Análise Matemática II C
2022/23 (2º semestre)

Lista 4 - Curvas e funções vetoriais

1. Represente geometricamente as seguintes curvas paramétricas em $\mathbf{R}^2$ e determine os vetores velocidade e aceleração em cada ponto.

   (a) $(x, y) = (2t + 1, t^2)$;

   (b) $(x, y) = (\sin t, \cos t - 3), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

2. Represente geometricamente as seguintes curvas paramétricas em $\mathbf{R}^3$ e determine os vetores velocidade e aceleração em cada ponto.

   (a) $(x, y, z) = (2\sin t, 4\cos t, 1), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$;

   (b) $(x, y, z) = (\cos t, \sin t, \frac{t}{2}\pi), \quad -2\pi \leq t \leq 2\pi$.

3. Calcule os vetores velocidade e aceleração para todo o t e a equação da reta tangente no valor de t especificado:

   (a) $(\sin(3t), \cos(3t), 2t^{3/2})$, $t = 1$;

   (b) $(t\sin t, t\cos t, \sqrt{3}t)$, $t = 0$.

4. Determine a equação vetorial da reta tangente à curva $x = \theta - \sin\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ no ponto correspondente a $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ (em $\mathbf{R}^2$).

5. Determine uma representação paramétrica da curva indicada e a reta tangente à curva referida no ponto P_0 :

   (a) $\dfrac{x^2}{4} + 2y^2 = 1$ e $z = 2$, $P_0 = (\sqrt{2}, \dfrac{1}{2}, 2)$;

   (b) $z = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$ e $z = 4x$, $P_0 = (4, 0, 16)$.

6. Para cada uma das seguintes curvas determine a reta tangente no ponto P_0 :

   (a) $y = 3x - 2$ em $\mathbf{R}^2$, $P_0 = (\dfrac{2}{3}, 0)$;

   (b) $x = y^3 = z^2 + 1$ em $\mathbf{R}^3$, $P_0 = (1, 1, 0)$.

7. Seja C a curva em $\mathbb{R}^3$ definida pelas equações paramétricas

$$x = \cos(2\,t),\ y = \frac{2}{3}\sqrt{t^3},\ z = \operatorname{sen}(2\,t), \quad t \in [0,4].$$

Suponha que a curva C corresponde à trajetória de uma partícula P.

(a) Calcule o comprimento do caminho percorrido pela partícula P.

(b) Determine uma equação da reta tangente à trajetória no ponto $(0, \dfrac{\sqrt{\pi^3}}{12}, 1)$.

8. Considere a função vetorial $\vec{r} : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}^2$, $\qquad \vec{r}(t) = e^t(\cos(2t), \sin(2t))$.

(a) Mostre que $\|\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t)\| = \sqrt{5}\,e^t$ e calcule o comprimento da curva C definida por $\vec{r}$.

(b) Determine a parametrização de C por comprimento de arco $s(t)$ verificando $s(0) = 0$.

9. (a) Identifique o domínio da função vetorial $\vec{\sigma}(t) = \frac{1}{t}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{t-1}}\vec{j} + \frac{1}{t-2}\vec{k}$.

(b) Calcule $\vec{\sigma}'(t)$ e $\vec{\sigma}''(t)$.

10. Sejam $\vec{\sigma}_1(t) = e^t\vec{i} + (\sin t)\vec{j} + t^3\vec{k}$ e $\vec{\sigma}_2(t) = e^{-t}\vec{i} + (\cos t)\vec{j} - 2t^3\vec{k}$. Calcule as seguintes derivadas:

(a) $\dfrac{d}{dt}[\vec{\sigma}_1(t).\vec{\sigma}_2(t)]$;

(b) $\dfrac{d}{dt}[\vec{\sigma}_1(t^2)]$.

11. Seja $\vec{\sigma}$ uma função vetorial diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $\vec{\sigma}'(t) \neq 0$, $\forall t$. Mostre que se t_0 é ponto de máximo local da função $\tau(t) = ||\vec{\sigma}(t)||$, então $\vec{\sigma}'(t_0)$ e a $\vec{\sigma}(t_0)$ são perpendiculares.

12. Suponhamos que uma partícula segue um caminho C, descrito por $(e^t, e^{-t}, \cos t)$ até ao instante $t = 0$, a partir do qual segue pelo caminho descrito pela reta tangente a C nesse instante. Onde se encontra a partícula em $t = 2$?

13. Considere a função vetorial

$$\vec{\sigma}(t) = \frac{t}{2}\vec{i} + \cos(\sqrt{2}\,t)\vec{j} + \operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t)\vec{k}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

e designe por C a curva paramétrica definida por $\vec{\sigma}$. Suponha que C corresponde à trajetória de uma partícula P.

(a) Determine o vector tangente unitário em cada ponto da curva C.

(b) Calcule o comprimento da curva C.

(c) Determine a função comprimento de arco da curva C.

(d) Determine a parametrização de C por comprimento de arco $s(t)$ verificando $s(0) = 0$.

(e) Determine as posições inicial e final da partícula P.

(f) Determine a distância percorrida pela partícula P para $t = \frac{\pi}{2}$.

(g) Em que ponto se encontra a partícula P após ter percorrido uma distância de $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.