CN A – Teste 2022.1 Resolução

Felipe B. Pinto 71951 – EQB

17 de dezembro de 2024

Conteúdo

Questão 1

Considere o seguinte integral impróprio:

$$\boldsymbol{I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ \mathrm{d}x}$$

O valor da aproximação dado pela regra de Gauss com 2 pontos simples arredondado com 6 casas decimais é:

Resposta

$$I = 1/2\ \int_{-1}^{1} f(y/2 + 1/2)\ \mathrm{d}y = 1/2\ \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - (y/2 + 1/2)^2}}\ \mathrm{d}y$$

Questão 3

Seja $\alpha \in [0,1]$ a raiz única da equação não linear $f(x) = 0$, sendo $f(x)$ uma função contínua em $[0,1]$. Sabe-se que

$$\boldsymbol{f(0) > 0 \quad f(1/2) > 0 \quad f(3/4) < 0 \quad f(5/8) > 0 \quad f(1) < 0}$$

Considere a sucessão gerada pelo método da bissecação para boter uma aproximação para α, então tem-se

---

Resposta

$$\begin{cases} x_0 = \frac{0+1}{2} = 1/2 \wedge f(1/2) > 0 \wedge f(1) < 0 \implies & \alpha \in [1/2, 1] \\ x_1 = \frac{1/2+1}{2} = 3/4 \wedge f(3/4) < 0 \wedge f(1/2) > 0 \implies & \alpha \in [1/2, 3/4] \\ x_2 = \frac{1/2+3/4}{2} = 5/8 \wedge f(5/8) > 0 \wedge f(3/4) < 0 \implies & \alpha \in [3/4, 5/8] \end{cases}$$

$$x_3 = \frac{5/8 + 3/4}{2} = 11/16 \implies |\alpha - x_3| = \frac{1}{2^{3+1}} = 0.0625$$

Questão 4

Considere a seguinte regra de integração numérica

$$\int_{-1}^{1} \boldsymbol{f_{(x)}}\ \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c_1}\, \boldsymbol{f_{(-1/3)}} + \boldsymbol{c_2}\, \boldsymbol{f_{(0)}} + \boldsymbol{c_3}\, \boldsymbol{f_{(1/3)}}; \quad \{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3}\} \in \mathbb{R}$$

Quais dos valores que c_1, c_2, c_3 devem assumir para que a regra seja exata para polinómios básicos de grau o mais elevado possível?

Resposta

$$\begin{cases} f(x) = x^0 \\ f(x) = x^1 \\ f(x) = x^2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = \int_{-1}^{1} x^0\ \mathrm{d}x = 2 \\ -c_1/3 + c_2 * 0 + c_3/3 = \int_{-1}^{1} x^1\ \mathrm{d}x = (1-1)/2 = 0 \\ c_1/9 + c_2 * 0 + c_3/9 = \int_{-1}^{1} x^2\ \mathrm{d}x = (1+1)/3 = 2/3 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ -c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_3 = 18/3 = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = -4 \\ c_3 = 3 \end{cases}$$

Questão 6

Considere a equação não linear $\sin(x)\,\cos(x) = x - 1.$ a qual tem **uma única raiz α** no intervalo [1,1.5].

Q6 a.

Verifique que α é um ponto fixo da função $\phi(x) = \cos(x)\ \sin(x) + 1$.

Resposta

$$f(x) = 0 \implies \sin(\alpha)\cos(\alpha) - \alpha + 1 = 0 \implies \sin(\alpha)\cos(\alpha) + 1 = \alpha \implies$$
$$\implies \phi(\alpha) = \sin(\alpha)\cos(\alpha) + 1 = \alpha$$
$\therefore x$ é ponto fixo de $\phi(x)$ em $[1, 1.5]$

Q6 b.

Mostre que a sucessão

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_0 \in [1, 1.5]} \\ \boldsymbol{x_{n+1} = \phi x_n \quad n = 0, 1, 2, \ldots} \end{cases}$$

converge para α e classifique o ponto fixo α justificando conveninentemente.

Resposta

$\phi(x)$ esta bem def e continua em $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \phi(1) = \cdots = 1.4546 \cdots \in [1, 1.5] \phi(1.5) = \cdots = 1.07056 \in [1, 1.5] \end{cases} ;$$

$$\phi'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) < 0 \quad \forall x \in [1, 1.5]$$

$$\therefore 1 < 1.07056 \leq \phi(x) \leq 1.4546 < 1.5$$

$$\therefore \phi(x) \in [1, 1.5] \forall\, x \in [1, 1.5]$$

$$|\phi'(x)| = \cdots = |\cos(2\,x)| \leq |-0.99| = 0.99 = M < 1$$

Q6 c.

Considerando $x_0 = 1$ e a sucessão definida em b. diga quantas casas decimais significativas pode garantir para a iterada $n = 700$. Justifique devidamente.

Questão 8

Seja S a função definida por

$$\boldsymbol{S(x) = \begin{cases} a\,x^3 + b\,x^2 + x\,5/3 - 1, & -1 \leq x < 0 \\ -2\,a\,x^3 + b\,x^2 + x\,5/3 - 1, & 0 \leq x < 1 \\ a\,x^3 - 2\,b\,x^2 + x\,41/3 - 5, & 1 \leq x < 2 \end{cases}}$$

e que passa nos pontos $(-1, y_0), (0, y_1), (1, y_2), (2, y_2)$. Determine as constantes reais a, b de forma que $S(x)$ seja spline cúbico interpolador e diga se $S(x)$ pode ser um spline natural?

Resposta

Continuidade

$$S(x)$$

$$\lim_{x \to 0^-} S(x) = \lim_{x \to 0^+} S(x)$$

$$\lim_{x \to 1^-} S(x) = \lim_{x \to 1^+} S(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = \dots$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2S(x)}{\mathrm{d}x^2} = \dots$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\mathrm{d}^2S(x)}{\mathrm{d}x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{d}^2S(x)}{\mathrm{d}x^2}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\mathrm{d}^2S(x)}{\mathrm{d}x^2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\mathrm{d}^2S(x)}{\mathrm{d}x^2}$$

1

Erro quadratico

$$(E_m)^2 = \sum_{0}^{m} \left(f_{(x_i)} - p_{m\,(x_i)}\right)^2$$