# ANÁLISE MATEMÁTICA III C

**2ªsemana de aulas**

NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY


**Cláudio Fernandes**

caf@fct.unl.pt


Slides para acompanhamento das aulas TP1 e TP4

O material completo do Prof. João de Deus Marques encontra-se no CLIP, na página da UC

# A equação de Bernoulli e a equação de Riccati

Iremos em seguida considerar dois tipos de equações não lineares que, após mudanças de variável apropriadas, se transformam em equações lineares:

*A equação de Bernoulli*

e a

*Equação de Riccati.*

# A equação de Bernoulli

Chama-se *equação de Bernoulli* a uma equação que se possa escrever na forma

$$y' + p(x)\, y = q(x) y^k,$$

em que $p(x)$ e $q(x)$ são contínuas em algum intervalo aberto e $k \in \mathbb{R}$. Vamos supor $k \neq 0$ e $k \neq 1$ uma vez que nestes casos a equação é linear.

Multiplicando a equação por $y^{-k}$ obtém-se:

$$y' y^{-k} + p(x) y^{1-k} = q(x).$$

Z

(mudança de variável)

Efetuando a mudança de variável

$$y(x) \longrightarrow z(x)$$

definida por

$$z = y^{1-k},$$

tem-se que

$$z' = (1-k)y^{-k}y',$$

e a equação de Bernoulli dá lugar à equação linear (na função incógnita $z$)

$$z' + (1-k)p(x)\,z = (1-k)q(x).$$

Determinado o integral geral desta equação o integral geral da equação de Bernoulli obtém-se repondo a função incógnita inicial $y$.

## Exemplo

*Considere-se o problema de valores iniciais (PVI)*

$$y' - xy = xy^3, \;\; y(0) = 1.$$

*Efetuando a mudança de variável* $z = y^{-2}$, *obtém-se a equação linear*

$$z' + 2xz = -2x$$

*que tem como solução geral*

$$z = ce^{-x^2} - 1.$$

*Voltando à função inicial e impondo a condição* $y(0) = 1$, *obtém-se como solução do PVI*

$$y = \frac{1}{\sqrt{2e^{-x^2} - 1}}, \quad x \in \left] -\sqrt{\log 2}, \sqrt{\log 2} \right[.$$

## Exemplo

*Suponhamos que numa comunidade constituída por* $N$ *indivíduos*

$$y(t) \longrightarrow \text{ representa o número de infectados pelo vírus da gripe } A$$

$$x(t) = N - y(t) \longrightarrow \text{ representa a população não infectada.}$$

*Considere-se que o vírus se propaga pelo contacto entre infectados e não infectados e que a propagação é proporcional ao número de contactos entre estes dois grupos. Suponhamos também que os elementos dos dois grupos se relacionam livremente entre si de modo que o número de contactos entre infectados e não infectados é proporcional ao produto de* $x(t)$ *por* $y(t)$ *isto é*

$$kx(t)y(t) = k(N - y(t))y(t)$$

*em que* $k$ *é a constante de proporcionalidade.*

## Exemplo (continuação)

*Se $y_0$ é o número inicial de infectados, o número de infectados $y(t)$ no instante $t$ é a solução do PVI*

$$y' = k(N - y)y, \quad k > 0, \quad y(0) = y_0.$$

*Trata-se de uma equação de Bernoulli com uma condição inicial cuja solução é*

$$y(t) = \frac{Ny_0}{(N - y_0)e^{-kNt} + y_0}.$$

# Exemplo (continuação)

*Suponhamos, por exemplo, que a população é constituída por cem individuos com dois inicialmente infectados e que t é medido em dias. Considerando a constante de proporcionalidade* $k = (6 \times 10^2)^{-1}$ *determine-se ao fim de quantos dias metade da população estará infectada. Para os valores considerados, o valor de t pretendido obtém-se resolvendo a equação*

$$\frac{200}{98e^{-\frac{1}{6}t} + 2} = 50$$

*que conduz a* $t = 23,34$, *isto é, durante o vigésimo quarto dia metade da população já se encontra infectada.*

# A equação de Riccati

Chama-se equação de Riccati a uma equação que se possa escrever na forma

$$y' + p(x)y = q(x) + r(x)y^2$$

com $p(x), q(x)$ e $r(x)$ contínuas em algum intervalo aberto.
A resolução da equação de Riccati depende do conhecimento prévio de uma sua solução particular. Supondo que $y_1(x)$ é uma tal solução, efetua-se a mudança de variável $y(x) \longrightarrow z(x)$ definida por

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}.$$

Tendo em conta que $$y' = y_1' - \frac{z'}{z^2},$$

a nova função incógnita $z(x)$ satisfaz a equação linear

$$z' + (2r(x)y_1 - p(x))z = -r(x).$$

## Exemplo

*Determine-se a solução do PVI*

$$y' - y = -2x + \frac{1}{2x^2}y^2, \quad y(1) = -2, \quad x > 0$$

*sabendo que a equação admite a solução* $y = 2x$.
*Observe-se que a função* $y = 2x$ *não é solução do PVI uma vez que não verifica a condição inicial.*
*A substituição*

$$y = 2x + \frac{1}{z}$$

*transforma a equação de Riccati na equação linear*

## Exemplo (continuação)

$$z' + (1 + \frac{2}{x})z = -\frac{1}{2x^2}$$

*cuja solução é*

$$z = \frac{c - e^x}{2x^2 e^x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

*Voltando à função incógnita* $y$ *e determinando a constante obtém-se a solução*

$$y = 2x + \frac{1}{z} = 2x + \frac{2x^2 e^x}{\frac{e}{2} - e^x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

# Resumo:

## A EQUAÇÃO LINEAR

$$y' + p(x)y = q(x)$$

tem por solução geral

$$y = \frac{C}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int \varphi(x)\, q(x) dx, \quad \varphi(x) = e^{\int p(x) dx}.$$

## Método da variação das constantes arbitrárias

A partir do integral geral da equação homogénea, procurar uma solução da equação completa da forma

$$y = \frac{C(x)}{\varphi(x)}.$$

## A equação de Bernoulli

$$y' + p(x)\,y = q(x)y^k,$$

através da mudança de variável

$$z = y^{1-k},$$

transforma-se numa equação linear.

## A equação de Riccati

$$y' + p(x)y = q(x) + r(x)y^2$$

através da mudança de variável

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}, \quad y_1 \text{ solução particular da equação}$$

transforma-se numa equação linear.

# A Equação Diferencial Linear de ordem n

Uma equação diferencial da forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (0.7)$$

com $a_n$ função não identicamente nula, diz-se uma *equação diferencial linear de ordem n*. Às funções $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ é usual chamar coeficientes da equação e à função $f$ termo independente. Se $f$ for identicamente nula, a equação (0.7) diz-se *homogénea*.
No que se segue iremos assumir que as funções $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ e $f$ são contínuas em algum intervalo $I$.

O coeficiente $a_n$ por assumir um papel particularmente importante na equação, como teremos oportunidade de verificar posteriormente, é usualmente designado por coeficiente líder. Os pontos em que o coeficiente líder se anula são designados por pontos singulares da equação e introduzem em geral dificuldades adicionais na resolução da equação exigindo cuidados especiais.
Iremos também assumir que no intervalo $I$ considerado o coeficiente líder $a_n$ não se anula, pelo que, dividindo a equação por $a_n$ obtém-se uma equação equivalente com coeficiente líder igual a 1 e que escreveremos ainda na forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x). \tag{0.8}$$

Quando uma equação diferencial linear possui coeficiente líder igual a 1 diremos que se encontra escrita na *forma normal.*

## Exemplo

*A equação*

$$y''' + x^2y'' - 5xy' + y = x\cos x$$

*é linear de terceira ordem e encontra-se escrita na forma normal*

Com o objetivo de simplificar, em termos notacionais, o estudo das equações diferenciais lineares de ordem $n$ é habitual introduzir-se o conceito de *operador de derivação*.
Designemos por $C(I)$ o espaço linear das funções contínuas no intervalo $I$, e $C^n(I)$ o seu subespaço constituído por todas as funções com derivadas contínuas até à ordem $n$.

Para cada $k \in \{1, 2, ..., n\}$, define-se o operador de derivação

$$D^k : C^n(I) \longrightarrow C^{n-k}(I)$$

por

$$D^k : y \longrightarrow y^{(k)}.$$

Com esta notação a equação

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

pode escrever-se na forma

$$D^n y + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \ldots + a_1(x)Dy + a_0(x)y = f(x),$$

ou ainda, com um significado óbvio

$$(D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \ldots + a_1(x)D + a_0(x))y = f(x).$$

Designando

$$D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$$

por $P$ a equação

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

pode escrever-se na forma simplificada

$$Py = f(x).$$

## Exemplo

*Com as notações introduzidas a equação*

$$y''' + x^2y'' - 5xy' + y = x\cos x,$$

*escreve-se na forma*

$$(D^3 + x^2D^2 - 5xD + 1)y = x\cos x.$$

Polinómio de derivação

Facilmente se constata que $P = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1D + a_0$ é um operador linear, isto é, dadas duas funções $y_1, y_2 \in C^n(I)$ e $\alpha, \beta$ números reais

$$P(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha P y_1 + \beta P y_2.$$

À equação

$$Py = f(x),$$

é usual associar a equação

$$Py = 0$$

a que se chama equação homogénea associada à equação $Py = f(x)$. Por sua vez, esta última equação (com $f(x)$ não identicamente nula), é designada por equação linear não homogénea.

Comecemos por considerar a equação linear homogénea

$$Py = 0,$$

e seja $A$ o subconjunto de $C^n(I)$ constituído por todas as suas soluções, isto é

$$A = \{y \in C^n(I) : Py = 0\}.$$

O conjunto $A$ é o núcleo do operador $P$, sendo portanto um subespaço de $C^n(I)$. Este subespaço é designado por *espaço solução* da equação e notado por

$$Nuc(P).$$

Considere-se em seguida o importante teorema de existência e unicidade de solução da equação linear homogénea de ordem $n$.

## Teorema

*Sejam $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ funções contínuas num intervalo aberto $I$ e*

$$P = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0.$$

*Dado $x_0 \in I$ e $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ $n$ constantes reais arbitrariamente fixadas, existe uma e uma só função $y = \varphi(x)$ satisfazendo a equação diferencial*

$$Py = 0$$

*em $I$ e as condições iniciais*

$$\varphi(x_0) = \alpha_0, \varphi'(x_0) = \alpha_1, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}.$$

*NUC*(P) é um subespaço "grande"

(tem sempre infinitas funções)

Já referimos anteriormente que sendo $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ funções contínuas no intervalo $I$ e considerando

$$P = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$$

o conjunto $Nuc(P)$ (espaço solução da equação $Py = 0$) é um subespaço do espaço linear $C^n(I)$. Não obstante $C^n(I)$ ter dimensão infinita o teorema que se segue estabelece que a dimensão de $Nuc(P)$ é finita.

## Teorema

*Seja*

$$P = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0$$

*em que* $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0$ *são funções contínuas num intervalo aberto* $I$*. O espaço solução da equação*

$$Py = 0$$

*possui dimensão n, isto é,* $\boxed{dim(Nuc(P)) = n.}$ 

*O ideal é encontrar então uma base de Nuc(P)*

*(n funções, linearmente independentes, que sejam solução da ed. Homogénea)*

# Recordando ALGA....

## Definição

As $n$ funções reais $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$, definidas num intervalo $I$ dizem-se linearmente independentes neste intervalo se for verdadeira a condição:

$$\alpha_0 y_0(x) + \ldots + \alpha_{n-1} y_{n-1}(x) = 0, \text{ para todo o } x \in I$$

então

$$\alpha_0 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0.$$

## Exemplo

*As funções* $f_i$ *com* $i = 0, 1, 2, ..., n-1$, *definidas por*

$$f_0(x) = 1,\ \ f_1(x) = x,\ \ f_2(x) = x^2,\ \ ...,\ \ f_{n-1}(x) = x^{n-1}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

*são linearmente independentes em* $\mathbb{R}$. *Suponhamos que existem* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *tais que*

$$\alpha_0 f_0(x) + \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + ... + \alpha_{n-1} f_{n-1}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

# Exemplo (continuação)

*isto é*

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Fazendo* $x = 0$ *vem que* $\alpha_0 = 0$. *Derivando ambos os membros da equação anterior obtém-se*

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 x + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

*e, de novo, fazendo* $x = 0$ *vem que* $\alpha_1 = 0$. *Repetindo este raciocínio conclui-se que*

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0,$$

*o que permite afirmar que as funções* $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ *são linearmente independentes.* $\square$

# Solução geral da equação linear homogénea ordem n ?

De acordo com o último teorema quaisquer $n$ soluções linearmente independentes de $Py = 0$ constituem uma base de $Nuc(P)$, a que chamaremos **sistema fundamental de soluções** de $Py = 0$.

Se o conjunto $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ for um sistema fundamental de soluções da equação

$$Py = 0,$$

a função definida por

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i,$$

com $c_1, c_2, ..., c_n$ constantes arbitrárias, constitui a sua solução (ou integral) geral.

## Exemplo

*Considere-se a equação linear homogénea de segunda ordem*

$$\boxed{(D^2+1)y=0.}$$

*Facilmente se verifica que as funções* $y_1 = \cos x$ *e* $y_2 = \sin x$ *são soluções da equação. De facto são linearmente independentes: com efeito se*

$$\boxed{\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},}$$

*fazendo primeiro* $x = 0$, *e em seguida* $x = \frac{\pi}{2}$ *conclui-se que* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. *Assim as funções* $y_1 = \cos x$ *e* $y_2 = \sin x$ *constituem um sistema fundamental de soluções da equação* $(D^2+1)y = 0$, *pelo que a sua solução geral é*

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

# Solução geral da equação linear completa de ordem n ?

Considere-se agora a equação linear não homogénea

$$Py = f(x), \tag{0.9}$$

com $f(x) \in C(I)$.

Vejamos que para determinar o integral geral de (0.9) precisamos de resolver dois problemas:

1º. Determinar o integral geral da equação homogénea $Py = 0$,

2º. Determinar uma solução particular da equação completa $Py = f(x)$.

Com efeito, tem-se o teorema:

## Teorema *

*Sejam* $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ *e* $f(x)$ *funções contínuas num intervalo* $I$ *e seja* $P = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$.
*Se* $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ *constituir um sistema fundamental de soluções de*

$$Py = 0,$$

*e* $\bar{y}$ *for uma solução particular da equação*

$$Py = f(x),$$

*então*

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i + \bar{y},$$

*com* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *constantes arbitrárias é a solução geral da equação*

$$Py = f(x).$$

# Exemplo

*Considere-se a equação linear não homogénea de segunda ordem*

$$\boxed{(D^2+1)y = x.}$$

*Foi visto no último exemplo, que a solução geral da que a equação homogénea associada* $(D^2+1)y=0$ *era*

$$\boxed{y^* = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},}$$

*e é fácil constatar que a função* $\boxed{\bar{y} = x}$ *é solução particular da equação completa. O último teorema permite afirmar que a equação linear não homogénea*

$$(D^2+1)y = x,$$

*tem por solução geral*

$$\boxed{y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x.}$$

# Abaixamento da ordem de uma equação linear homogénea de ordem $n$

Conhecida uma solução particular $\varphi_1(x)$ da equação linear homogénea de ordem $n$

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0)y = 0. \tag{0.10}$$

a mudança de variável definida por

$$y = \varphi_1(x) \int z(x) dx$$

permite baixar o grau da equação e obter uma nova equação linear homogénea de ordem $n - 1$.

## Exemplo

*Determine-se a solução geral da equação*

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 0, \quad x > 0,$$

*sabendo que* $\varphi_1(x) = x$ *é uma sua solução. Efetuando a substituição*

$$y = \varphi_1(x) \int z \, dx = x \int z \, dx$$

*e tendo em conta que*

$$y' = \int z \, dx + xz \quad \text{e} \quad y'' = 2z + xz'$$

*por substituição na equação obtém-se*

## Exemplo

*a equação linear homogénea de primeira ordem*

$$z' + \frac{3}{x} z = 0,$$

*cuja solução é*

$$z = \frac{C}{x^3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

*Então*

$$y = x \int z \, dx = x \int \frac{C}{x^3} \, dx = Cx \left( -\frac{1}{2x^2} + D \right),$$

*e a equação inicial tem por solução geral*

$$y = c_1 \frac{1}{x} + c_2 x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

# Definição

Dadas $n$ funções $f_1, f_2, ..., f_n$ com derivadas pelo menos até à ordem $n-1$ num dado intervalo $I$, ao determinante

$$W(f_1, f_2, ..., f_n)(x) = Det \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

chama-se *Wronskiano* das funções consideradas.

*Importante porquê?*

O teorema seguinte estabelece um critério que permite determinar se $n$ soluções de uma equação linear homogénea de ordem $n$ são ou não linearmente independentes.

## Teorema

*Sejam $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0 \in C(I)$ e $y_1, y_2, ..., y_n$ $n$ soluções, definidas em $I$, da equação linear de ordem $n$*

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0)y = 0.$$

*Uma condição necessária e suficiente para que as soluções $y_1, y_2, ..., y_n$ sejam linearmente independentes em $I$ é que*

$$W(y_1, y_2, ..., y_n)(x) \neq 0 \quad \text{para todo o} \quad x \in I.$$

## Exemplo

*Considere-se novamente a equação*

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0, \quad x > 0$$

*e suponhamos que são conhecidas as suas duas seguinte soluções*

$$y_1(x) = x \quad e \quad y_2(x) = \frac{1}{x}.$$

*Provemos que* $y_1$ *e* $y_2$ *são linearmente independentes mostrando que o seu Wronskiano não se anula em* $]0, +\infty[$.

## Exemplo (continuação)

*Tem-se*

$$W(y_1, y_2) = Det \begin{bmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{bmatrix} = x\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x} \cdot 1 = -\frac{2}{x} \neq 0$$

*pelo que* $y_1$ *e* $y_2$ *linearmente independentes no intervalo considerado e o integral geral da equação, tal como se viu no exemplo anterior, é*

$$y = c_1 x + c_2 \frac{1}{x}, \quad onde\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

# Método da variação das constantes arbitrárias para a equação linear de ordem $n$

Tal como foi visto aquando do estudo da equação linear de primeira ordem, *o método da variação das constantes arbitrárias*, permite determinar o integral geral da equação linear completa a partir do integral geral da equação homogénea associada.
Considere-se a equação linear de segunda ordem não homogénea

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

e suponhamos que

$$y^* = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

é o integral geral da equação homogénea associada

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Suponhamos também que $c_1$ e $c_2$ são funções de $x$,

$$c_1 = c_1(x), \; c_2 = c_2(x),$$

a determinar, de forma a que

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

seja o integral geral da equação completa.
Uma vez que, temos duas funções a determinar, para além de exigirmos que $y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, verifique a equação

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

imporemos também que

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0.$$

Substituindo

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

na equação

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

tendo em conta que $y_1$ e $y_2$ são soluções da equação homogénea e que

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0,$$

obtém-se

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)}.$$

As funções $c_1(x)$ e $c_2(x)$ determinam-se então a partir do sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = \dfrac{f(x)}{a_2(x)}. \end{cases} \tag{0.11}$$

Este último sistema é possível e determinado uma vez que o determinante

$$W(y_1, y_2) = Det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$

não se anula uma vez que se trata do Wronskiano das funções $y_1$ e $y_2$ que são linearmente independentes.

# Exemplo

*Considere-se a equação*

$$y'' + 9y = \frac{1}{\cos(3x)}, \qquad x \in ]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[ \tag{0.13}$$

*As funções* $\cos(3x)$ *e* $\sin(3x)$ *são duas soluções linearmente independentes da equação homogénea*

$$y'' + 9y = 0, \tag{0.14}$$

*pelo que o seu integral geral será dado por*

$$y = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$$

*com* $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
*Utilizemos o método da variação das constantes arbitrárias para determinar o integral geral da equação completa.*

## Exemplo (continuação)

*Comecemos por considerar que* $y = c_1(x)\cos(3x) + c_2(x)\sin(3x)$ *é o integral geral da equação* (0.13)*com* $c_1(x)$ *e* $c_2(x)$ *funções a determinar através do sistema:*

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos(3x) + c_2'(x)\sin(3x) = 0 \\ c_1'(x)(-3\sin(3x)) + c_2'(x)(3\cos(3x)) = \dfrac{1}{\cos(3x)} \end{cases}.$$

*Pela regra de Cramer,*

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sen(3x) \\ \dfrac{1}{\cos(3x)} & 3\cos(3x) \end{vmatrix}}{W(\cos(3x), \sin(3x))} = \frac{-\dfrac{\sin(3x)}{\cos(3x)}}{3} = -\frac{\sin(3x)}{3\cos(3x)},$$

# Exemplo (continuação)

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(3x) & 0 \\ -3\sin(3x) & \dfrac{1}{\cos(3x)} \end{vmatrix}}{W(\cos(3x), \sin(3x))} = \frac{\frac{\cos(3x)}{\cos(3x)}}{3} = \frac{1}{3},$$

*donde*

$$c_1(x) = \frac{log(\cos(3x))}{9} + c_1, \;\; c_2(x) = \frac{x}{3} + c_2, \quad com\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

*Então, o integral geral da equação diferencial linear* (0.13) *é*

$$y = \left(\frac{1}{9}\, log(\cos(3x)) + c_1\right)\cos(3x) + \left(\frac{x}{3} + c_2\right)\sin(3x)$$

$$= c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) + \frac{x\,\sin(3x)}{3} + \frac{1}{9} log(\cos(3x))\cos(3x).$$

## Exemplo (continuação)

*Observe-se que, e de acordo com o teorema* ***** , *o integral geral determinado é da forma*

$$y = y^* + \bar{y}$$

*em que*

$$y^* = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

*é o integral geral da equação linear homogénea associada e*

$$\bar{y} = \frac{x\ \sin(3x)}{3} + \frac{1}{9} log(\cos(3x)) \cos(3x)$$

*é uma solução particular da equação* (0.13).

# Generalização

O método da variação das constantes arbitrárias, generaliza-se para a equação linear de ordem $n$

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

e permite também determinar a solução geral desta equação a partir da solução geral da equação homogénea associada

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Sendo $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$ a solução geral da equação homogénea suporemos também que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são $n$ funções de $x$,

$$c_1 = c_1(x),\ c_2 = c_2(x), \ldots,\ c_n = c_n(x),$$

a determinar, de forma a que

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x)$$

seja o integral geral da equação completa.
As funções $c_1(x),\ c_2(x), \ldots,\ c_n(x)$, determinam-se começando por resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + \ldots + c_n'(x)y_n = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + \ldots + c_n'(x)y_n' = 0 \\ \ldots \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)} + c_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_n(x)} \end{array}\right. . \tag{0.12}$$

Tal como no caso da equação linear de segunda ordem, este último sistema é possível e determinado pois o determinante

$$W(y_1, y_2, ..., y_n)(x) = Det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

não se anula uma vez que se trata do Wronskiano das funções $y_1, y_2, \dots, y_n$ que são linearmente independentes.

Obtidas as funções

$$c_1'(x),\ c_2'(x), \ldots, c_n'(x)$$

calculam-se as suas primitivas

$$c_1(x),\ c_2(x), \ldots, c_n(x)$$

e a equação completa tem por integral geral

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x),$$

com as funções $c_1(x),\ c_2(x), \ldots, c_n(x)$ assim obtidas.