Análise Matemática II C **14 de Junho de 2023 - Teste 2 - Versão A (2h)**

1. Considere a superfície não limitada $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Seja P o ponto $(2\sqrt{2}, 0, 0)$. Escolha a afirmação verdadeira.

   A. Existem exatamente 2 pontos de S à distancia mínima, $\sqrt{3}$, de P.

   B. Existem exatamente 4 pontos de S à distancia mínima, $\sqrt{3}$, de P.

   C. Existe apenas 1 ponto de S à distancia mínima, 3, de P.

   D. Existem exatamente 2 pontos de S à distancia mínima, $2\sqrt{2} - 1$, de P.

   E. Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

2. Seja D a região do plano limitada pelas curvas $y = x^2$ e $x = y^2$.
   O valor do integral $\displaystyle\iint_D xy\, dxdy$ é:

   A. $\frac{1}{2}$, B. $-\frac{1}{4}$, C. $-\frac{1}{2}$, D. $\frac{1}{4}$, E. Nenhum dos anteriores.

3. Considere o integral $I = \displaystyle\int_0^1 \int_{y^{\frac{1}{2}}}^{\sqrt{2-y^2}} y\, dxdy$. Tem-se:

   A. $I = \int_0^1 \int_0^{x^2} y\, dydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{y^2+x^2} y\, dydx$, B. $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-x^2}} y\, dydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_1^{x^2} y\, dydx$,
   C. $I = \int_0^1 \int_0^{x^2} y\, dydx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} y\, dydx$, D. $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2-x^2}} y\, dydx + \int_1^{2} \int_1^{x^2} y\, dydx$,
   E. Nenhum dos casos anteriores.

4. Considere o domínio de $\mathbb{R}^2$ definido por

   $$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\, y \geq 0,\, 1 \leq x + y \leq 4\}.$$

   Usando a transformação de variáveis $x = u - uv$, $y = uv$. Tem-se:

   A. $\iint_R \frac{y}{x+y}\, dxdy = \int_1^4 \left(\int_0^1 v\, dv \right) du$,

   B. $\iint_R \frac{1}{x+y}\, dxdy = 3$,

   C. $\iint_R \frac{y}{x+y}\, dxdy = \int_0^4 \left(\int_0^4 v\, dv \right) du$,

   D. $\iint_R \frac{1}{x+y}\, dxdy = \int_1^4 \left(\int_0^4 \frac{1}{u}\, dv \right) du$,

   E. Nenhum dos casos anteriores.

5. Recorrendo a coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ, o volume do sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 16 \wedge z^2 \leq 3x^2 + 3y^2\}$$

é igual a:

A. $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^4 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \rho^2 \sin\phi \, d\phi \right) d\rho \right) d\theta$, B. $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^4 \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \rho^2 \cos\phi \, d\phi \right) d\rho \right) d\theta$,
C. $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^4 \left(\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \rho^2 \sin\phi \, d\phi \right) d\rho \right) d\theta$, D. $4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^4 \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \rho^2 \sin\phi \, d\phi \right) d\rho \right) d\theta$,
E. $\int_0^{2\pi} \left(\int_0^4 \left(\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \rho^2 \cos\phi \, d\phi \right) d\rho \right) d\theta$.

6. Considere o seguinte campo vetorial conservativo definido em $\mathbb{R}^2$

$$\vec{F}(x, y) = (y^2 e^{xy^2} + \frac{2x}{y^2 + x^2})\vec{i} + (2yxe^{xy^2} + \frac{2y}{y^2 + x^2})\vec{j}.$$

Seja $I = \int_C \vec{F}.d\vec{r}$, onde C é a curva regular definida por $(x, y) = (3\cos t, 2\sin t)$, com $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, percorrida no sentido crescente do parâmetro t. Tem-se:

A. $I = \ln(\frac{4}{9})$, B. $I = \ln(\frac{9}{4})$, C. $I = e + \ln(4)$, D. $I = e + \ln(3)$,
E. Nenhum dos anteriores.

7. Considere a região do plano

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \; y \geq \sqrt{3}x, \; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

Seja $\vec{F}(x, y) = F_1(x, y)\vec{i} + F_2(x, y)\vec{j}$ um campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ de classe C^1 tal que

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) = 2, \text{ para todo o } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Seja C a fronteira de $\mathcal{R}$ orientada no sentido horário.
O valor do integral $\displaystyle\int_C F_1(x, y) \, dx + F_2(x, y) \, dy$ é:

A. 0, B. $-\dfrac{\pi}{3}$, C. $\dfrac{\pi}{3}$, D. $-\dfrac{\pi}{2}$, E. Nenhum dos casos anteriores.

8. Seja $\mathcal{C}$ o arco da parábola $y + 1 = x^2$ que une o ponto $(-1, 0)$ ao ponto $(0, -1)$. O valor do integral

$$\int_{\mathcal{C}} x \, ds$$

é:

A. 0, B. 1, C. $-\sqrt{2}$, D. $1 - 5\sqrt{5}$, E. Nenhum dos casos anteriores.

9. Denote por W o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{i} + y^3\,\vec{j} - \vec{k}$ ao longo da curva C definida por $\begin{cases} x = 1 \\ z = y^4 \end{cases}$, percorrida desde o ponto $(1,0,0)$ até ao ponto $(1,1,1)$. Tem-se:

A. $W = -\frac{1}{4}$, B. $W = \frac{1}{4}$, C. $W = -\frac{3}{4}$, D. $W = \frac{3}{4}$,
E. Nenhum dos casos anteriores.

10. Considere a superfície $\sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq y \leq 1 \wedge z = y - x\}$ em $\mathbb{R}^3$, orientada segundo a normal dirigida para cima.
Considere o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = 1\vec{i} + (2y-1)\vec{k}$.
O valor de $\displaystyle\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$ é:

A. $\frac{6}{5}$, B. $\frac{4}{5}$, C. $\frac{2}{5}$, D. $\frac{8}{5}$, E. Nenhum dos casos anteriores.

11. Seja $\mathcal{E}$ um sólido simples de volume V e com fronteira σ, uma superfície orientada com a normal interior. Considere o campo vetorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2y + z^2)\vec{i} - xy^2\vec{j} + 3z\vec{k}.$$

O fluxo de $\vec{F}$ através de σ é:

A. V, B. $-3V$, C. $-V$, D. $2V$, E. Nenhum dos casos anteriores.

12. Considere o campo vetorial $\vec{\Phi}(x,y,z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + (y+z)\vec{k}$. Considere a superfície

$$\sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z^2 + 3x^2 + \frac{y^2}{3} = 4 \wedge z \geq 1\}$$

orientada segundo a normal dirigida para cima. O valor de $\displaystyle\iint_\sigma \text{rot}\vec{\Phi} \cdot \vec{n}\, dS$ é:

A. 6π, B. 3π, C. 2π, D. 12π, E. Nenhum dos casos anteriores.

13. Considere a superfície Γ em $\mathbb{R}^3$ com parametrização

$$\vec{r}(u,v) = (u\cos v, 2u\cos v, v)\,, \quad (u,v) \in [0,1] \times [0,2\pi].$$

Seja λ a área de Γ. Tem-se:

A. $\lambda = \sqrt{5}\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} |\cos v| dv\right) du$,

B. $\lambda = \sqrt{5}\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sin v\, dv\right) du$,

C. $\lambda = \sqrt{5}\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \cos u\, dv\right) du$,

D. $\lambda = \sqrt{5}\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} |\sin u| dv\right) du$,

E. Nenhum dos casos anteriores.

14. Seja S o sólido de $\mathbb{R}^3$, limitado pelas $z = 2-(x^2+y^2)$ e $z = x^2+y^2$. Seja σ a fronteira de S, orientada com a normal exterior. Considere o campo vetorial $\vec{F}$ definido em $\mathbb{R}^3$ por
$$\vec{F}(x,y,z) = (xz)\vec{\imath} + (yz)\vec{\jmath} + \vec{k}.$$
Considere o fluxo $F = \iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$. Usando coordenadas cilíndricas r, θ, z, tem-se:

   A. $F = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_{r^2}^{2-r^2} zr\, dz \right) dr \right) d\theta,$

   B. $F = 2\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{r^2}^{2-r^2} zr\, dz \right) d\theta \right) dr,$

   C. $F = 2\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{2-r^2}^{r^2} z\, dz \right) d\theta \right) dr,$

   D. $F = 2\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^2 z\, dz \right) dr \right) d\theta,$

   E. $F = -2\int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{r^2}^{2-r^2} zr\, dz \right) d\theta \right) dr.$

15. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um função de classe C^1. Sabe-se que
$$\int_\gamma (2xy + h(x,y))dx + (x^2 + x\cos y)\, dy = 0$$
para toda a curva γ regular e fechada em $\mathbb{R}^2$. Um possível valor para a função h é:
A. $h(x,y) = yx^2 + x\sin y$, B. $h(x,y) = \frac{x^2}{2} + \sin y$, C. $h(x,y) = -\cos y$,
D. $h(x,y) = -x^2 - x\cos y$, E. Nenhum dos casos anteriores.

16. Considere o campo vetorial $\vec{F}(x,y) = (2xe^{x^2+y^3} + 1)\vec{\imath} + 3y^2e^{x^2+y^3}\vec{\jmath}$ em $\mathbb{R}^2$. Seja C uma curva seccionalmente regular que começa em $(1,1)$ e termina em $(0,0)$ e
$$A = \int_C (2xe^{x^2+y^3} + 1)\, dx + 3y^2e^{x^2+y^3}\, dy.$$
Tem-se:

   A. A função $f(x,y) = e^{x^2+y^3} + x + \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$ é uma função potencial de $\vec{F}(x,y)$ e $A = -e^2$.

   B. A função $f(x,y) = e^{x^2+y^3}$ é uma função potencial de $\vec{F}(x,y)$ e $A = 1 - e^2$.

   C. O campo vetorial $\vec{F}$ é conservativo e $A = 3\mathrm{e}^2$.

   D. O campo vetorial não é conservativo.

   E. Nenhum dos casos anteriores.