INSTRUÇÕES PARA O 1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C

LEIA ATENTAMENTE AS SEGUINTES INSTRUÇÕES ATÉ AO FIM

Hora de início do teste: 19.00   Duração: 2 horas (sem tolerância e sem intervalo)

Todas as respostas são dadas no enunciado que vos será distribuído pelo que não necessitam, nem podem, utilizar outras folhas de resposta.

O teste possui 7 folhas agrafadas, que **não podem** desagrafar, que para além desta primeira folha de instruções, é constituído por quatro grupos e por duas folhas em branco que se destinam a rascunho.

No cabeçalho da página 3 (Grupo I), devem preencher completamente os vossos dados pessoais no espaço para isso reservado: nome completo, curso e nº de aluno. **O não preenchimento dos vossos dados pessoais conduz ao anulamento da prova**.

O Grupo I possui 6 perguntas de escolha múltipla. Devem selecionar de forma inequívoca a opção (única) de resposta. Respostas erradas **não são** penalizadas.

Nos Grupos II,III, IV as perguntas são de resposta aberta e são respondidas no próprio enunciado.

A cotação de cada pergunta está assinalada no início da mesma. Devem ter em atenção o espaço destinado à resposta de cada alínea e gerir esse espaço convenientemente (por exemplo, não utilizar letra ou símbolos matemáticos demasiado grandes). As duas últimas folhas (páginas 11 a 14) estão em branco e destinam-se a ser utilizadas como rascunho e **não serão corrigidas**.

No final da prova, o aluno deverá pedir licença para entregar o teste, em seguida deverá colocar a prova, na mesma mesa onde se encontra a folha de presenças (que deverá assinar neste momento) em cima de outras provas que já tenham sido eventualmente entregues.

.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2020/2021
12 DE MAIO DE 2021

Duração: 2horas.

Nome:

Nº de aluno: Nº de caderno:

PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES DO GRUPO I ASSINALE COM X O QUADRADO CORRESPONDENTE À ALTERNATIVA CORRECTA.

GRUPO I

[*1,5 valores*] 1. A parábola com vértice no ponto $(-1, 2)$ e diretriz $x = -\dfrac{3}{2}$ tem por equação:

☐ $x^2 - 4x + 2y + 2 = 0$ ☐ $x^2 + 4x - 2y + 2 = 0$ ☐ $x^2 - 4x - 2y + 2 = 0$

☐ $y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$ ☐ $y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$ ☐ $y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$

[*1,5 valores*] 2. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, onde está definido o produto interno canónico notado com o símbolo $|$ e seja $||.||$ a norma induzida por este produto interno. Seja $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^n$. Apenas uma das seguintes expressões é falsa. Indique qual:

☐ $(u|e_i = 0,\ i = 1, ..., n) \Rightarrow u = 0.$ ☐ $(u|w_1 = u|w_2,\ \forall u \in E) \Rightarrow w_1 = w_2.$

☐ $-||u||\,||v|| \leq u|v, \ \ \forall u, v \in E.$ ☐ Se $u|v = 0$ então $||u + v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2.$

☐ Se $||u|| = ||v||$ então $u = v$ ou $u = -v$ ☐ $u|u \geq 0\ \ \forall u \in E.$

[*1,5 valores*] 3. Considere as funções reais de duas variáveis reais, definidas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ por:

$$f(x,y) = \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad g(x,y) = x\cos\left(\frac{1}{\sqrt{|y|}}\right), \quad h(x,y) = \frac{(1-\cos(xy))\,\sin(xy)}{x^3y^3}.$$

Relativamente ao limite de cada uma delas no ponto $(0,0)$, tem-se que:

☐ Nenhuma das funções tem limite.

☐ As funções f e g não têm limite mas a função h tem limite e o valor do limite é $1/2$.

☐ Todas as funções têm limite, o valor dos limites das funções f e g é zero e o valor do limite de h é um.

☐ Só as funções g e h têm limite. Os valores dos limites são zero e $1/2$ respectivamente.

☐ A função f tem limite zero, a função g não tem limite, a função h tem limite e o seu valor é um.

☐ A função f tem limite e o seu valor é um, a função g não tem limite, a função h tem limite e o seu valor é zero.

[*1,5 valores*] 4. Considere a função f definida por

$$f(x,y) = \Big(\cos(xy) - \sin(xy)\,,\, x^3 - y^3\Big) = (u,v).$$

Numa vizinhança do ponto $P = (1,0)$ a função f é invertível e:

☐ $\dfrac{\partial x}{\partial v}(1,1) = \dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u}(1,1) = -1$ ☐ $\dfrac{\partial x}{\partial v}(1,1) = -\dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u}(1,1) = -1$

☐ $\dfrac{\partial x}{\partial v}(1,1) = \dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u}(1,1) = 1$ ☐ $\dfrac{\partial x}{\partial v}(1,1) = -\dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u}(1,1) = 0$

☐ $\dfrac{\partial x}{\partial v}(1,1) = 0$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u}(1,1) = 0$ ☐ $\dfrac{\partial x}{\partial v}(1,1) = -\dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u}(1,1) = 0$

[*1,5 valores*] 5. Sendo $f(x, y) = xg(u)$, com g uma função continuamente derivável até à segunda ordem e $u = x^2 - y^2$, sabe-se que

$$y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = h(x, y)\, g'(u).$$

Então:

☐ $h(x, y) = xy$ ☐ $h(x, y) = 2xy$ ☐ $h(x, y) = 4xy$

☐ $h(x, y) = 6xy$ ☐ $h(x, y) = 8xy$ ☐ $h(x, y) = 10xy$

[*1,5 valores*] 6. Considere a função

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}.$$

☐ Os pontos $(1, 1)$ e $(1, -1)$ são de estacionaridade. No primeiro a função não tem extremo, no segundo tem um máximo relativo.

☐ Os pontos $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ são de estacionaridade. No primeiro a função não tem extremo, no segundo tem um mínimo relativo.

☐ Os pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ são de estacionaridade. Em ambos a função tem mínimos relativos.

☐ Os pontos $(1, 1)$ e $(1, -1)$ são de estacionaridade. No primeiro a função tem um mínimo relativo, no segundo tem um máximo relativo.

☐ Os pontos $(1, 1)$ e $(-1, 1)$ são de estacionaridade. No primeiro a função tem um mínimo relativo, no segundo tem um máximo relativo.

☐ Os pontos $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ são de estacionaridade. Em ambos a função tem máximos relativos.

1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2020/2021
12 DE MAIO DE 2021

GRUPO II

[*2,5 valores*] 1. a) Considere a função real f, de duas variáveis reais, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - x^2y - y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que dado um número real positivo δ, existe um número real positivo ϵ, tal que se $(x,y) \neq (0,0)$ e $\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$, então $|f(x,y)| < \delta$.

1. a) Resposta:

.

[*2,5 valores*] 1. b) Determine, por definição, as derivadas $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. Calcule a derivada direcional de f no ponto $(0,0)$ segundo o vector $\vec{u}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Diga, justificando, se f é diferenciável no ponto $(0,0)$.

1. b) Resposta:

GRUPO III

[*4 valores*] Mostre que o sistema

$$\begin{cases} x^3 + 2y^2 - xu + yv^2 = 0 \\ e^{xy} - uv = 0 \end{cases},$$

define implicitamente u e v como funções de x de y, numa vizinhança do ponto $P_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 0, 1, 1)$ e determine $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,0)$ e $\dfrac{\partial v}{\partial x}(1,0)$.

Resposta:

GRUPO IV

1. Considere em $\mathbb{R}^3$ as duas normas $||(x,y,z)||_1$ e $||(x,y,z)||_2$ definidas por

$$||(x,y,z)||_1 = \sqrt{x^2+y^2} + |z| \quad \text{e} \quad ||(x,y,z)||_2 = max\{|x|,|y|,|z|\}.$$

[*1 valor*] a) Determine constantes reais positivas C_1, C_2 tais que:

$$C_1||(x,y,z)||_2 \leq ||(x,y,z)||_1 \leq C_2||(x,y,z)||_2, \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

o que prova que as duas normas consideradas são equivalentes.
1. a) Resposta:

[*1 valor*] b) Considere a função real f, de três variáveis reais, definida por

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{(x+y+z)\sqrt{x^2+y^2}}{max\{|x|,|y|,|z|\}} & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

Mostre que dado um número real positivo δ, existe um número real positivo ϵ, tal que se $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ e $||(x,y,z)||_1 = \sqrt{x^2+y^2} + |z| < \epsilon$, então $|f(x,y,z)| < \delta$.

1. b) Resposta:

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*