2º Teste de Análise Matemática II-C

Grupo I

1. Considere o conjunto

$$\boldsymbol{A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1 \wedge (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}}$$

e seja L a fronteira de A percorrida no sentido direto. O integral de linha

$$\boldsymbol{\int_L \Big(x^3 - \frac{y^2}{2}\Big)dx + (y^5 - 1)dy}$$

pode ser calculado, utilizando coordenadas polares, a partir do seguinte integral repetido:

☐ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\Big(\int_0^{2\cos\theta} \rho^2 \sin\theta \, \boldsymbol{d\rho}\Big)\boldsymbol{d\theta}$

☐ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\Big(\int_1^{2\cos\theta} \rho^2 \sin\theta \, \boldsymbol{d\rho}\Big)\boldsymbol{d\theta}$

☒ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\Big(\int_1^{2\cos\theta} \rho^2 \sin\theta \, \boldsymbol{d\rho}\Big)\boldsymbol{d\theta}$

☐ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\Big(\int_0^{2\mathrm{sen}\theta} (-\rho^2 \sin\theta)\boldsymbol{d\rho}\Big)\boldsymbol{d\theta}$

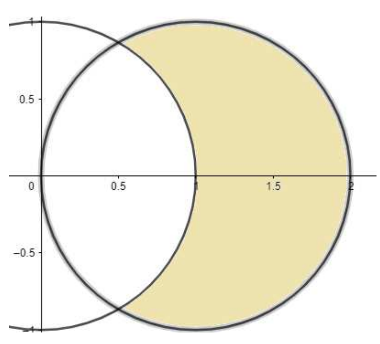
☐ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\Big(\int_1^{2\mathrm{sen}\theta} (-\rho^2 \sin\theta)\boldsymbol{d\rho}\Big)\boldsymbol{d\theta}$

☐ $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\Big(\int_1^{2\mathrm{sen}\theta} \rho^2 \sin\theta \, \boldsymbol{d\rho}\Big)\boldsymbol{d\theta}$

Resposta: A função $\varphi(x,y) = \boldsymbol{x^3 - \frac{y^2}{2}}$ é contínua e continuamente derivável em ordem a y, uma vez que se trata de uma função polinomial. A função $\psi(x,y) = y^5 - 1$ é contínua e continuamente derivável em ordem a x, uma vez que se trata também de uma função polinomial. Tem-se ainda que o domínio A é fechado, simplesmente conexo e limitado por uma linha secionalmente regular. Pela fórmula de Riemann-Green tem-se que

$$\int_L \Big(x^3 - \frac{y^2}{2}\Big)dx + (y^5 - 1)dy = \int\int_A \Big(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)dxdy = \int\int_A y \, dxdy.$$

A região A tem o gráfico



As duas circunferências intersectam-se nos pontos $(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$ que, usando coordenadas polares, correspondem a $\rho = 1, \theta = \pm\frac{\pi}{3}$. Tendo também em conta que a circunferência

$(x-1)^2+y^2=1$, em coordenadas polares, é escrita como $\rho=2\cos\theta$, tem-se, utilizando coordenadas polares, que

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, & -\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3} \\ y=\rho\sin\theta, & 1\leq\rho\leq 2\cos\theta, \end{cases} \quad |J|=\rho.$$

Tem-se que então que

$$\int\int_A y\,dxdy=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\Big(\int_1^{2\cos\theta}\rho^2\sin\theta\,d\rho\Big)d\theta. \qquad \square$$

2. Utilizando coordenadas polares, o volume de um domínio fechado D, limitado superiormente pela semisuperfície esférica $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, inferiormente pela superfície cónica $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ e compreendida entre os planos $y=0$ e $y=x$ pode ser calculado, utilizando coordenadas polares, a partir do seguinte integral repetido:

- ☐ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^1(\sqrt{1-\rho^2}-1+\rho)\,d\rho\Big)d\theta,$
- ☐ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\int_0^1(\sqrt{1-\rho^2}+1-\rho)\,\rho\,d\rho\Big)d\theta$
- ☐ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\int_0^1(\sqrt{1-\rho^2}+1-\rho)\,d\rho\Big)d\theta$
- ☒ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\int_0^1(\sqrt{1-\rho^2}-1+\rho)\,\rho\,d\rho\Big)d\theta$
- ☐ **Nenhuma das outras alternativas.**
- ☐ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\int_0^1(1-\rho-\sqrt{1-\rho^2})\,\rho d\rho\Big)d\theta$

Resposta: Em coordenadas polares $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ é representada pela expressão $z=\sqrt{1-\rho^2}$ e $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ é representada pela expressão $z=1-\rho$. As duas superfícies intersectam-se em $(x,y,z)=(0,0,1)$ correspondente a $\rho=0$ e na circunferência $x^2+y^2=1, z=0$, correspondente a $\rho=1$. Como o domínio está compreendido entre os planos $y=0$ e $y=x$ vem que $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$. Tem-se também que o jacobiano é ρ. Portanto o volume é dado por

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\int_0^1(\sqrt{1-\rho^2}-(1-\rho))\,\rho\,d\rho\Big)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\Big(\int_0^1(\sqrt{1-\rho^2}-1+\rho)\,\rho\,d\rho\Big)d\theta. \qquad \square$$

3. O integral repetido

$$\int_{-2}^0\Big(\int_0^{x^2}x^2\,dy\Big)dx+\int_0^2\Big(\int_0^{x^2}x^2\,dy\Big)dx,$$

utilizando a ordem de integração inversa da apresentada, pode ser calculado a partir de:

- ☐ $\int_0^2\Big(\int_{-2}^{-\sqrt{y}}x^2\,dx\Big)dy+\int_0^2\Big(\int_{\sqrt{y}}^2x^2\,dx\Big)dy$
- ☐ $\int_0^2\Big(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}xy\,dx\Big)dy$
- ☐ $\int_0^2\Big(\int_2^{\sqrt{y}}x^2\,dx\Big)dy+\int_0^2\Big(\int_{\sqrt{y}}^2x^2\,dx\Big)dy$
- ☐ $\int_{-2}^2\Big(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}xy\,dx\Big)dy$
- ☒ $\int_0^4\Big(\int_{-2}^{-\sqrt{y}}x^2\,dx\Big)dy+\int_0^4\Big(\int_{\sqrt{y}}^2x^2\,dx\Big)dy$
- ☐ $\int_0^4\Big(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}xy\,dx\Big)dy.$

*Respos*ta: A região onde o integral é calculado é a situada abaixo da parábola $y = x^2$, acima da recta $y = 0$ e compreendida entre as rectas verticais $x = -2$ e $x = 2$. Esta região também pode ser caracterizada como sendo o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 \wedge -2 \leq x \leq -\sqrt{y}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4 \wedge \sqrt{y} \leq x \leq 2\}. \square$$

4. Considere a linha L, fronteira do conjunto

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x^2 + (y-1)^2 \geq 1 \wedge x \leq 0 \wedge y \geq 0\right\},$$

percorrida no sentido directo. Uma parametrização do arco da linha L pertencente à circunferência de equação $x^2 + (y-1)^2 = 1$ é dada por:

☐ $\begin{cases} x = \operatorname{sen} t, & 0 \leq t \leq \pi \\ y = 1 + \cos t \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = \operatorname{sen} t, & 0 \leq t \leq \pi \\ y = \cos t \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = \operatorname{sen} t, & \pi \leq t \leq 2\pi \\ y = \cos t \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = \cos t, & \pi \leq t \leq 2\pi \\ y = 1 + \operatorname{sen} t \end{cases}$

☒ **Nenhuma das outras alternativas.**

☐ $\begin{cases} x = \cos t, & 0 \leq t \leq \pi. \\ y = 1 + \operatorname{sen} t \end{cases}$

*Respos*ta: Uma resposta correcta seria, por exemplo

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen} t, & -\pi \leq t \leq 0. \\ y = 1 + \cos t \end{cases} \qquad \square$$

Grupo II

1. Determine a área da secção da superfície esférica de equação $x^2+y^2 + (z-2)^2 = 4$ situada no interior do parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$.

*Respos*ta: A superfície esférica tem centro em $(0, 0, 2)$ e raio 2. A região pretendida é limitada pela linha obtida fazendo a intersecção entre $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ e $z = x^2 + y^2$. Igualando estas equações vem que $z^2 = 3z$ e portanto $z = 3 \vee z = 0$. Então a linha de intersecção tem a equação $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ z = 3. \end{cases}$ e a seccção de superfície cuja área se pretende calcular projecta-se, no plano xoy, no círculo D de equação $x^2 + y^2 \leq 3$.

Note-se ainda que a superfície esférica em questão também pode ser representada pela equação

$$z = f(x, y) = 2 + \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

A área pretendida é dada por

$$\begin{aligned}A &= \int\int_D \sqrt{1+\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2}\,dxdy\\ &= \int\int_D \sqrt{1+\Big(\frac{-\,x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\Big)^2+\Big(\frac{-\,y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\Big)^2}\,dxdy\\ &= \int\int_D \sqrt{\frac{4}{4-x^2-y^2}}\,dxdy.\end{aligned}$$

Como D é um círculo pode ser caracterizado usando coordenadas polares

$$\begin{cases} x=\rho\,\cos\theta, & 0\leq\theta\leq 2\pi\\ y=\rho\,\mathrm{sen}\theta, & 0\leq\rho\leq\sqrt{3}\end{cases}$$

Então

$$A=\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}d\rho\Big)d\theta = 2\pi[-2\sqrt{4-\rho^2}]_0^{\sqrt{3}} = -4\pi(\sqrt{1}-\sqrt{4})=4\pi. \qquad \square$$

2. (a) Sabe-se que o campo vectorial

$$\vec{u}(x,y,z)=(2\,xy^3z^4+4z)\,\vec{i}+3\,x^2y^2z^4\,\vec{j}+(4\,x^2y^3z^3+4x)\,\vec{k}$$

é conservativo em $\mathbb{R}^3$ (não prove). Determine uma sua função potencial.

(b) Use a alínea anterior para calcular o integral curvilíneo

$$\int_L (2\,xy^3z^4+4z)\,dx+3\,x^2y^2z^4\,dy+(4\,x^2y^3z^3+4x)\,dz$$

ao longo da linha L de equação $L\equiv\begin{cases}x=e^{(t-2)^2}\\ y=2t\\ z=\cos^2(\pi t)\end{cases}, 0\leq t\leq 2.$

*Respos*ta: a) Se φ é uma função potencial do campo $\vec{u}$ então $\nabla\varphi=\vec{u}$, que conduz ao sistema

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=2xy^3z^4+4z\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=3x^2y^2z^4\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}=4x^2y^3z^3+4x.\end{cases}$$

Da primeira linha vem, primitivando em ordem a x, que $\varphi(x,y,z)=x^2y^3z^4+\psi(y,z)$. Derivando esta função e comparando com a segunda linha do sistema conclui-se que $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(y,z)=0$ e portanto $\psi(y,z)$ só depende de z. Então $\psi(y,z)=\theta(z)$ e $\varphi(x,y,z)=x^2y^3z^4+\theta(z)$. Derivando esta função e comparando com a terceira linha do sistema conclui-se que $\theta'(z)=4x$ donde $\theta(z)=4xz+C$. Então, uma função potencial é dada por $\varphi(x,y,z)=x^2y^3z^4+4xz+C$.

(b) O ponto inicial da linha L é $(e^4, 0, 1)$ e o final é $(1, 4, 1)$. Então

$$\int_L 2xy^3z^4dx + 3x^2y^2z^4dy + 4x^2y^3z^3dz = \varphi(1,4,1) - \varphi(e^4,0,1) = 68 - 4e^4. \qquad \square$$

Grupo III

1. Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ o domínio

$$\boldsymbol{D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \wedge 3x^2 + 3y^2 \leq z^2 \wedge z \geq 0\}.}$$

Represente, usando coordenadas esféricas, o seguinte integral (mas não o calcule):

$$\boldsymbol{\int\int\int_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz.}$$

Resposta: As coordenadas esféricas são $\begin{cases} x = r \text{ sen} u \cos v \\ y = r \text{ sen} u \text{ sen} v \\ z = r \cos u. \end{cases}$

Como se tem $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ vem que $0 \leq r \leq 3$. De $\mathbf{3}x^2 + 3y^2 \leq z^2$ deduz-se que $\mathbf{3}\boldsymbol{r}^2\text{sen}^2 u \leq r^2\cos^2 u$ donde $\text{tg}^2 u \leq \frac{1}{3}$ e portanto $0 \leq u \leq \frac{\pi}{6}$ (tendo em conta que $z \geq 0$). O ângulo v varia entre 0 e 2π. O jacobiano é $r^2\text{sen} u$. Então o integral pretendido é:

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\int_0^3 r^4 \text{sen}^3 u\, dr \right) du \right) dv. \qquad \square$$

2. Seja S a superfície parabólica de equação $z = 1 + x^2 + y^2,\ 1 \leq z \leq 2$. Sendo $\vec{\omega} = y\vec{i} + xz\vec{j} + \vec{k}$ calcule directamente o valor do fluxo

$$\boldsymbol{\int\int_S \nabla \times \vec{\omega} \cdot \vec{n}\, dS,}$$

na face exterior da superfície S.

Resposta: Sendo $\vec{\omega} = y\vec{i} + xz\vec{j} + \vec{k}$ o seu rotacional é dado por

$$\nabla \times (y\vec{i} + xz\vec{j} + \vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ y & xz & z \end{vmatrix} = -x\vec{i} + (z-1)\vec{k}.$$

A superfície admite as seguintes equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \rho\, cos\theta\,, & 0 \leq \theta\ \leq 2\pi \\ y = \rho\, sen\theta, & 0 \leq \rho \leq 1 \\ z = 1 + \rho^2, \end{cases}$$

Considere-se

$$P(\rho, \theta) = (\rho\, cos\theta, \rho\, sen\theta, 1 + \rho^2).$$

Tem-se também que um vector normal na face interior da superfície no ponto (x, y, z) correspondente aos parâmetros (ρ, θ) é dado por

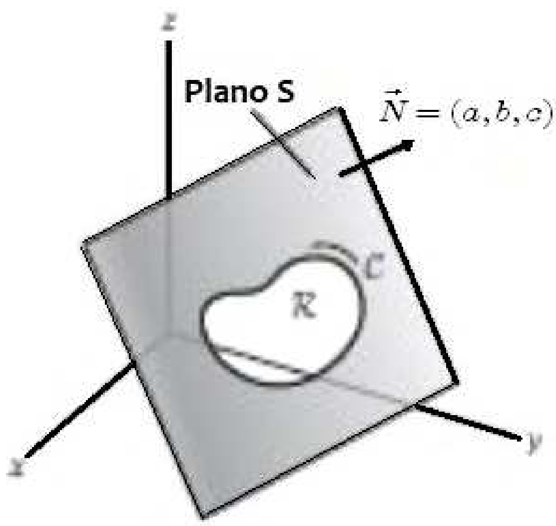
$$\vec{N} = P'_\rho \times P'_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ cos\theta & sen\theta & 2\rho \\ \rho\, sen\theta & \rho\, cos\theta & 0 \end{vmatrix} = -2\rho^2 cos\theta\,\vec{i} - 2\rho^2 sen\theta\vec{j} + \rho\vec{k}.$$

Então

$$\begin{aligned} &\int\int_S \nabla \times (y\vec{i} + xz\vec{j} + \vec{k}) \cdot \vec{n}\, dS \qquad \square \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 (-\rho\, cos\theta\,\vec{i} + \rho^2\vec{k}) \cdot (-2\rho^2 cos\theta\,\vec{i} - 2\rho^2 sen\theta\vec{j} + \rho\vec{k})\, d\rho d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 (2\rho^3 cos^2\theta + \rho^3)\, d\rho d\theta = -\int_0^{2\pi} (1 + 2cos^2\theta) d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \\ &= -\left[\theta + \theta + \frac{\text{sen}(2\theta)}{2}\right]_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{4} 4\pi = -\pi. \end{aligned}$$

Grupo IV

1. Seja $\mathcal{C}$ uma curva fechada no plano $\mathcal{S}$ de equação $ax + by + cz + d = 0$, que limita uma região $\mathcal{R}$, como na figura.



Seja $\vec{N} = (a, b, c)$ um vector normal a $\mathcal{S}$ e considere-se que a orientação de $\mathcal{C}$ é induzida pelo sentido de $\vec{N}$. Simplifique

$$\frac{1}{2\left\|\vec{N}\right\|}\int_{\mathcal{C}} (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz.$$

Resposta: Consideremos o campo vectorial $\vec{\omega} = (bz - cy)\vec{i} + (cx - az)\vec{j} + (ay - bx)\vec{k}$, cujo rotacional é

$$\nabla \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ bz - cy & cx - az & ay - bx \end{vmatrix} = 2a\vec{i} + 2b\vec{j} + 2c\vec{k} = 2\vec{N}$$

Pelo teorema de Stokes vem que

$$\int_{\mathcal{C}} (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz = \int\int_{\mathcal{R}} \nabla \times \vec{\omega} \cdot \vec{n}\, d\mathcal{R} = \int\int_{\mathcal{R}} 2\vec{N} \cdot \vec{n}\, d\mathcal{R}.$$

Mas $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{\left\|\vec{N}\right\|}$ donde

$$\int\int_{\mathcal{R}} 2\vec{N} \cdot \vec{n}\, d\mathcal{R} = \int\int_{\mathcal{R}} 2\vec{N} \cdot \frac{\vec{N}}{\left\|\vec{N}\right\|}\, d\mathcal{R} = \frac{2}{\left\|\vec{N}\right\|} \int\int_{\mathcal{R}} 2\left\|\vec{N}\right\|^2 d\mathcal{R} = 2\left\|\vec{N}\right\| \int\int_{\mathcal{R}} d\mathcal{R}$$

e portanto

$$\frac{1}{2\left\|\vec{N}\right\|} \int_{\mathcal{C}} (bz - cy)dx + (cx - az)dy + (ay - bx)dz = \frac{2\left\|\vec{N}\right\|}{2\left\|\vec{N}\right\|} \int\int_{\mathcal{R}} d\mathcal{R} = \int\int_{\mathcal{R}} 1 d\mathcal{R} = \text{área}(\mathcal{R}) \square$$