# Cálculo Numérico A

## Ficha 4 - Resolução de Equações Não Lineares

**1.** Considere a equação $x^3 + \frac{1}{x} - 3 = 0$.

**a)** Mostre que esta equação tem uma única raiz real, $\alpha$, no intervalo $[1, 2]$.

**b)** Calcule o termo $x_3$ da sucessão obtida a partir do método da bissecção. Estime o erro absoluto desta aproximação.

**c)** Quantas iteradas desta sucessão teria que calcular se pretendesse uma aproximação $\widehat{\alpha}$ com erro absoluto inferior a $10^{-6}$? Justifique.

**2.** Considere a equação

$$\sin(x) = 2\cos(x).$$

**a)** Prove, analiticamente que, no intervalo $[1, 1.5]$, a equação tem uma única raiz real $x^*$.

**b)** Determine a aproximação $x_2$ de $x^*$, calculada pelo método da bissecção e indique um novo intervalo que contenha $x^*$.

**c)** Quantas iteradas deveria calcular, pelo método da bissecção, de modo a obter uma aproximação de $x^*$ com, pelo menos, 5 casas decimais significativas ?

**d)** Sem calcular $x_{15}$, determine um majorante do erro relativo associado a esta aproximação de $x^*$, calculada pelo mesmo método.

**3.** Considere a equação

$$e^x - 2x - 4 = 0.$$

**a)** Mostre que esta equação tem uma única raiz real, $\gamma$, em $I = [2, 3]$.

**b)** Verifique que $\gamma$ é ponto fixo da função $\phi(x) = \ln(2x + 4)$ em $I$.

**c)** Mostre que a sucessão

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_n = \phi(x_{n-1}) \quad , n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

converge para $\gamma$ e calcule a sua ordem de convergência.

**d)** Considerando $x_0 = 3$, calcule $x_4$ e indique um majorante do módulo do erro absoluto $|\gamma - x_4|$.

**e)** Quantas iteradas, $j$, seria necessário calcular de modo a verificar-se $|\gamma - x_j| \leq 10^{-4}$ ? Justifique.

4. **Exercício computacional** (R ou Phyton)
A equação $(x-1)e^x - x = 0$ tem duas raízes $\alpha_0 \in [-1, 0]$ e $\alpha_1 \in [1, 2]$.

a) Verifique que $\alpha_0$ e $\alpha_1$ são pontos fixos de $F(x) = (x-1)e^x$.

b) Mostre que $\alpha_0$ é um ponto fixo atrator de $F(x)$ em $[-1, 0]$ e $\alpha_1$ é um ponto fixo repulsor de $F(x)$ em $[1, 2]$.

c) Utilizando o R/Phyton, construa uma tabela com os valores de $x_n = F(x_{n-1})$.
Teste-a, partindo de $x_0 = 0$ e depois de $x_0 = 1.5$.
Sabendo que $\alpha_0 \approx -0.80646599$ e $\alpha_1 \approx 1.34997649$ comente os resultados obtidos.

5. Considere a equação $x^5 - 1 = 2 - x^3$.

a) Prove, analiticamente, que no intervalo $[1, 2]$ a equação tem apenas uma raiz real.

b) Verifique que a sucessão definida por

$$\begin{cases} x_0 = 2.0 \\ x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

onde $g(x) = x^5 + x^3 - 3$, converge para a única raiz real, $\alpha$, da equação $g(x) = 0$, pertencente ao intervalo $[1, 2]$.

c) Determine $x_2$ e um majorante do módulo do erro absoluto cometido.

**6.** A equação $x^2 - 1 - \cos x = 0$ tem uma única raiz real $\alpha$ em $[1, 1.3]$.
Para determinar uma aproximação de $\alpha$, considere as seguintes sucessões

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad , \quad y_{n+1} = G(y_n) \quad , \quad n = 0, 1, \ldots \; .$$

onde $F(x) = \sqrt{1 + \cos x}$ e $G(x) = x + x^2 - 1 - \cos x$.

**a)** Verifique que $F(\alpha) = G(\alpha) = \alpha$ e mostre que a sucessão $x_n$ converge para $\alpha$, qualquer que seja $x_0 \in [1, 1.3]$.

**b)** Indique a ordem de convergência desta sucessão.

**c)** Partindo de $x_0 = 1.0$, determine uma aproximação de $\alpha$ com um erro absoluto que não exceda $10^{-2}$.

**d)** Supondo que $y_0 \neq \alpha$, estude $y_n$ quanto à convergência.

**e)** Verifique que o método de Newton é convergente (para uma escolha adequada da aproximação inicial $x_0$) e calcule duas iteradas.

**7.** Ao aproximar $\alpha$, zero de uma função $f$ em $[a,b]$, usando um método iterativo convergente do tipo ponto fixo

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_{n+1} = G(x_n)\ ,\ n = 0, 1, \ldots \end{cases},$$

com $G \in C^1([a,b])$, obteve-se a seguinte tabela:

| $i$ | $x_i$ | $\lvert\alpha - x_i\rvert$ |
|---|---|---|
| 3 | 1.73913 | 0.0521574 |
| 4 | 1.8254 | 0.034109 |
| 5 | 1.769665 | 0.0216249 |
| 6 | 1.80527 | 0.013986 |
| 7 | 1.78236 | 0.00893065 |
| 8 | 1.79704 | 0.00574957 |
| 9 | 1.78761 | 0.00368216 |

**a)** Qual a ordem de convergência do método usado ?
Dada uma constante $\lambda \neq -1$ considere a função iteradora

$$G_\lambda(x) = \frac{\lambda}{1+\lambda}x + \frac{1}{1+\lambda}G(x)$$

**b)** Justifique que a equação $x = G(x)$ é equivalente a $x = G_\lambda(x)$.

**c)** Para que valor $\lambda^*$, o método $x_{n+1} = G_{\lambda^*}(x_n)$ é pelo menos de segunda ordem?

**d)** A partir da tabela anterior, determine quais os valores possíveis para $\lambda^*$.

**8. Exercício computacional** (R ou Phyton)

Considere a função iteradora

$$F_\omega(x) = x\left(1 - \frac{\omega}{3}\right) + x^3(1-\omega) + \frac{2\omega}{3x^2} + 2(\omega - 1), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

**a)** Verifique que $\alpha = \sqrt[3]{2}$ é ponto fixo de $F_\omega$.

**b)** Utilizando o *wxMaxima* e considerando $x_0 = 1.5$, construa uma tabela com os termos $x_n = F_\omega(x_{n-1})$ e com os respetivos erros absolutos $|\sqrt[3]{2} - x_n|$.

**c)** Teste o programa e compare os resultados para $\omega = 1$, $\omega = 1.1$ e $\omega = 2$.

**d)** Justifique analiticamente os resultados obtidos na alínea anterior.

**9.** Seja $f$ uma função diferenciável tal que

$$f'(x) \geq M > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

**a)** Mostre que a equação $f(x) = 0$ tem uma única raiz $\alpha$ e que esta se encontra compreendida entre 0 e $-f(0)/M$.

**b)** Verifique que a equação $f(x) = 0$ é equivalente à equação $x = F(x)$ com

$$F(x) = x + cf(x),$$

onde $c$ é uma constante não nula.

**c)** Indique para que valores de $c$, a sucessão definida por $x_{n+1} = F(x_n)$ converge para $\alpha$ (tomando $x_0$ suficientemente próximo de $\alpha$).

**d)** Para os valores de $c$ obtidos na alínea anterior, determine a ordem de convergência do método.

**10.** Considere a função $g(x) = 10x^3 - 8x + 3$ que tem, em $I = [-2, -1]$, um único zero real, $\alpha$.

**a)** Verifique que a sucessão definida por $x_0 = -2$ e $x_n = x_{n-1} - \frac{10x_{n-1}^3 - 8x_{n-1} + 3}{30x_{n-1}^2 - 8}$ , $n \in \mathbb{N}$ , converge para $\alpha$.

**b)** Calcule $x_2$ e indique, justificando, quantas casas decimais significativas pode garantir para esta aproximação.

**11.** Considere o método do ponto fixo, a função iteradora $\Psi(x) = \cos(3x)$ e o intervalo $[-1.3, -0.9]$.
Pesquise a existência de pontos fixos de $\Psi$ em $[-1.3, -0.9]$ e, em caso afirmativo, qual a sua natureza.

**12.** Considere a função $f(x) = 2x^5 - x^3 - x - 3$ que tem, no intervalo $I = [1, 2]$, um único zero real, $\beta$.
Considere também as funções $\Psi_1(x) = 2x^5 - x^3 - 3$, $\Psi_2(x) = \frac{2x^5+3}{x^2+1}$, $\Psi_3(x) = \frac{x^3+3}{2x^4-1}$ e $\Psi_4(x) = \frac{3}{2x^4-x^3-1}$.
Investigue para quais das funções o ponto $\beta$ é ponto fixo, em $I$.

**13.** Considere a função iteradora $\Gamma(x) = x^2 + k$ com $k > 0$.
Seja $I = [0, 1]$.
Demonstre que, se $k < \frac{1}{4}$, então $\Gamma(x)$ tem dois pontos fixos em I, sendo um repulsor e o outro atrator.

**14.** Considere a função $g(x) = 2^{-x}$ com um único ponto fixo $p$ em $[\frac{1}{3}, 1]$.

**a)** Obtenha a função $f(x)$ tal que $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$.

**b)** Verifique que a sucessão

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{3} \\ x_n = g(x_{n-1}),\ n = 1, 2, ... \end{cases}$$

converge para o único ponto fixo $p \in [\frac{1}{3}, 1]$.

**c)** Calcule o nº mínimo de iteradas, $n$, que seria necessário calcular de forma a obter uma aproximação de $p$ com, pelo menos, 3 casas decimais significativas. Considere nos cálculos 4 casas decimais devidamente arredondadas.

**15.** Considere a equação $x^2 - \cos^2(x) = 0$ que tem uma única solução $\alpha$ em $I = [0.5, 1]$.

**a)** Supondo que a sucessão obtida pelo método de Newton, com $x_0 = 1$, converge para a única solução $\alpha$ em $I$ obtenha $x_1$ e diga quantas casas decimais significativas pode garantir para esta iterada.

**b)** Encontre $g(x)$ tal que $\alpha$ é ponto fixo de $g(x)$ no intervalo $I$.
Prove que $\alpha$ é único e que a sucessão gerada pelo método do ponto fixo com $x_0 \in I$ converge para $\alpha$.
Classifique $\alpha$.

**16.** Considere a função $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x + 1$ e o intervalo $I = [3, 4]$.

**a)** Verifique que existe um único zero $\alpha$ de $f(x)$ em $I$.

**b)** Verifique que se pode utilizar o método de Newton para obter uma aproximação $\widehat{\alpha}$, de $\alpha$, no intervalo $I$.

**c)** Calcule a iterada $x_2$.

**d)** Determine uma estimativa para o erro absoluto associado a $x_2$.

**17.** Seja $\alpha$ o único ponto fixo de $\varphi(x) = \ln(x^2 + 2x + 1)$ em $I = [2, 3]$.
Determine uma aproximação $\widehat{\alpha}$ de $\alpha$, obtida pelo método da bisseção, para a qual se garante, pelo menos, uma casa decimal significativa.

**18.** Seja $\alpha$ a única raiz da equação $\ln(3x^2) - x = 0$ em $I = [0, 1]$.

**a)** Prove analiticamente que $\alpha$ é ponto fixo da função iteradora $\varphi(x) = \sqrt{\dfrac{e^x}{3}}$.

**b)** Verifique se a sucessão definida pelo método do ponto fixo, $x_0 = 1.0$ e $x_k = \varphi(x_{k-1})$ , $k = 1, 2, \ldots$, converge para $\alpha$ em $I$.
Qual a ordem de convergência desta sucessão? Justifique.

**c)** Obtenha a iterada $x_k$, com 6 casas decimais devidamente arredondadas, que permita aproximar $\alpha$, com pelo menos 1 casa decimal significativa.

**d)** Se tivesse considerado uma função iteradora $\psi(x) = \ln(3x^2)$, como classificaria o ponto fixo $\alpha$ em relação a $\psi(x)$ e a sucessão $v_{k+1} = \psi(v_k)$, $k = 0, 1, ...(v_0 = 1.0)$ em termos de convergência? Justifique.