

Course: OSF

Operações Sólido Fluido

Solid Fluid Operations

LEQB/MEQB, 2023/24

Chemical and Biological Engineering Section, Department of Chemistry, FCTNOVA

OSF/FCTNOVA

Instructors

- **Prof. Rui Oliveira (T, TP)**
 - Office 628 DQ
 - Email: rmo@fct.unl.pt
- **Prof. Isabel Esteves (TP, P)**
 - Office 226 DQ/Lab 513 DQ
 - Email: i.esteves@fct.unl.pt

III - MOVIMENTO DE PARTÍCULAS NUM FLUIDO

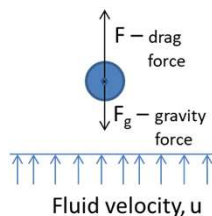
MOVEMENT OF PARTICLES IN A FLUID

OSF-FCTUNL

15

Problema III.2

Calcular a velocidade limite de uma bola de aço com 2 mm de diâmetro (massa específica = 7.87 g/cm³) em óleo (massa específica 0.9 g/cm³, viscosidade 50 mN s m⁻²).



$$F = 3\pi\mu u d$$

$$F_{g,a} = \frac{\pi d^3}{6} (\rho_s - \rho) g$$

Se a lei de Stokes é válida, $Re' > 0.2$ (limite teórico) ou 2 (limite prático),

$$3\pi\mu u d = \frac{\pi d^3}{6} (\rho_s - \rho) g$$

$$u = \frac{d^2 (\rho_s - \rho) g}{18\mu}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{0.2^2 (7.87 - 0.9) 9.81 \times 100}{18 \times 50 \times 10^{-3} \times 10} = 30.4 \text{ cm/s} \\ Re' = \frac{0.9 \times 30.4 \times 0.2}{50 \times 10^{-3} \times 10} = 10.9 \gg 0.2 ! \end{array} \right.$$

Não estamos em regime laminar e logo a lei de Stokes não é válida.

$$1 \text{ cP} = 1 \text{ mN s/m}^2 = 0.001 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$$



OSF-FCTUNL

16

Método Gráfico

Factor de fricção $\frac{R'}{\rho u^2} = \frac{F}{\rho u^2 \left(\pi d^2 / 4 \right)}$

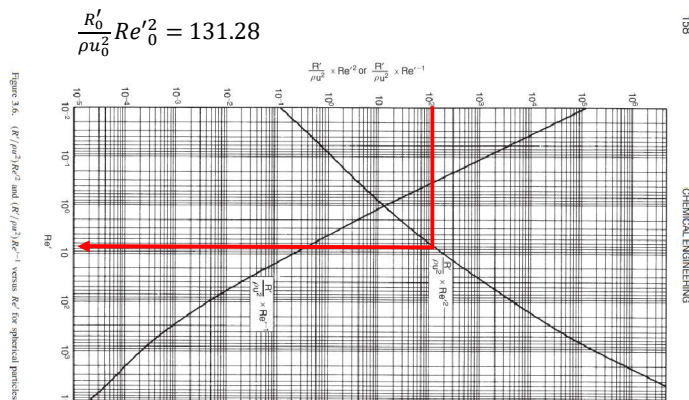
"If the drag force equals the apparent weight of the sphere then the acceleration is zero and the sphere settles at a constant velocity u_0 ":

$$F = \frac{\pi d^3}{6} (\rho_s - \rho) g$$

$$\frac{R'_0}{\rho u_0^2} = \frac{\pi d^3}{6} (\rho_s - \rho) g \div \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi 4 d^3 (\rho_s - \rho) g}{6 \rho u_0^2 \pi d^2} = \frac{2 d (\rho_s - \rho) g}{3 \rho u_0^2}$$

$$Re'_0 = \frac{u_0 d \rho}{\mu} \quad \frac{R'_0}{\rho u_0^2} Re'^2_0 = \frac{2 d (\rho_s - \rho) g}{3 \rho u_0^2} \left(\frac{u_0 d \rho}{\mu} \right)^2$$

$$\frac{R'_0}{\rho u_0^2} Re'^2_0 = \frac{2 d^3 (\rho_s - \rho) g}{3 \mu^2} = \frac{2 \times 0.002^3 (7870 - 900) 900 \times 9.81}{3 \times 0.05^2} = 131.28$$



Ou em alternativa pode usar-se...
a Tabela 3.4 livro C&R (pp. 157):

$$\log \frac{R'_0}{\rho u_0^2} Re'^2_0 = \log(131.28) = 2.11$$

$$\log Re'_0 = 0.817$$

$$Re'_0 = 6.56$$

$$u_o = \frac{Re'_0 \mu}{\rho d} = 6.56 \times \frac{0.05}{900 \times 0.002} = 0.18 \text{ m/s}$$

$$Re'_0 = 6.5$$

$$Re'_0 = \frac{u_0 d \rho}{\mu}$$

$$u_o = \frac{Re'_0 \mu}{\rho d} = 6.5 \times \frac{0.05}{900 \times 0.002} = 0.18 \text{ m/s}$$

Table 3.4. Values of $\log Re'$ as a function of $\log[(R'/\rho u^2) Re'^2]$ for spherical particles

$\log[(R'/\rho u^2) Re'^2]$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
2	3.919	2.018	2.117	2.216	2.315	2.414	2.513	3.620	3.720	3.819
1	2.908	1.007	1.105	1.203	1.301	1.398	1.495	2.612	2.711	2.810
0	1.874	1.967	0.008	0.148	0.236	0.324	0.410	1.591	1.686	1.781
1	0.738	0.817	0.895	0.972	1.048	1.124	1.199	0.495	0.577	0.659
2	1.491	1.562	1.632	1.702	1.771	1.839	1.907	1.273	1.346	1.419
3	2.171	2.236	2.300	2.363	2.425	2.487	2.548	1.974	2.040	2.106
4	2.783	2.841	2.899	2.956	3.013	3.070	3.127	2.608	2.667	2.725
5								3.183	3.239	3.295

Ou ainda em alternativa, em regime de escoamento de transição, tem-se

$$\frac{R'_0}{\rho u_0^2} = \frac{2 d(\rho_s - \rho)g}{3 \rho u_0^2} \quad \text{e} \quad \frac{R'_0}{\rho u_0^2} = \frac{12}{Re'} (1 + 0.15 Re'^{0.687})$$

$$Re'_0 = \frac{u_0 d \rho}{\mu}$$

$$\frac{12}{Re'_0} (1 + 0.15 Re'^{0.687}) = \frac{2 d(\rho_s - \rho)g}{3 \rho u_0^2}$$

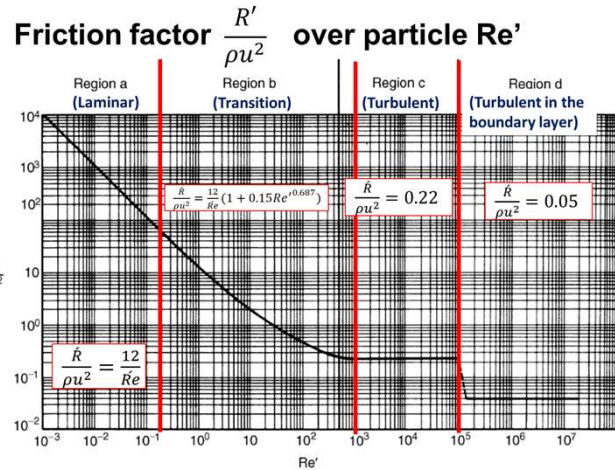
$$\frac{12}{Re'_0} (1 + 0.15 Re'^{0.687}) = \frac{2 d^3(\rho_s - \rho)g}{3 \frac{d^2 \rho^2 u_0^2}{\mu^2} \mu^2}$$

$$\frac{12}{Re'_0} (1 + 0.15 Re'^{0.687}) = \frac{2 d^3(\rho_s - \rho)g}{3 Re'^2_0 \mu^2}$$

$$Re'_0 (1 + 0.15 Re'^{0.687}) - \frac{1}{18} \frac{d^3(\rho_s - \rho)g}{\mu^2} = 0$$



$$Re'_0 = 6.987 = \frac{u_0 d \rho}{\mu}$$



$$u_0 = \frac{6.987 \times 0.05}{900 \times 0.002} = \underline{\underline{0.19 \text{ m/s}}}$$

Problema III.1

Sujeita-se a elutriação uma mistura finamente moída de galena e calcário na proporção de 1 para 4 em massa, mediante uma corrente ascendente de água, que flui a 0.5 cm/s. Supondo que a distribuição de tamanhos é a mesma para ambos os materiais e corresponde à que se indica no quadro seguinte, faça a estimativa da percentagem de galena no material arrastado e no material que fica para trás. Considere a viscosidade absoluta da água igual a 1 mN s m⁻² e use a equação de Stokes.

• Diâmetro (microns)	20	30	40	50	60	70	80	100
• % em peso de finos	15	28	48	54	64	72	78	88

Dados: densidade da galena = 7.5; densidade do calcário = 2.7

- 1) Determinar o regime de escoamento do fluido, onde o maior $Re_{particula}$ será o de diâmetro maior de partícula.

$$Re' = \frac{ud\rho}{\mu} = \frac{0.005 \text{ m/s} \times 100 \times 10^{-6} \text{ m} \times 1000 \text{ kg/m}^3}{1 \times 10^{-3} \text{ N s/m}^2} = 0.5$$

O regime de escoamento é laminar, pelo que a lei de Stokes se aplica.

$$u_0 = \frac{d^2(\rho_s - \rho)g}{18\mu}$$

Terminal fall velocity, u_0

If the drag force equals the apparent weight of the sphere then the acceleration is zero and the sphere settles at a constant velocity u_0 :

\vec{F} – Drag force

$F = \frac{\pi d^3}{6}(\rho_s - \rho)g$

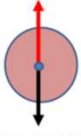
For laminar flow ($Re < 0.2$), then stoke's law holds:

$3\pi\mu u_0 d = \frac{\pi d^3}{6}(\rho_s - \rho)g$ $u_0 = \frac{d^2(\rho_s - \rho)g}{18\mu}$ $Re < 0.2$

For turbulent flow ($10^3 \leq Re \leq 10^5$), then Newton's law holds:

$0.055\pi d^2 \rho u_0^2 = \frac{\pi d^3}{6}(\rho_s - \rho)g$ $u_0 = \sqrt{\frac{3d(\rho_s - \rho)g}{\rho}}$ $10^3 \leq Re \leq 10^5$

Apparent weight $\frac{\pi d^3}{6}(\rho_s - \rho)g$



Galena

$$0.005 = \frac{d^2(7500 - 1000)9.81}{18 \times 10^{-3}}$$

$$d_{galena} = 3.76 \times 10^{-5} = 37.6 \mu\text{m}$$

Calcário

$$0.005 = \frac{d^2(2700 - 1000)9.81}{18 \times 10^{-3}}$$

$$d_{calcario} = 7.35 \times 10^{-5} = 73.5 \mu\text{m}$$

Diâmetros das partículas no limite de separação, i.e., partículas de galena < 37.6 μm e de calcário < 73.5 μm serão removidas na corrente de água.

Diâmetro (microns)	20	30	40	50	60	70	80	100
% em peso de finos	15	28	48	54	64	72	78	88

Percentagem de tamanho de partícula de galena < 37.6 μm arrastada no fluido

$$\frac{(48 - 28)}{(40 - 30)}(37.6 - 30) + 28 = 43.2 \%$$

Percentagem de tamanho de partícula de calcário < 73.5 μm arrastado no fluido

$$\frac{(78 - 72)}{(80 - 70)}(73.5 - 70) + 72 = 74.1 \%$$

Conclusão:

Em 100 kg de alimentação, na proporção de 1 para 4 em massa, vem 20 kg de galena e 80 kg de calcário. Então, **remove-se $0.432 \times 20 = 8.64$ kg galena e $0.741 \times 80 = 59.28$ kg calcário, sedimentando $20 - 8.64 = 11.36$ kg galena e $80 - 59.28 = 20.72$ kg calcário.**

Em 100 kg de alimentação, é arrastado um total de $8.64 + 59.28 = 67.92$ kg de sólidos, sendo $8.64 \times 100/67.92 = 12.72$ %-massa galena e $59.28 \times 100/67.92 = 87.28$ %-massa calcário. O restante de sólidos sedimenta.

Problema III.4

Quais são as velocidades de sedimentação de placas de mica com 1 mm de espessura e áreas na gama de 6 a 600 mm² num óleo de densidade 0.82 e viscosidade 10 mN s m⁻². A densidade da mica é 3.0.

Partículas não-esféricas – método de Heywood de 6 passos (pp. 166, C&R)

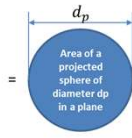
1. Determinar o diâmetro médio projetado da partícula, d_p
2. Determinar o fator de volume, k'
3. Refazer balanços de força para geometria não esférica na sua forma adimensional
4. Determinar Reynolds, $\log_{10}(Re')$, da Figura 3.6 ou Tabelas 3.4-3.5 como se fosse uma partícula esférica (pp. 157, 158, 161 livro C&R)
5. Correções de $\log_{10}(Re')$ obtido no passo 4 (partículas esféricas) usando as Tabelas 3.7 e 3.8 devido a geometria não-esférica (pp. 166-167 livro C&R)
6. Determinar u_0 de $\log_{10}(Re')$ obtido no passo 5

OSF-FCTUNL

23

	Partículas menores	Partículas maiores
A (m ²)	6×10^{-6}	600×10^{-4}
d_p (m)	$\sqrt{\frac{4 \times 6 \times 10^{-6}}{\pi}} = 2.76 \times 10^{-3}$	$\sqrt{\frac{4 \times 6 \times 10^{-4}}{\pi}} = 2.76 \times 10^{-2}$
diâmetro médio projetado		
V (m ³)	$V = 6 \times 10^{-6} \times 1 \times 10^{-3} = 6 \times 10^{-9}$	$V = 6 \times 10^{-4} \times 1 \times 10^{-3} = 6 \times 10^{-7}$
k'	0.284	0.0284

1 e 2



$$A_p = \frac{\pi d_p^2}{4} \Leftrightarrow d_p = \sqrt{\frac{4A_p}{\pi}}$$

Which face to choose? The one with largest A_p !

$$V_p = k' d_p^3 \Leftrightarrow k' = \frac{V_p}{d_p^3}$$

3

$$\frac{R'}{\rho u^2} Re'^2 = \frac{4k' \rho d_p^3 (\rho_s - \rho) g}{\mu^2 \pi}$$

$$\text{Partículas menores} \quad \frac{R'}{\rho u^2} Re'^2 = 1338.94$$

$$\log \left(\frac{R'}{\rho u^2} Re'^2 \right) = 3.127$$

$$\text{Partículas maiores} \quad \frac{R'}{\rho u^2} Re'^2 = 133893.6$$

$$\log \left(\frac{R'}{\rho u^2} Re'^2 \right) = 5.127$$

- 4 Determinar Reynolds, $\log_{10}(\text{Re}')$, da Figura 3.6 ou Tabelas 3.4-3.5 como se fosse uma partícula esférica (pp. 157, 158, 161 livro C&R)

Table 3.4. Values of $\log \left(\frac{R'}{\rho u^2} \text{Re}'^2 \right)$ as a function of $\log \left(\frac{R'}{\rho u^2} \text{Re}'^2 \right)$ for spherical particles

$\log \left(\frac{R'}{\rho u^2} \text{Re}'^2 \right)$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$\frac{2}{1}$	3.919	2.018	2.117	2.216	2.315	2.414	2.513	2.612	2.711	2.810
0	2.908	1.007	1.105	1.203	1.301	1.398	1.495	1.591	1.686	1.781
1	1.874	1.967	0.008	0.148	0.236	0.324	0.410	0.495	0.577	0.659
2	0.738	0.817	0.895	0.972	1.048	1.124	1.199	1.273	1.346	1.419
→ 3	1.491	1.562	1.632	1.702	1.771	1.839	1.907	1.974	2.040	2.106
4	2.171	2.236	2.300	2.363	2.425	2.487	2.548	2.608	2.667	2.725
→ 5	2.783	2.841	2.899	2.956	3.013	3.070	3.127	3.183	3.239	3.295

Partículas menores $\frac{R'}{\rho u^2} \text{Re}'^2 = 1338.94$

$$\log \left(\frac{R'}{\rho u^2} \text{Re}'^2 \right) = 3.127 \rightarrow \log(\text{Re}') = 1.562$$

Partículas maiores $\frac{R'}{\rho u^2} \text{Re}'^2 = 133893.6$

$$\log \left(\frac{R'}{\rho u^2} \text{Re}'^2 \right) = 5.127 \rightarrow \log(\text{Re}') = 2.841$$

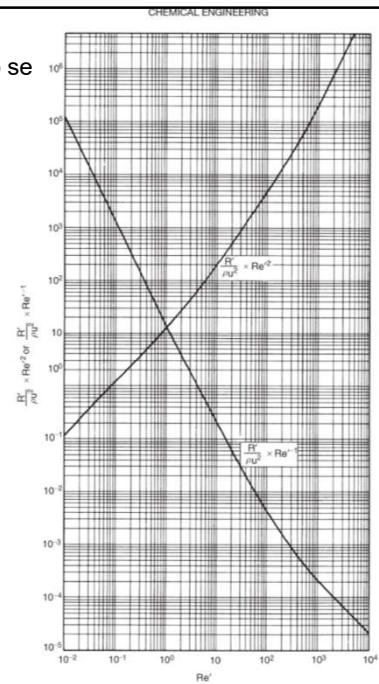


Figure 3.6. $(R'/\rho u^2) \text{Re}'^2$ and $(R'/\rho u^2) \text{Re}'^{-1}$ versus Re' for spherical particles

- 5 Correções de $\log_{10}(\text{Re}')$ obtido no passo 4 (partículas esféricas) usando as Tabelas 3.7 e 3.8 devido a geometria não-esférica (pp. 166-167 livro C&R)

Table 3.7. Corrections to $\log \text{Re}'$ as a function of $\log \left(\frac{R'}{\rho u^2} \text{Re}'^2 \right)$ for non-spherical particles

$\log \left(\frac{R'}{\rho u^2} \text{Re}'^2 \right)$	$k' = 0.4$	$k' = 0.3$	$k' = 0.2$	$k' = 0.1$
$\frac{2}{1}$	-0.022	-0.002	+0.032	+0.131
$\frac{1}{1}$	-0.023	-0.003	+0.030	+0.131
0	-0.025	-0.005	+0.026	+0.129
1	-0.027	-0.010	+0.021	+0.122
2	-0.031	-0.016	+0.012	+0.111
2.5	-0.033	-0.020	0.000	+0.080
→ 3	-0.038	-0.032	-0.022	+0.025
3.5	-0.051	-0.052	-0.056	-0.040
4	-0.068	-0.074	-0.089	-0.098
4.5	-0.083	-0.093	-0.114	-0.146
→ 5	-0.097	-0.110	-0.135	-0.186
5.5	-0.109	-0.125	-0.154	-0.224
6	-0.120	-0.134	-0.172	-0.255

Partículas menores ($k'=0.284$)

$$\log(\text{Re}') = 1.562 - 0.032 = 1.53$$

Partículas maiores ($k'=0.0284$)

$$\log(\text{Re}') = 2.841 - 0.235 = 2.61$$

Table 3.8. Corrections to $\log \text{Re}'$ as a function of $\log \left(\frac{R'}{\rho u^2} \text{Re}'^{-1} \right)$ for non-spherical particles

$\log \left(\frac{R'}{\rho u^2} \text{Re}'^{-1} \right)$	$k' = 0.4$	$k' = 0.3$	$k' = 0.2$	$k' = 0.1$
$\frac{4}{1}$	+0.185	+0.217	+0.289	
4.5	+0.149	+0.175	+0.231	
$\frac{3}{1}$	+0.114	+0.133	+0.173	+0.282
3.5	+0.082	+0.095	+0.119	+0.170
$\frac{2}{1}$	+0.056	+0.061	+0.072	+0.062
2.5	+0.038	+0.034	+0.033	-0.018
$\frac{1}{1}$	+0.028	+0.018	+0.007	-0.053
1.5	+0.024	+0.013	-0.003	-0.061
0	+0.022	+0.011	-0.007	-0.062
1	+0.019	+0.009	-0.008	-0.063
2	+0.017	+0.007	-0.010	-0.064
3	+0.015	+0.005	-0.012	-0.065
4	+0.013	+0.003	-0.013	-0.066
5	+0.012	+0.002	-0.014	-0.066

Partículas menores

$$\text{Re}' = 33.88$$

Partículas maiores

$$\text{Re}' = 407.38$$

$$\text{Re}'_0 = \frac{u_0 d_p \rho}{\mu}$$

Partículas menores

$$u_0 = 0.15 \text{ m/s}$$

Partículas maiores

$$u_0 = 0.18 \text{ m/s}$$

- 6 Obter u_0 de $\log_{10}(\text{Re}')$ obtido no passo 5

As partículas de mica sedimentam aproximadamente à mesma velocidade.



NOVA SCHOOL OF
SCIENCE & TECHNOLOGY

Prof. Rui Oliveira (T, TP)

Office 628 DQ

Email: rmo@fct.unl.pt

Prof. Isabel Esteves (TP, P)

Office 226 DQ/Lab 513 DQ

Email: i.esteves@fct.unl.pt

OSF-FCTUNL

See you soon at the P lab classes!

P1: 12.10, 8h, lab 521

P2: 12.10, 15h, lab 521

P3: 13.10, 8h, lab 521

P4: 13.10, 13h, lab 521