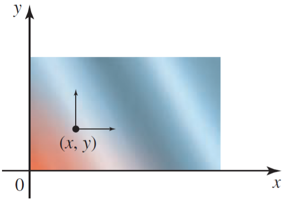
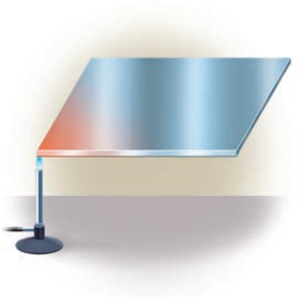
Derivadas direcionais: uma motivação

Seja $T = T(x, y)$ a temperatura da placa no ponto (x, y).



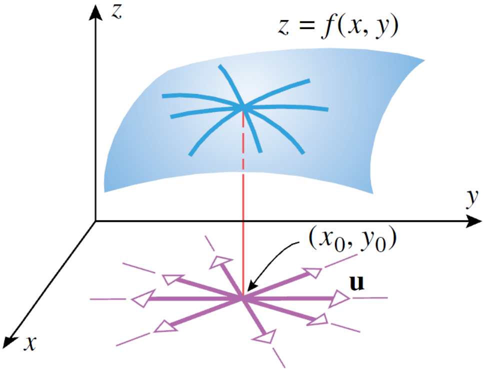


Qual é a taxa de variação de T num ponto segundo uma direção?

Derivada direcional

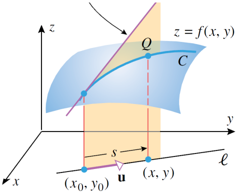
Seja $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um vetor unitário,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1.$$



Derivada direcional (continuação)

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathrm{int}(D)$, $f : D \to \mathbb{R}$ e $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um vetor unitário.



Chama-se derivada direcional de f no ponto (x_0, y_0) segundo $\vec{u}$ ao limite

$$
\begin{aligned}
D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \quad &= \lim_{s \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + s(u_1, u_2)) - f(x_0, y_0)}{s} \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s}
\end{aligned}
$$

Caso das derivadas parciais

Se $\vec{u} = \vec{i} = (1,0)$, então

$$\begin{aligned} D_{\vec{i}} f(x_0, y_0) &= \lim_{s \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + s(1,0)) - f(x_0, y_0)}{s} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + s, y_0) - f(x_0, y_0)}{s} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Se $\vec{u} = \vec{j} = (0,1)$, então

$$\begin{aligned} D_{\vec{j}} f(x_0, y_0) &= \lim_{s \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + s(0,1)) - f(x_0, y_0)}{s} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + s) - f(x_0, y_0)}{s} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Diferenciabilidade e derivadas direcionais

Teorema

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$, $(a, b) \in \mathrm{int}(D)$,

$$f : D \to \mathbb{R}$$

e $\vec{u} = (u_1, u_2)$ *um vetor unitário. Se* f *for diferenciável em* (a, b), *então* $D_{\vec{u}}f(a, b)$ *existe e*

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(a, b) &= \nabla f(a, b) \cdot (u_1, u_2) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)u_2. \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a derivada direcional da função

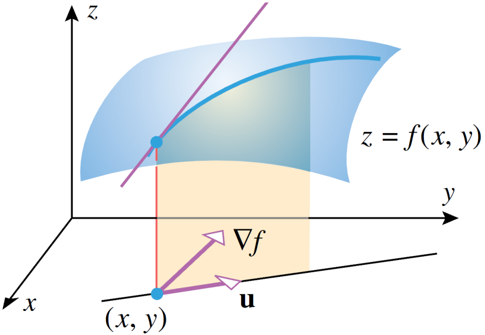
$$f(x, y) = 3x + 2y^2$$

no ponto $(2, 1)$ *na direção do vetor*

$$\vec{u} = (\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}).$$

Resolução:

Interpretação geométrica de derivada direcional



$$D_{\vec{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u}$$

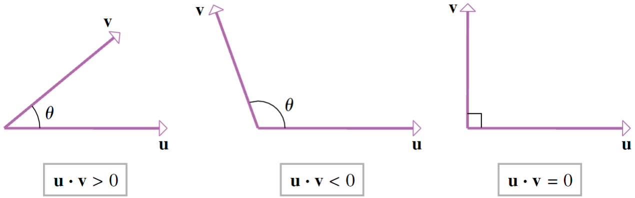
representa o declive da superfície $z = f(x, y)$ na direção de $\vec{u}$ no ponto $(x, y, f(x, y))$.

Lembrança de ALGA: ângulo entre dois vetores

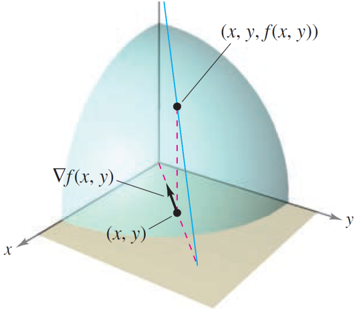
Teorema

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem vetores no espaço bidimensional e se θ for o ângulo entre eles, então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|u\| \cdot \|v\| \cos \theta.$$



Propriedades de gradiente



$$D_{\vec{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(x,y)\| \|\vec{u}\| \cos\theta = \|\nabla f(x,y)\| \cos\theta,$$

onde θ é o ângulo entre $\nabla f(x,y)$ e $\vec{u}$.

- O máximo de $D_{\vec{u}}f(x,y)$ ocorre quando $\cos\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$.
- O mínimo de $D_{\vec{u}}f(x,y)$ ocorre quando $\cos\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \pi$.

Propriedades do gradiente (continuação)

Teorema

Seja f uma função diferenciável em (a, b).

1. *Se $\nabla f(a, b) = (0, 0)$, então todas as derivadas direcionais de f em (a, b) são nulas.*
2. *Se $\nabla f(a, b) \neq (0, 0)$, então de entre todas as possíveis derivadas direcionais de f em (a, b), a derivada de f na direção e sentido de $\nabla f(a, b)$ tem o maior valor. O valor dessa derivada direcional máxima é $\|\nabla f(a, b)\|$.*
3. *Se $\nabla f(a, b) \neq (0, 0)$, então de entre todas as possíveis derivadas direcionais de f em (a, b), a derivada de f no sentido oposto ao de $\nabla f(a, b)$ tem o menor valor. O valor dessa derivada direcional mínima é $-\|\nabla f(a, b)\|$.*

Gradiente e curvas de nível

Teorema

Seja f *de classe* C^1 *num disco aberto centrado em* (x_0, y_0). *Se*

$$\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0},$$

então $\nabla f(x_0, y_0)$ *é normal à curva de nível de* f *que passa por* (x_0, y_0).

Gradiente e superfícies de nível

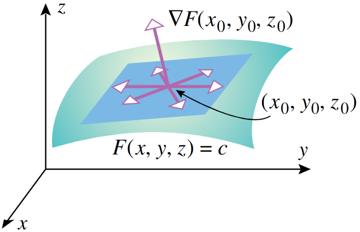
Teorema

Seja g *de classe* C^1 *num disco aberto centrado em* (x_0, y_0, z_0). *Se*

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0},$$

então $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ *é normal à superfície de nível de* g *que passa por* (x_0, y_0, z_0).

Planos tangentes a superfícies de nível



Teorema

Seja F uma função de três variáveis de classe C^1 numa bola aberta centrada em $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e seja $c = F(P_0)$. Se $\nabla F(P_0) \neq \vec{0}$, então $\nabla F(P_0)$ é um vetor normal à superfície de nível $F(x, y, z) = c$ no ponto P_0 e o plano tangente a essa superfície é dado pela equação

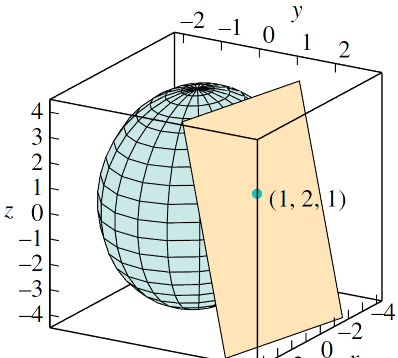
$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0.$$

Exemplo

Determine uma equação do plano tangente ao elipsoide

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 18$$

no ponto $(1, 2, 1)$.



Exemplo

Resolução: