CN A – Exame Resolução

Felipe B. Pinto 61387 – MIEQB

8 de janeiro de 2024

Conteúdo

Questão 1

Considere o intervalo $[a, b]$, com $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{10} = b$ e uma função não linear, f, da qual se conhece a seguinte tabela:

x	x_0	x_1	...	x_{10}
$f(x)$	y_0	y_1	...	y_{10}

Pretende-se aproximar f por uma função interpoladora nos pontos da tabela de forma a que esta tenha poucas ou nenhumas oscilações junto das extremidades do intervalo $[a, b]$. Para o efeito deve utilizar-se:

a. O polinómio de Lagrange interpolador de f nos pontos da tabela.

b. O polinómio do grau 2 que aproxima a função tabelada segundo o método dos mínimos quadrados.

c. O polinómio de Newton com diferenças divididas interpolador de f nos pontos da tabela.

d. O spline cúbico natural, interpolador de f dos pontos da tabela.

Resposta d

Questão 2

Seja $f(x) \in C^2[1,3]$ uma função que verifica $f^n(x) = x^n/3, \forall\, x \in [1,3]$. Se pretendesse calcular um valor aproximado de $I = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ utilizando a regra dos trapézios, qual o menor número de sub-intervalos de igual amplitude em que teria de dividir o intervalo $[1,3]$, por forma a garantir pelo menos 1 casa decimal significativa para do erro absoluto da aproximação?

Resposta 7

$$n : |I - I_{t,n}| = \left| -n\,\frac{h^3}{12}\,f^{(2)}(x) \right| = \left| -n\,\frac{\left(\frac{3-1}{n}\right)^3}{12}\,\frac{3^2}{3} \right| = \frac{2}{n^2} \leq 0.5\,\mathrm{E}^{-1} \implies$$

$$\implies n = \left\lceil \sqrt{\frac{2}{0.5\,\mathrm{E}^{-1}}} \right\rceil = \lceil 6.325 \rceil = 7$$

Questão 3

Considere a função $f(x) = \frac{x}{e^x}$ e $S(x)$ o spline cúbico natural interpolador de f nos pontos $0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = 1$. Qual o valor da expressão $S(0) - S''(0) - 2\,S(1) + 2\,S''(1)$?

Resposta

Spline natural interpolador de $f \implies$

$$\implies S''(x_0) = S''(0) = S''(x_4) = S''(1) = 0$$

$$S(0) - S''(0) - 2\,S(1) + 2\,S''(1) = S(0) - 2\,S(1) = f(0) - 2\,f(1) =$$

$$= \frac{0}{e^0} - 2\,\frac{1}{e^1} = -\frac{2}{e}$$

Questão 4

Seja α a raiz única da equação não linear $f(x) = 0$ no intervalo $[a, b]$. Considere as sucessões definidas por recorrência $x_n = g_1(x_{n-1})$ e $y_n = g_2(y_{n-1}), n \in \mathbb{N}$, ambas convergentes para α, com g_1 e g_2 duas funções definidas e continuas em $[a, b]$ tais que $g_1(\alpha) = \alpha$ e $g_2(x) = x - f(x)/f'(x)$. Além disso tem-se $0 \neq |g_1'(\alpha)| < 1$ e $g_2'(\alpha) = 0$. Considerando que $x_0 = y_0 \in [a, b]$, qual das opções seguintes é correta

a. A sucessão x_n tem ordem de convergencia $p > 1$

b. A sucessão x_n converge mais rapidamente que y_n

c. A sucessão y_n converge mais rapidamente que x_n

d. A sucessão y_n tem ordem de convergencia $p > 1$

Resposta c.

Questão 5

Considere a matrix A do sistema de equações lineares $A\,X = B$ com $a \in \mathbb{R}$ e $X, B \in \mathbb{R}^3$. De forma a garantir a vonvergência do método de Gauss-Siedel para a solução de $A\,X = B$, qual dos seguintes valores pode ser assumido por a?

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a/2} & \boldsymbol{-2} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{7} & \boldsymbol{-a} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{-3} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$$

a. 4

b. 5.5

c. -3

d. 8

Resposta 5.5

$$A \begin{Bmatrix} |a/2| > |-2| + 0 \\ 7 > 0 + |-a| \\ |a| > 0 + |-3| \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} |a| > 4 \\ 7 > |a| \\ |a| > 3 \end{Bmatrix} = 4 < |a| < 7 \implies$$

$$\implies a \in \,]-7, -4[\, \cup \,]4, 7[\, \therefore a = 5.5$$

Questão 6

Seja f uma função da qual se conhece a seguinte tabela de valores

x	-1	0	1
$f(x)$	10	3	7

Q6 a.

Construa uma tabela de diferenças divididas e o correspondente polinómio de Newton interpolador de f na tabela dada. Determine um valor aproximado de $f(-0.5)$ (Não necessita apresentar o polinómio na forma simplificada).

Resposta

x_i	$f(x_i)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$
-1	10		
		-7	
0	3		11/2
		4	
1	7		

$f(-0.5) \approx p_2(-0.5)$:

$$
\begin{aligned}
&p_2(x) = \\
&= f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2] = \\
&= 10 + (x - (-1))\ -7 + (x - (-1))(x - 0)\, 11/2 = \\
&= 10 + (x + 1)(-7 + x\, 11/2) \implies
\end{aligned}
$$

$$\implies f(-0.5) \approx 10 + (-0.5 + 1)(-7 - 0.5 * 11/2) = 5.125$$

Q6 b.

Sabendo que $f^{(3)}(x) = 12$, determine um majorante do erro absoluto para a aproximação de $f(-0.5)$ obtida em a.

Resposta

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{abs} = |f(x^*) - p_2(x^*)| = \\
&= \left|(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2) f^{(3)}(\theta)/3!\right| = \\
&= |(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2) 12/6| = \\
&= 2\,|(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2)| \implies
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\implies |f(-0.5) - p_2(-0.5)| = \\
&= 2\,|(-0.5 - (-1))(-0.5 - 0)(-0.5 - 1)| = \\
&= 0.75
\end{aligned}
$$

Questão 7

Considere a seguinte tabela relativa a uma função f

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-5	-6	k	22

Com $k \in \mathbb{R}$ e $I = \int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$. Sabe-se que f é uma função do tipo $a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e$ em que $a = 1$ e $b, c, d, e \in \mathbb{R}$

Q7 a.

Determine uma aproximação de I usando a regra de Simpson simples.

Resposta

$$I \approx \hat{I}_S \approx \frac{h}{3}\,(f_0 + 4\,f_1 + f_2) = \frac{4/2}{3}\,(-2 + 4\,(-6) + 22) = -\frac{8}{3}$$

Q7 b.

Determine uma aproximação de I usando a regra de Simpson composta em função de k.

Resposta

$$I \approx \hat{I} = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{j=1}^{n} f(x_{2j-1}) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + f(x_{2n})\right) =$$
$$= \frac{2/2}{3}\,(f(x_0) + 4\,(f(x_1) + f(x_3)) + 2\,(f(x_2)) + f(x_4)) =$$
$$= \frac{1}{3}\,(-2 + 4\,(-5 + k) + 2\,(-6) + 22) =$$
$$= k\,4/3 - 4$$

Q7 c.

Usando as alineas anteriores determine k

Resposta

f é Poli de grau 4 com $a = 1 \implies f^{(4)}(x) = 4! = 24 \quad \forall\, x \in \mathbb{R};$

Erro simpson simples:

$$\varepsilon_{I,s} = I - \hat{I}_s = I - (-8/3) = -\frac{h^5}{90}\,f^{(4)}(\xi) = -\frac{2^5}{90}\,24 \implies$$
$$\implies I = 11.2;$$

Erro simpson composta:

$$\varepsilon_{I,c} = I - \hat{I}_c = I - (k\,4/3 - 4) = -n\,\frac{h^5}{90}\,f^{(4)}(\sigma) = -2\,\frac{1^5}{90}\,24 =$$
$$= -\frac{8}{15} \implies$$
$$\implies k = -5$$

Questão 8

Considere a equação $1 - x - \sin(x) = 0$ a qual tem uma única solução α no intervalo [0.1,1].

Q8 a.

Prove que α é o ponto fixo de $\varphi(x) = 1 - \sin(x)$

Resposta

α é raíz de $1 - x - \sin(x) = 0 \iff$

$$\iff 1 - \alpha - \sin(\alpha) = 0 \iff$$
$$\iff 1 - \sin(\alpha) = \alpha = \varphi(\alpha) \iff$$
$$\iff \alpha \text{ é ponto fixo de } \varphi(x) = 1 - \sin(x)$$

Q8 b.

Prove que a sucessão $x_n = \varphi(x_{n-1}), n = 1, 2, \ldots$ que $x_0 = 0.5$ converge para α.

Resposta

$$\begin{cases} x_0 = 0.5 \\ x_n = \varphi(x_{n-1}), n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Condições de convergencia:

$$\begin{cases} \varphi(x) \text{ é continua em } I \\ \varphi(x) \in I, \forall\, x \in I \\ |\varphi'(x)| \leq |\varphi'(\alpha)| \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(1) = 1 - \sin(1) \cong 0.159 \in I \\ \varphi(0.1) = 1 - \sin(0.1) \cong 0.900 \in I \\ \varphi'(x) = -\cos(x) < 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$
$$\implies 0.1 < \varphi(1) \leq \varphi(x) \leq \varphi(0.1) < 1 \implies$$
$$\implies \varphi(x) \in I \quad \forall\, x \in I;$$

$$|\varphi'(x)| = |-\cos(x)| = \cos(x) \leq |-\cos(0.1)| = \cos(0.1) < k < 1$$

Q8 c.

Determine x_2. Quantas casas decimais significativas pode garantir para x_2. Justifique

Resposta

$$\begin{cases} x_0 = 0.5 \\ x_1 = \varphi(0.5) = 1 - \sin(0.5) \cong 0.521 \\ x_2 = \varphi(0.521) = 1 - \sin(0.521) \cong 0.503 \end{cases}$$

$$|\alpha - x_2| \leq \frac{k}{1-k}\,|x_2 - x_1| \cong \frac{0.996}{1 - 0.996}\,|0.503 - 0.521| =$$
$$= \frac{0.996}{1 - 0.996}\,|0.503 - 0.521| \cong 4.470 < 0.5\,\mathrm{E}^{1}$$

$\therefore$ Não tem casas decimais significativas

Questão 9

Considere o sistema de equações lineares $A\,X = B$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

Nota: Em todas as alíneas utilize 3 casas decimais convenientemente arredondadas.

Q9 a.

Obtenha a matriz de iteração para o método de Jacobi e com base nessa matriz verifique a convergência da sucessão definida pelo mesmo método para a solução de $A\,X = B$.

Resposta

$$\|G_J\| < 1 : G_J = -D^{-1}(L+U) :$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies G_J = -\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 3/5 & 0 & 1/5 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \implies$$

$\implies \|G_J\| = \max(0.5, 0.8, 0.75) = 0.8 < 1 \therefore$ o método converge

Q9 b.

Considerando como aproximação inicial $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ obtenha $X^{(3)}$.

Resposta

$$H_J = D^{-1}\,B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.4 \\ -0.25 \end{bmatrix};$$

$$X^{(1)} = G_J\,X^{(0)} + H_J =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 3/5 & 0 & 1/5 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.4 \\ -0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$X^{(2)} = G_J\,X^{(1)} + H_J =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 3/5 & 0 & 1/5 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.4 \\ -0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix};$$

$$X^{(3)} = G_J\,X^{(2)} + H_J =$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 3/5 & 0 & 1/5 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.4 \\ -0.25 \end{bmatrix} = \dots$$

Q9 c.

Sabendo que

$$\boldsymbol{X^{(9)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.372} \\ \mathbf{-0.270} \\ \mathbf{-472} \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{X^{(10)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.365} \\ \mathbf{-0.271} \\ \mathbf{-0.478} \end{bmatrix}$$

São iteradas obtidas por aplicação do método de jacobi com 3 casas decimais davidamente arredondadas, quantas casas decimais significativas pode garantir $X^{(10)}$? Justifique

Resposta

$$X^{(10)} - X^{(9)} = \begin{bmatrix} -0.007 \\ -0.001 \\ -0.006 \end{bmatrix};$$

$$\left\| X^{(10)} - X^{(9)} \right\|_\infty = 0.007;$$

$$\left\| X^{*} - X^{(10)} \right\|_\infty \le \frac{\|G\|_\infty}{1 - \|G\|_\infty} \left\| X^{(10)} - X^{(9)} \right\|_\infty =$$
$$= \frac{0.8}{1 - 0.8} * 0.007 = 0.028 < 0.5\,\mathrm{E}^{1}$$

$\therefore$ Garante pelo menos 1 casa decimal

Q9 d.

Sabendo que a solução exata do sistema é

$$\boldsymbol{X^{*}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.36} & \mathbf{-0.28} & \mathbf{-0.48} \end{bmatrix}^{\boldsymbol{T}}$$

Determine o erro relativo associado a cada componente de $X^{(10)}$

Resposta

$$r_{x^*} = \frac{|x^* - \tilde{x}|}{|x^*|} \begin{cases} r_{x_1^*} = \frac{|0.36-0.365|}{|0.36|} \\ r_{x_2^*} = \frac{|-0.28+0.271|}{|-0.28|} \\ r_{x_3^*} = \frac{|-0.48+0.478|}{|-0.48|} \end{cases}$$