Álgebra Linear e Geometria Analítica

7 - Produto Interno, Externo e Misto

Departamento de Matemática
FCT/UNL

Programa

1. Matrizes
2. Sistemas de Equações Lineares
3. Determinantes
4. Espaços Vectoriais
5. Aplicações Lineares
6. Valores e Vectores Próprios
7. Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
8. Geometria Analítica

7.1 Produto interno

Definição

Sejam $u = (a_1, a_2, a_3)$ e $v = (b_1, b_2, b_3)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Chamamos **produto interno canónico** ou **produto interno usual** sobre $\mathbb{R}^3$, e representamos por $u \mid v$, ao número real

$$u \mid v = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Neste capítulo sempre que nos referimos a $\mathbb{R}^3$ estamos a considerá-lo como espaço vectorial munido do produto interno canónico.

Proposição

Sejam u, v e w vectores de $\mathbb{R}^3$ e seja α um número real. Tem-se:

1. $u \mid v = v \mid u$.
2. $(u + v) \mid w = u \mid w + v \mid w$.
3. $(\alpha u) \mid v = \alpha (u \mid v)$.
4. $u \mid u \geq 0$, *sendo* $u \mid u = 0$ *se, e só se,* $u = 0_{\mathbb{R}^3}$.

7.1 Produto interno

Definição

Sendo $u = (a_1, a_2, a_3)$ um vector de $\mathbb{R}^3$, chamamos **norma** de u, e representamos por $\|u\|$, ao número real não negativo

$$\|u\| = \sqrt{u \mid u} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Se $\|u\| = 1$ dizemos que u é um vector **unitário** ou **normalizado**.

Proposição

Seja u um vector de $\mathbb{R}^3$ e seja α um número real. Tem-se:

1. $\|u\| \geq 0$, *sendo* $\|u\| = 0$ *se, e só se,* $u = 0_{\mathbb{R}^3}$.
2. $\|\alpha u\| = |\alpha| \, \|u\|$.

7.1 Produto interno

Observação

Se u é um vector não nulo de $\mathbb{R}^3$ então o vector

$$\hat{u} = \frac{1}{\|u\|} u$$

é unitário uma vez que $\|\hat{u}\| = \left|\frac{1}{\|u\|}\right| \|u\| = \frac{1}{\|u\|}\|u\| = 1$. Tal vector é frequentemente designado por **versor** de u

Proposição

Sejam u e v vectores de $\mathbb{R}^3$. Tem-se:

1. $|u \mid v| \leq \|u\|\|v\|$. (**Desigualdade de Schwarz**)
2. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. (**Desigualdade Triangular**)

7.1 Produto interno

De acordo com a Desigualdade de Schwarz, se u e v são vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$ então

$$\frac{\left|u \mid v\right|}{\|u\|\|v\|} \leq 1, \text{ ou equivalentemente, } -1 \leq \frac{u \mid v}{\|u\|\|v\|} \leq 1.$$

Surge então a seguinte noção de ângulo entre dois vectores.

Definição

Sejam u e v vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$. Chamamos **ângulo** entre u e v, e representamos por $\measuredangle(u,v)$, ao número real que verifica

$$0 \leq \measuredangle(u,v) \leq \pi \qquad \text{e} \qquad \cos\measuredangle(u,v) = \frac{u \mid v}{\|u\|\|v\|},$$

isto é,

$$\measuredangle(u,v) = \arccos\frac{u \mid v}{\|u\|\|v\|}.$$

7.1 Produto interno

Observação

Nas condições da definição anterior verifica-se facilmente que:

(i) $\measuredangle(u, v) = \measuredangle(v, u)$.

(ii) $u \mid v = \|u\| \|v\| \cos \measuredangle(u, v)$.

Exemplo

1 - Determinemos o ângulo entre os vectores $u = (1, 0, 0)$ e $v = (0, 0, 1)$. Tem-se

$$\begin{aligned}\measuredangle(u, v) &= \arccos \frac{(1, 0, 0) \mid (0, 0, 1)}{\|(1, 0, 0)\| \|(0, 0, 1)\|} \\ &= \arccos \frac{0}{\|(1, 0, 0)\| \|(0, 0, 1)\|} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

7.1 Produto interno

Exemplo

2 - Sejam u e v vectores não nulos e linearmente dependentes de $\mathbb{R}^3$.
Vejamos que o ângulo entre u e v é 0 ou π.
Como u e v são não nulos e linearmente dependentes existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $u = \alpha v$. Assim

$$\begin{aligned}\cos \measuredangle(u,v) &= \frac{u \mid v}{\|u\|\|v\|} = \frac{(\alpha v) \mid v}{\|\alpha v\|\|v\|} = \frac{\alpha\,(v \mid v)}{|\alpha|\,\|v\|^2} \\ &= \frac{\alpha}{|\alpha|} = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha > 0 \\ -1, & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}.\end{aligned}$$

Logo $\measuredangle(u,v) = \arccos 1$ ou $\measuredangle(u,v) = \arccos(-1)$,
isto é,

$$\measuredangle(u,v) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \measuredangle(u,v) = \pi.$$

7.1 Produto interno

Notemos que, quando u e v são perpendiculares, se tem $u \mid v = 0$.

Definição

Sendo u e v vectores de $\mathbb{R}^3$ dizemos que u e v são **ortogonais** se

$$u \mid v = 0.$$

Podemos então afirmar que vectores perpendiculares são ortogonais e que vectores ortogonais não nulos são perpendiculares.

Proposição

Sejam u e v vectores de $\mathbb{R}^3$. Os vectores u e v são ortogonais se, e só se,

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Definição

Seja $p \in \mathbb{N}$ e sejam $u_1, \ldots, u_p$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Dizemos que $(u_1, \ldots, u_p)$ é uma **sequência ortogonal** ou que $u_1, \ldots, u_p$ são **vectores ortogonais** se

$$u_i \mid u_j = 0, \quad \text{para } i \neq j \text{ e } i, j = 1, \ldots, p.$$

Dizemos que $(u_1, \ldots, u_p)$ é uma **sequência ortonormada** ou que $u_1, \ldots, u_p$ são **vectores ortonormados** se $u_1, \ldots, u_p$ são ortogonais e unitários, isto é, se

$$u_i \mid u_j = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}, \quad \text{para } i, j = 1, \ldots, p.$$

7.1 Produto interno

Proposição

Seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *uma base ortonormada de* $\mathbb{R}^3$.
Sendo $u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ *e* $v = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$ *vectores de* $\mathbb{R}^3$, *tem-se:*

1. $u \mid v = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$.
2. $\|u\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$.
3. $\alpha_1 = u \mid e_1,\ \alpha_2 = u \mid e_2,\ \alpha_3 = u \mid e_3$, *isto é,*

$$u = (u \mid e_1)\, e_1 + (u \mid e_2)\, e_2 + (u \mid e_3)\, e_3.$$

7.1 Produto interno

Exemplo

Em $\mathbb{R}^3$, consideremos os vectores

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2,0), \quad u_3 = (0,0,1).$$

Verificamos facilmente que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

Determinemos a sequência das coordenadas, na base $\mathcal{B}$, do vector $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

De acordo com 3 da Proposição anterior, a sequência das coordenadas do vector $v = (a,b,c)$, na base $\mathcal{B}$, é

$$(v \mid u_1, v \mid u_2, v \mid u_3) = \left(\frac{2a+b}{\sqrt{5}}, \frac{-a+2b}{\sqrt{5}}, c\right).$$

7.1 Produto interno

Proposição

Se $(u_1, \ldots, u_p)$ é uma sequência ortogonal de vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$ então $(u_1, \ldots, u_p)$ é uma sequência linearmente independente e $p \leq 3$.

Exemplo

Em $\mathbb{R}^3$, consideremos os vectores $u_1 = (2, 1, 0)$, $u_2 = (-2, 4, 0)$ e $u_3 = (0, 0, 2)$. A sequência (u_1, u_2, u_3) é ortogonal pois $u_1 \mid u_2 = 0$, $u_1 \mid u_3 = 0$ e $u_2 \mid u_3 = 0$.
Como (u_1, u_2, u_3) é uma sequência ortogonal de vectores não nulos podemos concluir, pela proposição anterior, que é linearmente independente. Dado que tal sequência tem $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vectores, (u_1, u_2, u_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$.
Atendendo a que (u_1, u_2, u_3) é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ e a que $\|u_1\| = \sqrt{5}$, $\|u_2\| = \sqrt{20}$, $\|u_3\| = 2$, concluímos que $\left(\frac{1}{\sqrt{5}} u_1, \frac{1}{\sqrt{20}} u_2, \frac{1}{2} u_3\right)$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

7.1 Produto interno

Proposição

Seja (u_1, u_2, u_3) *uma base de* $\mathbb{R}^3$ *e consideremos osvectores*

$$v_1 = u_1$$
$$v_2 = u_2 - \frac{u_2|v_1}{\|v_1\|^2} v_1$$
$$v_3 = u_3 - \frac{u_3|v_1}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{u_3|v_2}{\|v_2\|^2} v_2.$$

A sequência (v_1, v_2, v_3) *é uma base ortogonal de* $\mathbb{R}^3$.

Observação

Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

- Se $\dim F = 1$ e (u_1) é uma base de F então (u_1) é uma base ortogonal de F e $(\frac{1}{\|u_1\|} u_1)$ é uma base ortonormada de F.

7.1 Produto interno

Observação

- Se $\dim F = 2$ e (u_1, u_2) é uma base de F então, atendendo à proposição anterior, podemos afirmar que
$$(v_1, v_2) = (u_1, u_2 - \frac{u_2 \mid v_1}{\|v_1\|^2} v_1)$$
é uma base ortogonal de F e, consequentemente, $(\frac{1}{\|v_1\|} v_1, \frac{1}{\|v_2\|} v_2)$ é uma base ortonormada de F.
- Se (v_1, v_2, v_3) é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ então a sequência $(\frac{1}{\|v_1\|} v_1, \frac{1}{\|v_2\|} v_2, \frac{1}{\|v_3\|} v_3)$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

Podemos então afirmar que, para qualquer subespaço não nulo F de $\mathbb{R}^3$, existe um processo para obter uma base ortogonal a partir de uma base arbitrária de F, conhecido como **Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt**.

7.1 Produto interno

Exemplo

Seja $(u_1, u_2) = \big((1,1,1),(1,3,2)\big)$ uma base do subespaço F de $\mathbb{R}^3$.

- Determinemos uma base ortogonal de F.
  Aplicando o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt à base (u_1, u_2) determinemos uma base ortogonal (v_1, v_2) de F. Atendendo à observação anterior, considerando os vectores

$$
\begin{aligned}
v_1 &= u_1 = (1,1,1) \\
v_2 &= u_2 - \frac{u_2 \mid v_1}{\|v_1\|^2} v_1 = (1,3,2) - \frac{(1,3,2) \mid (1,1,1)}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) \\
&= (1,3,2) - \frac{6}{3}(1,1,1) = (-1,1,0)
\end{aligned}
$$

  podemos afirmar que $(v_1, v_2) = \big((1,1,1),(-1,1,0)\big)$ é uma base ortogonal de F.

7.1 Produto interno

Exemplo

- Determinemos uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que inclua os vectores da base ortogonal de F indicada anteriormente.
  Considerando, por exemplo, $z = (0,0,1)$ verificamos facilmente que a sequência (v_1, v_2, z) é uma base de $\mathbb{R}^3$. Pelo Processo de Gram-Schmidt, sendo

$$\begin{aligned} v_3 &= z - \frac{z \mid v_1}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{z \mid v_2}{\|v_2\|^2} v_2 \\ &= (0,0,1) - \frac{(0,0,1) \mid (1,1,1)}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) - \frac{(0,0,1) \mid (-1,1,0)}{\|(-1,1,0)\|^2}(-1,1,0) \\ &= (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{0}{2}(-1,1,0) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \end{aligned}$$

  podemos afirmar que (v_1, v_2, v_3) é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

7.1 Produto interno

Definição

Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Chamamos **complemento ortogonal** de F, e representamos por $F^\perp$, ao conjunto de todos os vectores de $\mathbb{R}^3$ que são ortogonais a qualquer vector de F, isto é,

$$F^\perp = \left\{ u \in \mathbb{R}^3 : \ u \mid v = 0, \ \text{para qualquer } v \in F \right\}.$$

Se $u \in F^\perp$ dizemos ainda que u é **ortogonal** a F.

Proposição

Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Tem-se, $F^\perp$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

7.1 Produto interno

Exemplo

Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

1. Se $F = \{(0,0,0)\}$ então $F^\perp = \mathbb{R}^3$ pois, para qualquer $u \in \mathbb{R}^3$, tem-se $u \mid (0,0,0) = 0$.
2. Se $F = \mathbb{R}^3$ então $F^\perp = \{(0,0,0)\}$ pois, se $u \mid v = 0$, para qualquer $v \in \mathbb{R}^3$, então $u = (0,0,0)$.
3. Se $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x - 2y + 3z = 0\right\}$ então $(1,-2,3) \in F^\perp$ pois

$$(1,-2,3) \mid (x,y,z) = 1 \cdot x + (-2) \cdot y + 3 \cdot z = x - 2y + 3z = 0,$$

para qualquer $(x,y,z) \in F$.

7.1 Produto interno

Proposição

Sejam $w, u_1, \ldots, u_p$ *vectores de* $\mathbb{R}^3$*. São equivalentes as afirmações seguintes:*

1. w *é ortogonal a cada um dos vectores* $u_1, \ldots, u_p$*.*
2. w *é ortogonal a cada um dos vectores do subespaço* $\langle u_1, \ldots, u_p \rangle$*, isto é,* $w \in \langle u_1, \ldots, u_p \rangle^{\perp}$*.*

Exemplo

Em $\mathbb{R}^3$, consideremos o subespaço
$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x - 2y + 3z = 0\right\}$.
Tem-se

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = 2y - 3z\right\} = \{(2y - 3z, y, z) :\ y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \Big\langle (2, 1, 0), (-3, 0, 1) \Big\rangle \end{aligned}$$

7.1 Produto interno

e, atendendo à proposição anterior resulta que

$$
\begin{aligned}
F^{\perp} &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (x,y,z)\mid(2,1,0)=0\ \wedge\ (x,y,z)\mid(-3,0,1)=0\right\}\\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 2x+y=0\ \wedge\ -3x+z=0\right\}\\
&= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x=\frac{1}{3}z\ \wedge\ y=-\frac{2}{3}z\right\}\\
&= \left\{(\frac{1}{3}z,-\frac{2}{3}z,z):\ z\in\mathbb{R}\right\} = \left\langle(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1)\right\rangle = \left\langle(1,-2,3)\right\rangle.
\end{aligned}
$$

Proposição

Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Tem-se

$$\mathbb{R}^3 = F \oplus F^{\perp}$$

e, consequentemente, $\dim\mathbb{R}^3 = \dim F + \dim F^{\perp}$.

7.1 Produto interno

Observação

Em $\mathbb{R}^3$, consideremos o subespaço

$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0\right\},$$

com $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Da definição de F resulta que

$$(a_1, a_2, a_3) \mid (x_1, x_2, x_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

para qualquer $(x_1, x_2, x_3) \in F$ e, portanto, (a_1, a_2, a_3) é um vector ortogonal a todo o vector de F, ou seja, $(a_1, a_2, a_3) \in F^{\perp}$.

Proposição

Seja F o subespaço de $\mathbb{R}^3$ das soluções do sistema de equações lineares homogéneo $AX = 0$. Tem-se $F^{\perp} = \mathcal{L}(A)$.

7.1 Produto interno

Exemplo

Em $\mathbb{R}^3$, consideremos os subespaços
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - 2y + 3z = 0\}$ e
$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x - z = 0 \ \wedge \ y - 3z = 0\}$.
De acordo com a proposição anterior tem-se

$$F^{\perp} = \langle (1, -2, 3) \rangle \quad \text{e} \quad G^{\perp} = \langle (2, 0, -1), (0, 1, -3) \rangle .$$

Definição

Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Dado $u \in \mathbb{R}^3$ chamamos **projecção ortogonal de u sobre F** e **projecção ortogonal de u sobre $F^{\perp}$** aos elementos únicos $u' \in F$ e $u'' \in F^{\perp}$, respectivamente, tais que $u = u' + u''$. Representamos ainda o vector u' por $\mathrm{Proj}_F\, u$ e o vector u'' por $\mathrm{Proj}_{F^{\perp}}\, u$.

Dizemos ainda que $\mathrm{Proj}_F\, u$ e $\mathrm{Proj}_{F^{\perp}}\, u$ são os vectores da **decomposição ortogonal** de u segundo F.

7.1 Produto interno

Observação

Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^3$.
Se $F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ ou $F = \mathbb{R}^3$ então, para qualquer $u \in \mathbb{R}^3$, é trivial a determinação de $\text{Proj}_F\, u$ e de $\text{Proj}_{F^\perp}\, u$.
Suponhamos que $\dim F = 2$ e, consequentemente, que $\dim F^\perp = 1$. Neste caso, se (w_1, w_2) é uma base de F e (w_3) é uma base de $F^\perp$ então (w_1, w_2, w_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$. Nestas condições, para qualquer $u \in \mathbb{R}^3$, existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, únicos, tais que

$$u = (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) + \alpha_3 w_3$$

e, portanto, pela unicidade da decomposição ortogonal de u segundo F, tem-se

$$\text{Proj}_F\, u = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \quad \text{e} \quad \text{Proj}_{F^\perp}\, u = \alpha_3 w_3.$$

7.1 Produto interno

Notemos que, quando (v_1, v_2) é uma base ortogonal de F, resulta que

$$\operatorname{Proj}_F u = \frac{u \mid v_1}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{u \mid v_2}{\|v_2\|^2} v_2 = \operatorname{Proj}_{\langle v_1 \rangle} u + \operatorname{Proj}_{\langle v_2 \rangle} u$$

e

$$\operatorname{Proj}_{F^\perp} u = u - \operatorname{Proj}_F u.$$

Considerações análogas podem ser feitas para o caso em que $\dim F = 1$.

Exemplo

1 - Em $\mathbb{R}^3$, consideremos o subespaço $G = \langle\!\langle (1,0,0),(0,0,1) \rangle\!\rangle$. Como $\big((1,0,0),(0,0,1)\big)$ é uma base ortonormada de G tem-se

$$\operatorname{Proj}_G(a,b,c) =$$
$$= \Big((a,b,c) \mid (1,0,0)\Big)(1,0,0) + \Big((a,b,c) \mid (0,0,1)\Big)(0,0,1)$$
$$= a(1,0,0) + c(0,0,1) = (a,0,c)$$

7.1 Produto interno

Exemplo

1 - e, portanto,
$\text{Proj}_{G^\perp}(a,b,c) = (a,b,c) - \text{Proj}_G(a,b,c) = (a,b,c) - (a,0,c) = (0,b,0)$.

2 - Em $\mathbb{R}^3$, consideremos o subespaço $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - 2y + 3z = 0\right\}$.
Num exemplo anterior vimos que

$$F = \Big\langle (2,1,0), (-3,0,1) \Big\rangle \quad \text{e} \quad F^\perp = \Big\langle (1,-2,3) \Big\rangle .$$

Sendo $w = (2,0,4)$ determinemos, por três processos diferentes, as projecções $\text{Proj}_F\, w$ e $\text{Proj}_{F^\perp}\, w$.

Verificamos facilmente que a sequência $\big((2,1,0),(-3,0,1)\big)$ *é uma base de* F *e que a sequência* $\big((1,-2,3)\big)$ *é uma base de* $F^\perp$*. Por proposiçõe santeriores podemos afirmar que* $\mathcal{B} = \big((2,1,0),(-3,0,1),(1,-2,3)\big)$ *é uma base de* $\mathbb{R}^3$*. Determinemos a sequência* $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ *das coordenadas do vector* $w = (2,0,4)$ *na base* $\mathcal{B}$*. Dado que*

$$w = (2,0,4) = 2(2,1,0) + 1(-3,0,1) + 1(1,-2,3)$$

tem-se
$\text{Proj}_F\, w = 2(2,1,0) + 1(-3,0,1) = (1,2,1)$ *e* $\text{Proj}_{F^\perp}\, w = (1,-2,3)$.

7.1 Produto interno

Exemplo

- O cálculo de $\operatorname{Proj}_F w$ pode ser feito, alternativamente, determinando $\operatorname{Proj}_{F^\perp} w$ e utilizando a igualdade $w = \operatorname{Proj}_F w + \operatorname{Proj}_{F^\perp} w$. Notemos que $\big((1,-2,3)\big)$ é uma base ortogonal de $F^\perp$. Tem-se então

$$\begin{aligned}\operatorname{Proj}_{F^\perp} w = \operatorname{Proj}_{\langle(1,-2,3)\rangle} w &= \frac{w \mid (1,-2,3)}{\|(1,-2,3)\|^2}(1,-2,3)\\ &= \frac{(2,0,4) \mid (1,-2,3)}{\|(1,-2,3)\|^2}(1,-2,3)\\ &= \frac{14}{14}(1,-2,3) = (1,-2,3)\end{aligned}$$

e

$$\operatorname{Proj}_F w = w - \operatorname{Proj}_{F^\perp} w = (2,0,4) - (1,-2,3) = (1,2,1).$$

7.1 Produto interno

Exemplo

Utilizando uma base ortogonal de F temos uma forma alternativa para determinar $\mathrm{Proj}_F\, w$. Dado que $(u_1, u_2) = \big((2,1,0), (-3,0,1)\big)$ é uma base de F, aplicando o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt a esta base, tem-se

$$\begin{aligned}
v_1 &= u_1 = (2,1,0)\\
v_2 &= u_2 - \frac{u_2 \mid v_1}{\|v_1\|^2} v_1 = (-3,0,1) - \frac{(-3,0,1) \mid (2,1,0)}{\|(2,1,0)\|^2}(2,1,0)\\
&= (-3,0,1) + \frac{6}{5}(2,1,0) = (-\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 1)
\end{aligned}$$

pelo que $(v_1, 5v_2) = \big((2,1,0), (-3,6,5)\big)$ é uma base ortogonal de F. Assim

$$\begin{aligned}
\mathrm{Proj}_F\, w &= \mathrm{Proj}_{\langle v_1, 5v_2\rangle}\, w = \frac{w \mid v_1}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{w \mid 5v_2}{\|5v_2\|^2} 5v_2\\
&= \frac{(2,0,4) \mid (2,1,0)}{\|(2,1,0)\|^2}(2,1,0) + \frac{(2,0,4) \mid (-3,6,5)}{\|(-3,6,5)\|^2}(-3,6,5)\\
&= \frac{4}{5}(2,1,0) + \frac{14}{70}(-3,6,5) = \frac{4}{5}(2,1,0) + \frac{1}{5}(-3,6,5) = (1,2,1)
\end{aligned}$$

7.2 Produto externo e produto misto

Definição

Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e consideremos a matriz $P = \mathcal{M}\left(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}, \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3}\right)$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma **base directa** se $\det P > 0$ e que $\mathcal{B}$ é uma **base inversa** se $\det P < 0$.

Observação

1. A base canónica de $\mathbb{R}^3$ é uma base directa pois $\mathcal{M}\left(id_{\mathbb{R}^3}; \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3}\right) = I_3$.
   A definição anterior permite, fixando a base canónica de $\mathbb{R}^3$,classificar cada uma das bases de $\mathbb{R}^3$ como base directa ou como base inversa.
2. Seja $\mathcal{B}$ uma base directa de $\mathbb{R}^3$. Notemos que uma base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ é directa se, e só se, $\det\left(\mathcal{M}\left(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}', \mathcal{B}\right)\right) > 0$.
   De facto, considerando $A = \mathcal{M}\left(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}', \mathcal{B}\right)$, $B = \mathcal{M}\left(id_{\mathbb{R}^3}; \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}\right)$ e $C = \mathcal{M}\left(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}', \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3}\right)$ tem-se $A = BC$. Atendendo a que a base $\mathcal{B}$ é directa, isto é, $\det B > 0$, podemos afirmar que $\det A > 0$ se, e só se, $\det C > 0$.

7.2 Produto externo e produto misto

Proposição

Sejam u e v vectores linearmente independentes de $\mathbb{R}^3$ e seja λ um número real positivo. Existe um, e um só, vector z de $\mathbb{R}^3$ tal que:

1. *z é ortogonal a u e z é ortogonal a v;*
2. *$\|z\| = \lambda$;*
3. *(u, v, z) é uma base directa de $\mathbb{R}^3$.*

Nas condições da proposição anterior, dado que u e v são vectores linearmente independentes tem-se $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, $v \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ e $\measuredangle(u, v) \in]0, \pi[$ pelo que
$\|u\|\|v\| \operatorname{sen} \measuredangle(u, v)$ é um número real positivo.

7.2 Produto externo e produto misto

Definição

Dados vectores u e v de $\mathbb{R}^3$, Dados vectores u e v de $\mathbb{R}^3$, chamamos **produto externo** (ou **produto vectorial**) de u e v, e representamos por $u \times v$ (ou $u \wedge v$), ao vector de $\mathbb{R}^3$ definido do seguinte modo:

1. Se u e v são linearmente dependentes então $u \times v = 0_{\mathbb{R}^3}$.
2. Se u e v são linearmente independentes então
   1. $u \times v$ é ortogonal a u e $u \times v$ é ortogonal a v;
   2. $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen} \measuredangle(u, v)$;
   3. $(u, v, u \times v)$ é uma base directa de $\mathbb{R}^3$.

Observação

Sendo (e_1, e_2, e_3) uma base ortonormada e directa de $\mathbb{R}^3$, tem-se $e_1 \times e_2 = e_3$ pois (a) e_3 é ortogonal a e_1 e e_3 é ortogonal a e_2, (b) $\|e_3\| = \|e_1\| \|e_2\| \operatorname{sen} \measuredangle(e_1, e_2)$ e (c) (e_1, e_2, e_3) é uma base directa de $\mathbb{R}^3$.
Analogamente concluímos que $e_2 \times e_3 = e_1$ e $e_3 \times e_1 = e_2$.

7.2 Produto externo e produto misto

Exemplo

Seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ uma base ortonormada e directa de $\mathbb{R}^3$. Sendo $u = e_1 + e_2$ e $v = e_2 - e_3$ determinemos o vector $u \times v$.

Atendendo a que os vectores u e v são linearmente independentes, $u \times v$ é o vector que satisfaz as condições indicadas na definição de produto externo. Como $u \times v$ é ortogonal a u e $u \times v$ é ortogonal a v temos que $u \times v \in \langle u, v \rangle^\perp$. Comecemos então por determinar uma base de $\langle u, v \rangle^\perp$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle^\perp &= \left\{ w \in \mathbb{R}^3 : w \mid u = 0 \ \wedge \ w \mid v = 0 \right\} \\
&= \left\{ w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3 \in \mathbb{R}^3 : w_1 + w_2 = 0 \ \wedge \ w_2 - w_3 = 0 \right\} \\
&= \left\{ w_1 e_1 + w_2 e_2 + w_3 e_3 \in \mathbb{R}^3 : w_1 = -w_3 \ \wedge \ w_2 = w_3 \right\} \\
&= \{ -w_3 e_1 + w_3 e_2 + w_3 e_3 : w_3 \in \mathbb{R} \} = \langle -e_1 + e_2 + e_3 \rangle
\end{aligned}$$

e, portanto, $u \times v = \lambda(-e_1 + e_2 + e_3)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ a determinar.

7.2 Produto externo e produto misto

Exemplo

Dado que $\|u\times v\| = \|u\|\|v\| \operatorname{sen} \measuredangle(u, v)$ e

$$\|u\times v\| = \|\lambda(-e_1 + e_2 + e_3)\| = |\lambda|\sqrt{3},$$

$$\|u\| = \|e_1 + e_2\| = \sqrt{2},$$

$$\|v\| = \|e_2 - e_3\| = \sqrt{2},$$

$$u \mid v = 1,$$

$$\operatorname{sen} \measuredangle(u, v) = \sqrt{1 - \cos^2 \measuredangle(u, v)} = \sqrt{1 - \left(\frac{u|v}{\|u\|\|v\|}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

tem-se $|\lambda|\sqrt{3} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, isto é, $|\lambda| = 1$ pelo que

$$u\times v = -e_1 + e_2 + e_3 \qquad \text{ou} \qquad u\times v = -(-e_1 + e_2 + e_3).$$

Das bases $\mathcal{B}' = (u, v, -e_1 + e_2 + e_3)$ e $\mathcal{B}'' = (u, v, e_1 - e_2 - e_3)$, uma é directa e a outra é inversa. Como $\det\big(\mathcal{M}\left(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}', \mathcal{B}\right)\big) = 3 > 0$ concluímos que a base $\mathcal{B}'$ é directa e, consequentemente, $u\times v = -e_1 + e_2 + e_3$.

7.2 Produto externo e produto misto

Proposição

Seja (e_1, e_2, e_3) *uma base ortonormada e directa de* $\mathbb{R}^3$. *Se* $u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ *e* $v = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$ *são vectores de* $\mathbb{R}^3$ *então*

$$u \times v = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} e_3.$$

Observação

[Mnemónica]

Se a base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ é ortonormada e directa, a expressão de $u \times v$ referida na proposição anterior obtém-se calculando o “determinante” simbólico

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

utilizando o Teorema de Laplace aplicado à linha 1.

7.2 Produto externo e produto misto

Proposição

Sejam u, v e w vectores de $\mathbb{R}^3$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Tem-se:

1. $u \times v = -(v \times u)$.
2. $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v) = u \times (\lambda v)$.
3. $(u + v) \times w = (u \times w) + (v \times w)$.
4. $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$.

Observação

Notemos que existem vectores u, v e w de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w).$$

Por exemplo, se (e_1, e_2, e_3) é uma base ortonormada e directa de $\mathbb{R}^3$ tem-se

$$(e_1 \times e_1) \times e_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \times e_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \text{e} \quad e_1 \times (e_1 \times e_2) = e_1 \times e_3 = -e_2.$$

7.2 Produto externo e produto misto

Definição

Dados vectores u, v e w de $\mathbb{R}^3$, chamamos **produto misto** de u, v e w ao escalar $(u \times v) \mid w$.

Proposição

Seja (e_1, e_2, e_3) *uma base ortonormada e directa de* $\mathbb{R}^3$. *Se* $u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$, $v = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3$ *e* $w = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$ *são vectores de* $\mathbb{R}^3$ *então*

$$(u \times v) \mid w = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

7.2 Produto externo e produto misto

Proposição

Sejam u, v e w vectores de $\mathbb{R}^3$. Tem-se:

1. $(u \times v) \mid w = -(u \times w) \mid v$.
2. $(u \times v) \mid w = -(v \times u) \mid w$.
3. $(u \times v) \mid w = -(w \times v) \mid u$
4. $(u \times v) \mid w = (v \times w) \mid u = (w \times u) \mid v$.
5. $(u \times v) \mid w = u \mid (v \times w)$.