AM 2C – Aula 24/10/2022: Maximos e Mínimos

Felipe B. Pinto 61387 - MIEQB

25 de outubro de 2022

Conteúdo

Exemplo 1

$$f(x,y) = (3, x - y^2, x^3 - 3\,y^2)$$

$$\det J\,f(1,1) = \begin{pmatrix} 3 & -2\,y \\ 3\,x^2 & -6\,y \end{pmatrix}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = -18 + 6 = -12 \neq 0$$

$$f(1,1) = (2, -2)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = J\,f^{-1}(2,-2) = J\,f^{-1}(f(1,1)) = (J\,f(1,1))^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = -12^{-1} \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = -12^{-1} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/6 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

Def 1 Invérsa por Adjunta

$$A^{-1} = \frac{\hat{A}^T}{|A|}$$

(i) Exemplo

Para matriz 2×2

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = (a\,d - b\,c)^{-1} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Def 2 Extremos

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \int D$. Diz-se que $f(x_0)$ é um mínimo local ou relativo da função f, se existir $B(x_0, \delta)$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x),\ \forall\, x \in B(x_0, \delta)$$

- Ao ponto x_0 chama-se um minimizante local da função f.
- Diz-se que $f(x_0)$ é um extremo local ou relativo de f se for um mínimo local ou um máximo local

Def 3 Teorema de Weierstraß

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e limitado (compacto) e $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f tem em D um máximo e um mínimo.

(i) Exemplo

$$y = x^2,\ \mathbb{R}$$

Def 4

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad a \in \int D$$

O ponto a diz-se um ponto crítico ou de estacionaridade de f se:

1. Pelo menos uma das dervadas $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a), i \in \{1, \dots, n\}$ não existir, ou
2. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$

Exemplo 2

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0, 0) \iff (2\,x, -2\,y) = (0, 0)$$
$$\therefore (0, 0) \text{ é o único ponto crítico}$$