ANÁLISE MATEMÁTICA III C

5ªsemana de aulas

NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY

Cláudio Fernandes

caf@fct.unl.pt

Slides para acompanhamento das aulas TP1 e TP4

O material completo do Prof. João de Deus Marques encontra-se no CLIP, na página da UC

29. A equação

$$\left(\frac{e^{3x}}{\cos y} - \frac{\sin y}{\cos y}\right)dx + dy = 0$$

tem factores integrantes da forma $h(x,y) = f(x)\cos y$. Determine um desses factores integrantes e a solução geral da equação.

se $h(x,y) = f(x)\cos y$ é um factor integrante da equação é porque

$$h(x,y)\left(\frac{e^{3x}}{\cos y} - \frac{\sin y}{\cos y}\right)dx + h(x,y)\,dy = 0$$

é diferencial exacta, i.e.,

$$\underbrace{f(x)\left(e^{3x} - \sin y\right)}_{M(x,y)}dx + \underbrace{f(x)\cos y}_{N(x,y)}\,dy = 0 \text{ é exacta.}$$

Se esta equação é exacta, então

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(f(x)\left(e^{3x} - \sin y\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x)\cos y\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x)\left(-\cos y\right) = f'(x)\cos y$$

$$\Leftrightarrow -f(x)\cancel{\cos y} = f'(x)\cancel{\cos y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -1 \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int -1\,dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|f(x)| = -x + C$$

$$\Leftrightarrow |f(x)| = e^{-x+C} \Leftrightarrow |f(x)| = e^{-x}\underbrace{e^{C}}_{k}$$

$$\Leftrightarrow |f(x)| = k e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \pm k e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(x) = \tilde{C} e^{-x} \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}}$$

Os factores integrantes $h(x,y) = f(x)\cos y$ são então da forma

$$\boxed{h(x,y) = \tilde{C} e^{-x} \cdot \cos y \quad , \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}}$$

Escolhemos um, por exemplo, $h(x,y) = e^{-x} \cos y$ para encontrar a solução geral da equação.

Ora,

$$e^{-x} \cos y \left(\frac{e^{3x}}{\cos y} - \frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} \right) dx + e^{-x} \cos y \, dy = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(e^{2x} - e^{-x} \operatorname{sen} y\right) dx + e^{-x} \cos y \, dy \quad \text{é exacta.}$$

Procuremos uma função potencial:

$f(x,y) = ?$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{2x} - e^{-x} \operatorname{sen} y & (2) \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{-x} \cos y \Rightarrow f(x,y) = e^{-x} \operatorname{sen} y + h(x) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cancel{- e^{-x} \operatorname{sen} y} + h'(x)$$

$$\| \; (2)$$

$$e^{2x} \cancel{- e^{-x} \operatorname{sen} y}$$

Logo, $h'(x) = e^{2x} \Rightarrow h(x) = \frac{1}{2} e^{2x} + c$

$\therefore \boxed{f(x,y) = e^{-x} \operatorname{sen} y + \frac{1}{2} e^{2x} + c} \quad c \in \mathbb{R}$

Solução geral:

$$e^{-x} \operatorname{sen} y + \frac{1}{2} e^{2x} = K \quad , \quad K \in \mathbb{R}$$

Equações de primeira ordem não resolvidas em ordem à derivada

A equação de Lagrange

Chama-se *equação de Lagrange* a uma equação da forma

$$y = x\alpha(y') + \beta(y'), \tag{0.31}$$

onde $\alpha(y') \neq y'$.
Suponhamos que existem intervalos abertos I e J tais que $y(x)$ é diferenciável em I e $y'(x)$ é um difeomorfismo de I em J.
Suponhamos também que as funções α e β são diferenciáveis em J.
Vamos resolver a equação de Lagrange, procurando soluções que verifiquem as condições referidas, começando por efetuar a substituição $y' = p$.
A equação passa então a escrever-se

$$y = x\alpha(p) + \beta(p).$$

Derivando esta última equação em ordem a x, obtém-se a equação

$$p = \alpha(p) + (x\alpha'(p) + \beta'(p))\frac{dp}{dx}.$$

Considerando x como função incógnita e p variável independente e tendo em conta que, pelo teorema da derivada da função inversa, $\frac{dp}{dx} = \left(\frac{dx}{dp}\right)^{-1}$ obtém-se a equação linear

$$\frac{dx}{dp} - \left(\frac{\alpha'(p)}{p - \alpha(p)}\right) x = \frac{\beta'(p)}{p - \alpha(p)}.$$

Sendo $x = g(p, c)$ o integral geral desta equação, o integral geral de (**??**) é dado parametricamente por

$$\begin{cases} x = g(p, c) \\ y = x\alpha(p) + \beta(p). \end{cases}$$

Exemplo

Considere-se o PVI

$$y = x(1 + y') + y', \quad y(0) = 1.$$

Efetuando a mudança de variável $y' = p$*, a equação diferencial linear na função incógnita* x *e na variável independente* p *que se obtém é*

$$\frac{dx}{dp} + x = -1,$$

que tem como solução geral $\qquad x = ce^{-p} - 1.$

A solução da equação de Lagrange $y = x(1 + y') + y'$*, na forma paramétrica, é*

(continua)

Exemplo (continuação)

$$\begin{cases} x = ce^{-p} - 1 \\ y = x(1+p) + p. \end{cases}$$

O PVI considerado tem como solução, na forma cartesiana,

$$y = 1 + 2x - (x+1)\log(x+1), \quad x \in]-1, +\infty[\qquad \textit{[verifique]}.$$

Não é difícil verificar que $y(x)$ *é diferenciável em* $]-1, \infty[$ *e que* $y'(x)$ *é um difeomorfismo de* $]-1, \infty[$ *em* $\mathbb{R}$*, pelo que a função* $y(x)$ *encontrada é de facto a solução pretendida.*

A equação de Clairaut

Chama-se *equação de Clairaut* a uma equação da forma

$$y = x\,y' + \beta(y') \tag{0.32}$$

em que β é uma função diferenciável em algum intervalo aberto. Analogamente ao que foi feito na resolução da equação de Lagrange efetuando a mudança de variável $y' = p$, obtém-se

$$y = x\,p + \beta(p).$$

Derivando a equação em ordem a x tem-se

$$p = p + (x + \beta'(p))\frac{dp}{dx},$$

pelo que

$$x + \beta'(p) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{dx} = 0.$$

Se $\dfrac{dp}{dx} = 0$ então $p = c$ e a equação (0.32) tem como solução geral a família de retas

$$y = cx + \beta(c).$$

(Família de soluções)

Se $x + \beta'(p) = 0$ obtém-se a solução, dada sob forma paramétrica,

$$\begin{cases} x = -\beta'(p) \\ y = -\beta'(p)p + \beta(p). \end{cases}$$

(Solução singular)

Trata-se de uma solução singular da equação (0.32) e constitui a envolvente da família de rectas $y = cx + \beta(c)$.

Exemplo

O que acabámos de provar permite afirmar que a equação de Clairaut

$$y = xy' + (y')^2$$

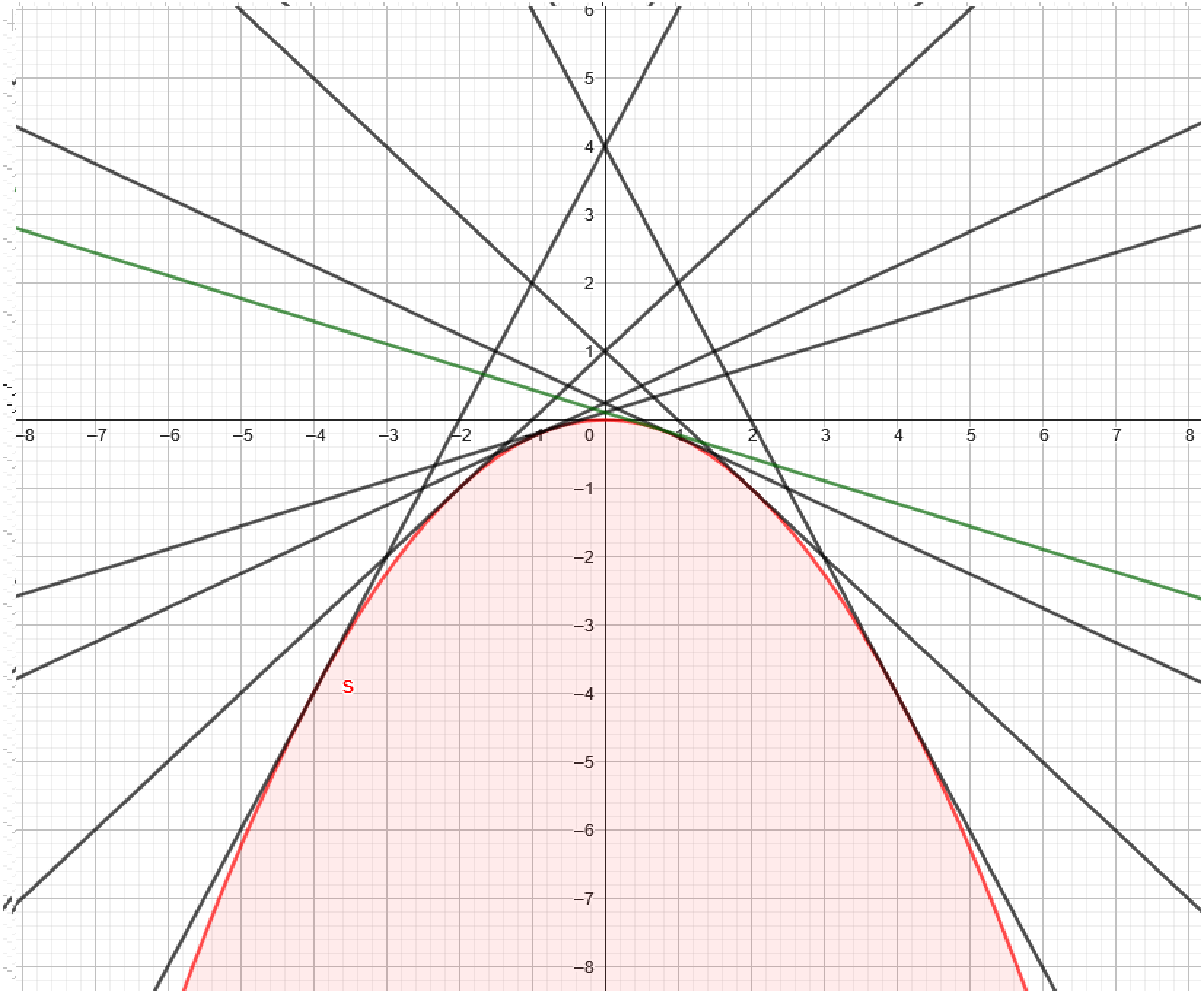
tem como solução geral a família de retas

$$y = cx + c^2, \quad c \in \mathbb{R}$$

e como solução singular, na forma paramétrica,

$$\begin{cases} x = -2p \\ y = -p^2, \end{cases}$$

e na forma cartesiana, $\quad y = -\dfrac{x^2}{4} \quad$ *[verifique].*


S

Sistemas de equações lineares de coeficientes constantes

Sistemas de equações lineares de coeficientes constantes

Considere-se o problema da determinação das funções $x(t)$ e $y(t)$ que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t \\ 4\dfrac{dx}{dt} + 3x - \dfrac{dy}{dt} = \sin t \end{cases} \quad . \tag{0.33}$$

Trata-se de um *sistema de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes*, de duas equações e duas funções incógnitas.

Representando por D o operador de derivação em ordem a t, isto é, $D = \dfrac{d}{dt}$, o sistema (0.33) escreve-se na forma

$$\begin{cases} Dx + y = \cos t \\ (4D+3)x - Dy = \sin t \end{cases} \qquad (0.34)$$

Um método de eliminação, análogo ao método de eliminação de Gauss utilizado na resolução de sistemas de equações lineares, permite resolver o sistema (0.33).

Suponhamos que é possível substituir o sistema (0.33)por um equivalente onde a segunda equação depende apenas de uma das funções incógnitas. Se assim for, resolvendo esta segunda equação (linear e de coeficientes contantes) determina-se uma das funções incógnitas, digamos $x(t)$. Substituindo a função $x(t)$ determinada, na primeira equação obtém-se uma nova equação na função incógnita $y(t)$ (também linear e de coeficientes constantes) que permite obter a segunda função incógnita. Com efeito:

Derivando a primeira equação do sistema (0.33) em ordem a t e somando-se o resultado à segunda equação, obtém-se

$$D^2x + Dy + (4D+3)x - Dy = -\sin t + \sin t$$

ou seja,

$$(D^2 + 4D + 3)x = 0.$$

O sistema (0.33)é assim equivalente a

$$\begin{cases} Dx + y = \cos t \\ (D^2 + 4D + 3)x = 0 \end{cases} . \qquad (0.35)$$

A segunda equação do sistema é uma equação linear de coeficientes constantes que depende apenas da função incógnita $x(t)$. A sua equação característica é

$$r^2 + 4r + 3 = 0,$$

que tem como soluções $r = -1$ e $r = -3$. Assim, o integral geral da segunda equação do sistema (0.35) é

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}, \quad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{0.36}$$

Substituíndo (0.36) na primeira equação equação do sistema (0.35), $y = \cos t - Dx$, vem

$$y = \cos t - D(c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t})$$

ou seja,

$$y(t) = \cos t + c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{-3t}, \qquad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

A solução geral do sistema é

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} \\ y(t) = \cos t + c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{-3t} \end{cases}, \qquad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{0.37}$$

Um sistema de n equações diferenciais lineares de coeficientes constantes com n funções incógnitas é um sistema da forma

$$
\begin{cases}
P_{11}(D)y_1 + P_{12}(D)y_2 + \cdots + P_{1n}(D)y_n = f_1(t) \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
P_{i1}(D)y_1 + P_{i2}(D)y_2 + \cdots + P_{in}(D)y_n = f_i(t) \longleftarrow \ i\text{-ésima equação} \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad (E_i) \\
P_{j1}(D)y_1 + P_{j2}(D)y_2 + \cdots + P_{jn}(D)y_n = f_j(t) \longleftarrow \ j\text{-ésima equação} \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad (E_j) \\
P_{n1}(D)y_1 + P_{n2}(D)y_2 + \cdots + P_{nn}(D)y_n = f_n(t),
\end{cases}
$$

onde $P_{ij}(D)$, com $1 \leq i, j \leq n$, são polinómios em D com coeficientes constantes.

Seja $P(D)$ um polinómio em D de coeficientes constantes e

$$P(D)\left(\sum_{k=1}^{n} P_{ik}(D)y_k\right) = P(D)f_i \tag{0.38}$$

a equação que se obtém por aplicação do operador $P(D)$ à i-ésima equação. Substituindo no último sistema a j-ésima equação pela sua soma com a equação (E_i) , isto é por

$$\sum_{k=1}^{n} P_{jk}(D)y_k + P(D)\left(\sum_{k=1}^{n} P_{ik}(D)y_k\right) = f_j + P(D)f_i$$

que representamos de forma simbólica por

$$E_j \to E_j + P(D)E_i,$$

obtém-se o sistema

Suponhamos que efectuando um número finito de transformações do tipo considerado é possível reduzir o sistema a um com a forma

$$\left\{\begin{array}{r} Q_{11}(D)y_1^* + Q_{12}(D)y_2^* + Q_{13}(D)y_3^* + \cdots + Q_{1n}(D)y_n^* = g_1(t) \\ Q_{22}(D)y_2^* + Q_{23}(D)y_3^* + \cdots + Q_{2n}(D)y_n^* = g_2(t) \\ Q_{33}(D)y_3^* + \cdots + Q_{3n}(D)y_n^* = g_3(t) \\ \vdots \\ Q_{nn}(D)y_n^* = g_n(t) \end{array}\right. , \tag{0.39}$$

em que $y_1^*, y_2^*, \cdots, y_n^*$ são as funções $y_1, y_2, \cdots, y_n$, escritas, eventualmente, por outra ordem e nenhum dos polinómios $Q_{ii}(D)$, com $1 \leq i \leq n$, é identicamente nulo. Então a solução do sistema obtêm-se resolvendo n equações lineares de coeficientes constantes, cada uma delas dependendo apenas de uma função incógnita. Com efeito, resolvendo a última equação determina-se y_n^*. Substituindo a função obtida na penúltima equação determina-se y_{n-1}^*. A repetição deste processo conduz à determinação das funções $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_{n-1}^*, y_n^*$ que constituem a solução do sistema.

O polinómio em D definido pelo determinante

$$|P_{rs}(D)|_{1\leq r,s\leq n} = \begin{vmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) & \cdots & P_{1n}(D) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(D) & P_{n2}(D) & \cdots & P_{nn}(D) \end{vmatrix}, \qquad (0.40)$$

é designando por *determinante característico do sistema* e o seu grau é igual ao número total de constantes arbitrárias presentes na solução do sistema.

Exemplo

Determinem-se as funções $x(t)$ e $y(t)$ que satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} (D-2)x + (D-1)y = 0 \\ (2D^2 - 3D - 2)x + (D^2 - D - 2)y = 0 \end{cases} \tag{0.46}$$

em que D é o operador de derivação $\dfrac{d}{dt}$.
O determinante característico do sistema é

$$\begin{vmatrix} D-2 & D-1 \\ 2D^2 - 3D - 2 & D^2 - D - 2 \end{vmatrix} = -D^3 + 2D^2 - D + 2,$$

Exemplo

pelo que o integral geral do sistema (0.46) depende de três constantes arbitrárias. Determine-se a solução do sistema.
Aplicando o operador $(-2D)$ *à primeira equação de (0.46) e somando o resultado à segunda equação, vem que*

$$(-2D^2+4D)x+(-2D^2+2D)y+(2D^2-3D-2)x+(D^2-D-2)y=0,$$

ou seja,

$$(D-2)x+(-D^2+D-2)y=0,$$

e o sistema (0.46) é equivalente a

$$\begin{cases}(D-2)x+(D-1)y=0\\(D-2)x+(-D^2+D-2)y=0.\end{cases}\tag{0.47}$$

Exemplo

Multiplicando a segunda equação de (0.47) *por* (-1) *e somando o resultado à primeira equação, vem*

$$(-D+2)x+(D^2-D+2)y+(D-2)x+(D-1)y=0,$$

ou seja,

$$(D^2+1)y=0,$$

e o sistema (0.47) *é equivalente a*

$$\begin{cases}(D-2)x+(D-1)y=0\\ (D^2+1)y=0\end{cases}. \tag{0.48}$$

Resolvendo a segunda equação de (0.48)*, obtém-se*

$$y(t)=c_1\sin t+c_2\cos t,\quad \textit{com } c_1, c_2 \textit{ constantes arbitrárias.}$$

Exemplo

Substituindo a função $y(t)$ *na primeira equação de* (0.47), *vem*

$$(D-2)x = -(D-1)(c_1 \sin t + c_2 \cos t),$$

ou seja,

$$(D-2)x = (c_1 + c_2) \sin t + (c_2 - c_1) \cos t. \qquad (0.49)$$

A equação homogénea associada tem por integral geral

$$x^*(t) = c_3 e^{2t};$$

como i *não é raiz da equação característica a equação completa admite uma solução particular da forma*

$$\overline{x}(t) = A \sin t + B \cos t,$$

com A *e* B *constantes a determinar.*

Exemplo

Substituindo $\overline{y}(t) = A\sin t + B\cos t$ *em* (0.49) *conclui-se que*

$$A = \frac{-c_2 - 3c_1}{5} \quad e \quad B = \frac{c_1 - 3c_2}{5}.$$

Assim a solução do sistema é

$$\begin{cases} x(t) = c_3 e^{2t} - \left(\frac{c_2 + 3c_1}{5}\right)\sin t + \left(\frac{c_1 - 3c_2}{5}\right)\cos t \\ y(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{cases},$$

com c_1, c_2 *e* c_3 *constantes arbitrárias.* $\square$

Exemplo

Determine as funções $x(t)$ e $y(t)$ que satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes

$$\begin{cases} (D^2+1)x + (D-2)y = t \\ (3D^4+2D^2-1)x + (3D^3-6D^2+2)y = 1-t \end{cases}$$

onde D designa o operador de derivação em ordem a t.

Exemplo

O determinante característico do sistema tem grau três pelo que a solução do sistema depende de três constantes arbitrárias. Determine-se a solução do sistema: aplicando o operador $-3D^2+1$ *à primeira equação do sistema e somando o resultado à segunda, obtém-se*

$$Dy = 1,$$

donde

$$y = t + c_1.$$

Substituindo a função $y = t + c_1$ *na primeira equação obtém-se*

$$(D^2+1)x = 3t + 2c_1 - 1.$$

A equação homogénea associada $(D^2+1)x = 0$ *tem por integral geral*

$$x^*(t) = c_2 \cos t + c_3 \sin t.$$

Exemplo

O sistema tem por solução

$$\begin{cases} x(t) = c_2 \cos t + c_3 \sin t + 3t + 2c_1 - 1 \\ y(t) = t + c_1 \end{cases}$$

com c_1, c_2 *e* c_3 *constantes arbitrárias.* $\square$

Exemplo

Determinem-se as funções $x(t)$ e $y(t)$ que satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} (D^3 + D^2 - D - 1)x + (-D^2 + 2D - 1)y = 1 + t \\ (D^2 - 1)x + (-D^2 + D)y = t \end{cases} \tag{0.41}$$

em que D é o operador de derivação $\dfrac{d}{dt}$.
O determinante característico do sistema é

$$\begin{vmatrix} D^3 + D^2 - D - 1 & -D^2 + 2D - 1 \\ D^2 - 1 & -D^2 + D \end{vmatrix} = \text{ polinómio de grau } 5 \text{ ,}$$

Exemplo

pelo que o integral geral do sistema (0.41) *depende de cinco constantes arbitrárias. Determine-se a solução do sistema. Aplicando o operador* (-1) *à segunda equação de* (**??**) *e somando o resultado à primeira equação, vem que*

$$(-D^2+1)x+(D^2-D)y+(D^3+D^2-D-1)x+(-D^2+2D-1)y=1+t-t,$$

ou seja,

$$(D^3-D)x+(D-1)y=1,$$

e o sistema (0.42) *é equivalente a*

$$\begin{cases}(D^3-D)x+(D-1)y=1\\(D^2-1)x+(-D^2+D)y=t.\end{cases}\tag{0.42}$$

Exemplo

*Aplicando o operador $(-D)$ à segunda equação de (**??**) e somando o resultado à primeira equação, vem que*

$$(-D^3 + D)x + (D^3 - D^2)y + (D^3 - D)x + (D - 1)y = 0,$$

ou seja,

$$(D^3 - D^2 + D - 1)y = 0,$$

*e o sistema (**??**) é equivalente a*

$$\begin{cases} (D^3 - D^2 + D - 1)y = 0 \\ (D^2 - 1)x + (-D^2 + D)y = t. \end{cases} \tag{0.43}$$

Exemplo

O sistema já está condensado uma vez que a sua primeira equação só depende da função $y(t)$. Resolva-se a equação

$$(D^3 - D^2 + D - 1)y = 0.$$

Trata-se de uma equação diferencial linear de coeficientes constantes homogénea de equação característica

$$r^3 - r^2 + r - 1 = 0,$$

cujas soluções são $r = 1$ e $r = \pm i$ todas simples, pelo que tem por solução geral

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

Substituindo a função $y(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t$ *na segunda equação do sistema* (0.43) *vem que*

$$(D^2 - 1)x = t + (c_2 - c_3)\sin t + (-c_2 - c_3)\cos t. \tag{0.44}$$

A equação homogénea associada a esta última equação é

$$(D^2 - 1)x = 0,$$

de solução geral

$$x^*(t) = c_4 e^t + c_5 e^{-t}.$$

Exemplo

As equações não homogéneas

$$(D^2 - 1)x = t,$$

e

$$(D^2 - 1)x = (c_2 - c_3)\sin t + (-c_2 - c_3)\cos t,$$

admitem as soluções particulares

$$\bar{x}_1(t) = -t$$

e

$$\bar{x}_2(t) = \frac{1}{2}(c_2 + c_3)\cos t + \frac{1}{2}(c_3 - c_2)\sin t$$

respectivamente [justifique].

Exemplo

A solução geral da equação (0.44) *é*

$$x(t) = c_4 e^t + c_5 e^{-t} - t + \frac{1}{2}(c_2 + c_3)\cos t + \frac{1}{2}(c_3 - c_2)\sin t,$$

e o sistema considerado tem por solução

$$\begin{cases} x(t) = c_4 e^t + c_5 e^{-t} - t + \frac{1}{2}(c_2 + c_3)\cos t + \frac{1}{2}(c_3 - c_2)\sin t \\ y(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t, \quad c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{0.45}$$