

AM 2C – Teste Resolução 2022.1

Felipe B. Pinto 61387 – MIEQB

11 de janeiro de 2023

Conteúdo

Grupo I	–	3		
Questão 1	3	Questão 1 9
Questão 2	4	Questão 2 13
Questão 3	5	Grupo III	– 15
Questão 4	6	Questão 1 15
Questão 5	7	Grupo IV	– 19
Grupo II	–	9	Questão 1 19

Grupo I

Questão 1

A parábola com foco em $(2,0)$ e recta directriz $x = -2$, e a elipse com centro em $(0,1)$, foco em $(\sqrt{7}, 1)$ e vértice em $(4,1)$ admitem, respectivamente, as seguintes equações:

(i) Parabola

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} (y - y') = (x - x')^2 / (4a) \\ \wedge f' = (x' + a, y') = (2, 0) \\ \wedge L \subset \mathbb{R}^2 : x = x' - a = -2 \\ \wedge y' = 0 \\ \wedge x' + a + x' - a = 2x' = 2 - 2 = 0 \\ \wedge a = 2 + x' = 2 \end{array} \right\} =$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 / 8 \}$$

(ii) Elipse

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} \frac{(x - x')^2}{r_1^2} + \frac{(y - y')^2}{r_2^2} = 1 \\ \wedge (x', y') = (0, 1) \\ \wedge f_2 = (x' + c, y') = (c, 1) = (\sqrt{7}, 1) \\ \wedge P_x = (x' + r_1, y') = (r_1, y') = (4, 1) \\ \wedge r_2^2 = r_1^2 - c^2 = 16 - 7 = 9 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{16} + \frac{(y - 1)^2}{9} = 9x^2 + 16(y - 1)^2 = 1 * 9 * 16 = 144 \right\}$$

Questão 2

Considere-se as seguintes funções reais de variável real:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{y x^3}{y + x^3}; & g(x, y) &= \frac{\sin(x^2 + y^2)}{e^{(x^2 + y^2)^{-1}}}; \\ h(x, y) &= \frac{2x + y}{x - y} \end{aligned}$$

Relativamente ao limite de cada uma delas no ponto $(0,0)$ tem-se que:

- a) f e g têm limite zero, e h não tem limite.
- b) f e g têm limite zero, e h tem limite 2.
- c) f e g têm limite zero, e h tem limite -1.
- d) f têm limite zero, h tem limite 2 e o limite de g é infinito.
- e) f e h não têm limite e o limite de g é infinito.
- f) f e h não têm limite e o limite de g é zero.

(i) f

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y x^3}{y + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^3} = 0 = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^6 - x^3) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^6 - x^3) x^3}{(x^6 - x^3) + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 - 1 = -1 \end{aligned}$$

(ii) g

$$-1 \leq \sin(x^2 + y^2) \leq 1 \wedge \lim_{(x^2 + y^2) \rightarrow 0} e^{(x^2 + y^2)^{-1}} = +\infty \therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0$$

(iii) h

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} h(x, y) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2x + y}{x - y} \right) = 2 \neq \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + y}{x - y} \right) = -1$$

Questão 3

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (3x - y^2, x^3 - 3y^2)f(u, v)$$

Que é invertível numa vizinhança do ponto $(1,1)$. Tem-se que:

a) $\frac{\partial x}{\partial u}(2, -2) = \frac{\partial x}{\partial v}(2, -2)$

d) $\frac{\partial x}{\partial u}(2, -2) = \frac{\partial y}{\partial u}(2, -2)$

b) $\frac{\partial x}{\partial u}(2, -2) = -\frac{\partial x}{\partial v}(2, -2)$

e) $\frac{\partial y}{\partial u}(2, -2) = \frac{\partial y}{\partial v}(2, -2)$

c) $\frac{\partial y}{\partial u}(2, -2) = -\frac{\partial y}{\partial v}(2, -2)$

f) $\frac{\partial x}{\partial v}(2, -2) = \frac{\partial y}{\partial v}(2, -2)$

$$f(1, 1) = (3 * 1 - 1^2, 1^3 - 3 * 1^2) = (2, -2)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}_{(2,2)} &= J_{f^{-1}}(2, -2) = J_{f^{-1}}(f(1, 1)) = J_f(f(1, 1))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}_{(1,1)}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -2y \\ 3x^2 & -6y \end{bmatrix}_{(1,1)}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}^{-1} \text{adj} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = -12^{-1} \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Questão 4

A equação define z como função de x e de y numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$. Então:

$$x^4 + y^4 + (x + 1) e^z + 8 x \sin(z) - 4 = 0$$

$$\text{a) } \frac{\partial z}{\partial x}(1, -1) = +1/2, \frac{\partial z}{\partial y}(1, -1) = +2/5 \quad \text{d) } \frac{\partial z}{\partial x}(1, -1) = +1/2, \frac{\partial z}{\partial y}(1, -1) = +2$$

$$\text{b) } \frac{\partial z}{\partial x}(1, -1) = -1/2, \frac{\partial z}{\partial y}(1, -1) = -2/5 \quad \text{e) } \frac{\partial z}{\partial x}(1, -1) = -1/2, \frac{\partial z}{\partial y}(1, -1) = +2$$

$$\text{c) } \frac{\partial z}{\partial x}(1, -1) = -1/2, \frac{\partial z}{\partial y}(1, -1) = +2/5 \quad \text{f) } \frac{\partial z}{\partial x}(1, -1) = -1/2, \frac{\partial z}{\partial y}(1, -1) = -2$$

$$\text{(i) } \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, -1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1, 0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1, -1, 0)} = -\frac{(4x^3 + e^z + 8 \sin(z))(1, -1, 0)}{((x+1)e^z + 8x \cos(z))(1, -1, 0)} = -\frac{4 * (1)^3 + e^0 + 8 * \sin(0)}{(1+1) * e^0 + 8 * 1 * \cos(0)} = -\frac{4 + 1 + 0}{2 + 8} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{(ii) } \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y}(1, -1) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1, -1, 0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1, -1, 0)} = -\frac{(4y^3)(1, -1, 0)}{((x+1)e^z + 8x \cos(z))(1, -1, 0)} = \\ &= -\frac{4(-1)^3}{(1+1) * e^{(0)} + 8 * 1 * \cos(0)} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Questão 5

Sejam g e h duas funções reais e de classe C^1 em \mathbb{R} . Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = \left(x g \left(\frac{x}{z} \right), h(x^2 y) \right)$$

Determine a matriz jacobiana de f no ponto $(-1, 0, -1)$ em função das derivadas de g e de h .

$$\begin{aligned} J_f(-1, 0, -1) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix}_{(-1, 0, -1)} = \\ &= \begin{bmatrix} g\left(\frac{x}{z}\right) + x g'\left(\frac{x}{z}\right) z^{-1} & 0 & -g'\left(\frac{x}{z}\right) z^{-2} \\ h'(x^2 y) y 2x & h'(x^2 y) x^2 & 0 \end{bmatrix}_{(-1, 0, -1)} = \\ &= \begin{bmatrix} g\left(\frac{-1}{-1}\right) + (-1) g'\left(\frac{-1}{-1}\right) (-1)^{-1} & 0 & -g'\left(\frac{-1}{-1}\right) (-1)^{-2} \\ h'((-1)^2 0) (0) 2(-1) & h'((-1)^2 0) (-1)^2 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} g(1) + g'(1) & 0 & -g'(1) \\ 0 & h'(0) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Grupo II

Questão 1

Considere a função real g , de duas variáveis reais, definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Q1 a.

Estude, por definição, a continuidade de $g(x,y)$ em $(0,0)$.

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : & \left(\left(\forall (x, y) \neq (0, 0) \wedge \left\| \sqrt{x^2 + y^2} \right\| < \varepsilon \right) \implies |g(x, y) - 0| < \delta \right) \implies \\ & \implies \left| \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \frac{(x^2 + 3y^2)}{x^2 + y^2} \leq |x| \frac{(3x^2 + 3y^2)}{x^2 + y^2} \leq \\ & \leq 3|x| \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\varepsilon = \delta \implies \varepsilon = \delta/3 \end{aligned}$$

Q1 b.

Determine $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)e\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)$

(i)

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h, 0) - g(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3 - 3 \cdot h \cdot 0^2}{h^2 + 0^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

(ii)

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0, h) - g(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0^3 - 3 \cdot 0 \cdot h^2}{0^2 + h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

Q1 c.

Estude a diferenciabilidade de g no ponto $(0,0)$.

$$\begin{aligned} g(a, b) - g(0, 0) &= \frac{a^3 - 3 a b^2}{a^2 + b^2} = \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) a + \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) b + \varepsilon(a, b) \sqrt{a^2 + b^2} = \\ &= 1 a + \varepsilon(a, b) \sqrt{a^2 + b^2} \implies \varepsilon(a, b) = \frac{-4 a b^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \implies \\ &\implies \lim_{a \rightarrow 0^+} \varepsilon(a, a) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{-4 * a * a^2}{(a^2 + a^2)^{3/2}} = \lim_{a \rightarrow 0^+} -2^{1/2} = -\sqrt{2} \neq 0 \end{aligned}$$

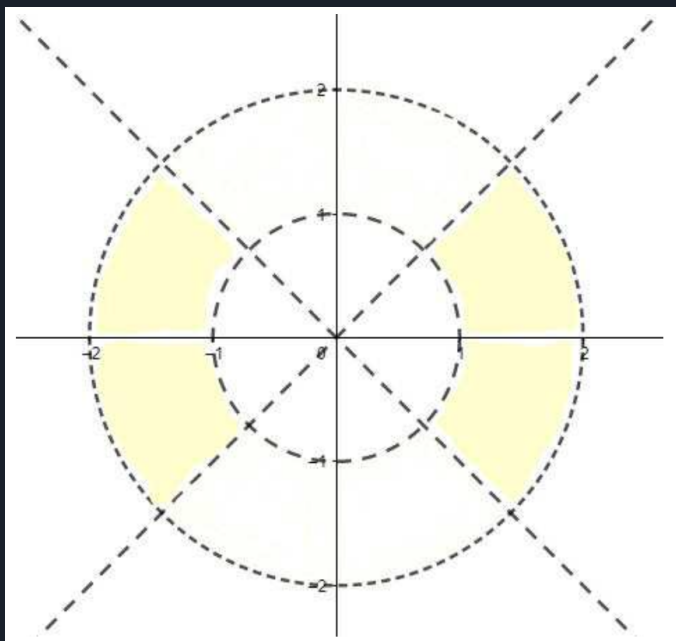
Questão 2

Considere a função real f de duas variáveis reais, definida por

$$f(x, y) = \frac{\log(x^2 + y^2 - 1) \log(x^2 - y^2)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

Indique o seu domínio D e esboce-o. Caracterize $\text{int } D$ usando coordenadas polares. Diga, justificando, se D é um conjunto aberto ou fechado.

$$D(f) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 4 - x^2 - y^2 \geq 0 & \wedge \\ \wedge \sqrt{4 - x^2 - y^2} \neq 0 & \wedge \\ \wedge x^2 + y^2 - 1 > 0 & \wedge \\ \wedge x^2 - y^2 > 0 \end{pmatrix} \right\} =$$
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4 \wedge |x| > |y|\}$$



$$\text{int}(D) = D = \{(\rho, \theta) \in]1, 4[\times]-\pi/4, \pi/4[\} \cup \{(\rho, \theta) \in]1, 4[\times]3\pi/4, 5\pi/4[\}$$



Grupo III

Questão 1

Considere a função:

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\rightarrow x^2 + x y + y^2 \end{aligned}$$

Q1 a.

Calcule os extremos locais de $f(x, y)$ quando $D = \mathbb{R}^2$.

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y = 0 \end{cases} \right\} =$$
$$= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} -3y = 0 \\ x = -2y \end{cases} \right\} = \{(0, 0)\}$$

$$\det H(f(x, y)) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{bmatrix}_{(0,0)} = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}_{(0,0)} = 4 - 1 = 3$$

$\therefore (0, 0)$ é um mínimo local

Q1 b.

No conjunto $D = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1$ a função $f(x, y)$ admite mínimo e máximo absolutos. Escreva a função lagrangiana associada a este problema e determine os referidos extremos.

$$L = f + \lambda g = x^2 + x y + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \implies$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + \lambda(2x) = 0 \\ x + 2y + \lambda(2y) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2x(\lambda + 1) + y = 0 \\ 2(\lambda + 1)(x - y) = x - y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (\lambda = -1/2 \wedge x = y) \vee \\ (\vee (x = -y \wedge \lambda = -3/2)) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right\} \implies C_f = \left\{ \begin{array}{l} (+2^{-1/2}, +2^{-1/2}), \\ (+2^{-1/2}, -2^{-1/2}), \\ (-2^{-1/2}, +2^{-1/2}), \\ (-2^{-1/2}, -2^{-1/2}) \end{array} \right\} \implies$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} f(+2^{-1/2}, +2^{-1/2}) = 3/2 \\ f(+2^{-1/2}, -2^{-1/2}) = 1/2 \\ f(-2^{-1/2}, +2^{-1/2}) = 1/2 \\ f(-2^{-1/2}, -2^{-1/2}) = 3/2 \end{array} \right.$$

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizantes: } \{(+2^{-1/2}, -2^{-1/2}), (-2^{-1/2}, +2^{-1/2})\} \\ \text{Maximizantes: } \{(+2^{-1/2}, +2^{-1/2}), (-2^{-1/2}, -2^{-1/2})\} \end{array} \right.$$

Grupo IV

Questão 1

Determine os pontos da superfície de equação $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 1$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano de equação $3x - 2y + 3z = 1$

$$\begin{aligned}(2x_0)(x - x_0) + (4y_0)(y - y_0) + (-6z_0)(z - z_0) &= \\ &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -2x_0 \\ 4y_0 \\ -6z_0 \end{bmatrix} - 2x_0^2 - 4y_0^2 + 6z_0^2 = 0\end{aligned}$$

$$3x - 2y + 3z - 1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} - 1 = 0 \implies$$

$$\implies \begin{bmatrix} -2x_0 \\ 4y_0 \\ -6z_0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\alpha/2 \\ -\alpha/2 \\ -\alpha/2 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies (3\alpha/2)^2 + 2(-\alpha/2)^2 - 3(-\alpha/2)^2 - 1 =$$

$$= 9\alpha^2/4 + 2\alpha^2/4 - 3\alpha^2/4 - 1 = 8\alpha^2/4 - 1 = 0 \implies$$

$$\implies \alpha = \pm\sqrt{1/2}$$

$$\therefore \left\{ \begin{aligned} &(+3/2^{3/2}, -2^{-3/2}, -2^{-3/2}), \\ &(-3/2^{3/2}, +2^{-3/2}, +2^{-3/2}) \end{aligned} \right\}$$

