ANÁLISE MATEMÁTICA III C

4ªsemana de aulas

NOVA SCHOOL OF
SCIENCE & TECHNOLOGY

Cláudio Fernandes

caf@fct.unl.pt

Slides para acompanhamento das aulas TP1 e TP4

O material completo do Prof. João de Deus Marques encontra-se no CLIP, na página da UC

E quando o termo independente for a soma dos casos anteriores?

Exemplo

Considere a equação diferencial

$$(D^2-1)y = x + senx.$$

A equação característica é $r^2 - 1 = 0$ tem como as raízes, r=-1 e r=1 (ambas com multiplicidade 1). A solução geral da equação homogénea associada é

$$y^*(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Para obter uma solução particular da equação completa vamos obter soluções particulares de cada uma das seguintes equações:

$$1)\ (D^2-1)y = x \quad \text{e} \quad 2)\ (D^2-1)y = senx.$$

1) $(D^2-1)y = x$

Como 0 não é raiz da equação característica então a equação tem uma solução da forma $y_1(x) = \rho_1 x + \rho_0$ com ρ_1, ρ_0 constantes a determinar.

Procurando as constantes (substituindo $y_1(x) = \rho_1 x + \rho_0$ na equação 1) , obtém-se:

$$y_1(x) = -x.$$

2) $(D^2 - 1)y = sen\ x$

Ora, como i não é raiz da equação característica a equação tem uma solução particular da forma $y_2(x) = \mathrm{a}\cos x + b sen\ x$ com a, b constantes a determinar.

Procurando a, b obtém-se:

$$y_2(x) = 0\cos x - \frac{1}{2} sen\ x = -\frac{1}{2} sen\ x$$

Finalmente,

$$\bar{y}(x) = -x - \frac{1}{2} sen\ x$$

é solução da equação completa inicial e a sua solução geral é

$$y(x) = -x - \frac{1}{2} sen\ x + c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

A equação de Euler

Chama-se equação de Euler a uma equação do tipo

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \qquad (0.21)$$

em que $a_n, \ a_{n-1}, \ldots, a_1, \ a_0$ são constantes reais.

Supondo $x > 0$, esta equação transforma-se, por meio da substituição $x = e^t \ (t = \log x)$ numa equação linear de coeficientes constantes.
Comecemos por considerar a equação de Euler de terceira ordem, isto é

$$a_3 x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x).$$

Tem-se que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}\\ &= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right)\\ &= -\frac{2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^3y}{dt^3}\frac{1}{x} - \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{a_3 x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0\, y = f(x).}$$

Substituindo na equação vem que

$$a_3 x^3 \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) + a_2 x^2 \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) +$$
$$a_1 x \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} + a_0 y = f(e^t)$$

ou ainda

$$a_3 \frac{d^3 y}{dt^3} + (a_2 - 3a_3)\frac{d^2 y}{dt^2} + (2a_3 - a_2 + a_1)\frac{dy}{dt} + a_0 y = f(e^t),$$

que é uma equação de coeficientes constantes.

(o mesmo acontece para a equação de Euler de ordem n)

Exemplo

A equação

$$\frac{1}{4}x^3\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{1}{4}x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4},\quad x>0, \tag{0.23}$$

é de Euler com $a_3=a_2=\frac{1}{4}$, $a_1=-1$, $a_0=0$ *e* $f(x)=\frac{1}{4}$.
Efetuando a substituição $x=e^t$, *e tendo em conta o que foi visto para a equação de Euler de terceira ordem, a equação transforma-se na equação de coeficientes constantes*

$$a_3\frac{d^3y}{dt^3}+(a_2-3a_3)\frac{d^2y}{dt^2}+(2a_3-a_2+a_1)\frac{dy}{dt}+a_0y=f(e^t),$$

(fazer os cálculos... não é para decorar isto!)

Exemplo (continuação)

que neste caso é

$$\frac{1}{4}\frac{d^3y}{dt^3} + (\frac{1}{4} - 3\frac{1}{4})\frac{d^2y}{dt^2} + (2\frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1)\frac{dy}{dt} = \frac{1}{4},$$

ou ainda

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} = 1, \qquad (0.24)$$

O polinómio característico $r^3 - 2r^2 - 3r$ *tem as raizes reais simples* $r = -1$, $r = 0$ *e* $r = 3$, *pelo que o integral geral da equação linear homogénea é*

$$y^*(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^{3t},$$

com c_1, c_2, c_3 *constantes arbitrárias.*

Exemplo (continuação)

Tendo em conta que 0 é raiz da equação característica com multiplicidade 1 e o termo independente é um polinómio de grau zero, a equação admite uma solução particular da forma

$$y_1(t) = Ct,$$

com C constante a determinar. Substituindo na equação(0.24), *obtém-se* $C = -\frac{1}{3}$.

Exemplo

[continuação]

A solução da equação linear não homogénea (0.23) *é então*

$$y(t) = y^*(t) + y_1(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^{3t} - \frac{t}{3}.$$

Voltando à variável inicial, o integral geral de (0.23) *é*

$$y(x) = c_1 + \frac{c_2}{x} + c_3 x^3 - \frac{1}{3} \log x,$$

com $c_1, \ c_2, \ c_3$ *constantes arbitrárias.* □

21. a) Determine a solução geral da equação diferencial linear de coeficientes constantes

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 2x.$$

b) Utilizando a substituição $x \longrightarrow t$ definida por $t = \dfrac{1}{x}$ determine a solução geral da equação diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \frac{4}{x^2}y = \frac{2}{x^3}, \quad x > 0$$

(Resposta: a) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{2}x$, b) $y = c_1 \cos \frac{2}{x} + c_2 \sin \frac{2}{x} + \frac{1}{2x}$.)

① Solução geral da Homogénea

$$r^2+4=0 \Leftrightarrow r^2=-4 \Leftrightarrow r=\pm\underbrace{\sqrt{-4}}_{2^2\cdot i^2} \Leftrightarrow r=\pm 2i$$

$$\therefore\ y^*(x)=C_1\cos(2x)+C_2\,\text{sen}(2x)$$

$\cos(2x)$ $\quad$ $\text{sen}(2x)$

② Solução particular $\bar{y}$ da completa.

$$f(x)=2x = \text{polinómio de grau} = 1$$

Como 0 não é raiz da equação característica então

$$\bar{y}(x)=P\,x+P \quad \text{com } P_0, P_1 \text{ a determinar}$$

Ora,

$$\bar{y}'(x)=P_1 \quad e \quad \bar{y}''(x)=0$$

pelo que substituindo na equação vem

$$y''(x)+4y(x)=2x \Leftrightarrow 0+\underbrace{4P_1x+4P_0=2x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4P_1=2\\4P_0=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}P_1=\frac{1}{2}\\P_0=0\end{cases}$$

$\therefore \quad \bar{y}(x) = \frac{1}{2}x$

A solução geral da equação completa é:

$$y(x) = \frac{1}{2}x + c_1\cos(2x) + c_2\,\text{sen}(2x)$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

5) $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \frac{4}{x^2}y = \frac{2}{x^3} \qquad x > 0$$

Mudança de variável

$$x \rightsquigarrow t \quad \text{onde} \quad t = \frac{1}{x}$$

obs:
$$\underbrace{\begin{array}{c} y \\ | \\ x \end{array}}_{\text{antes}} \qquad \underbrace{\begin{array}{c} y \\ | \\ t \\ | \\ x \end{array}} \qquad \begin{array}{c} \frac{dy}{dt} \\ | \\ t \\ | \\ x \end{array}$$

Agora ao efetuar a mudança de variável.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x^2} \checkmark$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{\text{Função de } x} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\text{Função de } x}\right) =$$

$$= -\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right)\right) =$$

$$= -\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)} \cdot \frac{1}{x^2} + 2 \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x^3}$$

$$= -\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dx} \cdot \frac{1}{x^2} + 2\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x^3}$$

$$= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{x^4} + 2\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x^3}$$

Substituindo na equação vem

$$e^2\left(\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{e^4}+2\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{e^3}\right)+2e\left(-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{e^2}\right)+\frac{4}{e^2}y=\frac{2}{e^3}$$

$$\Updownarrow$$

$$y''(t)\cdot\frac{1}{e^2}+\cancel{2y'(t)\cdot\frac{1}{e}}-\cancel{2y'(t)\cdot\frac{1}{e}}+\frac{4}{e^2}y=\frac{2}{e^3}$$

$$\Updownarrow$$

$$y''(t)\cdot\frac{1}{e^2}+\frac{4}{e^2}y=\frac{2}{e^3}$$

$$\Updownarrow \times e^2$$

$$y''(t)+4y(t)=\frac{2}{\underset{\substack{\parallel \\ \frac{1}{t}}}{e}} \Leftrightarrow \boxed{y''(t)+4y(t)=2t} \quad (*)$$

Equação de a)

∴ A solução geral de ⊛ é (hom ai)

$$y(t) = \frac{1}{2}t + c_1\cos(2t) + c_2\,\text{sen}(2t)$$

mas $t = \frac{1}{x}$

∴ A solução geral da eq. inicial (completa) é ∴

$$y(x) = \frac{1}{2x} + c_1\cos\left(\frac{2}{x}\right) + c_2\,\text{sen}\left(\frac{2}{x}\right)$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Equações Diferenciais não Lineares

Equações Diferenciais Exatas

Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ duas funções continuamente deriváveis num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e considere-se a equação

$$u(x, y) + v(x, y)y' = 0,$$

isto é,

$$u(x, y) + v(x, y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

ou, na forma diferencial,

$$\boxed{u(x, y)dx + v(x, y)dy = 0.} \tag{0.25}$$

A equação diferencial (0.25) diz-se *exacta* em D se o par de funções (u, v) for o gradiente de alguma função continuamente derivável em D, isto é, se existir uma função $f(x, y)$ (que se designa *função potencial*), tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = v(x, y)$$

Exemplo Verifique que a equação diferencial em baixo é exata.

$$(6x \quad + 2y^2)dx \, + 4xydy = 0$$

Temos de descobrir uma função f(x,y) tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (6x \quad + 2y^2) \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = 4xy$$

Primitivando a segunda condição em ordem a y obtém-se

$$f(x, y) = 2xy^2 + h(x)$$

Derivando a expressão obtida para f(x,y) em ordem a x

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = 2y^2 + h'(x)$$

e igualando à primeira equação vem

$$2y^2+h'(x)\text{=6x+}2y^2$$

pelo que, que h'(x)=6x, logo g(x)= $3x^2 + c, (c = constante\ real)$. Assim, a função f(x,y) será

$$f(x, y) = 2xy^2 + 3x^2 + c \quad , c = constante\ real$$

Como existem funções f então a equação é diferencial exata

(funções potenciais da equação)

Mas há uma forma mais rápida de saber se a equação é diferencial exacta?

Teorema

Sejam $u(x,y)$ *e* $v(x,y)$ *duas funções continuamente deriváveis no retângulo* $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-a| < \alpha \wedge |y-b| < \beta\}$. *Uma condição necessária e suficiente para que a equação diferencial* $u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy = 0$ *seja exacta em* R *é que*

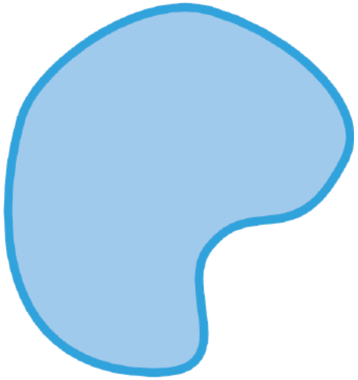
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}}$$

em R.

Observação:

O último teorema estabelece um critério que permite reconhecer se uma dada equação é exata num retângulo.
É importante referir que o resultado estabelecido neste teorema ainda é verdadeiro em domínios muito mais gerais que retângulos, nomeadamente em domínios abertos e simplesmente conexos.

O teorema que se segue indica como determinar o integral geral de uma equação diferencial exata conhecida uma função potencial.



Ω é simplesmente conexo
(sem “buracos”)

Ω é não é simplesmente conexo
(mas é conexo)

Qual a solução geral de uma equação diferencial exacta?

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ *um conjunto aberto e conexo*

$$u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy = 0 \qquad (0.26)$$

uma equação diferencial exata em D *e* f *tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = v.$$

Se $y(x)$ *for uma solução de* (0.26) *cujo gráfico está contido em* D *então* $f(x, y(x)) = c$, *para alguma constante real* c. *Reciprocamente se a equação* $f(x,y) = c$ *define implicitamente* y *como função diferenciável de* x, *a função assim definida é solução da equação diferencial* (0.26)

Obtida uma função potencial, f(x,y), então a solução geral é

$$f(x, y)=C, \quad C\in \mathbb{R}$$

Exemplo

A equação diferencial

$$u(x,y)dx + v(x,y)dy = (2e^{2x}y + 2xy^2)dx + (e^{2x} + 2x^2y)dy = 0$$

é exata (as funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são continuamente deriváveis em $\mathbb{R}^2$ que é um conjunto aberto e simplesmente conexo e $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x} + 4xy$*), pelo que existe uma função $f(x,y)$ tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x}y + 2xy^2 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x} + 2x^2y.$$

Tem-se que $f(x,y) = e^{2x}y + x^2y^2$ (a menos de uma constante aditiva, [verifique]), pelo que a solução da equação é dada implicitamente por

$$e^{2x}y + x^2y^2 = c, \quad com\ c \in \mathbb{R}.$$

Fator Integrante

Considere-se a equação

$$u(x,y)dx + v(x,y)dy = \frac{1}{2}dx + \frac{xy}{y^2+1}dy = 0. \qquad (0.27)$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \neq \frac{y}{y^2+1} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

a equação não é exacta.

Multiplicando a equação pela função $\phi(x,y) = y^2+1$ obtém-se

$$U(x,y)dx + V(x,y)dy = \frac{1}{2}(y^2+1)dx + xydy = 0. \qquad (0.28)$$

As funções U e V são continuamente deriváveis em $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y = \frac{\partial V}{\partial x}.$$

As equações (0.27) e (0.28) são equivalentes mas enquanto a primeira não é exacta a segunda já o é. À função $\phi(x,y) = y^2+1$ chama-se um *fator integrante* da equação (0.27)

Na maioria dos casos não há forma de determinar fatores integrantes para equações não exatas. Iremos considerar dois casos em que tal é possível. Suponhamos que não é exata a equação

$$u(x, y)dx + v(x, y)dy = 0. \tag{0.29}$$

Se $$\boxed{\frac{\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}}{v} = g(x),}$$

a função $\boxed{\psi(x) = e^{\int g(x)dx}}$ é um fator integrante da equação (0.29)

Se $$\boxed{\frac{\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}{u} = f(y)}$$

a função $\boxed{\phi(y) = e^{\int f(y)dy}}$ é um fator integrante da equação (0.29)

Exemplo

A equação

$$u(x,y)dx + v(x,y)dy = (e^x + 5e^{-y})dx + (e^x - 4e^{-y})dy = 0$$

não é exata pois $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -5e^{-y} \neq e^x = \dfrac{\partial v}{\partial x}.$

Ora

$$\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}}{u} = \frac{e^x + 5e^{-y}}{e^x + 5e^{-y}} = 1$$

pelo que

$$\phi(y) = e^{\int dy} = e^y$$

é um fator integrante da equação.

A equação diferencial

$$(e^{x}+5e^{-y})dx + (e^{x}-4e^{-y})dy = 0 \qquad (1)$$

é equivalente à equação

$$\phi(y)(e^{x} + 5e^{-y})dx + \phi(y)(e^{x} - 4e^{-y})dy'$$

ou seja,

$$(e^{x+y}+5)dx + (e^{x+y}-4)dy = 0, \qquad (2)$$

que já é exacta. Procurando uma função potencial desta ultima equação obtém-se:

$$f(x, y) = e^{x+y} - 4y + 5x.$$

A solução geral de (1) e (2) são iguais e é:

$$e^{x+y}-4y + 5x = c \ \ , c = constante\ real$$

Equações de Variáveis Separáveis

Uma equação diferencial $\quad y' = f(x, y)$
diz-se de *variáveis separáveis* se puder ser escrita na forma

$$u(x, y)\, dx + v(x, y)\, dy = 0, \tag{0.30}$$

em que $u(x, y)$ depende apenas da variável x $(u(x, y) = u(x))$, $v(x, y)$ depende apenas da variável y $(\ v(x, y) = v(y))$ e são continuamente deriváveis em algum conjunto aberto, simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$. Observe-se que, com as hipóteses consideradas, uma equação de variáveis separáveis é uma equação diferencial exata pois

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

A equação (0.30) tem por integral geral

$$\int u(x)\, dx + \int v(y)\, dy = C, \qquad C \text{ constante real.}$$

Exemplo

A equação diferencial

$$y' = \frac{2x}{3y^2+4}.$$

é de variáveis separáveis pois pode ser escrita na forma

$$2x\,dx - (3y^2+4)dy = 0.$$

A equação tem como integral geral (na forma implícita)

$$\int 2x\,dx - \int (3y^2+4)\,dy = c,$$

ou seja

$$x^2 - y^3 - 4y = C, \qquad C \ \text{constante real.} \quad \square$$