Nome completo:

N^{o} de aluno: Curso:

INSTRUÇÕES PARA O EXAME DE ANÁLISE MATEMÁTICA III-C

LEIA ATENTAMENTE AS SEGUINTES INSTRUÇÕES ATÉ AO FIM

Hora de início do exame: 09.00 Duração: 3 horas (sem tolerância) Intervalo: Entre as 10.00 e as 11.00.

Todas as respostas são dadas no enunciado que vos será distribuído pelo que não necessitam, nem podem, utilizar outras folhas de resposta.

O exame é constituído por duas partes.

PRIMEIRA PARTE

A primeira parte é constituída por 6 folhas agrafadas, que **não podem** desagrafar (à exceção das folhas de rascunho), que para além desta primeira página de instruções (folha 1), é constituída pelo Grupo I.
Na página 1 e no cabeçalho da página 3, devem preencher completamente os vossos dados pessoais no espaço para isso reservado: nome completo, curso e n^{o} de aluno. **O não preenchimento dos vossos dados pessoais conduz ao anulamento desta parte da prova**.
O Grupo I possui 10 perguntas de escolha múltipla, valendo um valor (na escala de 0 a 20) cada. Devem selecionar de forma inequívoca a opção (única) de resposta. Respostas erradas **não são** penalizadas.
As páginas de 5 a 10 da primeira parte estão em branco destinam-se a ser utilizadas como rascunho e **não serão corrigidas**.

SEGUNDA PARTE

A segunda parte é constituída por 5 folhas agrafadas, que **não podem** desagrafar (à exceção das folhas de rascunho). Esta segunda parte do exame ser-vos-á entregue assim que solicitada.

No cabeçalho da página 13, devem voltar a preencher completamente os vossos dados pessoais no espaço para isso reservado: nome completo, curso e n^{o} de aluno. **O não preenchimento dos vossos dados pessoais conduz ao anulamento desta parte da prova**.

IMPORTANTE: Caso **não pretendam** realizar intervalo durante o exame, podem solicitar logo no início do mesmo a segunda parte e começar a resolver o exame pela ordem que entenderem conveniente. Caso pretendam realizar um intervalo durante a prova, entregam a primeira parte e devem solicitar a segunda assim que regressem do intervalo.

A segunda parte do exame é constituída por dois grupos (Grupos II e III correspondentes às páginas 13-18) com perguntas de resposta aberta e que são respondidas no próprio enunciado. As cotações de cada pergunta destes grupos estão assinaladas no início da pergunta. Devem ter em atenção o espaço destinado à resposta de cada alínea e gerir esse espaço convenientemente (por exemplo, não utilizar letra ou símbolos matemáticos demasiado grandes). As páginas em branco, destinam-se a ser utilizadas como rascunho e **não serão corrigidas**.

Para entregarem a primeira parte, a segunda ou ambas, devem com a autorização do professor vigilante colocar a prova/primeira parte, na mesma mesa onde se encontra a folha de presenças (que deverão assinar se estiverem a entregar a prova completa ou a segunda parte) em cima de outras provas que já tenham sido eventualmente entregues.

.

COTAÇÕES

Grupo I

Grupo II

1. a)

1. b)

2.

Grupo III

1.

2.

3.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

EXAME DE RECURSO DE ANÁLISE MATEMÁTICA III-C 2022/2023
05 DE JULHO DE 2023 - PRIMEIRA PARTE

Nome completo:

Nº de aluno: Curso:

PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES DO GRUPO I ASSINALE COM X O QUADRADO CORRESPONDENTE À ALTERNATIVA CORRECTA.

GRUPO I

[*1 valor*] 1. A equação diferencial linear de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{4}xy = \frac{1}{4}x^3$$

com a condição $y(0) = -4$ tem como solução:

☐ $y = 4e^{-\frac{x^2}{8}} + x^2 - 8$ ☐ $y = 4e^{\frac{x^2}{8}} + x^2 - 8$ ☐ $y = 4e^{-\frac{x^2}{8}} - x^2 + 8$
☐ $y = -4e^{-\frac{x^2}{8}} + x^2 - 8$ ☐ $y = -4e^{\frac{x^2}{8}} + x^2 - 8$ ☐ $y = -4e^{-\frac{x^2}{8}} - x^2 + 8$

[*1 valor*] 2. A equação diferencial

$$3xy^2\, dx + 4x^2y\, dy = 0$$

admite um factor integrante da forma $\varphi(x, y) = xy^k$, em que k é uma constante real. Então:

☐ $k = -2$ ☐ $k = -1$ ☐ $k = 0$ ☐ $k = 1$ ☐ $k = 2$ ☐ $k = 3$

[*1 valor*] 3. Designando $\dfrac{dy}{dx}$ por p a solução geral da equação de Lagrange

$$y = -2x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

na forma paramétrica é:

☐ $x = c\,p^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{5}p$ ☐ $y = c\,p^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{5}p$ ☐ $y = -2xp + \frac{1}{2}p^2$

☐ $\begin{cases} x = c\,p^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{5}p \\ y = -2xp + \frac{1}{2}p^2 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x = c\,p^{-\frac{2}{3}} + \frac{3}{5}p \\ y = -2xp + \frac{1}{2}p^2 \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x = c\,p^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{5}p \\ y = -2xp + \frac{1}{2}p^2 \end{cases}$

[*1 valor*] 4. Um sistema equivalente ao seguinte sistema de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes

$$\begin{cases} (D-2)x+(D^2+3D)y=t+1 \\ (5D^2-12D+4)x+(5D^3+13D^2-7D-3)y=-2t+4 \end{cases}$$

(D designa o operador de derivação em ordem a t) é:

☐ $\begin{cases} (-5D^2+12D-4)x+(-5D^3-13D^2+6D)y=2t-3 \\ (D+3)y=0 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} (-5D^2+12D-4)x+(-5D^3-13D^2+6D)y=2t-3 \\ (D+3)y=-1 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} (-5D^2+12D-4)x+(-5D^3-13D^2+6D)y=2t-3 \\ (D-3)y=1 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} (D-2)x+(D^2+3D)y=t+1 \\ (D+3)y=1 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} (D-2)x+(D^2+3D)y=t+1 \\ (D-3)y=0 \end{cases}$

☐ $\begin{cases} (D-2)x+(D^2+3D)y=t+1 \\ (D+3)y=-1 \end{cases}$

[*1 valor*] 5. Sabendo que $F(s)=\dfrac{2s^2-8s}{s^4-16}=\dfrac{As+B}{(s^2+4)}+\dfrac{Cs+d}{(s^2-4)}$, em que A , B , C e D são constantes reais, então $F(s)$ tem como transformada de Laplace inversa a função:

☐ $f(t)=\cos 2t+\sin 2t+cosh\,2t+sinh\,2t$

☐ $f(t)=\dfrac{1}{2}\cos 2t+\dfrac{1}{2}\sin 2t-\dfrac{1}{2}cosh\,2t+\dfrac{1}{2}sinh\,2t$

☐ $f(t)=\cos 2t+\dfrac{1}{2}\sin 2t-cosh\,2t+\dfrac{1}{2}sinh\,2t$

☐ $f(t)=\dfrac{1}{2}\cos 2t+\sin 2t-\dfrac{1}{2}cosh\,2t+sinh\,2t$

☐ $f(t)=\cos 2t+\dfrac{1}{2}\sin 2t+cosh\,2t+\dfrac{1}{2}sinh\,2t$

☐ $f(t)=\dfrac{1}{2}\cos 2t+\sin 2t+\dfrac{1}{2}cosh\,2t+sinh\,2t$

[*1 valor*] 6. Seja $w\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Sabendo que $\mathcal{L}(\sin^2(wt))=\dfrac{2w^2}{s(s^2+4w^2)}$ então as transformadas de Laplace das funções $e^{-t}\sin^2(wt)$, $\sin^2(2t)\,u\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right)$ e $\cos^2(wt)$ são respectivamente:

☐ $\dfrac{2w^2}{(s-1)(s^2-2s+1+4w^2)}$, $\dfrac{8e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s(s^2+16)}$ e $\dfrac{1}{s}-\dfrac{2w^2}{s(s^2+4w^2)}$

☐ $\dfrac{2w^2}{(s+1)(s^2+2s+1+4w^2)}$, $-\dfrac{8e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s(s^2+16)}$ e $\dfrac{1}{s}-\dfrac{2w^2}{s(s^2+4w^2)}$

☐ $\dfrac{2w^2}{(s+1)(s^2+1+4w^2)}$, $-\dfrac{8e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s(s^2+16)}$ e $\dfrac{1}{s}-\dfrac{2w^2}{s(s^2+4w^2)}$

☐ $\dfrac{2w^2}{(s+1)(s^2+1+4w^2)}$, $\dfrac{8e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s(s^2+16)}$ e $\dfrac{2w^2}{s^2+4w^2}$

☐ $\dfrac{2w^2}{(s-1)(s^2-2s+1+4w^2)}$, $-\dfrac{8e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s(s^2+16)}$ e $\dfrac{1}{s}+\dfrac{2w^2}{s(s^2+4w^2)}$

☐ $\dfrac{2w^2}{(s+1)(s^2+2s+1+4w^2)}$, $\dfrac{8e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s(s^2+16)}$ e $\dfrac{1}{s}-\dfrac{2w^2}{s(s^2+4w^2)}$

[*1 valor*] 7. Das seguintes séries numéricas apenas uma é convergente. Indique qual:

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3n+2)^n}{(2n)^n}$ ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \sin\dfrac{1}{n}\right)$

☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos\frac{1}{n}}{n}$ ☐ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n^4+2}-n^2)$

[*1 valor*] 8. A série redutível

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)},$$

é:

☐ Divergente ☐ Convergente e tem por soma 1

☐ Convergente e tem por soma $\dfrac{5}{6}$ ☐ Convergente e tem por soma $\dfrac{11}{6}$

☐ Convergente e tem por soma $\dfrac{1}{2}$ ☐ Convergente e tem por soma $\dfrac{1}{3}$

[*1 valor*] 9. A função $f(x)$ é par, periódica de período $p = 1$ e no intervalo $]0, \dfrac{1}{2}[$ está definida por $\begin{cases} 1 & 0 < x \leq 1/4 \\ -1 & 1/4 < x < 1/2 \end{cases}$. Então a sua série de Fourier é:

☐ $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \cos((2n-1)\pi x)$ ☐ $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \cos((4n-2)\pi x)$

☐ $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{(2n-1)} \cos((4n-2)\pi x)$ ☐ $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \cos((2n-1)\pi x)$

☐ $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)} \cos((4n-2)\pi x)$ ☐ $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{(2n-1)} \cos((2n-1)\pi x)$

[*1 valor*] 10. A equação com derivadas parciais

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

admite uma solução da forma $u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$ (X função apenas da variável x e Y função apenas da variável y) verificando a condição $u(1,1) = 1$. Então existe uma constante k tal que:

☐ $u(x,y) = |xy|^k$ ☐ $u(x,y) = |x^2 y|^k$ ☐ $u(x,y) = |xy^2|^k$

☐ $u(x,y) = \left|\dfrac{x}{y}\right|^k$ ☐ $u(x,y) = \dfrac{|x|^k}{|y|}$ ☐ $u(x,y) = \dfrac{|x|}{|y|^k}$

Formulário

Transformadas de Laplace			
$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$
1	$\dfrac{1}{s}$	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$t^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$\cos wt$	$\dfrac{s}{s^2+w^2}$
$t^a \quad (a \geq 0)$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\sin wt$	$\dfrac{w}{s^2+w^2}$
$u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$	$\cosh wt$	$\dfrac{s}{s^2-w^2}$
$\delta(t-a) \quad (a > 0)$	e^{-as}	$\sinh wt$	$\dfrac{w}{s^2-w^2}$

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

EXAME DE RECURSO DE ANÁLISE MATEMÁTICA III-C 2022/2023
05 DE JULHO DE 2023 - SEGUNDA PARTE

Nome:

Nº de aluno: Curso:

GRUPO II

[*2 valores*] 1. a) Determine a solução geral da equação diferencial linear de coeficientes constantes não homogénea

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x^2 - 2x + \frac{1}{2}.$$

1. a) Resposta:

[*1,5 valores*] 1. b) Utilizando a mudança de variável $x \longrightarrow t$ definida por $t = \dfrac{1}{x}$ determine a solução geral da equação

$$t^4 \frac{d^2y}{dt^2} + 2t^3 \frac{dy}{dt} + 4y = \frac{t^2 - 4t + 2}{2t^2}, \quad t > 0.$$

1. b) Resposta:

[*1,5 valores*] 2. Determine o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \,...\, \cdot 2n}{n^n}\ x^n.$$

Estude a convergência nos extremos do seu intervalo de convergência.
1. Resposta:

(v.s.f.f.)

GRUPO III

[*1,5 valores*] 1. Acerca de uma função $f(x)$ e da sua derivada, sabe-se são seccionalmente contínuas. Além disso sabe-se também que $f(x)$ é contínua no ponto $x=1$, $f(1)=1$ e tem por série de Fourier

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{n^3\pi^2}((-1)^n-1)\right)\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Indique, justificando, a sua paridade e período. Sabendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=\frac{\pi}{4}$, determine a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$.

1. Resposta:

[*1,5 valores*] 2. Resolva, utilizando a transformada de Laplace, o seguinte problema de valores iniciais

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = -3.$$

2. Resposta:

(v.s.f.f.)

[*2 valores*] 3. Suponhamos que a função $f(x,y)$ é continuamente derivável até à segunda ordem em $\mathbb{R}^2$ e que depende apenas da distância r de cada ponto (x,y) à origem, isto é

$$f(x,y) = g(r), \quad \text{onde} \quad r = r(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

a) Mostre que para $(x,y) \neq (0,0)$ se tem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r} g'(r) + g''(r).$$

b) Supondo agora que f é uma solução da equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

determine $f(x,y)$ sabendo que $f(1,0) = 0$ e que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1$.

3. Resposta:

Formulário

Transformadas de Laplace			
$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$
1	$\dfrac{1}{s}$	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$t^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$\cos wt$	$\dfrac{s}{s^2+w^2}$
$t^a \quad (a \geq 0)$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\sin wt$	$\dfrac{w}{s^2+w^2}$
$u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$	$\cosh wt$	$\dfrac{s}{s^2-w^2}$
$\delta(t-a) \quad (a > 0)$	e^{-as}	$\sinh wt$	$\dfrac{w}{s^2-w^2}$

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*