Revisões de Geometria

Objetivos

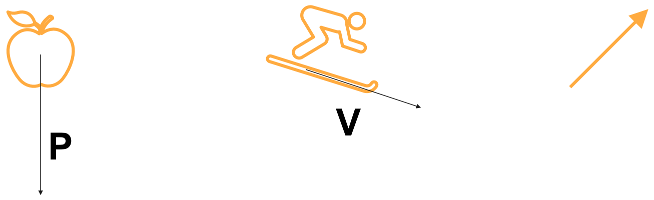
- Introduzir os elementos de geometria
  - Escalares
  - Vetores
  - Pontos
- Estabelecer as operações entre eles de forma independente do referencial
- Definir as primitivas básicas
  - Segmentos de recta
  - Polígonos

Elementos Básicos de Geometria

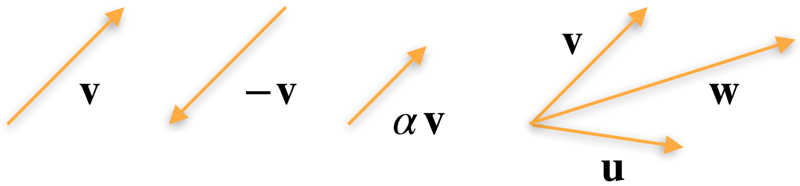
- A geometria é o estudo das relações entre os objetos num espaço de n dimensões.
  - Em computação gráfica estamos interessados principalmente no espaço tridimensional
- Para modelarmos objetos pretendemos identificar o menor conjunto de primitivas que nos permitam construir objectos mais sofisticados
- Vamos necessitar de 3 elementos básicos:
  - Escalares (por si só não têm significado geométrico)
  - Vetores
  - Pontos

Vetores

- Definição física: um vetor é uma entidade com dois atributos
  - Direção
  - Magnitude
- Exemplos:
  - Força
  - Velocidade
  - Segmentos de recta dirigidos



- Operações
  - Vetor simétrico
  - Multiplicação por um escalar
  - Existência de vetor nulo
  - A soma de 2 vetores é um vetor

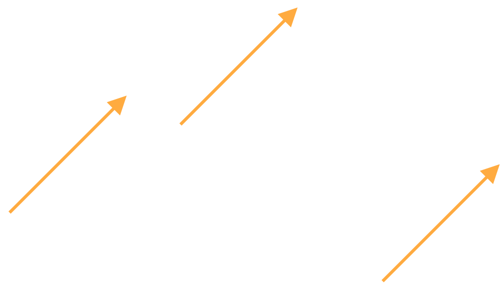


Vetores

- Um espaço linear|vetorial é um sistema matemático para manipular vetores
- As operações suportadas num espaço linear são:
  - A multiplicação por um escalar
    $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$
  - A adição de vetores: $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$
- Expressões possíveis num espaço linear

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + 2\mathbf{w} - 3\mathbf{r}$$

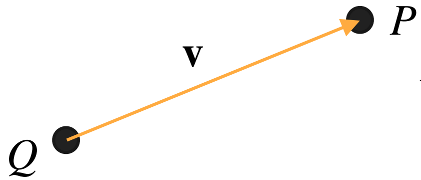
- Os vetores são livres (não têm posição)
- Exemplos de vetores idênticos:



- Os espaços lineares são insuficientes para definirmos geometria, precisamos de locais: pontos!

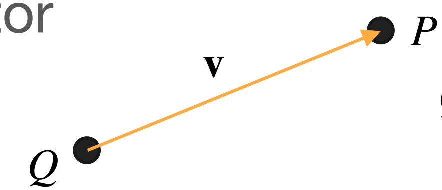
Pontos

- Definem uma localização no espaço
- As operações suportadas entre pontos e vetores são:
    - A subtração de dois pontos



$$\mathbf{v} = P - Q$$

    - A adição de um ponto e um vetor



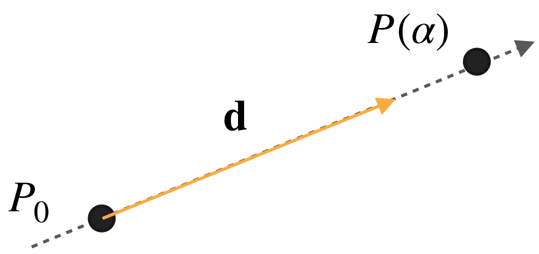
$$Q + \mathbf{v} = P$$

Espaço Afim

- Um espaço afim obtém-se acrescentando a um espaço linear um ponto
- Operações suportadas:
  - Adição de dois vetores
  - Multiplicação dum escalar por um vetor
  - Adição de um vetor a um ponto (ou subtração de dois pontos)
  - Operações entre escalares (adição, produto, inverso)
- Adicionalmente, para um qualquer ponto P, definem-se as operações:
  - $1 \times P = P$
  - $0 \times P = \mathbf{0}$ (vetor nulo, de comprimento zero e sem direção definida)

Linhas

- Considerem-se todos os pontos da forma $P(\alpha) = P_0 + \alpha\mathbf{d}$



- Conjunto de todos os pontos da recta que passa por P_0, com a direção do vetor $\mathbf{d}$.

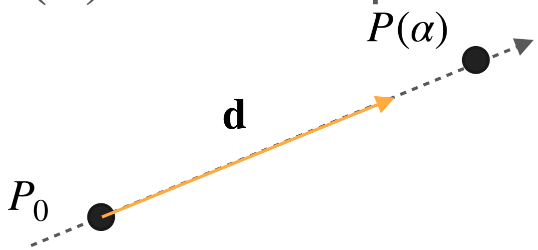
Linhas

- $P(\alpha) = P_0 + \alpha\mathbf{d}$ é designada por equação paramétrica vetorial da reta / linha
- É uma forma mais robusta que as alternativas e é facilmente extensível a curvas e superfícies.
- Outras equações possíveis para uma reta:
  - Explícita: $y = mx + b$
  - Implícita: $ax + by + c = 0$
  - Paramétrica:

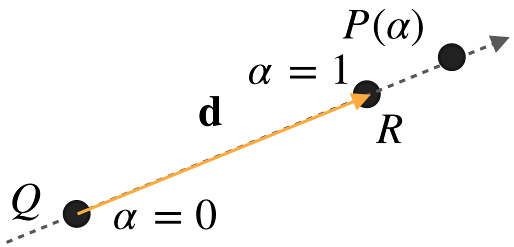
$$x(\alpha) = (1 - \alpha)x_0 + \alpha x_1$$
$$y(\alpha) = (1 - \alpha)y_0 + \alpha y_1$$

Raios e Segmentos de reta

- Se $\alpha \geq 0$, então $P(\alpha)$ é um raio partindo de P_0, na direção de $\mathbf{d}$



- Se usarmos dois pontos para definir $\mathbf{d}$, então:

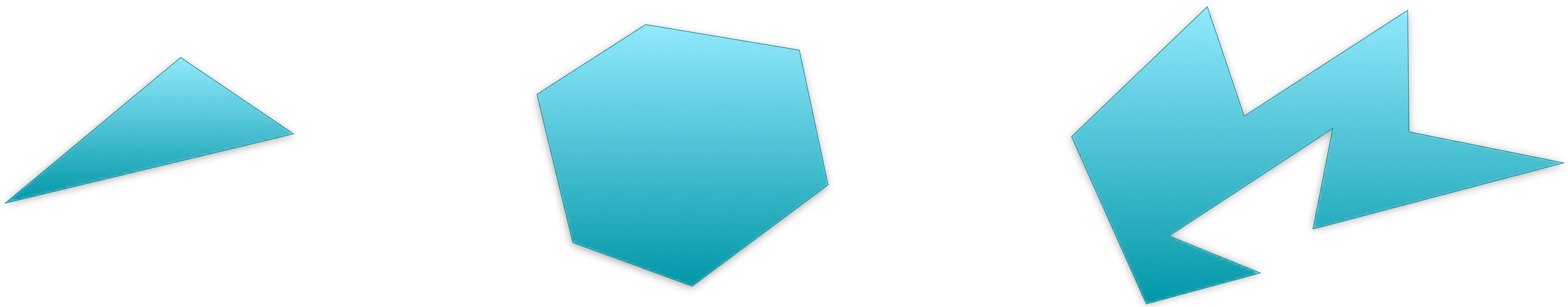


Para $0 \leq \alpha \leq 1$, obtêm-se todos os pontos do segmento de reta que liga Q a R

$$P(\alpha) = Q + \alpha(R - Q) = Q + \alpha R - \alpha Q = (1 - \alpha)Q + \alpha R$$

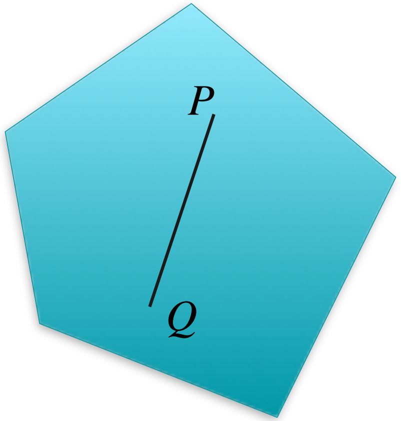
Polígono

- Um polígono é a região do espaço delimitada por uma sequência de segmentos de reta, contíguos, que formam uma figura fechada (início e fim) no mesmo ponto. Todos os pontos deverão estar num mesmo plano.

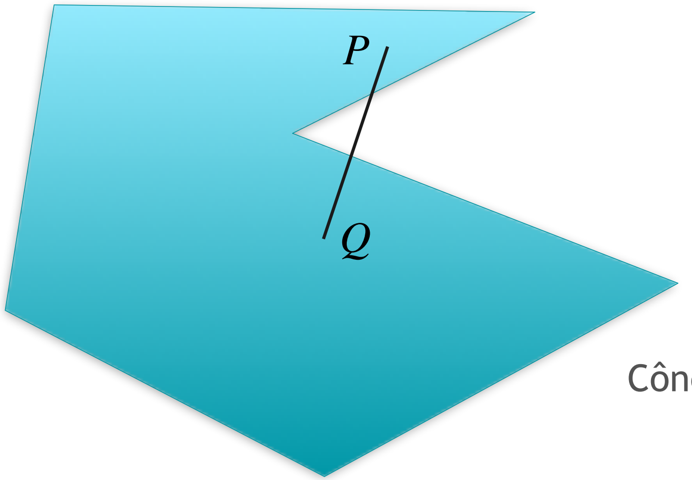


Convexidade

- Um objeto é convexo se e só se, para quaisquer dois pontos pertencentes ao objeto, todos os pontos no segmento de reta que os une também pertencem ao objeto.



Convexo



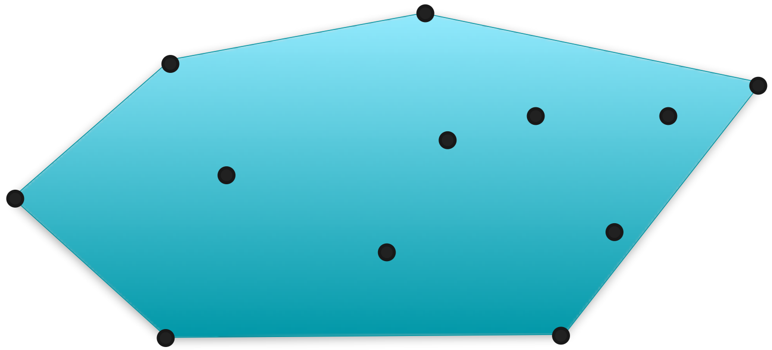
Côncavo

Somas afins

- Considere-se a expressão: $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_n P_n$
- Embora não se tenha definido a operação de multiplicação dum escalar por um ponto, pode mostrar-se por indução que a "soma" acima faz sentido se e só se: $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$
- A expressão diz-se então ser uma soma afim dos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$.
- Adicionalmente, se $\forall i, \alpha_i \geq 0$, então obtém-se o casco convexo (*convex hull*) dos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Casco convexo (Convex Hull)

- É o menor objeto convexo contendo os pontos $P_1, P_2, \ldots, . P_n$
- Em 2D (forma-se um polígono convexo) pode imaginar-se que passamos um elástico em torno do conjunto de pontos e o largamos

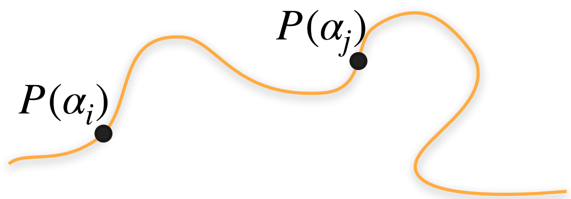


- Em 3D (forma-se um poliedro convexo) a analogia é a de um balão elástico envolvente que se larga até tocar em alguns dos pontos.

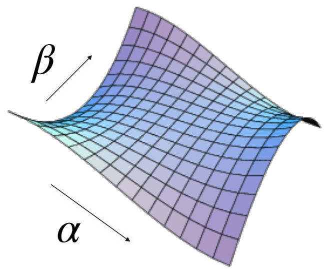
Curvas e Superfícies

- Curvas - são entidades definidas por um parâmetro da forma $P(\alpha)$, onde a função é não linear:

Exemplo: $\mathbf{P}(t) = (1-t)3\mathbf{P1} + 3(1-t)2t\mathbf{P2} + 3(1-t)t2\mathbf{P3} + t3\mathbf{P4}$



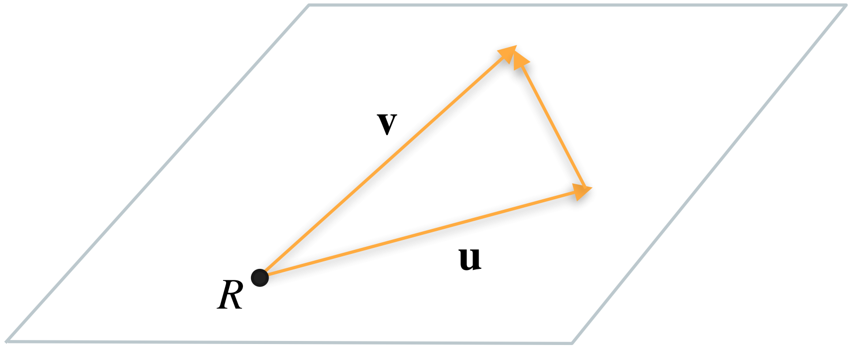
- Superfícies - são formadas por funções de dois parâmetros $P(\alpha, \beta)$

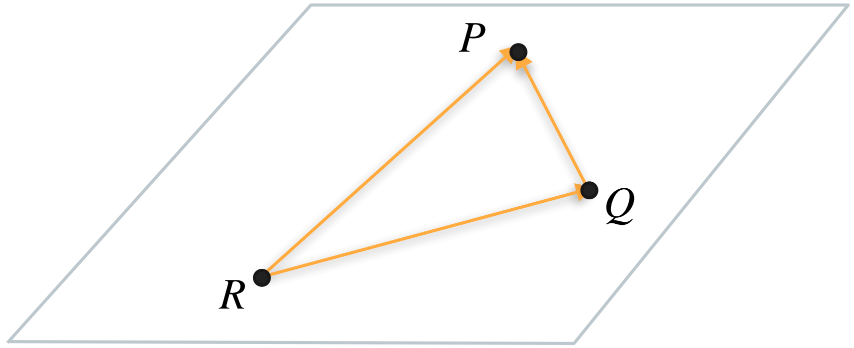


- Nota: funções lineares geram linhas e polígonos

Plano

- Um plano pode definir-se através dum ponto e de dois vetores, ou através de 3 pontos

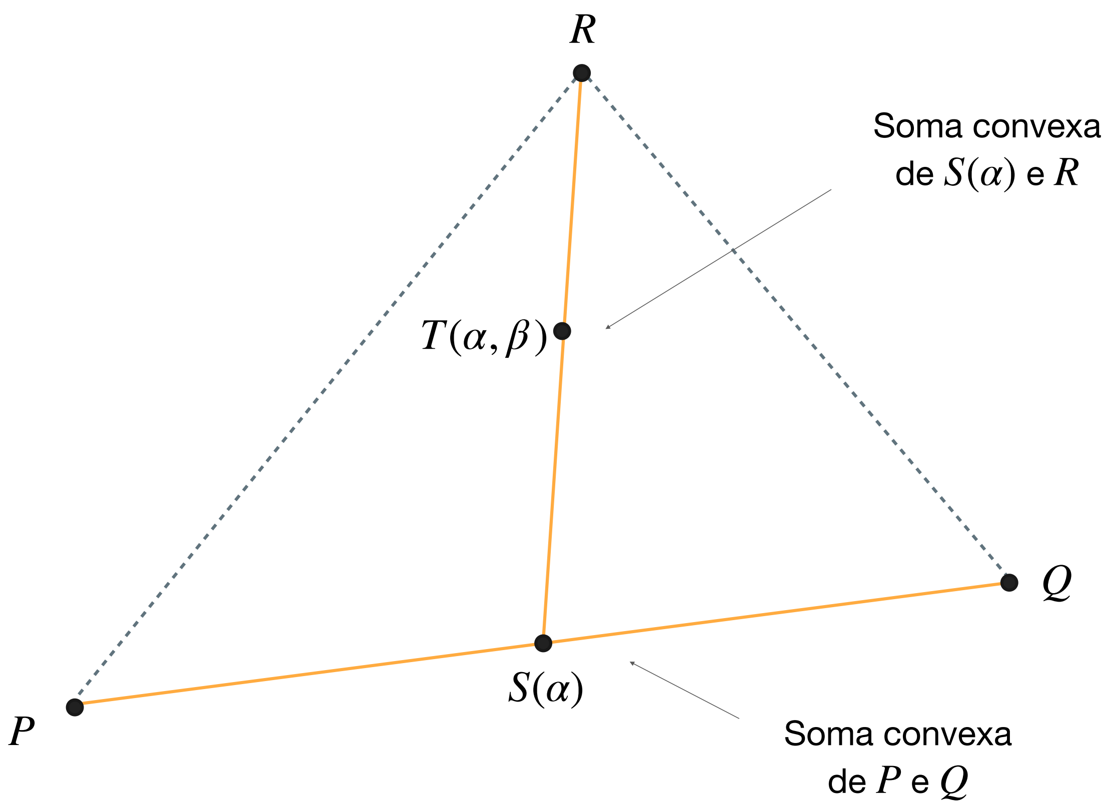




$$P(\alpha,\beta) = R + \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$$

$$P(\alpha,\beta) = R + \alpha(Q - R) + \beta(P - R)$$

Triângulos



Para
$0 \leq \alpha, \beta \leq 1,$
obtêm-se todos
os pontos T do
triângulo

Coordenadas Baricêntricas

- Um triângulo é convexo, logo cada ponto do seu interior pode ser representado por uma soma afim: $P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \alpha_1 Q + \alpha_2 R + \alpha_3 S$, onde $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ e $\forall i, \alpha_i \geq 0$.
- Os valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ são denominados de **coordenadas baricêntricas** do ponto P, em relação ao triângulo.

Coordenadas baricêntricas (interpretação geométrica)

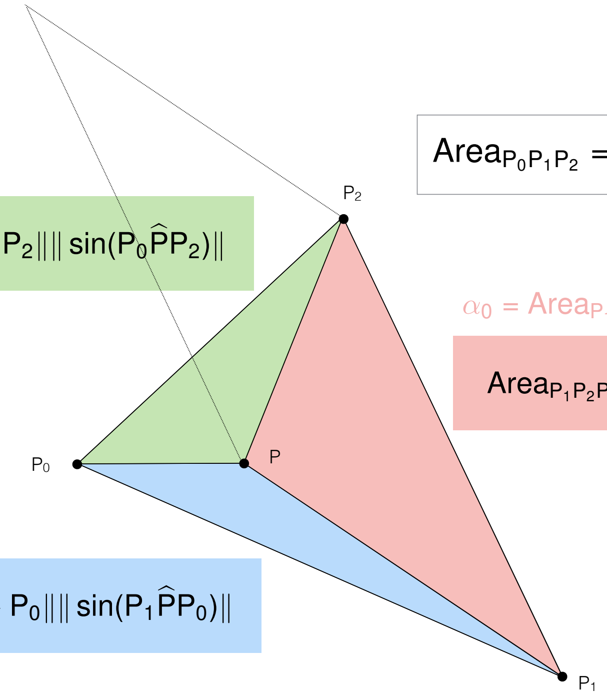
$$\text{Area}_{P_0P_1P_2} = \text{Area}_{P_0P_1P} + \text{Area}_{P_1P_2P} + \text{Area}_{P_2P_0P}$$

$\alpha_1 = \text{Area}_{P_2P_0P} / \text{Area}_{P_0P_1P_2}$

$$\text{Area}_{P_2P_0P} = \frac{1}{2}\|P_2 - P\|\|P_0 - P_2\|\|\sin(P_0\widehat{P}P_2)\|$$

$\alpha_0 = \text{Area}_{P_1P_2P} / \text{Area}_{P_0P_1P_2}$

$$\text{Area}_{P_1P_2P} = \frac{1}{2}\|P_1 - P\|\|P_2 - P_1\|\|\sin(P_2\widehat{P}P_1)\|$$



$\alpha_2 = \text{Area}_{P_0P_1P} / \text{Area}_{P_0P_1P_2}$

$$\text{Area}_{P_0P_1P} = \frac{1}{2}\|P_0 - P\|\|P_1 - P_0\|\|\sin(P_1\widehat{P}P_0)\|$$

$$P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$$

Barycentric coordinates of point P

Normais

- Num espaço tridimensional, todos os planos têm um vetor perpendicular ou ortogonal a eles, denominado de vetor normal
- A partir da formulação $P(\alpha, \beta) = P + \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$, podemos usar o produto externo $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ para encontrar o vetor $\mathbf{n}$ que satisfaz:

$$(P(\alpha, \beta) - P) \cdot \mathbf{n} = 0$$