

# Analize Matemática I

Felipe B. Pinto 61387 - MIEQB

5 de julho de 2021

## Conteúdo

<b>I</b>	<b>15/03 - Conceitos Básicos I</b>	<b>2</b>		
1	Majorante . . . . .	2	3	Sucessão Convergente . . . . . 7
2	Minorante . . . . .	2	3.1	Exemplo . . . . . 7
3	Infimo . . . . .	2	<b>VI</b>	<b>26/03 - Demonstrações para su-</b>
4	Supremo . . . . .	2		<b>cessões</b> <b>8</b>
5	Mínimo . . . . .	2	1	Sucessão convergente $\implies$ Limitada . 8
6	Máximo . . . . .	2	2	Sucessão é monótona e limitada $\implies$
7	Conjunto Limitado . . . . .	2		convergente . . . . . 8
8	Vizinhança . . . . .	2	<b>VII</b>	<b>29/03 - Lemas de Desigualda-</b>
9	Interior . . . . .	3		<b>des</b> <b>9</b>
10	Exterior . . . . .	3	1	Lema $\lim_{n \rightarrow \infty} u(n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v(n)$ . . . . . 9
11	Fronteira . . . . .	3	2	Lema das sucessões enquadadas . . . 9
<b>II</b>	<b>16/03 - Conceitos Básicos II</b>	<b>4</b>	2.1	Exemplo: $u(n) = \sin(n)/n$ . . . . . 9
1	Conjunto Aberto . . . . .	4	3	Lema $u(n) * v(n) \rightarrow 0$ . . . . . 9
2	Conjunto Fechado . . . . .	4	3.1	Exemplo: $S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n^2}$ . . . . . 9
3	Feixe . . . . .	4	3.2	Exercício: $\frac{2^n - n}{3^n + 1}$ . . . . . 9
4	Ponto de Acumulação . . . . .	4	4	Lema . . . . . 9
<b>III</b>	<b>19/03 - Indução por igualdade</b>	<b>5</b>	<b>VIII</b>	<b>30/03</b> <b>10</b>
1	Exemplo . . . . .	5	1	. . . . . 10
<b>IV</b>	<b>22/03 - Indução por Desigual-</b>	<b>6</b>	2	Sucessão que tende para o infinito . . . 10
	<b>dade</b>		3	Indeterminações . . . . . 10
1	Exemplo 1 . . . . .	6	4	Exercícios . . . . . 10
2	Exemplo 2 . . . . .	6	<b>IX</b>	<b>06/04 - Subsuações</b> <b>11</b>
<b>V</b>	<b>23/03 - Sucessões</b>	<b>7</b>	1	Exemplo: $u(n) = (-1)^n$ . . . . . 11
1	Sucessão monótona . . . . .	7	2	Exemplo: $u(n) = \sin(n \pi/4)$ . . . . . 11
1.1	Decrescente . . . . .	7	3	Subsucessão convergente . . . . . 11
1.2	Crescente . . . . .	7	4	Lema . . . . . 11
2	Sucessão limitada . . . . .	7	5	. . . . . 11
			6	. . . . . 11

<b>X</b>	<b>09/04 - Limites</b>	<b>12</b>		
1	Lema geral das funções enquadradas .	12	1	Teorema de Bolzano . . . . .
1.1	Exemplo . . . . .	12	2	Teorema de Weierstrass . . . . .
2	Lema . . . . .	12	3	Corolário de Bolzano e Weierstrass . .
			3.1	Exemplo Aplicação . . . . .
			3.2	Exemplo Aplicação . . . . .
<b>XI</b>	<b>12/04 - Sucessão de Cauchy</b>	<b>13</b>	<b>XVII</b>	<b>26/04 - Funções Inversas</b>
1	Critério suficiente para uma sucessão ser Cauchy . . . . .	13	1	Exemplo . . . . .
1.1	Exemplo . . . . .	13	2	Exemplo . . . . .
2	Convergência . . . . .	13	3	Exemplo . . . . .
			4	Exemplo . . . . .
<b>XII</b>	<b>13/04 - Sucessões de Cauchy II</b>	<b>14</b>	<b>XVIII</b>	<b>27/04 - Derivadas</b>
1	. . . . .	14	1	Definição . . . . .
2	. . . . .	14	2	Definição Alternativa . . . . .
2.1	Limite . . . . .	14	3	Definição derivada para funções de imagens abertas . . . . .
2.2	Visualização gráfica do limite . . . .	14		
<b>XIII</b>	<b>16/04</b>	<b>15</b>	<b>XIX</b>	<b>30/04 - Regras de Derivação</b>
1	. . . . .	15	1	Derivação da Soma . . . . .
2	Definição derivada . . . . .	15	2	Derivação do Produto . . . . .
3	Existência de limite . . . . .	15	3	Derivada da Divisão . . . . .
4	Exemplo . . . . .	15	3.1	Previa . . . . .
5	Exemplo . . . . .	15	4	Derivada de Conjugada . . . . .
5.1	Usando sucessões para encontrar li- mites . . . . .	15	4.1	Exemplo . . . . .
6	. . . . .	16	4.2	Exemplo . . . . .
			5	Técnica de encontrar derivações . . . .
<b>XIV</b>	<b>19/04 - Limites</b>	<b>17</b>	5.1	$\ln'(x) = 1/x$ . . . . .
1	Limite notável: $\sin(x)/x$ . . . . .	17	5.2	$\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$ . . . . .
1.1	Exemplo . . . . .	17	5.3	$\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ . . . . .
1.2	Exemplo . . . . .	17		
1.3	Exemplo . . . . .	17	<b>XX</b>	<b>03/05 - Teoremas da diferenci- abilidade</b>
1.4	Exemplo . . . . .	17	1	Teorema de Rolle . . . . .
2	Limite notável: $(e^x - 1)/x$ . . . . .	17	2	Teorema de Lagrange . . . . .
			2.1	Corolário . . . . .
<b>XV</b>	<b>20/04 - Funções contínuas</b>	<b>18</b>	2.2	Ideia de Demonstração do teorema de Lagrange . . . . .
1	. . . . .	18		
2	Continuidade . . . . .	18	<b>XXI</b>	<b>15/06 - Exercícios para o Teste</b>
2.1	Exemplo . . . . .	18	Q0 - a)	. . . . .
2.2	Exemplo . . . . .	18		
3	Continuidade segundo Cauchy . . . .	18		
<b>XVI</b>	<b>23/04 - Continuidade: Teore- mas</b>	<b>19</b>		

## Formulas de Recorrência

1.  $\int \sin^n(a u) \, du = -\frac{\sin^{n-1}(a u) \cos(a u)}{a n} + (n-1)/n \int \sin^{n-2}(a u) \, du$
2.  $\int \cos^n(a u) \, du = \frac{\sin(a u) \cos^{n-1}(a u)}{a n} + (n-1)/n \int \cos^{n-2}(a u) \, du$
3.  $\int \tan^n(a u) \, du = \frac{\tan^{n-1}(a u)}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2}(a u) \, du$
4.  $\int \cot^n(a u) \, du = -\frac{\cot^{n-1}(a u)}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2}(a u) \, du$
5.  $\int \sec^n(a u) \, du = \frac{\sec^{n-2}(a u) \tan(a u)}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(a u) \, du$
6.  $\int \csc^n(a u) \, du = -\frac{\csc^{n-2}(a u) \cot(a u)}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2}(a u) \, du$

## Identidades Trigonométricas

1.  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
2.  $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$
3.  $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$
4.  $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$
5.  $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
6.  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$
7.  $2 \sin(x) \cos(y) = \sin(x-y) + \sin(x+y)$
8.  $2 \sin(x) \sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$
9.  $\cos(x) \cos(y) = \cos(x-y) + \cos(x+y)$
10.  $1 \pm \sin(x) = 1 \pm \cos(\pi/2 - x)$

# Tabela de Derivadas

1.  $(u^n)' = n u^{n-1} u'$
2.  $(u v)' = u' v + v' u$
3.  $(u/v)' = \frac{u' v - v' u}{v^2}$
4.  $(a^u)' = a^u \ln(a) u' \dots \dots \dots (a > 0, a \neq 1)$
5.  $(e^u)' = e^u u'$
6.  $\log_a'(u) = \frac{u'}{u} \log_a(e)$
7.  $\ln'(u) = \frac{1}{u} u'$
8.  $(u^v)' = v u^{v-1} u' + u^v \ln(u) v'$
9.  $\sin'(u) = u' \cos(u)$
10.  $\cos'(u) = -u' \sin(u)$
11.  $\tan'(u) = u' \sec^2(u)$
12.  $\cot'(u) = -u' \csc^2(u)$
13.  $\sec'(u) = u' \sec(u) \tan(u)$
14.  $\csc'(u) = -u' \csc(u) \cot(u)$
15.  $\arcsin'(u) = u' / \sqrt{1 - u^2}$
16.  $\arccos'(u) = -u' / \sqrt{1 - u^2}$
17.  $\arctan'(u) = u' / \sqrt{1 + u^2}$
18.  $\operatorname{arccot}'(u) = -u' / \sqrt{1 + u^2}$
19.  $\operatorname{arcsec}'(u) = u' / (|u| \sqrt{u^2 - 1}) \dots \dots (|u| > 1)$
20.  $\operatorname{arccsc}'(u) = -u' / (|u| \sqrt{u^2 - 1}) \dots \dots (|u| > 1)$

# Tabela de Integrais

1.  $\int du = u + c$
2.  $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \dots \dots \dots (n \neq -1)$
3.  $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$
4.  $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c, a > 0 \dots \dots \dots (a \neq 1)$
5.  $\int e^u du = e^u + c$
6.  $\int \sin(u) du = -\cos u + c$
7.  $\int \cos(u) du = \sin u + c$
8.  $\int \tan(u) du = \ln |\sec(u)| + c$
9.  $\int \cot(u) du = \ln |\sin(u)| + c$
10.  $\int \sec(u) du = \ln |\sec(u) + \tan(u)| + c$
11.  $\int \csc(u) du = \ln |\csc(u) - \cot(u)| + c$
12.  $\int \sec(u) \tan(u) du = \sec(u) + c$
13.  $\int \csc(u) \cot(u) du = -\csc(u) + c$
14.  $\int \sec^2(u) du = \tan(u) + c$
15.  $\int \csc^2(u) du = -\cot(u) + c$
16.  $\int du / (u^2 + a^2) = \arctan(u/a) / a + c$
17.  $\int du / (u^2 - a^2) = \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| / 2a + c \quad (u^2 > a^2)$
18.  $\int du / \sqrt{u^2 + a^2} = \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| + c$
19.  $\int du / \sqrt{u^2 - a^2} = \arcsin(u/a) + c \quad (u^2 < a^2)$
20.  $\int du / \sqrt{a^2 - u^2} = \arcsin(u/a) + c \quad (u^2 < a^2)$
21.  $\int du / (u \sqrt{a^2 - u^2}) = \operatorname{arcsec} |u/a| / a + c$

# I | 15/03 - Conceitos Básicos I

## 1 Majorante

$$\begin{aligned} m \in \text{Majorante}(X) &\iff \\ &\iff m \in \mathbb{R} \wedge x \leq m \ \forall x \in X \end{aligned}$$

## 3 Infimo

### (i) Standalone

$$\begin{aligned} \text{Inf}(X) = i &\iff \\ &\iff i \in \mathbb{R} \wedge x \geq i \ \forall x \in X \wedge \\ &\wedge \nexists y \in \mathbb{R} \setminus X : i < y < x \ \forall x \in X \end{aligned}$$

### (ii) Usando Vizinhaça

$$\begin{aligned} \text{Inf}(X) = i &\iff \\ &\iff i \in \mathbb{R} \wedge x \geq i \ \forall x \in X \wedge V_\delta(i) \cap X \neq \emptyset \end{aligned}$$

## 5 Minimo

### (i) Standalone

$$\begin{aligned} \text{Min}(X) = m &\iff \\ &\iff m \in X \wedge m \leq y \ \forall y \in m \end{aligned}$$

### (ii) Usando Minorante

$$\begin{aligned} \text{Min}(X) = m &\iff \\ &\iff m \in X \wedge m \in \text{Minorante}(X) \end{aligned}$$

## 7 Conjunto Limitado

$$\begin{aligned} X \text{ é um conjunto limitado} &\iff \\ &\iff \{m_1 \leq x \leq m_2 \ \forall x \in X : m_1 \in \text{Minorante}(X), m_2 \in \text{Majorante}(X)\} \end{aligned}$$

## 8 Vizinhaça

$$V_\delta(x) = (x - \delta, x + \delta) \quad \delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

## 2 Minorante

$$\begin{aligned} m \in \text{Minorante}(X) &\iff \\ &\iff m \in \mathbb{R} \wedge x \geq m \ \forall x \in X \end{aligned}$$

## 4 Supremo

### (i) Standalone

$$\begin{aligned} \text{Sup}(X) = s &\iff \\ &\iff s \in \mathbb{R} \wedge x \leq s \ \forall x \in X \wedge \\ &\wedge \nexists y \in \mathbb{R} \setminus X : x < y < s \end{aligned}$$

### (ii) Usando Vizinhaça

$$\begin{aligned} \text{Sup}(X) = s &\iff \\ &\iff s \in \mathbb{R} \wedge x \leq s \ \forall x \in X \wedge V_\delta(s) \cap X \neq \emptyset \end{aligned}$$

## 6 Maximo

### (i) Standalone

$$\begin{aligned} \text{Max}(X) = m &\iff \\ &\iff m \in X \wedge m \geq y \ \forall y \in m \end{aligned}$$

### (ii) Usando Majorante

$$\begin{aligned} \text{Max}(X) = m &\iff \\ &\iff m \in X \wedge m \in \text{Majorante}(X) \end{aligned}$$

## 9 Interior

### (i) Standalone

$$\begin{aligned}x \in \text{Int}(X) &\iff \\&\iff \exists \delta > 0 : (x - \delta, x + \delta) \subseteq X\end{aligned}$$

### (ii) Usando Vizinhança

$$\begin{aligned}x \in \text{Int}(X) &\iff \\&\iff V_\delta(x) \subseteq X\end{aligned}$$

## 11 Fronteira

$$\begin{aligned}f \in \text{Fr}(X) &\iff \\&\iff V_\delta(f) \cap X \neq \emptyset \wedge V_\delta(f) \cap \mathbb{R} \setminus X \neq \emptyset\end{aligned}$$

## 10 Exterior

### (i) Standalone

$$\begin{aligned}x \in \text{Ext}(X) &\iff \\&\iff \exists \delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (x - \delta, x + \delta) \cap X = \emptyset\end{aligned}$$

### (ii) Usando Vizinhança

$$\begin{aligned}x \in \text{Ext}(X) &\iff \\&\iff V_\delta(x) \cap X = \emptyset\end{aligned}$$

## II | 16/03 - Conceitos Básicos II

### 1 Conjunto Aberto

$X$  é um conjunto aberto  $\iff$   
 $\iff X = \text{Int}(X)$

### 3 Feixe

$$\bar{X} = \text{Int}(X) \cup \text{Fr}(X)$$

### 2 Conjunto Fechado

$X$  é um conjunto fechado  $\iff$   
 $\iff X = \text{Int}(X) \cup \text{Fr}(X)$

### 4 Ponto de Acumulação

$x$  é um ponto de acumulação de  $X$   $\iff$   
 $\iff V_\delta(x) \cap (X \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

# III | 19/03 - Indução por igualdade

1. Prove que algum numero pertence ao conjunto
2. Prove que o proximo pertence ao conjunto

Seja  $V = \{P_{(n)} \mid \forall n \in \text{Dominio}\}$

$P_{(x)} \in V; P_{(x+1)} \in V$

## 1 Exemplo

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

(i)  $n = 0$

$$\sum_{i=0}^0 \frac{1}{2^i} = 1 = 2 - \frac{1}{2^0} = 2 - 1 = 1$$

(ii)  $n = m + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m+1} \frac{1}{2^i} &= \sum_{i=0}^m \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{m+1}} = \\ &= 2 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} = 2 - \frac{1}{2^{m+1}} \end{aligned}$$



## IV | 22/03 - Indução por Desigualdade

### 1 Exemplo 1

$$n \leq 2^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(i)  $n = 1$

$$1 \leq 2^{1-1} = 1$$

(ii)  $n = m + 1$

$$\begin{aligned} m + 1 &\leq 2^{m-1} + 1 = \frac{2^m + 2}{2} \leq 2^{m+1-1} = 2^m \implies \\ \implies 2 &\leq 2^{m+1} - 2^m = 2^m(2 - 1) = 2^m \end{aligned}$$

### 2 Exemplo 2

$$n^2 \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4$$

(i)  $n = 4$

$$4^2 \leq 2^4 = 4^2$$

(ii)  $n = m + 1$

$$\begin{aligned} (m + 1)^2 &= m^2 + 2m + 1 \leq \\ &\leq 2^m + 2m + 1 \leq 2 * 2^m = 2^{m+1} \implies \\ &\implies 2m + 1 \leq 2^m; \\ \left\{ \begin{array}{l} m = 4 \implies 2 * 4 + 1 = 9 \leq 2^4 = 16 \\ m = n + 1 \implies 2 * (n + 1) + 1 = 2n + 1 + 2 \leq \\ \leq 2^n + 2 \leq 2 * 2^n = 2^{n+1} \implies 2 \leq 2^n \end{array} \right. \end{aligned}$$

# V | 23/03 - Sucessões

$$u_{(n)} : \mathbb{N} \rightarrow \text{Imagem}$$

## 1 Sucessão monótona

### 1.1 Decrescente

$$u_{(n)} \geq u_{(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### 1.2 Crescente

$$u_{(n)} \leq u_{(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

## 2 Sucessão limitada

$$u_{(n)} \text{ é limitada } \iff$$

$$\iff m_1 \leq u_{(n)} \leq m_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### 3.1 Exemplo

$$u_{(n)} = 1/\sqrt{2n-1};$$

$$u_{(n)} > 0; \delta = 1/10$$

## 3 Sucessão Convergente

$$u_{(n)} \text{ converge para } l \in \mathbb{R} \iff$$

$$\iff \exists p \in \mathbb{N} : u_{(n)} \in V_\delta(l) \quad \forall n > p$$

**Nota:**

$$u_{(n)} \in V_\delta(l) \iff |u_{(n)} - l| < \delta \iff$$

$$\iff l - \delta < u_{(n)} < l + \delta$$

$$\iff 0 < \frac{1}{\sqrt{2n-1}} < \frac{1}{10} \iff$$

$$\iff 0 < \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{100}; 2n-1 > 100 \implies$$

$$\implies \lfloor 101/2 \rfloor < n$$

# VI | 26/03 - Demonstrações para sucessões

## 1 Sucessão convergente $\implies$ Limitada

$u_{(n)}$  é uma sucessão convergente  $\iff u_{(n)} \in V_\varepsilon(l) \quad \forall \varepsilon > 0 \iff l - \varepsilon < u_{(n)} < l + \varepsilon \iff$   
 $\iff \exists \{m_1, m_2\} \subset \mathbb{R} : m_1 < u_{(n)} < m_2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff u_{(n)}$  é uma sucessão limitada

## 2 Sucessão é monótona e limitada $\implies$ convergente

$u_{(n)}$  é uma sucessão monotona e limitada  $\iff$   
 $\iff (u_{(n)} < u_{(n+1)} \vee u_{(n)} > u_{(n+1)}) \wedge \exists \{m_1, m_2\} \subset \mathbb{R} : m_1 < u_{(n)} < m_2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies$   
 $\implies \exists \text{Sup}(u_{(n)}) \in \mathbb{R} \setminus u_{(n)} \iff u_{(n)}$  é uma sucessão convergente

## VII | 29/03 - Lemas de Desigualdades

**1 Lema**  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{(n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_{(n)}$

$u_{(n)}$  e  $v_{(n)}$  são convergentes  $\wedge$

$$\wedge u_{(n)} \leq v_{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_{(n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_{(n)}$$

**2 Lema das sucessões enquadradas**

$$\{u_{(n)}, v_{(n)}, w_{(n)}\} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \wedge$$

$$\wedge v_{(n)} \leq u_{(n)} \leq w_{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge$$

$$\wedge \exists l \in \mathbb{R} : \{v_{(n)}, w_{(n)}\} \xrightarrow{\text{converge}} l \implies$$

$$\implies u_{(n)} \xrightarrow{\text{converge}} l$$

**2.1 Exemplo:**  $u_{(n)} = \sin(n)/n$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}; \quad \left\{ \frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right\} \rightarrow 0 \implies$$

$$\implies \frac{\sin(n)}{n} \rightarrow 0$$

**3 Lema**  $u_{(n)} * v_{(n)} \rightarrow 0$

$$u_{(n)} \text{ é limitada } \wedge v_{(n)} \rightarrow 0 \implies$$

$$\implies 0 \leq |u_{(n)} * v_{(n)}| = |u_{(n)}| * |v_{(n)}| \leq$$

$$\leq \text{Majorante}(u_n) * 0 = 0 \implies$$

$$\implies u_{(n)} * v_{(n)} \rightarrow 0$$

**3.1 Exemplo:**  $S_{(n)} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n^2}$

$$0 \leq S_{(n)} = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k}}{n^2} \leq \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0 \implies$$

$$\implies S_{(n)} \rightarrow 0$$

**3.2 Exercício:**  $\frac{2^n - n}{3^n + 1}$

$$0 \leq \frac{2^n - n}{3^n + 1} \leq \frac{2^n}{3^n} = (2/3)^n \rightarrow 0 \implies$$

$$\implies \frac{2^n - n}{3^n + 1} \rightarrow 0$$

**4 Lema**

$$u_{(n)} \rightarrow l_1 \wedge v_{(n)} \rightarrow l_2 \implies$$

$$\implies u_{(n)} + v_{(n)} \rightarrow l_1 + l_2 \implies$$

$$\implies |u_{(n)} + v_{(n)} - (l_1 + l_2)| =$$

$$= |u_{(n)} - l_1 + v_{(n)} - l_2| \leq |u_{(n)} - l_1| + |v_{(n)} - l_2| < \varepsilon$$

## 1

$$\begin{aligned}
 u_{(n)} \rightarrow l_1 \wedge v_{(n)} \rightarrow l_2 &\implies \\
 \implies 0 \leq |u_{(n)} v_{(n)} - l_1 l_2| &= \\
 = |(u_{(n)} - l_1) v_{(n)} + v_{(n)} l_1 - l_1 l_2| &= \\
 = |(u_{(n)} - l_1) v_{(n)} + l_1 (v_{(n)} - l_2)| &\leq \\
 \leq |u_{(n)} - l_1| |v_{(n)}| + |l_1| |v_{(n)} - l_2| &\rightarrow 0 \implies \\
 \implies u_{(n)} * v_{(n)} \rightarrow l_1 * l_2
 \end{aligned}$$

## 2 Sucessão que tende para o infinito

$$\begin{aligned}
 u_{(n)} \rightarrow \infty &\iff \\
 \iff u_{(n)} > m \quad \forall m \in \mathbb{R} \wedge \forall \{n, p\} \subset \mathbb{N} : n > p
 \end{aligned}$$

## 3 Indeterminações

- (i)  $u_{(n)} v_{(n)} : u_{(n)} \rightarrow 0 \wedge v_{(n)} \rightarrow \infty$
- (ii)  $u_{(n)}/v_{(n)} : u_{(n)} \rightarrow \infty \wedge v_{(n)} \rightarrow \infty$
- (iii)  $u_{(n)} + v_{(n)} : u_{(n)} \rightarrow \infty \wedge v_{(n)} \rightarrow -\infty$
- (iv)  $(1 + 1/n)^n : n \rightarrow \infty$

## 4 Exercícios

(i)  $u_{(n)} = \sqrt{n^2 + 2n} - n$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = \frac{2}{\sqrt{1 + 2/n} + 1} \rightarrow \\
 &\rightarrow \frac{2}{\sqrt{1} + 1} = 1
 \end{aligned}$$

(ii)  $a_{(n)} = \frac{n + \cos(n)}{n \ln(n+1)}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n)}{n} * \\
 * \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} &= 0 + 0 * 0 = 0
 \end{aligned}$$

(iii)  $b_{(n)} = \left( \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 + 2n + 1} \right)^n$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} b_{(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{2n} = \\
 &= \left( \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/n)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n} \right)^2 = \left( \frac{e^{-1}}{e^1} \right)^2 = e^{-4}
 \end{aligned}$$

## IX | 06/04 - Subsucedões

$$u \circ i_{(n)} = u_{(i_{(n)})}$$

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \wedge i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \wedge$$

$$\wedge i_{(n)} < i_{(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**1 Exemplo:**  $u_{(n)} = (-1)^n$

(i)  $i_{(n)} = 2n$

$$u \circ i_{(n)} = (-1)^{2n} = 1$$

(ii)  $j_{(n)} = 2n - 1$

$$u \circ j_{(n)} = (-1)^{2n-1} = -1$$

**2 Exemplo:**  $u_{(n)} = \sin(n\pi/4)$

(i)  $i_{(n)} = 4n$

$$u \circ i_{(n)} = \sin(4n\pi/4) = \sin(n\pi) = 0$$

**3 Subsucedção convergente**

$$u_{(n)} \text{ é uma sucessão convergente } \implies$$

$$\implies u_{(n)} \in V_\varepsilon(l) \quad \forall \{n, p\} \subset \mathbb{N} : n > p;$$

$$i_{(p)} \geq p \implies u \circ i_{(n)} \in V_\varepsilon(l)$$

$$\forall \{n, p\} \subset \mathbb{N} : n > p \implies$$

$$\implies u \circ i_{(n)} \text{ é uma sucessão convergente}$$

**4 Lema**

$$u \circ i_{(n)} \text{ é uma sucessão monotona } \implies$$

$$\implies u \circ i_{(n)} < u \circ i_{(m)} \quad \forall \{m, n\} \in \mathbb{N} : m > n$$

**5**

“Qualquer Sucessão possui pelo menos uma subsucedção monótona”

**6**

“Qualquer sucessão limitada possui pelo menos uma subsucedção monótona convergente”

$$u_{(n)} \text{ é limitada } \implies$$

$$\implies u \circ i_{(n)} \text{ é uma sucessão convergente}$$

# X | 09/04 - Limites

$$\limsup u_{(n)} = \text{Sup}\{l : l \text{ é sublimite de } u\}$$

$$\liminf u_{(n)} = \text{Inf}\{l : l \text{ é sublimite de } u\}$$

$$u_{(n)} \rightarrow l \iff \limsup u_{(n)} = \liminf u_{(n)} = l$$

## 1 Lema geral das funções enquadadas

$$\begin{aligned} \{u_{(n)}, v_{(n)}, w_{(n)}\} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : w_{(n)} \leq u_{(n)} \leq v_{(n)} &\implies \\ \implies \liminf w_{(n)} \leq \liminf u_{(n)} \leq \limsup u_{(n)} \leq \limsup v_{(n)} \end{aligned}$$

### 1.1 Exemplo

$$u_{(n)} = \left(1 + \frac{1 + (-1)^n}{n}\right)^n$$

$$1^n = 1 \leq u_{(n)} \leq \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \rightarrow e^2$$

## 2 Lema

“Se  $u_{(n)} \rightarrow l$  então a sucessão

$$s_{(n)} = \frac{\sum_{i=0}^n u_{(i)}}{n} \rightarrow l$$

# XI | 12/04 - Sucessão de Cauchy

$$u_{(n)} : |u_{(m)} - u_{(n)}| < \varepsilon \quad \forall \{m, n, p\} \in \mathbb{N} : m > p \wedge n > p$$

## 1 Criterio suficiente para uma sucessão ser Cauchy

$$\begin{aligned} |u_{(n+2)} - u_{(n+1)}| &\leq \alpha |u_{(n+1)} - u_{(n)}| \\ \forall n \in \mathbb{N} : n > p \wedge \alpha \in (0, 1) &\implies \\ \implies u_{(n)} \text{ é Cauchy} \end{aligned}$$

### 1.1 Exemplo

$$u_{(n)} = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ (2/3) u_{(n-1)} + 1 & n > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |u_{(n+2)} - u_{(n+1)}| &= \\ &= |(2/3) u_{(n+1)} + 1 - ((2/3) u_{(n)} + 1)| = \\ &= (2/3) |u_{(n+1)} - u_{(n)}| \\ \therefore u_{(n)} \text{ é Cauchy} \end{aligned}$$

## 2 Convergencia

$$u_n = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ u_{(n-1)} 2/3 + 1 & n > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u_n \rightarrow l; u_n 2/3 + 1 \rightarrow l 2/3 + 1 \quad \therefore l = l 2/3 + 1 &\implies \\ \implies l = 3 \end{aligned}$$



## XII | 13/04 - Sucessões de Cauchy II

1

$$u_n = 1/2^n$$

$$\begin{aligned} |u_m - u_n| &= \left| u_m + \sum_{k=n+1}^{m-1} (-u_k + u_k) - u_n \right| = \\ &= \left| \sum_{k=n}^{m-1} u_{k+1} - u_k \right| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |u_{k+1} - u_k| \end{aligned}$$

2

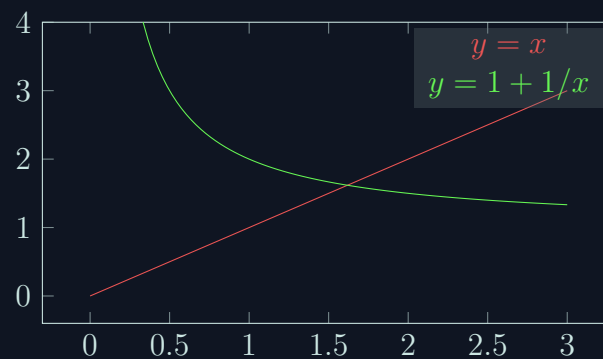
$$u_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 + 1/u_{n-1} & n > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 \leq u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} &\implies 1 \leq u_{n+1} \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \\ &\implies 2 \geq 1 + 1/u_n \geq 3/2 \geq 1 \end{aligned}$$

### 2.1 Limite

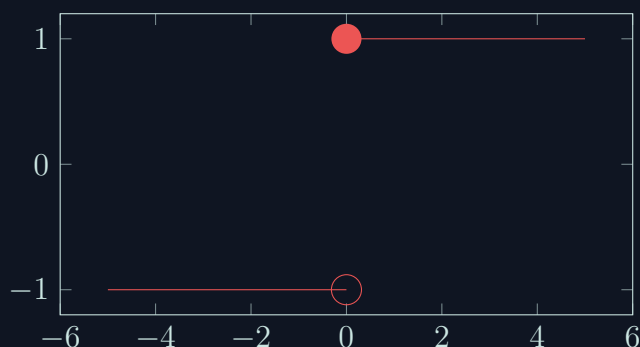
$$\begin{aligned} u_{n+1} = 1 + 1/u_n &\implies l = 1 + 1/l \implies \\ &\implies l^2 - l - 1 = 0 \implies l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

### 2.2 Visualização gráfica do limite



## 1

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



## 2 Definição derivada

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- (i)  $f$  não é obrigada a estar definida em  $x = a$
- (ii)  $(x_n)$  é uma sucessão que aproxima de  $a$  por valores diferentes de  $a$

## 3 Existencia de limite

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \iff$$

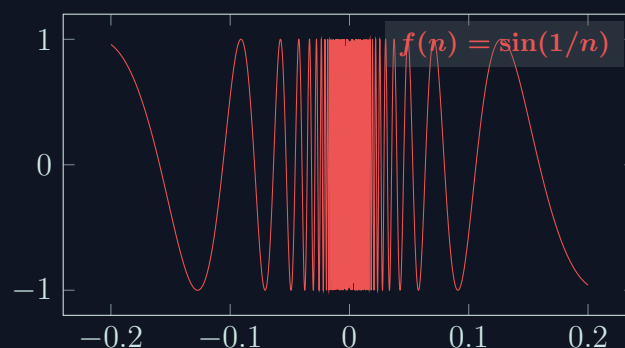
$$\iff \begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \\ \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \end{cases}$$

## 4 Exemplo

$$g(a) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \iff \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$$

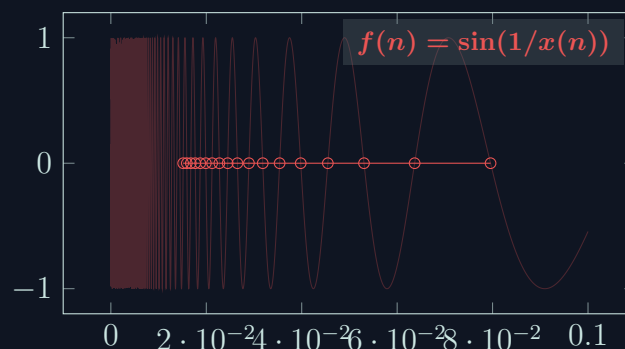
## 5 Exemplo



### 5.1 Usando sucessões para encontrar limites

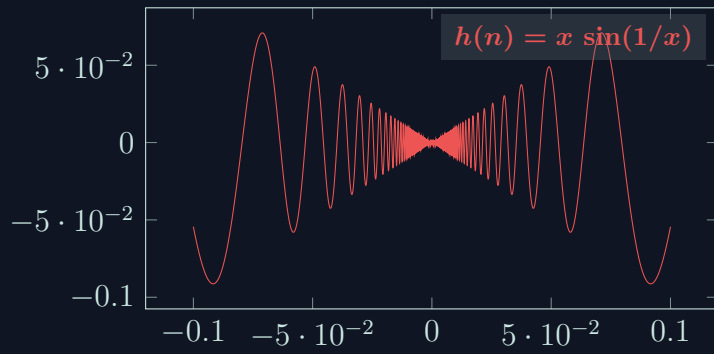
$$x(n) = 1/(n\pi) \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$f(x(n)) = \sin\left(\frac{1}{1/(n\pi)}\right) = \sin(n\pi) \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$



6

$$h(x) = x \sin(1/x) \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



$$h(x) = x \sin(1/x) = \frac{\sin(1/x)}{1/x}$$

# XIV | 19/04 - Limites

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f \text{ está definida em } V_\delta(a) \setminus \{a\}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} f(x(n)) = L \quad \forall x(n) : x(n) \rightarrow a$$

## 1 Limite notável: $\sin(x)/x$

graph missing

area triângulo menor =  $x/2 <$

$<$  area triângulo maior =  $\tan(x)/2 \implies$

$$\implies x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \implies \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \implies$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 < \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} < \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

### 1.1 Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x^2)/x^2$$

$$= 1$$

### 1.2 Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x^2)/x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x \left( \frac{\sin(x^2)}{x^2} \right) = 0$$

### 1.3 Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(2x)/x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left( \frac{\sin(2x)}{2x} \right) = 2$$

### 1.4 Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + \cos(x)} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 0$$

## 2 Limite notável: $(e^x - 1)/x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}) - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{(n-1)}}{n!} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{(n-1)}}{n!} = 1$$

# XV | 20/04 - Funções contínuas

## 1

$$f : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in \text{int}(\mathbf{I})$$

$$f \text{ é contínua em } x = a \iff \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \wedge f(a) = L$$

## 2 Continuidade

$$f \text{ é contínua em } x = a$$

$$\iff \exists \lim_{x \rightarrow a^+} = L^+ \wedge \exists \lim_{x \rightarrow a^-} = L^- \wedge L^+ = L^- = f(a)$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \wedge \nexists f(a)$$

$$\bar{f} = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ L & x = a \end{cases}$$

### 2.1 Exemplo

$$h(x) = \sin(x)/x$$

$$\bar{h} = \begin{cases} \sin(x)/x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

### 2.2 Exemplo

$$g(x) = e^{-1/|x|}$$

$$\bar{g} = \begin{cases} e^{-1/|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

## 3 Continuidade segundo Cauchy

$$f : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R} \wedge a \in \text{int}(\mathbf{I})$$

$$\therefore f \text{ é contínua em } x = a \text{ segundo Cauchy} \iff$$

$$\iff \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 : |f(a) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall |x - a| < \delta$$

# XVI | 23/04 - Continuidade: Teoremas

$f$  é continua em  $[a, b]$

$$\begin{aligned} &\Leftarrow f \text{ é continua em } x \in (a, b) \wedge \\ &\wedge \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \wedge \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = f(b) \end{aligned}$$

## 1 Teorema de Bolzano

$$\begin{aligned} &f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \wedge f \text{ é continua em } [a, b] \\ &: f(a) < f(b) \quad \forall k : f(a) < k < f(b) \\ &\implies \exists c \in (a, b) : f(c) = k \end{aligned}$$

## 2 Teorema de Weierstrass

$$\begin{aligned} &f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \wedge f \text{ é continua em } [a, b] \\ &\therefore \exists \{x_{\max}, x_{\min}\} \subset [a, b] : \\ &: f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max}) \end{aligned}$$

## 3 Corolário de Bolzano e Weierstrass

$$\begin{aligned} &f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \wedge f \text{ é continua em } [a, b] \\ &\therefore f([a, b]) = [x_{\max}, x_{\min}] \end{aligned}$$

### 3.1 Exemplo Aplicação

$$e^{-x} = x$$

$$\begin{aligned} &f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; \quad f(x) = e^{-x} - x \implies \\ &\implies f(0) = 1; \quad f(1) = 1/e - 1 < 0 \\ &\therefore \exists c \in [0, 1] : e^{-c} = c \end{aligned}$$

### 3.2 Exemplo Aplicação

$$g : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}; \quad g(x) = x \sin(x)$$

$$g(0) = g(\pi) = 0 \therefore \exists x_{\max} \geq 0$$

## XVII | 26/04 - Funções Inversas

$f : I \rightarrow J \wedge I, J \subset \mathbb{R} \wedge f$  é injetiva e subjetiva (bijetiva)

$$f^{-1} : J \rightarrow I \quad \begin{cases} f^{-1} \circ f(x) = x & \forall x \in I \\ f \circ f^{-1}(y) = y & \forall y \in J \end{cases}$$

### 1 Exemplo

$$\begin{aligned} f & : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty] & f(x) &= x^2 \\ f^{-1} & : [0, +\infty] \rightarrow [0, +\infty] & f^{-1}(x) &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

### 2 Exemplo

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2x + 1$$

(i)  $f$  é injetiva?

$\Leftarrow f$  é estritamente monotona

(ii) Contradomínio de  $f$

$$= [1, 3]$$

(iii)  $f^{-1}$

$$f^{-1} : [1, 3] \rightarrow [0, 1] \quad f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$$

### 3 Exemplo

$$\begin{aligned} \sin & : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1] \\ \arcsin & : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2] \end{aligned}$$

### 4 Exemplo

$$\begin{aligned} \tan & : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-\infty, \infty] \\ \arctan & : [-\infty, \infty] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2] \end{aligned}$$

# XVIII | 27/04 - Derivadas

## 1 Definição

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \wedge a \in \text{int}(I)$$

$$D \in \mathbb{R} : D = f'(a) = \frac{df(a)}{dx} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

## 2 Definição Alternativa

$$\begin{aligned} \exists f'(a) &\iff \exists D \in \mathbb{R}, \\ &Z : V_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R} : \\ f(x) &= f(a) + D(x - a) + \\ &+ (x - a) Z(x - a) \end{aligned}$$

## 3 Definição derivada para funções de imagens abertas

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \wedge I \neq \bar{I}$$

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R} \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$



# XIX | 30/04 - Regras de Derivação

## 1 Derivação da Soma

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$\begin{aligned}(f + g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} = \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \\&= f'(a) + g'(a)\end{aligned}$$

## 2 Derivação do Produto

$$(f g)'(a) = f'(a) g(a) + f(a) g'(a)$$

$$\begin{aligned}(f g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) g(x) - f(a) g(a)}{x - a} = \\&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) g(x) + f(a) (g(x) - g(a))}{x - a} = \\&= \lim_{x \rightarrow a} \left( g(x) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) = \\&= g(a) f'(a) + f(a) g'(a)\end{aligned}$$

## 3 Derivada da Divisão

### 3.1 Previa

$$(1/f(x))' = -f'(x)/f^2(x)$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1/f(x) - 1/f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a) - f(x)}{(x - a) f(x) f(a)} = \\&= -f'(a)/f^2(a)\end{aligned}$$

## 4 Derivada de Conjugada

$$(f \circ u)'(a) = f'(u(a)) u'(a)$$

$$\begin{aligned}(f \circ u)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(u(x)) - f(u(a))}{x - a} = \\&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(u(x)) - f(u(a))}{u(x) - u(a)} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = f'(u(a)) u'(a)\end{aligned}$$

### 4.1 Exemplo

$$(e^{u(x)})' = e^{u(x)} u'(x) \quad (e^{x^3})' = e^{x^3} 3x^2$$

### 4.2 Exemplo

Nota:  $(\ln)'(u) = u'/u$

$$(\ln'(1/\cos(x))) = \frac{-\sin(x)/x^2}{\cos(x)} = \frac{1}{\tan(x) x^2}$$

## 5 Técnica de encontrar derivações

### 5.1 $\ln'(x) = 1/x$

$$\begin{aligned}(e^{\ln(x)})' &= (x)' \implies e^{\ln(x)} \ln'(x) = x \ln'(x) = 1 \implies \\&\implies (\ln)'(x) = 1/x\end{aligned}$$

### 5.2 $\arctan'(x) = 1/(1 + x^2)$

$$\begin{aligned}(\tan(\arctan(x)))' &= (x)' \implies \\&\implies \tan'(\arctan(x)) \arctan'(x) = \\&= (1 + \tan^2(\arctan(x))) \arctan'(x) = \\&= (1 + x^2) \arctan'(x) = 1 \implies \\&\implies \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}\end{aligned}$$

$$\mathbf{5.3} \quad \arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} (\sin(\arcsin(x)))' &= (x)' \implies \cos(\arcsin(x)) \arcsin'(x) = \\ &= \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} \arcsin'(x) = \\ &= \sqrt{1 - x^2} \arcsin'(x) = 1 \implies \arcsin'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

# XX | 03/05 - Teoremas da diferenciabilidade

## 1 Teorema de Rolle

$$f \begin{cases} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \wedge \\ f \text{ é continua em } [a, b] \wedge \\ \exists f'(x) \quad \forall x \in (a, b) \wedge \\ f(a) = f(b) \end{cases}$$

$$\therefore \exists c \in [a, b] : f'(c) = 0 \wedge \\ \max(f), \min(f) \subset f(c)$$

$$\min(f) = x_0 \in (a, b) : \\ f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0; \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \\ \therefore f'(x_0) = 0$$

## 2 Teorema de Lagrange

$$f \begin{cases} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ f \text{ é continua em } [a, b] \\ \exists f'(x) \quad \forall x \in (a, b) \end{cases}$$

$$\therefore \exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \\ f(b) = f(a) + f'(c) (b - a)$$

### 2.1 Corolário

$$f \begin{cases} f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \wedge \\ f \text{ é continua em } [a, b] \wedge \\ \exists f'(x) \quad \forall x \in (a, b) \wedge \\ f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \end{cases}$$

$\therefore f$  é estritamente crescente em  $(a, b)$

$$\{x, y\} \in (a, b) : f(x) < f(y) \implies \\ \implies f(y) = f(x) + f'(c) (y - x)$$

### 2.2 Ideia de Demonstração do teorema de Lagrange

Nota: REVER

$$h(x) = (b - a) f(x) - (f(b) - f(a))(x - a)$$

$$\begin{cases} h(a) = (b - a) f(a) \\ h(b) = (b - a) f(b) - (f(b) - f(a))(b - a) \end{cases} \\ \implies (b - a) f(a) = (b - a) f(b) - (f(b) - f(a))(b - a) \implies \\ \implies f(a) = f(b) - (f(b) - f(a))(b - a)$$

## XXI | 15/06 - Exercícios para o Teste

Q0 - a)

$$\int_{\varepsilon^3}^{8\pi^3} \frac{\cos(\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x}} dx = \int_{\varepsilon}^{2\pi} t \cos(t) dt$$

$(x = t^3)$

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon^3}^{8\pi^3} \frac{\cos(\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x}} dx &= \int_{\sqrt[3]{\varepsilon^3}}^{\sqrt[3]{8\pi^3}} \frac{\cos(\sqrt[3]{t^3})}{3\sqrt[3]{t^3}} d(t^3) = \\ &= \int_{\varepsilon}^{2\pi} \frac{\cos(t)}{3t} 3t^2 dt = \int_{\varepsilon}^{2\pi} t \cos(t) dt \end{aligned}$$