федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Домашняя работа по дискретной математике №4

Вариант 132

Студент:	Кулагин Вячеслав Дмитриевич
Преподаватель:	Поляков Владимир Иванович
Поток:	2

Санкт-Петербург
2024

1 Условие задания

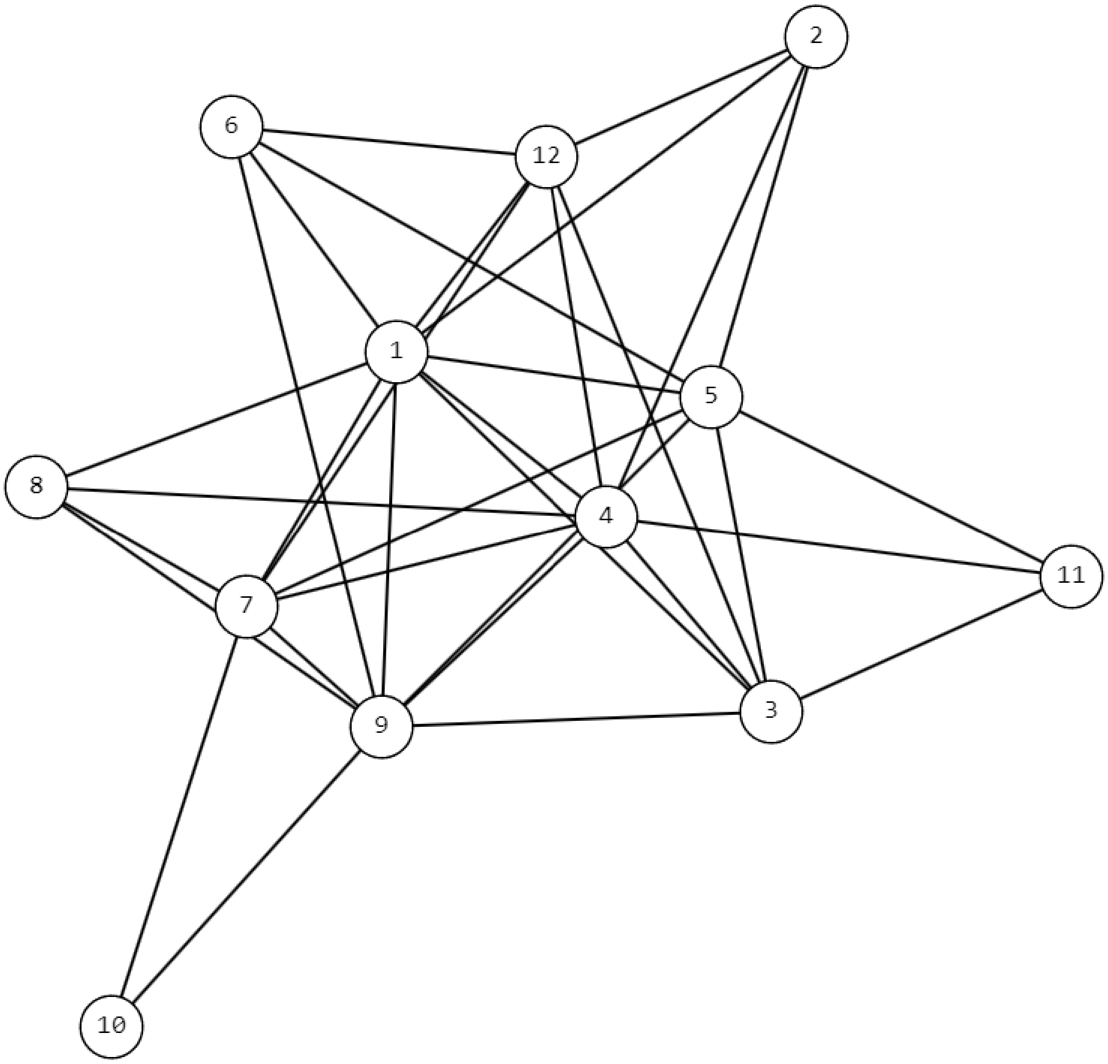
Исходные данные для варианта 132:

V/V	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10	e11	e12
e1	0	2	1	1	5	3	4	1	1			5
e2	2	0		4	2							3
e3	1		0	2	5				5		5	2
e4	1	4	2	0			4	4	4		2	2
e5	5	2	5		0	3	1		2		4	
e6	3				3	0			5			5
e7	4			4	1		0	5	2	4		3
e8	1			4			5	0	1			
e9	1		5	4	2	5	2	1	0	1		
e10							4		1	0		
e11			5	2	4						0	
e12	5	3	2	2		5	3					0

2 Планаризация графа

Сделаем граф невзвешенным, уберём все веса:

V/V	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7	e8	e9	e10	e11	e12
e1	0	1	1	1	1	1	1	1	1			1
e2	1	0		1	1							1
e3	1		0	1	1				1		1	1
e4	1	1	1	0			1	1	1		1	1
e5	1	1	1		0	1	1		1		1	
e6	1				1	0			1			1
e7	1			1	1		0	1	1	1		1
e8	1			1			1	0	1			
e9	1		1	1	1	1	1	1	0	1		
e10							1		1	0		
e11			1	1	1						0	
e12	1	1	1	1		1	1					0



2.1 Нахождение гамильтонова цикла

1. Включаем в S вершину e_1. $S = \{e_1\}$
   Будем последовательно включать возможные вершины в S

2. Возможная вершина e_2. $S = \{e_1, e_2\}$

3. Возможная вершина e_3. $S = \{e_1, e_2, e_3\}$

4. Возможная вершина e_4. $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

5. Возможная вершина e_5. $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

6. Возможная вершина e_6. $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

7. Возможная вершина e_9. $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_9\}$

8. Возможная вершина e_7. $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_9, e_7\}$

9. Возможная вершина e_8. $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_9, e_7, e_8\}$

10. У e_8 больше нет возможных вершин, поэтому ее необходимо удалить и вернуться в предыдущей, к e_7. $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_9, e_7\}$

11. Возможная вершина e_{10}. $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_9, e_7, e_{10}\}$

12. У e_{10} больше нет возможных вершин, поэтому ее необходимо удалить и вернуться в предыдущей, к e_7. $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_9, e_7\}$

13. Возможная вершина e_{12}. $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_9, e_7, e_{12}\}$

14. У e_{12} больше нет возможных вершин, поэтому ее необходимо удалить и вернуться в предыдущей, к e_7. $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_9, e_7\}$

15. У e_7 больше нет возможных вершин, поэтому удаляем ее и возвращается в предыдущей, к e_9. $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_9\}$

16. Далее заново начинаем подбирать вершины и смотреть, подходят ли нам они. Таким образом продолжаем до тех пор, пока не найдем гамильтонов путь.

Получаем гамильтонов цикл. Он выглядит следующим образом: $S = \{e_1, e_2, e_4, e_3, e_{11}, e_5, e_6, e_{12}, e_7, e_{10}, e_9, e_8\}$

2.2 Перенумерование вершин

Теперь перенумеруем вершины согласно полученному гамильтонову циклу. Необходимо, чтобы ребра стали внешними

Получаем:

До перенумерации	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}
После перенумерации	e_1	e_2	e_4	e_3	e_{11}	e_5	e_6	e_{12}	e_7	e_{10}	e_9	e_8

V/V	**e1**	**e2**	**e3**	**e4**	**e5**	**e6**	**e7**	**e8**	**e9**	**e10**	**e11**	**e12**
e1	**0**	1	1	1		1	1	1	1		1	1
e2	1	**0**	1			1		1				
e3	1	1	**0**	1	1			1	1		1	1
e4	1		1	**0**	1	1		1			1	
e5			1	1	**0**	1						
e6	1	1		1	1	**0**	1		1		1	
e7	1					1	**0**	1			1	
e8	1	1	1	1			1	**0**	1			
e9	1		1			1		1	**0**	1	1	1
e10									1	**0**	1	
e11	1		1	1		1	1		1	1	**0**	1
e12	1		1						1		1	**0**

2.3 Построение графа пересечений G'

1. Определим p_{2-8}, для чего в матрице R выделим подматрицу R_{2-8}.
   Ребро (e_2e_8) пересекается с (e_1e_3), (e_1e_4), (e_1e_6), (e_1e_7)

2. Определим p_{2-6}, для чего в матрице R выделим подматрицу R_{2-6}.
   Ребро (e_2e_6) пересекается с (e_1e_3), (e_1e_4)

3. Определим p_{3-12}, для чего в матрице R выделим подматрицу R_{3-12}.
   Ребро (e_3e_{12}) пересекается с (e_1e_4), (e_1e_6), (e_1e_7), (e_1e_8), (e_1e_9), (e_1e_{11}), (e_2e_6), (e_2e_8)

4. Определим p_{3-11}, для чего в матрице R выделим подматрицу R_{3-11}.
   Ребро (e_3e_{11}) пересекается с (e_1e_4), (e_1e_6), (e_1e_7), (e_1e_8), (e_1e_9), (e_2e_6), (e_2e_8)

5. Определим p_{3-9}, для чего в матрице R выделим подматрицу R_{3-9}.
   Ребро (e_3e_9) пересекается с (e_1e_4), (e_1e_6), (e_1e_7), (e_1e_8), (e_2e_6), (e_2e_8)

6. Определим p_{3-8}, для чего в матрице R выделим подматрицу R_{3-8}.
   Ребро (e_3e_8) пересекается с (e_1e_4), (e_1e_6), (e_1e_7), (e_2e_6)

7. Определим p_{3-5}, для чего в матрице R выделим подматрицу R_{3-5}.
   Ребро (e_3e_5) пересекается с (e_1e_4)

8. Определим p_{4-11}, для чего в матрице R выделим подматрицу R_{4-11}.
   Ребро (e_4e_{11}) пересекается с (e_1e_6), (e_1e_7), (e_1e_8), (e_1e_9), (e_2e_6), (e_2e_8), (e_3e_5), (e_3e_8), (e_3e_9)

Найдено 15 пересечений. Поиск заканчиваем. Получаем:

	p_{1-3}	p_{2-8}	p_{1-4}	p_{1-6}	p_{1-7}	p_{2-6}	p_{3-12}	p_{1-8}	p_{1-9}	p_{1-11}	p_{3-11}	p_{3-9}	p_{3-8}	p_{3-5}	p_{4-11}
p_{1-3}	**1**	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p_{2-8}	1	**1**	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1
p_{1-4}	0	1	**1**	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
p_{1-6}	0	1	0	**1**	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
p_{1-7}	0	1	0	0	**1**	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1
p_{2-6}	1	0	1	0	0	**1**	1	0	0	0	1	1	1	0	1
p_{3-12}	0	1	1	1	1	1	**1**	1	1	1	0	0	0	0	0
p_{1-8}	0	0	0	0	0	0	1	**1**	0	0	1	1	0	0	1
p_{1-9}	0	0	0	0	0	0	1	0	**1**	0	1	0	0	0	1
p_{1-11}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	**1**	0	0	0	0	0
p_{3-11}	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	**1**	0	0	0	0
p_{3-9}	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	**1**	0	0	1
p_{3-8}	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	**1**	0	1
p_{3-5}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	1
p_{4-11}	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	**1**

2.4 Построение семейства ψG

1. Рассмотрим 1 строку матрицы. Найдём первый нулевой элемент.

2. Запишем дизъюнкцию $M_{1-3} = r_1 \vee r_3 = 110001000000000 \vee 011001100011110 = 111001100011110$

3. В строке M_{1-3} находим номера нулевых элементов: $J' = \{4, 5, 8, 9, 10, 15\}$

4. Запишем дизъюнкцию $M_{1-3-4} = M_{1-3} \vee r_4 = 111001100011110 \vee 010100100011101 = 010100100011101$

5. В строке M_{1-3-4} находим номера нулевых элементов: $J' = \{5, 8, 9, 10\}$

6. Запишем дизъюнкцию $M_{1-3-4-5} = M_{1-3-4} \vee r_5 = 111101100011111 \vee 010010100011101 = 111111100011111$

7. В строке $M_{1-3-4-5}$ находим номера нулевых элементов: $J' = \{8, 9, 10\}$

8. Запишем дизъюнкцию $M_{1-3-4-5-8} = M_{1-3-4-5} \vee r_8 = 111111100011111 \vee 000000110011001 = 111111110011111$

9. В строке $M_{1-3-4-5-8}$ находим номера нулевых элементов: $J' = \{9, 10\}$

10. Запишем дизъюнкцию $M_{1-3-4-5-8-9} = M_{1-3-4-5-8} \vee r_9 = 111111110011111 \vee 000000101010001 = 111111111011111$

11. В строке $M_{1-3-4-5-8-9}$ находим номера нулевых элементов: $J' = \{10\}$

12. Запишем дизъюнкцию $M_{1-3-4-5-8-9-10} = M_{1-3-4-5-8-9} \vee r_{10} = 111111111011111 \vee 000000100100000 = 111111111111111$

13. В строке $M_{1-3-4-5-8-9-10}$ все единицы. Значит закончено построение ψ_1.
$\psi_1 = \{u_{1-3}, u_{1-4}, u_{1-6}, u_{1-7}, u_{1-8}, u_{1-9}, u_{1-11}\}$

Повторяем этот алгоритм для $\psi_2 ... \psi_{12}$. Получаем следующее:
$\psi_1 = \{u_{1-3}, u_{1-4}, u_{1-6}, u_{1-7}, u_{1-8}, u_{1-9}, u_{1-11}\}$
$\psi_2 = \{u_{1-3}, u_{1-4}, u_{1-11}, u_{4-11}\}$
$\psi_3 = \{u_{1-3}, u_{1-6}, u_{1-7}, u_{1-8}, u_{1-9}, u_{1-11}, u_{3-5}\}$
$\psi_4 = \{u_{1-3}, u_{3-12}, u_{3-11}, u_{3-9}, u_{3-8}, u_{3-5}\}$
$\psi_5 = \{u_{1-3}, u_{3-12}, u_{3-11}, u_{4-11}\}$
$\psi_6 = \{u_{1-3}, u_{1-8}, u_{1-9}, u_{1-11}, u_{3-8}, u_{3-5}\}$
$\psi_7 = \{u_{1-3}, u_{1-9}, u_{1-11}, u_{3-9}, u_{3-8}, u_{3-5}\}$
$\psi_8 = \{u_{1-3}, u_{1-11}, u_{3-11}, u_{3-9}, u_{3-8}, u_{3-5}\}$
$\psi_9 = \{u_{1-3}, u_{1-11}, u_{3-11}, u_{4-11}\}$
$\psi_{10} = \{u_{2-8}, u_{2-6}, u_{1-8}, u_{1-9}, u_{1-11}, u_{3-5}\}$
$\psi_{11} = \{u_{2-8}, u_{1-8}, u_{1-9}, u_{1-11}, u_{3-8}, u_{3-5}\}$
$\psi_{12} = \{u_{1-6}, u_{1-7}, u_{2-6}, u_{1-8}, u_{1-9}, u_{1-11}, u_{3-5}\}$

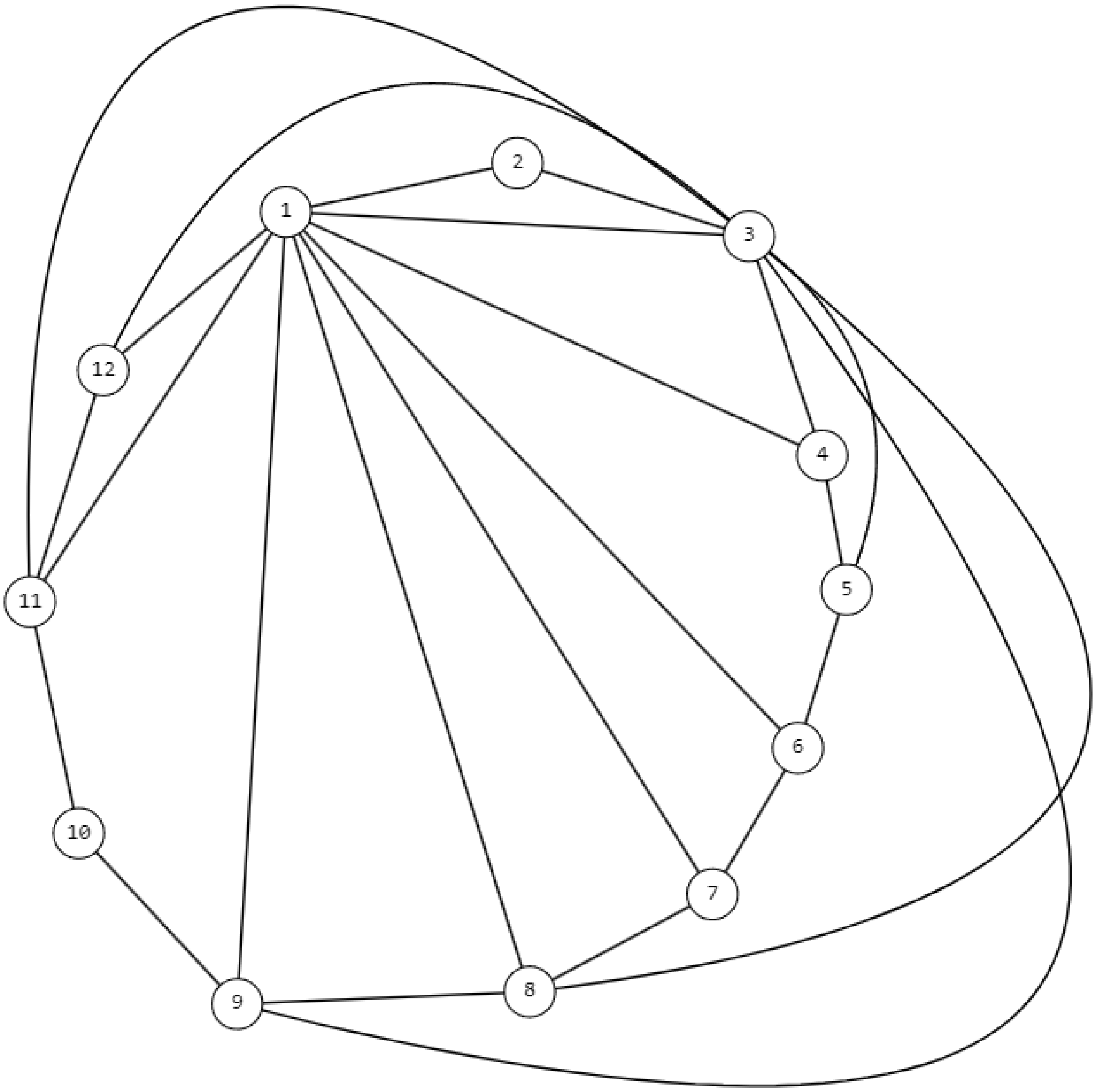
2.5 Выделение из G' максимального двудольного подграфа H'

Будем пользоваться формулой: $\alpha_{\gamma\beta} = |\psi_\gamma| + |\psi_\beta| - |\psi_\gamma \cap \psi_\beta|$
Считаем остальные значения:
$\alpha_{1-2} = |\psi_1| + |\psi_2| - |\psi_1 \cap \psi_2| = 7 + 4 - 3 = 8$
$\alpha_{1-3} = |\psi_1| + |\psi_3| - |\psi_1 \cap \psi_3| = 7 + 7 - 6 = 8$
$\alpha_{1-4} = |\psi_1| + |\psi_4| - |\psi_1 \cap \psi_4| = 7 + 6 - 1 = 12$
...
Аналогично считаем все остальные значения, а затем строим таблицу по полученным значениям:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	8	8	12	10	9	10	11	9	10	10	9
2		0	9	9	6	8	8	8	5	9	9	10
3			0	11	10	8	9	10	9	9	9	8
4				0	7	9	8	7	8	11	10	12
5					0	9	9	8	5	10	10	11
6						0	7	8	8	8	7	9
7							0	7	8	9	8	10
8								0	7	10	9	11
9									0	9	9	10
10										0	7	8
11											0	9
12												0

$\max(\alpha_{i-j}) = \alpha_{1-4} = \alpha_{4-12} = 12$
Это значение дают следующие пары множеств: $(\psi_1; \psi_4)$ и $(\psi_4; \psi_{12})$

Возьмем множества:
$\psi_1 = \{u_{1-3}, u_{1-4}, u_{1-6}, u_{1-7}, u_{1-8}, u_{1-9}, u_{1-11}\}$
$\psi_4 = \{u_{1-3}, u_{3-12}, u_{3-11}, u_{3-9}, u_{3-8}, u_{3-5}\}$
В суграфе H, содержащем максимальное число непересекающихся ребер, проведем ребра из ψ_1 внутри, а из ψ_4 снаружи.

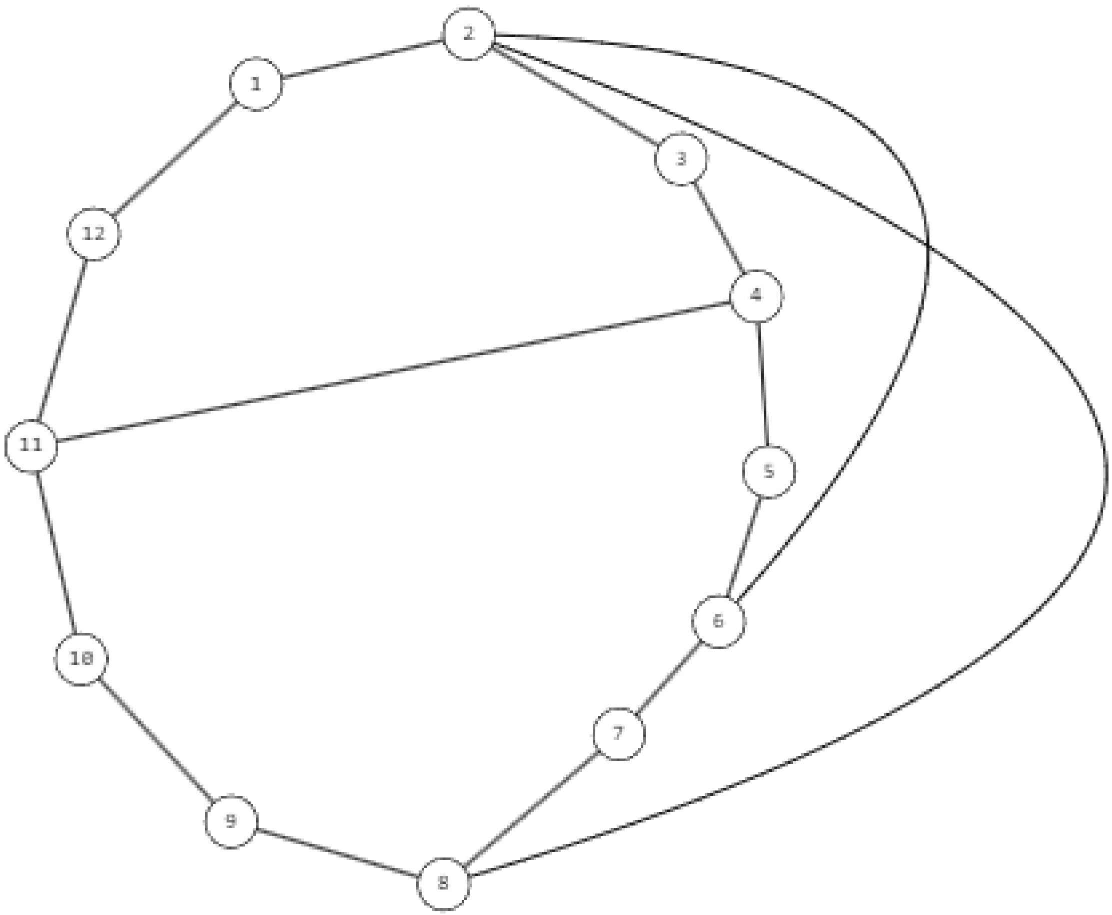


Удаляем из ψ_G ребра, которые вошли в ψ_1 и ψ_4:
$\psi_1 = \{\}$
$\psi_2 = \{u_{4-11}\}$
$\psi_3 = \{\}$
$\psi_4 = \{\}$
$\psi_5 = \{u_{4-11}\}$
$\psi_6 = \{\}$
$\psi_7 = \{\}$
$\psi_8 = \{\}$
$\psi_9 = \{u_{4-11}\}$
$\psi_{10} = \{u_{2-8}, u_{2-6}\}$
$\psi_{11} = \{u_{2-8}\}$
$\psi_{12} = \{u_{2-6}\}$
Теперь удаляем пустые множества, и объединяем одинаковые, получаем:
$\psi_1 = \{u_{4-11}\}$

$\psi_2 = \{u_{2-8}, u_{2-6}\}$

Остаётся всего лишь 2 множества, их и используем.

В суграфе H, содержащем максимальное число непересекающихся ребер, проведем ребра из ψ_1 внутри, а из ψ_2 снаружи



Удаляем из ψ_G ребра, которые вошли в ψ_1 и ψ_2:

$\psi_1 = \{\}$

$\psi_2 = \{\}$

В ψ_G пусто, значит граф планаризирован. Толщина графа $m = 2$