Curvas paramétricas

- Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas. A função

$$(x, y) = (f(t), g(t)), \quad t \in I$$

  diz-se curva paramétrica em $\mathbb{R}^2$ (ou no plano).

- Considerando três funções contínuas $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, a função

$$(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t)), \quad t \in I$$

  designa-se curva paramétrica em $\mathbb{R}^3$ (ou no espaço).

Exemplos

Represente geometricamente as curvas paramétricas em $\mathbb{R}^2$.

(a) $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(b) $(x, y) = (\operatorname{sen} t, 2\cos t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Resolução:

Exemplos

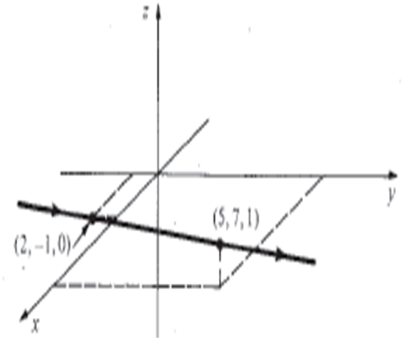
Represente geometricamente as curvas paramétricas em $\mathbb{R}^3$:

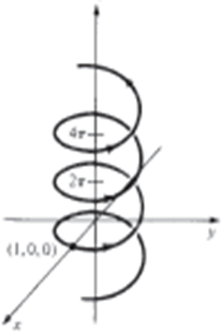
(a) $(x, y, z) = (3t + 2, 8t - 1, t)$, $-\infty < t < +\infty$;

(b) $(x, y, z) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $-\infty < t < +\infty$.

Resolução:

Curvas paramétricas - Exemplos





Curvas paramétricas - Linhas ou curvas orientadas

Uma curva paramétrica ("**regular**") no espaço é representada geometricamente por uma linha ou curva orientada C traçada pelos pontos $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$ quando t varia (de forma crescente) no intervalo I.
Dizemos que C é uma curva orientada no sentido crescente do parâmetro t.

- Uma curva paramétrica no espaço pode ser considerada como uma trajetória de uma partícula que se move no espaço e que no instante t se encontra no ponto $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$.

Curvas paramétricas -Funções vetoriais

- No estudo de curvas paramétricas no plano é conveniente identificar o ponto $(x, y) = (f(t), g(t))$ com o vetor $\vec{r} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$ sendo $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$.
- No espaço, o ponto $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$ identifica-se com o vetor $\vec{r} = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ sendo $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ a base canónica de de $\mathbb{R}^3$.

Funções vetoriais

Uma função vetorial $\vec{r}$ de uma variável com valores em $\mathbb{R}^2$ (ou em $\mathbb{R}^3$) é uma correspondência, que associa um único vetor de $\mathbb{R}^2$ (de $\mathbb{R}^3$) a cada número num determinado subconjunto $D \subset \mathbb{R}$ que se designa domínio.

$\forall t \in D$, $\vec{r}(t)$ escreve-se como combinação linear dos elementos da base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ de $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}, \qquad f, g : D \to \mathbb{R}.$$

No caso de $\vec{r}$ ser uma função vetorial com valores em $\mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t)$ escreve-se como combinação linear dos elementos da base $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}, \qquad f, g, h : D \to \mathbb{R}.$$

As funções f, g, h designam-se componente e t designa-se parâmetro da função $\vec{r}$.

Funções vetoriais - Domínio

Dada uma função vetorial através de uma expressão analítica podemos ter duas situações: ou o domínio é dado explicitamente ou é considerado o domínio natural que consiste no conjunto dos pontos para os quais a expressão analítica tem sentido.

Exemplo

Considere a função vetorial em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{r}(t) = \cos t \ \vec{i} + \log(4-t) \ \vec{j} + \sqrt{t+1} \ \vec{k}$$

e determine o seu domínio.

Resolução:

Limite de uma função vetorial

Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^3$uma função vetorial. Seja t_0 um ponto de acumulação de D. Diz-se que o limite de $\vec{r}$ no ponto t_0 é $\vec{b}$ e escreve-se

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{b}$$

se

$$\left(\lim_{t \to t_0} f(t)\right) \vec{i} + \left(\lim_{t \to t_0} g(t)\right) \vec{j} + \left(\lim_{t \to t_0} h(t)\right) \vec{k} = \vec{b}.$$

Se $t_0 \in D$ e

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$$

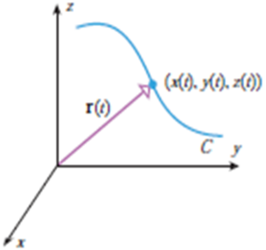
a função $\vec{r}$ diz-se contínua no ponto t_0.

Observação

Uma função vetorial é contínua num ponto do seu domínio se e só se cada uma das suas componentes for contínua nesse ponto.

Funções vetorial - Curvas paramétricas

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ uma função vetorial contínua em I com valores em $\mathbb{R}^3$.
Para cada $t \in I$ consideramos os vetores $\vec{r}(t)$ com o ponto inicial na origem do referencial ortonormado. Quando t varia no intervalo I, a ponta do vetor $\vec{r}$ descreve uma linha orientada C no espaço. C diz-se gráfico da função vetorial



Derivada de uma função vetorial

Observação

A linha C *correspondente ao gráfico da função vetorial*

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in I$$

coincide com a linha definida anteriormente pela curva paramétrica correspondente

$$(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in I.$$

Derivada de uma função vetorial

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Se $x(\cdot),\ y(\cdot),\ z(\cdot) : I \to \mathbb{R}$, são funções diferenciáveis no ponto $t \in I$, então $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ diz-se diferenciável no ponto t e a derivada de $\vec{r}$ no ponto t é definida por

$$\vec{r}\prime(t) = x\prime(t)\vec{i} + y\prime(t)\vec{j} + z\prime(t)\vec{k}.$$

Podemos escrever

$$\vec{r}\prime(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h}.$$

Se $\vec{r}$ é diferenciável em todos os pontos de I define-se a função derivada (derivada de 1ª ordem) $\vec{r}\prime(t)$, $t \in I$. As derivadas de ordem superior definem-se de forma análoga.

Observação

A função derivada de uma função vetorial é uma função vetorial.

Regras de Derivação

Sejam $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ funções vetoriais (em $\mathbb{R}^2$ ou em $\mathbb{R}^3$) diferenciáveis no intervalo I. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em I. Seja J um intervalo e $\alpha : J \to I$ diferenciável em J. Então:

(a) $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$ é diferenciável em I e $\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_2\right)'(t) = \vec{r}_1{}'(t) + \vec{r}_2{}'(t)$;

(b) $f\vec{r}_1$ é diferenciável em I e $\left(f\ \vec{r}_1\right)'(t) = f(t)\vec{r}_1{}'(t) + f'(t)\vec{r}_1(t)$;

(c) $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$ é diferenciável em I e

$$\left(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2\right)'(t) = \vec{r}_1{}'(t) \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}'_2(t);$$

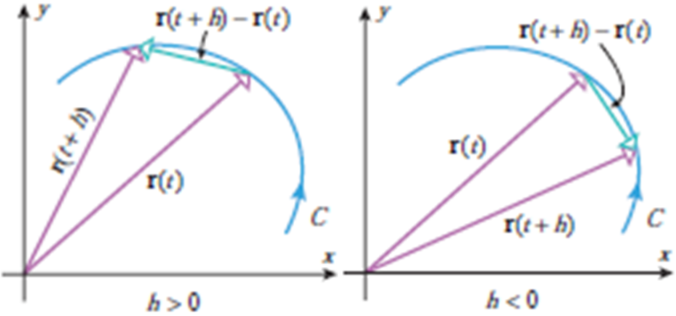
(d) (se $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_1$ são funções vetoriais em $\mathbb{R}^3$) $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ é diferenciável em I e

$$\left(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\right)'(t) = \vec{r}_1{}'(t) \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \times \vec{r}'_2(t);$$

(e) $\vec{r}_1 \circ \alpha$ é diferenciável em J e

$$\left(\vec{r}_1 \circ \alpha\right)'(t) = \vec{r}_1{}'(\alpha(t))\, \alpha'(t).$$

Derivada de uma função vetorial - interpretação geométrica



Vetor tangente a uma curva paramétrica

Seja C o gráfico de uma função vetorial $\vec{r}$ diferenciável no ponto t_0. Suponhamos que Se $\vec{r}\prime(t_0) \neq 0$ e tem o ponto inicial sobre a ponta do vetor $\vec{r}(t_0)$, então o vetor $\vec{r}\prime(t_0)$ é tangente ao gráfico de $\vec{r}$ e aponta no sentido crescente do parâmetro t.