

AM 3C – Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

Felipe B. Pinto 71951 – EQB

4 de janeiro de 2025

Conteúdo

1	EDO de Primeira Ordem	2	5	Equação de Bernoulli e a equação de Riccati	14
	Exemplo 1	2		Exemplo 10 Eq de Bernoulli . . .	15
	Exemplo 2	2		Exemplo 11 Eq Bernoulli	16
	Exemplo 3 Campo de direções da equação	2		Exemplo 12 Eq Riccati	17
2	Equação autonoma	3	6	Operador de Derivação	18
	Exemplo 4 Pontos de equilíbrio .	4	7	Equação Diferencial Linear de ordem n	19
	Exemplo 5 Equilíbrio semiestável	5	8	Abaixando a ordem de uma EDO	21
	Exemplo 6	6		Exemplo 13 Baixamento de grau de uma Eq lin homogênea . . .	22
3	Equação Linear de Primeira Ordem	8	9	Wronskiano: check dependência linear	23
	Exemplo 7	10	10	Método de variação das constantes abitrárias para equação linear de ordem n	24
	Exemplo 8	11		Exemplo 14 Metodo das var const arb	25
4	Método de Variação das constantes Eq Diff de ordem 1	12			
	Exemplo 9	13			

1 EDO de Primeira Ordem

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

F é definida num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^3$. Dado um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, Diz-se que uma função $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em I é uma solução da equação diferencial acima se:

1. $(x, \phi(x), \phi'(x)) \in D, \quad \forall x \in I$
2. $F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0, \quad \forall x \in I$

Ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais elevada referida na equação

Exemplo 1

A equação

$$y' - \frac{y}{x} = x e^x$$

é de primeira ordem e as funções

$$y(x) = c x + x e^x \quad c \in \mathbb{R}$$

são soluções em $]0, \infty[$ desta equação.

Exemplo 2

A equação

$$y'' + 4y = 0$$

é de segunda ordem e as funções

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x, \\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

São soluções em \mathbb{R} desta equação

Forma normal

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

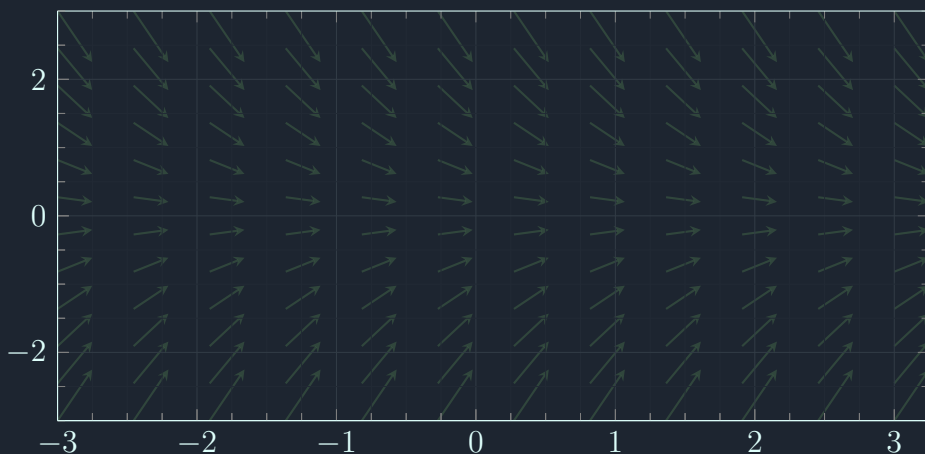
Com f definida no conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. As equações de primeira ordem na forma normal admitem uma interpretação geométrica relativamente simples e que **permite ter uma ideia aproximada dos gráficos das soluções** destas equações.

Campo de direções da equação

Com uma equação diferencial de primeira ordem na forma normal definida no conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^2$, se a cada ponto (x, y) de A se associar a direção das retas de declive igual a $f(x, y)$, se obtém aquilo a que usualmente se chama de campo de direções da equação.

Exemplo 3 Campo de direções da equação

$$y' = -y$$



2 Equação autónoma

Uma EDO em que não aparece explicitamente a variável independente. Se for y a função incógnita e x a variável independente, uma equação diferencial autónoma de primeira ordem é uma equação da forma $F(y, y') = 0$ ou na forma normal:

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

Pontos de equilíbrio (críticos ou estacionários) são os zeros da função

$$f(c) = 0 \implies y(x) = c \text{ é solução de } f(x) = \frac{dy}{dx}$$

$y(x) = c$ chama-se solução de equilíbrio (ou estacionária)

Classificação dos pontos de equilíbrio (Eq autónomas)

Prestando atenção nos limites:

$$f(c) = 0$$

$$x \rightarrow +\infty \implies y(x) \rightarrow c \implies c \text{ é um ponto de eq estável}$$

$$x \rightarrow -\infty \implies y(x) \rightarrow c \implies c \text{ é um ponto de eq instável}$$

$$x \rightarrow -\infty \wedge x \rightarrow +\infty \implies y(x) \rightarrow c \implies c \text{ é um ponto de eq semiestável}$$

Exemplo 4 Pontos de equilíbrio

Considere-se a equação autónoma

$$\frac{dy}{dx} = y(a - by); a, b \in \mathbb{R}^+$$

Pontos de equilíbrio:

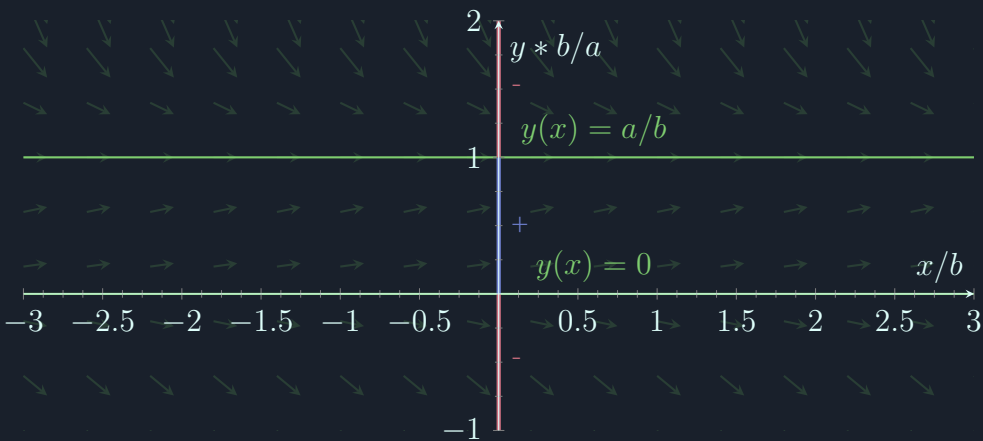
$$c = y : y(a - by) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{a}{b} \end{cases}$$

$$\therefore y(x) = 0 \vee y(x) = a/b$$

Podemos prever o comportamento da equalção pela seguinte tabela

y	$sign$		
	y	$a - by$	$y(a - by)$
$y < 0$	−	+	−
$0 < y < a/b$	+	+	+
$a/b < y$	+	−	−

Se desenharmos um grafico das soluções de equilíbrio



Podemos ver que as tres regiões divididas pelos dois pontos de equilíbrio tem um comportamento: R_1 Decrescente, R_2 Crescente e R_3 Decrescente
Seja $y(x) = 0$ a solução que verifica a condição inicial $y(0) = y_0$:

$y_0 < 0$
$$\begin{cases} x \rightarrow -\infty & \implies y(x) \rightarrow 0 \\ x \rightarrow +\infty & \implies y(x) \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$0 < y_0 < a/b$
$$\begin{cases} x \rightarrow -\infty & \implies y(x) \rightarrow 0 \\ x \rightarrow +\infty & \implies y(x) \rightarrow a/b \end{cases}$$

$a/b < y_0$
$$\begin{cases} x \rightarrow -\infty & \implies y(x) \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty & \implies y(x) \rightarrow a/b \end{cases}$$

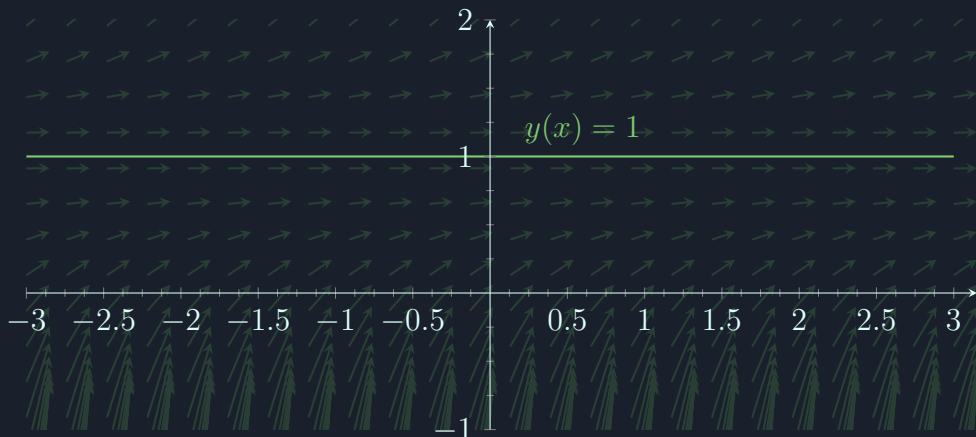
Podemos dizer que $y(x) = 0$ é um ponto de equilíbrio instável e que $y(x) = a/b$ é um ponto de equilíbrio estável

Exemplo 5 Equilíbrio semiestável

A equação autónoma

$$\frac{dy}{dx} = (y - 1)^2$$

tem $y = 1$ como único ponto de equilíbrio. Observando a reta fase, verifica-se que qualquer solução $y(x)$ em qualquer um dos intervalos $]-\infty, 1[$ e $]1, +\infty[$ é crescente



Podemos caracterizar esse ponto como **ponto de equilíbrio semiestável**

Soluções implícitas e explícitas

Soluções explícitas

$$y = f(x)$$

y isolado

Soluções implícitas

$$G(x, y) = 0$$

Define implicitamente uma função $y(x)$ solução da equação.

Exemplo 6

Da equação

$$y^2 y' = x^2$$

Podemos tirar a solução de duas formas

Da forma implícita

$$y^3 - x^3 - 8 = 0$$

Da forma explícita

$$y = \varphi(x) = \sqrt[3]{8 + x^3}$$

Famílias de Soluções

$$G(x, y, z) = 0$$

Tal como sucede no cálculo da primitiva de uma função, em que aparece uma constante c de integração, **quando se resolve uma EDO de primeira ordem, geralmente obtém-se com solução uma expressão contendo uma constante (ou parâmetro) c , e que representa um conjunto de soluções** a que se chamará família de soluções a um parâmetro.

Soluções particulares são obtidas quando atribuímos valores ao parametro da familia de soluções

Soluções singulares nem sempre existem mas existem, não podem ser obtidas atribuindo um valor a constante c

Integral Geral Uma família de soluções que define todas as soluções de uma EDO para um intervalo I

3 Equação Linear de Primeira Ordem

$$y' = f(x, y) \iff y' + p(x)y = q(x)$$

Com $p(x)$ e $q(x)$ funções contínuas num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$

Exemplo

$$y' + 2xy = x^3 \begin{cases} p(x) = 2x \\ q(x) = x^3 \end{cases}$$

Equação linear homogénea

Equação linear em que $q(x) = 0$, quando em uma equação linear completa ($q(x) \neq 0 \wedge p(x) \neq 0$) substituirmos $q(x)$ por 0, obtemos a equação linear homogénea associada.

Solução geral de equações lineares de primeira ordem

$$y' + a(x) y = b(x)$$

General solution

$$\begin{aligned} y &= \frac{c_0}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int b(x) \varphi(x) \, dx = \\ &= \dots \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{using (1.2) (1.3)} \\ (1.1) \end{array}$$

Finding $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \exp \left(\int a(x) \, dx \right) = \dots \quad (1.2)$$

Integrating

$$\begin{aligned} P_x (b(x) \varphi(x)) &= \\ &= \dots \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{using (1.2)} \\ (1.3) \end{array}$$

Demonstração

$$\begin{aligned} y' + p(x) y &= q(x) \implies (y' + p(x) y) \varphi(x) = \\ &= y' \exp \left(\int p(x) \, dx \right) + p(x) y \exp \left(\int p(x) \, dx \right) = \left(y \exp \int p(x) \, dx \right)' = \\ &= q(x) \varphi(x) = q(x) \exp \int p(x) \, dx \implies \\ &\implies y \exp \int p(x) \, dx = c + \int q(x) \exp \left(\int p(x) \, dx \right) dx \implies \\ &\implies y = \frac{c}{\exp \int p(x) \, dx} + \frac{1}{\exp \int p(x) \, dx} \int q(x) \exp \left(\int p(x) \, dx \right) dx = \\ &= \frac{c}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int q(x) \varphi(x) \, dx \end{aligned}$$

Exemplo 7

Considere a equação

$$y' + (1 - 1/x) y = 2x, \quad x < 0$$

Encontre a solução para a equação acima e a equação homogênea associada

Resposta

$$y = \frac{c_0}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int 2x \varphi(x) \, dx =$$

using (1.4)

$$= \frac{c_0}{(e^x c_2/x)} + \frac{1}{(e^x c_2/x)} \int 2x (e^x c_2/x) \, dx =$$

using (1.5)

$$= c_3 x e^{-x} + \frac{x}{e^x c_2} 2 c_2 e^x = c_3 x e^{-x} + 2x$$

$$\varphi(x) = \exp \left(\int (1 - 1/x) \, dx \right) = \exp x - \ln x + c_1 = e^x c_2/x \quad (1.4)$$

$$P(2x \varphi(x)) =$$

using (1.4)

$$= P(2x e^x c_2/x) = 2c_2 e^x \quad (1.5)$$

Exemplo 8

Na investigação de um homicídio, é, muitas vezes importante estimar o instante em que a morte ocorreu. A partir de observações experimentais, a lei de arrefecimento de Newton estabelece, com uma exatidão satisfatória, que a taxa de variação da temperatura $T(t)$ de um corpo em arrefecimento é proporcional à diferença entre a temperatura desse corpo e a temperatura constante T_a do meio ambiente, isto é:

$$\frac{dT}{dt} = -k (T - T_a) \tag{1.6}$$

Suponhamos que duas horas depois a temperatura é novamente medida e o valor encontrado é $T_1 = 23^\circ\text{C}$. O crime parece ter ocorrido durante a madrugada e corpo foi encontrado pela manhã bem cedo, pelas 6 horas e 17 minutos. A perícia então faz a suposição adicional de que a temperatura do meio ambiente entre a hora da morte e a hora em que o cadáver foi encontrado se manteve mais ou menos constante nos 20°C . A perícia sabe também que a temperatura normal de um ser humano vivo é de 37°C . Vejamos como, com os dados considerados, a perícia pode determinar a hora em que ocorreu o crime.

Resposta

$$t : T(t) = 37 \cong \tag{1.7}$$

using (1.10)

$$\cong 10 e^{-t\,0.602} + 20 \implies t \cong -\ln(1.7)/0.602 \cong -0.881 \text{ h} \cong -52.888 \text{ min}$$

Desenvolvendo (1.6)

$$\frac{dT}{dt} = -k (T - T_a) = -k T + k T_a = -k T + k\,20 \implies \frac{dT}{dt} + k T = k\,20 \tag{1.8}$$

Encontrando $T(t)$ a partir de (1.8)

$$T = \frac{c_0}{\varphi(t)} + \frac{1}{\varphi(t)} \int k\,20\,\varphi(t) \, dt = \tag{1.13} \tag{1.14}$$

using (1.13)

$$= \frac{c_0}{c_1 e^{kt}} + \frac{1}{c_1 e^{kt}} k\,20\,c_1 (c_2 + e^{kt}/k) = (c_0/c_1) e^{-kt} + c_2 k\,20 e^{-kt} + 20 = \tag{1.9}$$

$$= c_3 e^{-kt} + 20 \cong \tag{1.12} \tag{1.11}$$

using (1.12)(1.11)

$$\cong 10 e^{-t\,0.602} + 20 \tag{1.10}$$

$$T(2) = 23 = \tag{1.12}$$

using (1.9)(1.12)

$$= 10 e^{-k\,2} + 20 \implies k = -\ln(0.3)/2 \cong 0.602 \tag{1.11}$$

$$T(0) = 30 = \tag{1.12}$$

using (1.9)

$$= c_3 e^{-k\cdot 0} + 20 = c_3 + 20 \implies c_3 = 10 \tag{1.12}$$

$$\varphi(t) = \exp \left(\int k \, dt \right) = c_1 e^{kt} \tag{1.13}$$

$$P(k\,20\,\varphi(t)) = \tag{1.13}$$

using (1.13)

$$= P(k\,20\,c_1 e^{kt}) = k\,20\,c_1 (c_2 + e^{kt}/k) \tag{1.14}$$

4 Método de Variação das constantes Eq Diff de ordem 1

Um metodo alternativo para resolver a mesma equação diferencial linear de primeira ordem

$$y' + a(x) y = b(x)$$

Solução geral

$$y = \frac{C(x)}{\varphi(x)} = \tag{1.15}$$

using (1.16) (1.17)

= ...

Finding $C(x)$

$$\begin{aligned} y' + a(x) y &= \text{using (1.15)} \\ = D_x \left(\frac{C(x)}{\varphi(x)} \right) + a(x) \frac{C(x)}{\varphi(x)} &= b(x) \implies C'(x) = \dots \implies C(x) = \dots \end{aligned} \tag{1.16}$$

Finding $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \exp(P_x(a(x))) = \dots \tag{1.17}$$

Podemos resolver a equação homogênea associada y_h substituir $c_0 \rightarrow c_0(x)$ e aplicar $y = c_0(x)/\varphi(x)$ na equação linear original, dessa forma podemos obter $c_0(x)$ e por sequencia $y = c_0(x)/\varphi(x)$

Método usando solução particular

$$y = \frac{c_0}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int q(x) \varphi(x) dx = y_h + y_i$$

- y_h é a solução da equação homogênea associada
- y_i é uma solução particular

Mesmo y_i aparecer como uma solução particular em que $c_0 = 1$, por estarmos trabalhando com uma solução arbitrária, isso não impede de ser qualquer solução particular, da no mesmo ao final das contas

Exemplo 9

$$y' - \frac{2x}{x^2 + 1} y = 1$$

Encontre a solução geral usando o método de variação das constantes

Resposta

Solução geral

$$y = \frac{C(x)}{\varphi(x)} = \tag{1.18}$$

using (1.19) (1.20)

$$= \frac{c_1 (\arctan x + c_2)}{\frac{c_1}{x^2+1}} = (x^2 + 1) (\arctan x + c_2)$$

Finding $C(x)$

$$y' - \frac{2x}{x^2 + 1} = \tag{1.18} \tag{1.20}$$

$$= D_x \left(\frac{C(x)}{\frac{c_1}{x^2+1}} \right) - \frac{2x}{x^2 + 1} \frac{C(x)}{\frac{c_1}{x^2+1}} = \frac{1}{c_1} (C'(x)(x^2 + 1) + C(x) 2x) - \frac{C(x) 2x}{c_1} =$$

$$= C'(x) \frac{x^2 + 1}{c_1} = 1 \implies C'(x) = \frac{c_1}{x^2 + 1} \implies$$

$$\implies C(x) = P_x \left(\frac{c_1}{x^2 + 1} \right) = c_1 (\arctan x + c_2) \tag{1.19}$$

Finding $\varphi(x)$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \exp \left(P_x \left(-\frac{2x}{x^2 + 1} \right) \right) = \exp \left(- \int \left(\frac{dx^2 + 1}{x^2 + 1} \right) \right) = \\ &= \exp \left(-(\ln(x^2 + 1) + c_0) \right) = \frac{c_1}{x^2 + 1} \end{aligned} \tag{1.20}$$

Resposta (1.21)

$$y = \frac{c_0}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int 1 \varphi(x) dx = \tag{1.22} \tag{1.23}$$

$$= \frac{c_0}{\frac{1}{c_2(x^2+1)}} + \frac{1}{\frac{1}{c_2(x^2+1)}} (c_3 + \arctan x)/c_2 = (x^2 + 1)(c_5 + \arctan x) \tag{1.21}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \exp \left(\int \left(\frac{-2x}{x^2 + 1} \right) dx \right) = \exp \left(- \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \right) = \\ &= \exp \left(- (c_1 + \ln(x^2 + 1)) \right) = \frac{1}{c_2(x^2 + 1)} \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$P(1 \varphi(x)) = \tag{1.22}$$

using (1.22)

$$= P \left(\frac{1}{c_2(x^2 + 1)} \right) = (c_3 + \arctan x)/c_2 \tag{1.23}$$

5 Equação de Bernoulli e a equação de Riccati

São equações não lineares que, após mudanças de variáveis apropriadas, se transformam em equações lineares:

5.1 Eq de Bernoulli

A atribuição

$$y = z^{1/(1-k)}$$

Transforma a eq diferencial

$$y' + a(x) y = b(x) y^k \implies z' + (1 - k) a(x) z = (1 - k) b(x)$$

onde z pode ser encontrado por

$$z = \frac{c_0}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int (1 - k) b(x) \varphi(x) \, dx;$$
$$\varphi(x) = \exp \left(\int (1 - k) a(x) \, dx \right)$$

Quando encontramos uma EDO que possa ser escrita na forma acima, podemos realizar a substituição de $z = y^{1-k}$ transformando a EDO em uma equação linear, assim podemos encontrar a solução geral para z que pode ser substituída para encontrar a solução de y que é a equação original.

workflow

$$y' + a(x) y = b(x) y^k$$

Solução geral

$$y = z^{1/(1-k)} = \left(\frac{c_0}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int (1 - k) b(x) \varphi(x) \, dx \right)^{1/(1-k)} =$$

using (1.24) (1.25)

$$= \dots$$

Encontrando $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \exp \left(\int (1 - k) a(x) \, dx \right) = \dots \tag{1.24}$$

Resolvendo integral

$$\int (1 - k) b(x) \varphi(x) \, dx =$$

using (1.24)

$$= \dots \tag{1.25}$$

5.2 Eq de Riccati

A substituição

$$y = y_1 + 1/z$$

Transforma a eq diferencial

$$y' + a(x) y = b(x) + c(x) y^2 \implies$$
$$\implies z' + (2 c(x) y_1 - a(x)) z = -c(x)$$

onde z pode ser encontrado por

$$z = \frac{c_0}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int -c(x) \varphi(x) \, dx;$$
$$\varphi(x) = \exp \left(\int (2 c(x) y_1 - a(x)) \varphi(x) \, dx \right)$$

Exemplo 10 Eq de Bernoulli

Considere o problema de valores iniciais (PVI)

$$y' - x y = x y^3, \quad y(0) = 1$$

Resposta (1.27)

Substituição de Bernoulli

$$y = z^{1/(1-3)} \implies y' - x y = x y^3 \implies z' + (1 - k)(-x) z = (1 - k) 3$$

Solução geral

$$y = z^{1/(1-3)} = \left(\frac{c_0}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int (1 - 3) x \varphi(x) \, dx \right)^{-1/2} =$$

using (1.29) (1.30)

$$= \left(\frac{c_0}{c_2 e^{x^2}} + \frac{1}{c_2 e^{x^2}} (-c_2) (e^{x^2} + c_3) \right)^{-1/2} = \left(c_5 e^{-x^2} - 1 \right)^{-1/2} =$$

(1.26)

using (1.28)

$$= \left(2 e^{-x^2} - 1 \right)^{-1/2}$$

(1.27)

Encontrando c_5

$$y(0) = 1 =$$

using (1.26)

$$= \left(c_5 e^{-0^2} - 1 \right)^{-1/2} \implies$$
$$\implies c_5 = 1 + 1^2 = 2$$

(1.28)

Encontrando $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \exp(P_x((1 - 3)(-x))) = \exp(2(c_1 + x^2/2)) = c_2 e^{x^2}$$

(1.29)

Integrando

$$\int (1 - 3) x \varphi(x) \, dx =$$

using (1.29)

$$= - \int 2 x c_2 e^{x^2} \, dx = -c_2 \int e^{x^2} \, d(x^2) = -c_2 (e^{x^2} + c_3)$$

(1.30)

Exemplo 11 Eeq Bernoulli

Suponhamos que numa comunidade constituída por N individuos

- $y(t)$ representa o número de infectados pelo vírus da gripe A
- $x(t) = N - y(t)$ representa a população não infectada.

Considere-se que o vírus se propaga pelo contacto entre infectados e não infectados e que a propagação é proporcional ao número de contactos entre estes dois grupos. Suponhamos também que os elementos dos dois grupos se relacionam livremente entre si de modo que o número de contactos entre infectados e não infectados é proporcional ao produto de $x(t)$ por $y(t)$ isto é

$$k x(t) = k (N - y(t)) y(t)$$

em que k é a constante de proporcionalidade. se y_0 é o numero inicial de infectados, o número de infectados $y(t)$ no instante t é a solução PVI

$$y' = k (N - y) y; \quad k > 0; \quad y(0) = y_0$$

Incompleta:

$$y : y' = k (N - y) y \implies y' - N k y = -k y^2;$$

$$y = z^{-1} = \left(c e^{-N k t} + \frac{1}{N t} \right)^{-1} = \dots = \frac{N y_0}{(N - y_0) e^{-N k t} + y_0};$$

$$c : y(0)^{-1} = (z(0)) = c e^{-N k * 0} + \frac{1}{N * 0} = y_0^{-1};$$

$$z = y^{1-2} = 1/y \implies$$

$$\begin{aligned} \implies z' + N k z &= k z = \frac{c_0}{\varphi(t)} + \frac{1}{\varphi(t)} \int k \varphi(t) dt = \\ &= \frac{c_0}{c_2 e^{N k t}} + \frac{1}{c_2 e^{N k t}} \int k c_2 e^{N k t} dt = e^{-N k t} \frac{c_0}{c_2} + e^{-N k t} \frac{k c_2}{c_2} \frac{e^{N k t}}{N k t} = c e^{-N k t} + \frac{1}{N t}; \\ c &= c_0/c_2; \end{aligned}$$

$$\varphi(t) = \exp \left(\int N k dt \right) = \exp (N k t + c_1) = c_2 e^{N k t};$$

$$c_2 = e^{c_1}$$

Exemplo 12 Eq Riccati

Determine a solução do PVI

$$y' - y = -2x + \frac{1}{2x^2}y^2, \quad y(1) = -2, \quad x > 0$$

Sabendo que a equação admite a solução $y = 2x$

Resposta (1.32)

Riccati substitution

$$\begin{aligned} y = 2x + z^{-1} &\implies y' + (-1)y = (-2x) + \frac{1}{2x^2}y^2 \implies \\ &\implies z' + \left(2\frac{1}{2x^2}2x - (-1)\right)z = z' + (1 + 2/x)z = -\frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

General solution

$$\begin{aligned}
y &= 2x + z^{-1} = 2x + \left(\frac{c_0}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} P_x \left(-\frac{1}{2x^2} \varphi(x) \right) \right)^{-1} = && \text{using (1.34) (1.35)} \\
&= 2x + \left(\frac{c_0}{e^x x^2 c_3} + \frac{1}{e^x x^2 c_3} \frac{-c_3}{2} (e^x + c_4) \right)^{-1} = 2x + \left(\frac{c_6}{e^x x^2} - \frac{1}{2x^2} \right)^{-1} = && (1.31) \\
&&& \text{using (1.33)} \\
&= 2x + \left(\frac{e/4}{e^x x^2} - \frac{1}{2x^2} \right)^{-1} && (1.32)
\end{aligned}$$

Finding c_6

Finding $\varphi(x)$

Integrating

6 Operador de Derivação

$$D_x^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

$$D_x^k : C^n(I) \rightarrow C^{n-k}(I)$$

$$D_x^k : y \rightarrow y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$$

7 Equação Diferencial Linear de ordem n

$$\sum_{i=0}^n a_i D_x^i(y) = \left(\sum_{i=0}^n a_i D_x^i \right) y = P y = f(x)$$

- a_n é o Coeficiente líder
- Forma normal é quando esta escrita de forma que $a_n = 1$

Example

$$D_x^3(y) + x^2 D_x^2(y) - 5x D_x(y) + y = x \cos(x)$$

está escrita na forma normal

Operador P

$$P = D_x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i D_x^i$$

Linearidade

Dadas duas funções $y_1, y_2 \in C^n(I)$ e α, β numeros reais

$$P(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha P y_1 + \beta P y_2$$

Espaço Solução da equação

$$\text{nuc}(P) : A = \{y \in C^n(I) : P y = 0\}$$

O conjunto á é nucleo do operador P, sendo portanto um subespaço de $C^n(I)$. Este subespaço é designado por espaço solução da equação

Teorema: Solução que satisfaz $P y = 0$

$$y = \varphi(x) : D_x^i \varphi(x_0) = \alpha_i \\ x_0 \in I \wedge \alpha_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$$

Dado um x_0 no intervalo aberto I e constantes reais arbitrarias α , existe uma e só uma função que satisfaz $P y = 0$

Finidade da dimensão de $\text{nuc}(P)$

$$\dim(\text{nuc}(P)) = n \iff P = D_x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i D_x^i$$

m Sendo o espaço solução da equação $P y = 0$ ($\text{nuc}(P)$) um subespaço do espaço linear $C^n(I)$, Não limitado a ter dimenção infinita, a dimensão do nucleo de P deve ser n (limitado).

Solução trivial

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i \iff \\ \iff \sum_{i=0}^n \alpha_i y_i(x) = 0 : \{y\} \text{ é linearmente independente}$$

Sistema fundamental de soluções de $P y = 0$

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$$

- $\{y_i \forall i\}$ é um sistema fundamental de soluções de $P y = 0$
- $c_i \forall i$ são constantes arbitrárias que consituem a sua solução (ou integral) geral

Quaisquer n soluções linearmente independentes de $P y = 0$ que constituem uma base de $\text{nuc}(P)$

8 Abaixando a ordem de uma EDO

$$z(x) : y = \varphi(x) \int (z) \, dx;$$
$$P y = 0$$

- $\varphi(x)$ é uma solução particular da equação linear homogênea de ordem n
($P y = 0$)

Exemplo 13 Baixamento de grau de uma Eq lin homogenea

Determine a solução geral da equação

$$y'' + y'/x - y/x^2 = 0, \quad x > 0$$

Sabendo que $\varphi(x) = x$ é uma solução.

Resposta

Solução geral

$$y = \varphi(x) P_x(z) = x P_x(z) = \tag{1.36}$$

using (1.40)

$$= x P_x\left(\frac{c_3}{x^3}\right) = x c_3 \left(\frac{1}{2x^2} + c_4\right) = \frac{c_5}{x} + x c_6$$

Substitution $y \rightarrow z$

$$y'' + y'/x - y/x^2 = 0 \implies \tag{1.36} \tag{1.38} \tag{1.39}$$
$$\implies (2z + xz') + \frac{1}{x}(P_x(z) + xz) - \frac{1}{x^2}(x P_x(z)) =$$
$$= 2z + xz' + P_x(z)/x + z - P_x(z)/x = xz' + 3z = 0 \implies z' + \frac{3}{x}z = 0 \tag{1.37}$$

Finding $D_x y, D_x^2 y$

$$D_x y =$$

using (1.36)

$$= D_x \varphi(x) P_x(z) + \varphi(x) z = D_x \varphi(x) P_x(z) + \varphi(x) z = P_x(z) + xz; \tag{1.38}$$
$$D_x^2 y =$$

using (1.38)

$$= D_x(P_x(z) + xz) = 2z + xz' \tag{1.39}$$

Solving (1.37)

$$z = c_0 (\varphi_z(x))^{-1} = c_0 \left(\exp \left(\int (3/x) dx \right) \right)^{-1} = c_0 (e^{3(\ln(x)+c_1)})^{-1} = c_0 (c_2 x^3)^{-1} =$$
$$= \frac{c_3}{x^3} \tag{1.40}$$

9 Wronskiano: check dependencia linear

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) = \det(w); \quad w \in \mathcal{M}_{n,m} : w_{i,j} = D_x^j f_i$$

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) \begin{cases} = 0 & \text{Linear dependent} \\ \neq 0 & \text{Linear independent} \end{cases}$$

10 Método de variação das constantes arbitrárias para equação linear de ordem n

$$y : \begin{pmatrix} a_1(x) \\ +a_1(x) D_x \\ +a_2(x) D_x^2 \\ +a_3(x) D_x^3 \end{pmatrix} y = f(x)$$

$$y = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + c_3(x) y_3(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1'(x) D_x^0 y_1(x) + c_2'(x) D_x^0 y_2(x) + c_3'(x) D_x^0 y_3(x) = 0 \\ c_1'(x) D_x y_1(x) + c_2'(x) D_x y_2(x) + c_3'(x) D_x y_3(x) = 0 \\ c_1'(x) D_x^2 y_1(x) + c_2'(x) D_x^2 y_2(x) + c_3'(x) D_x^2 y_3(x) = \frac{f(x)}{a_3(x)} \end{array} \right\}$$

Exemplo 14 Metodo das var const arb

Considere a equação

$$y'' + 9 y = 1/\cos(3 x); \quad x \in]-\pi/6, \pi/6[$$

Utilizemos o método da variação das constantes arbitrárias para determinar o integral geral da equação completa

Resposta

Solução geral

$$y =$$

$$= c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) =$$

$$= (\cos(3 x)) (-\ln(\cos(3 x)) - c_3) + (\sin(3 x)) (x/3 + c_4)$$

Solução da equação homogenea análoga

Solução da equação homogenea análoga

$$y'' + 9 y = 0$$

General Solution

$$y = \varphi(x) \text{ P}_x(z) = \text{P}_x(z) =$$

$$= \text{P}_x(z)$$

Substitution $y \rightarrow z$

$$P(x) y =$$

$$= D_+^2 9(y) =$$

$$= 0$$

Finding $D_x y, D_x^2 y$

$$D_x y = D_x(\text{P}_x(z)) = D_x(\text{P}_x(z));$$

$$D_x^2 y =$$

$$= D_x(D_x y)$$

Solving (1.43)

$$z$$

$$\begin{cases} y_1 = \cos(3 x) \\ y_2 = \sin(3 x) \end{cases}$$

$$c_1(x) = \int c_1'(x) \, dx =$$

$$= \int \left(3 \frac{\sin(3 x)}{\cos(3 x)} \right) \, dx = - \int \frac{d \cos(3 x)}{\cos(3 x)} = -\ln(\cos(3 x)) - c_3;$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x) \, dx =$$

$$= \int (1/3) \, dx = x/3 + c_4$$

$$c_1'(x) = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{vmatrix} 0 & D_x^0 y_2 \\ \frac{1}{\cos(3 x)} & D_x y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 0 & \sin(3 x) \\ \frac{1}{\cos(3 x)} & 3 \cos(3 x) \end{vmatrix} = 3 \frac{\sin(3 x)}{\cos(3 x)}$$

$$c_2'(x) = \frac{1}{W(y_1, y_2)} \begin{vmatrix} D_x^0 y_1 & 0 \\ D_x y_1 & \frac{1}{\cos(3 x)} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \cos(3 x) & 0 \\ -3 \sin(3 x) & \frac{1}{\cos(3 x)} \end{vmatrix} = 1/3$$

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{bmatrix} D_x^0 y_1 & D_x^0 y_2 \\ D_x y_1 & D_x y_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} \cos(3 x) & \sin(3 x) \\ -3 \sin(3 x) & +3 \cos(3 x) \end{bmatrix} = 3 \cos^2(3 x) + 3 \sin^2(3 x) = 3$$

$$\begin{cases} c_1'(x) D_x^0 y_1(x) + c_2'(x) D_x^0 y_2(x) & = & 0 \\ c_1'(x) D_x y_1(x) + c_2'(x) D_x y_2(x) & = & \frac{1}{\cos(3 x)} \end{cases}$$

$$D_x y_1 = D_x \cos(3 x) = -3 \sin(3 x);$$

$$D_x y_2 = D_x \sin(3 x) = +3 \cos(3 x)$$