Introdução às Probabilidades e Estatística e Investigação Operacional

Filipe Marques and Vanda Lourenço

Gab 25
fjm@fct.unl.pt

Gab 56
vmml@fct.unl.pt

Ano lectivo 2022/2023

- **A Frequência** à UC é Obtida com pelo menos 3/5 de presenças nas aulas práticas (P) leccionadas em cada módulo. Os alunos com estatuto especial ou que obtiveram uma classificação Suficiente no ano lectivo anterior estão dispensados da comparência às aulas. Só os alunos com frequência podem realizar exame final

- **Avaliação:**

  - **Por testes:** (Presenciais)

    Módulo de PE

    1º teste (22-04-2022 às 9h; 1h30): 10 valores (N1)

    Módulo de IO

    2º teste (07-06-2022 às 14h30; 1h30): 10 valores (N2)

    A classificação final será o valor da soma N1+N2.

    Considera-se aprovado o aluno com frequência e soma das classificações obtidas nos testes ≥ 9.5.

- **Notas**
  - Nas provas de avaliação, os alunos apenas poderão usar máquina de calcular científica;
  - Esta informação NÃO dispensa a leitura das regras de avaliação publicadas no CLIP.

I. Probabilidade

1. Introdução à Teoria das Probabilidades;
2. Variáveis aleatórias;
3. Principais distribuições;
4. Teorema Limite Central;

II. Estatística

1. Estimação pontual;
2. Estimação por Intervalo de Confiança;
3. Testes de hipóteses;
4. Regressão linear;

Bibliografia

- Guimarães e Cabral (1997). Estatística. McGraw-Hill.
- Montgomery e Runger (2002). Applied Statistics and Probability for Engineers. Wiley.
- Mood, Graybill e Boes (1974). Introduction to the Theory of Statistics. McGraw-Hill.
- Paulino e Branco (2005). Exercícios de Probabilidade e Estatística. Escolar Editora.
- Pestana, D. e Velosa, S. (2002). Introdução à Probabilidade e à Estatística. Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- Rohatgi (1976). An Introduction to Probability Theory and Mathematical Statistics. Wiley.
- Sokal e Rohlf (1995). Biometry. Freeman.
- Tiago de Oliveira (1990). Probabilidades e Estatística: Conceitos, Métodos e Aplicações, vol. I, II. McGraw-Hill.

Introdução à teoria da probabilidade

Definição

Uma **experiência aleatória** é uma experiência cujo resultado é desconhecido (antes da sua realização), apesar de se conhecerem todos os possíveis resultados.

Alguns exemplos:

- lançamento de uma moeda ao ar (assumindo que não "aterra" de lado!)
- lançamento de um dado
- a extracção do Euromilhões
- o tempo de vida de duração de uma lâmpada
- o tempo que se demora na fila de espera dos correios
- ...

Definição

Chamamos **espaço de resultados** ou **universo**, e representamos por Ω, ao conjunto de todos os possíveis resultados de uma experiência aleatória.

Observação: Diz-se que o espaço de resultados, Ω, é discreto se tem um número finito ou infinito numerável de elementos; Se Ω contém um intervalo (finito ou infinito) de números reais, então o espaço de resultados é contínuo.

Alguns exemplos:

- lançamento de uma moeda ao ar (assumindo que não "aterra" de lado!)

Definição

Chamamos **espaço de resultados** ou **universo**, e representamos por Ω, ao conjunto de todos os possíveis resultados de uma experiência aleatória.

Observação: Diz-se que o espaço de resultados, Ω, é discreto se tem um número finito ou infinito numerável de elementos; Se Ω contém um intervalo (finito ou infinito) de números reais, então o espaço de resultados é contínuo.

Alguns exemplos:

- lançamento de uma moeda ao ar (assumindo que não "aterra" de lado!)
  $$\Omega = \{\text{Cara}, \text{Coroa}\}$$

DEFINIÇÃO

Chamamos **espaço de resultados** ou **universo**, e representamos por Ω, ao conjunto de todos os possíveis resultados de uma experiência aleatória.

Observação: Diz-se que o espaço de resultados, Ω, é discreto se tem um número finito ou infinito numerável de elementos; Se Ω contém um intervalo (finito ou infinito) de números reais, então o espaço de resultados é contínuo.

Alguns exemplos:

- lançamento de uma moeda ao ar (assumindo que não "aterra" de lado!)
$$\Omega = \{\text{Cara}, \text{Coroa}\}$$
- lançamento de um dado

Definição

Chamamos **espaço de resultados** ou **universo**, e representamos por Ω, ao conjunto de todos os possíveis resultados de uma experiência aleatória.

Observação: Diz-se que o espaço de resultados, Ω, é discreto se tem um número finito ou infinito numerável de elementos; Se Ω contém um intervalo (finito ou infinito) de números reais, então o espaço de resultados é contínuo.

Alguns exemplos:

- lançamento de uma moeda ao ar (assumindo que não "aterra" de lado!)
$$\Omega = \{\text{Cara}, \text{Coroa}\}$$
- lançamento de um dado
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Definição

Chamamos **espaço de resultados** ou **universo**, e representamos por Ω, ao conjunto de todos os possíveis resultados de uma experiência aleatória.

Observação: Diz-se que o espaço de resultados, Ω, é discreto se tem um número finito ou infinito numerável de elementos; Se Ω contém um intervalo (finito ou infinito) de números reais, então o espaço de resultados é contínuo.

Alguns exemplos:

- lançamento de uma moeda ao ar (assumindo que não "aterra" de lado!)
  $$\Omega = \{\text{Cara}, \text{Coroa}\}$$
- lançamento de um dado
  $$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
- o tempo de vida de duração de uma lâmpada

DEFINIÇÃO

Chamamos **espaço de resultados** ou **universo**, e representamos por Ω, ao conjunto de todos os possíveis resultados de uma experiência aleatória.

Observação: Diz-se que o espaço de resultados, Ω, é discreto se tem um número finito ou infinito numerável de elementos; Se Ω contém um intervalo (finito ou infinito) de números reais, então o espaço de resultados é contínuo.

Alguns exemplos:

- lançamento de uma moeda ao ar (assumindo que não "aterra" de lado!)
  $\Omega = \{\text{Cara}, \text{Coroa}\}$
- lançamento de um dado
  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- o tempo de vida de duração de uma lâmpada
  $\Omega = [0, \infty[= \mathbb{R}_0^+$

Definição

*Um **acontecimento** é um subconjunto do espaço de resultados, Ω.*

Observação: Cada acontecimento formado por apenas um ponto amostral é designado por **acontecimento simples** ou **elementar**.

Definição (Sub-acontecimento)

*A é **sub-acontecimento** de B, e escreve-se $A \subset B$, se e só se a realização de A implica a realização de B.*

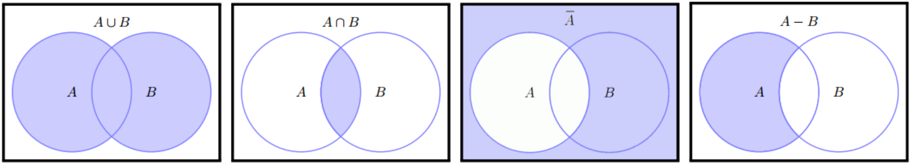
Observação: Podemos aplicar as operações usuais sobre conjuntos de modo a obter outros acontecimentos de interesse. As operações mais usuais são:

- A **união** de dois acontecimentos A e B, e representa-se por $A \cup B$;
- A **intersecção** de dois acontecimentos A e B, e representa-se por $A \cap B$;
- O **complementar** do acontecimento A e representa-se por $\overline{A}$;
- A **diferença** dos acontecimentos A e B e representa-se por $A - B$ $(= A \cap \overline{B})$;

Introdução à Teoria da Probabilidade

Diagramas de Venn & Propriedades

Diagramas de Venn:



Propriedades

1. $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$ — propriedade comutativa
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ — propriedade associativa
3. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ — propriedade distributiva
4. $\overline{\overline{A}} = A$ — dupla negação
5. $A \cup A = A \cap A = A$ — idempotência

Leis de Morgan

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ & $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Definição (Acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos)

Dois acontecimentos A e B dizem-se **disjuntos** *se não têm elementos em comum, ou seja, se $A \cap B = \emptyset$.*

Observação: Ao conjunto $\emptyset$ chamamos **acontecimento impossível** e a Ω **acontecimento certo**.

Definição (Definição clássica de Probabilidade, ou de Laplace)

Se uma experiência aleatória tem a si associado um número finito N de resultados mutuamente exclusivos e igualmente prováveis e se, desses resultados, N_A têm um certo atributo A, então a probabilidade de A, $P(A)$, é dada por:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{n^{\underline{o}} \text{ de resultados favoráveis a } A}{n^{\underline{o}} \text{ de resultados possíveis}}.$$

Exemplo. A probabilidade de sair face ímpar, num lançamento de um dado equilibrado é

$$P(\text{“Sair face ímpar”}) =$$

Definição (Acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos)

Dois acontecimentos A e B dizem-se **disjuntos** *se não têm elementos em comum, ou seja, se $A \cap B = \emptyset$.*

Observação: Ao conjunto $\emptyset$ chamamos **acontecimento impossível** e a Ω **acontecimento certo**.

Definição (Definição clássica de Probabilidade, ou de Laplace)

Se uma experiência aleatória tem a si associado um número finito N de resultados mutuamente exclusivos e igualmente prováveis e se, desses resultados, N_A têm um certo atributo A, então a probabilidade de A, $P(A)$, é dada por:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ resultados\ favoráveis\ a\ A}{n^{\underline{o}}\ de\ resultados\ possíveis}.$$

Exemplo. A probabilidade de sair face ímpar, num lançamento de um dado equilibrado é

$$P(\text{“Sair face ímpar”}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

E se o dado não é equilibrado?

Definição (Definição frequencista de Probabilidade)

A probabilidade de um acontecimento A é avaliada através de informação existente sobre A, sendo dada pela proporção de vezes em que se observou o resultado A, n_A, num número n suficientemente grande de realizações da experiência aleatória, i.e.,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}.$$

Definição (Definição subjectiva de Probabilidade)

Probabilidade é o "grau" de convicção na realização do acontecimento.

Axiomática de Kolmogorov

Seja $\mathcal{A}$ uma família de acontecimentos, fechada para as operações usuais. A Probabilidade é uma função cujo domínio é $\mathcal{A}$ e que verifica as seguintes condições ou axiomas:

1. $P(A) \geq 0$, qualquer que seja o acontecimento A;
2. $P(\Omega) = 1$;
3. Se A e B são acontecimentos disjuntos, isto é, se $A \cap B = \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Esta axiomática não contempla situações em que temos de considerar uma infinidade numerável de acontecimentos. É assim usual substituir o 3º axioma, por outro mais forte:

3. Se $A_1, A_2, \ldots$ são acontecimentos disjuntos dois a dois, então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Sejam A e B dois acontecimentos. São consequências imediatas dos axiomas os seguintes resultados:

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. Se $A \subseteq B$ então $P(A) \leq P(B)$;
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
4. $P(A) \in [0, 1]$;
5. $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$;
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
7. Para $A_i \in \mathcal{A},\ i = 1, \ldots, n,\ P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =$
$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right);$$

Sejam A e B dois acontecimentos. São consequências imediatas dos axiomas os seguintes resultados:

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. Se $A \subseteq B$ então $P(A) \leq P(B)$;
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
4. $P(A) \in [0, 1]$;
5. $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$;
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
7. Para $A_i \in \mathcal{A},\ i = 1, \ldots, n,\ \ P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) =$
$$\sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) - \sum_{i \neq j} P\left(A_i \cap A_j\right) + \sum_{i \neq j \neq k} P\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) - \ldots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right);$$

Vamos agora demonstrar algumas destas propriedades .

Definição (Acontecimentos Independentes)

Dois acontecimentos A e B dizem-se **independentes** *se e só se*

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

Nota:

1. Sendo A um acontecimento tal que $P(A) > 0$ e $B = \emptyset$ então A e B são, para além de conjuntos disjuntos, independentes.
   - $A \cap B = A \cap \emptyset = \emptyset$ logo A e B são disjuntos
   - dado que $P(B) = P(\emptyset) = 0$ e $P(A \cap B) = P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = P(A)P(B)$ então A e B são independentes
2. Se A e B forem conjuntos disjuntos tais que $P(A), P(B) > 0$ então não podem ser independentes.
   - sendo A e B disjuntos então $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$
   - se A, B forem independentes então ter-se-á ainda que $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0$ o que implica que $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$ contrariando o pressuposto do enunciado.
3. Se A e B forem conjuntos independentes tais que $P(A), P(B) > 0$ então não podem ser disjuntos.
   - sendo A e B independentes tais que $P(A), P(B) > 0$ então $P(A \cap B) = P(A)P(B) > 0$ donde A e B nunca poderão ser disjuntos.

Exemplo

Exemplo

1º Teste, 2016/17

Admita que A, B *e* C *são acontecimentos de um espaço de acontecimentos* $(\Omega, \mathcal{F})$ *e que:*

1. $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$, $P(C) = 0.1$, $P(A \cap B) = 0.1$
2. *os acontecimentos A e C são independentes*
3. *acontecimentos* B *e* C *são disjuntos*

Indique as opções corretas.

A) $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 0.5$

B) $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $P(A - B) = 0.2$

C) $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $P(A \cup B \cup C) = 0.58$

Exemplo

Exemplo

1º Teste, 2016/17

Admita que A, B e C são acontecimentos de um espaço de acontecimentos $(\Omega, \mathcal{F})$ e que:

1. $P(A) = 0.2,\ P(B) = 0.4,\ P(C) = 0.1,\ P(A \cap B) = 0.1$
2. *os acontecimentos A e C são independentes*
3. *acontecimentos B e C são disjuntos*

Indique as opções corretas.

A) $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 0.5$

B) $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $P(A - B) = 0.2$

C) $\boxed{V}$ $\boxed{F}$ $P(A \cup B \cup C) = 0.58$

$\boxed{\text{F}}$ $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 0.9$

$\boxed{\text{F}}$ $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.1$

$\boxed{\text{V}}$ Como $B \cap C = \emptyset$ também $A \cap B \cap C = \emptyset$, logo $P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0$. Se A e C são acontecimentos independentes então $P(A \cap C) = P(A) \times P(C) = 0.02$. Assim,
$P(A \cup B \cup C) =$
$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 0.58$

Exemplo

Exemplo

Considere os acontecimentos $A, B \in (\Omega, \mathcal{S}, P)$ *tais que* $P(A \cup B) = 0.8$ *e* $P(A - B) = 0.3$. *Qual o valor da* $P(B)$*?*

Repare-se que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ e } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

pelo que

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A - B) = 0.8 - 0.3 = 0.5.$$

Definição (Probabilidade condicional)

A **probabilidade condicional** *de A dado B é*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad \textit{se } P(B) > 0. \tag{1}$$

Observação: Resulta de (1) que, $P\,(A \cap B) = P\,(A\,|B\,)\,P\,(B)$, se $P(B) > 0$. Nalguns casos, a probabilidade condicional $P(A|B)$ pode ser igual a $P(A)$, ou seja, o conhecimento da ocorrência de B não afecta a probabilidade de A ocorrer.

Vamos agora escrever $P(A|B)$ em termos de $P(B|A)$.

Exemplo 1

Exemplo

Uma empresa farmacêutica realizou um ensaio clínico para comparar a eficácia de um novo medicamento (medicamento experimental). Escolheram-se ao acaso 200 doentes com a doença que se pretende curar. Metade desses doentes foram tratados com o novo medicamento e os restantes com um medicamento convencional. Ao fim de 5 dias, os resultados são os seguintes:

	Melhorou (M)	Não melhorou $(\overline{M})$	Total
Medicamento Experimental E	69	31	100
Medicamento Convencional $(\overline{E})$	58	42	100
Total	127	73	200

1. *Qual a probabilidade, de um doente escolhido ao acaso,*
   a) *tomar o medicamento experimental?*

Exemplo 1

Exemplo

Uma empresa farmacêutica realizou um ensaio clínico para comparar a eficácia de um novo medicamento (medicamento experimental). Escolheram-se ao acaso 200 doentes com a doença que se pretende curar. Metade desses doentes foram tratados com o novo medicamento e os restantes com um medicamento convencional. Ao fim de 5 dias, os resultados são os seguintes:

	Melhorou (M)	Não melhorou $(\overline{M})$	Total
Medicamento Experimental E	69	31	100
Medicamento Convencional $(\overline{E})$	58	42	100
Total	127	73	200

1. *Qual a probabilidade, de um doente escolhido ao acaso,*
   a) *tomar o medicamento experimental?* $P(E) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$

Exemplo 1

Exemplo

Uma empresa farmacêutica realizou um ensaio clínico para comparar a eficácia de um novo medicamento (medicamento experimental). Escolheram-se ao acaso 200 doentes com a doença que se pretende curar. Metade desses doentes foram tratados com o novo medicamento e os restantes com um medicamento convencional. Ao fim de 5 dias, os resultados são os seguintes:

	Melhorou (M)	Não melhorou $(\overline{M})$	Total
Medicamento Experimental E	69	31	100
Medicamento Convencional $(\overline{E})$	58	42	100
Total	127	73	200

1. *Qual a probabilidade, de um doente escolhido ao acaso,*
   a) *tomar o medicamento experimental?* $P(E) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$
   b) *tomar o medicamento experimental e melhorar?*

Exemplo 1

Exemplo

Uma empresa farmacêutica realizou um ensaio clínico para comparar a eficácia de um novo medicamento (medicamento experimental). Escolheram-se ao acaso 200 doentes com a doença que se pretende curar. Metade desses doentes foram tratados com o novo medicamento e os restantes com um medicamento convencional. Ao fim de 5 dias, os resultados são os seguintes:

	Melhoron (M)	Não melhorou $(\overline{M})$	Total
Medicamento Experimental E	69	31	100
Medicamento Convencional $(\overline{E})$	58	42	100
Total	127	73	200

1. *Qual a probabilidade, de um doente escolhido ao acaso,*
    a) *tomar o medicamento experimental?* $P(E) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$
    b) *tomar o medicamento experimental e melhorar?* $P(E \cap M) = \frac{69}{200}$

Exemplo 1

Exemplo

Uma empresa farmacêutica realizou um ensaio clínico para comparar a eficácia de um novo medicamento (medicamento experimental). Escolheram-se ao acaso 200 doentes com a doença que se pretende curar. Metade desses doentes foram tratados com o novo medicamento e os restantes com um medicamento convencional. Ao fim de 5 dias, os resultados são os seguintes:

	Melhorou (M)	*Não melhoru* $(\overline{M})$	*Total*
Medicamento Experimental E	*69*	*31*	*100*
Medicamento Convencional $(\overline{E})$	*58*	*42*	*100*
Total	*127*	*73*	*200*

1. *Qual a probabilidade, de um doente escolhido ao acaso,*
   a) *tomar o medicamento experimental?* $P(E) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$
   b) *tomar o medicamento experimental e melhorar?* $P(E \cap M) = \frac{69}{200}$
2. *Qual a probabilidade de um doente, que melhorou, ter tomado o medicamento experimental?*

Exemplo 1

Exemplo

Uma empresa farmacêutica realizou um ensaio clínico para comparar a eficácia de um novo medicamento (medicamento experimental). Escolheram-se ao acaso 200 doentes com a doença que se pretende curar. Metade desses doentes foram tratados com o novo medicamento e os restantes com um medicamento convencional. Ao fim de 5 dias, os resultados são os seguintes:

	Melhorou (M)	Não melhorou $(\overline{M})$	Total
Medicamento Experimental E	69	31	100
Medicamento Convencional $(\overline{E})$	58	42	100
Total	127	73	200

1. *Qual a probabilidade, de um doente escolhido ao acaso,*
   a) *tomar o medicamento experimental?* $P(E) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$
   b) *tomar o medicamento experimental e melhorar?* $P(E \cap M) = \frac{69}{200}$
2. *Qual a probabilidade de um doente, que melhorou, ter tomado o medicamento experimental?* $P(E|M) = \frac{69}{127}$ *(probabilidade condicional)*

Exemplo 1

Exemplo

Uma empresa farmacêutica realizou um ensaio clínico para comparar a eficácia de um novo medicamento (medicamento experimental). Escolheram-se ao acaso 200 doentes com a doença que se pretende curar. Metade desses doentes foram tratados com o novo medicamento e os restantes com um medicamento convencional. Ao fim de 5 dias, os resultados são os seguintes:

	Melhorou (M)	Não melhorou $(\overline{M})$	Total
Medicamento Experimental E	69	31	100
Medicamento Convencional $(\overline{E})$	58	42	100
Total	127	73	200

1. *Qual a probabilidade, de um doente escolhido ao acaso,*
   a) *tomar o medicamento experimental?* $P(E) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$
   b) *tomar o medicamento experimental e melhorar?* $P(E \cap M) = \frac{69}{200}$
2. *Qual a probabilidade de um doente, que melhorou, ter tomado o medicamento experimental?* $P(E|M) = \frac{69}{127}$ *(probabilidade condicional)*
3. *Qual a probabilidade de um doente, que tomou o medicamento experimental, ter melhorado?*

Exemplo 1

Exemplo

Uma empresa farmacêutica realizou um ensaio clínico para comparar a eficácia de um novo medicamento (medicamento experimental). Escolheram-se ao acaso 200 doentes com a doença que se pretende curar. Metade desses doentes foram tratados com o novo medicamento e os restantes com um medicamento convencional. Ao fim de 5 dias, os resultados são os seguintes:

	Melhoroú (M)	Não melhorou ($\overline{M}$)	Total
Medicamento Experimental E	69	31	100
Medicamento Convencional ($\overline{E}$)	58	42	100
Total	127	73	200

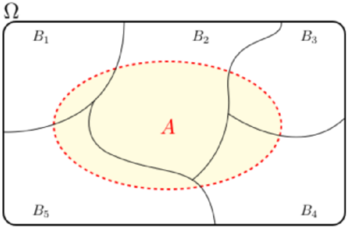
1. *Qual a probabilidade, de um doente escolhido ao acaso,*
   - a) *tomar o medicamento experimental?* $P(E) = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}$
   - b) *tomar o medicamento experimental e melhorar?* $P(E \cap M) = \frac{69}{200}$
2. *Qual a probabilidade de um doente, que melhorou, ter tomado o medicamento experimental?* $P(E|M) = \frac{69}{127}$ (probabilidade condicional)
3. *Qual a probabilidade de um doente, que tomou o medicamento experimental, ter melhorado?* $P(M|E) = \frac{69}{100}$ (probabilidade condicional)

Teoremas

Definição (Partição do espaço de resultados)

Dizemos que $\{B_1, \ldots, B_n\}$ *é uma partição do espaço de resultados* Ω *quando*

$$B_i \cap B_j = \emptyset \ (i \neq j) \quad \text{e} \quad \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega.$$



Teorema (Teorema da probabilidade total)

Seja $\{B_1, \ldots, B_n\}$ *uma partição do espaço de resultados* Ω, *com* $P\left(B_i\right) > 0,\ \forall i$. *Dado um qualquer acontecimento* A, *tem-se*

$$P\left(A\right) = P\left(A \left| B_1\right.\right) P\left(B_1\right) + \ldots + P\left(A \left| B_n\right.\right) P\left(B_n\right)$$

Vamos agora demonstrar este teorema.

Teoremas

Teorema (Teorema da probabilidade total)

Seja $\{B_1, \ldots, B_n\}$ *uma partição do espaço de resultados* Ω*, com* $P(B_i) > 0,\ \forall i$. *Dado um qualquer acontecimento* A*, tem-se*

$$P(A) = P(A|B_1)\,P(B_1) + \ldots + P(A|B_n)\,P(B_n)$$

Vamos agora demonstrar este teorema.

Teorema (Teorema de Bayes)

Seja $\{B_1, \ldots, B_n\}$ *uma partição do espaço de resultados* Ω*, com* $P(B_i) > 0,\ \forall i$. *Dado um qualquer acontecimento* A*, com* $P(A) > 0$*, tem-se*

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)\,P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\,P(B_i)}.$$

A prova deste teorema sai agora de forma muito simples.

Exemplo

Exemplo (1º Teste-2016/17)

Para efeitos de controlo da poluição no rio Tejo, são recolhidas de forma periódica amostras de água em três localizações distintas L_1, L_2 e L_3. Em L_1 são recolhidas o dobro das amostras relativamente a qualquer uma das outras localizações (L_2, L_3). A percentagem de amostras com resultado positivo, para um certo tipo de poluente, é de 2% em L_1 e L_2 , enquanto que em L_3 é de 4%. Todas as amostras são guardadas e arquivadas num único lugar mas alguém eliminou todos os registos identificativos das amostras.

A) *Escolhendo uma amostra ao acaso de entre todas as que estão arquivadas, qual a probabilidade desta ser positiva para o poluente?*

$\boxed{A}$ 0.05 $\boxed{B}$ 0.025 $\boxed{C}$ 0.011 $\boxed{D}$ 0.015 $\boxed{E}$ Nenhuma das anteriores

B) *Se a amostra tiver resultado positivo, qual a probabilidade de ter sido recolhida em L_1?*

$\boxed{A}$ 0.20 $\boxed{B}$ 0.30 $\boxed{C}$ 0.40 $\boxed{D}$ 0.60 $\boxed{E}$ Nenhuma das anteriores

Resolução:

Considerem-se os acontecimentos: L_i- localização L_i, $i = 1, 2, 3$ e RP-Resultado positivo.

Informação:

- $$P(L_1) = 2P(L_2) = 2P(L_3) \Rightarrow P(L_2) = P(L_3)$$
  $$P(L_1) + P(L_2) + P(L_3) = 1 \Leftrightarrow 2P(L_2) + P(L_2) + P(L_2) = 1 \Leftrightarrow$$
  $$P(L_2) = 1/4$$
  $$P(L_1) = 1/2 \quad P(L_2) = 1/4 \quad P(L_3) = 1/4$$
- $P(RP|L_1) = 0.02 \quad P(RP|L_2) = 0.02 \quad P(RP|L_3) = 0.04$

A) $\boxed{\text{B}}$

$$P(RP) = P(RP \cap L_1) + P(RP \cap L_2) + P(RP \cap L_3) =$$
$$= P(RP|L_1)P(L_1) + P(RP|L_2)P(L_2) + P(RP|L_3)P(L_3) = 0.025$$

B) $\boxed{\text{C}}$

$$P(L_1|RP) = \frac{P(L_1 \cap RP)}{P(RP)} = \frac{P(RP|L_1)P(L_1)}{P(RP)} = \frac{0.01}{0.025} = 0.4$$

Exemplo

Exemplo (Teste de P.E. D - 2007/08)

Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa:
Três máquinas A, B e C produzem botões, respectivamente, 15%, 25% e 60% da produção total. As percentagens de botões defeituosos fabricados por estas máquinas são respectivamente 5%, 7% e 4%. Se ao acaso, da produção total de botões, for encontrado um defeituoso, a probabilidade de ele ter sido produzido pela máquina B é de cerca de 36%.

Sugestão: Comece por considerar os acontecimentos

A - O Botão é produzido pela máquina A;
B - O Botão é produzido pela máquina B;
C - O Botão é produzido pela máquina C;
D - O Botão tem defeito;

e em função destes escreva as probabilidades indicadas no enunciado. Por exemplo, é dado que $P(D|C) = 0.04$. Identifique de seguida a probabilidade pedida e use o T. Bayes para a calcular.