Álgebra Linear e Geometria Analítica

5 - Aplicações Lineares

Departamento de Matemática
FCT/UNL

Programa

1. Matrizes
2. Sistemas de Equações Lineares
3. Determinantes
4. Espaços Vectoriais
5. **Aplicações Lineares**
6. Valores e Vectores Próprios
7. Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
8. Geometria Analítica

5.1 Definição, exemplos e propriedades

No que vai seguir-se, e mesmo que tal não seja enunciado, E, E′ e E″ são **espaços vectoriais** sobre $\mathbb{K}$ (todos sobre $\mathbb{R}$ ou todos sobre $\mathbb{C}$).

Definição

Dizemos que uma aplicação $f : E \longrightarrow E'$ é **aplicação linear** (sobre $\mathbb{K}$) se, para quaisquer $u, v \in E$ e qualquer $\alpha \in K$, satisfaz as duas condições seguintes:

1. $f(u+v) = f(u)+f(v)$.
2. $f(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot f(u)$.

5.1 Definição, exemplos e propriedades

Exemplos

- *Seja* $\beta \in \mathbb{K}$. *Considere-se a aplicação* $f : E \longrightarrow E$ *tal que*

$$\forall_{w \in E} \;\; f(w) = \beta w.$$

  f *é uma aplicação linear (designada por* *homotetia* *de razão* β*).*

- *Para* $(\beta = 0)$ *obtemos* $f : E \longrightarrow E$ *tal que*

$$\forall_{u \in E} \;\; f(u) = 0_E,$$

  designada por *aplicação nula* *de* E.

5.1 Definição, exemplos e propriedades

Exemplo

Para ($\beta = 1$) *obtemos*

$$f : E \longrightarrow E$$

tal que

$$\forall_{u \in E} \;\; f(u) = u,$$

designada por aplicação identidade de E *e que representaremos por* id_E.
Tem-se, pois,

$$\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E$$

tal que

$$\forall_{u \in E} \;\; \mathrm{id}_E(u) = u.$$

5.1 Definição, exemplos e propriedades

Exemplos

- *A aplicação* $f : E \longrightarrow E'$ *tal que*

$$\forall_{u \in E} \;\; f(u) = 0_{E'}$$

é uma aplicação linear (Porquê?) designada por aplicação nula de E *em* E'.

- *Se* F *é um subespaço de* E *então a aplicação* $f : F \longrightarrow E$ *tal que*

$$\forall_{u \in F} \;\; f(u) = u$$

é uma aplicação linear. (Porquê?)

5.1 Definição, exemplos e propriedades

Exemplos

- *Sejam* $m, b \in \mathbb{R}$. *A aplicação* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que*

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad f(x) = mx + b$$

é linear se, e só se, $b = 0$.

- *A aplicação* $D : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$ *definida por: para qualquer* $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}_n[x]$

$$D\left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) =$$

$$= n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

é uma aplicação linear (Porquê?) e é habitualmente designada por *aplicação derivada* *em* $\mathbb{R}_n[x]$.

5.1 Definição, exemplos e propriedades

Observação

Na definição de aplicação linear, as condições 1 e 2 são equivalentes à condição

3. $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}}\ \ \forall_{u,v\in E}\qquad f(\alpha\cdot u+\beta\cdot v)=\alpha\cdot f(u)+\beta\cdot f(v)$

ou, à condição

4. $\forall_{\alpha\in\mathbb{K}}\ \ \forall_{u,v\in E}\qquad f(\alpha\cdot u+v)=\alpha\cdot f(u)+f(v)$..

Proposição

Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Tem-se:

1. $f(0_E)=0_{E'}$.
2. $\forall_{u\in E}\ f(-u)=-f(u)$.

5.1 Definição, exemplos e propriedades

Dem.

1. Tem-se, para todo $u \in E$,

$$u = u + 0_E$$

e, portanto, $f(u) = f(u + 0_E) = f(u) + f(0_E)$. Como $f(u) \in E'$, temos

$$\cancel{f}(u) + 0_{E'} = \cancel{f}(u) + f(0_E).$$

Assim, $f(0_E) = 0_{E'}$.

2. Demonstrar que, para todo $u \in E$, se tem $f(-u) = -f(u)$ é equivalente a demonstrar que

$$f(u) + f(-u) = 0_{E'}.$$

De facto, tem-se

$$\begin{aligned} f(u) + f(-u) &= f(u + (-u)) \\ &= f(0_E) \\ &= 0_{E'}. \quad \square \end{aligned}$$

5.2 Operações com aplicações

Definição

Sendo $f : E \longrightarrow E'$ e $g : E \longrightarrow E'$ aplicações arbitrárias chamamos **aplicação soma** das aplicações f e g, e denotamos por $f+g$, à aplicação $f+g : \ E \longrightarrow E'$ tal que

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u).$$

para qualquer $u \in E$.

Definição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação arbitrária. Chamamos **aplicação produto de** α **por** f e representamos por αf à aplicação $\alpha f : E \longrightarrow E'$ tal que

$$(\alpha f)(u) = \alpha f(u),$$

para qualquer $u \in E$.

5.2 Operações com aplicações

Proposição

Sejam $f : E \longrightarrow E'$ *e* $g : E \longrightarrow E'$ *aplicações lineares e* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Tem-se:*

1. $f + g$ *é uma aplicação linear.*
2. αf *é uma aplicação linear.*

Definição

Sejam A, B e C conjuntos e $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$ aplicações. Chamamos **aplicação composta** de g com f, também designada por "g **após** f" e representamos por $g \circ f$, à aplicação $g \circ f : A \longrightarrow C$ tal que

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)),$$

para qualquer $a \in A$.

5.2 Operações com aplicações

Proposição

A aplicação obtida por composição de duas aplicações lineares é, ainda, uma aplicação linear.

Definição

Seja A é um conjunto, $f : A \longrightarrow A$ uma aplicação e $k \in \mathbb{N}_0$. Chamamos **potência de expoente k** de f e representamos por f^k, à aplicação

$$f^k : A \longrightarrow A$$

tal que

$$f^k = \begin{cases} id_A & se \quad k = 0 \\ f^{k-1} \circ f & se \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

5.3 Imagem e núcleo

Sendo A e B conjuntos e $f : A \longrightarrow B$ uma aplicação, designa-se por **contradomínio** de f ou **imagem** de f, e representa-se por $f(A)$ ou $\mathrm{Im}\, f$, o conjunto

$$\mathrm{Im}\, f = \{f(a) : \ a \in A\} \subseteq B.$$

Definição

Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear. Define-se **núcleo** de f, e representa-se por $\mathrm{Nuc}\, f$ ou $\mathrm{Ker}\, f$ (do inglês "Kernel"), o conjunto

$$\mathrm{Nuc}\, f = \{u \in E : \ f(u) = 0_{E'}\}.$$

Observação

Como sabemos que, se f é uma aplicação linear, $f(0_E) = 0'_E$ podemos concluir que $0_E \in \mathrm{Nuc}\, f$ e, portanto, $\mathrm{Nuc}\, f \neq \emptyset$.

5.3 Imagem e núcleo

Proposição

Se $f : E \longrightarrow E'$ *é uma aplicação linear então*

1. $\operatorname{Nuc} f$ *é um subespaço de* E.
2. $\operatorname{Im} f$ *é um subespaço de* E'.

Definição

Sejam $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear, W um subespaço de E e W' um subespaço de E'. Define-se **imagem de** W por f como sendo

$$f(W) = \{f(u) : \ u \in W\}$$

e **imagem recíproca** ou **imagem inversa** de W' por f a

$$f^{\leftarrow}(W') = \left\{u \in E : \ f(u) \in W'\right\}.$$

5.3 Imagem e núcleo

$\operatorname{Nuc} f = f^{\leftarrow}(\{0_{E'}\})$ e $\operatorname{Im} f = f(E)$.

Observação

Verifica-se que:

1. $f(W)$ *é um subespaço vectorial de* E'.
2. $f^{\leftarrow}(W')$ *é um subespaço vectorial de* E.

(exercício)

Exemplo

Consideremos a aplicação id_E. *Tem-se*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Nuc} \mathrm{id}_E &= \{u \in E : \ \mathrm{id}_E(u) = 0_E\} \\
&= \{u \in E : \ u = 0_E\} \\
&= \{0_E\}.
\end{aligned}$$

5.3 Imagem e núcleo

Exemplos

- *Consideremos a aplicação nula de* E *em* E', *que aqui representamos por* $0_{E,E'}$. *Tem-se*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Nuc} 0_{E,E'} &= \left\{u \in E : \ {}_{E,E'}(u) = 0_{E'}\right\} \\
&= \left\{u \in E : \ 0_{E'} = 0_{E'}\right\} \\
&= \left\{u \in E\right\} \\
&= E.
\end{aligned}
$$

- *Para a aplicação* $D : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}_n[x]$ *tem-se*

$$
\operatorname{Nuc} D = \{0x^n + \cdots + 0x + a_0 \in \mathbb{R}_n[x]\} = \{a_0 : \ a_0 \in \mathbb{R}\}.
$$

5.3 Imagem e núcleo

Exemplo

Para a aplicação $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$, *definida por*

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+b)x^2 + 2cx - d,$$

para toda a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, *tem-se*

$$\begin{aligned} \operatorname{Nuc} f &= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = 0x^2 + 0x + 0\right\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ (a+b)x^2 + 2cx - d = 0x^2 + 0x + 0\right\} \\ &= \left\{\begin{bmatrix} -b & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \ b \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

5.3 Imagem e núcleo

Sejam A e B conjuntos e $f : A \longrightarrow B$ uma aplicação.

- *f é* **sobrejectiva** *se*

$$\forall_{b \in B} \;\; \exists_{a \in A} \quad f(a) = b.$$

- *f é* **injectiva** *se*

$$\forall_{a,a' \in A} \quad a \neq a' \Longrightarrow f(a) \neq f(a')$$

ou equivalentemente,

$$\forall_{a,a' \in A} \quad f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a'.$$

- *f é* **bijectiva** *se f é sobrejectiva e injectiva, ou equivalentemente,*

$$\forall_{b \in B} \;\; \exists^1_{a \in A} \quad f(a) = b.$$

5.3 Imagem e núcleo

Proposição

Seja $f : E \longrightarrow E'$ *uma aplicação linear. Tem-se* f *é injectiva se, e só se,* $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$.

Dem. Suponhamos que f é injectiva e demonstremos que $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$. Seja $u \in \operatorname{Nuc} f$. Como $f(u) = 0_{E'} = f(0_E)$ e f é injectiva concluímos que $u = 0_E$. Logo $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$ e demonstremos que f é injectiva.

Se $u, v \in E$ são tais que $f(u) = f(v)$ então $f(u) + (-f(v)) = 0_{E'}$.

Como f é linear obtemos $f(u) + (-f(v)) = f(u) + f(-v) = f(u + (-v)) = 0_{E'}$ e, portanto, $u + (-v) \in \operatorname{Nuc} f$.

Dado que $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$ concluímos que $u + (-v) = 0_E$ e, consequentemente, $u = v$.

5.3 Imagem e núcleo

Proposição

Seja $f : E \longrightarrow E'$ *uma aplicação linear. Tem-se:*

1. *Se* E *é finitamente gerado e* $E = \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$ *então* $\operatorname{Im} f = \langle f(v_1), \ldots, f(v_s) \rangle$ *.*

   (Dizemos então que f *transforma geradores de* E *em geradores de* $\operatorname{Im} f$*.)*

2. *Se* $u_1, \ldots, u_r \in E$ *são linearmente independentes e* f *é injectiva então* $f(u_1), \ldots, f(u_r)$ *são linearmente independentes.*

   (Dizemos então que se f *é injectiva então* f *transforma vectores de* E *linearmente independentes em vectores de* $\operatorname{Im} f$ $(\subseteq E')$ *linearmente independentes.)*

5.3 Imagem e núcleo

Corolário

Seja $f : E \longrightarrow E'$ *uma aplicação linear e* W *um subespaço de* E *de dimensão finita. Tem-se*

1. *Se* $W = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ *então* $f(W) = \langle f(u_1), \ldots, f(u_r) \rangle$
2. *se* f *é injectiva então* $\dim W = \dim f(W)$

Desigamos por **nulidade** *e representamos por* $n(f)$ *a dimensão do* $\operatorname{Nuc} f$. *Desigamos por* **característica** *e representamos por* $r(f)$ *a dimensão da* $\operatorname{Im} f$.

Proposição (Teorema da Dimensão)

Se $f : E \longrightarrow E'$ *é uma aplicação linear, com* E *de dimensão finita, então* $\operatorname{Nuc} f$ *e* $\operatorname{Im} f$ *também têm dimensão finita e*

$$\dim E = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f .$$

5.3 Imagem e núcleo

Observação

Sejam E *e* E' *espaços vectoriais sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensão finita e* $f : E \to E'$ *uma aplicação linear. Então:*

1. *Se* $\dim E < \dim E'$ *então* f *não é sobrejectiva;*
2. *Se* $\dim E > \dim E'$ *então* f *não é injectiva.*

Proposição

Se $f : E \longrightarrow E'$ *é uma aplicação linear e* E *e* E'*, ambos de dimensão finita verificam* $\dim(E) = \dim(E')$ *então são equivalentes as afirmações:*

1. f *é injectiva.*
2. f *é sobrejectiva.*
3. f *é bijectiva.*

5.3 Imagem e núcleo

Dem. Suponhamos que $f : E \longrightarrow E'$ é uma aplicação linear com

$$\dim E = \dim E'.$$

Afirmar que f é injectiva equivale a afirmar que $\operatorname{Nuc} f = \{0_E\}$ ou, ainda, que $\dim \operatorname{Nuc} f = 0$.
Como $\dim E = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \mathrm{Im}\, f$ concluímos que

$$\dim \operatorname{Nuc} f = 0 \quad \text{se, e só se,} \quad \dim E = \dim \mathrm{Im}\, f.$$

Dado que $\dim E = \dim E'$, tem-se $\dim E = \dim \mathrm{Im}\, f$ se, e só se,

$$\dim E' = \dim \mathrm{Im}\, f.$$

A igualdade anterior é equivalente a $\mathrm{Im}\, f = E'$ pois uma das implicações é trivial e, como $\mathrm{Im}\, f$ é um subespaço de E' com a dimensão de E' então $\mathrm{Im}\, f = E'$.
Demonstrámos então que f é injectiva se, e só se, $\mathrm{Im}\, f = E'$ e, portanto, que **1** e **2** são equivalentes.

Trivialmente, **3** implica **1**. Reciprocamente, se **1** se verifica, como **2** também é satisfeita, tem-se **3**.

5.3 Imagem e núcleo

Proposição (Teorema da Extensão Linear)

Sejam E e E' espaços vectoriais, com E de dimensão finita.
Seja $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base de E e sejam $u'_1, \ldots, u'_n$ vectores arbitrários de E'. Existe uma, e uma só, aplicação linear $f : E \longrightarrow E'$ tal que

$$f(e_1) = u'_1 \cdots f(e_n) = u'_n$$

ou equivalentemente,

$$f(e_i) = u'_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Observação

Atendendo ao Teorema da Extensão Linear é usual afirmar que se o espaço de partida de uma aplicação tem dimensão finita então a aplicação fica completamente determinada dando as imagens dos vectores de uma base do espaço de partida.

5.4 Aplicações invertíveis e isomorfismos

Definição

Sejam A e B conjuntos. Uma aplicação $f : A \longrightarrow B$ diz-se **invertível** se existe uma aplicação $g : B \longrightarrow A$ tal que

$$f \circ g = id_B \quad \text{e} \quad g \circ f = id_A.$$

Representamos tal aplicação (única) por f^{-1} que designamos por **inversa de** f.

Proposição

A inversa de uma aplicação linear invertível é, ainda, uma aplicação linear invertível.

5.4 Aplicações invertíveis e isomorfismos

Definição

A uma aplicação $f : E \longrightarrow E'$ linear e bijectiva (invertível) chamamos **isomorfismo linear** (ou simplesmente, **isomorfismo**) de E em E'.
Dizemos que E é **isomorfo** a E', e representamos por $E \simeq E'$, se existe um isomorfismo de E em E'.

Observação

Sejam E, E' e E'' espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$. Então:

(a) $E \simeq E$.

(b) *Se* $E \simeq E'$ *então* $E' \simeq E$. *(Dizemos então que* E *e* E' *são isomorfos.)*

(c) *Se* $E \simeq E'$ *e* $E' \simeq E''$ *então* $E \simeq E''$.

5.4 Aplicações invertíveis e isomorfismos

Proposição

Sejam E *e* E' *espaços vectoriais, com* E *de dimensão finita. Tem-se:*
E *e* E' *são isomorfos se, e só se,* $\dim E = \dim E'$.

Observação

Dois espaços vectoriais de dimensão finita são isomorfos se, e só se, têm a mesma dimensão.

Corolário

Se E *é um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$, *com* E *de dimensão* n, *então* E *é isomorfo a* $\mathbb{K}^n$.

5.4 Aplicações invertíveis e isomorfismos

Exemplos

1. *$\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^6$ são isomorfos porque têm ambos dimensão finita e*

$$\dim \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) = 6 = \dim \mathbb{R}^6.$$

Por exemplo, a aplicação $f : \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^6$ tal que

$$\forall_{\left[\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})} \qquad f\left(\left[\begin{smallmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{smallmatrix}\right]\right) = (a, b, c, d, e, f)$$

é um isomorfismo entre $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^6$.

5.4 Aplicações invertíveis e isomorfismos

2. $\mathbb{R}_n[x]$ e $\mathbb{R}^{n+1}$ são isomorfos porque têm ambos dimensão finita e

$$\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}.$$

Por exemplo, a aplicação

$$g : \mathbb{R}_n[x] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

tal que

$$\forall_{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}_n[x]} \qquad g\left(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0\right) = \left(a_n, \ldots, a_1, a_0\right)$$

é um isomorfismo entre $\mathbb{R}_n[x]$ e $\mathbb{R}^{n+1}$.

5.5 Matriz de uma aplicação linear

No que vai seguir-se suporemos que os espaços vectoriais E e E' são ambos de dimensão finita, com $\dim E = n \geq 1$ e $\dim E' = m \geq 1$.

Definição

Sejam $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ uma base de E e $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ uma base de E'. Se $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ é a sequência das coordenadas de $f(e_j)$ na base $\mathcal{B}'$ ou seja,
$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + \cdots + a_{mj}e'_m, \qquad j = 1, \ldots, n.$
Designa-se por **matriz de f em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$** (por esta ordem), e representa-se por $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cuja coluna j, $j = 1, \ldots, n$, é a sequência das coordenadas de $f(e_j)$ na base $\mathcal{B}'$.

Notemos que, como

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + \cdots + a_{mj}e'_m, \qquad j = 1, \ldots, n$$

a coluna j de A é $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$.

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Exemplos

1. *Considere a aplicação* id_E *e seja* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *uma base arbitrária de* E*. Determinemos*

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}, \mathcal{B}).$$

Tem-se

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{id}_E(e_1) & = & e_1 = \mathbf{1}e_1 + \mathbf{0}e_2 + \mathbf{0}e_3 + \cdots + \mathbf{0}e_{n-1} + \mathbf{0}e_n \\
\mathrm{id}_E(e_2) & = & e_2 = \mathbf{0}e_1 + \mathbf{1}e_2 + \mathbf{0}e_3 + \cdots + \mathbf{0}e_{n-1} + \mathbf{0}e_n \\
 & \vdots & \\
\mathrm{id}_E(e_n) & = & e_n = \mathbf{0}e_1 + \mathbf{0}e_2 + \mathbf{0}e_3 + \cdots + \mathbf{0}e_{n-1} + \mathbf{1}e_n
\end{array}$$

5.5 Matriz de uma aplicação linear

pelo que

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n, \quad \text{com } n = \dim E.$$

Se em E considerarmos a base $\mathcal{B}' = (e_1, e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_{n-1} + e_n)$ teremos

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.5 Matriz de uma aplicação linear

2. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$\forall_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \quad f(a,b,c) = (2a+b,-c).$$

Sejam $\mathcal{B} = \big((1,1,2),(0,2,6),(0,0,-4)\big)$ e $\mathcal{B}' = \big((1,0),(0,2)\big)$ bases de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Determinemos $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$.
Tem-se

$$\begin{array}{lcrcrcr}
f(1,1,2) & = & (3,-2) & = & \mathbf{3}(1,0) & + & (\text{-}\mathbf{1})(0,2) \\
f(0,2,6) & = & (2,-6) & = & \mathbf{2}(1,0) & + & (\text{-}\mathbf{3})(0,2) \\
f(0,0,-4) & = & (0,4) & = & \mathbf{0}(1,0) & + & \mathbf{2}(0,2)
\end{array}$$

pelo que

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Proposição

Seja $f : E \longrightarrow E'$ *uma aplicação linear. Sejam* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$ *bases arbitrárias de* E *e* E'*, respectivamente, e* $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
Tem-se:

$$\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{r}(A).$$

Proposição

Seja $f : E \longrightarrow E'$ *uma aplicação linear. Sejam* $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *uma base de* E, $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m)$ *uma base de* E' *e* $A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.
Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *é a sequência das coordenadas de um vector* $u \in E$ *na base* $\mathcal{B}$ *então a sequência das coordenadas de* $f(u)$ *na base* $\mathcal{B}'$ *é* $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ *tal que*

$$A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}.$$

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Dem.
Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
Sabemos que

$$f(e_j) = a_{1j}e_1' + \cdots + a_{mj}e_m', \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Pretendemos calcular $f(u)$, para qualquer $u \in E$.
Como $(e_1, \ldots, e_n)$ é uma base de E existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, únicos, tais que $u = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$.
Logo

$$\begin{aligned} f(u) &= f(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) \\ &= \alpha_1 f(e_1) + \cdots + \alpha_n f(e_n) \\ &= \alpha_1 (a_{11}e_1' + \cdots + a_{m1}e_m') + \cdots + \alpha_n (a_{1n}e_1' + \cdots + a_{mn}e_m') \\ &= (\alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_n a_{1n})e_1' + \cdots + (\alpha_1 a_{m1} + \cdots + \alpha_n a_{mn})e_m' \\ &= (a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1n}\alpha_n)e_1' + \cdots + (a_{m1}\alpha_1 + \cdots + a_{mn}\alpha_n)e_m'. \end{aligned}$$

Assim, a sequência das coordenadas de $f(u)$ na base $\mathcal{B}' = (e_1', \ldots, e_m')$ é

$$\Big((a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1n}\alpha_n), \ldots, (a_{m1}\alpha_1 + \cdots + a_{mn}\alpha_n)\Big).$$

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Dem. Como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1n}\alpha_n \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + \cdots + a_{mn}\alpha_n \end{bmatrix}$$

está demonstrado o que pretendíamos. $\square$

Exemplo

Sejam $\mathcal{B} = \big((1,1,2),(0,2,6),(0,0,-4)\big)$ *uma base de* $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}' = \big((1,0),(0,2)\big)$ *uma base de* $\mathbb{R}^2$ *e considere-se a aplicação linear* $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determinemos $f(1,-3,-6)$.

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Comecemos por determinar a sequência das coordenadas do vector $u = (1, -3, -6)$ na base $\mathcal{B}$. Tem-se

$$(1, -3, -6) = \alpha_1(1, 1, 2) + \alpha_2(0, 2, 6) + \alpha_3(0, 0, -4)$$

com

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = -3 \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 - 4\alpha_3 = -6 \end{cases}.$$

Verificamos facilmente que a sequência das coordenadas do vector u na base $\mathcal{B}$ é $(1, -2, -1)$, isto é,

$$(1, -3, -6) = \mathbf{1}(1, 1, 2) + (\text{-}\mathbf{2})(0, 2, 6) + (\text{-}\mathbf{1})(0, 0, -4).$$

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Assim, de acordo com a proposição anterior, a sequência das coordenadas de $f(u)$, na base $\mathcal{B}'$, é $(-1, 3)$ pois

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Se $(-1, 3)$ é a sequência das coordenadas de $f(u)$ na base $\mathcal{B}' = \big((1, 0), (0, 2)\big)$ então ter-se-á

$$\begin{aligned} f(u) &= \text{-}\mathbf{1}(1, 0) + \mathbf{3}(0, 2) \\ &= (-1, 6), \end{aligned}$$

que é o vector pretendido.

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Proposição

Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de E e seja $u \in E$. Se $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é a sequência das coordenadas de u na base $\mathcal{B}$ então a sequência das coordenadas de u na base $\mathcal{B}'$ é $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ com

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Definição

Se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ são bases de E designamos por **matriz de mudança de base** de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$ a matriz $\mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

A matriz de mudança de base $(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ permite-nos relacionar as coordenadas de um vector, na base $\mathcal{B}$, com as suas coordenadas, na base $\mathcal{B}'$.

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Exemplo

Seja E *um espaço vectorial sobre* $\mathbb{R}$ *de dimensão* 3 *e seja* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *uma base de* E.
A sequência $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ *com*

$$e'_1 = e_1 + e_2 - e_3, \qquad e'_2 = e_2 + e_3 \qquad e \qquad e'_3 = 2e_3$$

é também uma base de E.
Seja, por exemplo,

$$w = 2e'_1 + 1e'_2 - 3e'_3.$$

A sequência das coordenadas de w*, na base* $\mathcal{B}'$*, é* $(2, 1, -3)$.
Determinemos a sequência das coordenadas de w*, na base* $\mathcal{B}$.

5.5 Matriz de uma aplicação linear

• Sem utilizar matrizes de mudança de base ter-se-ia:

$$\begin{aligned} w &= 2e_1' + 1e_2' - 3e_3' \\ &= 2(e_1 + e_2 - e_3) + 1(e_2 + e_3) - 3(2e_3) \\ &= 2e_1 + 3e_2 - 7e_3 \end{aligned}$$

e, portanto, a sequência das coordenadas de w, na base $\mathcal{B}$, é $(2, 3, -7)$.

• Um processo alternativo, para resolver o problema, é determinar a matriz de mudança de base $(\mathcal{B}', \mathcal{B})$, isto é,

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Tem-se

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{id}_E(e_1') & = & e_1' = \mathbf{1}e_1 + \mathbf{1}e_2 + (\text{-}\mathbf{1})e_3 \\ \mathrm{id}_E(e_2') & = & e_2' = \mathbf{0}e_1 + \mathbf{1}e_2 + \quad \mathbf{1}e_3 \\ \mathrm{id}_E(e_3') & = & e_3' = \mathbf{0}e_1 + \mathbf{0}e_2 + \quad \mathbf{2}e_3 \end{array}$$

pelo que

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

De acordo com a proposição anterior teremos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

e, portanto, a sequência das coordenadas de w, na base $\mathcal{B}$, é $(2, 3, -7)$.

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Se pretendermos a sequência das coordenadas, na base $\mathcal{B}$, do vector

$$z = \alpha_1 e_1' + \alpha_2 e_2' + \alpha_3 e_3'$$

procederíamos de forma idêntica. Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \end{bmatrix}$$

a sequência das coordenadas, na base $\mathcal{B}$, do vector z é

$$(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3).$$

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Proposição

Sejam $f : E \longrightarrow E'$ *e* $g : E \longrightarrow E'$ *aplicações lineares e* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Seja* $\mathcal{B}$ *uma base de* E *e seja* $\mathcal{B}'$ *uma base de* E'. *Se* $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A$ *e* $\mathcal{M}(g; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = B$ *então*

$$\mathcal{M}(f+g; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A + B \qquad e \qquad \mathcal{M}(\alpha f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \alpha A.$$

Proposição

Sejam $f : E \longrightarrow E'$ *e* $g : E' \longrightarrow E''$ *aplicações lineares. Sejam* $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ *e* $\mathcal{B}''$ *bases, respectivamente, de* E, E' *e* E''. *Se* $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A$ *e* $\mathcal{M}(g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'') = B$ *então*

$$\mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = BA,$$

isto é, $\mathcal{M}(g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'')\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'')$.

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Dem.
Sejam $n = \dim E$, $m = \dim E'$ e $p = \dim E''$. Consideremos

$$\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n), \quad \mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_m) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}'' = (e''_1, \ldots, e''_p)$$

bases de E, E' e E'', respectivamente.
Seja $C = \mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'')$ e demonstremos que $C = BA$.
Pela definição de matriz de uma aplicação linear tem-se

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),$$

$$\mathcal{M}(g; \mathcal{B}', \mathcal{B}'') = B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{K})$$

e

$$\mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'') = C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K}).$$

Assim, C e BA pertencem ambas a $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$.

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Dem. Demonstremos, finalmente, que $c_{ij} = (BA)_{ij}$.
c_{ij}, sendo o elemento da posição (i, j) da matriz $\mathcal{M}(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'')$, é a i-ésima coordenada do vector $(g \circ f)(e_j)$ em relação à base $\mathcal{B}''$. Como

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(e_j) &= g\left(f(e_j)\right) \\
&= g(a_{1j}e'_1 + \cdots + a_{mj}e'_m) \\
&= a_{1j}g(e'_1) + \cdots + a_{mj}g(e'_m) \\
&= a_{1j}(b_{11}e''_1 + \cdots + b_{p1}e''_p) + \cdots + a_{mj}(b_{1m}e''_1 + \cdots + b_{pm}e''_p) \\
&= (a_{1j}b_{11} + \cdots + a_{mj}b_{1m})e''_1 + \cdots + (a_{1j}b_{p1} + \cdots + a_{mj}b_{pm})e''_p
\end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
c_{ij} &= a_{1j}b_{i1} + \cdots + a_{mj}b_{im} \\
&= b_{i1}a_{1j} + \cdots + b_{im}a_{mj}.
\end{aligned}$$

Assim $c_{ij} = (BA)_{ij}$, conforme pretendíamos demonstrar. $\square$

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Proposição

Seja $f : E \longrightarrow E'$ *seja* $\mathcal{B}$ *uma base de* E e $\mathcal{B}'$ *uma base de* E' *e*

$$A = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}').$$

Tem-se:

1. *A é invertível se, e só se, f é invertível.*
2. *Nas condições de 1.* $A^{-1} = \mathcal{M}(f^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B})$

Proposição

Toda a matriz de mudança de base é invertível e se $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$) *são bases de* E *tais que*

$$P = \mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

então

$$P^{-1} = \mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Proposição

Seja $f : E \longrightarrow E'$ *uma aplicação linear. Sejam* $\mathcal{B}_1$ *e* $\mathcal{B}_2$ *bases de* E *e sejam* $\mathcal{B}_1'$ *e* $\mathcal{B}_2'$ *bases de* E'*.*
Se

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1') = A_1 \qquad e \qquad \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2') = A_2$$

então

$$A_2 = QA_1P$$

em que

$$Q = \mathcal{M}(\mathrm{id}_{E'};\mathcal{B}_1',\mathcal{B}_2') \qquad e \qquad P = \mathcal{M}(\mathrm{id}_E;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1),$$

isto é, Q *é a matriz de mudança de base* $(\mathcal{B}_1',\mathcal{B}_2')$ *e* P *é a matriz de mudança de base* $(\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)$*.*

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Dem.
Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
E \arrow[r, "\mathrm{id}_E", "\mathrm{P}"'] & E \arrow[r, "f", "\mathrm{A}_1"'] & E' \arrow[r, "\mathrm{id}_{E'}", "\mathrm{Q}"'] & E' \\
\mathcal{B}_2 \arrow[rrr, bend right, "\mathrm{A}_2"'] & \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}'_1 & \mathcal{B}'_2
\end{tikzcd} .$$

$$\mathrm{id}_{E'} \circ f \circ \mathrm{id}_E = f$$

Como $f = \mathbb{1}_{E'} \circ f \circ \mathbb{1}_E$, verifica-se que

$$A_2 = \mathcal{M}(f;\, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2) = \mathcal{M}(\mathbb{1}_{E'} \circ f \circ \mathbb{1}_E;\, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2).$$

Atendendo ao que sabemos sobre a matriz da composição de duas aplicações lineares, que é também válida para a composição de $k \geq 2$ aplicações, tem-se

$$A_2 = \mathcal{M}(\mathbb{1}_{E'};\, \mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2)\mathcal{M}(f;\, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1)\mathcal{M}(\mathbb{1}_E;\, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = QA_1P,$$

como pretendíamos demonstrar. $\square$

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Corolário

Nas condições do teorema anterior tem-se:

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_2) = QA_1 \quad \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}'_1) = A_1P.$$

Observações

(1) *Em relação ao teorema anterior, note que se* $\dim E = n$ *e* $\dim E' = m$ *então* $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $Q \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ *e* $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(2) *O teorema anterior sugere a seguinte definição para matrizes que se relacionam de forma idêntica à das matrizes* A_1 *e* A_2 *referidas anteriormente.*

Definição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A é **equivalente** a B se existem matrizes invertíveis $Q \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{K})$ e $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que

$$B = QAP.$$

5.5 Matriz de uma aplicação linear

Note que se A é equivalente a B então também B é equivalente a A e, por isso, dizemos apenas que A e B são equivalentes.

Consideremos o seguinte caso particular do teorema anterior:

$$E = E', \qquad \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1' \qquad e \qquad \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_2'.$$

Se $A_1 = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$ e $A_2 = \mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2)$ então $A_2 = P^{-1}A_1P$ em que

$$P^{-1} = \mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \qquad e \qquad \mathcal{M}(\mathrm{id}_E; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = P.$$

Definição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A é **semelhante** a B se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$B = P^{-1}AP.$$