ANÁLISE MATEMÁTICA II C

8ªsemana de aulas

NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY

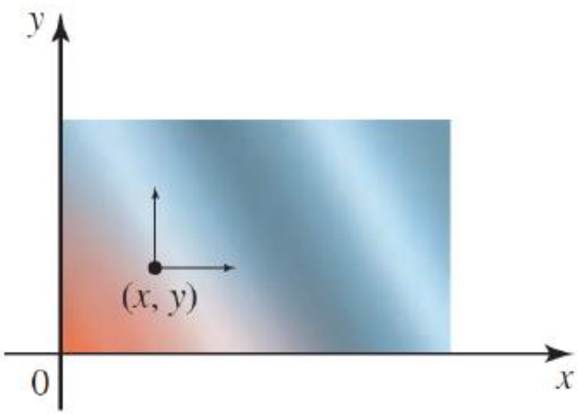
Slides para acompanhamento das aulas T e P de Cláudio Fernandes (TP1, TP5, P1, P2, P3, P4, P6)

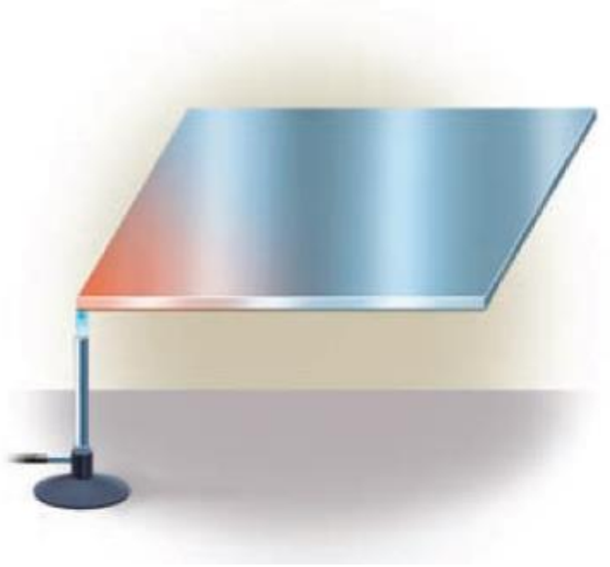
O material completo encontra-se no CLIP, na página da UC

caf@fct.unl.pt

Derivadas direcionais: uma motivação

Seja $T = T(x, y)$ a temperatura da placa no ponto (x, y).





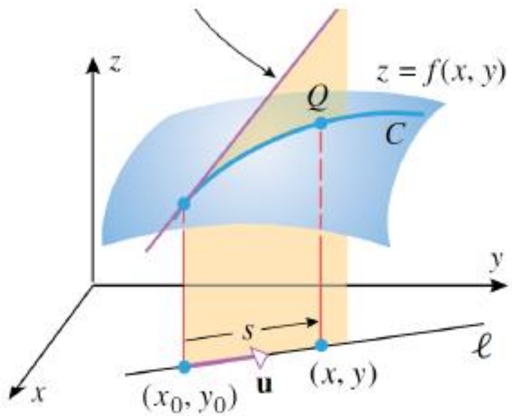
Qual é a taxa de variação de T num ponto segundo uma direção?

Derivada direcional

Seja $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um vetor unitário,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1.$$

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}(D)$, $f : D \to \mathbb{R}$ e $\vec{u} = (u_1, u_2)$ um vetor unitário.



Chama-se derivada direcional de f no ponto (x_0, y_0) segundo $\vec{u}$ ao limite

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \; &= \lim_{s \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + s(u_1, u_2)) - f(x_0, y_0)}{s} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + su_1, y_0 + su_2) - f(x_0, y_0)}{s} \end{aligned}$$

Caso das derivadas parciais

Se $\vec{u} = \vec{i} = (1, 0)$, então

$$\begin{aligned} D_{\vec{i}} f(x_0, y_0) &= \lim_{s \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + s(1, 0)) - f(x_0, y_0)}{s} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + s, y_0) - f(x_0, y_0)}{s} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Se $\vec{u} = \vec{j} = (0, 1)$, então

$$\begin{aligned} D_{\vec{j}} f(x_0, y_0) &= \lim_{s \to 0} \frac{f((x_0, y_0) + s(0, 1)) - f(x_0, y_0)}{s} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + s) - f(x_0, y_0)}{s} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Diferenciabilidade e derivadas direcionais

Teorema:

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$, $(a, b) \in \mathrm{int}(D)$,

$$f : D \to \mathbb{R}$$

e $\vec{u} = (u_1, u_2)$ *um vetor unitário. Se* f *for diferenciável em* (a, b), *então* $D_{\vec{u}}f(a, b)$ *existe e*

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(a, b) &= \nabla f(a, b) \cdot (u_1, u_2) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)u_2. \end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a derivada direcional da função

$$f(x,y) = 3x + 2y^2$$

no ponto $(2,1)$ *na direção do vetor*

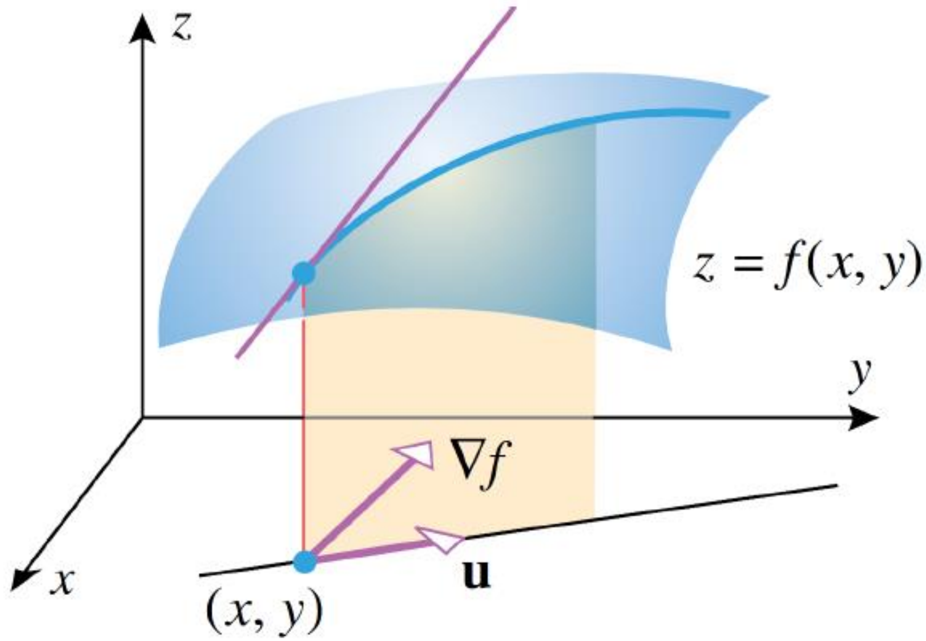
$$\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$D_{\vec{u}}f(2,1) = \lim_{s \longrightarrow 0} \frac{f\left((2,1) + s\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) - f(2,1)}{s} = \cdots = \frac{3}{2} + 2\sqrt{3}$$

Ou, como f é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ (logo diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e consequentemente diferenciável no ponto (2,1)), então

$$D_{\vec{u}}f(2,1) = \nabla f\,(2,1).\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (3,4).\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\mathrm{x}\,\frac{1}{2} + 4\mathrm{x}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + 2\sqrt{3}$$

Interpretação geométrica de derivada direcional



$$D_{\vec{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u}$$

representa o declive da superfície $z = f(x, y)$ na direção de $\vec{u}$ no ponto $(x, y, f(x, y))$.

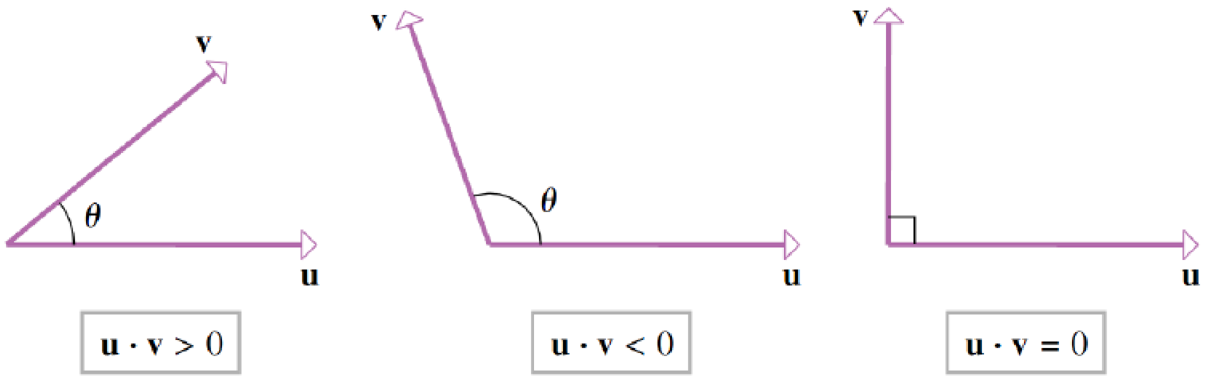
Lembrança de ALGA: ângulo entre dois vetores

Teorema:

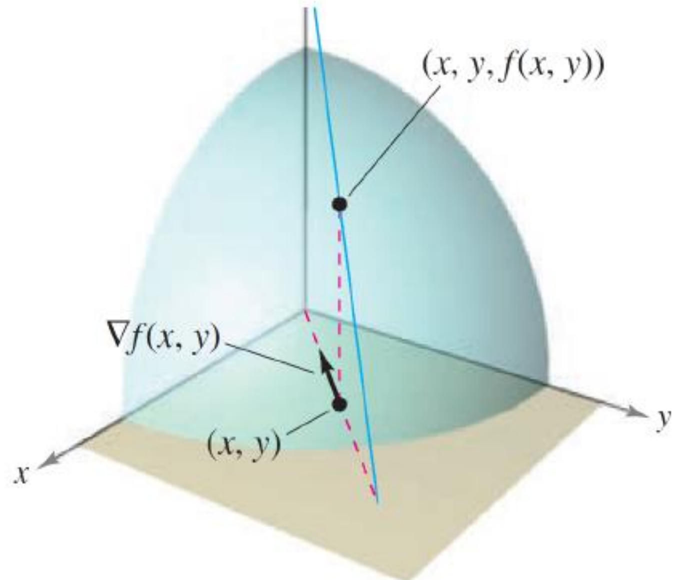
Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem vetores no espaço bidimensional e se θ for o ângulo entre eles, então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|u\| \cdot \|v\| \cos\theta.$$

$$\Downarrow$$



Propriedades de gradiente



$$D_{\vec{u}}f(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot\vec{u} = \|\nabla f(x,y)\|\,\|\vec{u}\|\cos\theta = \|\nabla f(x,y)\|\cos\theta,$$

onde θ é o ângulo entre $\nabla f(x,y)$ e $\vec{u}$.

- O máximo de $D_{\vec{u}}f(x,y)$ ocorre quando $\cos\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = 0$.
- O mínimo de $D_{\vec{u}}f(x,y)$ ocorre quando $\cos\theta = -1 \Leftrightarrow \theta = \pi$.

Teorema:

Seja f *uma função diferenciável em* (a, b).

1. Se $\nabla f(a, b) = (0, 0)$, *então todas as derivadas direcionais de* f *em* (a, b) *são nulas.*

2. Se $\nabla f(a, b) \neq (0, 0)$, *então de entre todas as possíveis derivadas direcionais de* f *em* (a, b), *a derivada de* f *na direção e sentido de* $\nabla f(a, b)$ *tem o maior valor. O valor dessa derivada direcional máxima é* $\|\nabla f(a, b)\|$.

3. Se $\nabla f(a, b) \neq (0, 0)$, *então de entre todas as possíveis derivadas direcionais de* f *em* (a, b), *a derivada de* f *no sentido oposto ao de* $\nabla f(a, b)$ *tem o menor valor. O valor dessa derivada direcional mínima é* $-\|\nabla f(a, b)\|$.

Exemplo

Seja

$$f(x, y) = x^2 e^y$$

Determine o valor máximo de uma derivada direcional em $(-2, 0)$ e determine o vetor unitário na direção e sentido do qual o valor máximo ocorre.

$$\nabla f(-2,0) = (-4, 4)$$

O maior valor de $D_{\vec{u}} f(-2,0)$ será de $\|\nabla f(-2,0)\| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$

E é obtido ao longo vetor unitário $\vec{u} = \dfrac{\nabla f(-2,0)}{\|\nabla f(-2,0)\|} = (-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}})$

Gradiente e curvas de nível

Teorema:

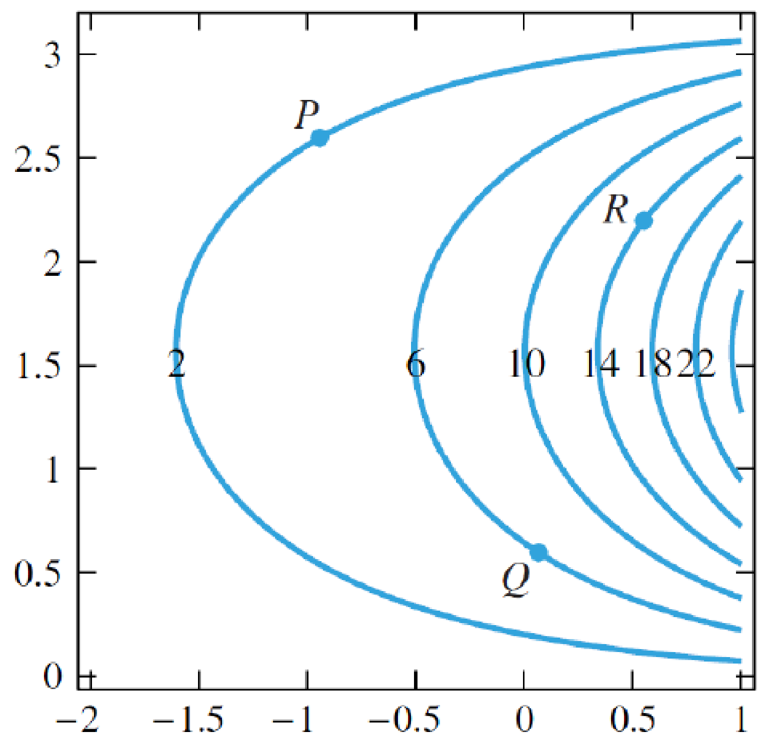
Seja f *de classe* C^1 *num disco aberto centrado em* (x_0, y_0). *Se*

$$\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0},$$

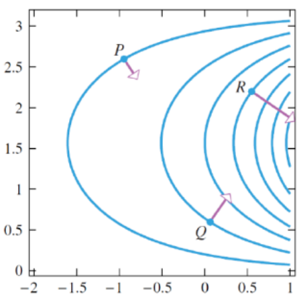
então $\nabla f(x_0, y_0)$ *é normal à curva de nível de* f *que passa por* (x_0, y_0).

Exemplo

Esboce as direções e sentidos dos gradientes de f nos pontos P, Q e R. Em quais desses três pontos o gradiente tem a norma máxima? E mínima?



resposta



Gradiente e curvas de nível

Teorema:

Seja g *de classe* C^1 *num disco aberto centrado em* (x_0, y_0, z_0). *Se*

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0},$$

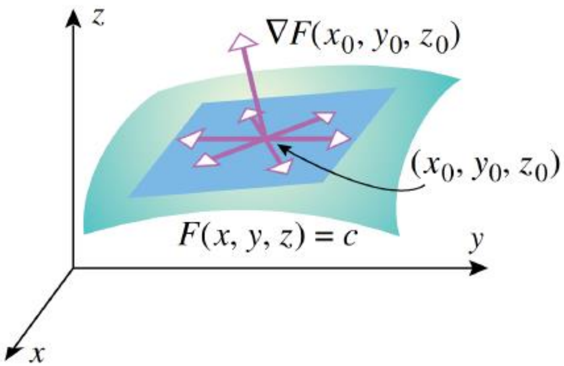
então $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ *é normal à superfície de nível de* g *que passa por* (x_0, y_0, z_0).

Planos tangentes a superfícies de nível

Teorema:

Seja F uma função de três variáveis de classe C^1 numa bola aberta centrada em $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e seja $c = F(P_0)$. Se $\nabla F(P_0) \neq \vec{0}$, então $\nabla F(P_0)$ é um vetor normal à superfície de nível $F(x, y, z) = c$ no ponto P_0 e o plano tangente a essa superfície é dado pela equação

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0.$$

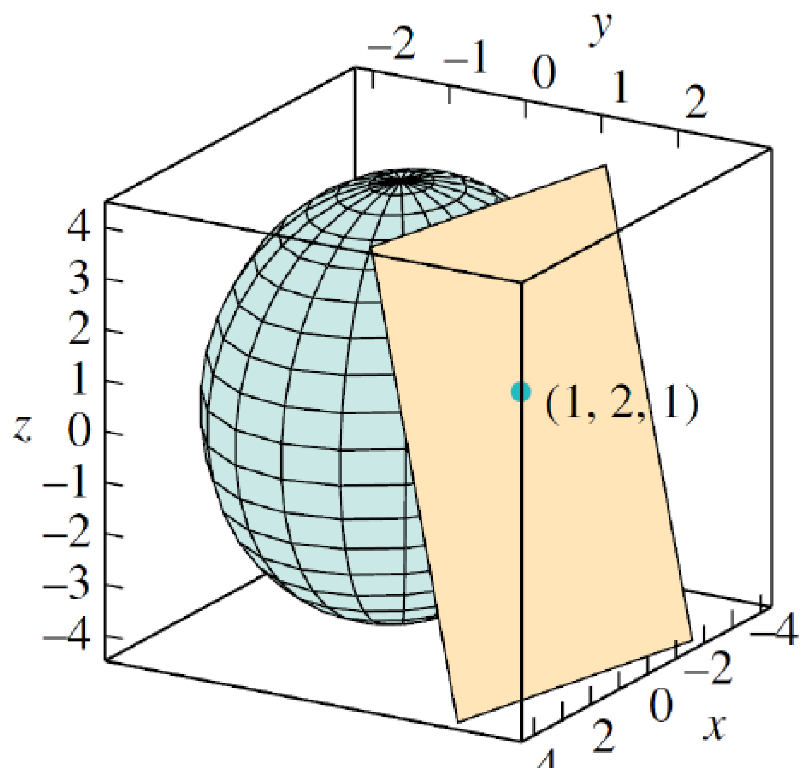


Exemplo

Determine uma equação do plano tangente ao elipsoide

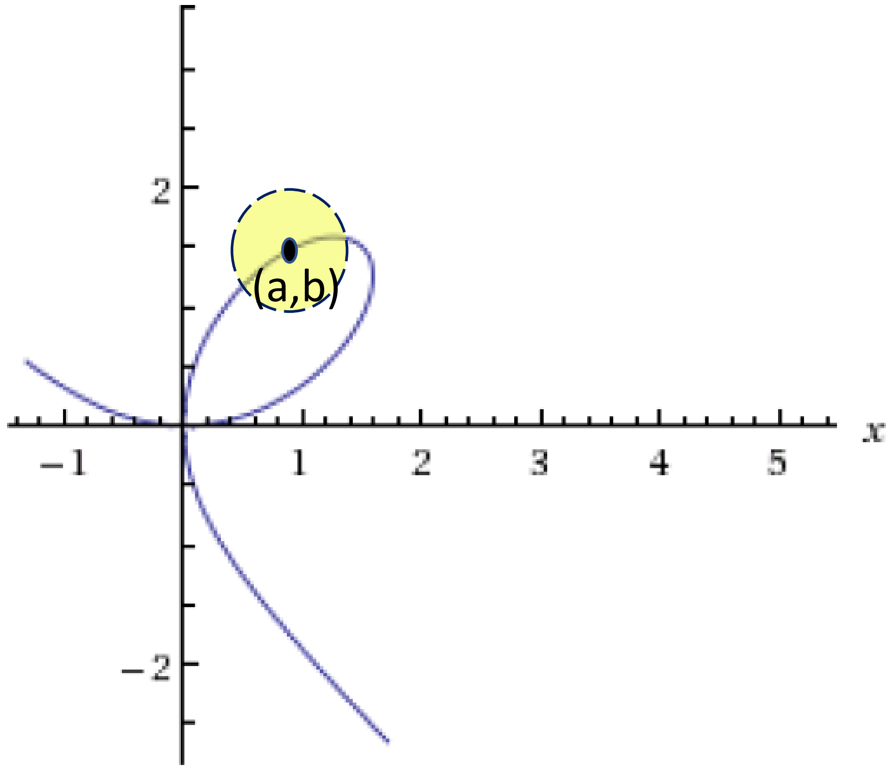
$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 18$$

no ponto $(1, 2, 1)$.



Teorema da função implícita

Seja $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. A equação $f(x,y) = 0$ define o seguinte lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{R}^2$:



Queremos resolver a equação e encontrar a função φ tal que

$$y = \varphi(x)$$

DIFICIL!!!!

Funções definidas implicitamente ($1^{\underline{a}}$ versão)

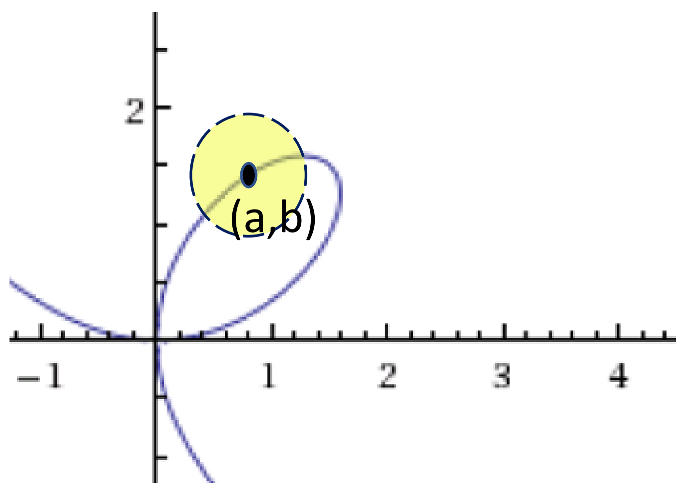
Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Diz-se que a equação $f(x, y) = 0$

define implicitamente y como função de x numa vizinhança de um ponto $(a, b) \in U$, tal que $f(a, b) = 0$, se existirem

Vizinhança de (a,b) = Conjunto aberto que contém (a,b), por exemplo uma bola aberta centrada em (a,b)

- duas vizinhanças, V de a e W de b, tais que $V \times W \subset U$
- e uma função $\varphi : V \to W$ tal que

$$\forall (x, y) \in V \times W, \quad f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \varphi(x).$$



Funções definidas implicitamente ($1^{\underline{a}}$ versão)

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Diz-se que a equação $f(x, y) = 0$

define implicitamente y como função de x numa vizinhança de um ponto $(a, b) \in U$, tal que $f(a, b) = 0$, se existirem

Vizinhança de (a,b) = Bola aberta centrada em (a,b)

- duas vizinhanças, V de a e W de b, tais que $V \times W \subset U$
- e uma função $\varphi : V \to W$ tal que

$$\forall (x, y) \in V \times W, \quad f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \varphi(x).$$

V=por exe. intervalo aberto centrado em a; W=por exe. intervalo aberto centrado em b

Neste caso diz-se que a função φ é definida implicitamente, na vizinhança de (a, b), pela equação $f(x, y) = 0$.

Teorema da função implícita ($1^{\underline{a}}$ versão)

Teorema:

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ *um conjunto aberto,* $(a, b) \in U$ *e* $f : U \to \mathbb{R}$ *uma função tal que*

- $f(a, b) = 0;$
- $f \in C^1(U);$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0.$

Então existem conjuntos abertos $V, W \subset \mathbb{R}$ *tais que* $a \in V, \quad b \in W, \quad V \times W \subset U$ *e uma função* $\varphi : V \to W$ *de classe* C^1 *tal que*

$\forall (x, y) \in V \times W, \quad f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \varphi(x)$. *Além disso,*

$$\varphi'(a) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)}.$$

Exemplo

Mostre que a equação

$$y^2 - x^4 = 0$$

define implicitamente y *como função de* x *numa vizinhança do ponto* $(-1,1)$ *e calcule* $\dfrac{dy}{dx}(-1)$.

Funções definidas implicitamente (2ª versão)

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Diz-se que a equação

$$f(x, y, z) = 0$$

define implicitamente a variável z como função das variáveis x e y numa vizinhança de um ponto $(a, b, c) \in U$, tal que $f(a, b, c) = 0$, se existirem

- duas vizinhanças, V de (a, b) e W de c, tais que $V \times W \subset U$
- e uma função $\varphi : V \to W$ tal que
  $\forall (x, y, z) \in V \times W, \quad f(x, y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \varphi(x, y).$

Neste caso diz-se que a função φ é definida implicitamente, na vizinhança de (a, b, c), pela equação $f(x, y, z) = 0$.

Teorema da função implícita ($2^{\underline{a}}$ versão)

Teorema:

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ *um conjunto aberto,* $(a, b, c) \in U$ *e* $f : U \to \mathbb{R}$ *uma função tal que*

- $f(a, b, c) = 0$;
- $f \in C^1(U)$;
- $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$.

Então existem conjuntos abertos $V \subset \mathbb{R}^2$ *e* $W \subset \mathbb{R}$ *tais que*

$$(a, b) \in V, \quad c \in W, \quad V \times W \subset U$$

e uma função $\varphi : V \to W$ *de classe* C^1 *tal que*

$$\forall (x, y, z) \in V \times W, \quad f(x, y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \varphi(x, y).$$

Além disso

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)}.$$

Exemplo

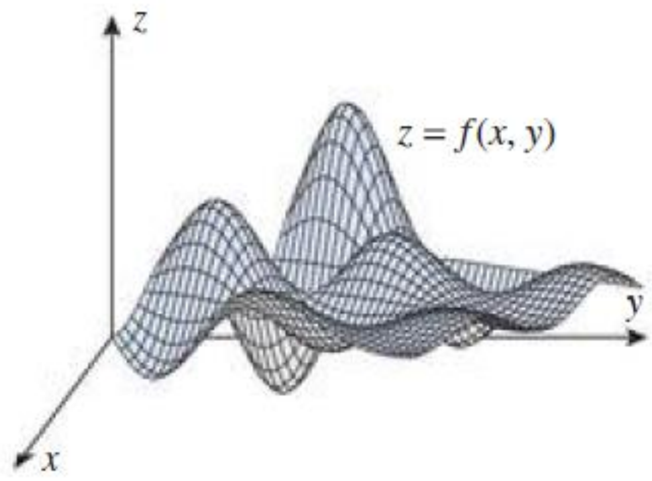
- Mostre que a equação

$$x \ln x + y \ln y + z \ln z = 0.$$

define implicitamente y em função de x e z ($y = \psi(x, z)$) numa vizinhança do ponto $(1, 1, 1)$.

- Calcule $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial \psi}{\partial z}(1, 1)$.

Extremos relativos



Extremos relativos de funções de duas variáveis

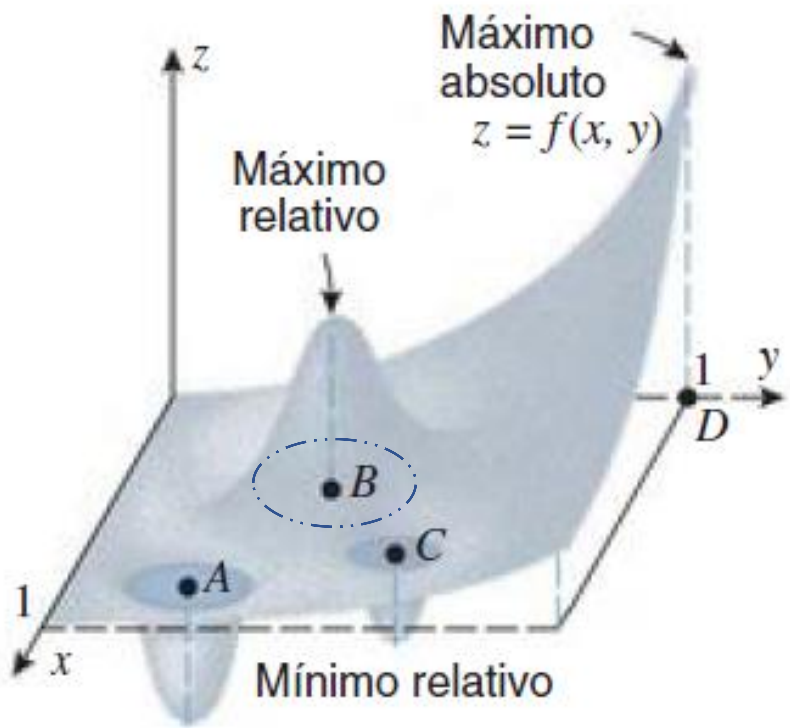
Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- Diz-se que f tem um mínimo relativo (= mínimo local) num ponto $(x_0, y_0) \in D$ se existir uma bola aberta $B_\epsilon(x_0, y_0)$ centrada em (x_0, y_0) tal que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in D \cap B_\epsilon(x_0, y_0).$$

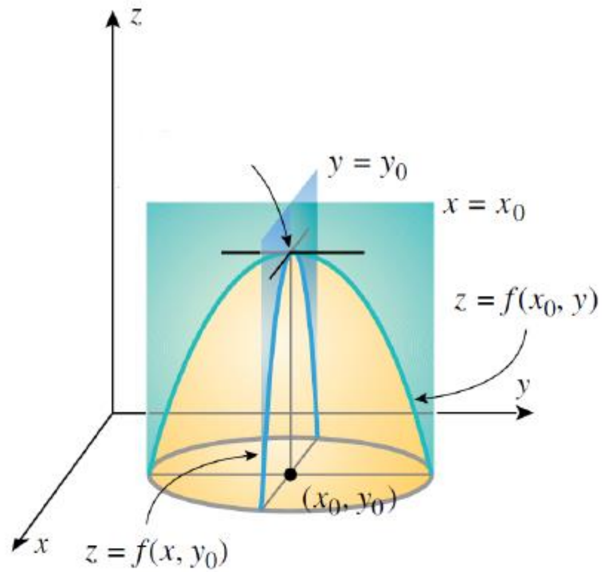
- Diz-se que f tem um máximo relativo (= máximo local) num ponto $(x_0, y_0) \in D$ se existir uma bola aberta $B_\epsilon(x_0, y_0)$ centrada em (x_0, y_0) tal que

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in D \cap B_\epsilon(x_0, y_0).$$



Máximo absoluto
$z = f(x, y)$
Máximo relativo
z
y
x
1
1
D
B
C
A
Mínimo relativo

Condição necessária de extremo relativo



Teorema:

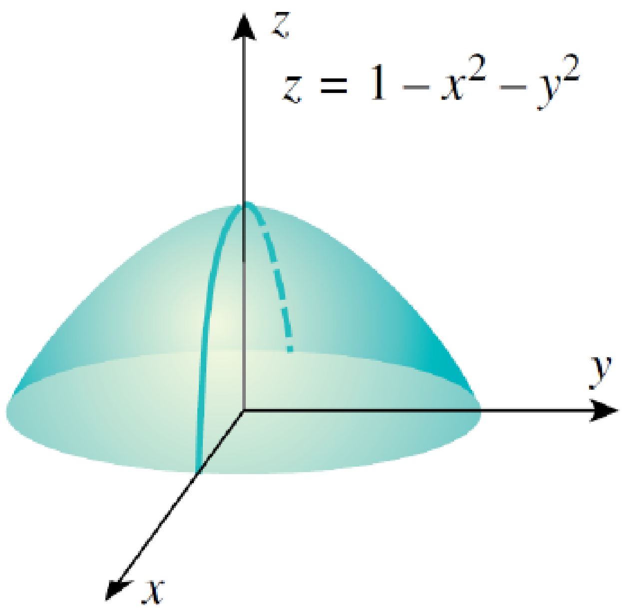
Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ *e* $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}(D)$. *Se* f *tiver um extremo relativo no ponto* (x_0, y_0) *e se as derivadas parciais de primeira ordem de* f *existirem nesse ponto, então*

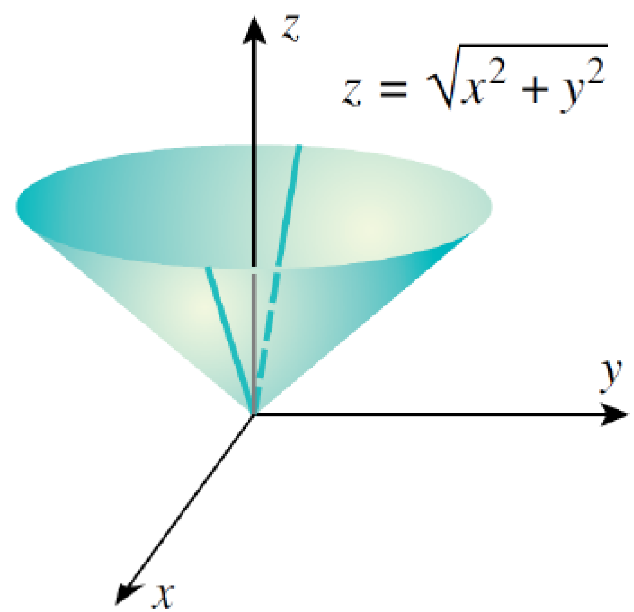
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Pontos críticos

Um ponto (x_0, y_0) no domínio de f é denominado ponto crítico da função

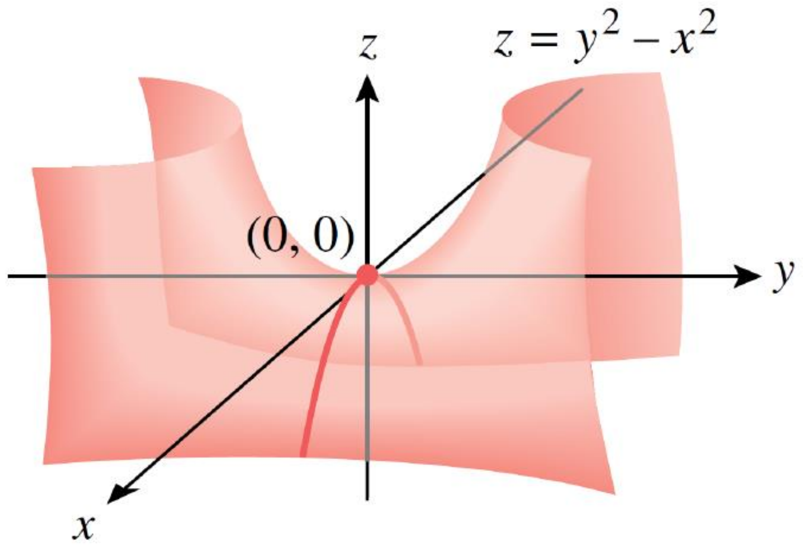
- se
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$
- ou se pelo menos uma das derivadas parciais não existir no ponto (x_0, y_0).





Exemplo

paraboloide
hiperbólico



Encontre os pontos críticos da função $z = y^2 - x^2$.

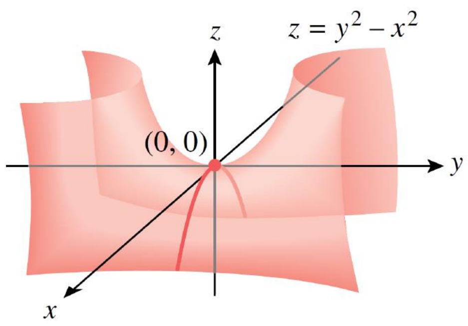
Pontos de sela

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in D$ um ponto crítico. Diz-se que (x_0, y_0) é um ponto de sela de f se para qualquer bola aberta $B(x_0, y_0)$ centrada em (x_0, y_0) existirem dois pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D \cap B(x_0, y_0)$$

tais que

$$f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0) < f(x_2, y_2).$$



Caso particular

Seja

$$g(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

onde $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Proposição:

1. Se $AC - B^2 > 0$
   - (i) e $A > 0$, então 0 é mínimo de $g(x,y)$;
   - (ii) e $A < 0$, então 0 é máximo de $g(x,y)$;
2. Se $AC - B^2 < 0$, então $g(x,y)$ não tem máximo nem mínimo, $(0,0)$ é ponto de sela.

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &= A\left(x^2 + \frac{2B}{A}xy + \frac{C}{A}y^2\right) \\
&= A\left(x^2 + \frac{2B}{A}xy + \frac{B^2y^2}{A^2} + \frac{C}{A}y^2 - \frac{B^2y^2}{A^2}\right) \\
&= A\left(x + \frac{B}{A}y\right)^2 + \frac{1}{A}(AC - B^2)y^2.
\end{aligned}
$$

$(0,0)$ é o único ponto critico de g e $g(0,0) = 0$.

- No caso $1(i)$, $g(x,y) \geq 0$, portanto 0 mínimo de g,
- no caso $1(ii)$, $g(x,y) \leq 0$, então 0 é máximo de g.
- No caso 2, g toma valores positivos e negativos em qualquer bola aberta de centro $(0,0)$.

Matriz Hessiana

$$H_f(a,b) = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix}}_{\text{a matriz Hessiana de } f \text{ em } (a,b)}$$

A matriz Hessiana de f em (a,b) denota-se por $H_f(a,b)$.

Classificação de um ponto crítico

(recorrendo à matriz Hessiana)

Teorema:

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ *um conjunto aberto,* $f \in C^2(D)$ *e* (a, b) *um ponto crítico de* f.

- *Se* $\det H_f(a, b) < 0$, *então* (a, b) *é um ponto de sela de* f.
- *Se* $\det H_f(a, b) > 0$ *e* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$, *então* $f(a, b)$ *é um mínimo relativo de* f.
- *Se* $\det H_f(a, b) > 0$ *e* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$, *então* $f(a, b)$ *é um máximo relativo de* f.

Ideia da demonstração

Seja $h(r) = f(a + r\cos\theta, b + r\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$$h\prime(r) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + r\cos\theta, b + r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(a + r\cos\theta, b + r\,\mathrm{sen}\,\theta)\mathrm{sen}\,\theta$$

$h\prime(0) = 0.$

$$h\prime\prime(r) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + r\cos\theta, b + r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + r\cos\theta, b + r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + r\cos\theta, b + r\,\mathrm{sen}\,\theta))\mathrm{sen}^2\,\theta$$

$h\prime\prime(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\mathrm{sen}^2\,\theta.$

Se denotar

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b),$$

$h = \cos\theta$ e $k = \operatorname{sen}\theta$

$$h\prime\prime(0) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2.$$

Anteriormente foi demonstrado o seguinte:

- Se $AC - B^2 = \det H_f(a,b) < 0$, então o sinal de $h\prime\prime(0)$ não se mantem em qualquer bola centrada na origem. Portanto, (a,b) é um ponto de sela.
- Se $AC - B^2 = \det H_f(a,b) > 0$ e $A > 0$, então $h\prime\prime(0) \geq 0$.

  Neste caso $f(a+h, b+k) \geq f(a,b)$.
- Se $AC - B^2 = \det H_f(a,b) > 0$ e $A < 0$, então $h\prime\prime(0) \leq 0$.

  Neste caso $f(a+h, b+k) \leq f(a,b)$.

Exemplo

Determine os extremos relativos da função

$$f(x,y) = x^3 - 3xy - y^3$$

e indique a sua natureza.

Pontos críticos são $(0,0)$ e (-1,1)

Depois de analisada a matriz Hessiana $H_f(0,0)$ e $H_f(-1,1)$ concluímos que (0,0) é ponto de sela e (-1,1) é um ponto de máximo, ou seja, f(-1,1)=1 é um máximo relativo de f.