

# ALGA - Algebra Linear e Geometria Analítica

Felipe B. Pinto 61387 - MIEQB

15 de novembro de 2021

## Conteúdo

<b>I – Anotações</b>	<b>3</b>	Questão 129 . . . . .	12
<b>Slide 1 Matrizes</b>	<b>3</b>	Questão 42 . . . . .	12
1 Matrizes . . . . .	3	Questão 43 . . . . .	13
<b>II – Exercícios</b>	<b>4</b>	Questão 45 . . . . .	13
<b>Lista 1 Matrizes</b>	<b>4</b>	Questão 48 . . . . .	14
Questão 1 . . . . .	4	Questão 51 . . . . .	14
Questão 2 . . . . .	5	Questão 49 . . . . .	14
Questão 3 . . . . .	5	Questão 171 . . . . .	14
Questão 4 . . . . .	6	<b>Lista 2 Sistemas de Equações Lineares</b>	<b>15</b>
Questão 10 . . . . .	6	Questão 2 . . . . .	15
Questão 9 . . . . .	8	<b>Lista 3 Determinantes</b>	<b>16</b>
Questão 10 Indique... . . . .	8	Questão 72 . . . . .	16
Questão 108 . . . . .	9	Questão 73 . . . . .	16
Questão 22 . . . . .	10	Questão 28 . . . . .	16
Questão 34 . . . . .	11	Questão 29 . . . . .	18
Questão 37 . . . . .	11		

Questão 31	. . . . .	19	Questão 33	. . . . .	20
Questão 25	. . . . .	20			

## I – Anotações

### Slide 1 – Matrizes

#### 1 Matrizes

## II – Exercícios

### Lista 1 – Matrizes

#### Questão 1

Q1 - a)

B, E, F, H, I

Q1 - b)

B, E, F, H, I

Q1 - c)

B, E, F, I

Q1 - d)

B, E

## Questão 2

Q2 - a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Q2 - c)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Q2 - b)

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## Questão 3

**Q3 - a)**

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Q3 - c)**

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

**Q3 - b)**

$$= \begin{bmatrix} 8 & 2 & 10 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

**Q3 - d)**

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -15 \\ 11 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

**Questão 4**

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Questão 10**

Q10 - c)

$$(AB)^{(i)} = (AB)^{(j)} \because A^{(j)} = A^{(i)} \quad \forall i \neq j$$

$$\begin{aligned} A_i &= A_j \wedge AB_{k_1, k_2} = \sum_{k=1}^n a_{k_1, k} b_{k, k_2} \implies \\ &\implies (AB)_{i, k_2} = \sum_{k=1}^n a_{i, k} b_{k, k_2} = \\ &= \sum_{k=1}^n a_{j, k} b_{k, k_2} = (AB)_{j, k_2} \implies \\ &\implies (AB)_i = (AB)_j \end{aligned}$$

Q10 - d)

$$\begin{aligned} B^k &= B^l : k \neq l \implies \\ &\implies (AB)^k = (AB)^l \end{aligned}$$

## Questão 9

$$\begin{aligned} \{D, D'\} &\in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) : \\ d_{i,j} = 0 \wedge d'_{i,j} &\forall i \neq j \implies \\ \implies (DD')_{i,j} &= 0 \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

$$\{D, D'\} \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) : d_{i,j} = 0 \wedge d'_{i,j} \quad \forall i \neq j;$$

$$\begin{aligned} (DD')_{i,j} &= \sum_{k=1}^n d_{i,k} d'_{k,j} \implies \\ \implies (DD')_{i,j} &= 0 \quad \forall \{i, j\} \in \mathbb{K} : i \neq j \end{aligned}$$

## Questão 10 Indique...

Q10 - a) Uma Condição para que uma matriz diag. seja invert.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{M}_{n \times n} : a_{i,j} &= 0 \quad \forall i \neq j \wedge \\ \wedge \exists A^{-1} : AA^{-1} &= I_n \iff \\ \iff a_{i,j} &\neq 0 \quad \forall i = j \end{aligned}$$

Q10 - b)



## Questão 108

$$J_n \in \mathcal{M}_{n \times s}(\mathbb{K}) : (J_n)_{i,j} = 1 \\ \forall \{i, j\} \in \mathbb{K}$$

## Questão 22

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$$

Q22 - a)

$$A^3 = I_n$$

Q22 - b)

$$A^2 + 2A = I_n$$

Q22 - c)

$$A^2 + \alpha A + \beta I_n = 0$$
$$: \alpha \in \mathbb{K} \wedge \beta \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

## Questão 34

Q34 - a)

$A$  e  $C$

Q34 - b)

$E$

## Questão 37

Q37 - a)

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K}) : a_{i,j} = 0 \quad \forall \{i, j\}$$

Q37 - b)

...

## Questão 129

### Q129 - a)

(i)

$$(A + A^T) = ((A + A^T)^T)^T = (A^T + A)^T = (A + A^T)^T$$

$\therefore (A + A^T)$  é simétrica

(ii)

### Q129 - b)

## Questão 42

a = s, III b = s, II c = s, I d = n e = s, II

## Questão 43

Q43 - a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Q43 - c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

Q43 - b)

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Questão 45

Q45 - a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Questão 48

$$A = s \ B = n \ C = s \ D = n$$

## Questão 51

$$A = s \ B = s \ C = n \ D = s \ E = s$$

## Questão 49

Q49 - a)

$$\begin{aligned} A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} &\xleftarrow{l_2 \rightarrow l_2 - 2l_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xleftarrow{\begin{matrix} l_2 \rightarrow l_2 - 2l_1 \\ l_3 \rightarrow l_3 + l_1 \end{matrix}} \\ &\xleftarrow{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

## Questão 171

$$[A|I] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{l_2 += -2l_1}$$

## Lista 2 – Sistemas de Equações Lineares

### Questão 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R})$$

## Lista 3 – Determinantes

### Questão 72

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n} : A^2 = -A$$

$$\begin{aligned} \det(-A) &= \det A (-1)^n = \det(A^2) \implies \det A (\det A - (-1)^n) = 0 \implies \\ &\implies \det A = 0 \vee \det A = (-1)^n \end{aligned}$$

### Questão 73

$$A \in \mathcal{M}_{n \times n} : A A^* = I_n$$

$$|\det A| = 1 = \dots = \det(A) \det \overline{A}^T = \det(A) \overline{\det A^T} = \det(A A^*) = \det(I_n) = 1$$

### Questão 28

Q28 - b)

$$\begin{aligned} V_\alpha &= \begin{vmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) - (-\sin^2(x)) = 1 \neq 0 \\ \therefore \exists V_\alpha^{-1} \end{aligned}$$



$$\widehat{\mathbf{a}_{ij}} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A} - \mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j)$$

$$V_{\alpha}^{-1} = \frac{\text{adj } V_{\alpha}}{\det V_{\alpha}} = \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } V_{\alpha} = \widehat{V_{\alpha}^T} = \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}^T$$

## Questão 29

$$\begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{bmatrix}$$

Q29 - a)

$$\text{adj } M = \begin{bmatrix} m^2 - 1 & 1 - m & 1 - m \\ 1 - m & m^2 - 1 & 1 - m \\ 1 - m & 1 - m & m^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Q29 - b)

$$\begin{aligned} \det M &= m(m^2 - 1) + 1(1 - m) + 1(1 - m) = \\ &= m(m + 1)(m - 1) - 2(m - 1) = (m - 1)(m^2 + m - 2) = \\ &= (m - 1)(m(m - 1) + 2(m - 1)) = (m - 1)^2(m + 2) \\ &\therefore \exists M^{-1} \forall M : m \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\} \end{aligned}$$

Q29 - c)

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \frac{\text{adj } M}{\det M} = \frac{1}{(m - 1)^2(m + 2)} \begin{bmatrix} m^2 - 1 & 1 - m & 1 - m \\ 1 - m & m^2 - 1 & 1 - m \\ 1 - m & 1 - m & m^2 - 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{(m - 1)^2(m + 2)} \begin{bmatrix} m + 1 & -1 & -1 \\ -1 & m + 1 & -1 \\ -1 & -1 & m + 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Questão 31

### Q31 - a)

$$\exists (\text{adj } A)^{-1} \because \left( \frac{A}{\det A} \right) \text{adj } A = I_n : \det A \neq 0 \wedge \exists A^{-1}$$

### Q31 - c)

$$\begin{aligned} \det(\text{adj } A) &= \det(\det A A^{-1}) = (\det A)^n \det A^{-1} = (\det A)^n / \det A = \\ &= (\det A)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{adj}(AB) = (\text{adj } A)(\text{adj } B)$$

$$\begin{aligned} AB \text{adj}(AB) &= \det(AB) I_n \implies \text{adj}(AB) = (AB)^{-1} \det(AB) I_n = \\ &= \det A \det B B^{-1} A^{-1} I_n = (\text{adj } A)(\text{adj } B) \end{aligned}$$

## Questão 25

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 2 * 1 * (2 * 1 - 3 * 4) + 2 * 1 * (-1 * 4 - 2 * 1) = -32 \end{aligned}$$

## Questão 33

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & -k & 10 & k & k & k & k & -k \end{bmatrix}$$