для варианта №11.....	14
Заключение.....	15
Список используемых источников.....	15

## Задание

1. На основании номера варианта задания выбрать набор из 4 полученных сообщений в виде последовательности 7-символьного кода.
2. Построить схему декодирования классического кода Хэмминга (7;4), которую представить в отчёте в виде изображения.
3. Показать, исходя из выбранных вариантов сообщений (по 4 у каждого – часть №1 в варианте), имеются ли в принятом сообщении ошибки, и если имеются, то какие. Подробно прокомментировать и записать правильное сообщение.
4. На основании номера варианта задания выбрать 1 полученное сообщение в виде последовательности 11-символьного кода.
5. Построить схему декодирования классического кода Хэмминга (15;11), которую представить в отчёте в виде изображения.
6. Показать, исходя из выбранного варианта сообщений (по 1 у каждого – часть №2 в варианте), имеются ли в принятом сообщении ошибки, и если имеются, то какие. Подробно прокомментировать и записать правильное сообщение.
7. Сложить номера всех 5 вариантов заданий. Умножить полученное число на 4. Принять данное число как число информационных разрядов в передаваемом сообщении. Вычислить для данного числа минимальное число проверочных разрядов и коэффициент избыточности.
8. **Дополнительное задание №1** (позволяет набрать от 86 до 100 процентов от максимального числа баллов БаРС за данную лабораторную). Написать программу на любом языке программирования, которая на вход получает набор из 7 цифр «0» и «1», записанных подряд, анализирует это сообщение на основе классического кода Хэмминга (7,4), а затем выдает правильное сообщение (только информационные биты) и указывает бит с ошибкой при его наличии.

## Исходные данные

Исходные данные для первой части представлены в Таблица 1, а для второй части в Таблица 2

### 1 часть

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7
	r1	r2	i1	r3	i2	i3	i4
88	0	1	0	0	1	1	0
11	1	0	1	1	0	0	0
40	1	1	0	1	0	1	0
20	0	1	1	1	0	0	1

Таблица 1: исходные данные для первой части

### 2 часть

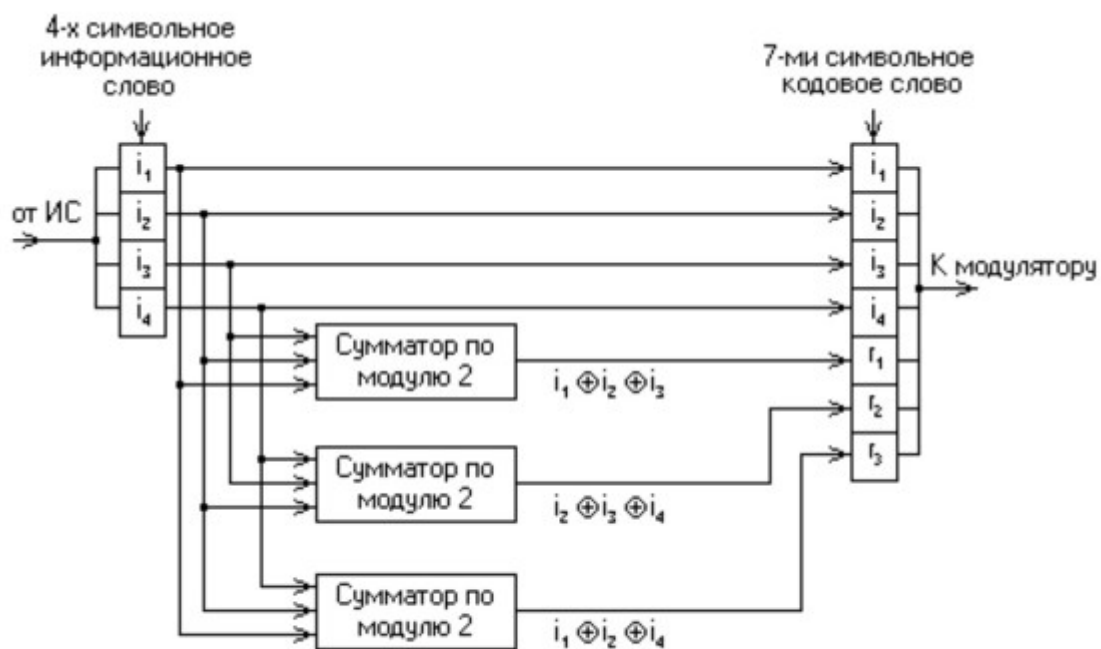
Вариант для второй части – 83

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	r1	r2	i1	r3	i2	i3	i4	r4	i5	i6	i7	i8	i9	i10	i11
83	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1

Таблица 2: исходные данные для второй части

## Решение основного задания

### Схема декодирования классического кода Хэмминга (7;4)



## 1 часть

Для выяснения, имеются ли в полученном коде ошибки, будем пользоваться схемой декодирования классического кода Хэмминга (7; 4). Составим таблицы для каждой последовательности отдельно и рассчитаем значение контрольных бит.

1. Для варианта №88 (последовательность 0100110) решение приведено в Таблица 3.

	1	2	3	4	5	6	7	
	0	1	0	0	1	1	0	
$2^k$	$r_1$	$r_2$	$i_1$	$r_3$	$i_2$	$i_3$	$i_4$	S
1	X		X		X		X	$s_1$
2		X	X			X	X	$s_2$
4				X	X	X	X	$s_3$

Таблица 3: решение пункта 1

Обозначим знаком X интересующие нас поля, необходимые для дальнейших вычислений. Будем пользоваться следующим правилом: нас интересуют значения в соответствии со степенью двойки, будем отмечать для каждого значения  $N = 2^k$  начиная с N-ого элемента, пропуская N элементов по N элементов подряд. Для вычисления контрольных бит будем складывать по модулю 2 все поля, отмеченные X для каждого бита соответственно<sup>1)</sup>. Далее рассчитаем синдромы для каждого контрольного бита, а затем, на основании полученного синдрома, сможем сделать вывод, есть ли в исходном сообщении ошибки. Далее представлен процесс вычислений результирующих битов:

$$r_{1\text{рез}} = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$r_{2\text{рез}} = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$r_{3\text{рез}} = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 1 \oplus 1 \oplus 0 = 0$$

Рассчитаем синдромы:

$$s_1 = r_{1\text{pez}} \oplus r_{1\text{ucx}} = 1 \oplus 0 = 1$$

$$s_2 = r_{2\text{pez}} \oplus r_{2\text{ucx}} = 1 \oplus 1 = 0$$

$$s_3 = r_{3\text{pez}} \oplus r_{3\text{ucx}} = 0 \oplus 0 = 0$$

Пользуясь Таблица 3 найдём, какой бит принадлежит  $s_1$  и при этом не принадлежит остальным. Это  $r_1$ , таким образом, инвертировав его, получаем:

Ошибочный бит:  $r_1$ . Правильная последовательность: 1100110

2. Для варианта №11 (последовательность 1011000) построим Таблица 4, будем решать аналогично первому пункту.

	1	2	3	4	5	6	7	
	1	0	1	1	0	0	0	
$2^k$	$r_1$	$r_2$	$i_1$	$r_3$	$i_2$	$i_3$	$i_4$	S
1	X		X		X		X	$s_1$
2		X	X			X	X	$s_2$
4				X	X	X	X	$s_3$

Таблица 4: решение пункта 2

Аналогично предыдущему пункту рассчитаем результирующие биты:

$$r_{1\text{pez}} = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$r_{2\text{pez}} = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = 1 \oplus 0 \oplus 0 = 1$$

$$r_{2\text{pez}} = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

Аналогично рассчитаем синдромы:

$$s_1 = r_{1\text{pez}} \oplus r_{1\text{ucx}} = 1 \oplus 1 = 0$$

$$s_2 = r_{2\text{pez}} \oplus r_{2\text{ucx}} = 1 \oplus 0 = 1$$

$$s_3 = r_{3\text{pez}} \oplus r_{3\text{ucx}} = 0 \oplus 1 = 1$$

Пользуясь Таблица 4 находим ошибочный бит, он должен относиться только к  $s_2$  и  $s_3$ , это бит  $i_3$ . Правильная последовательность: 1011010

3. Для варианта №40 (последовательность 1101010) построим Таблица 5, будем решать аналогично первому пункту.

	1	2	3	4	5	6	7	
	1	1	0	1	0	1	0	
$2^k$	$r_1$	$r_2$	$i_1$	$r_3$	$i_2$	$i_3$	$i_4$	S
1	X		X		X		X	$s_1$
2		X	X			X	X	$s_2$
4				X	X	X	X	$s_3$

Таблица 5: решение пункта 3

Аналогично предыдущему пункту рассчитаем результирующие биты:

$$r_{1\text{рез}} = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$$

$$r_{2\text{рез}} = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

$$r_{3\text{рез}} = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1$$

Аналогично рассчитаем синдромы:

$$s_1 = r_{1\text{рез}} \oplus r_{1\text{исх}} = 0 \oplus 1 = 1$$

$$s_2 = r_{2\text{рез}} \oplus r_{2\text{исх}} = 1 \oplus 1 = 0$$

$$s_3 = r_{3\text{рез}} \oplus r_{3\text{исх}} = 1 \oplus 1 = 0$$

Пользуясь Таблица 5 находим ошибочный бит, он должен относиться только к  $s_1$ . Ошибочный бит:  $r_1$ . Правильная последовательность: 0101010



4. Для варианта №20 (последовательность 0111001) посмотрим Таблица 6, будем решать аналогично первому пункту.

	1	2	3	4	5	6	7	
	0	1	1	1	0	0	1	
$2^k$	$r_1$	$r_2$	$i_1$	$r_3$	$i_2$	$i_3$	$i_4$	S
1	X		X		X		X	$s_1$
2		X	X			X	X	$s_2$
4				X	X	X	X	$s_3$

Таблица 6: решение пункта 4

Аналогично предыдущему пункту рассчитаем результирующие биты:

$$r_{1\text{рез}} = i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$r_{2\text{рез}} = i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$$

$$r_{3\text{рез}} = i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 = 0 \oplus 0 \oplus 1 = 1$$

Аналогично рассчитаем синдромы:

$$s_1 = r_{1\text{рез}} \oplus r_{1\text{исх}} = 0 \oplus 0 = 0$$

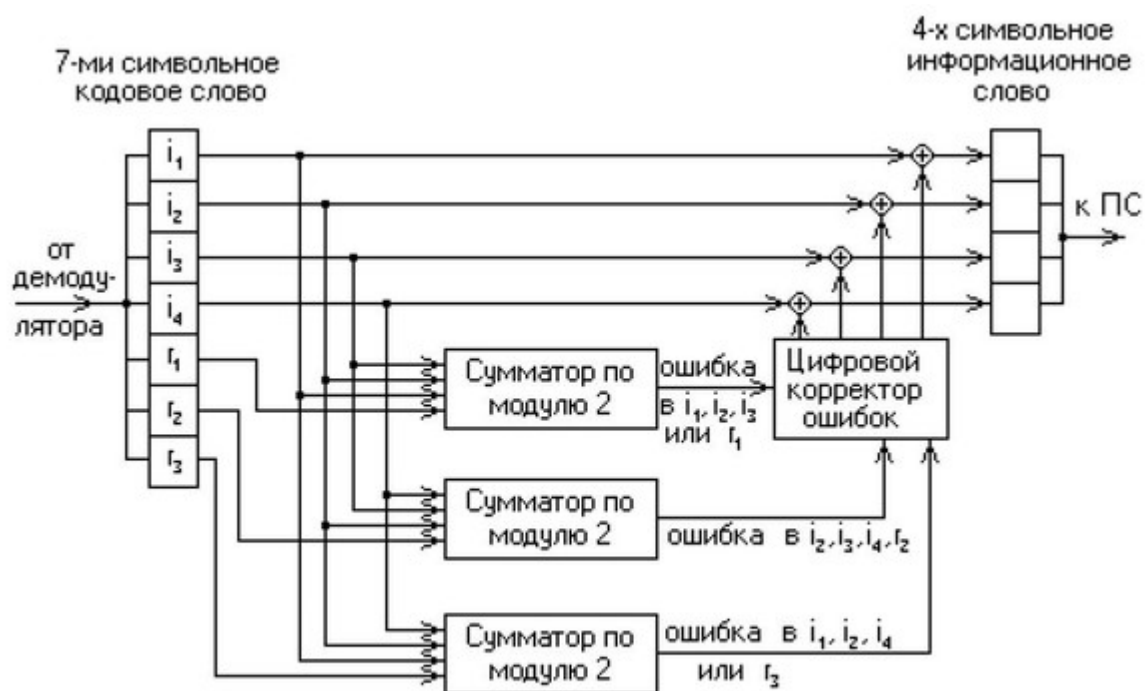
$$s_2 = r_{2\text{рез}} \oplus r_{2\text{исх}} = 0 \oplus 1 = 1$$

$$s_3 = r_{3\text{рез}} \oplus r_{3\text{исх}} = 1 \oplus 1 = 0$$

Пользуясь Таблица 6 находим ошибочный бит, он должен относиться только к  $s_2$ . Ошибочный бит:  $r_2$ . Правильная последовательность: 0011001

Таким образом, в первой части задания все последовательности были с ошибками, правильные варианты приведены выше.

## Схема декодирования классического кода Хэмминга (15; 11)



## 2 часть

Во второй части необходимо также проверить последовательность, однако теперь код имеет маркировку (15; 11), то есть стал длиннее. Составим аналогичную таблицу, но для более длинного кода, включим сюда также следующую степень двойки, потому что теперь наша последовательность имеет еще один контрольный бит. Решение представлено в Таблица 7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	
$2^k$	r1	r2	i1	r3	i2	i3	i4	r4	i5	i6	i7	i8	i9	i10	i11	S
1	X		X		X		X		X		X		X		X	$s_1$
2		X	X			X	X			X	X			X	X	$s_2$
4				X	X	X	X					X	X	X	X	$s_3$
8								X	X	X	X	X	X	X	X	$s_4$

Таблица 7: решение второй части

Обозначим знаком X интересующие нас поля, необходимые для дальнейших вычислений. Будем пользоваться следующим правилом: нас интересуют значения в соответствии со степенью двойки, будем отмечать для каждого значения  $N = 2^k$  начиная с N-ого элемента, пропуская N элементов по N элементов подряд. Для вычисления контрольных бит будем складывать по модулю 2 все поля, отмеченные X для каждого бита соответственно. Далее рассчитаем синдромы для каждого контрольного бита, а затем, на основании полученного синдрома, сможем сделать вывод, есть ли в исходном сообщении ошибки. Далее представлен процесс вычислений результирующих битов:

$$\begin{aligned}
 r_{1\text{рез}} &= i_1 \oplus i_2 \oplus i_4 \oplus i_5 \oplus i_7 \oplus i_9 \oplus i_{11} = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \\
 r_{2\text{рез}} &= i_1 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus i_6 \oplus i_7 \oplus i_{10} \oplus i_{11} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 1 \\
 r_{3\text{рез}} &= i_2 \oplus i_3 \oplus i_4 \oplus i_8 \oplus i_9 \oplus i_{10} \oplus i_{11} = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0 \\
 r_{4\text{рез}} &= i_5 \oplus i_6 \oplus i_7 \oplus i_8 \oplus i_9 \oplus i_{10} \oplus i_{11} = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0
 \end{aligned}$$

Рассчитаем синдромы:

$$s_1 = r_{1\text{pez}} \oplus r_{1\text{ucx}} = 0 \oplus 0 = 0$$

$$s_2 = r_{2\text{pez}} \oplus r_{2\text{ucx}} = 1 \oplus 0 = 1$$

$$s_3 = r_{3\text{pez}} \oplus r_{3\text{ucx}} = 0 \oplus 0 = 0$$

$$s_4 = r_{4\text{pez}} \oplus r_{4\text{ucx}} = 0 \oplus 0 = 0$$

Пользуясь Таблица 7 находим ошибочный бит, он должен относиться только к  $s_2$ . Ошибочный бит:  $r_2$ . Правильная последовательность: 011010100110101

### 3 часть

Сложив номера всех 5 заданий (88, 11, 40, 20, 83) и умножив на 4, получаем 968. То есть такое количество информационных разрядов необходимо исследовать.

Чтобы найти количество контрольных разрядов, воспользуемся формулой<sup>3)</sup>

$2^k \geq k + m + 1$  или  $k \geq \log_2(k) + m + 1$ , где  $m$  - количество основных двоичных разрядов кодового слова, то есть 968.

Посчитав  $k$ , мы понимаем, что оно должно равняться 10, чтобы данное выражение выполнялось.

Таким образом минимальное число проверочных разрядов: 10.

Коэффициент избыточности является частным от деления числа проверочных разрядов на общее число разрядов. В нашем случае это  $10 / (968 + 10) = 0,01022$

## Решение дополнительного задания

Для решения дополнительного задания, воспользуемся языком Python. Напишем функцию, которая возвращает результат сложения по модулю 2, для этого будем просто подсчитывать количество единиц (нечетных символов) т.к. мы используем только 0 и 1. Далее будем считать синдромы (s1, s2, s3), на основании которых будем делать вывод, в каком бите ошибка (если она есть). Для определения ошибочного бита, будем использовать словарь, в соответствие каждому синдрому поставим ошибочный бит (поскольку их не так много). Далее выводим полученную информацию – ошибочный бит и правильную последовательность.<sup>2)</sup>

### Листинг программы

```
def xor(n):
    if n.count('1') % 2 == 0:
        return '0'
    else:
        return '1'

s = input()

a = ['r1', 'r2', 'i1', 'r3', 'i2', 'i3', 'i4']
err = {'000': 'no', '001': 'r3', '010': 'r2', '011':
'i3', '100': 'r1', '101': 'i2', '110': 'i1', '111':
'i4'}

s1 = xor([s[0], s[2], s[4], s[6]])
s2 = xor([s[1], s[2], s[5], s[6]])
s3 = xor([s[3], s[4], s[5], s[6]])

res = s1 + s2 + s3
res_err = err[res]
```

```

if res_err == 'no':
    print('Последовательность без ошибок')
else:
    ind = a.index(res_err)
    print('Ошибочный бит:', res_err)
    print(' ' * ind + '↓')
    print(s)
    print(' ' * ind + '↑')
    if s[ind] == '0':
        s = s[:ind] + '1' + s[ind + 1:]
    else:
        s = s[:ind] + '0' + s[ind + 1:]
    print('Правильная последовательность:', s)

```

### **Результат работы программы для варианта №11**

Далее представлен вывод программы для варианта 11:

1011000

Ошибочный бит: i3

↓

1011000

↑

Правильная последовательность: 1011010

## Заключение

Проведя эту лабораторную работу, я познакомился с помехоустойчивым кодированием, с классическим кодом Хэмминга (7;4) и (15;11). А также научился проверять, насколько корректно передан код, какие он содержит ошибки, каким образом их можно поменять, чтобы получить верное сообщение.

## Список используемых источников

- 1) [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%B4\\_%D0%A5%D1%8D%D0%BC%D0%BC%D0%B8%D0%BD%D0%B3%D0%B0](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%B4_%D0%A5%D1%8D%D0%BC%D0%BC%D0%B8%D0%BD%D0%B3%D0%B0)
- 2) <https://habr.com/ru/articles/140611/>
- 3) Балакшин П.В., Соснин В.В., Машина Е.А. Информатика. – Спб: Университет ИТМО, 2020. – 122 с.