Diferenciabilidade de uma função real de duas variáveis

Definição

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$, $(a, b) \in \operatorname{int}(D)$ *e*

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

Diz-se que f *é diferenciável em* (a, b) *se existir uma aplicação linear*

$$\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(a+h, b+k) - f(a, b) - \lambda(h, k)|}{\|(h, k)\|} = 0.$$

À aplicação linear λ chama-se derivada de f em (a, b) e representa-se por $Df(a, b)$.

Existência das derivadas parciais

Teorema

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ *e* $f : D \to \mathbb{R}$. *Se* f *for diferenciável em* (a, b), *então*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

existem e fixando a base canónica em $\mathbb{R}^2$, $Df(a, b)$ *é representada pela* *matriz jacobiana* *de* f *no ponto* (a, b)

$$Jf(a, b) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right]$$

Como provar que f é diferenciável em (a, b)?

1. Calcular
$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right).$$
Se uma das derivadas parciais não existir, pelo teorema, f não é diferenciável.

2. Verificar que
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(a+h,b+k) - f(a,b) - \nabla f(a,b)\cdot(h,k)|}{\|(h,k)\|} =$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|f(a+h,b+k) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k\right|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$= 0.$$

Exemplo

Exemplo

Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

Resolução:

Continuidade de uma função diferenciável

Teorema

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$, $(a, b) \in \operatorname{int}(D)$ *e*

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

Se f *for diferenciável em* (a, b), *então* f *é contínua em* (a, b).

Demonstração: $\blacksquare$

Diferenciabilidade de uma função de classe C^1

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ *um conjunto aberto. Se* $f \in C^1(D)$, *então* f *é diferenciável em qualquer ponto de* D.

Exemplo

Verifique que a função $f(x, y) = \dfrac{\cos x}{x^2 + 1}$ *é diferenciável em* $\mathbb{R}^2$.

Resolução:

Aproximação linear de 1ª ordem - Plano tangente

Se f for diferenciável em (a, b), então

$$f(a+h, b+k) \approx \underbrace{f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)k}_{\text{a aproximação à 1ª ordem de } f \text{ em } (a,b)}$$

$$f(x,y) \approx \underbrace{f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)}_{\text{a aproximação à 1ª ordem de } f \text{ em } (a,b)}$$

Equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(a, b, f(a,b))$:

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Funções vetoriais

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$. Uma função

$$f : D \to \mathbb{R}^m \quad (m \in \mathbb{N}, \quad m > 1),$$

fica definida por m funções reais de n variáveis

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$$

em que

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \ldots, x_n), \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

e

$$f_i : D \to \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

A f_i chama-se função coordenada de f.

Diferenciabilidade de funções vetoriais

Definição

Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$, $A \in \mathrm{int}(D)$ *e*

$$f : D \to \mathbb{R}^m.$$

Diz-se que f *é diferenciável em* A *se existir uma aplicação linear*

$$\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

tal que

$$\lim_{H \to O} \frac{\|f(A+H) - f(A) - \lambda(H)\|_m}{\|H\|_n} = 0.$$

Diferencial

À aplicação linear λ chama-se derivada de f em A e representa-se por $Df(A)$.

Diferenciabilidade de uma função vetorial e das suas funções coordenadas

Teorema

Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$, $A \in \operatorname{int}(D)$ *e*

$$f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m.$$

A função f *é diferenciável em* A *se, e só se, as funções coordenadas*

$$f_i : D \to \mathbb{R}, \quad i \in \{1, \ldots, m\},$$

forem diferenciáveis em A*.*

Derivada e matriz Jacobiana

Teorema

Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$, $A \in \mathrm{int}(D)$ *e*

$$f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m.$$

Se f *for diferenciável em* A *então todas as derivadas parciais*

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(A) \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}$$

existem e a derivada f *em* A *é a aplicação linear representada pela matriz jacobiana* f *em* A *(fixadas as bases canónicas em* $\mathbb{R}^m$ *e em* $\mathbb{R}^n$*)*

$$Jf(A) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(A) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(A) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(A) \end{bmatrix}$$

Exemplo

Considere a função

$$f(x, y, z) = (x^2 + 3y + e^z, \sin x + \ln(yz)).$$

(a) *Verifique que a função é diferenciável no ponto* $(0, 1, e)$.

(b) *Calcule a matriz Jacobiana da função no ponto* $(0, 1, e)$.

Resolução:

Derivada da função composta - Regra da cadeia

Teorema

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad g : f(D) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$$

e

$$A \in \mathrm{int}(D), \quad B = f(A) \in \mathrm{int}(f(D)).$$

Se f *for diferenciável em* A *e* g *for diferenciável em* B*, então a função composta*

$$h = g \circ f : D \to \mathbb{R}^p$$

é diferenciável em A *e*

$$Dh(A) = Dg(B) \circ Df(A), \quad Jh(A) = Jg(B) \cdot Jf(A).$$

Se $x = x(t)$ for diferenciável em t_0 e $y = y(x)$ for diferenciável em $x_0 = x(t_0)$, então a função composta

$$y(t) = y(x(t))$$

é diferenciável em t_0 e

$$\frac{dy}{dt}(t_0) = \frac{dy}{dx}(x(t_0)) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0).$$

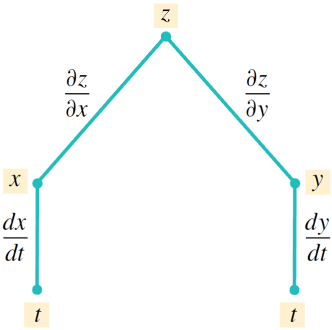
Regra da cadeia - Casos particulares

Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ forem diferenciáveis em t_0 e se $z = z(x, y)$ for diferenciável no ponto $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$, então a função composta

$$z(t) = z(x(t), y(t))$$

é diferenciável em t_0 e

(continuação)



$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0)}_{1^{\circ} \text{ ramo}} + \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0)}_{2^{\circ} \text{ ramo}}.$$

Exemplo

Seja

$$z = \sqrt{xy + y}, \quad x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta.$$

Use a regra da cadeia para determinar $\frac{dz}{d\theta}(\pi/2)$.

Resolução:

Regra da cadeia - Casos particulares

Se $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ forem diferenciáveis no ponto (u_0, v_0) e se $z = z(x, y)$ for diferenciável no ponto

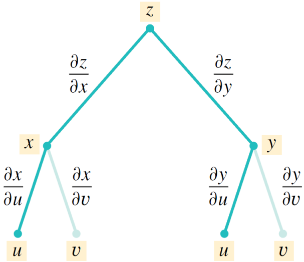
$$(x_0, y_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)),$$

então a função composta

$$z(u, v) = z(x(u, v), y(u, v))$$

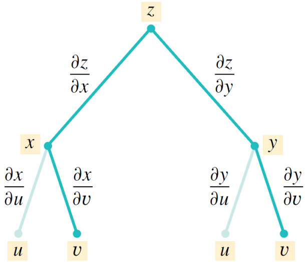
é diferenciável no ponto (u_0, v_0) e

Derivada em ordem a **u**



$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) &= \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)}_{1^{\circ}\ \text{ramo}} \\
&+ \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)}_{2^{\circ}\ \text{ramo}},
\end{aligned}
$$

Derivada em ordem a v



$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \quad = \quad & \underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)}_{1^{\circ}\ \text{ramo}} \\ + \quad & \underbrace{\frac{\partial z}{\partial y}(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)}_{2^{\circ}\ \text{ramo}},\end{aligned}$$

Regra da cadeia - Casos particulares

Se

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

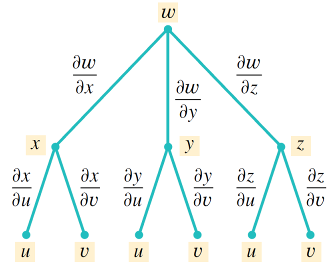
forem funções diferenciáveis no ponto (u_0, v_0) e $w = w(x, y, z)$ for diferenciável no ponto

$$(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)),$$

então a função composta

$$w(u, v) = w(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

é diferenciável no ponto (u_0, v_0) e



$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u}(u_0,v_0) &= \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u},\\ \frac{\partial w}{\partial v}(u_0,v_0) &= \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\end{aligned}$$

onde

$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ e $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ são calculadas em (u_0, v_0) e

$\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$ são calculadas em $(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$.

Exemplo

Seja

$$u = x^4 y + y^2 z^3$$

onde

$$x = rse^t, \quad y = rs^2 e^{-t}, \quad z = r^2 s \sin t.$$

Calcule $\frac{\partial u}{\partial s}(r, s, t)$ *para* $(r, s, t) = (2, 1, 0)$.

Resolução:

Exemplo

Sejam

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x + y, x - y)$$

e

$$g(u, v) = (uv, u^2 - v^2, v)$$

Seja $h = g \circ f$.

(a) *Justifique que* h *é diferenciável no ponto* $(1, 1)$.

(b) *Calcule a matriz Jacobiana de* h *em* $(1, 1)$.

Resolução: