Задание №5

Интегралы на которые разложил во всех заданиях

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\cos y}{y^2+16}\,dy = 0$$

Эта функция нечётная т.к. если заменить $y = -y$, то получить:

$$\frac{(-y)\sin(-y)}{(-y)^2+16} = \frac{-y(-\sin y)}{y^2+16} = -\frac{y\sin y}{y^2+16}$$

т.к. функция нечётная, то интеграл по симметричному интервалу равен 0.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin y}{y^2+16}\,dy = 0$$

Эта функция аналогично является нечётной,

$$\frac{\sin(-y)}{(-y)^2+16} = \frac{-\sin y}{y^2+16} = -\frac{\sin y}{y^2+16}$$

т.к. она нечётная, то симметричный интеграл равен 0.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\sin y}{y^2+16}\,dy = \pi e^{-4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y\sin y}{y^2+16}\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ye^{iz}}{y^2+16}\,dy$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}dz}{z^2+16} = 2\pi i\,\mathrm{Res}_i\left(\frac{ze^{iz}}{z^2+16}\right) = \frac{\pi i}{e^4}$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{ye^{iy}dy}{y^2+16} + \int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+16}\,dz = \frac{\pi i}{R}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ye^{iy}}{y^2+16}\,dy = \lim_{y\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{ye^{iy}\,dy}{y^2+16} = \frac{\pi i}{e^4}$$

$$\frac{y\sin y}{y^2+16} = \mathrm{Im}\,\frac{ye^{iy}}{y^2+16} = \mathrm{Im}\left(\frac{\pi i}{e^4}\right) = \frac{\pi}{e^4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y}{y^2+16}\,dy = \frac{\pi}{4}e^{-4}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos y}{y^2+16}\,dy = \left(\text{т.к. } \cos y = \mathrm{Re}\,e^{ity} \text{ то}\right) = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ity}}{y^2+16}\,dy = \mathrm{Re}\left(\frac{\pi}{4e^4}\right) = \frac{\pi}{4e^4}$$

Последующие задания решаются с использованием этих же интегралов

Задание № 4. Разбор для Варианта 1

$$f(z) = \frac{z}{\cos z - 1}$$

$\cos z - 1 = 0$

$\cos z = 1$

$z = 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

Найду вычет в $z = 2\pi k$

$$\operatorname*{Res}_{z=2\pi k} f(z) = \lim_{z \to 2\pi k} (z - 2\pi k) \cdot \frac{z}{\cos z - 1}$$

Как я и получил ранее: для малых z справедливо: $\cos z - 1 = -\frac{z^2}{2}$, то если разложить около $z = 2\pi k$, то $\cos z - 1 \approx -\frac{1}{2}(z - 2\pi k)^2$, тогда

$$f(z) = \frac{z}{-\frac{1}{2}(z-2\pi k)} = -\frac{2z}{(z-2\pi k)^2}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2\pi k} f(z) = \lim_{z \to 2\pi k} -\frac{2z}{z - 2\pi k} = -2(2\pi k) = -4\pi k$$

Таким образом получаем, что

при $R < 0$ контур замкнутый, $\oint\limits_{|z|=R} f(z) = 0$

при $R > 0$ контур можно вычислить как:

$$\oint\limits_{|z|=R} f(z) = 2\pi i \sum \operatorname{Res} = 2\pi i \sum \operatorname*{Res}_{z=2\pi k} = 2\pi i \sum(-4\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$