AM 3C – Equações Diferenciais Ordinárias

Felipe B. Pinto 71951 – EQB

29 de dezembro de 2024

Conteúdo

Questão 1

Verifique que cada uma das funções indicadas é solução da equação diferencial considerada.

Q1 a.

$$\boldsymbol{y(x) = e^{2\,x}\ \cos(3\,x), \quad y'' - 4\,y' + 13\,y = 0}$$

Resposta

$0 = y'' - 4\,y' + 13\,y =$

Using (1) (2)

$$= e^{2\,x}(-5\ \cos(3\,x) - 12\ \sin(3\,x)) - 4\left(e^{2\,x}(2\ \cos(3\,x) - 3\ \sin(3\,x))\right) + 13\,y =$$
$$= e^{2\,x}(-5\ \cos(3\,x) - 12\ \sin(3\,x) - 8\ \cos(3\,x) + 12\ \sin(3\,x)) + 13\,y =$$
$$= e^{2\,x}(-13\ \cos(3\,x)) + 13\,y \implies$$
$$\implies y = e^{2\,x}\ \cos(3\,x)$$

$$y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{2\,x}\ \cos(3\,x)\right) = 2\,e^{2\,x}\ \cos(3\,x) - e^{2\,x}\ \sin(3\,x)\,3 =$$
$$= e^{2\,x}(2\ \cos(3\,x) - 3\ \sin(3\,x)) \tag{1}$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} =$$

Using (1)

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{2\,x}(2\ \cos(3\,x) - 3\ \sin(3\,x))\right) =$$
$$= 2\,e^{2\,x}(2\ \cos(3\,x) - 3\ \sin(3\,x)) + e^{2\,x}(-6\ \sin(3\,x) - 9\ \cos(3\,x)) =$$
$$= e^{2\,x}(-5\ \cos(3\,x) - 12\ \sin(3\,x)) \tag{2}$$

Q1 b.

$$\boldsymbol{y(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\ \mathrm{d}t + c_1\, e^{-x^2}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2\,x\,y = 1}$$

Resposta

$$y = \frac{1}{2\,x}\left(1 - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) =$$

using (3)

$$= \frac{1}{2\,x}\left(1 - \left(-2\,x\,e^{-x^2}\left(c_1 + \int_0^x e^{t^2}\ \mathrm{d}t\right) + x\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\,x} + e^{-x^2}\left(c_1 + \int_0^x e^{t^2}\ \mathrm{d}t\right) - 1/2$$

Portanto $y(x)$ não é solução da edo

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\ \mathrm{d}t + c_1\, e^{-x^2}\right) =$$

$$= -2\,x\,e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\ \mathrm{d}t + e^{-x^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x e^{t^2}\ \mathrm{d}t\right) - c_1\,2\,x\,e^{-x^2} =$$

using (4)

$$= -2\,x\,e^{-x^2}\left(c_1 + \int_0^x e^{t^2}\ \mathrm{d}t\right) + e^{-x^2}(x\,e^{x^2} - 0 * e^{0^2}) =$$

$$= -2\,x\,e^{-x^2}\left(c_1 + \int_0^x e^{t^2}\ \mathrm{d}t\right) + x \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\ \mathrm{d}t\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(P(f(b(x))) - P(f(a(x)))) = b'(x)\,f(b(x)) - a'(x)\,f(a(x)) \tag{4}$$

Questão 2

Mostre que a equação $2\,x^2\,y - y^2 + 1 = 0$ define implicitamente uma solução da equação diferencial

$$\boldsymbol{(x^2 - y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2\,x\,y = 0}$$

Determine explicitamente a solução que verifica a condição $y(0) = 1$.

Resposta

Verificando a funcção implicita

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2\,x^2\,y - y^2 + 1\right) = 2 * 2\,x\,y + 2\,x^2\,y' - 2\,y\,y' = 4\,x\,y + \left(2\,x^2 - 2\,y\right)y' =$$

$$\text{using } a = b \implies a' = b'$$

$$= \frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}x} = 0 \implies 2\,x\,y + \left(x^2 - y\right)y' = 0$$

Encontrando solução explicita em que $y(0) = 1$

...

Questão 3

Determine o valores de k para os quais:

Q3 a.

$y(x) = e^{(k\,x)}$ é solução da equação

$$\boldsymbol{y'' - y' + 6\,y = 0}$$

Resposta

$$y'' - y' + 6\,y = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(e^{k\,x}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{k\,x}\right) + 6\,x = k^2\,e^{k\,x} - k\,e^{k\,x} + 6\,e^{k\,x} = 0$$

$$k^2 - k + 6 = 0 \vee e^{k\,x} = 0 \implies k = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 * 1 * 6}}{2 * 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{2 * 1}$$

$$e^{k\,x} = 0 \implies k \to -\infty$$

Não existe k exceto $(k = -\infty \wedge x > 0) \wedge (k = \infty \wedge x < 0)$

Q3 b.

$y(x) = x^k$ é solução da equação

$$\boldsymbol{x\,y'' + 2\,y' = 0.}$$

Resposta

$0 = x\,y'' + 2\,y' = x\,(x^k)'' + 2\,(x^k)' = x\,(k\,\,(k-1)\,x^(k-2)) + 2\,(k\,x^(k-1)) = x^{k-1}\,k\,(k+$

$\implies \; k = -1 \lor k = 0$

Questão 4

Em cada uma das seguintes equaçoes autónomas determine os pontos de equilíbrio e represente o respetivo retrato de fase. Classifique os pontos críticos e represente graficamente os diferentes tipos de soluções em cada uma das regiões determinadas pelas soluções de equilíbrio.

Q4 a.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y}^{\mathbf{2}} - \mathbf{3}\,\boldsymbol{y}$$

Resposta

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - 3\,y = y(y-3) = 0$$

	$\ldots$	0	$\ldots$	3	$\ldots$
y	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$y-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$y(y-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Equações Diferenciais lienares de primeira ordem e Equações Redutíveis a Lineares de Primeira ordem

Q5 b.

Determine a solução geral da equação diferencial linear homogénea de primeira ordem

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2\,x\,y = 0$$

Resposta

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2\,x\,y = 0 \implies$$

$$\implies y = \gamma(x)^{-1} C + \gamma(x)^{-1} \int \exp a(x) * b(x)\ \mathrm{d}x = \left(\int \exp\left(2\,x\right)\right)^{-1} C + \gamma(x)^{-1} \int \mathrm{ex}$$

Questão 6

Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem:

Q6 a.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\,\tan x = \cos x, \qquad x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$$

Q6 b.

$$\boldsymbol{y^2\ \mathrm{d}x-\left(2\,x\,y+3\right)\ \mathrm{d}y=0}$$

considere x como fun¸c˜ao inc´ognita e y vari´avel independente

---

Resposta

$y^2\ \mathrm{d}x-\left(2\,x\,y+3\right)\ \mathrm{d}y=0 \implies$

x como função de y

$$\implies y^2\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\left(2\,x\,y+3\right)=0 \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=2\,x\,y^{-1}+3\,y^{-2} \implies$$

$$\implies$$

Questão 7

Determine a solução geral da equação

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \left(x - x^{-1}\right) z = 0, \quad x > 0}$$

e utilizando o m´etodo da varia¸c˜ao das constantes arbitr´arias determine a solu¸c˜ao geral de

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \left(x - x^{-1}\right) z = -x^2}$$

Resposta

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \left(x - x^{-1}\right) z = 0, \quad x > 0 \implies$$
$$\implies z = c\,\gamma^{-1}(x) = c\ \exp - \int \left(x - x^{-1}\right)\,\mathrm{d}x = \cdots = c\ \exp - x^2/2$$

Variação das constantes arbitrárias

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \left(x - x^{-1}\right) z = -x^2 \implies z(x) = c(x)\,x\ \exp - x^2/2;$$
$$z'(x) = c'(x)\,x\,exp{-}x^2/2 + c(x)\big(\exp\left(-x^2/2\right) - x^2\exp\left(-x^2/2\right)\big)$$

Q8 b.

Utilizando a substituição definida por $y = e^{4\,x}$, determine a solução geral da equação:

$$\boldsymbol{x\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - (4\,x+1)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4\,y = 0}$$

Resposta

$$(x\,D - (4\,x+1)\,D^2 + 4)\,y = Py = 0 \implies$$
$$\implies y = e^{4\,x}\int z \implies$$
$$\implies ;$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{4\,x})\int z + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int z\right) = 4\,x\,e^{4\,x}\int z + z\,e^{4\,x};$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(4\,x\,e^{4\,x}\int z + z\,e^{4\,x}\right) = \dots$$

$$\implies x\,e^{4\,x}\left(16\int z + 8\,z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) - (4\,x+1)\,e^{4\,x}\left(4\int z + z\right) + 4\,e^{4\,x}\int z = 0 \implies$$
$$\implies \cdots \implies$$
$$\implies \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (4 - 1/x)\,z = 0 \implies$$
$$\implies \dots z = \frac{C}{\exp\left(\int (4 - 1/x)\right)} = \cdots = C\,x\,e^{-4\,x} \implies$$
$$\implies y = e^{4\,x}\int C\,x\,e^{-4\,x} = C\,e^{4\,x}\left(-\frac{x\,e^{-4\,x}}{4} - \frac{e^{-4\,x}}{16} + k\right) = \cdots =$$
$$= -\frac{c}{4}(x + 1/4) + c\,k\,e^{4\,x} = c_1(x + 1/4) + c_2\,e^{4\,x} \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Q9 c.

Resposta

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \frac{z}{2\sqrt{x}} = -\frac{z^3}{2} \implies z^{-3}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \frac{z^{-1}}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

Questão 10

Considere as seguintes eq dif de prim ordem não lin

Q10 b.

$$\boldsymbol{y' + x\,y^2 - (2\,x^2 + 1)\,y + x^3 + x - 1 = 0}$$
$$\boldsymbol{y_1(x) = x}$$

Resposta

$$y' + x\,y^2 - (2\,x^2 + 1)\,y + x^3 + x - 1 = 0 \implies$$
$$\implies y' + y\left(-(2\,x^2 + 1)\right) = \left(-x^3 - x + 1\right) + y^2\,(-x)$$

Questão 14

Determine o integral geral de cada uma das seguintes equações diferenciaia lienares de coeficientes constantes:

Q14 a.

$$\boldsymbol{D^3\,(D+1)^2((D-5)^2+16)\,y=0,\quad \left(\text{em que} D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)}$$

Resposta

$$D^3\,(D+1)^2((D-5)^2+16)\,y=0 \implies$$

$$\implies \text{Raizes:}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 5\pm 4\,i & 1 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies y=c_0+c_1\,x+c_2\,x^2+c_3\,e^{-x}+c_4\,x\,e^{-x}+c_5\,e^{-5\,x}\,\cos 4\,x+c_6\,e^{-5\,x}\,\sin 4\,x$$

Q14 b.

$$\left(\boldsymbol{D}^4 - \mathbf{1}\right)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^3 - \boldsymbol{x} + \mathbf{2}, \quad \left(\text{em que } \boldsymbol{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\right)$$

Resposta

$y = y_0 + y_1 =$
$= \left(c_1\, e^x + c_2\, e^{-x} + c_3\, \cos x + c_4\, \sin x\right) + \left(x^3 - x + 2\right);$

y_0 é solução de $(D^4 - 1)\, y = 0 \implies$
$\implies (\alpha^4 - 1) = (\alpha^2 + 1)(\alpha^2 - 1) \implies$

$$\implies \text{Raizes:} \begin{cases} \begin{array}{cc} \text{Raizes} & \text{Multiplicidade} \\ 1 & 1 \\ \text{-1} & 1 \\ \pm\text{i} & 1 \end{array} \end{cases}$$

$\implies y_0 = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x} + c_3\, \cos x + c_4\, \sin x;$

y_1 é x^p vezes um polinomio de mesmo grau que $x^3 - x + 2$
p é a multiplicidade da raiz$\alpha = 0 \implies \implies$
$y_1 = x^p\left(a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3\right) \implies$
$\implies (D^4 + 1)\, y_1 = 0 + y_1 = y_1 = x^3 - x + 2$

Q14 c.

$$\boldsymbol{y'' + y = \cos x}$$

Resposta

$$y'' + y = (D^2 + 1)\, y = \cos x \implies$$
$$\implies y = y_0 + y_1 = (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \left(\frac{x}{2} \sin x\right);$$

$$\alpha^2 + 1 = 0 \implies$$
$$\implies \begin{array}{cc} \text{Raizes} & \pm 1 \\ \text{Multiplicidade} & 1 \end{array}$$
$$\implies y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y_1 = x^p \left(r\, e^{a\,x} \cos(b\,x) + s\, e^{a\,x} \sin(b\,x)\right) = x\,(r \cos x + s \sin x) \implies$$
$$\implies \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = r \cos x + s \sin x = x\,(-r \sin x + s \cos x) \implies$$
$$\implies \frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}x^2} = \cdots \implies$$
$$\implies (D^2 + 1) y_1 = -2\, r \sin x + 2\, s \cos x = \cos x \implies s = 1/2 \land r = 0 \implies$$
$$\implies y_1 = \frac{x}{2} \sin x$$

Questão 15

Determine a sol geral da equação diferencial linear homogénea de coeficientes consntantes

$$\mathrm{D}^2 y - 4\ \mathrm{D}y + 5\, y = 0$$

Utilizando uma das substituições $x = e^t$ ou $y = x^{-1} \int z\ \mathrm{d}x$ determine a solução geral da equação

$$\mathrm{D}^2 y - 4\ \mathrm{D}y + 5\, y = \frac{e^{2\,x}}{\sin x}$$

Questão 16

Ultilizando uma das substituições $x = e^t$ ou $y = x^{-1} \int z \, \mathrm{d}x$ determine a solução da equação geral

$$2\,x^2\,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 7\,x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3\,x = 0$$

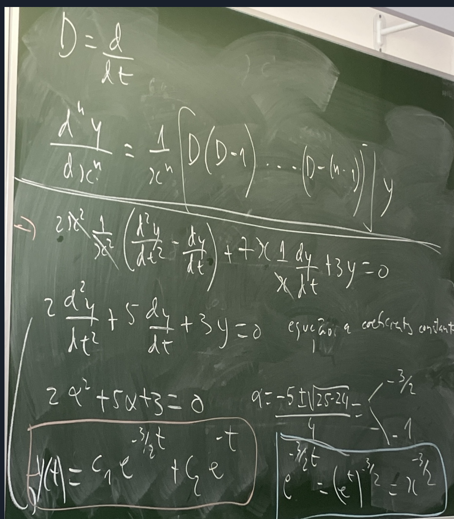
com $x > 0$. Determine anda a solução geral da equação

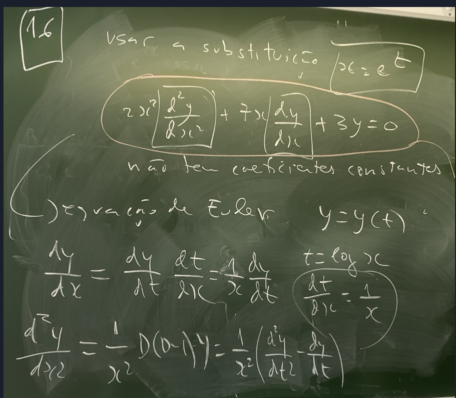
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{7}{2\,x}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{3}{2\,x^2}\,y = 0.5\,x^{-3/2}$$

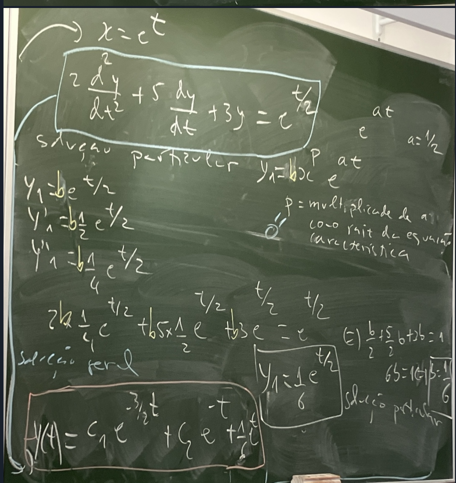
Resposta

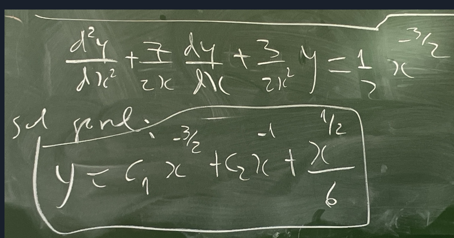
$$y = c_1\,x^{-3/2} + c_2\,x^{-1} + \frac{\sqrt{x}}{6}$$

$$\mathrm{D}_x^2 y + \frac{7}{2\,x}\,\mathrm{D}_x y + \frac{3}{2\,x^2}\,y = x^{-3/2}/2$$









Q28 b.

A equação

$$(x\,y^2 + x^2\,y^2 + 3)\ \mathrm{d}x + x^2\,y\ \mathrm{d}y = 0$$

Admite fatores que são apenas funções de x. det um desses fatores integrantes e o integral geral dessa equação, Determine a solução particular que passa pelo ponto (1,0)

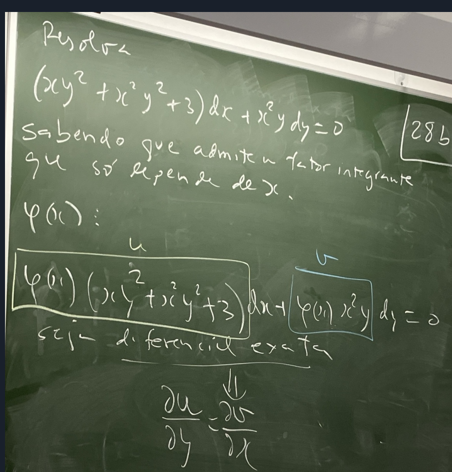
Resposta

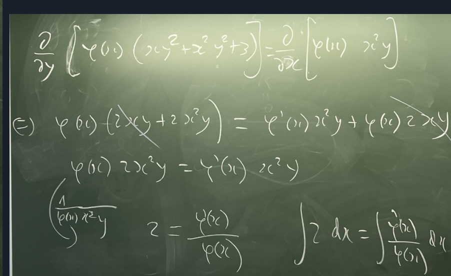
$\varphi(x) = c\,e^{2\,x}$

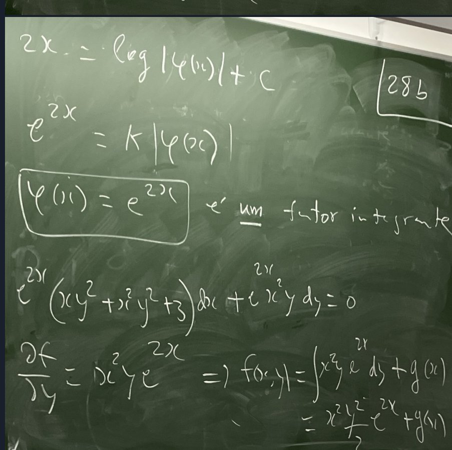
$\varphi_i(x) = e^{2\,x}.$

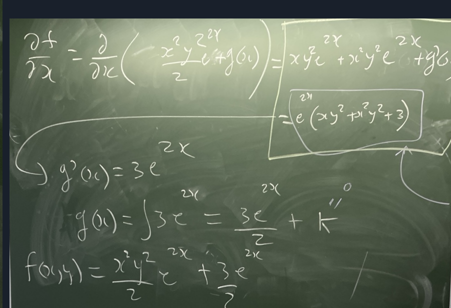
$e^{2\,x}(x^2\,y^2 + 3) = e$

$e^{2\,x}(x^2\,y^2 + 3) = 3\,e^2$









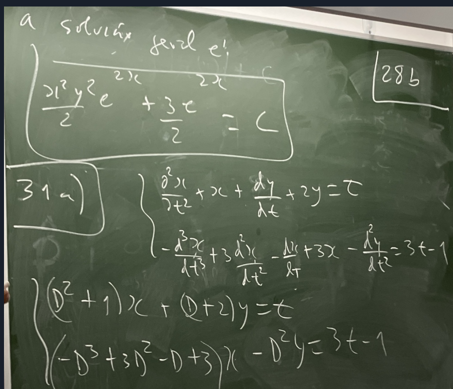
…

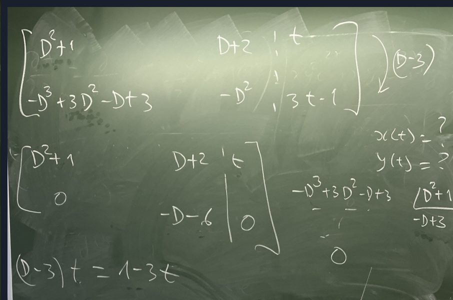
$\rho x = e^{2\,x}$ é um fator integrante

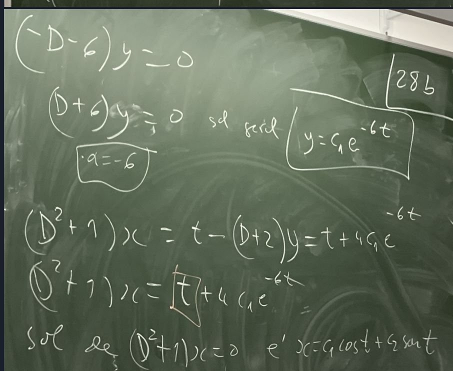
Q31 c.

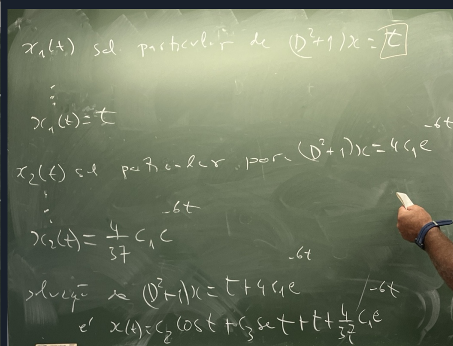
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + x + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2\,y = t \\ -\dfrac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3} + 3\,\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 3\,x - \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -3\,t - 1 \end{cases}$$

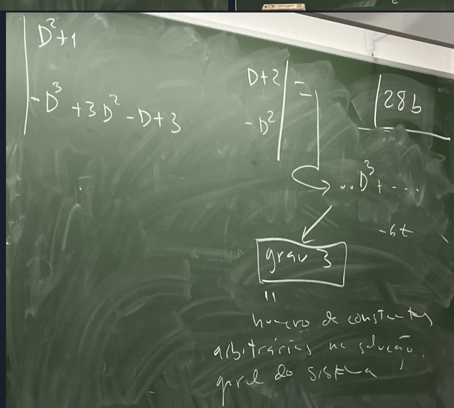
Resposta











$$\begin{bmatrix} D^2+1 & D+2 & | & T \\ -D^3+3\,D^2-D+3 & -D^2 & | & 3t-1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} D^2+1 & D+2 & | & T \\ 0 & -D-6 & | & 0 \end{bmatrix}$$