

AM 1 - Resolução Ficha 5

Limites e Continuidade de funções

Felipe Pinto - 61387

19/04 - 2021.1

Conteúdo

I	Questões	2
	Questão 3	2
	Q3 - g) $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin(3x)/x$	2
II	Extras	2
	Extra 1 Incompleto	2
	Extra 2 $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x-1)/ x-1 $	3
	Extra 3 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos(1/x)/(x - \sqrt{x})$ Incompleto	3
	Extra 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \tan(x)/x \cos(x)$	3
	Extra 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x + 2x + 1}{6^{x-1} + e^x}$	3
	Extra 6	3
	Extra 7	4
	E7 - a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	4
	E7 - b) $f(x)$ é continua em 0	4

Parte I

Questões

Questão 3

Q3 - g) $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin(3x)/x$

$$y = \arcsin(3x) \implies \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin(3x)/x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\sin(y)/3} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{\sin(y)} = 3$$

Parte II

Extras

Extra 1 Incompleto

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = \begin{cases} (1 - \cos(x))/x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x \cos(1/x) & x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f \text{ é continua em } x=0 &\iff \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1 + \cos(x)} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \dots \end{aligned}$$

Extra 2 $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(x-1)/|x-1|$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \begin{cases} \sin(x-1)/x-1 & x > 0 \\ \sin(x-1)/1-x & x < 0 \end{cases};$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sin(x-1)/|x-1| = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \sin(x-1)/|x-1| = -1$$

$$\therefore \nexists \lim_{x \rightarrow 1} \sin(x-1)/|x-1|$$

Extra 3 $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos(1/x)/(x - \sqrt{x})$ **Incompleto**

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(1/x)}{1 - \sqrt{1/x}} = \dots = 0$$

Extra 4 $\lim_{x \rightarrow 0} \tan(x)/x \cos(x)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x \cos(x) \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x)/x) \lim_{x \rightarrow 0} 1/\cos^2(x) = 1$$

Extra 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x + 2x + 1}{6^{x-1} + e^x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(5/6)^x + 2(2/6)^x}{(1)^x/6 + (e/6)^x} = \frac{0 + 0}{1/6 + 0} = 0$$

Extra 6

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2 + 1) & x < 0 \\ a \arctan(x \pi/4) & 0 \leq x \leq 1 \\ (x^2 - 2x + 1)/(x - 1) & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} a \arctan(x \pi/4) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 2x + 1)/(x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)^2/(x - 1) = 0$$

$$\therefore a = 0$$

Extra 7

$$f(x) = \begin{cases} -e^{1/x} & x < 0 \\ \log(1/(1+x^2)) & x > 0 \end{cases}$$

E7 - a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$= -e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x} = -1$$

$$= \log \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+x^2} \right) = -\infty$$

E7 - b) $f(x)$ é continua em 0

$$\begin{aligned} \iff \exists x \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \iff \lim_{x \rightarrow 0^-} -e^{1/x} = 0 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(1/(1+x^2)) = 0 \end{aligned}$$