ANÁLISE MATEMÁTICA III-C

João de Deus Marques

11 de Outubro de 2024

Definição e generalidades

A *transformada de Laplace* é uma poderosa ferramenta na resolução de equações diferenciais e correspondentes problemas de valores iniciais e de fronteira. Possui a notável vantagem de reduzir equações diferenciais a equações algébricas. Esta transformação de problemas de cálculo em problemas algébricos, usualmente designada por *cálculo operacional*, é particularmente importante na resolução de problemas de matemática aplicada. O cálculo operacional tem na transformada de Laplace um dos seus mais importantes métodos, revelando-se particularmente útil em questões de natureza mecânica e elétrica nos quais as forças envolvidas apresentam descontinuidades ou atuam em intervalos de tempo muito curtos.

A transformada de Laplace permite também resolver diretamente problemas de valores iniciais sem que seja necessário calcular primeiro a solução geral da equação, bem como resolver equações não homogéneas sem ter que se calcular previamente a solução da equação homogénea correspondente. Se considerarmos uma função de duas variáveis $f(x, y)$, primitivável em ordem a x, e calcularmos $\int f(x, y)dx$ obtemos uma nova função na variável y. Analogamente, dada uma função $f(t)$ ao calcularmos $\int_a^b K(s, t)f(t)dt$ obtemos uma nova função na variável s, a que chamaremos uma *transformada integral* de $f(t)$. Neste capítulo estamos particularmente interessados numa transformada integral em que o intervalo de integração é o intervalo ilimitado $[0, +\infty[$. Se uma função $f(t)$ estiver definida em $[0, +\infty[$, o integral impróprio $\int_0^\infty K(s, t)f(t)dt$ define-se pelo limite

$$\int_0^\infty K(s, t)f(t)dt = \lim_{a \longrightarrow \infty} \int_0^a K(s, t)f(t)dt.$$

Se este limite existir diremos que o integral existe ou que é convergente; caso contrário, diremos que não existe ou que é divergente. Em geral, o limite considerado existirá apenas para alguns valores da nova variável s. A função $K(s, t)$ é usualmente designada por núcleo da transformada integral e a escolha de $K(s, t) = e^{-st}$ conduz a uma transformada integral particularmente importante: a transformada de Laplace.
Suponhamos que $f(t)$ está definida em $[0, +\infty[$. Para os valores de s em que o integral

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

converge fica definida uma função na variável s a que se chama *transformada de Laplace* da função $f(t)$, e que se representa por $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ou apenas $\mathcal{L}\{f\}$.

Em geral utilizaremos letras minúsculas para representar a função a ser transformada e a correspondente maiúscula para representar a sua transformada de Laplace. Por exemplo, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$.

À função original $f(t)$ chama-se *transformada de Laplace inversa* de $F(s)$, e escreve-se

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Exemplo

Seja $f(t) = 1, \; t \geq 0$. *Tem-se*

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1\,dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^k e^{-st} \cdot 1\,dt = \lim_{k\to\infty} \left[-\frac{1}{s}\,e^{-st} \right]_0^k$$
$$= \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{1}{s}\,e^{-sk} + \frac{1}{s} \right).$$

Este último limite existe e é finito quando $s > 0$ *e toma o valor* $\dfrac{1}{s}$, *pelo que*

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0. \tag{0.1}$$

Exemplo

Seja $f(t) = e^{at}, \ t \geq 0$, *em que* a *é uma constante real.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}\, e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t}\, dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_0^{k} e^{(a-s)t}\, dt = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s}\right]_0^k \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{e^{(a-s)k}}{a-s} - \frac{1}{a-s}\right) = \frac{1}{s-a}, \quad se \ \ s > a
\end{aligned}$$

pelo que

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a. \tag{0.2}$$

Exemplo

Determine-se $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}$, *com* ω *constante.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos(\omega t\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}\cos(\omega t)\,dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^{k} e^{-st}\cos(\omega t)\,dt \\
&= \lim_{k\to\infty}\left[e^{-st}\left(\frac{-s\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)}{s^2+\omega^2}\right)\right]_0^k \\
&= \lim_{k\to\infty} e^{-sk}\left(\frac{-s\cos(\omega k)+\omega\sin(\omega k)}{s^2+\omega^2}\right)-\left(\frac{-s}{s^2+\omega^2}\right) \\
&=\frac{s}{s^2+\omega^2},\quad se\quad s>0.
\end{aligned}$$

Analogamente se mostra que

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2},\quad s>0. \tag{0.3}$$

A linearidade da transformada de Laplace é uma consequência imediata da linearidade do integral. Assim, dadas duas funções $f(t)$ e $g(t)$ que admitem transformadas de Laplace e sendo a e b constantes reais, tem-se

$$\mathcal{L}\{af + bg\} = a\mathcal{L}\{f\} + b\mathcal{L}\{g\}.$$

Exemplo

Considere-se a função $f(t) = \cosh(at) = \dfrac{e^{at} + e^{-at}}{2}$,

com a constante real. Tem-se,

$$\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} + \mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right)$$
$$= \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > \max\{-a, a\}.$$

Analogamente se mostra que

$$\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > \max\{-a, a\}.$$

□

Tendo em conta que, a transformada de Laplace inversa também é linear (a inversa de uma transformação linear, quando existe, ainda é linear), considere-se o exemplo seguinte;

Exemplo

Determine-se $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$, sendo

$$F(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad a \neq b \;\; e \;\; s > \max\{a, b\}.$$

Tem-se que

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right),$$

pelo que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\} = \frac{1}{a-b}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-b}\right\}\right) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}.$$

Exemplo

Mostremos, utilizando o método de indução, que para $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

Para $n = 0$ *já foi visto que,* $\mathcal{L}\{t^0\} = \mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$. *Admitindo-se, por hipótese que,* $\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \dfrac{(n-1)!}{s^n}$, *tem-se que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^n\} &= \int_0^\infty t^n e^{-st} dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^k t^n e^{-st} dt \\
&= \lim_{k\to\infty} \left[-t^n \left(\frac{e^{-st}}{s} \right) \right]_0^k + \lim_{k\to\infty} \frac{n}{s} \int_0^k t^{n-1} e^{-st} dt \\
&= \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad \textit{como se pretendia.}
\end{aligned}$$

Existência de transformada de Laplace

O integral que define a transformada de Laplace de determinada função nem sempre converge, pelo que nem todas as funções admitem transformada de Laplace. Por exemplo as funções $f(t) = t^{-1}$ e $g(t) = e^{t^4}$ não possuem transformada de Laplace. Nesta secção vamos ver que condições impor a uma função de forma a garantir que esta possua transformada de Laplace. "Grosso modo" pode dizer-se que uma função admite transformada de Laplace se em termos de continuidade for "relativamente bem comportada" e o seu módulo for "controlável" por uma função exponencial. Para precisar o que acabamos de dizer, comecemos por recordar os conceitos de função seccionalmente contínua e de função de ordem exponencial.

Definição

Uma função $f(t)$, diz-se *seccionalmente contínua* num intervalo limitado $I = [a, b]$, com $a < b$, se for contínua em todos os pontos de I excepto quando muito num número finito, nos quais admite limites laterais finitos.

Isto significa que se $x_0 \in]\, a, b\, [$ e $f(x)$ não for contínua (ou não estiver definida) em x_0, os limites

$$f(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} f(x_0 + h) \text{ e } f(x_0^-) = \lim_{h \to 0^-} f(x_0 + h),$$

existem e são finitos. Se $x_0 = a$ (resp. $x_0 = b$) $f(a^+)$ (resp. $f(b^-)$) terá que existir e ser finito.

Definição

Uma função $f(t)$ definida em $[0, +\infty[$ diz-se de *ordem exponencial* $\gamma \in \mathbb{R}$, se existir uma constante $M > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t}, \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Uma função $f(t)$ diz-se de *ordem exponencial* se for de ordem exponencial γ para algum $\gamma \in \mathbb{R}$.

As funções $f(t) = 2$ e $g(t) = \sin t$ são de ordem exponencial. Com efeito, tem-se que

$$|f(t)| \leq 2e^{0t}, \quad |g(t)| \leq e^{0t}, \quad t \in [0, +\infty[.$$

As duas funções consideradas são limitadas em $[0, +\infty[$; de facto todas as funções limitadas são de ordem exponencial. Com efeito, se $f(t)$ é limitada em $[0, +\infty[$ existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq M, \quad \forall t \geq 0,$$

e assim,

$$|f(t)| \leq Me^{0t}, \quad \forall t \geq 0.$$

É também simples constatar que as funções $\cosh t$, $\sinh t$ e t^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ são de ordem exponencial em $[0, +\infty[$, uma vez que

$$|\cosh(t)| = \left|\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right| = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \leq \frac{e^t}{2} + \frac{e^t}{2} = e^t,$$

$$|\sinh(t)| = \left|\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right| \leq \left|\frac{e^t}{2}\right| + \left|\frac{e^{-t}}{2}\right| = \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} \leq \frac{e^t}{2} + \frac{e^t}{2} = e^t$$

$$|t^n| = t^n \leq n!(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots) = n!e^t.$$

Quanto à existência da transformada de Laplace, tem-se o seguinte resultado:

Teorema (Existência de transformada de Laplace)

Se $f(t)$ é de ordem exponencial γ em $[0, +\infty[$ e seccionalmente contínua em qualquer intervalo limitado $I \subset [0, +\infty[$, então $f(t)$ admite transformada de Laplace em $]\gamma, +\infty[$.

As condições impostas no teorema anterior são condições suficientes mas não necessárias, isto é, existem funções que não estando nas condições do Teorema 0.1 admitem transformada de Laplace. Por exemplo, a função $t^{-\frac{1}{2}}$ não é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$, no entanto tem transformada de Laplace. É possível mostrar que

$$\mathcal{L}\{t^{-\frac{1}{2}}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

A transformada de Laplace de uma função, quando existe, é única. Reciprocamente, pode provar-se que duas funções, definidas em $[0, +\infty[$, que tenham a mesma transformada de Laplace terão de ser iguais excepto, eventualmente, num conjunto de pontos isolados. Como este facto não é importante para as aplicações diz-se que a inversa da transformada de Laplace é, essencialmente, única. Em particular duas funções contínuas que possuam a mesma transformada de Laplace são iguais.

Transformada de Laplace da derivada

Uma das propriedades notáveis da transformada de Laplace permite exprimir a transformada de Laplace da derivada de ordem *n* de uma função a partir da transformada de Laplace da função considerada e das suas derivadas no ponto zero.

Comece-se por estabelecer o resultado para a primeira derivada.

Teorema (Transformada de Laplace da derivada)

Suponhamos que $f(t)$ é contínua e de ordem exponencial γ em $[0, +\infty[$ e que $f'(t)$ é seccionalmente contínua em qualquer intervalo limitado contido em $[0, +\infty[$. Então $f'(t)$ tem transformada de Laplace definida para $s > \gamma$, e tem-se que

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0). \tag{0.4}$$

O teorema seguinte generaliza o último teorema para a transformada de Laplace da derivada de ordem n de f.

Teorema (Transformada de Laplace da derivada de ordem n)

Suponhamos que $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$, são contínuas e de ordem exponencial γ em $[0, +\infty[$ e que $f^{(n)}(t)$ é seccionalmente contínua em qualquer intervalo limitado $I \subset [0, +\infty[$. Então existe transformada de Laplace de $f^{(n)}(t)$, definida para $s > \gamma$, e tem-se

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{0.5}$$

A determinação da transformada de Laplace de uma função utilizando a definição não é, em geral, prático e envolve cálculos morosos. Vejamos, com alguns exemplos, como o último teorema permite simplificar em muitos casos o cálculo da transformada de Laplace.

Exemplo

Já calculada anteriormente a transformada de Laplace da função $f(t) = t^n$, vejamos no entanto como calcular esta mesma transformada de Laplace, de uma forma bastante mais rápida, utilizando o último teorema. Como $f^{(n+1)}(t) = 0$, *vem que*

$$0 = \mathcal{L}\{f^{(n+1)}\} = s^{n+1}\mathcal{L}\{f\} - s^n f(0) - \ldots - sf^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0).$$

Tendo em conta que

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0 \;\; e \;\; f^{(n)}(0) = n!$$

obtém-se

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

$\square$

Exemplo

Já foi calculada a transformada de Laplace da função $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}$ *utilizando a definição e foi referido que* $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}$ *podia ser calculada de forma análoga.*
Calculemos, utilizando 0.5, a transformada de Laplace de $f(t) = \sin(\omega t)$. *Tem-se que*

$$f'(t) = \omega\cos(\omega t),\ f''(t) = -\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2 f(t)$$

e

$$f(0) = 0, f'(0) = \omega.$$

Como

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

vem que

$$-\omega^2\mathcal{L}\{f\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - \omega$$

donde

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}.$$

Exemplo

Determine-se

$$\mathcal{L}\{\sin^2 t\}.$$

Considerando $f(t) = \sin^2 t$ *tem-se que* $f(0) = 0$ *e* $f'(t) = 2\sin t \cos t = \sin 2t$. *Utilizando 0.4 vem que*

$$\mathcal{L}\{\sin 2t\} = s\mathcal{L}\{\sin^2 t\}.$$

Do exemplo anterior sabe-se que

$$\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4},$$

e portanto

$$\mathcal{L}\{\sin^2 t\} = \frac{2}{s(s^2+4)}. \tag{0.6}$$

Estabelecido o teorema da transformada de Laplace para derivadas é agora possível recorrer a este resultado para resolver, de forma bastante eficiente, alguns tipos de equações diferenciais com condições iniciais. Nomeadamente (como veremos nos exemplos que se seguem) o uso da transformada de Laplace permite reduzir a resolução de uma equação linear de ordem n de coeficientes constantes, na incógnita y, à resolução de uma equação algébrica na incógnita $\mathcal{L}\{y\}$.

Exemplo

Considere-se o PVI

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 3,\ y'(0) = 1.$$

Seja $\mathcal{L}\{y\} = Y$. *Aplicando o teorema da transformada de Laplace para a derivada de ordem n, vem*

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 4sY - 4y(0) + 3Y = 0.$$

Usando as condições iniciais e simplificando obtém-se

$$Y = \frac{3s + 13}{s^2 + 4s + 3}.$$

Exemplo (continuação)

Tem-se que

$$\frac{3s+13}{s^2+4s+3} = \frac{3s+13}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3},$$

com A *e* B *constantes a determinar. O cálculo destas constantes conduz a* $A = 5$ *e* $B = -2$, *e portanto*

$$Y = \frac{3s+13}{s^2+4s+3} = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s+3}.$$

Por aplicação da transformada de Laplace inversa vem,

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\},$$

ou seja, $\qquad y(t) = 5e^{-t} - 2e^{-3t}.$

Exemplo (continuação)

Acabou de se provar que se a função incógnita $y(t)$ *do PVI possuir transformada de Laplace, a equação tem solução e é dada por* $y(t) = 5e^{-t} - 2e^{-3t}$. *Para concluir a resolução, deve ainda ser demonstrado que a função* $y(t) = 5e^{-t} - 2e^{-3t}$ *admite, de facto, transformada de Laplace em algum intervalo da forma* $]a, +\infty[$. *Para tal note-se que a função* $y(t)$ *é obviamente contínua em* $[0, \infty[$ *e que, como as funções* $y_1(t) = 5e^{-t}$ *e* $y_2(t) = -2e^{-3t}$ *são de ordem exponencial* -1 *e* -3, *respetivamente,* $y(t)$ *é de ordem exponencial* $\gamma = -1$. *Assim sendo o teorema de existência de transformada de Laplace garante que* $Y(s)$ *existe e está definida para* $s > -1$, *pelo que* $y(t) = 5e^{-t} - 2e^{-3t}$ *é de facto a solução do PVI.* $\square$

Exemplo

Considere-se o problema com condições iniciais no ponto $\frac{\pi}{4}$

$$y'' + y = 2t, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{2}.$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação $y'' + y = 2t$ *e designando* $\mathcal{L}\{y\}$ *por* Y *vem que,*

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) + Y = \frac{2}{s^2},$$

ou seja, $$Y = y(0)\frac{s}{1+s^2} + y'(0)\frac{1}{1+s^2} + \frac{2}{s^2(1+s^2)}.$$

Como $$\frac{2}{s^2(1+s^2)} = \frac{2}{s^2} - \frac{2}{1+s^2},$$ *tem-se que*

Exemplo (continuação)

$$Y = y(0)\frac{s}{1+s^2} + y'(0)\frac{1}{1+s^2} + \frac{2}{s^2} - \frac{2}{1+s^2}.$$

Por aplicação da transformada de Laplace inversa resulta

$$y(t) = y(0)\cos t + y'(0)\sin t + 2t - 2\sin t.$$

As condições iniciais conduzem ao sistema

$$\begin{cases} y(0)\cos\frac{\pi}{4} + y'(0)\sin\frac{\pi}{4} + 2\frac{\pi}{4} - 2\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\ \\ -y(0)\sin\frac{\pi}{4} + y'(0)\cos\frac{\pi}{4} + 2 - 2\cos\frac{\pi}{4} = 2-\sqrt{2} \end{cases}$$

que tem como solução $y(0) = 1$ *e* $y'(0) = 1$. *A solução do PVI é assim*

$$y(t) = \cos t - \sin t + 2t. \tag{0.7}$$

Transformada de Laplace de um integral

Teorema (Transformada de Laplace de um integral)

Se $f(t)$ é uma função de ordem exponencial γ em $[0,+\infty[$ e seccionalmente contínua em qualquer intervalo limitado $I \subset [0,+\infty[$ então a função

$$g(t) = \int_0^t f(x)dx, \quad t > 0,$$

admite transformada de Laplace em $]\gamma,+\infty[$, dada por

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}, \tag{0.8}$$

por aplicação da transformada de Laplace inversa, têm-se que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}\right\} = \int_0^t f(x)dx, \quad \text{com } t > 0. \tag{0.9}$$

Exemplo

Determine-se a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}.$$

Pretende determinar-se uma função $f(t)$ tal que

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}, \quad \textit{ou seja} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}\right\}.$$

Sabe-se que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right\} = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0. \tag{0.10}$$

Exemplo (continuação)

Assim,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right\}\right\},$$

resultando de (0.9) que

$$\begin{aligned} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right\}\right\} &= \int_0^t \frac{\sin(\omega x)}{\omega}\,dx \\ &= \frac{1}{\omega^2}\left[-\cos(\omega x)\right]_0^t = \frac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Teorema da Translação na variável s

Afigura-se bastante útil, em diversas aplicações, saber determinar de forma expedita a transformada de Laplace de uma função da forma $e^{at}f(t)$, assumindo que já é conhecida a transformada de Laplace de $f(t)$. O teorema seguinte responde de forma eficaz à questão colocada.

Teorema (Translação na variável s)

Seja a uma constante real e suponhamos que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad s \in]\gamma, \infty[.$$

Então

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad s \in]a+\gamma, \infty[,$$

por aplicação da transformada de Laplace inversa resulta que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t). \tag{0.11}$$

Exemplo

Já foi visto anteriormente que

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \;\; e \;\; \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Como consequência do teorema 0.5 tem-se que,

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}t^n\right\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \;\; e \;\; \mathcal{L}\{e^{at}\cos(\omega t)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}.$$

Exemplo

Considere-se o problema de valores iniciais

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad \textit{com } y(0) = 2, \;\; y'(0) = -4.$$

Designando $\mathcal{L}(y)$ *por* Y *e utilizando 0.5, obtém-se*

$$(s^2 + 2s + 5)Y = sy(0) + y'(0) + 2y(0),$$

ou ainda, atendendo às condições iniciais,

$$Y = \frac{2s}{s^2 + 2s + 5}.$$

Exemplo (continuação)

Tendo em conta que

$$s^2 + 2s + 5 = (s+1)^2 + 4 \;\; e \;\; 2s = 2(s+1) - 2,$$

Y pode ser escrita na forma

$$Y = \frac{2(s+1)-2}{(s+1)^2+4} = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4} - \frac{2}{(s+1)^2+4}.$$

Por aplicação da transformada de Laplace inversa vem

$$y(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\}.$$

Atendendo a (0.11), obtém-se a solução para o PVI considerado

$$y(t) = 2e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\sin 2t.$$

Teorema da Translação na variável t. A função de Heaviside

Definição

Sendo a uma constante positiva, define-se a função

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$$

a que se chama *função de Heaviside* (ou *função-salto* no ponto a).

Dada uma função $f(t)$ define-se a função $\widetilde{f}(t)$ como sendo

$$\widetilde{f}(t) = f(t-a)u(t-a).$$

Teorema (Translação na variável t)

Seja a uma constante positiva e suponhamos que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad s \in]\gamma, \infty[$$

então

$$\mathcal{L}\left\{f(t-a)u(t-a)\right\} = e^{-as}F(s), \quad s \in]\gamma, \infty[,$$

por aplicação da transformada de Laplace inversa tem-se que

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a). \tag{0.12}$$

Exemplo

Se $a = 3$ *e* $f(t) = e^{2t}$ *vem*

$$\widetilde{f}(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ e^{2t-6}, & t > 3. \end{cases}$$

Exemplo

Seja a *uma constante positiva. Fazendo* $f(t) = 1$ *no teorema anterior vem que*

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{1\} = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Exemplo

Determine-se a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{e^{-3s}}{s^3}.$$

Atendendo a que $$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3},$$
vem que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^3}\right\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-3s}\mathcal{L}\left\{t^2\right\}\right\} \\
&= \frac{1}{2}(t-3)^2\, u(t-3) \\
&= \begin{cases} 0, & 0 < t < 3 \\ \dfrac{(t-3)^2}{2}, & t > 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Exemplo

Determine-se a transformada de Laplace da função $f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi \\ \sin t, & t > 2\pi. \end{cases}$$

Tem-se que

$$f(t) = 1 - u(t-\pi) + u(t-2\pi)\sin t,$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\} =& \mathcal{L}\left\{1 - u(t-\pi) + u(t-2\pi)\sin t\right\} \\ =& \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{u(t-\pi)\} + \mathcal{L}\{u(t-2\pi)\sin(t-2\pi)\} \\ =& \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Exemplo

Considere-se o problema de valores iniciais

$$y'' + 3y' + 2y = r(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,$$

com

$$r(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Tem-se que

$$r(t) = 1 - u(t-1).$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação e fazendo $Y = \mathcal{L}\{y\}$, *vem que*

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 3sY - 3y(0) + 2Y = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{u(t-1)\},$$

isto é,

Exemplo (continuação)

$$(s^2+3s+2)Y-(s+3)y(0)-y'(0)=\frac{1}{s}-\frac{e^{-s}}{s},$$

ou ainda,

$$Y=\frac{1-e^{-s}}{s(s+1)(s+2)}.$$

Tendo em conta a decomposição

$$\frac{1}{s\,(s+1)\,(s+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{\frac{1}{2}}{s+2},$$

tem-se que

$$Y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}-\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s+2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-s}}{s}-\frac{2e^{-s}}{s+1}+\frac{e^{-s}}{s+2}\right).$$

A solução do PVI é então dada por

Exemplo (continuação)

$$y(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}\right) - e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}\right)\right)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}\left(1 - 2e^{-t} + e^{-2t}\right) - \frac{1}{2}u(t-1)\left(1 - 2e^{-(t-1)} + e^{-2(t-1)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - 2e^{-t} + e^{-2t} - u(t-1)\left(1 - 2e^{1-t} + e^{2-2t}\right)\right) \\ &= \begin{cases} \dfrac{1 - 2e^{-t} + e^{-2t}}{2}, & 0 < t < 1 \\ \dfrac{e^{-2t}(1 - e^{2})}{2} + (e-1)e^{-t}, & t > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

A função delta de Dirac

Em mecânica é frequente encontrar situações em que uma força de grande intensidade actua sobre um corpo durante um período de tempo muito curto. Situações deste tipo ocorrem, por exemplo, quando se bate numa bola de ténis, quando um avião faz uma aterragem forçada, quando um barco é atingido por uma única onda muito forte, etc.

Em mecânica o impulso de uma força $f(t)$ durante o intervalo de tempo $a \leq t \leq a+k$ é definido como sendo o integral de $f(t)$ entre os instantes a e $a+k$; no caso de um circuito eléctrico é o integral da força electromotriz aplicada ao circuito integrado entre os instantes a e $a+k$. Na prática, têm particular interesse, situações em que o intervalo de tempo é tão curto que se pode considerar instantâneo (isto é, $k \to 0$). Neste sentido considerem-se as seguintes funções:

$$f_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{se } a \leq t \leq a+k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad k > 0.$$

O impulso I_k é unitário uma vez que

$$I_k = \int_a^{a+k} \frac{1}{k}\, dt = \frac{1}{k} \cdot (a + k - a) = 1. \tag{0.13}$$

Ao limite de $f_k(t)$ quando $k \to 0$ chama-se *"função" Delta de Dirac*, e representa-se por $\delta(t-a)$. Tem-se então que

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & \text{se } t = a \\ 0, & \text{se } t \neq a \end{cases}, \quad . \tag{0.14}$$

É importante referir que $\delta(t-a)$ não é uma função no sentido usual do conceito, uma vez que para $t=a$ toma o valor ∞. Além disso, o integral de uma função que se anula em todo o domínio (excepto num número finito de pontos), é zero, o que não acontece com esta "função". Efectivamente,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \delta(t-a)dt &= \lim_{k\to 0}\int_0^\infty f_k(t)\,dt \\
&= \lim_{k\to 0}\left[\int_0^a f_k(t)\,dt + \int_a^{a+k} f_k(t)\,dt + \int_{a+k}^\infty f_k(t)\,dt\right] \\
&= \lim_{k\to 0}\int_a^{a+k} f_k(t)\,dt \\
&= 1.
\end{aligned}$$

A "função" delta de Dirac faz parte de um tipo de "funções" habitualmente designadas por *funções generalizadas* ou *distribuições*.

Vejamos como determinar a transformada de Laplace de $\delta(t-a)$. Tem-se que

$$f_k(t) = \frac{1}{k}\left(u(t-a) - u(t-(a+k))\right),$$

onde u designa a função de Heaviside. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f_k(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{k}(u(t-a) - u(t-(a+k))\right\} \\
&= \frac{1}{k}\mathcal{L}\{u(t-a)\} - \frac{1}{k}\mathcal{L}\left\{u(t-(a+k))\right\} \\
&= \frac{1}{k} \cdot \frac{e^{-as}}{s} - \frac{1}{k} \cdot \frac{e^{-(a+k)s}}{s} \\
&= \frac{e^{-as}}{ks}(1-e^{-ks}).
\end{aligned}$$

Assumindo formalmente a continuidade da transformada de Laplace obtém-se

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \lim_{k\to 0} \mathcal{L}\{f_k(t)\} = \lim_{k\to 0} \left\{ \frac{e^{-as}}{s} \left(\frac{1-e^{-ks}}{k} \right) \right\} = e^{-as}.$$

Teorema

Sendo a uma constante real positiva tem-se que

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}, \quad s > 0. \tag{0.15}$$

Exemplo

Considere-se o problema de valores iniciais

$$y'' + 3y' + 2y = \delta(t-a), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Fazendo $Y = \mathcal{L}\{y\}$*, e calculando a transformada de Laplace em ambos os membros da equação obtém-se*

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 3sY + 3y(0) + 2Y = e^{-as},$$

ou seja

$$Y = \frac{e^{-as}}{s^2+3s+2}.$$

Exemplo (continuação)

Então

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^2+3s+2}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{(s+1)(s+2)}\right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s+2}\right\} \\ &= u(t-a)\left(e^{-(t-a)} - e^{-2(t-a)}\right) \\ &= \begin{cases} 0, & t < a \\ e^{-(t-a)} - e^{-2(t-a)}, & t > a. \end{cases} \end{aligned}$$

Derivação e integração da transformada de Laplace

Teorema (Derivação e integração da transformada de Laplace)

Suponhamos que $f(t)$ está nas condições do teorema de existência de transformada de Laplace e que $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$, $s \in]\gamma, \infty[$. Então:

1. $$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad n = 1, 2, \ldots \quad .$$

2. *Se existe e é finito,*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}$$

então

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)\, du, \quad s \in]\gamma, +\infty[.$$

Exemplo

Sabendo que

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2} \ \ e \ \ \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad a \in \mathbb{R},$$

determine-se

$$\mathcal{L}\{t\sin(at)\} \ \ e \ \ \mathcal{L}\{t^2 e^{at}\}.$$

As funções $f(t) = \sin(at)$ *e* $g(t) = e^{at}$ *estão nas condições do último teorema, pelo que*

$$\mathcal{L}\{t\sin(at)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right) = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}, \quad s > 0$$

e

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{at}\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \frac{2}{(s-a)^3}, \quad s > a.$$

Exemplo

Pretende-se determinar a transformada de Laplace inversa da função

$$F(s) = \log\left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right)$$

supondo que existe uma função $f(t)$ *nas condições do último teorema tal que*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s).$$

Sabe-se que

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s);$$

por outro lado

$$-F'(s) = -\frac{\dfrac{-2\omega^2}{s^3}}{1 + \dfrac{\omega^2}{s^2}} = \frac{\dfrac{2\omega^2}{s^3}}{\dfrac{s^2 + \omega^2}{s^2}} = \frac{2\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)},$$

Exemplo (continuação)

pelo que

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = \frac{2\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}.$$

O segundo membro da última expressão pode ser escrito na forma

$$\frac{2\omega^2}{s(s^2+\omega^2)} = \frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2+\omega^2},$$

pelo que

$$f(t) = \frac{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s} - \frac{2s}{s^2+\omega^2}\right\}}{t} = \frac{2-2\cos(\omega t)}{t}.$$

A função $f(t)$ obtida está nas condições do último teorema, sendo portanto a função pretendida.

Convolução

Sendo $f(t)$ e $g(t)$ duas funções definidas e integráveis em $[0, +\infty[$, represente-se por $f * g$ a função

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad t \geq 0.$$

À função $f * g$ chama-se *convolução de* $f(t)$ *com* $g(t)$.
É um exercício de rotina mostrar que

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau,$$

isto é, $f * g = g * f$, pelo que a convolução é comutativa. Para além da comutatividade a convolução possui também, por exemplo, as propriedades:

1. $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$ (distributividade);
2. $(f * g) * h = g * (f * h)$ (associatividade);
3. $f * 0 = 0 * f = 0$ (elemento absorvente).

Observe-se no entanto que $1 * g$ não é em geral igual a $g(t)$ (como é usual estamos a cometer o abuso de linguagem ao representar por 1 a função definida em $[0, \infty[$ identicamente igual a um).

Exemplo

Calcule-se $\cos t * 1$. *Tem-se*

$$\cos t * 1 = \int_0^t \cos(\tau)\, d\tau = [\sin(\tau)]_0^t = \sin t.$$

Exemplo

Determine-se $e^{at} * e^{bt}$ *com* a *e* b *constantes reais distintas. Tem-se que*

$$
\begin{aligned}
e^{at} * e^{bt} &= \int_0^t e^{a\tau} e^{b(t-\tau)} d\tau = e^{bt} \int_0^t e^{(a-b)\tau} d\tau \\
&= e^{bt} \left[\frac{e^{(a-b)\tau}}{a-b} \right]_0^t = \frac{e^{bt}}{a-b} \left(e^{(a-b)t} - 1 \right) \\
&= \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

O cálculo de $\cos t * u(t-\pi)$ *fica facilitado se utilizarmos a comutatividade da convolução [verifique].*
Se $t < \pi$

$$u(t-\pi) * \cos t = \int_0^t 0 \cdot \cos(t-\tau)d\tau = 0;$$

se $t > \pi$

$$u(t-\pi) * \cos t = \int_\pi^t \cos(t-\tau)d\tau = \sin(t-\pi),$$

tendo-se assim que

$$u(t-\pi) * \cos t = -\sin t \cdot u(t-\pi). \tag{0.16}$$

Com o objectivo de motivar o teorema seguinte, considere-se a convolução das funções

$$f(t) = e^t \quad \text{e} \quad g(t) = \sin t.$$

A função $f * g$ pode ser obtida, por exemplo, primitivando a função integranda por partes duas vezes, vindo que

$$(f * g)(t) = \int_0^t e^\tau \sin(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2}(-\sin t - \cos t + e^t).$$

Por outro lado, sabe-se que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s-1} \ \ (s > 1) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s^2+1} \ \ (s > 0).$$

Efetuando o produto $\mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$, obtém-se

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}, \quad (s > 1). \tag{0.17}$$

Calculemos agora a transformada de Laplace $f * g$. Tem-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f * g\} &= \frac{1}{2}\left(-\mathcal{L}\{\sin t\} - \mathcal{L}\{\cos t\} + \mathcal{L}\{e^t)\}\right. \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s-1}\right) \\ &= \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}, \quad (s > 1). \end{aligned} \tag{0.18}$$

Comparando (0.17) e (0.18) verifica-se que

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

A igualdade obtida não foi uma coincidência nem é exclusiva das funções f e g consideradas. Com efeito, tem-se o resultado:

Teorema (Teorema da convolução)

Suponhamos que as funções $f(t)$ e $g(t)$ se encontram nas condições do teorema de existência de transformada de Laplace e sejam $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{g\} = G(s)$, $s \in]\gamma, +\infty[$. Então

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\} = F(s)G(s), \quad s \in]\gamma, +\infty[, \tag{0.19}$$

ou equivalentemente

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}\} = f * g, \quad s \in]\gamma, +\infty[. \tag{0.20}$$

Exemplo

Sendo a uma constante real diferente de zero, determine-se

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\}.$$

É conhecido que

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}\ (s>0) \ \ e \ \ \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}\ (s>a).$$

Pelo teorema (0.9) vem

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{t\}\mathcal{L}\{e^{at}\}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{t * e^{at}\}\} = t * e^{at}.$$

Exemplo (continuação)

Como,

$$\begin{aligned}(t * e^{at})(t) &= \int_0^t \tau e^{a(t-\tau)} d\tau = e^{at} \int_0^t \tau e^{-a\tau} d\tau \\ &= e^{at} \left[-\frac{e^{-a\tau}}{a} \left(\tau + \frac{1}{a} \right) \right]_0^t = \frac{e^{at}}{a^2} \left(-e^{-at}(at+1) + 1 \right)\end{aligned}$$

tem-se que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s-a)} \right\} = \frac{e^{at} - at - 1}{a^2}.$$

Exemplo

Determine-se,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+25)}\right\}.$$

Sabe-se que $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$ $(s > 0)$. *Utilizando o teorema (0.6), vem que*

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s^2+25}\right\} = \frac{1}{5}\sin(5(t-1)) \cdot u(t-1)$$

ou equivalentemente

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{5}\sin(5(t-1)) \cdot u(t-1)\right\} = \frac{e^{-s}}{s^2+25}, \quad (s > 0).$$

Exemplo (continuação)

Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{e^{-s}}{s^2+25}\right\} =& \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{1\}\cdot\mathcal{L}\left\{\frac{1}{5}\sin(5(t-1))\cdot u(t-1)\right\}\right\} \\
=& \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{1*\frac{1}{5}\sin(5(t-1))\cdot u(t-1)\right\}\right\} \\
=& 1*\left(\frac{1}{5}\sin(5(t-1))\cdot u(t-1)\right) \\
=& \left(\frac{1}{5}\sin(5(t-1)\cdot u(t-1)\right)*1 \\
=& \int_0^t \frac{1}{5}\sin(5(\tau-1))\cdot u(\tau-1)d\tau.
\end{aligned}
$$

Exemplo (continuação)

Se $t < 1$ *o valor do integral anterior é zero. Se* $t > 1$,

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{5}\sin(5(\tau-1))\cdot u(\tau-1)d\tau =& \frac{1}{5}\int_1^t \sin(5(\tau-1))d\tau \\ =& \frac{1}{5}\left[\frac{-\cos(5(\tau-1))}{5}\right]_1^t \\ =& \left(\frac{1}{25}-\frac{\cos(5(t-1))}{25}\right).\end{aligned}$$

Tem-se então que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s^2+25)}\right\} = \left(\frac{1}{25}-\frac{\cos(5(t-1))}{25}\right)u(t-1).$$

Exemplo

Considere-se o problema de valores iniciais

$$y'' + 2y = r(t), \qquad y'(0) = 0,\ \ y(0) = 0,$$

e

$$r(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}.$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação e designando $\mathcal{L}\{y\}$ *por* Y*, obtém-se*

$$s^2 Y + 2Y = \mathcal{L}\{r(t)\}$$

ou ainda

$$Y = \frac{\mathcal{L}\{r(t)\}}{s^2 + 2}.$$

Exemplo (continuação)

Utilizando o teorema (0.9) e a igualdade
$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\} = \frac{\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}(s>0)$, *vem que*

$$\begin{aligned}
Y =& \frac{\mathcal{L}\{r(t)\}}{s^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}\{r(t)\}\mathcal{L}\{\sin(\sqrt{2}t)\} \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}\{r(t) * \sin(\sqrt{2}t)\} \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}\{(1-u(t-1)) * \sin(\sqrt{2}t)\} \\
=& \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}\{1 * \sin(\sqrt{2}t) - u(t-1) * \sin(\sqrt{2}t)\}
\end{aligned}$$

e

Exemplo (continuação)

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 * \sin(\sqrt{2}t) - u(t-1) * \sin(\sqrt{2}t)).$$

Tem-se que

$$1 * \sin\sqrt{2}t = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \cos\sqrt{2}t), \quad \textit{[verifique]}.$$

Relativamente a $u(t-1) * \sin(\sqrt{2}t)$ *tem-se*

$$u(t-1) * \sin(\sqrt{2}t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ \displaystyle\int_1^t \sin\sqrt{2}(t-\tau)d\tau, & t > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 - \cos\sqrt{2}(t-1)), & t > 1. \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

obtendo-se a solução do problema considerado

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos\sqrt{2}t}{2}, & 0 \leq t < 1 \\[2ex] \dfrac{\cos\sqrt{2}(t-1) - \cos\sqrt{2}t}{2}, & t > 1. \end{cases}$$