# Cálculo Numérico A

## Ficha de exercícios 5

**Capítulo 5** - Resolução numérica de sistemas de equações lineares

**1.** Sejam $X$ e $A$ definidos por

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -10 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcule $||X||_1$, $||X||_\infty$, $||A||_1$ e $||A||_\infty$.

**2.** Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 0.5 \\ -2 & -10 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 0.2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Verifique se $A$ é de diagonal estritamente dominante.

**3.** Considere a sucessão de vectores definida por $X^{(n)} = GX^{(n-1)} + H$, onde

$$G = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.15 & 0.23 & -0.12 \\ 0.02 & -0.22 & 0.04 \end{bmatrix}, \ H = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.1 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

a) Mostre que a sucessão $X^{(n)}$ converge, qualquer que seja a iterada inicial $X^{(0)}$.

b) Mostre que o limite da sucessão $X^{(n)}$ é solução do sistema de equações lineares $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 & -0.2 \\ -0.15 & 0.77 & 0.12 \\ -0.02 & 0.22 & 0.96 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.1 \\ 1.2 \end{bmatrix}.$$

Seja $X^{(0)} = [0 \ \ 0 \ \ 0]^\top$.

c) Calcule $X^{(2)}$ e obtenha uma estimativa para o erro $||X^{(2)} - X||_\infty$, onde $X$ representa a solução do sistema anterior.

d) Quantas iteradas teria que calcular, se pretendesse obter uma aproximação $X^{(n)}$ de $X$ tal que $||X^{(n)} - X||_\infty \leq 10^{-8}$ ?

**4.** Considere o seguinte sistema

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + 20x_2 + 2x_3 = -44 \\ -2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 22 \end{cases}$$

a) Verifique que o método de Jacobi converge para a solução do sistema.

b) Considerando como aproximação inicial o vector $X^{(0)} = [1.05 \;\; 2.00 \;\; 3.01]^\top$ calcule $X^{(1)}$ e obtenha uma estimativa do erro absoluto cometido.

c) Repita as alíneas anteriores para o método de Gauss-Seidel.

**5.** Considere a matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & a \\ 0 & 7 & -a \\ \frac{a}{2} & -2 & 0 \end{bmatrix}$ do sistema de equações lineares $AX = B$ com $a \in \mathbb{R}$ e $X, B \in \mathbb{R}^3$. Obtenha um intervalo para $a$ de forma a garantir a convergência do método de Gauss-Seidel para a solução de $AX = B$.

**6.** Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha}{4} & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 0.6 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$$

e seja $B = [0.2 \quad 1.2 \quad 0.3]^T$. Designemos por $X$ a solução do sistema de equações lineares $AX = B$.

a) Determine para que valores de $\alpha$, o método de Jacobi converge para $X$.

Nas alíneas seguintes, considere $\alpha = 0.1$ e a sucessão de vectores definida por

$$\begin{cases} X^{(0)} = [0.17 \quad 1.22 \quad 0.06]^T \\ X^{(k)} = G_J X^{(k-1)} + H_J, \quad k = 1, 2, ... \end{cases}.$$

b) Justifique que a sucessão $X^{(k)}$ converge para $X$ e calcule $X^{(1)}$.

c) Determine $n \in \mathbb{N}$ de modo que se verifique $\|X - X^{(n)}\|_\infty \leq 10^{-10}$. Justifique.

**7.** Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$S = \begin{cases} -2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

e $X^{(0)} = [0 \ \ 0 \ \ 0]^T$. Considere nos cálculos 6 casas decimais devidamente arredondadas.

**a)** Verifique a convergência do método de Jacobi para a solução $X^*$ do sistema $S$.

**b)** Utilizando o método de Jacobi determine $X^{(2)}$.

**c)** Determine o menor dos majorantes possíveis para $\left\|X^* - X^{(2)}\right\|_\infty$.

**d)** Sem calcular $X^{(50)}$, verifique se pode garantir 6 casas decimais significativas, para cada componente dessa iterada.

**8.** Considere o seguinte sistema de equações lineares $AX = B$ com

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

e $X^{(n)} = GX^{(n-1)} + H, \ n = 1, 2, ...,$ um método iterativo com $G \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ e $H \in \mathbb{R}^3$. Considere a decomposição de $A$ em $A = D - M$ com $D$ a matriz diagonal obtida de $A$ e $M \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

**a)** Obtenha as expressões de $G$ e $H$ em função de $D$ e $M$ por forma a que a solução $X^*$ de $AX = B$ seja igual à de $X = GX + H$.

**b)** Verifique que o método iterativo definido na alinea anterior converge para $X^*$.

**c)** Considerando $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}^T$, determine a iterada $X^{(2)}$ com 6 casas decimais devidamente arredondadas.

**d)** Determine $n$ de forma a obter uma aproximação com pelo menos 4 casas decimais significativas para todas as componentes de $X^{(n)}$.

**9.** Utilize o método de Gauss com escolha parcial de pivot para determinar a solução dos seguintes sistemas de equações lineares:

**a)**

$$\begin{cases} -x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 3 \\ -2x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

**b)**

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -2x - 10y + z = 0 \\ -5x - y + 4z = 1 \end{cases}$$