Número: ________ Curso: ________ Caderno: ________ Nome: ______________________

A primeira parte do teste é constituida por 5 questões de escolha múltipla.

Nas questões 1 a 5 assinale com "x" a resposta correcta.

Cada resposta correcta vale 1 valor. Respostas em branco valem 0.

Se responder erradamente ou de forma ambígua ser-lhe-á atribuída uma cotação negativa correspondente a 0.2 valores.

Se a soma das cotações da escolha múltipla for negativa, será atribuído 0 valores à escolha múltipla.

Classificação
EM -
TOTAL-

1. Considere o intervalo $[a, b]$ com $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ e $f(x_i), i = 0, ..., n$, com $n \geq 3$. Seja p o polinómio de Lagrange de grau menor ou igual a n, interpolador dos $x_i, i = 0, ..., n$ e q o polinómio de 2º grau que aproxima a função f segundo o método dos mínimos quadrados. Considere também o spline cúbico natural, S, interpolador dos $x_i, i = 0, ..., n$. Verifica-se sempre:

☐ **a)** $\sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - q(x_i)]^2 = 0$

☐ **b)** $\sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - q(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - p(x_i)]^2$

☐ **c)** $\sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - S(x_i)]^2 < \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - p(x_i)]^2$

☒ **d)** $\sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - S(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - p(x_i)]^2$

2. Considere a tabela de pontos para a função f

x_i	0	1	3
$f(x_i)$	c	-1	2

onde $c \in \mathbb{R}$. Seja $p_1(x)$ o polinómio grau 1 que aproxima a função f nos pontos da tabela pelo método dos mínimos quadrados tal que $p_1(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2$. Então

☐ **a)** $c = \frac{5}{2}$

☐ **b)** $c = 0$

☒ **c)** $c = -\frac{5}{2}$

☐ **d)** $c = 1$

(V.S.F.F)

3. Considere o integral $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$, onde f é uma função integrável tal que $f''(x) = C$, $\forall x \in \mathbb{R}$, com $C \neq 0$. Sejam I_T e I_{PM} os valores aproximados de I obtidos pelas regras dos trapézios e do ponto médio simples, respectivamente. Qual o valor de I?

   - [x] **a)** $I = \frac{1}{3}(I_T + 2I_{PM})$
   - [ ] **b)** $I = \frac{2}{3}(I_T + I_{PM})$
   - [ ] **c)** $I = I_T = I_{PM}$
   - [ ] **d)** $I = \frac{2}{3}(2I_T + 2I_{PM})$

4. Seja $I = \int_a^b f(x)dx$ e $J = \int_a^b p_2(x)dx$, onde $p_2(x)$ é o polinómio de grau 2 interpolador de $f(x)$ nos pontos a, $\dfrac{a+b}{2}$, b. Sejam I_T e J_T as aproximações de I e J dadas pela regra dos trapézios simples, respetivamente e I_S e J_S as aproximações de I e J, dadas pela regra de Simpson simples, respetivamente. Escolha a opção correta.

   - [ ] **a)** $I_S \neq J_S$
   - [ ] **b)** $I_T \neq J_T$
   - [ ] **c)** $J = J_T$
   - [x] **d)** $J = I_S$

5. Considere $x = \frac{1}{13}$ e $\hat{x} = 0.0769$ uma aproximação de x. Considere ainda a função $g(x) = \dfrac{1}{\frac{2}{25} - x}$ e a fórmula de propagação do erro relativo dada por $r_{g(x)} \approx \left|\dfrac{xg'(x)}{g(x)}\right| r_x$, $g(x) \neq 0$.

   Qual das seguintes opções é verdadeira:

   - [ ] **a)** $g(x)$ é bem condicionada para $x = \frac{1}{13}$, pois $r_{g(\frac{1}{13})} > r_{\frac{1}{13}}$.
   - [ ] **b)** $g(x)$ é bem condicionada para $x = \frac{1}{13}$ e $r_{g(\frac{1}{13})} \approx 0.0075$.
   - [ ] **c)** $g(x)$ é mal condicionada para $x = \frac{1}{13}$, pois $r_{g(\frac{1}{13})} < r_{\frac{1}{13}}$.
   - [x] **d)** $g(x)$ é mal condicionada para $x = \frac{1}{13}$ e $r_{g(\frac{1}{13})} \approx 0.0075$.

A segunda parte do teste é constituida por 3 grupos de questões. Cada resposta deverá estar convenientemente justificada.

Cotações: Questão 6: 7 valores; **Questão 7:** 6 valores; **Questão 8:** 2 valores

6. Considere a seguinte tabela com valores de uma função g:

x_i	-2	-1	4	5
$g(x_i)$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{1}{8}$

Nota: Justifique convenientemente cada alinea apresentando os cálculos intermédios.

a) Determine o polinómio de Newton com diferenças divididas interpolador dos pontos da tabela.

(Não necessita de apresentar o polinomio na forma simplificada e pode apresentar os valores em fracção ou alternativamente com 6 casas decimais devidamente arredondadas.)

b) Obtenha uma aproximação para $g(0)$ com 6 casas decimais devidamente arredondadas.

c) Sabendo que a função $g(x)$ é um polinómio de grau 4 em que o coeficiente de x^4 é $\frac{1}{72}$, diga quantas casas decimais significativas pode garantir para a aproximação de $g(0)$.

d) Determine o polinómio de grau 2 que aproxima a tabela de pontos segundo o método dos minimos quadrados.

e) Determine o erro quadrático para o polinómio obtido na alinea d) com 6 casas decimais devidamente arredondadas.

7. Considere o integral $I = \int_1^3 ln(x^2)dx$.

Nota: Justifique convenientemente cada alinea apresentando cálculos intermédios com 6 casas decimais devidamente arredondadas.

a) Determine um valor aproximado de I pela regra do ponto médio composta com h=1.

b) Determine um valor aproximado de I pela regra de Simpson com n=2 aplicações da regra.

c) Quantas casas decimais significativas pode pelo menos garantir para a aproximação obtida em b).

d) Quantas vezes teria de aplicar a regra de Simpson para obter uma aproximação com pelo menos 6 casas decimais significativas?

8. Seja S a função definida por

$$S(x) = \begin{cases} -x^3 - 6x^2 - 8x + 2, & -2 \leq x < -1 \\ \alpha x^3 + \beta x + 4, & -1 \leq x < 0 \\ -2x + 4, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Determine as contantes reais α e β de forma a que $S(x)$ seja spline cúbico interpolador e diga se $S(x)$ pode ser um spline natural?

Resolução 1ª teste CNA - 21/10/2023

Questão 2

x_i	0	1	3
$f(x_i)$	c	-1	2

$c \in \mathbb{R}$

$p_1(x)$ polinómio de grau 1 que aproxima f pelo metodo dos mínimos quadrados: $p_1(x_i) = f(x_i)$, $i = 0,1,2$ $\Rightarrow$

$p_1(x)$ é o polinómio interpolador dos 3 pontos da tabela, mas tem de ter grau 1.

tabela diferenças divididas

x_i	$f(x_i)$	$f[\,,\,]$	$f[\,,\,,\,]$
0	c		
		$-1-c$	
1	-1		$\frac{5+2c}{6}$
		$\frac{3}{2}$	
3	2		

para ter forçosamente grau 1

$$\frac{5+2c}{6} = 0 \iff c = -\frac{5}{2}$$

logo $p_1(x) = c - (1+c)x = -\frac{5}{2} - \left(1 - \frac{5}{2}\right)x$

Questão 3

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \qquad f''(x) = c \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

I_T e I_{PM} Aproximações de I pela regra dos trapézio e ponto medio simples respectivamente.

Erro regra trapézios simples $\quad h = 1-(-1) = 2$

$$I - I_T = \frac{-2^3}{12} f''(\xi) = -\frac{2}{3}c \iff c = -\frac{3}{2}(I - I_T)$$

Erro regra ponto medios simples

$$I - I_{PM} = \frac{2^3}{24} f''(\xi) = \frac{1}{3}c \iff c = 3(I - I_T)$$

então $-\frac{3}{2}(I - I_T) = 3(I - I_{PM}) \iff$

$$\Leftrightarrow \quad I - I_T = -2\left(I - I_{PM}\right) \Leftrightarrow I + 2I = I_T + 2I_{PM}$$

$$\Leftrightarrow \quad I = \frac{1}{3}\left(I_T + 2I_{PM}\right)$$

Questão 4

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \qquad J = \int_a^b p_2(x)\,dx$$, $p_2(x)$ polinómio interpolador de $f(x)$ em $a, \frac{a+b}{2}, b$

$$I_T = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)$$

$$I_S = \frac{b-a}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$J_T = \frac{b-a}{2}\left(p_2(a) + p_2(b)\right) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) = I_T$$

$$J_S = \frac{b-a}{3}\left(p_2(a) + 4p_2\left(\frac{a+b}{2}\right) + p_2(b)\right) = \frac{b-a}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = I_S$$

a) $I_S \neq J_S$ F

b) $I_T \neq J_T$ F

c) $J = J_T$ Falso, porque na regra dos trapézios ~~f(x)~~ não é aproximado por um polinómio de grau 2 nos pontos em questão.

d) $J = I_S$ Verdade, pois na regra de Simpson $f(x)$ é aproximado por um $p_2(x)$ interpolador $f(x)$ nos pontos $a, \frac{a+b}{2}, b \Rightarrow$ coincide com I.

Questão 5

$x = \frac{1}{13}$ $\quad \tilde{x} = 0.0769$ $\quad g(x) = \dfrac{1}{\frac{2}{25} - x}$

$$r_{g(x)} \approx \left| \frac{x\, g'(x)}{g(x)} \right| r_x$$

$$\left| \frac{x\, g'(x)}{g(x)} \right| \approx \frac{r_{g(x)}}{r_x}$$ valor aproximado para o nº de condição de $g(x)$

$$r_{\frac{1}{13}} = \frac{\left| \frac{1}{13} - 0.0769 \right|}{\left| \frac{1}{13} \right|} = 0.0003$$

$$r_{g(\frac{1}{13})} = \frac{\left| g(\frac{1}{13}) - g(0.0769) \right|}{\left| g(\frac{1}{13}) \right|} = \frac{325 - 322.58\ldots}{325} = 0.007444\ldots \approx 0.0075$$

$$\frac{r_{g(\frac{1}{13})}}{r_{\frac{1}{13}}} \approx 24.81\ldots \gg 1 \Rightarrow g \text{ é mal condicionada}$$

Questão 6 (2)

x	-2	-1	4	5
$g(x)$	$-1/3$	$-1/24$	$8/3$	$1/8$

a) Tabela diferenças divididas (1.5)

x_i	$g(x_i)$	$g[\,,\,]$	$g[\,,\,,\,]$	$g[\,,\,,\,,\,]$
-2	$-1/3$			
		$7/24$		
-1	$-1/24$		$1/24$	
		$13/24$		$-5/63$
4	$8/3$		$-37/72$	
		$-61/24$		
5	$1/8$			

$i=0,1,2,3$

$n+1=4$

$n=3$

Polinómio de Newton com diferenças divididas

$$p_3(x) = -\frac{1}{3} + \frac{7}{24}(x+2) + \frac{1}{24}(x+2)(x+1) - \frac{5}{63}(x+2)(x+1)(x-4)$$

(0.5) b) $p_3(0) = \dfrac{61}{63} \approx 0.968254 \approx g(0)$

(1.8) c) $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dfrac{1}{72} x^4$

$$|g(0) - p_3(0)| \leq |(0+2)(0+1)(0-4)(0-5)| \frac{M_4}{4!} = \frac{40}{3\times 24} \leq 0.555556$$

$> 0.5\times 10^0$

não se garante

c.d.s.

$$M_4 = \max_{x\in[-2,5]} |g^{(4)}(x)| = \frac{1}{3}$$

$$g^{(4)}(x) = a_4\, 4! = \frac{24}{72} = \frac{1}{3}$$

d) $p_2(x)$? que aproxima os pontos da tabela pelo método dos mínimos quadrados (1.7) $p_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$

Sistema de equações normais

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 46 \\ 6 & 46 & 180 \\ 46 & 180 & 898 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29/12 \\ 12 \\ 533/12 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} c_0 = 1277/666 \approx 1.917417 \\ c_1 = 415/444 \approx 0.934685 \\ c_2 = -17/72 \approx -0.236111 \end{cases}$$

$$p_2(x) = \frac{1277}{666} + \frac{415}{444}x - \frac{17}{72}x^2$$

e) Erro quadrático (1.5) $E^2 = \sum_{i=0}^{3} (g(x_i) - p_2(x_i))^2 = 1.876877$

5

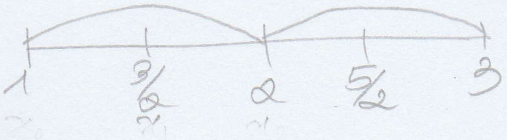
Questão 7

$$I = \int_1^3 \ln(x^2)\,dx \qquad [a,b]=[1,3]$$

a) I_{PM} com $h=1$ $\qquad h=\frac{b-a}{n}=\frac{2}{n}=1 \Leftrightarrow n=2$

1

$$I_{PM} = h\left(f\left(\tfrac{3}{2}\right)+f\left(\tfrac{5}{2}\right)\right)$$



$$= \ln\left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^2\right)+\ln\left(\left(\tfrac{5}{2}\right)^2\right)$$

$$= 2.643512$$

b) I_S com $n=2$ $\qquad \Rightarrow h=\frac{b-a}{2n}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

1.5

$$I_{S,2} = \frac{\frac{1}{2}}{3}\left(f(1)+4f\left(\tfrac{3}{2}\right)+2f(2)+4f\left(\tfrac{5}{2}\right)+f(3)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\ln(1)+4\ln\left(\left(\tfrac{3}{2}\right)^2+\left(\tfrac{5}{2}\right)^2\right)+2\ln(2^2)+\ln(3^2)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\times 15.543860 = 2.590643$$

c) $|I-I_{S,2}| \le n\frac{h^5}{90}M_4 \qquad M_4=\max_{x\in[1,3]}|f^{(4)}(x)|$

2

$$f'(x)=\frac{2}{x}$$

$$f''(x)=-\frac{2}{x^2}$$

$$f'''(x)=\frac{4}{x^2}$$

$$f^{(4)}(x)=\frac{-12}{x^4}$$

$$|f^{(4)}(x)| = \frac{12}{x^4} \le \frac{12}{1^4}=12=M_4$$

função decrescente em $\mathbb{R}\to \max x=1$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Dado que $f^{(4)}(x)$ é uma função não negativa

$$|I-I_{S,2}| \le 2\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{90}\times 12 = 0.0084 = 0.84\times10^{-2} < 0.5\times10^{-1}$$

está garantida pelo menos 1 c.d.s

d) $n = ?$ nº de aplicações da regra de Simpson tal que

1.5 $|I - I_{S,n}| \leq 0.5 \times 10^{-6}$ 6 c.d.s

como $|I - I_{S,n}| \leq n \dfrac{h^5}{90} \times 12$

basta impôr

$$n \frac{h^5}{90} \times 12 \leq 0.5 \times 10^{-6}$$

$$h = \frac{b-a}{2n} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{n}\left(\frac{1}{n}\right)^{\cancel{5}\,4}}{90} \times 12 \leq 0.5 \times 10^{-6}$$

$$n^4 \geq \frac{12}{90 \times 0.5 \times 10^{-6}}$$

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{12}{45 \times 10^{-6}}}$$

$$n \geq 22.72\ldots$$

$n = 23$ aplicações da regra

Questão 8 2

$$S(x)=\begin{cases}-x^3-6x^2-8x+2, & -2\leq x<-1 & S_0(x)\\ \alpha x^3+\beta x+4, & -1\leq x<0 & S_1(x)\\ -2x+4, & 0\leq x\leq 1 & S_2(x)\end{cases}$$

S_0, S_1, S_2 polinómios de grau ≤ 3

S(x) contínua

$$\left.\begin{array}{l} S_0(-1)=1-6+8+2=5\\ = S_1(-1)=-\alpha-\beta+4\end{array}\right\} -\alpha-\beta+4=5 \Leftrightarrow -\alpha-\beta=1$$

$S_1(0)=4=S_2(0)$

S'(x) contínua

$$S'(x)=\begin{cases}-3x^2-12x-8, & -2\leq x<-1\\ 3\alpha x^2+\beta, & -1\leq x<0\\ -2, & 0\leq x\leq 1\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} S'_0(-1)=-3+12-8=1\\ = S'_1(-1)=3\alpha+\beta\end{array}\right\} 3\alpha+\beta=1$$

$$\left.\begin{array}{l} S'_1(0)=\beta\\ S'_2(0)=-2\end{array}\right\} \beta=-2$$

S''(x) contínua

$$S''(x)=\begin{cases}-6x-12, & -2\leq x<-1\\ 6\alpha x, & -1\leq x<0\\ 0, & 0\leq x\leq 1\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} S''_0(-1)=6-12=-6\\ S''_1(-1)=-6\alpha\end{array}\right\} -6\alpha=-6 \Leftrightarrow \alpha=1$$

$S''_1(0)=0=S''_2(0)$ ✓

Questão 8 (continuação)

$$\begin{cases} -\alpha - \beta = 1 \\ 3\alpha + \beta = 1 \\ \beta = -2 \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad \begin{aligned} & -1+2 = 1 \\ & 3\times 1 - 2 = 1 \\ & \beta = -2 \\ & \alpha = 1 \end{aligned}$$

Para ser Spline natural $S''(-2) = S''(1) = 0$

$S''(-2) = -6\times(-2) - 12 = 0$

$S''(1) = 0$

$S(x)$ é spline cúbico natural