CN A – Exame de Recurso 2023

Felipe B. Pinto 71951 – EQB

17 de dezembro de 2024

Conteúdo

Questão 1

$$\boldsymbol{f(x) = e^x - 2; \qquad g(x) = \cos(e^x - 2); \qquad \alpha \in [0.5, 1, 5]}$$

$\{\boldsymbol{x_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ Sucessão gerada pela bisseçao convergente para $\boldsymbol{\alpha}$

Qual o valor da iterada x_3 e numero de iteradas k para approx alpha 4 casas dec

---

Resposta

$$\varepsilon = \left| I - \hat{I} \right| = \cdots <\leq 0.5\,\mathrm{E}^{-4}$$

Questão 2

Tabela

x_i	-1	0	2	5
y_i	-4	3	5	-22

Seja $p_2(x)$ poli grau 2 q approx $x_i, i = 0, \ldots, 3$ por mínimos q.

$$\boldsymbol{\sum_{i=0}^{3} (p_2(x_i) - y_i)^2 = 0}$$

qual o valor de $p_2(3)$

Questão 3

$$\boldsymbol{f(-x) + f(x) = 2, \forall\, x \in \mathbb{R}}$$

approx dada por gauss simples com 2 pontos para $I =_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$

Resposta

Questão 5

$$\boldsymbol{I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}$$

- $f(x)$ é poli de grau 4
- $x^{(4)} = 1/12$
-

Menor numero de subintervalos para dividir $[0,1]$ e garantir 6 casas dec

Resposta

$$n : \varepsilon < 0.5\,\mathrm{E}^{-6}$$

$$\varepsilon_I = I - \hat{I}_S = -\frac{h^5}{90}\,f^{(4)}(i) = -\frac{(1/2\,n)^5}{90}\,(1/12) \leq 0.5\,\mathrm{E}^{-}6 \implies$$

$$\implies n = \lceil (-90 * 12 * 0.5\,\mathrm{E}^{-6})^{-1/5}/2 \rceil = \lceil (-540\,\mathrm{E}^{-6})^{-1/5}/2 \rceil = 5$$

Questão 6

Tabela

x_i	-2	-1	0
$f(x_i)$	19	1	1

Q6 a.

Poli de lag int de f para tabela approx $f(0.5)$

Resposta

$$p_2(x) : p_2(0.5) \approx f(0.5);$$

$$p_{2\,(x)} = \sum_{i=0}^{n} y_i\, L_{i\,(x)} =$$

$$= \frac{(18\,x - 2)(x+1)}{2}$$

Q6 b.

$\left|f^{(k)}\right| \leq (1/2)^k \, e^{-x/2}, k = 1, 2, \ldots,$ det major p erro abs

Resposta

$$f_{x^*} - p_{2\,(x^*)} = \frac{f_{(\xi)}^{x+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} x^* - x_i$$

Questão 7

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	6	10	4	0	-2	-8	-4

Q7 a.

Utilizando a regra dos trap comp. $\hat{I}_T$ de $I \int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$ com h=2

Resposta

$$h = \frac{3-(-3)}{n} = 2 \implies n = 3;$$

Q7 b.

regra Ponto médi, $\hat{I}_{PM}$ $n = 3$

Questão 8

$$f(x) = x^3 - \sin(x), I = [0.6, 1]$$
$$y_{i+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}, n = 0, 1, \ldots$$

Sabendo que $f'(x)$ e $f"(x)$ são func crescentes em I

Q8 a.

Verif a conv de y_n para α, partindo de $y_0 = 1$

Resposta

$$\begin{cases} f(x) = & x^3 - \sin(x) \\ f'(x) = & 3\,x^2 - \cos(x) \\ f"(x) = & 6\,x + \sin(x) \end{cases}$$

Condições de convergencia:

$$\begin{cases} |\alpha - x_n| \leq \frac{M_2}{2\,m_1}(x_n - x_{(n-1)})^2 \\ 0 < m_1 < |f'(x)|_{[a,b]} \\ M_2 \geq |f"(x)|_{[a,b]} \end{cases}$$

$$0 < m_1 < f'(0.6) = 3\,(0.6)^2 - \cos(0.6) \cong 0.255 \implies$$
$$\implies m_1 = 0.25$$

$$M_2 \geq |f"(x)|_{[a,b]} = f"(1) = 6 * 1 + \sin(1) \cong 6.841 \implies$$
$$\implies M_2 = 6.85$$

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{6.85}{2 * 0.25}(x_n - x_{(n-1)})^2 \implies$$
$$\implies \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = 1 + \frac{1^3 - \sin(1)}{3 * 1^2 - \cos(1)} \cong 1.064 \\ y_2 = 1 + \frac{1.064^3 - \sin(1.064)}{3 * (1.064)^2 - \cos(1.064)} \cong 1.114 \\ y_3 = 1 + \frac{1.114^3 - \sin(1.114)}{3 * (1.114)^2 - \cos(1.114)} \cong 1.148 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\alpha - y_1| \leq 13.7(y_1 - y_0)^2 = 13.7(1.064 - 1)^2 \cong 0.057 \\ |\alpha - y_2| \leq 13.7(y_2 - y_1)^2 = 13.7(1.114 - 1.064)^2 \cong 0.033 \\ |\alpha - y_3| \leq 13.7(y_3 - y_2)^2 = 13.7(1.148 - 1.114)^2 \cong 0.016 \end{cases}$$

$\therefore$ Converge para α

Q8 b.

y_2

Resposta

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_1 = 1 + \frac{1^3 - \sin(1)}{3*1^2 - \cos(1)} \cong 1.064\,451 \\ y_2 = 1 + \frac{1.064\,451^3 - \sin(1.064\,451)}{3*(1.064\,451)^2 - \cos(1.064\,451)} \cong 1.113\,774 \end{cases}$$

$$|\alpha - y_2| \leq 13.7(y_2 - y_1)^2 = 13.7(1.113\,774 - 1.064\,451)^2 \cong$$

$$\cong 0.033\,330 < 0.5\,\mathrm{E}^{-2}$$

$\therefore$ 2 casas decimais

Questão 9

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

Q9 a.

Sucessão gerada pela jacobi converge para o sistema

Resposta

$$\|G_J\| : G_J = -D^{-1}(L+U) :$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$-D^{-1} = \begin{bmatrix} -(1/2) & 0 \\ 0 & -(-1/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies G_J = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies \|G_j\| = \max(0.25, 0.5) = 0.5 < 1$$

$\therefore$ Sistema converge

Q9 b.

$$X^{(2)} : X^{(0)} = [0\,0]^T$$

Resposta

$$H_J = D^{-1}\,B = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \end{bmatrix} \implies$$
$$\implies X^{(1)} = G_J\,X^{(0)} + H_J = H_J$$

$$X^{(2)} = G_J\,X^{(1)} + H_J = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/4 \\ -3/4 \end{bmatrix}$$

Q9 c.

Menor dos maj para err abs ass ao $X^{(2)}$

Resposta

ε_{abs}

Q9 d.

qts iter para aprox c 4 casas dec

Resposta

$$j : \left\| X^* - X^{(j)} \right\| < \|G\|_\infty^j \left\| X^{(0)} \right\|_\infty + \frac{\|G\|_\infty^j}{1 - \|G\|_\infty} \|H\| =$$
$$= \max\left(1/4, 1/2\right)^j 0 + \frac{\max\left(1/4, 1/2\right)^j}{1 - \max\left(1/4, 1/2\right)} \max 1, 1/2 =$$
$$= 1/2^{(j-1)} \leq 0.5\,\mathrm{E}^{-4} \implies$$
$$\implies j = \lfloor 1 + \log_{0.5} 0.5\,\mathrm{E}^{-4} \rfloor \cong \lfloor 1.070 \rfloor = 1$$