AM 2C – Resumo dos Slides

Felipe B. Pinto 61387 – MIEQB

28 de janeiro de 2022

Conteúdo

Slide 0 Cônicas e Quadraticas **2**
1 Degeneração 2
2 Expressão geral 3
3 Espaço 4
4 Reta 5
5 Plano 7
6 Parabolas e Paraboloides . 8
7 Elipse e Elipsóides 10
8 Hiperboles e Hiperbolóides 12
Slide 1 Revisão **15**
• **Algebra Linear** 15
1 Vetores 15
2 Norma 15
3 Desigualdade de Hölder . 15
4 Produto Interno 16
5 Desigualdade de Cauchy-Schwarz 16
6 Espaço Métrico 17
• **Análise Matemática I** . 17
7 Noções Topológicas 17
8 Vizinhança 17
9 Ponto de Acumulação . . 18
10 Ponto interior 18
11 Ponto exterior 18
12 Ponto fronterio 19
13 Ponto Aderente 19
14 Caracterização de Conjuntos 20
Exemplo 1 20
Exemplo 2 22
Exemplo 3 22
15 Conjuntos Separados . . . 24
Exemplo 4 25
Slide 2 **26**
1 Funções de variáveis Reais 26
Exemplo 1 26

2 Curvas de Nível 28
3 Limite Segundo Cauchy . 28
4 Sucessão 29
5 Limite segundo Heine . . . 29
6 Proposições para limites . 30
7 30
8 Matrix Jacobiana 31

Slide 3 **32**

Slide 4 **33**

Slide 5 **34**

Slide 0 Cônicas e Quadraticas

Cônicas

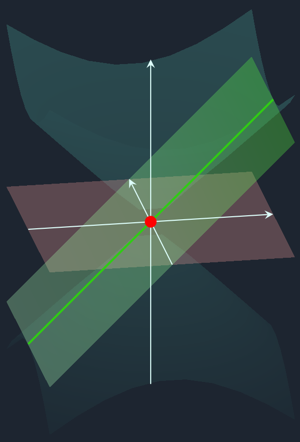
Intersecção de uma superfícies cônica com um plano

1 Degeneração

Quando o plano que intersecta a superfície cônica contem o vértice da superfície cônica está é considerada degenerada

Degeneradas

- Ponto
- Reta
- Módulo



Não Degeneradas

- Parábolas
- Elípses
- Hipérboles

2 Expressão geral

$$\mathcal{C}on_m \subset \mathbb{R}^n : \left\{ \begin{array}{ll} \quad (\lambda^T + (p - p')^T A)(p - p') = k & \wedge \\ \wedge \{\lambda, p'\} \subset \mathbb{R}^n & \wedge \\ \wedge\, p \in \mathcal{C}_m & \wedge \\ \wedge\, A \in \mathcal{M}_{n\times n} & \wedge \\ \wedge\, k \in \mathbb{R} & \end{array} \right\}$$

Forma canônica

$$\mathcal{C}on_m \subset \mathbb{R}^n : \left\{ \begin{array}{ll} \quad (\lambda^T + p^T A)p = k & \wedge \\ \wedge \{\lambda, p'\} \subset \mathbb{R}^n & \wedge \\ \wedge\, p \in \mathcal{C}on_m & \wedge \\ \wedge\, A \in \mathcal{M}_{n\times n} : \left\{ a_{i,j} = 0 \forall\, i \neq j \right. & \wedge \\ \wedge\, k \in \mathbb{R} & \end{array} \right\}$$

Despresa:

- Ponto central (p')
- Rotações (apenas matrizes A diagonais)

para $\mathbb{R}^2$ **e** $p' = 0_2$

$$\left(\begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -f \implies$$

$$\implies a\,x^2 + b\,y^2 + c\,x\,y + d\,x + e\,y + f = 0$$

Para $\mathbb{R}^3$ e $p' = 0_3$

$$\left(\begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -j \implies$$
$$\implies a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + d\,x\,y + e\,x\,z + f\,y\,z +$$
$$+ g\,x + h\,y + i\,z + j = 0$$

3 Espaço

Equação vetorial

$$E_m \subset \mathbb{R}^n : \left\{ P = A + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\, U_i : \left\{ \begin{array}{ll} & \{P, A\} \subset E \quad \wedge \\ \wedge & \{i, n, m\} \subset \mathbb{N} \quad \wedge \\ \wedge & m \leq n \end{array} \right\} \right\}$$

Equações paramétricas

$$P_i = A_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{j,i}\, U_{j,i}$$

Exemplos

- $m = 0 \implies$ ponto
- $m = 1 \implies$ reta
- $m = 2 \implies$ plano

4 Reta

Equação vetorial

$$r \subset \mathbb{R}^n : \left\{ P = A + \lambda U : \left\{ \begin{array}{ll} \{P, A\} \in r & \wedge \\ \wedge \;\; U \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\} & \wedge \\ \wedge \;\; \lambda \in \mathbb{R} & \end{array} \right\} \right\}$$

Definem uma reta:

- 2 Pontos
- 1 Ponto e 1 vetor

Vetor diretor: Vetor não nulo parapelo a reta

Equações cartezianas

(i) Equações paramétricas

$$P_i = A_i + \lambda U_i \quad \forall\, i \leq n$$

(ii) Equações normais

$$\left. \begin{array}{ll} P_i = A_i + \lambda U_i & \wedge \\ \wedge \;\; P_j = A_j + \lambda U_j & \end{array} \right\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \lambda = \frac{P_i - A_i}{U_i} = \frac{P_j - A_j}{U_j} \left\{ \begin{array}{ll} \{i, j\} \leq n & \wedge \\ \wedge \;\; \{U_i, U_j\} \neq 0 & \end{array} \right.$$

(iii) Equações reduzidas

$$\boldsymbol{r \subset \mathbb{R}^n : \left\{ \begin{array}{l} P_i = A'_i + P_j\, U'_i : \\ \left\{ \begin{array}{lll} & \{i,j\} \in \mathbb{N} & \land \\ \land & \{i,j\} \leq n & \land \\ \land & i \neq j & \land \\ \land & U'_i = U_i / U_j & \land \\ \land & A'_i = A_i - A_j\, U'_i & \land \\ \land & U_j \neq 0 & \end{array} \right\} \end{array} \right\}}$$

$$\left. \begin{array}{lll} & P_i = A_i + \lambda\, U_i & \land \\ \land & \lambda = (P_j - A_j)/U_j : U_j \neq 0 & \end{array} \right\} \implies$$
$$\implies P_i = A_i + U_i\, (P_j - A_j)/U_j =$$
$$= A'_i + U'_i\, P_j : \left\{ \begin{array}{lll} & U'_i = U_i/U_j & \land \\ \land & A'_i = A_i - A_j\, U'_i & \land \\ \land & U_j \neq 0 & \end{array} \right.$$

Reduzida pois possui uma equação a menos comparando com as equações cartezianas

5 Plano

Equação vetorial

$$\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : \left\{ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + \sum_{j=1}^{2} \boldsymbol{\lambda}_j \, \boldsymbol{U}_j : \left(\begin{array}{lll} & \{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A}\} \in \boldsymbol{\pi} & \wedge \\ \wedge & \{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{j}\} \in \mathbb{N} & \wedge \\ \wedge & \boldsymbol{n} \geq \mathbf{2} & \wedge \\ \wedge & \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} & \wedge \\ \wedge & \boldsymbol{U}_j \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \, \forall \, \boldsymbol{j} & \end{array} \right) \right\}$$

Definem um plano:

- 3 Pontos
- 1 Ponto e 1 Vetor
- 1 Ponto e 2 vetores não paralelos

Vetores diretores: Vetores não nulos e não colineares paralelos ao plano.

Equações cartesianas

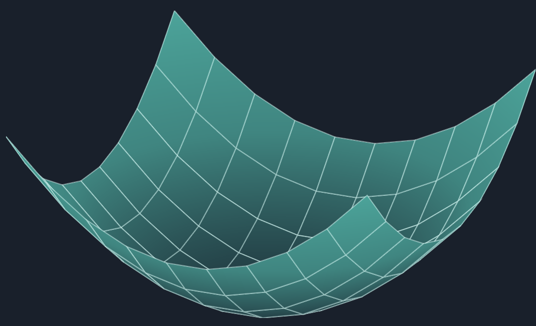
(i) Equações paramétricas

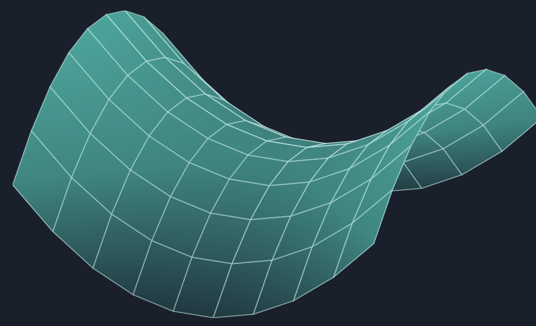
$$\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{A}_i + \sum_{j=1}^{2} \boldsymbol{\lambda}_{j,i} \, \boldsymbol{U}_{j,i}$$

(ii) Equação geral

$$\boldsymbol{A} + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_i \, \boldsymbol{P}_i = \mathbf{0}$$

6 Parabolas e Paraboloides





Definições

Foco e Diretriz

$$\mathcal{P}ar_m \subset \mathcal{C}on_m : \left\{ \begin{array}{ll} \quad |\overrightarrow{p\,f}| = |\overrightarrow{p\,L}| & \land \\ \land\, p \in \mathcal{P}ar & \land \\ \land\, f \in \mathbb{R}^n & \land \\ \land\, L \in E_{m-1} & \land \\ \land\, \{m, n\} \in \mathbb{N} & \land \\ \land\, 2 \geq m \geq n & \end{array} \right\}$$

Em um espaço de n, parabola em m é o conjunto de pontos que possuem a mesma distancia do foco (um ponto, $f \in \mathbb{R}^n$) e de uma diretriz (um espaço, $L \subset \mathbb{R}^{m-1}$)

Equação canônica para $\mathbb{R}^2$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (4\,p)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \implies$$
$$\implies \frac{x^2}{4\,p} = y$$

Nota: Diretriz possue equação $y = -p$

Equação canônica para paraboloide elíptico em $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \implies$$
$$\implies z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Equação canônica para paraboloide hiperbólico em $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \implies$$
$$\implies z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

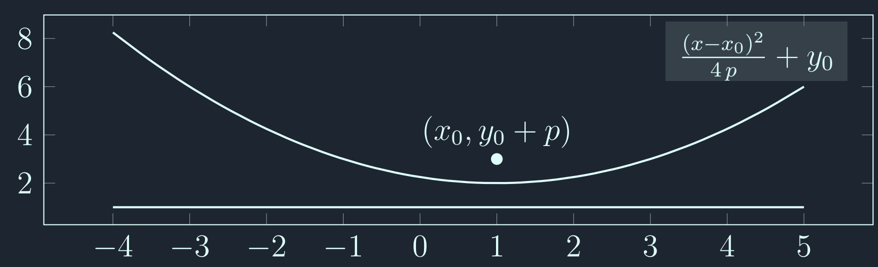
6.1 Caracteristicas de uma parabola

Vertice

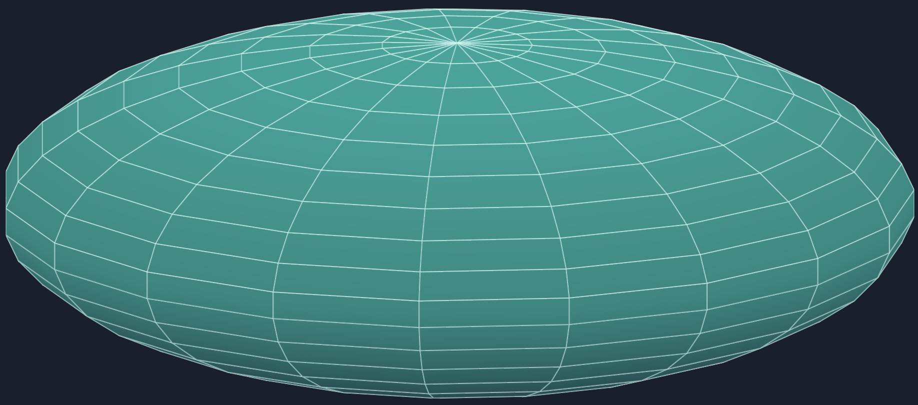
Ponto extremo de uma parabola: $P_0 \in \mathbb{R}^n$

Directriz

Espaço o qual qualquer ponto tem a mesma distancia do vertice e do plano



7 Elipse e Elipsóides



Definições

Equação canônica para $\mathbb{R}^2$

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & b^{-2} \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \implies$$

$$\implies \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equação canônica para $\mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-2} \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \implies$$

$$\implies \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Equações paramétricas

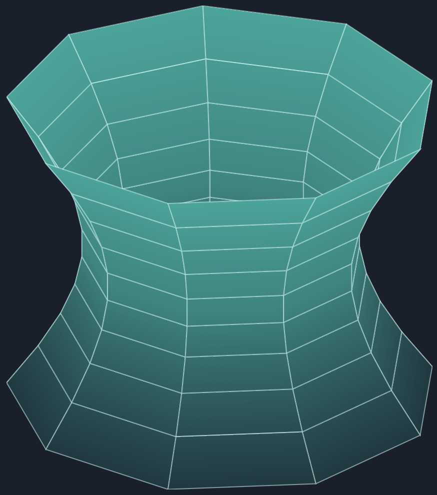
$$\mathcal{E}li_3 \subset \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{ll} e = e' + \lambda \begin{bmatrix} \cos(\theta)\ \cos(\lambda) \\ \cos(\theta)\ \sin(\lambda) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} & \land \\ \land\, e \in \mathcal{E}li_3 & \land \\ \land\, \{e', \lambda\} \subset \mathbb{R}^3 & \land \\ \land\, \{\theta, \lambda\} \subset \mathbb{R} & \land \\ \land\, |\theta| \leq \pi/2 & \land \\ \land\, 0 \leq \lambda \leq 2\,\pi & \end{array} \right\}$$

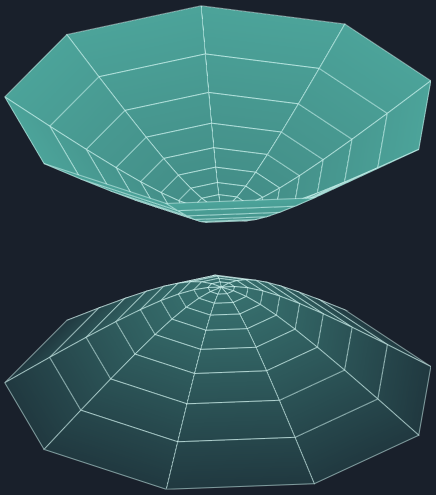
Conjunto de pontos os quais a soma da distancia de qualquer ponto a ambos os focos é igual para qualquer ponto.

7.1 Caracteristicas de um elipsoide

- **Focos**
- **Eixo Maior**
- **Eixo Menor**
- **Vértices:** Extremos do eixo maior
- **Centro:** Cruzamento dos eixos

8 Hiperboles e Hiperbolóides





Definições

Equação canônica para $\mathbb{R}^2$

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & -1/b^2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \implies$$

$$\implies \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equação canônica para $\mathbb{R}^3$

Hiperbole de 1 folha

$$\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}1/a^2 & 0 & 0\\ 0 & 1/b^2 & 0\\ 0 & 0 & -1/c^2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 1 \implies$$

$$\implies \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hiperbole de 2 folha

$$\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}1/a^2 & 0 & 0\\ 0 & -1/b^2 & 0\\ 0 & 0 & -1/c^2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 1 \implies$$

$$\implies \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Equações paramétricas para $\mathbb{R}^3$

unica folha

$$\begin{cases} x = a\cosh(v)\cos(\theta) \\ y = b\cosh(v)\sin(\theta) \\ z = c\sinh(v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v \in (-\infty, \infty) \\ \theta \in [0, 2\,pi) \end{cases}$$

duas folhas

$$\begin{cases} x = \quad a\sinh(v)\cos(\theta) \\ y = \quad b\sinh(v)\sin(\theta) \\ z = \pm c\cosh(v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v \in [0, \infty) \\ \theta \in [0, 2\,pi) \end{cases}$$

Slide 1 Revisão

Algebra Linear

1 Vetores

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \land i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

2 Norma

$$N(X)_p = ||X||_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = \sqrt{X|X} \quad X \in \mathbb{R}^n$$
$$N(\cdot) : E \to \mathbb{R}$$

- $N(X) \geq 0 \, (\land N(X) = 0 \iff x = 0)$
- $N(\lambda X) = |\lambda| \, N(X)$ . . . . $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$ . . . . $\forall \{X, Y\} \in E$

3 Desigualdade de Hölder

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k \, y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q} \begin{cases} q > 1 \\ p > 1 \\ p^{-1} + q^{-1} = 1 \end{cases}$$

4 Produto Interno

$$\boldsymbol{p(X,Y) = X\big|Y = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k \quad \{X,Y\} \in E}$$
$$\boldsymbol{P : E \times E \to \mathbb{R}}$$

- $X\big|X \geq 0 \wedge (X\big|X = 0 \iff X = 0)$
- $X\big|Y = Y\big|X$ . . . . $\forall \{X,Y\} \in E$
- $\lambda\, X\big|Y = \lambda\,(X\big|Y)$ . . . . $\forall\,\lambda \in \mathbb{R} \wedge \forall \{X,Y\} \in E$
- $(X+Y)\big|Z = (X\big|Z) + (Y\big|Z)$ . . . . $\forall \{X,Y,Z\} \in E$

5 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\boldsymbol{\left|X\big|Y\right| \leq \sqrt{X\big|X}\,\sqrt{Y\big|Y}}$$

$$\begin{aligned}
&\left|X\big|Y\right| \leq \sqrt{X\big|X}\,\sqrt{Y\big|Y} \iff \left|X\big|Y\right|^2 \leq (X\big|X)(Y\big|Y) \iff \\
&\iff \left|X\big|Y\right|^2 - (X\big|X)\,(Y\big|Y) = \left|2\,X\big|Y\right|^2 - 4\,(X\big|X)(Y\big|Y) \leq 0 \impliedby \\
&\impliedby \begin{cases} f(t) := (X + t\,Y)\big|(X + t\,Y) \\ f(t) = (Y\big|Y)t^2 + 2(X\big|Y)t + X\big|X \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

6 Espaço Métrico

$$\boldsymbol{d(X,Y) := \begin{cases} \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_i - y_i)^2} & \{X,Y\} \in \mathbb{R}^n \\ ||X - Y|| & \{X,Y\} \in E \end{cases}}$$

- $d(X,Y) \geq 0 \wedge (d(X,Y) = 0 \iff X = Y)$
- $d(X,Y) = d(X,Y)$ . . . . $\forall \{X,Y\} \in E$
- $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$ . . . . $\forall \{X,Y,Z\} \in E$

Análise Matemática I

7 Noções Topológicas

- $A \in \mathcal{A} \wedge \emptyset \in \mathcal{A}$
- $\bigcup_{k=i}^{j} a_k \in \mathcal{A}$ . . . . $a_k \in \mathcal{A}$
- $\bigcap_{k=i}^{j} a_k \in \mathcal{A}$ . . . . $a_k \in \mathcal{A}$

8 Vizinhança

$$\boldsymbol{B(X_0, r) := \{X \in \mathbb{R}^n : d(X, X_0) = ||X - X_0||_2 < r\}}$$

$$B(X_0, r) = \begin{cases} \mathcal{V}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = (X_0 - r, X_0 + r) & x_0 \in \mathbb{R} \\ \left\{X \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - x_{0\,1})^2 + (x_2 - x_{0\,2})^2} < r\right\} & X_0 \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

9 Ponto de Acumulação

$$X_0 \in \mathbb{R}^n : (B(X_0, r) \backslash \{X_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

Conjunto derivado

$$A' \subset \mathbb{R}^n : (B(a'_k, r) \backslash \{a'_k\} \cap A \neq \emptyset \quad \forall\, k \in \mathbb{K} \wedge r > 0$$

10 Ponto interior

$$X_0 \in \mathbb{R}^n : B(X_0, r) \subset A$$

Interior

$$\text{int}\, A = \bigcup X_k : B(X_k, r) \subset A \quad \forall\, k \in \mathbb{K}$$

11 Ponto exterior

$$X_0 \in \mathbb{R}^n : B(X_0, r) \cap A = \emptyset$$

Exterior

$$\text{ext}\, A = \bigcup X_k : B(X_k, r) \cap A = \emptyset \quad \forall\, k \in \mathbb{K} \wedge r > 0$$

12 Ponto fronterio

$$X_0 \in \mathbb{R}^n : X_0 \notin \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} A$$

Fronteira

$$\operatorname{fr} A = \delta A = \bigcup X_k : X_k \notin \operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A \quad \forall\, k \in \mathbb{K}$$

13 Ponto Aderente

$$X_0 \in \mathbb{R}^n : B(X_0, r) \cap A \neq \emptyset$$

Fecho (ou Aderencia)

$$\begin{aligned} \bar{A} = \bigcup X_k : B(X_k, r) \cap A \neq \emptyset \quad \forall\, k \in \mathbb{K} \wedge r > 0 \\ = \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A \end{aligned}$$

14 Caracterização de Conjuntos

C. Aberto

$$A = \operatorname{int} A$$

C. Fechado

$$A = \bar{A}$$

C. Limitado

$$A \subset B(0_n, r) \quad r > 0$$

C. Compacto

$$A = \operatorname{int} A$$
$$\wedge\, A \subset B(0_n, r) \quad r > 0$$

Exemplo 1

$$A = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : 0 < ||X|| < 1 \right\} \cup \{(0, 2)\}$$

(i) $\operatorname{int} A$

$$= \left\{X \in \mathbb{R}^2 : 0 < ||X|| < 1\right\}$$

(ii) $\operatorname{fr} A$

$$= \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| = 1\right\} \\ \cup \{(0,0),(0,2)\}$$

(iii) $\bar{A}$

$$= \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A = \\ = \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| \leq 1\right\} \\ \cup \{(0,2)\}$$

(iv) A'

$$= \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| \leq 1\right\}$$

(v) **Caracterização**

- A não é Aberto $\because A \neq \operatorname{int} A$
- A não é Fechado $\because A \neq \bar{A}$
- A não é Compacto $\because$ A não é Fechado
- A é Limitado $\because A \subset B(0_2, 3)$

Exemplo 2

$$\boldsymbol{B = \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| \geq 1\right\}}$$

(i) int B

$$= \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| > 1\right\}$$

(ii) fr B

$$= \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| = 1\right\}$$

(iii) $\bar{A}, A'$

$$\bar{A} = A' = A$$

(iv)

- B é Fechado $\because \bar{A} = A' = A$
- B é Ilimitado $\because$ não é compacto

Exemplo 3

$$\boldsymbol{C = \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| < 1 \land X \in \mathbb{Q}\right\} \cup \{(3,2)\}}$$

(i) $\operatorname{int} C$

$= \emptyset$

(ii) $\operatorname{fr} C$

$= \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| \leq 1\right\}$
$\cup \{(3,2)\}$

(iii) $\bar{C}$

$= \operatorname{fr} C$

(iv) C'

$= \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| \leq 1\right\}$

(v) **Caracterização**

- C não é aberto $\because C \neq \operatorname{int} C$
- C não é fechado (nem compacto) $\because C \neq \bar{C}$
- C é limitado $\because C \subset B(0,4)$

15 Conjuntos Separados

$$\bar{A} \cap B = \emptyset \land A \cap \bar{B} = \emptyset$$

Conjunto Desconexo

$$A \subset \mathbb{R}^n : \left\{\begin{aligned} & A_i \cup A_j = A & \land \\ \land\, & \bar{A}_i \cap A_j = \emptyset & \land \\ \land\, & A_i \cap \bar{A}_j = \emptyset & \end{aligned}\right\} \quad \{A_i, A_j\} \subset \mathbb{R}^n$$

Conjunto Conexo

$$A \subset \mathbb{R}^2 : \left\{\begin{aligned} & A = A_i \cup A_j & \land \\ & \land \neg \begin{pmatrix} \bar{A}_i \cap A_j & = \emptyset \land \\ \land\, A_i \cap \bar{A}_j & = \emptyset \end{pmatrix} & \end{aligned}\right\} \{A_i, A_j\} \subset \mathbb{R}^n$$

Domínio

$$A \subset \mathbb{R}^n : \left\{\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A = A_i \cup A_j & \land \\ \land \neg \begin{pmatrix} \bar{A}_i \cap A_j & = \emptyset & \land \\ \land\, A_i \cap \bar{A}_j & = \emptyset & \end{pmatrix} & \end{pmatrix} & \land \\ & \land\, A = \operatorname{int} A & \end{aligned}\right\}$$

$$\{A_i, A_j\} \subset \mathbb{R}^n$$

Exemplo 4

E4.1) $A \cup B$

$$\boldsymbol{A = \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| < 1\right\}}$$
$$\boldsymbol{B = \left\{X \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 1\right\}}$$

$A \cup B$ Não é separado

$\because \bar{A} \cap B = \{(1,0)\}$

E4.2) $C \cup D$

$$\boldsymbol{C = \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| \leq 1\right\}}$$
$$\boldsymbol{D = \left\{X \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1.1\right\}}$$

$C \cup D$ é separado

E4.3) S

$$\boldsymbol{S = \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| < 1\right\} \cup \{(0,2)\}}$$

S é desconexo

E4.4) $S \backslash \{(0,2)\}$

é um domínio pois é aberto e conexo

Slide 2

1 Funções de variáveis Reais

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R}^n &\to y = f(x) \end{aligned}$$

1.1 Graf f

$$\textbf{Graf}\, f \subset \mathbb{R}^{n+1} : \left\{ \begin{array}{ll} \quad p = (x_1, \ldots, x_n, y) & \wedge \\ \wedge\, x \in D & \wedge \\ \wedge\, y = f(x) & \end{array} \right\}$$

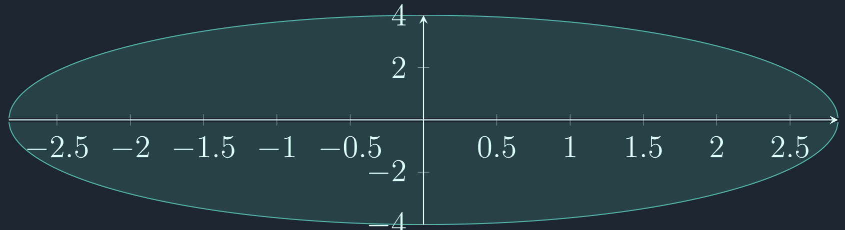
Exemplo 1

$$f(x) = \sqrt{16 - 2\,x^2 - y^2}$$

(i) Domínio

$$\mathrm{D}\, f = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 16 - 2\,x^2 - y^2 \geq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{4^2} \leq 1\right\}$$

o domínio descreve uma elípse nos pontos dos divisores.



(ii) Contradomínio

$$\mathrm{D}'\, f = [0, 4]$$

(iii) Gráfico

$$\mathrm{Graf}\, f = \left\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in \mathrm{D}\, f \wedge x_3 = \sqrt{16 - 2\,x^2 - y^2}\right\} =$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in \mathrm{D}\, f \wedge x_3 \geq 0 \wedge \frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{4^2} + \frac{x_3^2}{4^2} = 1\right\}$$

Que descreve um semielipsóide acima do plano $x \circ y$

2 Curvas de Nível

$$\boldsymbol{x \in \mathbf{D}\, f : f(x) = c}$$

3 Limite Segundo Cauchy

$$\lim_{x \to A} f(x) = B$$

(i) Standalone

$$\implies \forall\, \delta > 0\, \exists\, \varepsilon > 0 : ((\forall\, x \in \mathbb{D} \wedge ||x - A|| < \varepsilon) \implies |f(x) - b| \leq \delta)$$

(ii) Usando vizinhança

$$\implies \forall\, \delta > 0\, \exists\, \varepsilon > 0 : ((\forall\, x \in \mathbb{D} \cap B(A, \varepsilon) \implies f(x) \in \mathcal{V}_\delta(b))$$

4 Sucessão

$$\boldsymbol{f} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \quad \boldsymbol{f(m) = Y_m}$$

Limite de uma sucessão

$$\lim \boldsymbol{Y_m} = \boldsymbol{Y} \impliedby \lim ||\boldsymbol{Y_m} - \boldsymbol{Y}|| = \boldsymbol{0}$$

$\exists\, p \in \mathbb{N} : ||y_m - y|| < \delta \quad \forall\, \delta > 0 \wedge \forall\, m \geq p$

5 Limite segundo Heine

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f(x) = b} \quad \begin{cases} \boldsymbol{f} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \mapsto \mathbb{R} \\ \boldsymbol{a} \in \bar{\mathbb{D}} \end{cases}$$

6 Proposições para limites

- $\nexists \lim f(x) : \lim_{x\to x_0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0} f(x)$
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = c : (f(x) = c \,\forall\, x \in \mathcal{V}\, x_0)$

Limites finitos

$$\boldsymbol{\{f, g\} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}}$$

- $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim_{x\to x_0}(f(x)\, g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\, \lim_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim_{x\to x_0}(f(x)/g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)/ \lim_{x\to x_0} g(x)$

7

$$\boldsymbol{f : A \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}}$$
$$\boldsymbol{\varphi : B \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}}$$

8 Matrix Jacobiana

$$\boldsymbol{(f \circ g)'(x) \in \mathcal{M}_{p\times n} : (f \circ g)'(x)_{(i,j)} = \frac{\partial\,(f(g(x))_i)}{\partial\,(x_j)}}$$
$$\boldsymbol{f : B \subset \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p}$$
$$\boldsymbol{g : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m}$$

Produto de matrizes

$$(f \circ g)'(x) = \frac{\partial\,(f(x_f))}{\partial\,(x_f)}\,\frac{\partial\,(g(x_g))}{\partial\,(x_g)}$$
$$: \begin{cases} \frac{\partial(f(x_f))}{\partial(x_f)} \in \mathcal{M}_{p\times m} : \left(\frac{\partial(f(x_f))}{\partial(x_f)}\right)_{(i,j)} = \frac{\partial(f(x_f)_i)}{\partial((x_f)_j)} \\ \frac{\partial(g(x_g))}{\partial(x_g)} \in \mathcal{M}_{m\times n} : \left(\frac{\partial(g(x_g))}{\partial(x_g)}\right)_{(i,j)} = \frac{\partial(g(x_g)_i)}{\partial((x_g)_j)} \end{cases}$$

Slide 3

Slide 4

Slide 5