Capítulo 5 - Estimação Pontual

Resolução de alguns exercícios

5.2 Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma população com valor médio μ e variância σ^2.

a) $$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \underset{E(X_i)=\mu,\,\forall i}{=} \sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n} n\mu = \mu,$$

pelo que podemos concluir que $\overline{X}$ é um estimador centrado para μ.

$$V(\overline{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \underset{X_i \text{inds}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) \underset{V(X_i)=\sigma^2,\,\forall i}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Assim, temos que

$$\lim_{n\to\infty} EQM(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} = 0$$

pelo que $\overline{X}$ é um estimador consistente **em média quadrática** de μ.

(cont.)

b) Vamos começar por verificar se os estimadores são centrados para μ:

$$E(\hat{\Theta}_1) = E\left(\frac{X_1 + X_n}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(E(X_1) + E(X_n)\right) \underset{E(X_i)=\mu}{=} \frac{1}{2}(\mu + \mu) = \mu$$

$$E(\hat{\Theta}_2) = E\left(\frac{2X_1 + 3X_2 + 5X_3}{10}\right) = \frac{1}{10}\left(2E(X_1) + 3E(X_2) + 5E(X_3)\right)$$

$$\underset{E(X_i)=\mu}{=} \tfrac{1}{10}(2\mu + 3\mu + 5\mu) = \mu,$$

pelo que podemos concluir que $\hat{\Theta}_1$ e $\hat{\Theta}_2$ são ambos estimadores centrados para μ.

5.2 b) (continuação)

Dado que os estimadores são centrados temos que

$$EQM(\hat{\Theta}_1) = V(\hat{\Theta}_1) \quad e \quad EQM(\hat{\Theta}_2) = V(\hat{\Theta}_2)$$

Vamos então calcular a variância dos estimadores $\hat{\Theta}_1$ e $\hat{\Theta}_2$:

$$\begin{aligned} V(\hat{\Theta}_1) &= V\left(\frac{X_1 + X_n}{2}\right) \underset{X_i \text{inds}}{=} \frac{1}{4}\left(V(X_1) + V(X_n)\right) \\ &\underset{V(X_i)=\sigma^2}{=} \frac{1}{4} \times 2\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0. \end{aligned}$$

logo $\hat{\Theta}_1$ não é um estimador consistente **em média quadrática** de μ;

$$\begin{aligned} V(\hat{\Theta}_2) &= V\left(\frac{2X_1 + 3X_2 + 5X_3}{10}\right) \\ &\underset{X_i \text{inds}}{=} \frac{1}{100}\left(4V(X_1) + 9V(X_2) + 25V(X_3)\right) \\ &\underset{V(X_i)=\sigma^2}{=} \frac{38\sigma^2}{100} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \end{aligned}$$

pelo que $\hat{\Theta}_2$ também não é um estimador consistente **em média quadrática** de μ.

Dado que $EQM(\hat{\Theta}_2) < EQM(\hat{\Theta}_1)$ podemos afirmar que $\hat{\Theta}_2$ é um estimador mais eficiente que $\hat{\Theta}_1$.

5.2 c) Pretendemos mostrar que $\overline{X}^2$ não é estimador centrado de μ^2, ora

$$E\left(\overline{X}^2\right) = V(\overline{X}) + E^2(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \neq \mu^2$$

pelo que $\overline{X}^2$ não é estimador centrado de μ^2.

No entanto, note-se que

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\overline{X}^2\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 = \mu^2$$

pelo que podemos dizer que $\overline{X}^2$ é um estimador assimptoticamente centrado de μ^2.

5.3 Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma população $X \sim U(0,\theta)$. Sabemos que $E(X) = \mu = \frac{\theta}{2}$ e $V(X) = \sigma^2 = \frac{\theta^2}{12}$.

a) Vamos começar por verificar se $2\overline{X}$ é centrado para θ:

$$E\left(2\overline{X}\right) = 2E\left(\overline{X}\right) \underset{X_i\,a.a.}{=} 2E(X) = 2\mu = 2 \times \frac{\theta}{2} = \theta$$

pelo que $2\overline{X}$ é estimador centrado de θ.

Dado que $2\overline{X}$ é estimador centrado de θ, então

$$EQM(2\overline{X}) = V\left(2\overline{X}\right) = 4V\left(\overline{X}\right) \underset{X_i\,a.a.}{=} 4\frac{V(X)}{n} = 4\frac{\sigma^2}{n} = 4\frac{\theta^2/12}{n} = \frac{\theta^2}{3n}.$$

Dado que

$$\lim_{n\to\infty} EQM(2\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} V\left(2\overline{X}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\theta^2}{3n} = 0$$

podemos concluir que $2\overline{X}$ é estimador consistente **em média quadrática** de θ.

5.3 b) Com base na amostra observada

$$(1.215, 1.580, 0.726, 2.843, 3.394, 0.612, 2.621, 1.181, 2.930, 0.317)$$

obtemos a seguinte estimativa de θ

$$\hat{\theta} = 2 \times \overline{x} = 2 \times \frac{17.42}{10} = 3.484.$$