Resolução do 2º teste de Análise Matemática II-C (2020-21, 2º semestre)

Grupo I

1. O integral repetido

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Big(\int_{-x}^{x} xy\,dy\Big)dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\Big)dx,$$

utilizando a ordem de integração inversa da apresentada, pode ser calculado a partir de:

☐ $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \Big(\int_{-y}^{-\sqrt{1-y^2}} xy\,dx\Big)dy + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Big(\int_{y}^{\sqrt{1-y^2}} xy\,dx\Big)dy,$

☐ $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Big(\int_{y}^{\sqrt{1-y^2}} xy\,dx\Big)dy,$

☒ $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \Big(\int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy\,dx\Big)dy + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Big(\int_{y}^{\sqrt{1-y^2}} xy\,dx\Big)dy,$

☐ $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Big(\int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy\,dx\Big)dy,$

☐ $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Big(\int_{-y}^{-\sqrt{1-y^2}} xy\,dx\Big)dy.$

☐ $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \Big(\int_{-y}^{-\sqrt{1-y^2}} xy\,dx\Big)dy + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Big(\int_{y}^{-\sqrt{1-y^2}} xy\,dx\Big)dy.$

2. Utilizando coordenadas polares, o volume $Vol(D)$ de um domínio fechado D, limitado superiormente pela superfíce cónica $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ e inferiormente pela superfície cónica $z = \sqrt{x^2+y^2}$ pode ser calculado a partir dos seguintes integrais repetidos:

☒ $\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\rho}^{1-\rho} \rho\,dz\Big)d\rho\Big)d\theta,$

☐ $\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\rho}^{1-\rho} \rho\,(1-2\rho)dz\Big)d\rho\Big)d\theta,$

☐ $\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{1} \Big(\int_{1-\rho}^{\rho} \rho\,dz\Big)d\rho\Big)d\theta,$

☐ $\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{1} \Big(\int_{1-\rho}^{\rho} \rho\,(1-2\rho)dz\Big)d\rho\Big)d\theta,$

☐ $\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Big(\int_{\rho}^{1-\rho} \rho\,dz\Big)d\rho\Big)d\theta,$

☐ $\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Big(\int_{1-\rho}^{\rho} \rho\,(1-2\rho)dz\Big)d\rho\Big)d\theta.$

3. A função potencial $\varphi(x,y,z)$ do campo conservativo $\vec{u}(x,y,z) =$

$$(yze^{xyz} - 1)\vec{i} + (xze^{xyz} + ze^{yz})\vec{j} + (xyze^{xyz} + ye^{yz} - senz)\vec{k}$$

que no ponto $(2,1,0)$ toma o valor zero é:

☐ $\varphi(x,y,z) = yze^{xyz} + ze^{yz} - x + senz + 2,$
☐ $\varphi(x,y,z) = xye^{xyz} + ye^{yz} + senz - 2,$
☐ $\varphi(x,y,z) = xze^{xyz} + xe^{yz} - z - cosz - 1,$
☒ $\varphi(x,y,z) = e^{xyz} + e^{yz} - x + cosz - 1,$
☐ $\varphi(x,y,z) = e^{xyz} + e^{yz} + x - cosz - 3,$
☐ $\varphi(x,y,z) = e^{xyz} - e^{yz} - x + cosz + 1.$

4. A área da porção de superfície esférica $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, 1 \leq z \leq 2$, é

☐ 5π ☒ 6π ☐ 7π ☐ 8π ☐ 9π ☐ 10π

5. Considere a superfície de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \\ z = u + v \end{cases}$$

Equações paramétricas do plano tangente e da recta normal no ponto $(0,-2,0)$ correspondentes aos valores de $u = 1, v = -1$ são respetivamente:

☐ $\begin{cases} x = 2\alpha + 2\beta \\ y = -2\alpha + 2\beta,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R} \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$ $\begin{cases} x = -4\lambda \\ y = 2,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 8\lambda \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x = 2\alpha + 2\beta \\ y = -2 - 2\alpha + 2\beta,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R} \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 2,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 8\lambda \end{cases}$

☒ $\begin{cases} x = 2\alpha + 2\beta \\ y = -2 - 2\alpha + 2\beta,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R} \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$ $\begin{cases} x = -4\lambda \\ y = -2,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 8\lambda \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x = 2\alpha + 2\beta \\ y = -2\alpha + 2\beta,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R} \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -2,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 8\lambda \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = 2\alpha - 2\beta \\ y = 2 - 2\alpha + 2\beta,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R} \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$ $\begin{cases} x = -4\lambda \\ y = 2,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -8\lambda \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x = 2\alpha + 2\beta \\ y = 2 - 2\alpha + 2\beta,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R} \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -2,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 8\lambda \end{cases}$

6. Seja S a face exterior da superfcie total, que limita o domínio fechado limitado superiormente pela superfície esferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e inferiormente pelo plano $z = \frac{1}{2}$. O integral de superfície

$$\int\int_S (-x\vec{i} - y\vec{j}) \cdot \vec{n}dS$$

pode ser calculado a partir de um integral triplo que utilizando as coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = r\, senu\, cosv \\ y = r\, senu\, senv \\ z = r\, cosu \end{cases}$$

pode ser determinado a partir do seguinte integral repetido:

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\int_0^1 -2r^2 senu\, dr\right)du\right)dv,$ ☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_0^1 r^2 senu\, dr\right)du\right)dv,$

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_{\frac{1}{2cosu}}^1 r^2 senu\, dr\right)du\right)dv,$ ☒ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_{\frac{1}{2cosu}}^1 -2r^2 senu\, dr\right)du\right)dv,$

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\int_0^1 r^2 senu\, dr\right)du\right)dv,$ ☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\int_{\frac{1}{2cosu}}^1 -2r^2 senu\, dr\right)du\right)dv.$

Grupo II

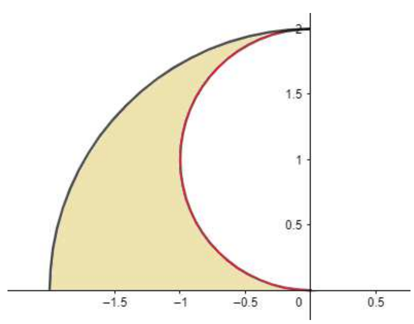
1. Considere a linha L, fronteira do conjunto

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x^2 + (y-1)^2 \geq 1 \wedge x \leq 0 \wedge y \geq 0\right\},$$

percorrida no sentido directo.
a) Parametrize o arco da linha L pertencente a circunferência de equação

$$x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Resposta: O conjunto em questão é representado pelo seguinte gráfico



e o arco da linha L pertencente à circunferência de equação $x^2 + (y-1)^2 = 1$, admite a parametrização

$$\begin{cases} x = cost, & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}, \\ y = 1 + sent \end{cases}$$

mas está a ser percorrida no sentido contrário ao pretendido. Já na parametrização

$$\begin{cases} x = sent, & \pi \leq t \leq 2\pi \\ y = 1 + cost \end{cases}$$

o arco pretendido está a ser percorrido no sentido indicado. $\square$

b) Calcule

$$\int_{L^+} xy\, dx - x^2 dy$$

a partir de um integral duplo e utilizando coordenadas polares.

Resposta: Sejam $\varphi(x, y) = xy$, $\psi(x, y) = -x^2$ e A o domínio limitado pela linha L. Tem-se que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x$ e $\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -2x$. A função φ é contínua e continuamente derivável em ordem a y e a função ψ é contínua e continuamente derivável em ordem a x. O domínio A é fechado, limitado e simplesmente conexo e a linha L é seccionalmente regular. Utilizando a fórmula de Riemann-Green tem-se que

$$\int_{L^+} xy\, dx - x^2 dy = \int\int_A \Big(\frac{\partial(-x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xy)}{\partial y}\Big) dxdy = \int\int_A (-3x)\, dxdy.$$

Considerando as coordenadas polares $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ no domínio em questão tem-se que $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ e $2sin\theta \leq \rho \leq 2$, $|J| = \rho$. Então

$$\int\int_A (-3x)\, dxdy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_{2sen\theta}^{2} (-3\rho\cos\theta)\, \rho d\rho = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\theta \Big[\rho^3\Big]_{2sin\theta}^{2} d\theta \qquad \square$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\theta(8 - 8sin^3\theta)2d\theta = -[8sin\theta - 2sin^4\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 6.$$

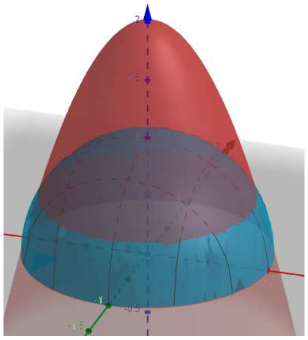
Grupo III

1. Considere o integral triplo

$$\int\int\int_D (x^2 + y^2) z\, dx\, dy\, dz$$

sendo D o domínio fechado limitado superiormente pela porção de superfície parabólica $z = 2 - 2(x^2 + y^2), 0 \leq z \leq 2$ e inferiormente pela semisuperfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$. Utilizando coordenadas cilíndricas indique o integral repetido que teria de calcular para calcular o valor do integral triplo considerado (**não calcule o integral repetido que indicou**).

Resposta: O domínio D, em questão, encontra-se representado a vermelho na seguinte figura:



Comecemos por determinar onde é que o parabolóide e a superfície esférica se intersectam. De $\begin{cases} z = 2 - 2(x^2+y^2) \\ (x^2+y^2)+z^2 = 1 \end{cases}$ vem $z = 2 - 2(1-z^2)$ donde $z = 0 \vee z = \frac{1}{2}$.
O domínio considerado corresponde à variação de $\frac{1}{2} \leq z \leq 2$. Quando $z = \frac{1}{2}$ tem-se que $x^2+y^2 = \frac{3}{4}$. A projecção no plano XOY do domínio D é um círculo limitado pela circunferência $x^2+y^2 = \frac{3}{4}$.
Em coordenadas cilíndricas a equação do parabolóide considerado é $z = 2 - 2\rho^2$ e a da semisuperfície esférica é $z = \sqrt{1-\rho^2}$. Então

$$D \equiv \begin{cases} x = \rho\, cos\theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = \rho sin\theta, & 0 \leq \rho \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z = z, & \sqrt{1-\rho^2} \leq z \leq 2 - 2\rho^2. \end{cases}$$

Tendo em conta que $(x^2+y^2)z = \rho^2 z$ e que $|J| = \rho$ o integral repetido pedido é

$$\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big(\int_{\sqrt{1-\rho^2}}^{2-2\rho^2} \rho^3 z\, dz \Big) d\rho \Big) d\theta. \qquad \square$$

2. Seja S a porção da superfície esférica $x^2+y^2+z^2 = 4$ com $-2 \leq z \leq -1$. Determine equações paramétricas de S. O integral de superfície

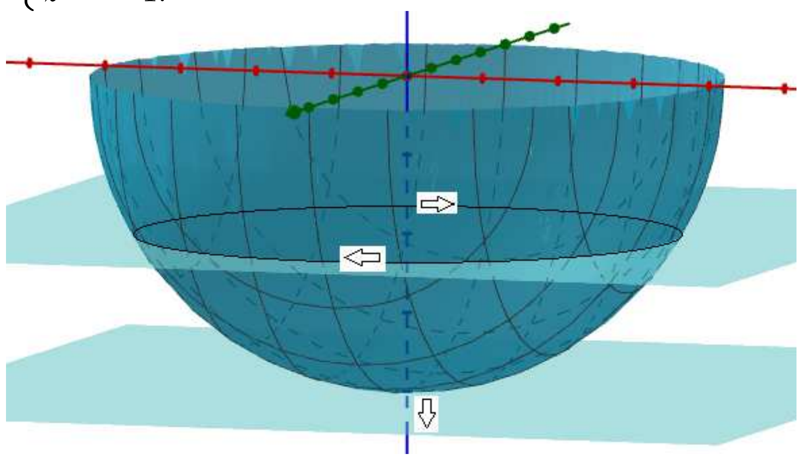
$$\int\int_S \nabla \times (x\vec{j} - y^4\vec{k}) \cdot \vec{n}\, dS$$

na face "exterior"de S pode ser calculado a partir de um integral curvilíneo. Escreva, detalhadamente, o integral curvilíneo que permite calcular o integral de superfície considerado (**não calcule o integral curvilíneo que escreveu**).

Resposta: A superfície admite as seguintes equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 2senu\,cosv\,, & 0 \leq v \leq 2\pi \\ y = 2senusenv, & \frac{2\pi}{3} \leq u \leq \pi \\ z = 2cosu, & \end{cases}$$

que resultaram de se fixar nas coordenadas esféricas $r = 2$. O ângulo $u = \frac{2\pi}{3}$ foi obtido fazendo na terceira equação $z = -1$.
A equação da fronteira da superfície considerada obtém-se fazendo $z = -1$ na equação da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, obtendo-se a circunferência de equação $L \equiv \begin{cases} x^2+y^2 = 3 \\ z = -1. \end{cases}$



Uma parametrização de L é dada por $\begin{cases} x = \sqrt{3}\,cost \\ y = \sqrt{3}\,sent, & 0 \leq t \leq 2\pi, \\ z = -1 \end{cases}$ mas percorrida no sentido contrário ao estabelecido pelo teorema de Stokes. Então, pelo teorema de Stokes, tem-se que

$$\int\int_S \nabla \times (x\vec{j} - y^4\vec{k}) \cdot \vec{n}\, dS = -\int_L (x\vec{j} - y^4\vec{k})dL = -\int_L xdy - y^4dz,$$

que se simplifica para

$$-\int_0^{2\pi} (\sqrt{3}\,cost(\sqrt{3}\,cost) - (\sqrt{3}\,sent)^4 0)\, dt = -3\int_0^{2\pi} cos^2t\, dt. \qquad \square$$

Grupo IV

1. Seja $\vec{u}(x, y, z) = u_1(x, y, z)\vec{i} + u_2(x, y, z)\vec{j} + u_3(x, y, z)\vec{k}$ um campo vectorial definido em $D \subset \mathbb{R}^3$. Quando se diz que $\vec{u}(x, y, z)$ é conservativo? Indique uma condição necessária e suficiente para que $\vec{u}(x, y, z)$ seja conservativo.

Resposta: Um campo vectorial $\vec{u}(x,y,z)$ diz-se conservativo se existir uma função $\phi(x,y,z)$ tal que

$$\nabla\phi = \vec{u}(x,y,z), \text{ isto é, } \frac{\partial\phi}{\partial x} = u_1, \frac{\partial\phi}{\partial y} = u_2, \frac{\partial\phi}{\partial z} = u_3.$$

Uma condição necessária e suficiente para que $\vec{u}(x,y,z)$ seja conservativo em D é que D seja um conjunto aberto, simplesmente conexo e que nesse conjunto se tenha $rot\vec{u} = \vec{0}$. □

2. Sejam $f(x,y)$ e $g(x,y)$ duas funções reais de variáveis reais continuamente derivaveis em $\mathbb{R}^2$ e sejam

$$\vec{u}(x,y) = g(x,y)\vec{i} + f(x,y)\vec{j} \text{ e } \vec{v}(x,y) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\vec{i} + \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\Big)\vec{j}.$$

Seja D o círculo centrado na origem e de raio um. Sabendo que na fronteira de D se tem que $f(x,y) = x$ e $g(x,y) = c, c \in \mathbb{R}$ determine o valor de c sabendo que

$$\int\int_D \vec{u}\cdot\vec{v}\,dxdy = 1.$$

Resposta: Tem-se que

$$\begin{aligned}
\int\int_D \vec{u}\cdot\vec{v}\,dxdy &= \int\int_D (g\,\vec{i} + f\vec{j}\,)\cdot\Big(\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big)\vec{i} + \Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\Big)\vec{j}\Big)dxdy \\
&= \int\int_D \Big(g\Big(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\Big) + f\Big(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\Big)\Big)dxdy \\
&= \int\int_D \Big(g\,\frac{\partial f}{\partial x} + f\,\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}g - f\frac{\partial g}{\partial y}\Big)dxdy \\
&= \int\int_D \Big(\frac{\partial(fg)}{\partial x} - \frac{\partial(fg)}{\partial y}\Big)dxdy.
\end{aligned}$$

Aplicando a fórmula de Riemann-Green este integral é igual a

$$\int_L (fg)dx + (fg)dy,$$

onde L é a fronteira de D. Por hipótese tem-se que $f(x,y) = x$ e $g(x,y) = c$ em L donde

$$\int_L (fg)dx + (fg)dy = \int_L cx\,dx + cx\,dy.$$

Tendo em conta que D é o círculo centrado na origem e de raio 1, L é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1, percorrida no sentido directo. Uma sua parametrização é

$$\begin{cases} x = \cos\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi. \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_L cx\,dx + cx\,dy &= \int_0^{2\pi} (c\cos\theta\,(-sen\theta) + c\cos\theta\cos\theta)d\theta \\
&= -c\int_0^{2\pi} \cos\theta\,sen\theta\,d\theta + c\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \\
&= -c[sen^2\theta]_0^{2\pi} + c\left[\frac{\theta}{2} + \frac{sen(2\theta)}{4}\right]_0^{2\pi} = c\pi.
\end{aligned}$$

Como, por hipótese, se tem $\int\int_D \vec{u} \cdot \vec{v}\,dxdy = 1$, vem que $c = \dfrac{1}{\pi}$. $\square$