FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2019/2020
16 DE OUTUBRO DE 2019

Duração: 2horas.

COTAÇÕES: Grupo I- $4 \times 9\% = 36\%$, Grupo II- 1. a) 12%, b) 9%
2. a)12%, b)9%, c)10% Grupo III- 12%.

Nome:

Nº de aluno: Nº de caderno:

PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES DO GRUPO I ASSINALE COM X O QUADRADO CORRESPONDENTE À ALTERNATIVA CORRECTA.

GRUPO I

1. Sejam V e F o vértice e o foco da parábola de equação

$$y^2 - 8y + 8x - 24 = 0.$$

Então:

☐ $V = (4, 5)$ e $F = (2, 5)$ ☐ $V = (4, 5)$ e $F = (6, 5)$ ☐ $V = (4, 5)$ e $F = (5, 5)$

☐ $V = (5, 4)$ e $F = (3, 5)$ ☐ $V = (5, 4)$ e $F = (3, 4)$ ☐ $V = (5, 4)$ e $F = (3, 3)$

2. Uma das seguintes funções não é uma norma. Indique qual:

☐ $g_1(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + |z|$ ☐ $g_2(x, y, z) = 2|x| + 3|y| + 4|z|$

☐ $g_3(x, y, z) = |x - y| + |y - z| + |x|$ ☐ $g_4(x, y, z) = |x - z| + |y|$

☐ $g_5(x, y, z) = Max\{|x|, |y|\} + |z|$ ☐ $g_6(x, y, z) = |x - z| + |y| + |z|$

3. Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \ \wedge \ y \leq 0 \ \wedge \ y \neq x\} \cup \{(0,0)\}$.

☐ A é desconexo, $IntA \neq A$ e $A' = A$

☐ A é conexo, $IntA \neq A$ e $A' = A$

☐ A é desconexo, $adA \neq A$ e $A' \neq A$

☐ A é ilimitado, A é conexo e $intA \neq A$

☐ A é ilimitado, A é conexo e $intA = A$

☐ A é ilimitado, $adA = A$ e $A' \neq A$

Nota: A' designa o conjunto dos pontos de acumulação de A.

4. Considere a função real de duas variáveis reais, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x - 3y, & \text{se} \quad xy \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad xy = 0. \end{cases}$$

☐ A função $f(x,y)$ não tem limite no ponto $(0,0)$.

☐ A função $f(x,y)$ é descontínua no ponto $(0,0)$.

☐ A função $f(x,y)$ tem limite no ponto $(0,0)$ mas não possui derivadas parciais nesse ponto.

☐ A função $f(x,y)$ não tem limite no ponto $(0,0)$ mas possui nesse ponto derivadas parciais.

☐ A função $f(x,y)$ tem derivada direcional no ponto $(0,0)$ segundo qualquer vetor mas não é diferenciável em $(0,0)$.

☐ A função $f(x,y)$ tem derivada direcional no ponto $(0,0)$ segundo qualquer vetor e é diferenciável em $(0,0)$.

1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2019/2020
16 DE OUTUBRO DE 2019

COTAÇÕES: Grupo I- $4 \times 9\% = 36\%$, Grupo II- 1. a) 12%, b) 9%
2. a)12%, b)9%, c)10% Grupo III- 12%.

GRUPO II

1. Considere a função real f de duas variáveis reais, definida por

$$f(x,y) = \log(xy) + \sqrt{16 - x^2 - 4y^2}.$$

a) Indique o seu domínio D e esboce-o. Indique o interior de D e a sua fronteira. Diga, justificando, se D é um conjunto aberto. O conjunto D é conexo? Justifique.

b) Determine o gradiente da função f no ponto $\left(3, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

MUDE DE FOLHA

2. Considere a função real g, de duas variáveis reais, definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y - 3y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ c & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Mostre que dado um número real positivo δ, existe um número real positivo ϵ, tal que se $(x,y) \neq (0,0)$ e $\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$, então $|g(x,y)| < \delta$. Diga, justificando, para que valor de c a função g é contínua em $(0,0)$.

b) Supondo $c = 0$ determine, por definição, as derivadas $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

c) Determine, por definição, a derivada direcional de g no ponto $(0,0)$ segundo o vector $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Diga, justificando, se g é diferenciável no ponto $(0,0)$.

MUDE DE FOLHA

GRUPO III

Seja f uma função real, definida num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e $a = (a_1, a_2)$ um ponto pertencente a D. Diz-se que f é diferenciável no ponto a se existirem constantes reais α e β tais que para $h = (h_1, h_2)$ tal que $a + h \in D$, se tem

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = \alpha h_1 + \beta h_2 + ||(h_1, h_2)||\varepsilon(h_1, h_2),$$

com

$$\lim_{(h_1,h_2)\to 0} \varepsilon(h_1, h_2) = 0.$$

Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \alpha$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = \beta$.