Cálculo Numérico A

Ficha 3 - Integração Numérica

1. Considere o integral

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(x)} dx.$$

a) Determine uma aproximação de I, utilizando a regra dos trapézios simples. Obtenha uma estimativa do erro absoluto cometido na aproximação de I obtida.

b) Repita a alínea **a**) para as regras do ponto médio e de Simpson.

(*Nota:* Nos cálculos intermédios utilize 6 casas decimais, devidamente arredondadas.)

2. Considere o integral

$$I = \int_{0.7}^{1.7} \pi^x \, dx.$$

a) Determine uma aproximação $\widehat{I}$, de I, utilizando a regra dos trapézios composta com $h = 0.25$.
Obtenha um majorante do erro absoluto cometido no cálculo do valor aproximado $\widehat{I}$.
(*Nota:* Nos cálculos intermédios utilize 6 casas decimais, devidamente arredondadas.)

b) Repita a alínea anterior para a regra de Simpson.

c) Quantos subintervalos teria que considerar se pretendesse calcular um valor aproximado de I com um erro inferior a 10^{-6} usando

i) A regra do ponto médio.

ii) A regra dos trapézios.

iii) A regra de Simpson.

3. Seja h uma função da qual se conhece a seguinte tabela de valores

x	1	3	5
$h(x)$	0	14.8	47.2

e $I = \int_1^5 h(x) \, dx$.

a) Determine uma aproximação de I, usando a regra dos trapézios simples.

b) Determine uma aproximação de I, usando a regra dos trapézios composta.

c) Admitindo que h é um polinómio de grau 2, calcule o valor exato de I.

4. Considere a seguinte tabela de uma função polinomial de grau 4, $p_4(x)$, cujo coeficiente de x^4 é 1

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$p_4(x)$	$9\omega+26$	154	ω	8	$\omega-42$	-2	$42-\omega$	28	$3\omega+4$

a) Utilizando a regra dos trapézios composta, com $1 < h < 3$, determine uma aproximação de $I_1 = \int_{-3}^{3} p_4(x)dx$.

b) Determine, justificando, o valor aproximado de $I_2 = \int_{-2}^{2} p_4(x)dx$, utilizando a regra do ponto médio composta.

c) Sabendo que $I_3 = \int_{-4}^{4} p_4(x)dx = \frac{6904}{15}$, determine, justificando, o valor de ω, utilizando a regra de Simpson e <u>todos os pontos da tabela</u>.

5. Considere a seguinte tabela de uma função f

x	0.2	0.5	0.8	1.1	1.4
$f(x)$	0.3987	0.9794	1.5174	1.9912	2.3854

e $I = \int_{0.2}^{1.4} f(x)dx$.

a) Determine um valor aproximado de I, usando a regra de Simpson composta.

b) Sabendo que $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq \left|\sin(x + n\frac{\pi}{2})\right|$, $x \in [0.2, 1.4]$, $n = 2, 3, \ldots$, determine um majorante do erro absoluto associado à aproximação anterior.

(*Nota:* Nos cálculos intermédios utilize 4 casas decimais, devidamente arredondadas.)

6. Seja $I = \int_0^2 f(x)dx$ e $\widehat{I} = 8$ uma aproximação de I, obtida a partir da aplicação da regra de Simpson, com $h = 1$.
Sabendo que f é um polinómio do 4º grau onde o coeficiente de grau 4 é igual a 3, indique o valor de I.

7. Considere o integral $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$.

a) Determine valores aproximados, I_{PM} e I_T, dados, respetivamente, pelas regras do ponto médio e dos trapézios com 4 aplicações.

b) Determine majorantes dos erros absolutos associados a ambas as aproximações obtidas na alínea anterior.
Quantos algarismos significativos pode garantir para estas aproximações.
Conclua, justificando qual das regras proporciona uma melhor aproximação ao valor real do integral.

(*Nota:* Nos cálculos intermédios utilize 5 casas decimais, devidamente arredondadas.)

8. Seja $I = \int_0^4 f(x)dx$ onde $f(x) \in C^n([0,4])$ é uma função que verifica $|f^{(n)}(x)| \leq \frac{2^n}{n!}$, $\forall x \in [0,4]$ e $n \in \mathbb{N}$.
Se pretendesse determinar um valor aproximado de I com, pelo menos, 4 casas decimais significativas, utilizando a regra de Simpson, qual o menor número de subintervalos de igual amplitude em que teria de dividir o intervalo $[0,4]$?
Justifique.

9. Seja $I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x+1}dx$.
Calcule um valor aproximado para I, $\widehat{I}$, com 6 casas decimais devidamente arredondadas, utilizando uma regra de integração numérica de aplicação simples que permita obter grau de precisão 3.

10. Considere o integral $I = \int_{-2}^0 xe^{-x}dx$

a) Determine um valor aproximado $\widehat{I}$, de I, obtido a partir da regra dos trapézios com 4 aplicações.
Obtenha um majorante para o erro absoluto associado a essa aproximação.
(Nos cálculos intermédios utilize 6 casas decimais, devidamente arredondadas.)

b) Determine um valor aproximado $\bar{I}$, de I, obtido a partir da regra do ponto médio com 2 aplicações.
Obtenha um majorante para o erro absoluto associado a essa aproximação.
(Nos cálculos intermédios utilize 6 casas decimais, devidamente arredondadas.)

c) Comente os resultados ao comparar os valores obtidos nas alíneas anteriores.

11. Seja $I = \int_1^5 f(x)dx$.
Considere a seguinte tabela da função f, função polinomial de grau 2, da qual se sabe que $f''(x) = 4$:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	-2	-1	1	α	9

a) Recorrendo à regra dos trapézios, com duas aplicações, determine um valor aproximado de I e o valor exato de I.

b) Recorrendo à regra do ponto médio, com $n = 2$, determine um valor aproximado de I e o valor de I como função de α.

c) Recorrendo às alíneas anteriores, determine o valor de α.

d) Utilize duas aplicações da regra de Simpson para determinar um valor aproximado de I.

12. Considere a seguinte tabela de dados de uma função f:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	α	-3	6	41	120	$-65\alpha+1$	482

Sabendo que o valor aproximado de $I = \int_0^6 f(x)dx$, aplicando a regra de Simpson, é 642, determine o valor de α.

13. Considere a seguinte tabela para a função f:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	40	21	8	1	0	5	16

a) Utilizando a regra dos trapézios composta, obtenha uma aproximação $\widehat{I_T}$ de $I = \int_{-3}^{3} f(x)dx$, com $h < 3$ e $n < 4$.

b) Utilizando a regra do ponto médio, obtenha outra aproximação $\widehat{I_{PM}}$ de I, com $h = 2$.

c) Sabendo que o erro de quadratura, para $\widehat{I_{PM}}$, é igual a 6 e que $f''(x)$ é constante, $\forall x \in \mathbb{R}$, determine o erro de quadratura para $\widehat{I_T}$.

14. Considere o seguinte integral

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(x)dx.$$

a) Determine uma aproximação de I, I_{G_2}, utilizando a regra de Gauss simples com dois pontos.

b) Determine uma aproximação de I, I_{G_3}, utilizando a regra de Gauss simples com três pontos.

(*Nota:* Nos cálculos intermédios utilize 6 casas decimais, devidamente arredondadas.)

15. A probabilidade de uma variável aleatória X ser igual a um determinado valor x é dada pela função

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

ou seja X tem distribuição Normal com média μ e variância σ^2.

a) Considerando $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = 2$, calcule um valor aproximado para a probabilidade de X estar no intervalo $[0,2]$, utilizando a regra de Simpson com duas aplicações da regra e a seguinte tabela de valores de $f(x)$

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
$f(x)$	0.1995	0.1933	0.1760	0.1506	0.1210

b) Sabendo que o máximo da 4ª derivada de $f(x)$ no intervalo $[0,2]$ é $M_4 = 0.038$, obtenha um majorante para o erro absoluto de quadratura.
Quantas casas decimais pode garantir para a probabilidade aproximada obtida na alínea **a**)?
Justifique.

c) **Exercício computacional *(wxMaxima)***
Utilizando o comando *integrate*, obtenha o valor exato para a probabilidade referida na alínea **a**) e o erro efetivamente cometido com a aproximação.

(*Nota:* Nos cálculos intermédios utilize 4 casas decimais, devidamente arredondadas.)

16. Considere a seguinte regra de integração numérica

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \delta f(c).$$

Verifique que, ao determinar o peso δ e o nodo $c \in\,]a,b[$, de modo a que a regra seja exata para polinómios de grau o mais elevado possível, é obtida a regra do ponto médio simples.

17. Considere a seguinte regra de integração numérica

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(b).$$

Verifique que, ao determinar os pesos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ e o nodo $x_1 \in\,]a,b[$, de modo a que a regra seja exata para polinómios de grau o mais elevado possível, é obtida a regra de Simpson simples.

18. Considere a seguinte tabela de uma função real de variável real, $y = f(x)$:

x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
$f(x)$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4

com $x_{i+1} = x_i + h$, $i = 0, 1, 2, 3$ (h constante).

Sejam $I = \int_{x_0}^{x_4} f(x)dx$, $I_{T,4}$ um valor aproximado de I, utilizando a regra dos trapézios composta, com 4 aplicações e $I_{S,2}$ um valor aproximado de I, utilizando a regra de Simpson composta, com 2 aplicações.
Demonstre que se tem sempre $3I_{S,2} - 2I_{T,4} = 2h(f_1 + f_3)$.

19. Seja $I = \int_a^b \frac{1}{x^3} dx$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.
Considerem-se também as aproximações I_{PM} e I_S de I dadas, respetivamente, pelas regras simples do ponto médio e de Simpson.
Demonstre que se $b < 0$, então I_{PM} é uma aproximação de I por excesso e I_S é uma aproximação de I por defeito.

20. Considere o seguinte integral impróprio (convergente)

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx.$$

a) Determine uma aproximação de I usando a regra do ponto médio simples.
b) **Exercício computacional** (R ou Phyton)
Determine as aproximações de I, obtidas usando a regra do ponto médio composta, para $h = 10^{-n}$, $n = 0, 1, 2, 3$.
Que pode concluir ao comparar estas sucessivas aproximações?
c) Determine uma aproximação de I usando a regra de Gauss com dois pontos.
Compare este valor com o valor exato.
d) Repita a alínea **c**), utilizando a regra de Gauss com três pontos.
Que pode concluir?

21. Exercício computacional (R ou Phyton)
Dada uma função $f(x)$ e um intervalo $[a, b]$, implemente um programa que lhe permita calcular o valor do integral $I = \int_a^b f(x)dx$, utilizando a regra de Simpson (composta).
Utilize como exemplo de aplicação a função e o intervalo considerados no exercício **1**.

22. Seja $I = \int_a^b f(x)dx$, onde $a = -b$.
Sabendo que $f(-x) + f(x) = 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, prove que a aproximação dada pela regra de Gauss simples com 2 pontos é $I_{G_2} = 2b$.