федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Курсовая работа по дискретной математике. Часть 1

Вариант 132

Студент:	Кулагин Вячеслав Дмитриевич
Преподаватель:	Поляков Владимир Иванович
Поток:	2

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1 Исходные данные

Вариант 132

$f = 1$	$5 \leq (x_4x_5 + x_1x_2x_3) \leq 8$
$f = d$	$(x_1x_2x_3) = 1$

2 Таблица истиности

N	$x_1x_2x_3x_4x_5$	x_4x_5	$(x_4x_5)_{10}$	$x_1x_2x_3$	$(x_1x_2x_3)_{10}$	$(+)$	f
0	00000	00	0	000	0	0	0
1	00001	01	1	000	0	1	0
2	00010	10	2	000	0	2	0
3	00011	11	3	000	0	3	0
4	00100	00	0	001	1	1	d
5	00101	01	1	001	1	2	d
6	00110	10	2	001	1	3	d
7	00111	11	3	001	1	4	d
8	01000	00	0	010	2	2	0
9	01001	01	1	010	2	3	0
10	01010	10	2	010	2	4	0
11	01011	11	3	010	2	5	1
12	01100	00	0	011	3	3	0
13	01101	01	1	011	3	4	0
14	01110	10	2	011	3	5	1
15	01111	11	3	011	3	6	1
16	10000	00	0	100	4	4	0
17	10001	01	1	100	4	5	1
18	10010	10	2	100	4	6	1
19	10011	11	3	100	4	7	1
20	10100	00	0	101	5	5	1
21	10101	01	1	101	5	6	1
22	10110	10	2	101	5	7	1
23	10111	11	3	101	5	8	1
24	11000	00	0	110	6	6	1
25	11001	01	1	110	6	7	1
26	11010	10	2	110	6	8	1
27	11011	11	3	110	6	9	0
28	11100	00	0	111	7	7	1
29	11101	01	1	111	7	8	1
30	11110	10	2	111	7	9	0
31	11111	11	3	111	7	10	0

2.1 Функция в аналитическом виде

КДНФ

$f = \overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4x_5 \vee \overline{x_1}x_2x_3x_4\overline{x_5} \vee \overline{x_1}x_2x_3x_4x_5 \vee x_1\overline{x_2}\overline{x_3}\overline{x_4}x_5 \vee x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4\overline{x_5} \vee x_1\overline{x_2}\overline{x_3}x_4x_5 \vee x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}\overline{x_5} \vee x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}x_5 \vee x_1\overline{x_2}x_3x_4\overline{x_5} \vee x_1\overline{x_2}x_3x_4x_5 \vee x_1x_2\overline{x_3}\overline{x_4}\overline{x_5} \vee x_1x_2\overline{x_3}\overline{x_4}x_5 \vee x_1x_2\overline{x_3}x_4\overline{x_5} \vee x_1x_2x_3\overline{x_4}\overline{x_5} \vee x_1x_2x_3\overline{x_4}x_5$

ККНФ

$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)(x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5})(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5)(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$

3 Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

$K^0(f) \vee N(f)$		
1	00100	√
2	00101	√
3	00110	√
4	10001	√
5	10010	√
6	10100	√
7	11000	√
8	00111	√
9	01011	√
10	01110	√
11	10011	√
12	10101	√
13	10110	√
14	11001	√
15	11010	√
16	11100	√
17	01111	√
18	10111	√
19	11101	√

$K^1(f)$			
1	0010X	1-2	√
2	001X0	1-3	√
3	X0100	1-6	√
4	001X1	2-8	√
5	X0101	2-12	√
6	0011X	3-8	√
7	0X110	3-10	√
8	X0110	3-13	√
9	100X1	4-11	√
10	10X01	4-12	√
11	1X001	4-14	√
12	1001X	5-11	√
13	10X10	5-13	√
14	**1X010**	**5-15**	
15	1010X	6-12	√
16	101X0	6-13	√
17	1X100	6-16	√
18	1100X	7-14	√
19	**110X0**	**7-15**	
20	11X00	7-16	√
21	0X111	8-17	√
22	X0111	8-18	√
23	**01X11**	**9-17**	
24	0111X	10-17	√
25	10X11	11-18	√
26	101X1	12-18	√
27	1X101	12-19	√
28	1011X	13-18	√
29	11X01	14-19	√
30	1110X	16-19	√

$K^2(f)$				
1	001XX	1-6	2-4	√
2	X010X	1-15	3-5	√
3	X01X0	2-16	3-8	√
4	X01X1	4-26	5-22	√
5	**0X11X**	**6-24**	**7-21**	
6	X011X	6-28	8-22	√
7	**10XX1**	**9-26**	**10-25**	
8	**1XX01**	**10-29**	**11-27**	
9	**10X1X**	**12-28**	**13-25**	
10	101XX	15-28	16-26	√
11	**1X10X**	**15-30**	**17-27**	
12	**11X0X**	**18-30**	**20-29**	

$K^3(f)$				
1	**X01XX**	**1-10**	**2-6**	**3-4**

При этом $K^4 = \varnothing$

Тогда множество $Z(f)$ будет состоять из:

$Z(f)$	
1	1X010
2	110X0
3	01X11
4	0X11X
5	10XX1
6	1XX01
7	10X1X
8	1X10X
9	11X0X
10	X01XX

4 Составление импликантной таблицы

4.1 Полная импликантная таблица

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
		0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
		1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
		1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
1	1X010					*								*		
2	110X0											*		*		
3	01X11	(*)		(*)												
4	0X11X		(*)	(*)												
5	10XX1				*		*		*		*					
6	1XX01				*				*				*			*
7	10X1X					*	*			*	*					
8	1X10X							*	*						*	*
9	11X0X											*	*		*	*
10	X01XX							*	*	*	*					

Существенные импликанты отмечены в таблице как (*). С учётом существенных испликант можно составить упрощенную испликантную таблицу. Существенные импликанты при этом образуют ядро покрытия как его обязательную часть.

4.2 Упрощенная импликантная таблица

		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
		0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
		0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
		1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
		a	b	c	d	e	f	g	h	k	l	m	n
1X010	A		*								*		
110X0	B								*		*		
10XX1	C	*		*		*		*					
1XX01	D	*				*				*			*
10X1X	E		*	*			*	*					
1X10X	F				*	*						*	*
11X0X	G								*	*		*	*
X01XX	H				*	*	*	*					

Также теперь представляется возможным определить ядро покрытия

4.3 Ядро покрытия

Получаем ядро покрытия из существенных импликант: $T = \begin{Bmatrix} 01X11 \\ 0X11X \end{Bmatrix}$

4.4 Определение минимального покрытия методом Петрика

Выпишем булево выражение Y, определяющее условие покрытия всех 0-кубов (существенных вершин), не покрываемых существенными импликантами в соответсвии с таблицей:
$Y = (C \vee D)(A \vee E)(C \vee E)(F \vee H)(C \vee D \vee F \vee H)(E \vee H)(C \vee E \vee H)(B \vee G)(A \vee B)(F \vee G)(D \vee F \vee G)$
Применяя законы поглощения и логического умножения получаем:
$Y = ACGH \vee DGEF \vee BDEGH \vee BCEFG \vee DCEGH \vee ADEFG \vee ACEFG \vee ADEGH \vee ABCDFH$
Одно из этих термов является минимальным, рассмотрим все и посчитаем S^a и S^b для каждого случая, а далее выберем минимальное:

Для $C_1 = \left\{\begin{matrix} T \\ A \\ C \\ G \\ H \end{matrix}\right\}$ $S_1^a = 19;$ $S_1^b = 25$

Для $C_2 = \left\{\begin{matrix} T \\ B \\ D \\ E \\ F \end{matrix}\right\}$ $S_2^a = 20;$ $S_2^b = 26$

Для $C_3 = \left\{\begin{matrix} T \\ B \\ D \\ E \\ G \\ H \end{matrix}\right\}$ $S_3^a = 22;$ $S_3^b = 29$

Для $C_4 = \left\{\begin{matrix} T \\ B \\ C \\ E \\ F \\ G \end{matrix}\right\}$ $S_4^a = 23;$ $S_4^b = 30$

Для $C_5 = \left\{\begin{matrix} T \\ B \\ C \\ E \\ G \\ H \end{matrix}\right\}$ $S_5^a = 22;$ $S_5^b = 29$

Для $C_6 = \left\{\begin{matrix} T \\ A \\ D \\ E \\ F \\ G \end{matrix}\right\}$ $S_6^a = 23;$ $S_6^b = 30$

Для $C_7 = \left\{\begin{matrix} T \\ A \\ C \\ E \\ F \\ G \end{matrix}\right\}$ $S_7^a = 23;$ $S_7^b = 30$

Для $C_8 = \left\{\begin{matrix} T \\ A \\ D \\ F \\ G \\ H \end{matrix}\right\}$ $S_8^a = 22;$ $S_8^b = 29$

Для $C_9 = \left\{\begin{matrix} T \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \\ H \end{matrix}\right\}$ $S_9^a = 26;$ $S_9^b = 34$

Минимальное покрытие - C_1

Таким образом: $C_{min}(f) = \left\{\begin{matrix} 01X11 \\ 0X11X \\ 1X010 \\ 10XX1 \\ 11X0X \\ X01XX \end{matrix}\right\}$

Этому покрытию соотсветсвует **МДНФ**:
$f = x_1\overline{x_3}x_4\overline{x_5} \vee x_1\overline{x_2}x_5 \vee x_1x_2\overline{x_4} \vee \overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_4x_5 \vee \overline{x_1}x_3x_4$

4.5 Минимизация булевой функции с помощью карт Карно

4.5.1 Нахождение МДНФ

Построим четырехмерные карты Карно, различающиеся по x_1 для единичных наборов:

x_4x_5

x_2x_3

	00	01	11	10
00				
01	d	d	d	d
11			1	1
10			1	

$x_1 = 0$

x_4x_5

x_2x_3

	00	01	11	10
00		1	1	1
01	1	1	1	1
11	1	1		
10	1	1		1

$x_1 = 1$

Находим минимальное покрытие, получаем $C_{min}(f) = \left\{\begin{matrix} 01X11 \\ 0X11X \\ 1X010 \\ 10XX1 \\ 11X0X \\ X01XX \end{matrix}\right\}$, $S^a = 19, S^b = 25$

МДНФ: $f = x_1\overline{x_3}x_4\overline{x_5} \vee x_1\overline{x_2}x_5 \vee x_1x_2\overline{x_4} \vee \overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_4x_5 \vee \overline{x_1}x_3x_4$

Решения разными методами дали одинаковый результат.

4.5.2 Нахождение МКНФ

Построим четырехмерные карты Карно, различающиеся по x_1 для нулевых наборов:

x_4x_5

x_2x_3	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	d	d	d	d
11	0	0		
10	0	0		0

$x_1 = 0$

x_4x_5

x_2x_3	00	01	11	10
00	0			
01				
11			0	0
10			0	

$x_1 = 1$

Находим минимальное покрытие, получаем $C_{min}(\overline{f}) = \begin{Bmatrix} 0XX0X \\ X0000 \\ 1111X \\ 11X11 \\ 00XXX \\ 0X0X0 \end{Bmatrix}, S^a = 19, S^b = 25$

МКНФ: $f = (x_1 \vee x_4) \cdot (x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \cdot (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3 \vee x_5)$

4.6 Преобразование минимальных форм булевой функции

4.6.1 Факторное преобразование для МДНФ

$f = x_1\overline{x_3}x_4\overline{x_5} \vee x_1\overline{x_2}x_5 \vee x_1x_2\overline{x_4} \vee \overline{x_2}x_3 \vee \overline{x_1}x_2x_4x_5 \vee \overline{x_1}x_3x_4$ $\quad S_Q = 25$

$f = \overline{x_1}x_4(x_3 \vee x_2) \vee \overline{x_2}(x_1x_5 \vee x_3) \vee x_2(\overline{x_1}x_4x_5 \vee x_1\overline{x_4})$ $\quad S_Q = 24$

4.6.2 Факторное преобразование для МКНФ

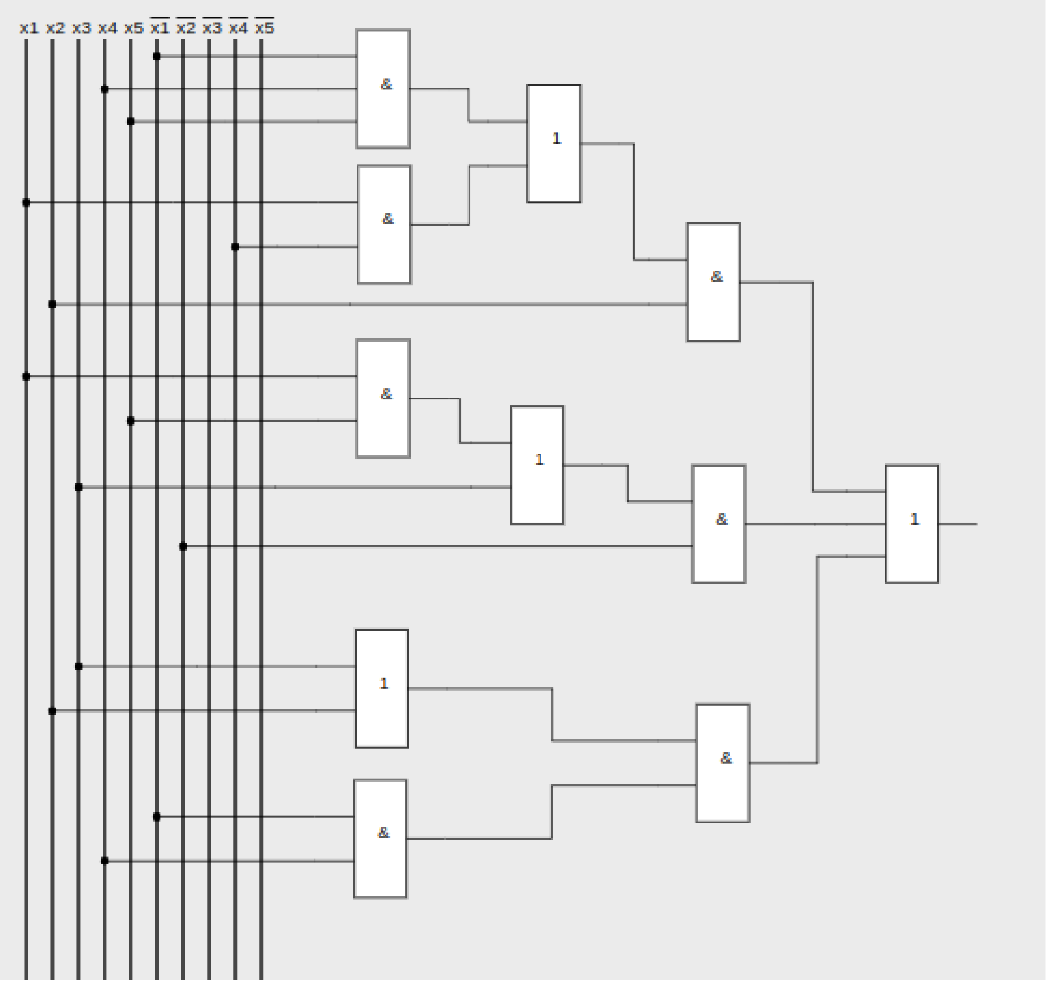
$f = (x_1 \vee x_4) \cdot (x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) \cdot (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3 \vee x_5)$

$S_Q = 25$

$f = (x_1 \vee (x_4 \cdot x_2))(x_3 \vee x_5 \vee (x_1 \cdot (x_2 \vee x_4)))(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_4} \vee (\overline{x_5} \cdot \overline{x_3}))$ $\quad S_Q = 20$

5 Синтез схем в различных базисах

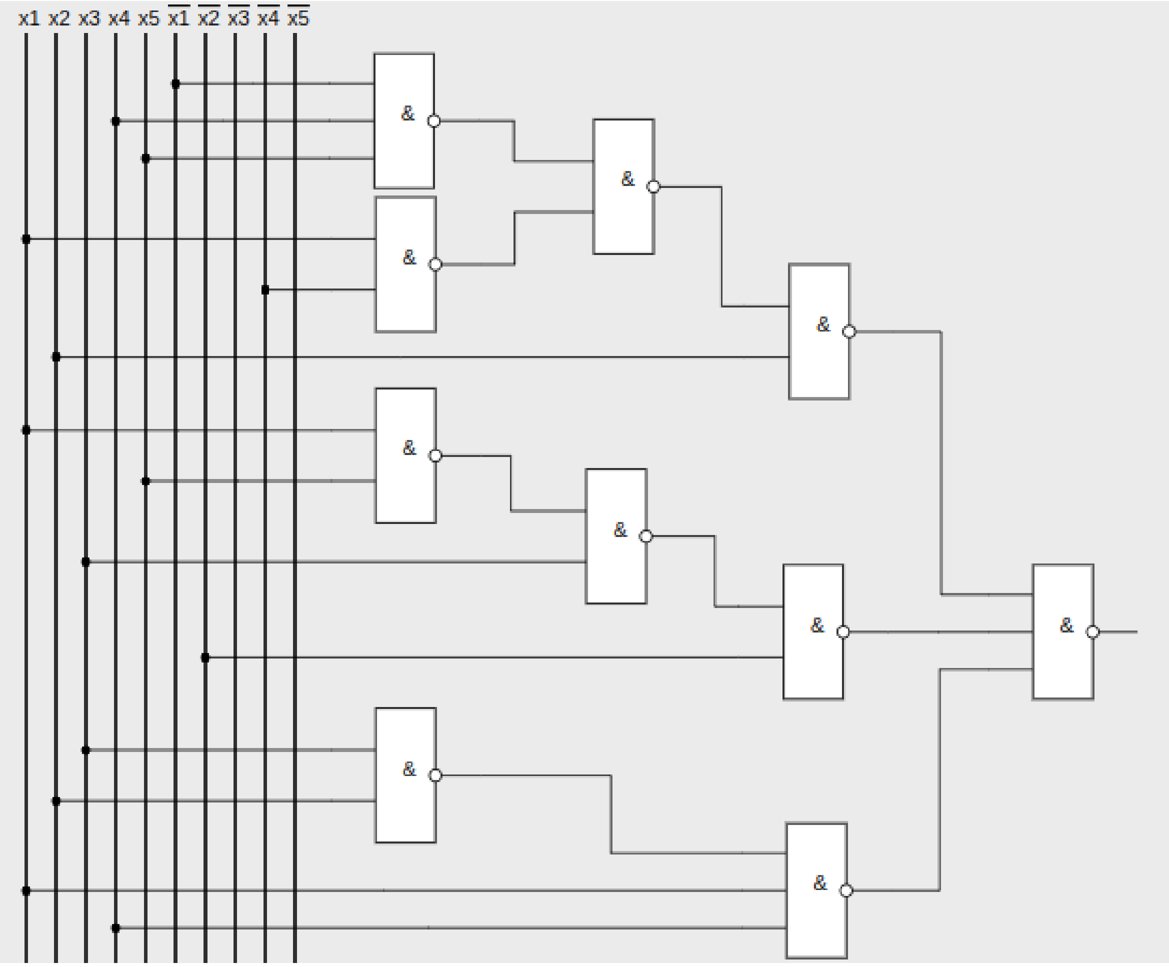
5.1 Булевый базис с парафазными входами



$T = 4\tau$ $S_Q = 24$

5.2 В универсальном базисе (И-НЕ)

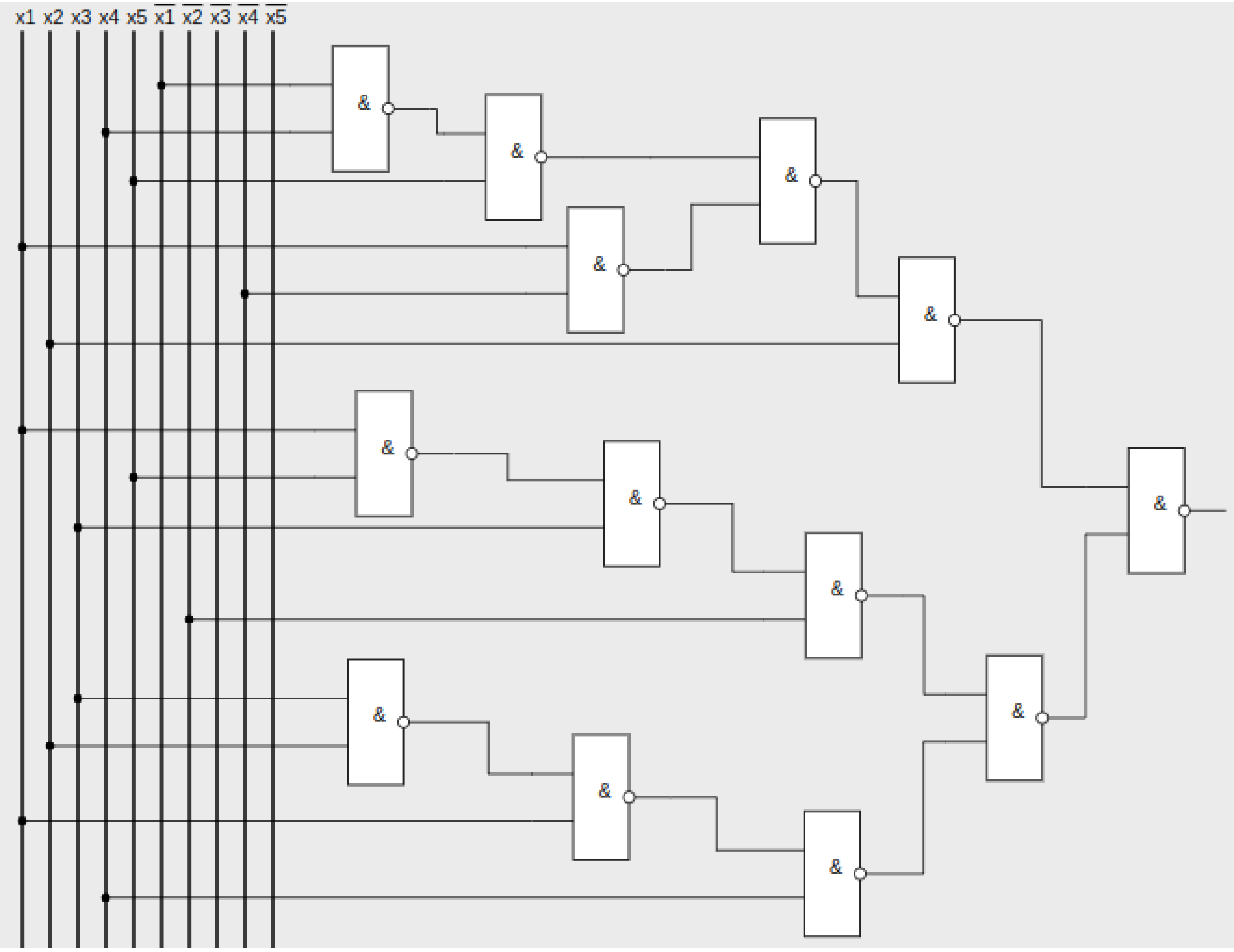
Переведем функцию в универсальный базис И–НЕ, получим:
$f = (x_1 \mid x_4 \mid (x_3 \mid x_2)) \mid (\overline{x_2} \mid ((x_1 \mid x_5) \mid x_3)) \mid (x_2 \mid ((\overline{x_1} \mid x_4 \mid x_5) \mid (x_1 \mid \overline{x_4})))$



$T = 4\tau$ $S_Q = 23$

5.3 В универсальном базисе (И-НЕ) с ограничением на 2 входа

Переделаем предыдущую схему с учетом ограничения в 2 входа, получим:



$T = 5\tau$ $S_Q = 26$

6 Анализ схемы

Для анализа буду использовать самую сложную схему - схему в универсальном базисе (И-НЕ) с ограничем на 2 входа. Использую следующие входные значения:
$f = 0$ при 00000
$f = 1$ при 11101
На рисунке представлено распространение сигналов, первая цифра - это значение сигнала для набора 00000, второе число - значение для набора 11101. Пройдя по всей схеме видно, что итоговый результат (0 1) соответсвует эталонному итоговому результату, значит схема составлена верно.