

# AM3C – Teste 2024.1 Resolução

Felipe B. Pinto 71951 – EQB

25 de dezembro de 2024

## Conteúdo

|                |           |          |                  |                  |           |
|----------------|-----------|----------|------------------|------------------|-----------|
| <b>Grupo I</b> | <b>–</b>  | <b>3</b> | <b>Questão 5</b> | <b>. . . . .</b> | <b>7</b>  |
| Questão 1      | . . . . . | 3        | <b>Grupo II</b>  | <b>–</b>         | <b>9</b>  |
| Questão 2      | . . . . . | 4        | <b>Grupo III</b> | <b>–</b>         | <b>12</b> |
| Questão 3      | . . . . . | 5        | <b>Grupo IV</b>  | <b>–</b>         | <b>15</b> |
| Questão 4      | . . . . . | 6        | <b>Grupo V</b>   | <b>–</b>         | <b>17</b> |

---

# Grupo I

---

# Questão 1

A equação diferencial linear de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} y = -x; \quad x \in ]0, \pi[$$

Tem como solução geral

$$\square y = \frac{c}{\cos x} + x \frac{\cos x}{\sin x} - 1 \quad \square y = \frac{c}{\sin x} - x \frac{\cos x}{\sin x} + 1 \quad \square y = \frac{c}{\sin x} + x \frac{\sin x}{\cos x} - 1$$

$$\square y = \frac{c}{\cos x} + x \frac{\sin x}{\cos x} - 1 \quad \square y = \frac{c}{\cos x} - x \frac{\cos x}{\sin x} + 1 \quad \square y = \frac{c}{\sin x} - x \frac{\cos x}{\sin x}$$

---

---

## Resposta

$$y = \frac{c_0}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int (-x) \varphi(x) \, dx =$$

Using (1.1)

$$= \frac{c_0}{C_2 \sin x} + \frac{1}{C_2 \sin x} \int (-x) C_2 \sin x \, dx =$$

Using (1.2)

$$= \frac{c_0}{C_2 \sin x} + \frac{1}{C_2 \sin x} C_2 (x \cos(x) - \sin x) = \frac{c_3}{\sin x} + x \frac{\cos x}{\sin x} - 1$$

$$\varphi(x) = \exp \left( \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx \right) = \exp \left( \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} \right) = \exp (\ln(\sin x) + C_1) = C_2 \sin x \quad (1.1)$$

$$P(-x C_2 \sin x) = C_2 P(x (-\sin x))$$

Using  $P(u v') = u v - P(u' v)$

$$= C_2 (x \cos(x) - P(\cos x)) = C_2 (x \cos(x) - \sin x) \quad (1.2)$$

# Questão 2

A solução da equação de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y}$$

que satisfaz a condição  $y(0) = 2$ , é:

- ☐  $y = \sqrt{e^{+2x} + 3}$
- ☐  $y = \sqrt{3e^{+2x} + 1}$
- ☐  $y = \sqrt{2e^{+2x} + 2}$
- ☐  $y = \sqrt{e^{-2x} + 3}$
- ☒  $y = \sqrt{3e^{-2x} + 1}$
- ☐  $y = \sqrt{2e^{-2x} + 2}$

---

---

## Resposta

$y = \sqrt{z} =$

(1.3)

Using (1.7)

$= \sqrt{c_6 e^{-2x} + 1} =$

(1.4)

Using (1.5)

$= \sqrt{3 e^{-2x} + 1}$

Using (1.4)

$y(0) = \sqrt{c_6 e^{-2 \cdot 0} + 1} = \sqrt{c_6 + 1} = 2 \implies c_6 = 3$

(1.5)

$y' + y = \frac{1}{y} \implies$

Using (1.3)

$\implies z' + 2z = 2$

(1.6)

## Solving $z$

Using (1.6)

$z = \frac{c_0}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int 2 \varphi(x) \, dx =$

Using (1.8)

$= \frac{c_0}{c_2 e^{2x}} + \frac{1}{c_2 e^{2x}} \int 2 c_2 e^{2x} \, dx = c_4 e^{-2x} + \frac{1}{c_2 e^{2x}} \int 2 c_2 e^{2x} \, dx =$

Using (1.9)

$= c_4 e^{-2x} + \frac{1}{c_2 e^{2x}} c_2 (e^{2x} + c_3) = c_4 e^{-2x} + 1 + c_5 e^{-2x} = c_6 e^{-2x} + 1$

(1.7)

$\varphi(x) = \exp \left( \int 2 \, dx \right) = \exp 2 (x + c_1) = c_2 e^{2x}$

(1.8)

$P(2 \varphi(x))$

Using (1.8)

$= P(2 c_2 e^{2x}) = c_2 (e^{2x} + c_3)$

(1.9)

## Questão 3

A equação diferencial

$$(5xy^2 - 2y) \, dx + (3x^2y - x) \, dy = 0$$

Admite um fator integrante na forma  $\phi(x, y) = x^m y^n$ , com  $m, n \in \mathbb{N}$ . Então:

☐  $m = 3, n = 2$

☐  $m = 2, n = 2$

☐  $m = 1, n = 3$

☐  $m = 1, n = 1$

☐  $m = 2, n = 1$

☐  $m = 3, n = 1$

---

---

Resposta

$$\mathbf{m = 3, n = 2}$$

---

---

Resposta

$$\begin{aligned} (5xy^2 - 2y) \, dx + (3x^2y - x) \, dy &= 0; \quad \varphi(x, y) = x^m y^n \implies \\ \implies (x^m y^n)(5xy^2 - 2y) \, dx + (x^m y^n)(3x^2y - x) \, dy &= 0 \implies \\ \implies \frac{\partial}{\partial y}(x^m y^n)(5xy^2 - 2y) &= (x^m y^{n-1} n)(5xy^2 - 2y) =''= \frac{\partial}{\partial x}(x^m y^n)(3x^2y - x) = \end{aligned}$$

## Questão 4

A equação diferencial linear homogénea

$$x y'' + x^2 y' + 4 y = 0, \quad x > 0$$

Tem como solução geral a função  $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ . Então a equação não homogénea

$$x y'' + x^2 y' + 4 y = x^3$$

admite como solução geral a função  $y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$ , onde as funções  $c_1(x), c_2(x)$  são determinadas a partir do sistema

|  |   |
|--|---|
| <input checked="" type="checkbox"/> $\begin{cases} c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = x^2 \end{cases}$ | <input type="checkbox"/> $\begin{cases} c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = x^2 \end{cases}$ |
| <input type="checkbox"/> $\begin{cases} c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = x \end{cases}$              | <input type="checkbox"/> $\begin{cases} c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = x \end{cases}$   |
| <input type="checkbox"/> $\begin{cases} c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = 1 \end{cases}$              | <input type="checkbox"/> $\begin{cases} c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' = 1 \end{cases}$   |

---

---

Resposta

$$y : \begin{pmatrix} 4 \\ +x^2 D_x \\ +x D_x^2 \end{pmatrix} y = x^3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1'(x) D_x^0 y_1(x) + c_2'(x) D_x^0 y_2(x) = 0 \\ c_1'(x) D_x y_1(x) + c_2'(x) D_x y_2(x) = \frac{x^3}{x} = x^2 \end{array} \right\}$$

## Questão 5

Acerca de uma função  $f(x)$  definida e com derivadas até à segunda ordem em  $\mathbb{R}_0^+$  sabe-se que admite transformada de Laplace  $F(s)$ , que  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = -2$ . Então a transformada de Laplace da função

$$e^{-t} f''(t) + t f'(t)$$

é:

$$\square (s+1)^2 F(s+1) - s + 2 + s F'(s)$$

$$\square s^2 F(s) - s + 1 + s F'(s) - F(s)$$

$$\square (s+1)^2 F(s+1) - s + 1 - s F'(s) - F(s) \quad \square s^2 F(s) - s + 1 + s F'(s+1) - F(s+1)$$

$$\square (s+1)^2 F(s+1) - s + 1 + s F'(s) + F(s) \quad \square s^2 F(s) - s + 1 + s F'(s+1) + F(s+1)$$

---

---

Resposta

$$(s+1)^2 F(s+1) - s + 1 - s F'(s) - F(s)$$

---

# Grupo II

---



Determine a solução geral da equação diferencial linear homogénea e de coeficientes constantes

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y = 0$$

---

---

Resposta

$$P y = (D_x^2 + D_x - 6) y = 0;$$

$$y = \varphi(x) \int z(x) dx = \varphi(x) \int z(x) dx;$$

$$P y = (D_x^2 + D_x - 6) \left( \varphi(x) \int z(x) dx \right) = 0;$$

$$D_x y = D_x \left( \varphi(x) \int z(x) dx \right);$$

$$D_x^2 y = D_x^2 \left( \varphi(x) \int z(x) dx \right)$$

## met ver const arb

Utilizando o método da variação das constantes arbitrárias, determine a solução geral da equação não homogênea

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y = -5e^{2x} \cos x$$

---

---

### Resposta

$$y : \begin{pmatrix} -6 \\ +1 \ D_x \\ +1 \ D_x^2 \end{pmatrix} y = (-5e^{2x} \cos(x))$$

$$y = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x);$$

$$c_1(x) = \int c'_1(x) \, dx;$$

$$c_2(x) = \int c'_2(x) \, dx$$

$$c'_1(x) = \frac{1}{W(y_1(x), y_2(x))} \begin{vmatrix} 0 & D_x^0 y_2(x) \\ -5e^{2x} \cos(x) & D_x y_2(x) \end{vmatrix}$$

$$c'_2(x) = \frac{1}{W(y_1(x), y_2(x))} \begin{vmatrix} D_x^0 y_1(x) & 0 \\ D_x y_1(x) & -5e^{2x} \cos(x) \end{vmatrix}$$

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \det \begin{bmatrix} D_x^0 y_1(x) & D_x^0 y_2(x) \\ D_x y_1(x) & D_x y_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} c'_1(x) D_x^0 y_1(x) + c'_2(x) D_x^0 y_2(x) & = & 0 \\ c'_1(x) D_x y_1(x) + c'_2(x) D_x y_2(x) & = & -5e^{2x} \cos(x) \end{array} \right\};$$

$$D_x y_1(x) = D_x y_1(x);$$

$$D_x y_2(x) = D_x y_2(x)$$

---

# Grupo III

---

Q1 a.

Determine todas as soluções da equação de Clairaut

$$y = x \frac{dy}{dx} - \left( \frac{dy}{dx} \right)^3$$

Q1 b.

Utilizando a mudança de variável definida por  $x = 1/t$ , resolva a equação

$$y = -x \frac{dy}{dx} + x^6 \left( \frac{dy}{dx} \right)^3, \quad x > 0$$

**Sug:** Após a mudança de variável utilize (Q1 a.).

---

# Grupo IV

---

Utilize a transformada de Laplace para resolver o problema de valores iniciais

$$y'' + y' + y \frac{5}{2} = \delta(t - 2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

**Sug:** tenha em conta que  $s^2 + s + 5/2 = (s + 1/2)^2 + 9/4$ .

---

Grupo V

---



Considere a equação diferencial linear de ordem  $n$  e coeficientes constantes

$$\left( D_x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k D_x^k \right) y = e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R} \quad (5.10)$$

Seja  $P(r) = r^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k$ . admitimos que  $r = \alpha$  é raiz da equação  $P(r) = 0$  com grau de multiplicidade um. Justifique  $P'(\alpha) = 0$ .

A equação (5.10) tem uma solução particular da forma

$$\bar{y} = \frac{c}{2P'(\alpha)} x e^{\alpha x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Sabendo que

$$D_x^k (x e^{\alpha x}) = k \alpha^{k-1} e^{\alpha x} + \alpha^k x e^{\alpha x}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad D_x^k = \frac{d^k}{dx^k}$$

Determine, justificando detalhadamente, o valor de  $c$ .