**Análise Matemática II C** **26 Julho de 2023**
**Exame de Época Especial** **Duração: 3h - Versão A**

1. Considere a função vetorial

$$\vec{r}:[0,4\pi]\to\mathbb{R}^3\,,\quad \vec{r}(t)=\cos(\pi+t)\,\vec{i}+\operatorname{sen}(\pi+t)\,\vec{j}+\sqrt{3}\,t\,\vec{k}$$

e designe por $C$ a curva orientada definida por $\vec{r}$. A equação vetorial da reta tangente à curva $C$ no ponto $(1,0,3\sqrt{3}\pi)$ é:

A. $(x,y,z)=(1,0,3\sqrt{3}\pi)+\lambda(2\sqrt{3},1,0),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$
B. $(x,y,z)=(1,0,3\sqrt{3}\pi)+\lambda(0,1,2\sqrt{3}),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$
C. $(x,y,z)=(1,0,3\sqrt{3}\pi)+\lambda(0,1,\sqrt{3}),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$
D. $(x,y,z)=(1,0,3\sqrt{3}\pi)+\lambda(0,1,3\sqrt{3}),\quad \lambda\in\mathbb{R}.$
E. Nenhum dos casos anteriores.

2. A equação do plano tangente à superfície de nível $x^3+y^3+(x+1)e^z=2$ no ponto $(1,-1,0)$ é:

A. $-4x+3y+2z=-1$, B. $4x-3y-2z=1$, C. $-4x-3y+2z=-1$,
D. $4x+3y+2z=1$, E. $-4x-3y-2z=1$.

3. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$C=\left\{(x,y)\in[-1,1]\times[-1,1]:\ x^2+y^2>1\right\}\cup\left\{(0,0)\right\}.$$

Tem-se ($C'$ é o conjunto dos pontos de acumulação de $C$ e $\overline{C}$ é a aderência de $C$):

A. $\operatorname{int}(C)=C,\ C'=C\setminus\{(0,0)\}$ e $C$ é um conjunto aberto.
B. $\operatorname{int}(C)\neq C,\ C'=\overline{C}\setminus\{(0,0)\}$ e $C$ é um conjunto limitado.
C. $\operatorname{int}(C)=C,\ \overline{C}=C\setminus\{(0,0)\}$ e $C$ é um conjunto aberto.
D. $\operatorname{int}(C)\neq C,\ \overline{C}=C$ e $C$ é um conjunto fechado.
E. Nenhum dos casos anteriores.

4. Seja $C$ o segmento de reta $[AB]$ com $A=(0,0)$ e $B=(1,1)$, percorrido de $A$ para $B$. O valor do integral curvilíneo $\displaystyle\int_C x^2dx+y^2dy$ é:

A. $\frac{1}{2}$, B. $\frac{3}{2}$, C. $\frac{1}{3}$, D. $\frac{2}{3}$, E. Nenhum dos casos anteriores.

5. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^2}{x^4+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Tem-se:

A. Os limites direcionais de $f$ no ponto $(0,0)$ dependem do declive da reta e $f$ não é contínua no ponto $(0,0)$.

B. $|f(x,y) - 0| \leq \|(x,y)\|$, $\forall (x,y) \neq (0,0)$, e $f$ é contínua no ponto $(0,0)$.

C. A função $f$ não é contínua no ponto $(1,0)$.

D. Os limites iterados no ponto $(0,0)$ são diferentes dos limites direcionais.

E. Nenhum dos casos anteriores.

6. Considere $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{3(y-1)e^{-(x-1)^2}}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$. Tem-se:

A. O limite não existe, B. O limite é igual a $-1$, C. O limite é igual a 1,
D. O limite é igual a e, E. Nenhum dos casos anteriores.

7. Seja $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^2}{x^4+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Tem-se:

A. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$ e $D_{\vec{u}}f(0,0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

B. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ e $D_{\vec{u}}f(0,0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

C. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ e $D_{\vec{u}}f(0,0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

D. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ e $D_{\vec{u}}f(0,0) = 2\sqrt{2}$.

E. Nenhum dos casos anteriores.

8. Considere uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ em $\mathbb{R}^2$ tal que $\nabla f\left(\dfrac{1}{2}, 0\right) = (-1,1)$. Considere a função

$$H(x,y) = f\left(\frac{\operatorname{sen} y}{1+x^2},\ x + \cos(2y)\right).$$

Tem-se:

A. $\frac{\partial H}{\partial x}(1, \frac{\pi}{2}) = 2$, B. $\frac{\partial H}{\partial x}(1, \frac{\pi}{2}) = \frac{7}{2}$, C. $\frac{\partial H}{\partial x}(1, \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}$
D. $\frac{\partial H}{\partial x}(1, \frac{\pi}{2}) = \frac{5}{2}$, E. Nenhum dos casos anteriores.

9. Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2$ em $\mathbb{R}$ tal que $\varphi'(0) = 5$, $\varphi''(0) = -1$. Considere $u(x,t) = \varphi(x^2 - 2t)$. Tem-se:

A. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(2,2) = -6$, B. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(2,2) = -16$,

C. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(2,2) = -5$, D. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(2,2) = -1$,

E. Nenhum dos casos anteriores.

10. Seja $I = \displaystyle\int_0^2 \int_y^2 \mathrm{e}^{x^2} dxdy$. Tem-se:
(Sugestão: troque a ordem de integração)

A. $I = \mathrm{e}^4 - 1$, B. $I = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^4 - 1\right)$, C. $I = 2\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$, D. $I = 2(\mathrm{e}^4 - 1)$,
E. Nenhum dos casos anteriores.

11. A equação

$$e^{xz} + y \operatorname{sen} x - y^2 + z^3 + 2x = 2\pi,$$

define implicitamente $x$ como função de $y$ e $z$ numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, z_0) = (\pi, 1, 0)$. Para essa função tem-se:

A. $\frac{\partial x}{\partial y}(1,0) = \pi$, B. $\frac{\partial x}{\partial y}(1,0) = 2$, C. $\frac{\partial x}{\partial y}(1,0) = -\pi$,
D. $\frac{\partial x}{\partial y}(1,0) = 0$, E. $\frac{\partial x}{\partial y}(1,0) = -2$.

12. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{y^4}{2} - xy^2 + x^2 - 4x$. Escolha a afirmação correta.

A. A função $f$ tem um máximo local no ponto $(4,-2)$.
B. $(4,2)$ é um ponto de sela da função $f$.
C. A função $f$ não tem máximos locais, e têm um mínimo local no ponto $(4,2)$.
D. A função $f$ não tem máximos locais, e tem um mínimo local no ponto $(2,0)$.
E. Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

13. Considere a superfície $\sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{3}\,x,\ (x,y) \in [0,1] \times [0,2]\right\}$, orientada com a terceira componente do campo vetorial normal não negativa, e o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = -3\left(x^2 + \dfrac{z^2}{4}\right)\vec{j}$. Seja $\mathcal{L}$ o bordo de $\sigma$ orientado positivamente de acordo com $\sigma$. O valor do integral curvilíneo $\displaystyle\int_{\mathcal{L}} -\frac{1}{4}z^3\, dx + x^3\, dz$ é:

A. $-\iint_\sigma \vec{F}.\vec{n}\, dS$, B. $-2\iint_\sigma \vec{F}.\vec{n}\, dS$,

C. $2\iint_\sigma \vec{F}.\vec{n}\, dS$, D. $\frac{1}{2}\iint_\sigma \vec{F}.\vec{n}\, dS$,

E. Nenhum dos casos anteriores.

14. Seja $f(x,y)$ uma função contínua em $\mathbb{R}^2$. Considere a igualdade

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Tem-se:

A. $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$

B. $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy = \int_0^{\sqrt{2}} \left( \int_0^1 f(x,y)\,dy \right)\,dx.$

C. $$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$$

D. $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$

E. Nenhum dos casos anteriores.

15. Seja $I = \displaystyle\iint_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dxdy$ onde $R$ é o triângulo definido pelas rectas de equações $x=0$, $y=0$ e $x+y=4$. Tem-se:
(Sugestão: considere a mudança de variáveis $u = x-y,\;\; v = x+y$)

A. $I = 4(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})$, B. $I = \mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}$, C. $I = 2(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1})$,
D. $I = \mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}$, E. Nenhum dos casos anteriores.

16. Denote por $\lambda$ a área do domínio plano
$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1 \wedge x^2+y^2 \leq 2y\right\}$. Tem-se:

A. $\lambda = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_1^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} r\,drd\theta.$

B. $\lambda = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_1^{2\cos\theta} r\,drd\theta + \int_{\frac{11\pi}{6}}^{2\pi} \int_1^{2\cos\theta} r\,drd\theta.$

C. $\lambda = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \int_1^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} r\,drd\theta.$

D. $\lambda = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{2\cos\theta} r\,drd\theta + \int_{\frac{5\pi}{3}}^{2\pi} \int_1^{2\cos\theta} r\,drd\theta.$

E. Nenhum dos casos anteriores.

17. Considere o sólido $\mathcal{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\; x^2+y^2+z^2 \leq 9,\; z \leq \sqrt{x^2+y^2},\; y \geq 0\right\}$.
Sabendo que $\mathcal{E}$ tem por função densidade $d(x,y,z) = x^2+y^2$, a massa deste sólido é:

A. $\frac{3^4}{4}\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}(2\varphi)\,d\varphi$, B. $\frac{3^5}{5}\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \mathrm{sen}^3(\varphi)\,d\varphi$, C. $2\pi\frac{3^5}{5} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \mathrm{sen}\,(\varphi)\,d\varphi$,

D. $\frac{3^5}{5}\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{sen}^2(\varphi)\,d\varphi$,

E. Nenhum dos casos anteriores.

18. Seja $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ a curva fechada simples, seccionalmente regular, orientada no sentido positivo, definida pela reunião de $C_1$, $C_2$, $C_3$ tal que

$$\begin{aligned} C_1: &\quad y = 0, \quad 0 \le x \le 2; \\ C_2: &\quad x^2 + y^2 = 4, \quad 1 \le x \le 2 \wedge y \ge 0; \\ C_3: &\quad y = \sqrt{3}x, \quad 0 \le x \le 1. \end{aligned}$$

.

O valor de $\int_C xy\,dy$ é:
(Sugestão: use o teorema de Green)

A. 0, B. $\frac{7}{3}$, C. $-\frac{4}{3}$, D. $\frac{4}{3}$, E. $\frac{10}{3}$.

19. Considere o campo vetorial $\vec{\Phi}(x,y,z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + (y+z)\vec{k}$. Considere a superfície

$$\sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z^2 + 3x^2 + \frac{y^2}{3} = 4 \wedge z \ge 1\}$$

orientada segundo a normal dirigida para cima. Seja $I = \displaystyle\iint_\sigma \text{rot}\vec{\Phi} \cdot \vec{n}\,dS$.
Tem-se:
(Sugestão: use o o teorema de Stokes)

A. $I = 6\pi$, B. $I = 3\pi$, C. $I = 2\pi$, D. $I = 12\pi$,
E. Nenhum dos casos anteriores.

20. Considere o campo de forças conservativo $\vec{F}(x,y) = (2xe^{x^2-2y} + 2x)\vec{i} - 2e^{x^2-2y}\vec{j}$ em $\mathbb{R}^2$. Denote por $W$ o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}$ ao longo de uma curva seccionalmente regular que começa em $(1,1)$ e termina em $(0,0)$. Tem-se:

A. $W = -1 - \mathrm{e}^{-1}$, B. $W = 1 - \mathrm{e}^{-1}$, C. $W = -\mathrm{e}^{-1}$, D. $W = \mathrm{e}^{-1}$,
E. Nenhum dos casos anteriores.

21. Seja $\mathcal{E}$ o sólido em $\mathbb{R}^3$ definido pelas condições:

$$0 \le z \le 3, \quad 1 \le x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \le z + 1.$$

O volume de $\mathcal{E}$ é

A. $\frac{10\pi}{3}$, B. $\frac{9\pi}{2}$, C. $\frac{8\pi}{3}$, D. $9\pi$, E. Nenhum dos casos anteriores.

22. Considere o sólido $D$ de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq z \leq 2\right\}.$$

Designe por $\sigma$ a superfície correspondente à fronteira de $D$ orientada pela normal exterior $\vec{n}$. Seja $\vec{F}$ o campo vetorial de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = (\cos y + x^3, y + 1, 2x^3 - z).$$

O valor do fluxo $\iint\limits_{\sigma} \vec{F}.\vec{n}\, dS$ é:

(Sugestão: use o teorema da divergência)

A. $\frac{8}{5}$, B. $\frac{3}{5}$, C. $\frac{4}{5}$, D. $\frac{6}{5}$, E. Nenhum dos casos anteriores.

23. Considere uma superfície paramétrica $\vec{r}(\theta, \varphi)$, $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{3}]$. Sabendo que

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}(\theta, \varphi) = -16 \cos\theta \operatorname{sen}^2\varphi\, \vec{i} - 16 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\varphi\, \vec{j} - 16 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, \vec{k},$$

$\forall (\theta, \varphi) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{\pi}{3}]$, a área de $\mathcal{S}$ é:

A. $16\pi$, B. $\dfrac{4\pi}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})$, C. $4\pi$, D. $\dfrac{\pi}{3}(4\pi - 3\sqrt{3})$,
E. Nenhum dos casos anteriores.

24. Considere a função $f(x, y, z) = y$ e a superfície paramétrica $\sigma$ definida por

$$\vec{r}(u, v) = \left(\frac{u^2}{2}, u, v\right), \qquad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 2].$$

O valor do integral de superfície $\displaystyle\iint_{\sigma} f(x, y, z)\, dS$ é:

A. $\sqrt{2}$, B. $\sqrt{2} - 1$, C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, D. $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$,
E. Nenhum dos casos anteriores.

25. Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \text{ e } 2y \leq x \leq 3\}$. Denote por $C$ a curva corresponde à fronteira da região plana $D$, percorrida no sentido anti-horário. Considere o campo vetorial $\vec{F}$ em $\mathbb{R}^2$ definido por

$$\vec{F}(x, y) = (\cos^3 x - x, y^5 - xy)\,.$$

O valor de $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é:

A. $\frac{5}{6}$, B. $-\frac{5}{6}$, C. $\frac{1}{6}$, D. $-\frac{1}{6}$,
E. Nenhum dos casos anteriores.