Ficha 5 - Limites e Continuidade de funções

Indicações de Resolução

Exercício 1

Determine os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to(e-1)} \ln(1+x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{2+x}$ (c) $\lim\limits_{x\to(-2)} \dfrac{4-x^2}{2+x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x^{-1})\sin(x)$

(e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{2x+x^2}+x$ (f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\cos(x)}}{x}$ (g) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$

Indicações:

(c) Escreva $\dfrac{(2-x)(2+x)}{2+x}$;

(d) O limite é 0 pois trata-se do produto de um infinitésimo em $x=0$ por uma função limitada, com valores compreendidos entre -1 e 1);

(e) Escreva $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+x^2}-x}$. Tenha em conta que, se x é negativo, $\sqrt{x^2}=-x$. Conclua que o limite é -1.

Exercício 2

Mostre que as seguintes funções não têm limite nos pontos indicados.

(a) $\dfrac{x}{|x|}$ $(x=0)$, (b) $\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$ $(x=1)$, (c) $\arctan(e^{\frac{1}{x}})$ $(x=0)$,

(d) $e^{\cos(x)}$ $(x=+\infty)$, (e) $\sin(\ln(|x|))$ $(x=0)$.

Indicações:

(a) Considere as sucessões $x_n=\frac{1}{n}$ e $z_n=-\frac{1}{n}$ e verifique que

$$\lim \frac{x_n}{|x_n|} = 1 \neq -1 = \lim \frac{z_n}{|z_n|}$$

Alternativamente, estude o limite à esquerda e o limite à direita no ponto $x = 0$ e verifique que estes limites não são iguais.

(e) Indique, por exemplo, uma sucessão (x_n) convergindo para zero e tal que $\ln(|x_n|) = -n\pi$ com $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 3

Utilizando os limites conhecidos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

determine os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{2x}}{x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{2x}}{\sin(3x)}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin(x)}}{x}$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(3x)}{x}$

Indicações:

(b) -2; (c) $\frac{2}{3}$; (e) Multiplique numerador e denominador por $(1 + \cos(3x))$.

(f) Escreva $\displaystyle\frac{e^x - 1}{x} - \frac{1 - e^{\sin(x)}}{x}$ e conclua que o limite é zero.

Exercício 4

Considere a função H definida em $\mathbb{R}$ por

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

(a) Justifique que a função H não tem limite em $x = 0$.

(b) Determine os pontos em que as seguintes funções **não** são contínuas:

(i) $H(x-1)$ (ii) $(H(x) - H(x-1)) \cdot x$ (iii) $H(1-x) \cdot H(x)$ (iv) $H(\sin(x))$

Indicações :

Pontos de descontinuidade: (i) $x = 1$; (ii) $x = 1$; (iii) $x = 0$ e $x = 1$; (iv) $x = k\pi$.

Problema 5

Considere a função

$$h(x) = \begin{cases} |x| & \text{se} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

Determine o conjunto dos pontos em que h é contínua.

Indicações: Verifique que h é contínua em $x = 0$ utilizando o enquadramento

$$0 \leq h(x) \leq |x|$$

e o Teorema dos Limites Enquadrados.

Para justificar que, se $x \neq 0$, a função não é contínua em x considere que uma sucessão de racionais (r_n) convergindo para x vê a respectiva sucessão das imagens $h(r_n)$ convergir para $|x|$. Se (x_n) fôr uma sucessão de números irracionais tendendo para x, $h(x_n)$ é constante e igual a zero.

Exercício 6

Dê um exemplo de uma função f definida em $\mathbb{R}$ tal que:

(a) f é monótona e não é contínua.

(b) f verifica a propriedade do valor intermédio e não é contínua.

(c) f é contínua e, para todo o $k \in \mathbb{R}$, a equação $f(x) = k$ tem infinitas soluções.

(d) o seu conjunto de pontos de discontinuidade é $\mathbb{Z}$.

(e) o seu conjunto de pontos de discontinuidade é $\mathbb{R}$.

Indicações:

(b) Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.

(c) $f(x) = x \sin(x)$.

(d) Considere a função "parte inteira" de x.

(e) Considere a função que vale 0 nos racionais e 1 nos irracionais.

Exercício 7

Estude o prolongamento por continuidade das seguintes funções aos pontos fronteiros dos respectivos domínios.

(a) $f(x) = \dfrac{\sin(x^2)}{x}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$; (b) $g(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}}$, $x \in]-1, 1[$;

(c) $h(x) = e^{\tan(x)}$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; (d) $i(x) = \dfrac{x\ln(x)}{1-x}$, $x \in]0, 1[$.

Indicações:

(a) Definir $f(0) = 0$; (b) Definir $g(-1) = g(1) = 0$;

(c) Definir $h(-\pi/2) = 0$. Verifique que h não tem limite finito em $x = \pi/2$;

(d) Utilizando mudanças de variável, verifique que i tem limite zero em $x = 0$ e limite -1 em $x = 1$.

Problema 8

Seja I um intervalo aberto e sejam $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ funções contínuas tais que

$$f(x) = g(x) \qquad \forall x \in I \cap \mathbb{Q}$$

Mostre que $f = g$.

Indicações:

Todo o número irracional pode ser aproximado por uma sucessão de racionais. Utilize a definição de continuidade por sucessões.