Análise Matemática I - 2021.1

Felipe Pinto 61387 - MIEQB

18 de junho de 2021

Conteúdo

Programa

1. Topologia elementar da recta real

1.1. Pontos:

- Vizinhança de um ponto
- Ponto Interior e Exterior
- Ponto Isolado
- Ponto Aderente
- Ponto de Acumulação

1.2. Conjuntos:

- Aberto e Fechado
- Limitado
- Compacto

2. Indução Matemática e Sucessões

2.1. Princípio de Indução Matemática

2.2.

- Noção de Convergencia
- Limite de uma Sucessão
- Algebra de Limites
- Subsuscessões
- Sublimites
- Teoremas Fundamentais
- Sucessões de Cauchy

3. Limites e Continuidade em R

3.1. Limite de uma Função:

- Segundo Cauchy
- Segundo Heine
- Álgebra de Limites

3.2.

- Continuidade de uma função num ponto
- Prolongamento por Continuidade
- Teorema de Bolzano
- Teorema de Weierstrass
- Continuidade da função composta
- Continuidade da função inversa para a composição de funções
- Funções Inversas Clássicas

4. Calculo Diferencial em R

4.1.

- Definição de diferenciabilidade num ponto
- Interpretação geométrica
- Derivada de uma função
- Composta da Função inversa
- Derivada da Função inversa
- Teorema de Rolle
- Teorema de Lagrange
- Derivada e Monotonia
- Teorema de Darboux
- Teorema de Cauchy
- Regra de L'Hospital-Cauchy

4.2. Teorema de Taylor e Aplicações

5. Cálculo Integral em R

5.1. Primitivas:

- por Partes
- por Substituição
- de Funções Racionais
- de Funções Irracionais
- de Funções Transcendentes

5.2.

- Integral de Riemann
- Teorema do valor médio
- Teorema Fundamental do Cálculo Integral
- Regra de Barrow
- Integração por partes
- Integração por substituição
- Aplicação ao cálculo de áreas

5.3. Integrais Impróprios

I | Background

II | Topologia Elementar na Reta $\mathbb{R}$

1 Vizinhança V_δ

$V_\delta(x) = (x - \delta, x + \delta) \quad \delta \in \mathbb{R}$

Pontos:

2 Minorante

$m \in \text{Minorante}(X) \iff$
$\iff m \in \mathbb{R} \wedge x \geq m \;\forall x \in X$

3 Majorante

$m \in \text{Majorante}(X) \iff$
$\iff m \in \mathbb{R} \wedge x \leq m \;\forall x \in X$

4 Infimo Inf

(i) Standalone

$\text{Inf}(X) = i \iff$
$\iff i \in \mathbb{R} \wedge x \geq m \;\forall x \in X \wedge$
$\wedge \nexists y \in \mathbb{R} \backslash X : i < y < x \;\forall x \in X$

(ii) Usando Vizinhança

$\text{Inf}(X) = i \iff$
$\iff i \in \mathbb{R} \wedge x \geq i \;\forall x \in X \wedge V_\delta(i) \cap X \neq \emptyset$

5 Supremo Sup

(i) Standalone

$\text{Sup}(X) = s \iff$
$\iff s \in \mathbb{R} \wedge x \leq s \;\forall x \in X \wedge$
$\wedge \nexists y \in \mathbb{R} \backslash X : x < y < s$

(ii) Usando Vizinhança

$\text{Sup}(X) = s \iff$
$\iff s \in \mathbb{R} \wedge x \leq s \;\forall x \in X \wedge V_\delta(s) \cap X \neq \emptyset$

6 Minimo Min

(i) Standalone

$\text{Min}(X) = m \iff$
$\iff m \in X \wedge m \leq y \;\forall y \in m$

(ii) Usando Minorante

$\text{Min}(X) = m \iff$
$\iff m \in X \wedge m \in \text{Minorante}(X)$

7 Maximo Max

(i) Standalone

$\text{Max}(X) = m \iff$
$\iff m \in X \wedge m \geq y \;\forall y \in m$

(ii) Usando Majorante

$= \text{Max}(X) = m \iff$
$\iff m \in X \wedge m \in \text{Majorante}(X)$

8 Interior Int

(i) Standalone

$x \in \operatorname{Int}(X) \iff$
$\iff \exists\, \delta > 0 : (x - \delta, x + \delta) \subseteq X$

(ii) Usando Vizinhança

$x \in \operatorname{Int}(X) \iff$
$\iff V_\delta(x) \subseteq X$

9 Exterior Ext

(i) Standalone

$x \in \operatorname{Ext}(X) \iff$
$\iff \exists\, \delta \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : (x - \delta, x + \delta) \cap X = \emptyset$

(ii) Usando Vizinhança

$x \in \operatorname{Ext}(X) \iff$
$\iff V_\delta(x) \cap X = \emptyset$

10 Ponto de Acumulação

x é um ponto de acumulação de $X \iff$
$\iff V_\delta(x) \cap (X\backslash\{x\}) \neq \emptyset$

11 Fronteira Fr

$f \in \operatorname{Fr}(X) \iff$
$\iff V_\delta(f) \cap X \neq \emptyset \wedge V_\delta(f) \cap \mathbb{R}\backslash X \neq \emptyset$

Conjuntos:

12 Limitado

X é um conjunto limitado $\iff$
$\iff \{m_1 \leq x \leq m_2 \quad \forall\, x \in X : m_1 \in \text{Minorante}(X),\ m_2 \in \text{Majorante}(X)\}$

13 Aberto

X é um conjunto aberto $\iff$
$\iff X = \operatorname{Int}(X)$

14 Fechado

X é um conjunto fechado $\iff$
$\iff X = \operatorname{Int}(X) \cup \operatorname{Fr}(X)$

15 Feixe $\overline{X}$

$\bar{X} = \operatorname{Int}(X) \cup \operatorname{Fr}(X)$

III | Indução Matemática

1 Indução por Igualdade

- Prove que é valido para algum n
- Prove que é valido para $n+1 \quad \forall n$: seja valido para n

Seja $V = \left\{P_{(n)} \quad \forall n \in \text{Dominio}\right\}$
$P_{(x)} \in V;\ P_{(x+1)} \in V$

1.1 Exemplo

$$\boldsymbol{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0}$$

(i) $\quad n = 0$

$$\sum_{i=0}^{0} \frac{1}{2^i} = 1 = 2 - \frac{1}{2^0} = 2 - 1 = 1$$

(ii) $\quad n = m + 1$

$$\sum_{i=0}^{m+1} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{m+1}} =$$
$$= 2 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} = 2 - \frac{1}{2^{m+1}}$$

2 Indução por Desigualdade

- Prove que é valido para algum n
- Prove que é valido para $n+1 \quad \forall n$: seja valido para n

2.1 Exemplo 1

$$\boldsymbol{n \leq 2^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

(i) $n = 1$

$1 \leq 2^{1-1} = 1$

(ii) $n = m + 1$

$$m+1 \leq 2^{m-1} + 1 = \frac{2^m + 2}{2} \leq 2^{m+1-1} = 2^m \implies$$
$$\implies 2 \leq 2^{m+1} - 2^m = 2^m(2-1) = 2^m$$

2.2 Exemplo 2

$$\boldsymbol{n^2 \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4}$$

(i) $n = 4$

$4^2 \leq 2^4 = 4^2$

(ii) $n = m + 1$

$$(m+1)^2 = m^2 + 2\,m + 1 \leq$$
$$\leq 2^m + 2\,m + 1 \leq 2 * 2^m = 2^{m+1} \implies$$
$$\implies 2\,m + 1 \leq 2^m;$$
$$\begin{cases} m = 4 \implies 2*4+1 = 9 \leq 2^4 = 16 \\ m = n+1 \implies 2*(n+1)+1 = 2\,n+1+2 \leq \\ \leq 2^n + 2 \leq 2*2^n = 2^{n+1} \implies 2 \leq 2^n \end{cases}$$

IV | Sucessões

$$\boldsymbol{u_{(n)}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

1 Sucessão Monótona

1.1 Decresente

$u_{(n)} \geq u_{(n+1)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

1.2 Crescente

$u_{(n)} \leq u_{(n+1)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

2 Sucessão Limitada

$u_{(n)}$ é limitada $\iff$
$\iff m_1 \leq u_{(n)} \leq m_2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

3 Sucessão Convergente

$u_{(n)}$ converge para $l \in \mathbb{R} \iff$
$\iff \exists\, p \in \mathbb{N} : u_{(n)} \in V_\delta(l) \quad \forall\, n > p$

Nota:

$u_{(n)} \in V_\delta(l) \iff |u_{(n)} - l| < \delta \iff$
$\iff l - \delta < u_{(n)} < l + \delta$

3.1 Exemplo

$$\boldsymbol{u_{(n)} = 1/\sqrt{2\,n - 1};}$$
$$\boldsymbol{u_{(n)} > 0;\;\; \delta = 1/10}$$

$$\iff 0 < \frac{1}{\sqrt{2\,n - 1}} < \frac{1}{10} \iff$$
$$\iff 0 < \frac{1}{2\,n - 1} < \frac{1}{100};\; 2\,n - 1 > 100 \implies$$
$$\implies \lfloor 101/2 \rfloor < n$$

4 Algebra de Limites

4.1

$\boldsymbol{u_{(n)}}$ **é convergente** $\iff$
$\iff u_{(n)} \in V_\epsilon(l) \quad \forall \epsilon > 0 \iff$
$\iff l - \epsilon < u_{(n)} < l + \epsilon \iff$
$\iff \exists \{m_1, m_2\} \subset \mathbb{R} : m_1 < u_{(n)} < m_2$
$\forall n \in \mathbb{N} \iff$
$\iff \boldsymbol{u_{(n)}}$ **é limitada**

4.2

$\boldsymbol{u_{(n)}}$ **é monotona e limitada** $\iff$
$\iff (u_{(n)} < u_{(n+1)} \vee u_{(n)} > u_{(n+1)}) \wedge$
$\wedge \exists \{m_1, m_2\} \subset \mathbb{R} : m_1 < u_{(n)} < m_2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies$
$\implies \exists \operatorname{Sup}(u_{(n)}) \in \mathbb{R} \backslash u_{(n)} \iff$
$\iff \boldsymbol{u_{(n)}}$ **é convergente**

4.3

$\boldsymbol{u_{(n)}}$ **e** $\boldsymbol{v_{(n)}}$ **são convergentes** $\wedge$
$\wedge\, \boldsymbol{u_{(n)} \leq v_{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies}$
$\boldsymbol{\implies \lim_{n\to\infty} u_{(n)} \leq \lim_{n\to\infty} v_{(n)}}$

4.4

$\boldsymbol{u_{(n)}}$ **é limitada** $\wedge\, \boldsymbol{v_{(n)} \to 0 \implies}$
$\boldsymbol{\implies 0 \leq |u_{(n)} * v_{(n)}| = |u_{(n)}| * |v_{(n)}| \leq}$
$\boldsymbol{\leq M * 0 = 0 \quad \forall M \in}$ Majorante$\boldsymbol{(u_n) \implies}$
$\boldsymbol{\implies u_{(n)} * v_{(n)} \to 0}$

5 Lema geral das sucessões enquadradas

$\{u_{(n)}, v_{(n)}, w_{(n)}\} : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \wedge$
$\wedge\, v_{(n)} \leq u_{(n)} \leq w_{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge$
$\wedge\, \exists l \in \mathbb{R} : \{v_{(n)}, w_{(n)}\} \xrightarrow{\text{converge}} l \implies$
$\implies u_{(n)} \xrightarrow{\text{converge}} l$

5.1 Exemplo: $u_{(n)} = \sin(n)/n$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n};\ \left\{\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right\} \to 0 \implies$$
$$\implies \frac{\sin(n)}{n} \to 0$$

6 Subsucessões

6.1 Subsucessão Convergente

7 Sucessão de Cauchy

V | Limites

1 Lema geral das funções enquadradas

1.1 Exemplo: $u_{(n)} = \sin(n)/n$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n};\ \left\{\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right\} \to 0 \implies$$
$$\implies \frac{\sin(n)}{n} \to 0$$

VI | Continuidade em $\mathbb{R}$