FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

3º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2019/2020
16 DE DEZEMBRO DE 2019

Duração: 2horas.

COTAÇÕES: Grupo I- $4 \times 8\% = 32\%$, Grupo II- 1.a) 10%, b) 12% 2. a) 12% b) 5% , Grupo III- 1. a) 12%, b) 12% 2. 5%.

Nome:

Nº de aluno: Nº de caderno:

PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES DO GRUPO I ASSINALE COM X O QUADRADO CORRESPONDENTE À ALTERNATIVA CORRECTA.

GRUPO I

1. Considere o conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ e seja

$$I = \iint_A y^2 \, dxdy.$$

O integral considerado, utilizando coordenadas polares, pode ser escrito na forma:

☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\int_1^{2\cos\theta} \rho^3 \sin^2\theta \, d\rho) d\theta$ ☐ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\int_0^{1} \rho^2 \sin^2\theta \, d\rho) d\theta$

☐ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\int_1^{2\cos\theta} \rho^3 \sin^2\theta \, d\rho) d\theta$ ☐ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\int_1^{2\cos\theta} \rho^3 \sin^2\theta \, d\rho) d\theta$

☐ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} (\int_0^{1} \rho^3 \sin^2\theta \, d\rho) d\theta$ ☐ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\int_1^{2\cos\theta} \rho^2 \sin^2\theta \, d\rho) d\theta$

2. Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ o domínio fechado, limitado superiormente pela superfície cónica de equação $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$ e inferiormente pelo plano $z = 2$. Utilizando coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

o volume do domínio D pode ser calculado a partir do seguinte integral repetido:

□ $\displaystyle\int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_2^{4-\rho} \rho\, dz)d\theta)d\rho$ □ $\displaystyle\int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_2^{4-\rho} dz)d\theta)d\rho$

□ $\displaystyle\int_0^1 (\int_0^{2\pi} (\int_2^{4} dz)d\theta)d\rho$ □ $\displaystyle\int_0^2 (\int_0^{2\pi} (\int_2^{4} \rho\, dz)d\theta)d\rho$

□ $\displaystyle\int_0^2 (\int_0^{2\pi} (\int_2^{4-\rho} \rho\, dz)d\theta)d\rho$ □ $\displaystyle\int_0^2 (\int_0^{2\pi} (\int_2^{4-\rho} dz)d\theta)d\rho$

3. Seja

$$r(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$$

Sabendo que

$$div(grad\ \ r(x,y,z)) = \alpha\, r^{\beta}$$

em que α e β são constantes reais. Então:

□ $\alpha = 12$ e $\beta = \dfrac{1}{3}$ □ $\alpha = 9$ e $\beta = \dfrac{2}{3}$ □ $\alpha = 12$ e $\beta = \dfrac{2}{3}$

□ $\alpha = 9$ e $\beta = \dfrac{1}{3}$ □ $\alpha = 12$ e $\beta = -\dfrac{1}{3}$ □ $\alpha = 9$ e $\beta = -\dfrac{2}{3}$

4. A área da porção de superfície cónica definida por

$$z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \sqrt{2} \le z \le \sqrt{3},$$

é:

□ $\dfrac{\pi}{4}$ □ $\dfrac{\pi}{2}$ □ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$ □ π □ $\sqrt{2}\pi$ □ 2π

3º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2019/2020
16 DE DEZEMBRO DE 2019

COTAÇÕES: Grupo I- $4 \times 8\% = 32\%$, Grupo II- 1.a) 10%, b) 12% 2. a) 12% b) 5% , Grupo III- 1. a) 12%, b) 12% 2. 5%.

GRUPO II

1. a) Determine, directamente, o valor do integral

$$\int_{L^+} \left(-\frac{1}{2} y\, dx + \frac{1}{2} x\, dy\right)$$

sendo L a fronteira do conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \,\wedge\, x \leq 0\}$ percorrida no sentido direto.

b) Determine o integral considerado na alínea anterior através do cálculo de um integral duplo e utilizando coordenadas polares. Diga, justificando, qual o valor da área do domínio limitado pela linha L.

2. a) Mostre que o campo

$$\overrightarrow{u}(x, y, z) = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} = (2xy^3z^4 + 3)\vec{i} + (3x^2y^2z^4 - 2yz)\vec{j} + (4x^2y^3z^3 - y^2 - e^{-z})\vec{k}$$

é conservativo. Determine a função potencial que no ponto $(0, 0, 0)$ toma o valor um.

b) Calcule

$$\int_{C^+} u_1\, dx + u_2\, dy + u_3\, dz$$

sendo C uma linha regular com início no ponto $(0, 0, 0)$ e fim no ponto $(1, 0, 0)$.

MUDE DE FOLHA

GRUPO III

1. a) Determine, directamente, o valor do fluxo do campo $\overrightarrow{w} = z\vec{k}$ através da face exterior da superfície que limita o domínio fechado D de $\mathbb{R}^3$, limitado superiormente pela superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e inferiormente pelo plano $z = 1$.

b) Determine, justificando, o valor do fluxo considerado na alínea anterior através do calculo de um integral triplo. Diga ainda, justificando, qual o valor do volume do domínio D.

(V.S.F.F.)

2. Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um domínio fechado limitado por uma superfície S, que é cortada quando muito em dois pontos por qualquer reta paralela a um dos eixos coordenados. Sejam u e v dois campos escalares continuamente deriváveis até à segunda ordem num aberto que contém D. Mostre que

$$\iiint_D (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\, dv = \iint_S (u\nabla v - v\nabla u) \cdot \vec{n}\, ds$$

sendo o integral de superfície estendido à face exterior de S.

Obs: $\nabla^2\varphi$ representa o Laplaciano de φ.