ALGA - Slides Anotações

Felipe B. Pinto 61387 - MIEQB

4 de fevereiro de 2022

Conteúdo

Slide 1 Matrizes	3	9 Núcleo	10
Slide 2 Sistema de Equa- ções Lineares	4	Slide 6 Valores e Vetores Próprios	11
Slide 3 Determinantes	5	1 Endomorfismo	11
Slide 4 Espaços Vetoriais 1 Sequencia Geradora	6	Slide 7 Produto Interno, Externo e Misto	12
2 Base	6	1 Produto Interno	12
Slide 5 Aplicações Linea-		2 Norma	12
res	7	3 Angulo dentre vetores	13
1 Extenção das condições .	7	Exemplo 1	14
2 Categorização	7	Exemplo 2	14
3 Inclusão do termo nulo	8	Exemplo 3	16
Exemplo 1	9	Proposição 1	16
4 Aplicação Soma	9	Exemplo $4 \dots \dots$	17
5 Aplicação Produto	9	4 Processo de Ortogonaliza-	
6 Aplicação Composta	10	ção de Gram-Schmidt	17
7 Potencia de Expoente k .	10	Exemplo $5 \dots \dots$	18
8 Imagem	10	Exemplo 6	18

5 Complemento Ortogonal .	18	Slide 8 Reta e Plano	21
Proposição 2	19	ullet Elementos	21
Exemplo 7	19	1 Espaço	21
Proposição 3	19	2 Reta	22
Exemplo 8	20	3 Plano	23
Proposição 4	20	• Distâncias	25
Proposição 5	20	4 Distancia dentre 2 espaços	25
6 Projeção Ortogonal	20	Exemplo 1	26

Slide 1 – Matrizes

Slide 2 – Sistema de Equações Lineares

Slide 3 – Determinantes

Slide 4 – Espaços Vetoriais

1 Sequencia Geradora

$$U ext{ gera } F \implies F = \langle U
angle$$

2 Base

$$U$$
 base de $F \implies \nexists u_i : u_i = U \, lpha \wedge lpha
eq I^i$

Slide 5 – Aplicações Lineares

 $f: E \to E'$ é aplicação linear (sobre \mathbb{K}) \iff

$$\iff egin{cases} f(u+v) = f(u) + f(v) \ f(lpha\,u) = lpha\,f(u) \end{cases} egin{cases} orall\,\{u,v\} \in E \ orall\,lpha \in \mathbb{K} \end{cases}$$

1 Extenção das condições

$$f(lpha\,u+eta\,v)=lpha\,f(u)+eta\,f(v) \quad egin{cases} orall\,\{lpha,eta\}\in\mathbb{K}\ orall\,\{u,v\}\in E \end{cases}$$

2 Categorização

Homotetia

$$f:egin{cases} E o E' & orall w \in E \ f(w) = eta w & orall eta \in \mathbb{K} \end{cases}$$

fé uma aplicação homotetia de razão β

Aplicação Nula

$$f:egin{cases} E o E\ f(u)=0_E \end{cases} \quad orall u\in E$$

Uma aplicação homotetia de razão 0

Aplicação Identidade

$$\mathrm{id}_E\coloneqq f:egin{cases} E o E\ f(u)=u \end{cases} \quad orall\, u\in E$$

Derivada

$$D\coloneqq f:egin{cases} \mathbb{R}_n[x] o\mathbb{R}_n[x]\ D\left(\sum_{k=0}^n a_k\,x^k
ight)=\sum_{k=1}^n k\,a_k\,x^{k-1} \end{cases}$$

3 Inclusão do termo nulo

$$f(0_E) = 0_{E'}$$

$$f(u) + 0_{E'} = f(u) = f(u + 0_E) = f(u) + f(0_E) \implies 0_{E'} = f(0_E)$$

$$f(-u) = -f(u) \quad orall \, u \in E$$

$$\implies 0_{E'} = f(u) - f(u) = f(u) + f(-u) = f(u + (-u)) = f(0_E)$$

Operações com aplicações

4 Aplicação Soma

$$f+g: egin{cases} E
ightarrow E' \ (f+g)(u) = f(u) + g(u) \end{cases} egin{array}{ccc} orall \, f: E
ightarrow E' \ orall \, g: E
ightarrow E' \ orall \, u \in E \end{cases}$$

5 Aplicação Produto

$$lpha\,f:egin{cases} E o E' & orall\, f:E o E' \ (lpha\,f)(u)=lpha\,f(u) & orall\, u\in E \end{cases}$$

6 Aplicação Composta

$$g\circ f: egin{cases} A o C &orall f:A o B\ (g\circ f)(a)=g(f(a)) &orall g:B o C \ orall a\in A \end{cases}$$

obs: Tambem designada por "g após f"

7 Potencia de Expoente k

$$f^k: egin{cases} A
ightarrow A \ f^k : egin{cases} \operatorname{id}_A & : k = 0 \ f^{k-1} \circ f & : k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

8 Imagem

$$\operatorname{Im} F = \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$$

9 Núcleo

$$\operatorname{Nuc} f = \operatorname{Ker} f = \{i \in E : f(u) = 0_{E'}\}\$$

Nuc $f \neq \emptyset$

$$f(0_E) = 0'_E \implies 0_E \in \operatorname{Nuc} f$$

Slide 6 – Valores e Vetores Próprios

1 Endomorfismo

Seja E um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Chamamos endomorfismo de E a qualquer aplicação linear de E em E.

Slide 7 – Produto Interno, Externo e Misto

1 Produto Interno

$$a|b=\sum_{k=1}^n a_1\,b_1=a\,b$$

Propriedades

- \bullet a|b=b|a
- $\bullet \quad (a+b)|c=a|c+b|c$
- $a|a=0 \iff a=0_{\mathbb{R}^n}$
- $\bullet \quad (\alpha a)|b = \alpha(a|b)$
- $\bullet \quad a|a \ge 0$

2 Norma

$$\|u\| = \sqrt{u|u}$$

Propriedades

- $\bullet \quad \|u\| \ge 0$
- $||\alpha u|| = |\alpha|||u||$
- $\bullet \quad ||u|| = 0 \iff u = 0_{\mathbb{R}^n}$

(i) Vetor unitário (versor)

$$\hat{u}=u/\|u\|$$

- (ii) Desigualdade de Schwarz
- (iii) Desigualdede triangular

$$|u|v| \leq \|u\| \|v\|$$

$$||u+v|| \le ||u|| + ||v||$$

3 Angulo dentre vetores

$$\measuredangle(u,v) = rccosrac{u|v}{\|u\|\,\|v\|}$$

Demonstração

$$\begin{aligned} |u|v| &\leq \|u\| \, \|v\| : u \neq 0_{\mathbb{R}^n} \neq v \implies \frac{|u|v|}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1 \implies \\ & \Longrightarrow -1 \leq \frac{u|v|}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1 \implies \cos \angle(u,v) = \frac{u|v|}{\|u\| \, \|v\|} \implies \\ & \Longrightarrow \angle(u,v) = \arccos \frac{u|v|}{\|u\| \, \|v\|} \end{aligned}$$

Propriedades

$$ullet$$
 $\angle(u,v)=\angle(v,u)$

$$ullet$$
 $\angle(u,v)=\angle(v,u)$ $ullet$ $u|v=\|u\|\|v\|\angle(u,v)$

$$\measuredangle((1,0,0),(0,0,1))$$

$$=\arccos\frac{(1,0,0)|(0,0,1)}{\|(1,0,0)\|\|(0,0,1)\|}=\arccos(0)=\pi/2$$

Exemplo 2

$$\measuredangle(u,v):\{u,v\}\subset\mathbb{R}^3ackslash\{0\}\land u=lpha\,v:lpha\in\mathbb{R}^3$$

$$\angle(u,v) = \arccos \frac{u|v|}{\|u\|\|v\|} = \arccos \frac{\alpha v|v|}{\|\alpha v\|\|v\|} = \arccos \frac{\alpha}{|\alpha|} \frac{v|v|}{\|v\|^2} = \arccos \pm 1 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

3.1 Ortogonalidade

$$\angle(u,v)=0\iff u|v=0$$

(i) Proprieades

$$\angle(u,v) = 0 \iff \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

(ii) Sequencia Ortogonal

$$u \subset \mathbb{R}^n: u_i | u_j = 0 \quad orall \, i
eq j$$

(iii) Sequencia Ortonormada

$$u \subset \mathbb{R}^n: u_i | u_j = egin{cases} 0: & i
eq j \ 1: & i = j \end{cases}$$

(iv) Base ortonormada

$$egin{cases} u|v=\sum_{i=1}^nlpha_ieta_i\ \|u\|=\sqrt{\sum_{i=1}^nlpha_i^2}\ lpha_i=u|e_i\ orall i\ \iff u=\sum_{i=1}^n(u|e_i)\,e_i \end{cases} : egin{cases} u=e\,lpha\ \land v=e\,lpha\ \land v=e\,eta\ \land e\ ext{base ortonormada}\ \land e\subset\mathbb{R}^n \end{cases}$$

Determinar a sequencia de coodenadas do vetor v na base \mathcal{B}

$$v=(a,b,c) \ \mathcal{B}=\left(rac{(2,1,0)}{\sqrt{5}},rac{(-1,2,0)}{\sqrt{5}},(0,0,1)
ight)$$

$$\begin{cases}
b_1|b_1 = 4/5 + 1/5 = 1 \\
b_2|b_2 = 1/5 + 4/5 = 1 \\
b_3|b_3 = 1 \\
b_1|b_2 = -2/5 + 2/5 = 0 \\
b_1|b_3 = 0 \\
b_2|b_3 = 0
\end{cases}; (v|b_1, v|b_2, v|b_3) = \left(\frac{2a+b}{\sqrt{5}}, \frac{2b-a}{\sqrt{5}}, c\right)$$

Proposição 1

$$egin{cases} u ext{ \'e seq. orto.} & \land \ \land u_i
eq 0 & orall i \end{cases} = egin{cases} u_i | u_j = 0 & orall i
eq j & \land \ \land u_i
eq 0 & orall i \end{cases} \implies \ igotimes \left\{ egin{cases} u ext{ \'e l.i.} & \land \ \land \#u \leq n \end{array}
ight\} = \ = \left\{ egin{cases} rac{\# lpha \in \mathbb{R}^n ackslash \{I_i\} : u_i = lpha u & orall i & \land \ \land \#u \leq n \end{array}
ight\} : \ \left\{ egin{cases} u \in \mathbb{R}^n & \land \ \land u_i
eq 0_{\mathbb{R}^n} & orall i \end{cases}
ight\}$$

encontre uma base ortornomada para \mathbb{R}^3 usando u

$$u = ((2, 1, 0), (-2, 4, 0), (0, 0, 2))$$

$$\begin{cases}
 u_1 | u_2 = -4 + 4 = 0 & \wedge \\
 \wedge u_1 | u_3 = 0 & \wedge \\
 \wedge u_2 | u_3 = 0
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
 u \notin \text{l.i.} & \wedge \\
 \wedge \# u = 3 = \dim \mathbb{R}^3
\end{cases}
\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{u_1}{\|u_1\|} \right), \left(\frac{u_2}{\|u_2\|} \right), \left(\frac{u_3}{\|u_3\|} \right) \right) = \left(\left(\frac{u_1}{\sqrt{5}} \right), \left(\frac{u_2}{\sqrt{20}} \right), \left(\frac{u_3}{2} \right) \right)$$

4 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

$$egin{dcases} v_i = u_i - \sum_{j=2}^i rac{u_i |v_j|}{\|v_j\|^2} \, v_j & \wedge \ \wedge \, u \, \, \mathrm{\acute{e}} \, \, \mathrm{base} \, \, \mathrm{de} \, \, \mathbb{R}^n \ \end{cases} \implies v \, \, \mathrm{\acute{e}} \, \, \mathrm{base} \, \, \mathrm{ortog.} \, \, \mathrm{de} \, \, \mathbb{R}^n$$

Objetivo: Processo para encontrar uma base ortogonal a partir de uma base arbritraria de qualquer subespaço não nulo de \mathbb{R}^n

Encontre a base ortogonal para o subespaço $F \subset \mathbb{R}^n$ a partir de u

$$u = ig((1,1,1),(1,3,2)ig)$$

$$v = \left((1,1,1), (1,3,2) - \frac{(1,3,2)|(1,1,1)|}{\|(1,1,1)\|} (1,1,1) \right) =$$

$$= \left((1,1,1), (1,3,2) - \frac{6}{\sqrt{3}^2} (1,1,1) \right) = \left((1,1,1), (-1,1,0) \right)$$

Exemplo 6

Encontre uma base ortogonal para \mathbb{R}^3 usando a base do exemplo anterior

$$\begin{split} v &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{(0,0,1)|(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{(0,0,1)|(-1,1,0)}{\|(-1,1,0)\|} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{\|(-1,1,0)\|} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \left((1,1,1), (-1,1,0), (-1/3,-1/3,2/3) \right) \end{split}$$

5 Complemento Ortogonal

$$F^{\perp} = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 : u | v = 0 \quad orall \, v \in F
ight\}$$

Proposição 2

 \overline{F} subespaço de $\mathbb{R}^n \implies F^\perp$ sybespaço de \mathbb{R}^n

Exemplo 7

(i)

$$F^{\perp}:F=\{(0,0,0)\}$$

$$u|(0,0,0) = 0 \quad \forall u \implies$$

 $\Longrightarrow F^{\perp} = \mathbb{R}^3$

(ii)

$$F^{\perp}:F=\mathbb{R}^3$$

$$u|v=0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow$$

 $\Longrightarrow F^{\perp} = \{(0,0,0)\}$

(iii)

$$F^{\perp}: \ F = egin{cases} (x,y,z) \in \mathbb{R}^3: \ x-2\,y+3\,z=0 \end{cases}$$

$$u|(x,y,z) = 0 = x - 2y + 3z \implies$$

$$\Longrightarrow F^{\perp} = \{(1,-2,3)\}$$

Proposição 3

$$w|u_i=0 \;\;\; orall \, i \implies w \in \langle u
angle^\perp : \left\{ w \in \mathbb{R}^n u \subset \mathbb{R}^n
ight.$$

$$F^{\perp}: F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: x-2\,y+3\,z=0\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\} = \{(2y - 3z, y, z) : \{y, z\} \subset \mathbb{R}\} = \{(2, 1, 0), (-3, 0, 1) \implies$$

$$\implies F^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) | (2, 1, 0) = 0 \land (x, y, z) | (-3, 0, 1) = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -2x \land z = 3x\} = \langle (1, -2, 3) \rangle$$

Proposição 4

$$F \oplus F^{\perp} = \mathbb{R}^3 \wedge \dim \mathbb{R}^3 = \dim F + \dim F^{\perp}$$

Proposição 5

$$F^{\perp} = \mathcal{L}(A):$$

F subespaço de \mathbb{R}^n das soluções de equações lineares homogêneo AX=0

6 Projeção Ortogonal

$$u = \operatorname{Proj}_F u + \operatorname{Proj}_{F^\perp} u : egin{cases} \operatorname{Proj}_F \ (u) \in F \ \operatorname{Proj}_{F^\perp}(u) \in F^\perp \end{cases}$$

Slide 8 – Reta e Plano

Elementos

1 Espaço

Equação vetorial

$$\mathcal{E}sp_m \subset \mathbb{R}^n: egin{bmatrix} P = A + \sum_{i=1}^m \lambda_i \, U_i & \wedge \ & \wedge \{P,A\} \subset \mathcal{E}sp_m & \wedge \ & \wedge \{i,n,m\} \subset \mathbb{N} & \wedge \ & \wedge m \leq n & \wedge \ & \wedge \{\lambda,U_i\} \subset \mathbb{R}^n \end{pmatrix}$$

Equações paramétricas

$$P_i = A_i + \sum_{j=1}^m \lambda_{j,i} \, U_{j,i}$$

Exemplos

• $m = 0 \implies \text{ponto}$

• $m=2 \implies \text{plano}$

• $m = 1 \implies \text{reta}$

2 Reta

Equação vetorial

$$\mathcal{R}eta_m \subset \mathcal{E}sp_m: egin{cases} P = A + \lambda\, U & \wedge \ \wedge \left\{ P, A
ight\} \in \mathcal{R}eta_m \end{cases}$$

Definem uma reta:

• 2 Pontos

• 1 Ponto e 1 vetor

Vetor diretor: Vetor não nulo parapelo a reta

Equações cartezianas

(i) Equações paramétricas

$$P_i = A_i + \lambda \, U_i \quad orall \, i \leq n$$

(ii) Equações normais

$$egin{aligned} P_i &= A_i + \lambda \, U_i & \wedge \ \wedge \, P_j &= A_j + \lambda \, U_j & \end{pmatrix} \Longrightarrow \ & \Longrightarrow \ \lambda &= rac{P_i - A_i}{U_i} = rac{P_j - A_j}{U_j} \left\{ egin{aligned} \{i,j\} \leq n & \wedge \ \{U_i,U_j\}
eq 0 \end{aligned}
ight.$$

(iii) Equações reduzidas

$$P_i = A_i' + P_j\,U_i': egin{cases} \{i,j\} \subset \mathbb{N} & \wedge \ \wedge \, \{i,j\} \leq n & \wedge \ \wedge \, i
eq j & \wedge \ \wedge \, U_i' = U_i/U_j & \wedge \ \wedge \, A_i' = A_i - A_j\,U_i' & \wedge \ \wedge \, U_j
eq 0 \end{cases}$$

$$P_{i} = A_{i} + \lambda U_{i} \qquad \land$$

$$\land \lambda = (P_{j} - A_{j})/U_{j} : U_{j} \neq 0$$

$$\Longrightarrow P_{i} = A_{i} + U_{i} (P_{j} - A_{j})/U_{j} =$$

$$= A'_{i} + U'_{i} P_{j} : \begin{cases} U'_{i} = U_{i}/U_{j} & \land \\ \land A'_{i} = A_{i} - A_{j} U'_{i} & \land \\ \land U_{j} \neq 0 \end{cases}$$

Reduzida pois possui uma equação a menos comparando com as equações cartezianas

3 Plano

Equação vetorial

$$\mathcal{P}lano_m \subset \mathcal{E}sp_m:ig\{\{P,A\}\subset \mathcal{P}lano_m \wedge n \geq 2 \ ig\}$$

Definição 1 ponto e 2 vetores não paralelos

$$P = A + \sum_{j=1}^2 \lambda_j \, U_j$$

Definição 1 ponto e 1 vetor perpendicular ao plano

$$egin{aligned} \overrightarrow{AP}|(\lambda_1 imes \lambda_2) &= |P-A, \lambda_1, \lambda_2| = \overrightarrow{AP}|\lambda' = \ &= A\,\lambda' + d = 0 \ \left\{ egin{aligned} d \in \mathbb{R} & \land \ \land \lambda' \in \mathbb{R}^n : \lambda' \perp \mathcal{P}lano \end{aligned}
ight. \end{aligned}$$

Definem um plano:

• 3 Pontos

- 1 Ponto e 1 Vetor
- 1 Ponto e 2 vetores não paralelos

Vetores diretores: Vetores não nulos e não colineares paralelos ao plano.

Equações cartesianas

(i) Equações paramétricas

$$P_i = A_i + \sum_{j=1}^2 \lambda_{j,i} \, U_{j,i}$$

(ii) Equação geral

$$A + \sum_{i=1}^n \lambda_i \, P_i = 0 : \left\{ egin{array}{cc} A \in \mathbb{R} & \wedge \ \wedge \, \lambda \in \mathbb{R}^n \end{array}
ight.$$

Distâncias

4 Distancia dentre 2 espaços

$$\mathrm{d}(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2) = \min(||\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2}||): egin{cases} \mathcal{E}_1 \in \mathcal{E}sp_m & \wedge \ \wedge \, \mathcal{E}_2 \in \mathcal{E}sp_n & \wedge \ \wedge \, e_1 \in \mathcal{E}_1 & \wedge \ \wedge \, e_2 \in \mathcal{E}_2 & \end{pmatrix}$$

4.1 Distancia entre 1 Ponto e 1 Reta

$$egin{aligned} \operatorname{d}(P,\mathcal{R}eta) &= \left\|\overrightarrow{AP}
ight\|\sin(heta) = \left\|\overrightarrow{AP}
ight\|\|u\|\sin heta/\|u\| = \ &= \left\|\overrightarrow{AP} imes u
ight\|/\|u\| : heta = \measuredangle\Big(u,\overrightarrow{AP}\Big) \end{aligned}$$

4.2 Distancia dentre 1 ponto e 1 plano

$$egin{aligned} \operatorname{d}(P, \mathcal{P}lano) &= \left\| \overrightarrow{AP}
ight\| |\cos(heta)| = \left\| \overrightarrow{AP}
ight\| \|w\| |\cos(heta)| / \|w\| = \ &= \left| \overrightarrow{AP} |w| / \|w\| \end{aligned}$$

Conclua que Reta é extritamente paralela ao Plano

$$\mathcal{R}eta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2 \land 2\,y - 6 = z\} \ \{(1,0,-1),(2,2,0),(1,1,1)\} \subset \mathcal{P}lano$$

(i)

$$\mathcal{R}eta \| \mathcal{P}lano \implies u | v = 0 : \begin{cases} u \in \mathcal{R}eta & \land \\ \land v \in \mathcal{P}lano \end{cases} \implies$$

$$\implies \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \right) \left| \left(\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \times \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \right) =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right) \left| \left(\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \right) =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right) \left| \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= -6 + 6 = 0$$

(ii)

 $\mathcal{R}eta \nsubseteq \mathcal{P}lano \implies \nexists p : p \in \mathcal{R}eta \land p \in \mathcal{P}lano \implies$