Definição de limite segundo Cauchy

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto e

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad (x_0, y_0) \in D\prime.$$

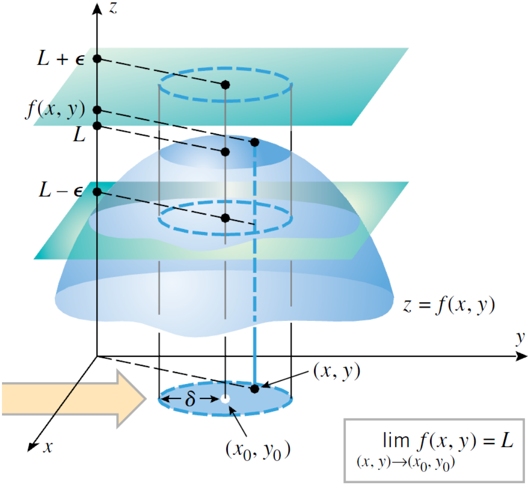
Escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir um número $\delta > 0$ tal que

$$(x,y) \in D \ \wedge \ 0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Definição de limite segundo Cauchy (continuação)



Exemplo

Exemplo

Mostre, usando a definição de limite de uma função num ponto, que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3 - 3y^3}{x^2 + y^2} = 0.$$

Resolução:

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$

$$\left| \frac{2x^3 - 3y^3}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 5\,\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{(justificar)},$$

isto é

$$\Big| f(x,y) - 0 \Big| \leq 5\, \big\| (x,y) - (0,0) \big\|.$$

Então para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \dfrac{\epsilon}{5}$ tal que

$$0 < \big\| (x,y) - (0,0) \big\| < \delta \Rightarrow \Big| f(x,y) - 0 \Big| < \epsilon$$

$$\left(0 < \big\| (x,y) - (0,0) \big\| < \delta \Rightarrow \big| f(x,y) - 0 \big| < 5\,\frac{\epsilon}{5} = \epsilon \right)$$

Relações entre limites gerais e limites ao longo de curvas

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ *um conjunto aberto e* $(x_0, y_0) \in D'$

(a) *Se* $f(x,y) \to L$ *quando* $(x,y) \to (x_0,y_0)$, *então* $f(x,y) \to L$ *quando* $(x,y) \to (x_0,y_0)$ *ao longo de qualquer curva contida em* $D \cup \{(x_0,y_0)\}$.

(b) *Se o limite de* f *não existir quando* $(x,y) \to (x_0,y_0)$ *ao longo de alguma curva contida em* $D \cup \{(x_0,y_0)\}$, *ou se* f *tiver limites diferentes quando* $(x,y) \to (x_0,y_0)$ *ao longo de duas curvas diferentes contidas em* $D \cup \{(x_0,y_0)\}$, *então o limite de* f *não existe quando* $(x,y) \to (x_0,y_0)$.

Exemplo

Exemplo

Estude a existência do limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Resolução: Verificámos anteriormente que o limite ao longo da reta $y = 0$ toma o valor 0 e o limite ao longo da reta $y = x$ toma o valor $-\frac{1}{2}$.

- A função tem limites diferentes quando $(x, y) \to (0, 0)$ ao longo de duas retas diferentes contidas em $D \cup \{(0, 0)\}$, então **o limite** de f quando $(x, y) \to (0, 0)$ **não existe**.

Exemplo

Estude a existência do limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Sugestão: determine os limites direcionais e o limite ao longo da curva $y = x^2$.

Exemplo - Resolução

Esboço de resolução:

- Cálculo dos limites direcionais no ponto $(0,0)$:
  $y = mx$, $m \in \mathbb{R}$; $\quad x = 0$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0),\\ y=mx}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = 0, \forall m \in \mathbb{R}; \quad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0),\\ x=0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = 0,$$

  Os limites direcionais são iguais a 0.

- Consideramos a curva $y = x^2$ que passa no ponto $(0,0)$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0),\\ y=x^2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \frac{1}{2}.$$

- A função tem limites diferentes quando $(x,y)\to(0,0)$ ao longo de duas curvas diferentes contidas em $D \cup \{(0,0)\}$, então **o limite** de f quando $(x,y)\to(0,0)$ **não existe**.

Limites iterados

Chamam-se limites iterados de f quando (x, y) tende para (x_0, y_0) aos dois limites

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right), \quad \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right).$$

Limite geral e limites iterados

Teorema. *Se existirem os limites iterados*

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right), \quad \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right)$$

e forem diferentes, então o limite

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$$

não existe.

Exemplo

Exemplo

Verifique que o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y}$$

não existe.

Resolução:

Exemplo

Exemplo

Verifique que os limites iterados são iguais, contudo o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

não existe.

Resolução:

Estudo de limites através de coordenadas polares

Sejam D um conjunto aberto, $f : D \to \mathbb{R}$, e $(a, b) \in D\prime$.
Suponhamos que existe $R > 0$ tal que $B_R(a, b)\backslash\{(a, b)\} \subset D$.
Define-se a função

$$F(r, \theta) = f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta), \quad (r, \theta) \in]0, R[\times[0, 2\pi[.$$

Teorema. *Seja* $L \in \mathbb{R}$. *Se existir uma função* $M :]0, R[\to \mathbb{R}$ *tal que*

- $|F(r, \theta) - L| \leq M(r) \quad \forall (r, \theta) \in]0, R[\times[0, 2\pi[,$

e

- $\lim_{r\to 0} M(r) = 0,$

então

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L.$$

Exemplo

Exemplo

Estude a existência de

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2x^2y+y^3)}{x^2+y^2},$$

utilizando coordenadas polares.

Exemplo - Resolução

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(2x^2y+y^3)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} r(2\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^3\theta)$$

$$\left| r(2\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^3\theta)\right| \leq 3r, \quad \forall (r,\theta) \in]0,+\infty[\times[0,2\pi]$$

e

$$\lim_{r\to 0} 3r = 0.$$

Então

$$\lim_{r\to 0} r(2\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^3\theta) = 0$$

Exemplo

Exemplo

Usando coordenadas polares, estude a existência do seguinte limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}.$$

Resolução:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(r^2\right)}{r^2} = 1$$

Proposição

Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ *e* $(x_0, y_0) \in D\prime$.

-
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \textit{ se e só se } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left|f(x,y) - L\right| = 0.$$

- *Se existir uma função* $g : D \to \mathbb{R}$ *tal que*
$$0 \leq \left|f(x,y) - L\right| \leq g(x,y), \quad \forall (x,y) \in D \backslash \{(x_0,y_0)\}$$
e
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0$$
então
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Exemplo

Verifique que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x\,y\,\mathrm{arctg}(x+y)-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Resolução: Para $(x,y)\neq(0,0)$, tem-se

$$0 \leq \left| \frac{2x\,y\,\mathrm{arctg}(x+y)-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| \leq 5\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{(justificar).}$$

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 5\sqrt{x^2+y^2} = 0$, pela proposição anterior o limite é 0.

Continuidade de uma função de duas variáveis num ponto

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D$ e

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

Diz-se que f é contínua no ponto (x_0, y_0) se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Isto é, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que

$$(x,y) \in D \;\wedge\; \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon.$$

Diz-se que f é contínua num conjunto $A \subset D$ se for contínua em todos os pontos de A.