

Investigação Operacional

Gestão de projetos

15 de maio de 2023

Construção de um edifício

Actividade	Descrição	Precedências imediatas	Duração (semanas)
A	Escavações		2
B	Fundações	A	4
C	Estrutura	B	8
D	Cobertura	C	1
E	Paredes Exteriores	B	2
F	Paredes Interiores	B	3
G	Infraestruturas	D, E, F	4
H	Revestimentos Int.	G	2
I	Revestimentos Ext.	G	3
J	Instalar Vãos Int.	H	1
K	Instalar Vãos Ext.	I	2
L	Inst. Equip. Fixo	H	2
M	Testar Infraestruturas	G	1

Projeto

- ▶ Projeto: conjunto de actividades;

Projeto

- ▶ Projeto: conjunto de actividades;
- ▶ Actividades

Projeto

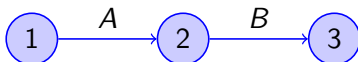
- ▶ Projeto: conjunto de actividades;
- ▶ Actividades
 - ▶ duração;

Projeto

- ▶ Projeto: conjunto de actividades;
- ▶ Actividades
 - ▶ duração;
 - ▶ precedências imediatas;

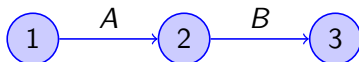
Projeto

- ▶ Projeto: conjunto de actividades;
- ▶ Actividades
 - ▶ duração;
 - ▶ precedências imediatas;
- ▶ Representação em Rede (AOA - Actividades nos arcos)



Projeto

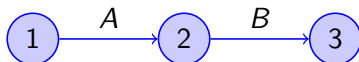
- ▶ Projeto: conjunto de actividades;
- ▶ Actividades
 - ▶ duração;
 - ▶ precedências imediatas;
- ▶ Representação em Rede (AOA - Actividades nos arcos)



- ▶ Arcos: actividades;

Projeto

- ▶ Projeto: conjunto de actividades;
- ▶ Actividades
 - ▶ duração;
 - ▶ precedências imediatas;
- ▶ Representação em Rede (AOA - Actividades nos arcos)



- ▶ Arcos: actividades;
- ▶ Nós: início/conclusão das actividades que divergem/convergem nos nós

Regras para a construção da rede

1. O **nó 1** representa o início do projeto. Do nó 1 divergem os arcos que representam atividades sem precedências.

Regras para a construção da rede

2. O **nó final** f representa a conclusão do projeto. No nó f convergem os arcos que representam atividades sem sucessores.

Regras para a construção da rede

3. Os nós são numerados de forma que, em qualquer arco (i, j) , tem-se $i < j$.

Regras para a construção da rede

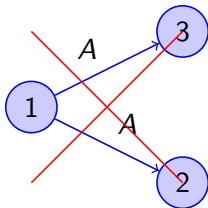
4. A reunião dos arcos dos caminhos $1 \rightarrow i$ representam o conjunto das atividades que precedem as atividades que divergem de i

Regras para a construção da rede

5. Cada atividade é representada por um único arco.

Regras para a construção da rede

5. Cada atividade é representada por um único arco.

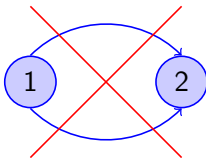


Regras para a construção da rede

6. Não há mais do que arco a ligar um par de nós

Regras para a construção da rede

6. Não há mais do que arco a ligar um par de nós



Regras para a construção da rede

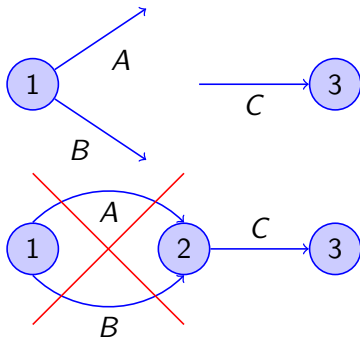
- ▶ As regras 5 e 6 podem forçar a utilização de actividades **fictícias**: actividades com **duração zero**.

Regras para a construção da rede

- ▶ As regras 5 e 6 podem forçar a utilização de actividades **fictícias**: actividades com **duração zero**.
- ▶ Exemplo: as actividades A e B não têm precedentes e precedem C .

Regras para a construção da rede

- ▶ As regras 5 e 6 podem forçar a utilização de actividades **fictícias**: actividades com **duração zero**.
- ▶ Exemplo: as actividades *A* e *B* não têm precedentes e precedem *C*.



Regras para a construção da rede

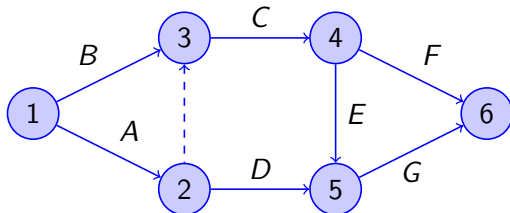
- ▶ As regras 5 e 6 podem forçar a utilização de actividades **fictícias**: actividades com **duração zero**.
- ▶ Exemplo: as actividades A e B não têm precedentes e precedem C .

Exemplo

Actividade	Precedências imediatas	Duração (dias)
A		5
B		7
C	A, B	3
D	A	10
E	C	9
F	C	6
G	D, E	8

Exemplo

Actividade	Precedências imediatas	Duração (dias)
A		5
B		7
C	A, B	3
D	A	10
E	C	9
F	C	6
G	D, E	8

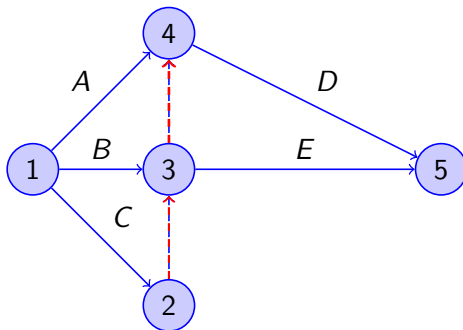


Exemplo

Actividade	Precedências imediatas	Duração (dias)
A		1
B		1
C		11
D	A, B	2
E	B, C	1

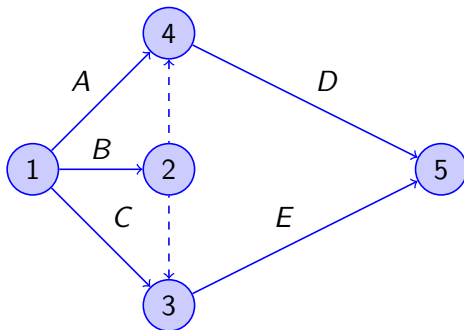
Exemplo

Actividade	Precedências imediatas	Duração (dias)
A		1
B		1
C		11
D	A, B	2
E	B, C	1



Exemplo

Actividade	Precedências imediatas	Duração (dias)
A		1
B		1
C		11
D	A, B	2
E	B, C	1



Duração total do projeto

Instance mais cedo (imc)

instante mais cedo no nó i – instante mais cedo que o acontecimento representado por i pode ocorrer.

Duração total do projeto

Instance mais cedo (imc)

instante mais cedo no nó i – instante mais cedo que o acontecimento representado por i pode ocorrer.

$$\text{imc}(1)=0;$$

Duração total do projeto

Instance mais cedo (imc)

instante mais cedo no nó i – instante mais cedo que o acontecimento representado por i pode ocorrer.

$\text{imc}(1)=0$;

para $j = 2, 3, \dots, f$

Duração total do projeto

Instance mais cedo (imc)

instante mais cedo no nó i – instante mais cedo que o acontecimento representado por i pode ocorrer.

$\text{imc}(1)=0$;

para $j = 2, 3, \dots, f$

$\text{imc}(j) = \max\{\text{imc}(i) + \text{duração}(i, j), \text{ para todo o arco } (i, j)\}$

Duração total do projeto

Instance mais tarde (imt)

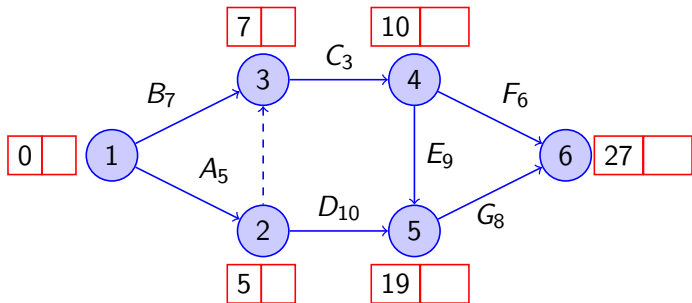
instante mais tarde no nó i – instante mais tarde que o acontecimento representado por i pode ocorrer sem alterar a duração do projeto.

Duração total do projeto

Instance mais tarde (imt)

instante mais tarde no nó i – instante mais tarde que o acontecimento representado por i pode ocorrer sem alterar a duração do projeto.

$$\text{imt}(f) = \text{imc}(f);$$



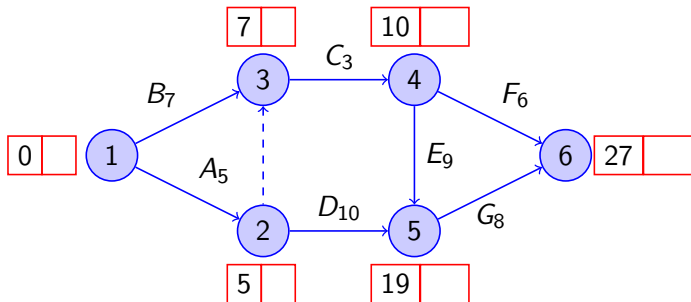
Duração total do projeto

Instance mais tarde (imt)

instante mais tarde no nó i – instante mais tarde que o acontecimento representado por i pode ocorrer sem alterar a duração do projeto.

$$\text{imt}(f) = \text{imc}(f);$$

para $i = f - 1, f - 2, \dots, 1$



Folgas

Folga total no arco (i, j) (FT)

atraso máximo do início da atividade representada por (i, j) sem alterar a duração do projeto.

Folgas

Folga total no arco (i, j) (FT)

atraso máximo do início da atividade representada por (i, j) sem alterar a duração do projeto.

► $FT(i, j) = imt(j) - imc(i) - duração(i, j);$

Folga total no arco (i, j) (FT)

atraso máximo do início da atividade representada por (i, j) sem alterar a duração do projeto.

- ▶ $FT(i, j) = imt(j) - imc(i) - duração(i, j)$;
- ▶ Uma atividade é critica se tem folga total igual a 0;

Folga total no arco (i, j) (FT)

atraso máximo do início da atividade representada por (i, j) sem alterar a duração do projeto.

- ▶ $FT(i, j) = \text{imt}(j) - \text{imc}(i) - \text{duração}(i, j)$;
- ▶ Uma atividade é crítica se tem folga total igual a 0;
- ▶ Um caminho $1 \mapsto f$ é crítico se todos os arcos são críticos.

Exemplo

Determinar imc, imt, FT, caminho crítico e a duração total do projeto.

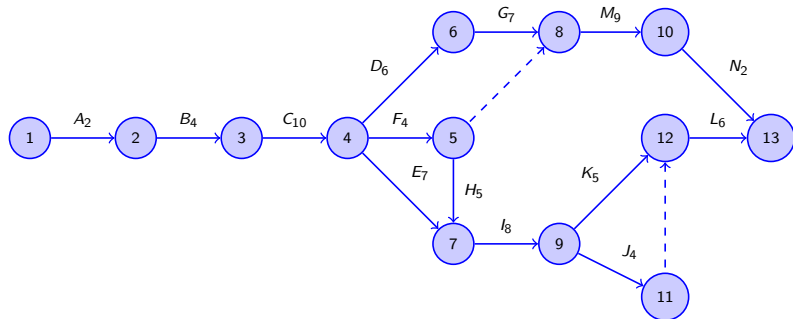
Actividade	Descrição	Precedências imediatas	Duração (semanas)
A	Escavações		2
B	Fundações	A	4
C	Estrutura	B	8
D	Cobertura	C	1
E	Paredes Exteriores	B	2
F	Paredes Interiores	B	3
G	Infraestruturas	D, E, F	4
H	Revestimentos Int.	G	2
I	Revestimentos Ext.	G	3
J	Instalar Vãos Int.	H	1
K	Instalar Vãos Ext.	I	2
L	Inst. Equip. Fixo	H	2
M	Testar Infraestruturas	G	1

Exemplo

Determinar imc, imt, FT, caminho crítico e a duração total do projeto.

Actividade	Precedências	Duração(semanas)
A		2
B	A	4
C	B	10
D	C	6
E	C	7
F	C	4
G	D	7
H	F	5
I	E,H	8
J	I	4
K	I	5
L	J,K	6
M	F,G	9
N	M	2

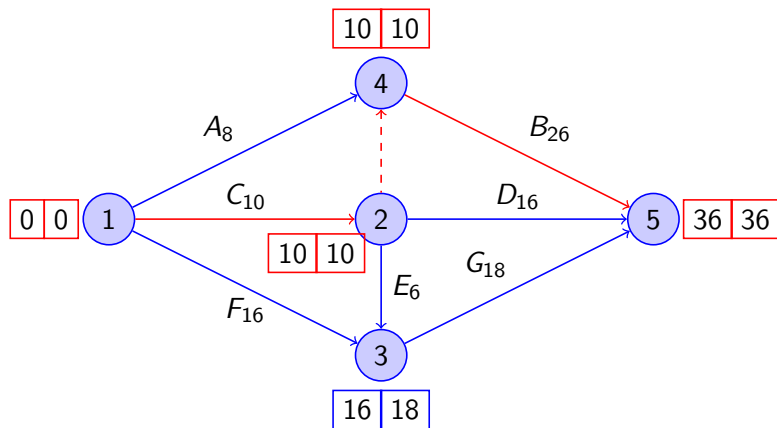
Exemplo-rede



Gestão de recursos: projeto

Atividade	Precedência	Duração (u.t.)	Recursos necessários
A		8	10
B	A, C	26	6
C		10	8
D	C	16	10
E	C	6	14
F		16	8
G	E,F	18	10

Gestão de recursos: rede



Gestão de recursos: cronograma (diagrama de Gantt)

Diagrama de Gantt

- ▶ é um gráfico de barras horizontal;

Gestão de recursos: cronograma (diagrama de Gantt)

Diagrama de Gantt

- ▶ é um gráfico de barras horizontal;
- ▶ as atividades são dispostas no eixo vertical;

Gestão de recursos: cronograma (diagrama de Gantt)

Diagrama de Gantt

- ▶ é um gráfico de barras horizontal;
- ▶ as atividades são dispostas no eixo vertical;
- ▶ o eixo horizontal marca o tempo;

Gestão de recursos: cronograma (diagrama de Gantt)

Diagrama de Gantt

- ▶ é um gráfico de barras horizontal;
- ▶ as atividades são dispostas no eixo vertical;
- ▶ o eixo horizontal marca o tempo;
- ▶ as atividades críticas são agendadas no momento mais cedo;

Gestão de recursos: cronograma (diagrama de Gantt)

Diagrama de Gantt

- ▶ é um gráfico de barras horizontal;
- ▶ as atividades são dispostas no eixo vertical;
- ▶ o eixo horizontal marca o tempo;
- ▶ as atividades críticas são agendadas no momento mais cedo;
- ▶ a posição destas não pode ser mudada;

Gestão de recursos: cronograma (diagrama de Gantt)

Diagrama de Gantt

- ▶ é um gráfico de barras horizontal;
- ▶ as atividades são dispostas no eixo vertical;
- ▶ o eixo horizontal marca o tempo;
- ▶ as atividades críticas são agendadas no momento mais cedo;
- ▶ a posição destas não pode ser mudada;
- ▶ as não críticas tem uma folga no agendamento.

Gestão de recursos: cronograma (diagrama de Gantt)

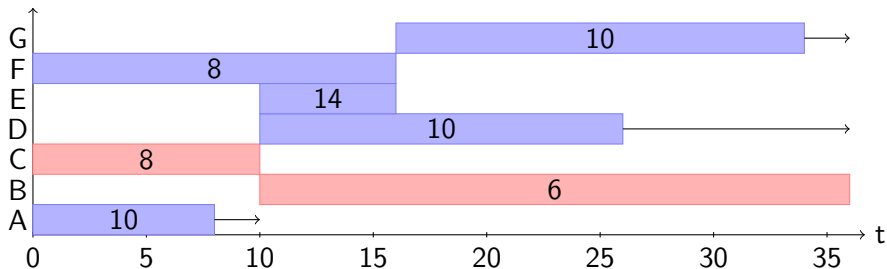
Agendamento

Atividades não críticas: tão cedo quanto possível

Gestão de recursos: cronograma (diagrama de Gantt)

Agendamento

Atividades não críticas: tão cedo quanto possível



Gestão de recursos

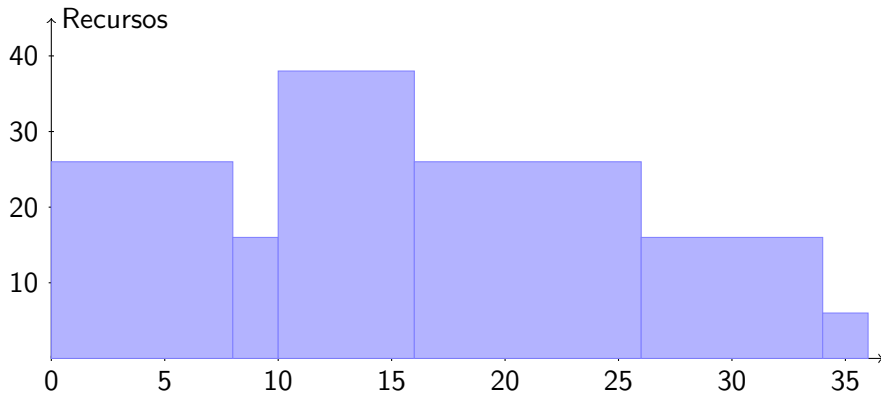
Agendamento

Atividades não críticas: tão cedo quanto possível

Gestão de recursos

Agendamento

Atividades não críticas: tão cedo quanto possível



Gestão de recursos: cronograma (diagrama de Gantt)

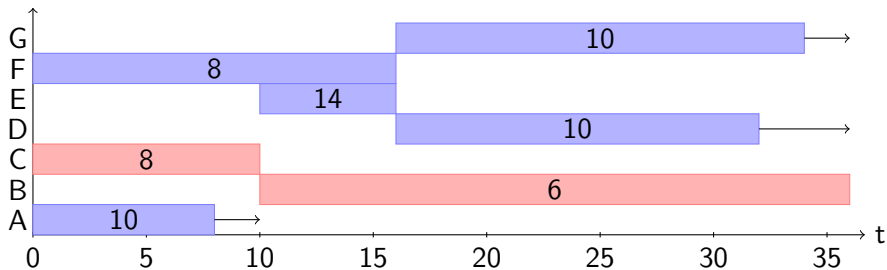
Agendamento

Atrasar início da atividade D.

Gestão de recursos: cronograma (diagrama de Gantt)

Agendamento

Atrasar início da atividade D.



Gestão de recursos

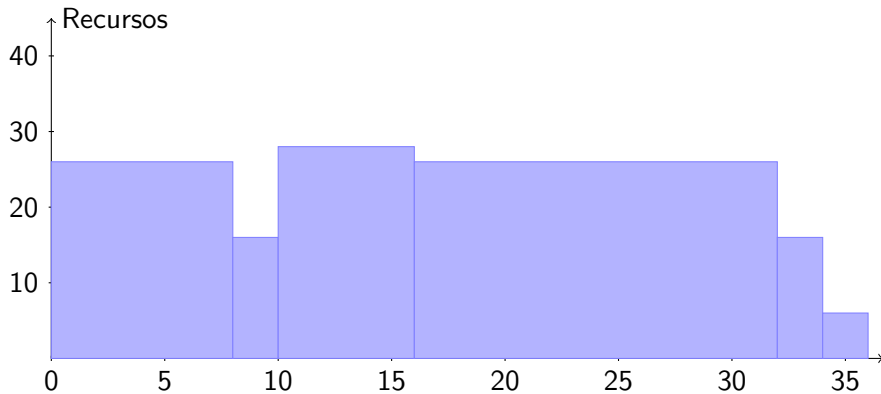
Objetivo

Minimizar o número máximo de recursos em utilização.

Gestão de recursos

Objetivo

Minimizar o número máximo de recursos em utilização.



Determinar o tempo mínimo de execução do projeto via PL

Variáveis de decisão

x_j - instante que ocorre o acontecimento (nó) j

Determinar o tempo mínimo de execução do projeto via PL

Variáveis de decisão

x_j - instante que ocorre o acontecimento (nó) j

Formulação

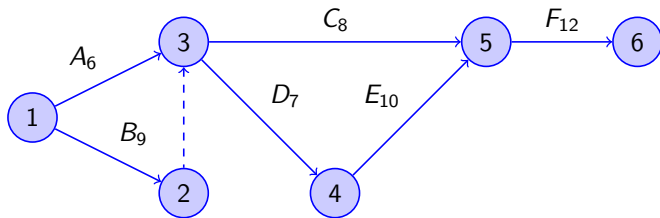
$$\begin{array}{ll}\min & x_f \\ \text{s. a} & x_1 = 0 \\ & x_j \geq x_i + d_{ij}, \text{ para todo o arco } (i, j),\end{array}$$

em que d_{ij} é a duração do arco (i, j) .

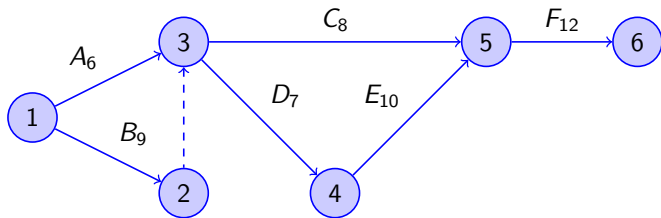
Exemplo

Actividade	Precedências imediatas	Duração (semanas)
A		6
B		9
C	A, B	8
D	A, B	7
E	D	10
F	C, E	12

Determinar o tempo mínimo de execução do projeto via PL

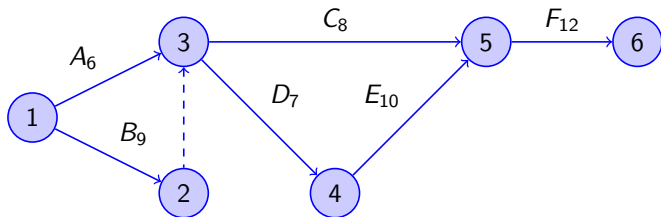


Determinar o tempo mínimo de execução do projeto via PL



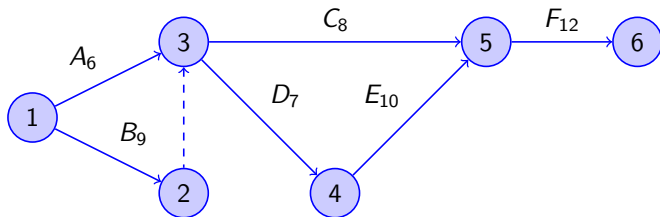
min x_6

Determinar o tempo mínimo de execução do projeto via PL



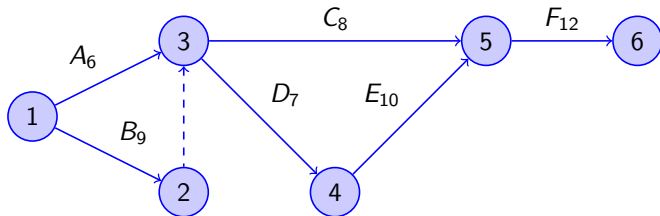
$$\begin{array}{ll} \min & x_6 \\ \text{s. a} & x_1 = 0, \end{array}$$

Determinar o tempo mínimo de execução do projeto via PL



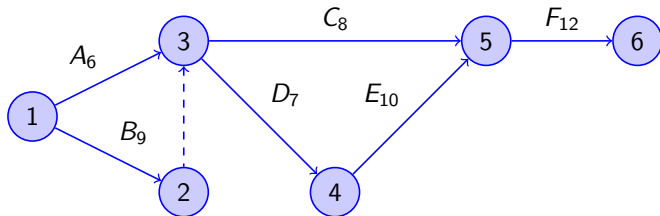
$$\begin{array}{ll}\min & x_6 \\ \text{s. a} & x_1 = 0, \\ & x_2 \geq x_1 + 9,\end{array}$$

Determinar o tempo mínimo de execução do projeto via PL



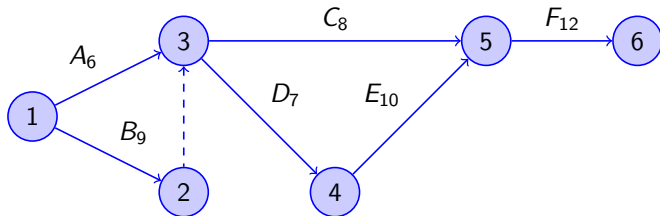
$$\begin{array}{ll}\min & x_6 \\ \text{s. a} & x_1 = 0, \\ & x_2 \geq x_1 + 9, \\ & x_3 \geq x_1 + 6, \quad x_3 \geq x_2,\end{array}$$

Determinar o tempo mínimo de execução do projeto via PL



$$\begin{array}{ll}\min & x_6 \\ \text{s. a} & x_1 = 0, \\ & x_2 \geq x_1 + 9, \\ & x_3 \geq x_1 + 6, \quad x_3 \geq x_2, \\ & x_4 \geq x_3 + 7,\end{array}$$

Determinar o tempo mínimo de execução do projeto via PL



$$\min \quad x_6$$

$$\text{s. a} \quad x_1 = 0,$$

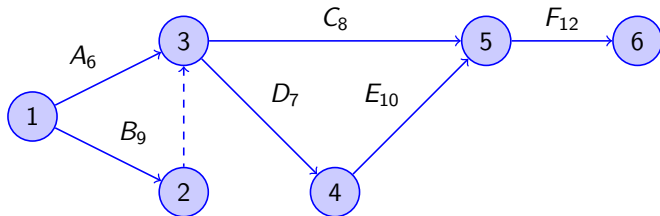
$$x_2 \geq x_1 + 9,$$

$$x_3 \geq x_1 + 6, \quad x_3 \geq x_2,$$

$$x_4 \geq x_3 + 7,$$

$$x_5 \geq x_3 + 8, \quad x_5 \geq x_4 + 10,$$

Determinar o tempo mínimo de execução do projeto via PL



$$\min \quad x_6$$

$$\text{s. a } x_1 = 0,$$

$$x_2 \geq x_1 + 9,$$

$$x_3 \geq x_1 + 6, \quad x_3 \geq x_2,$$

$$x_4 \geq x_3 + 7,$$

$$x_5 \geq x_3 + 8, \quad x_5 \geq x_4 + 10,$$

$$x_6 \geq x_5 + 12.$$

Redução da duração do projeto vs Custo

Problema

Determinar as durações das atividades que permitem concluir o projeto em T unidades de tempo, com custo total mínimo.

- ▶ c_{ij} custo unitário de redução da atividade (i, j) ;
- ▶ d_{ij} duração da atividade (i, j) ;
- ▶ r_{ij} na duração da atividade (i, j) ;
- ▶ $r_{ij} \geq r$;
- ▶ $r_{ij} \leq R$;

Redução da duração do projeto vs Custo

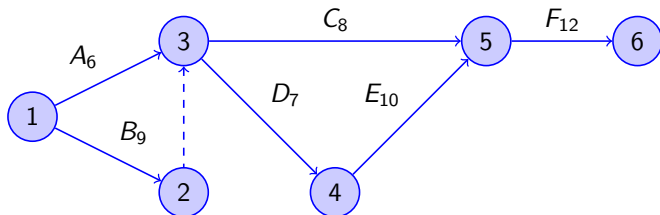
Problema

Determinar as durações das atividades que permitem concluir o projeto em T unidades de tempo, com custo total mínimo.

Formulação

$$\begin{array}{ll}\min & \sum c_{ij}r_{ij} \\ \text{s. a} & r_{ij} \geq r, \\ & r_{ij} \leq R, \\ & x_j \geq x_i + (d_{ij} - r_{ij}), \\ & x_1 = 0, \\ & x_f \leq T.\end{array}$$

Reduzir a duração do projeto para 25 dias



A duração de cada atividade pode ser reduzida até 5 dias.

Tabela: Custo de reduzir/dia:

A	B	C	D	E	F
10	20	3	30	40	50

Modelo em programação linear

a — número de dias de redução da atividade A ;

b — número de dias de redução da atividade B ;

c, d, e, f — número de dias de redução das atividades C, D, E e F respetivamente;

$$\min \quad 10a + 20b + 3c + 7d + 40e + 50f$$

$$\text{s. a} \quad a \leq 5, \quad b \leq 5, \quad c \leq 5, \quad d \leq 5, \quad e \leq 5, \quad f \leq 5$$

$$x_1 = 0, \quad x_6 \leq 25$$

$$x_2 \geq x_1 + (9 - b),$$

$$x_3 \geq x_1 + (6 - a), \quad x_3 \geq x_2,$$

$$x_3 \geq x_2,$$

$$x_4 \geq x_3 + (7 - d),$$

$$x_5 \geq x_3 + (8 - c), \quad x_5 \geq x_4 + (10 - e)$$

$$x_6 \geq x_5 + (12 - f).$$

Exercício

Atividade	Precedências imediatas	Duração (dias)	Custo (Euros) de redução/dia	Redução Máxima
A		5	30	2
B	A	8	15	3
C	B	10	20	1
D	B	5	40	2
E	B	4	20	2
F	E	6	30	3
G	C, F	3	40	1

1. Desenhe a rede do projeto
2. Calcule a folga total de cada atividade e identifique o caminho crítico
3. Formule em programação linear um modelo que permita reduzir a duração do projeto para 20 dias, minimizando o custo total de reduzir a duração das atividades.

PERT (Program Evaluation and Review Technique)

A duração de cada atividade é uma variável aleatória.

PERT (Program Evaluation and Review Technique)

A duração de cada atividade é uma variável aleatória.

Três estimativas da duração:

m - mais provável (moda da distr. de prob.)

PERT (Program Evaluation and Review Technique)

A duração de cada atividade é uma variável aleatória.

Três estimativas da duração:

m - mais provável (moda da distr. de prob.)

a - otimista (tudo corre o melhor possível)

PERT (Program Evaluation and Review Technique)

A duração de cada atividade é uma variável aleatória.

Três estimativas da duração:

m - mais provável (moda da distr. de prob.)

a - otimista (tudo corre o melhor possível)

b - pessimista (tudo corre mal... mas corre)

Hipóteses

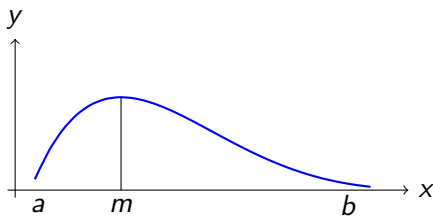
Hipótese 1

T_{ij} , a duração da atividade (i, j) , é variável aleatória com distribuição de probabilidade beta.

Hipóteses

Hipótese 1

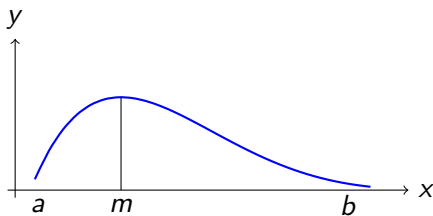
T_{ij} , a duração da atividade (i,j) , é variável aleatória com distribuição de probabilidade beta.



Hipóteses

Hipótese 1

T_{ij} , a duração da atividade (i, j) , é variável aleatória com distribuição de probabilidade beta.



$$E(T_{ij}) \approx \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$\text{var}(T_{ij}) \approx \left(\frac{b - a}{6} \right)^2$$

Hipóteses

Hipótese 2

As durações das atividades são variáveis aleatórias independentes.

Hipóteses

Hipótese 2

As durações das atividades são variáveis aleatórias independentes.

Seja P um caminho qualquer na rede do projeto.

Duração média de P

$$\sum_{(i,j) \in P} E(T_{ij})$$

Hipóteses

Hipótese 2

As durações das atividades são variáveis aleatórias independentes.

Seja P um caminho qualquer na rede do projeto.

Duração média de P

$$\sum_{(i,j) \in P} E(T_{ij})$$

Variância da duração de P

$$\sum_{(i,j) \in P} \text{var}(T_{ij})$$

Hipóteses

- ▶ T -variável aleatória duração do projeto;

Hipóteses

- ▶ T -variável aleatória duração do projeto;
- ▶ $T = \max T_P$, em que P é um caminho qualquer $1 \mapsto f$.

Hipóteses

- ▶ T -variável aleatória duração do projeto;
- ▶ $T = \max T_P$, em que P é um caminho qualquer $1 \mapsto f$.

Hipóteses

- ▶ T -variável aleatória duração do projeto;
- ▶ $T = \max T_P$, em que P é um caminho qualquer $1 \mapsto f$.

Hipótese 3

$T = T_{CC}$, em que CC é um caminho crítico relativamente aos valores médios das durações das atividades

Hipóteses

- ▶ T -variável aleatória duração do projeto;
- ▶ $T = \max T_P$, em que P é um caminho qualquer $1 \mapsto f$.

Hipótese 3

$T = T_{CC}$, em que CC é um caminho crítico relativamente aos valores médios das durações das atividades

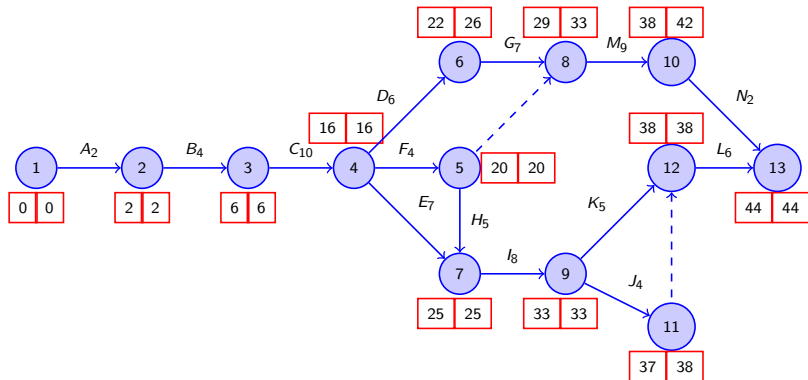
Hipótese 4

T tem distribuição normal $N(\mu, \sigma)$,

$$\mu = \sum_{(i,j) \in CC} E(T_{ij})$$

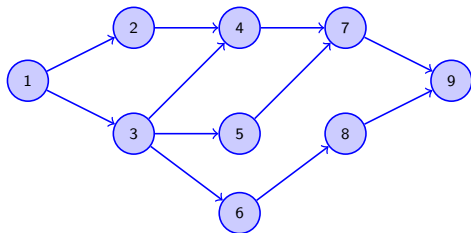
$$\sigma^2 = \sum_{(i,j) \in CC} \text{var}(T_{ij})$$

Qual a probabilidade do projeto terminar antes de 50 dias?



Assuma que as durações indicadas são valores os médios de duração e também respectivas variâncias.

Exercício



atividade	a	b	m
(1, 2)	4	8	6
(1, 3)	2	8	4
(2, 4)	1	7	3
(3, 4)	6	12	9
(3, 5)	5	15	10
(3, 6)	7	18	12
(4, 7)	5	12	9
(5, 7)	1	3	2
(6, 8)	2	6	3
(7, 9)	10	20	15
(8, 9)	6	11	9

1. Determine o caminho crítico (relativamente a m).
2. Estabeleça uma formulação linear para obter a duração (relativamente a m) do caminho crítico
3. Qual a probabilidade do projeto estar concluído em não mais do que 40 dias?

Exercício

Considere o projeto com as seguintes características:

Atividade	Precedências Imediatas	Duração média (dias)	Desvio padrão
A	C	8	1
B	D, F, G	12	3
C	K	9	1
D	E, J	12	2
E		10	3
F	E	15	4
G		18	4
H	G	15	3
I	B, C, H	13	2
J		9	1
K	E	12	2

1. Desenhe a rede do projeto.
2. Calcule a duração média mínima e o correspondente caminho crítico.

Exercício

Considere o projeto com as seguintes características:

Atividade	Precedências Imediatas	Duração média (dias)	Desvio padrão
A	C	8	1
B	D, F, G	12	3
C	K	9	1
D	E, J	12	2
E		10	3
F	E	15	4
G		18	4
H	G	15	3
I	B, C, H	13	2
J		9	1
K	E	12	2

- Calcule a probabilidade da duração do projeto: a) ser menor ou igual 45 dias; b) ser maior ou igual a 55 dias.
- Com probabilidade 99%, qual é a duração mínima do projeto?