Investigação Operacional

Programação linear

Manuel V.C. Vieira

Gab.51
mvcv@fct.unl.pt

Exemplos

Uma exploração agrícola dispõe de 80 hectares de terra para produzir tomate e trigo. Os recursos suscetíveis de limitar a produção das duas culturas são a terra (80 ha), a água para rega e o trabalho, de acordo com os valores indicados no quadro seguinte.

Recursos	Necessidades (por ha)		Disponibilidades
	tomate	trigo	
Água (m^3)	8000	0	320 000
Trabalho (DH)	40	20	2000

As receitas resultantes de cada hectare de tomate e de trigo são 300 e 200 Euros, respetivamente. Quais as áreas a destinar a cada uma das culturas de modo que a receita total seja máxima?

Formular

Questões

- Que **decisões** deverão ser tomadas? Que atividades deverão ser realizadas?
- Qual o **objectivo** a atingir?
- Que **condições** são impostas?

Formulação geral de PL

Determinar valores para $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que otimizam (maximizam ou minimizam) uma função linear

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \qquad \text{(função objetivo)}$$

Formulação geral de PL

Determinar valores para $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que otimizam (maximizam ou minimizam) uma função linear

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad \text{(função objetivo)}$$

sujeito a restrições lineares do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq, \ \leq \ \text{ou} = b$$

Formulação geral de PL

Determinar valores para $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que otimizam (maximizam ou minimizam) uma função linear

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad \text{(função objetivo)}$$

sujeito a restrições lineares do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq, \ \leq \ \text{ou} = b$$

e restrições de sinal das variáveis

$$x_j \geq, \ \leq \ \text{ou livre.}$$

Exemplos

Um criador de porcos pretende estabelecer com custo mínimo um concentrado composto, que satisfaça certos requisitos nutricionais para a alimentação dos seus animais, de acordo com os dados fornecidos na seguinte tabela.

Unidades contidas em cada Kg					
ingredientes	milho	farinhas de carne e osso	luzerna	val. min. diários	val. max. diários
hidratos carbono	90	20	40	200	
proteína	30	80	60	180	
fibra	15	0	30		70
vitaminas	10	20	60	150	270
aminoácidos	10	25	15	15	
custo (Euros/Kg)	0.30	0.25	0.18		

Exemplos

A água que abastece três regiões no Alentejo, R_1, R_2 e R_3, provém das barragens B_1 e B_2. Estima-se que as regiões R_1, R_2 e R_3 necessitam anualmente, pelo menos, de 10, 5 e 15 milhões de metros cúbicos de água, respectivamente. Sabe-se que no próximo ano as barragens B_1 e B_2 poderão fornecer até 14 e 16 milhões de metros cúbicos, respectivamente. O custo, em 10^4 Euros, do abastecimento de cada $10^6 m^3$ de água de cada barragem para cada uma das regiões, é indicado no quadro seguinte.

	R_1	R_2	R_3
B_1	14	10	9
B_2	13	11	12

Qual é o plano abastecimento de água às três regiões a que corresponde o menor custo?

Terminologia

região admissível - conjunto dos pontos que satisfazem todas as restrições.

Terminologia

região admissível - conjunto dos pontos que satisfazem todas as restrições.

solução admissível - um ponto da região admissível, ou que satisfaz todas as restrições.

Terminologia

região admissível - conjunto dos pontos que satisfazem todas as restrições.

solução admissível - um ponto da região admissível, ou que satisfaz todas as restrições.

solução inadmissível - um ponto que não satisfaz pelo menos uma restrição.

Terminologia

região admissível - conjunto dos pontos que satisfazem todas as restrições.

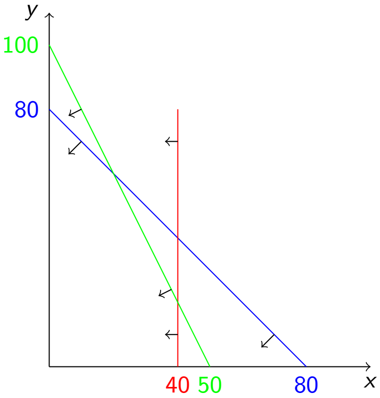
solução admissível - um ponto da região admissível, ou que satisfaz todas as restrições.

solução inadmissível - um ponto que não satisfaz pelo menos uma restrição.

solução ótima - a que corresponde ao maior ou menor valor da função objetivo, consoante o problema é de maximização ou de minimização.

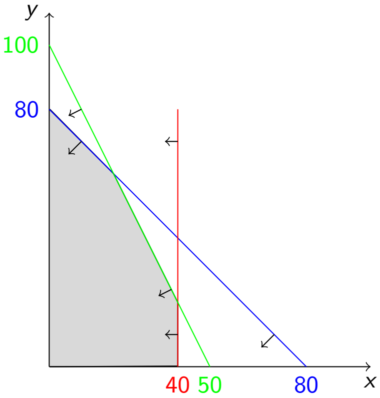
Resolução geométrica

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = 300x + 200y \\
\text{sujeito a} \quad & x + y \leq 80 \\
& x \qquad \leq 40 \\
& 2x + y \leq 100 \\
& x, y \geq 0.
\end{aligned}
$$



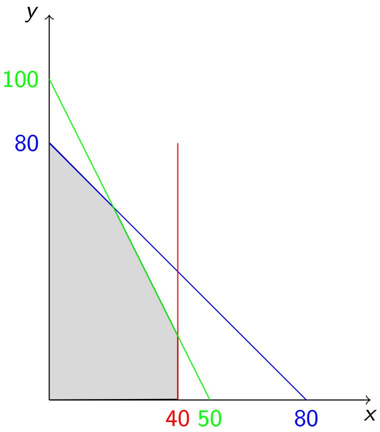
Resolução geométrica

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 300x + 200y \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \le 80 \\ & x \qquad \le 40 \\ & 2x + y \le 100 \\ & x, y \ge 0. \end{aligned}$$



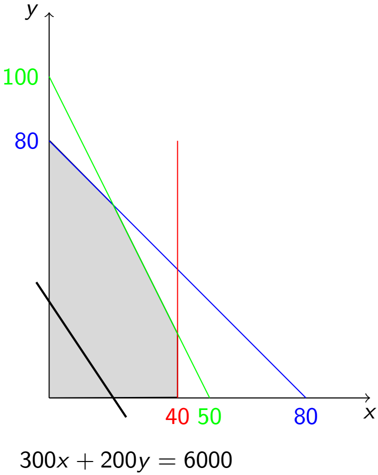
Resolução geométrica

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 300x + 200y \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \le 80 \\ & x \le 40 \\ & 2x + y \le 100 \\ & x, y \ge 0. \end{aligned}$$



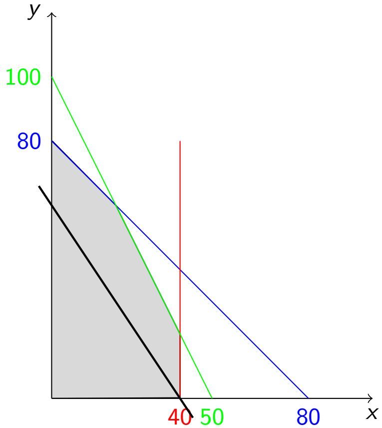
Resolução geométrica

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 300x + 200y \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \leq 80 \\ & x \qquad \leq 40 \\ & 2x + y \leq 100 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$



Resolução geométrica

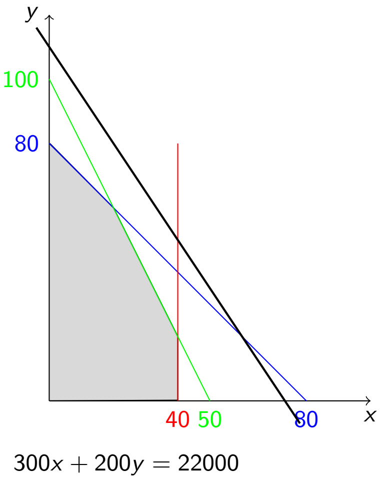
$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 300x + 200y \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \leq 80 \\ & x \qquad \leq 40 \\ & 2x + y \leq 100 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$



$300x + 200y = 12000$

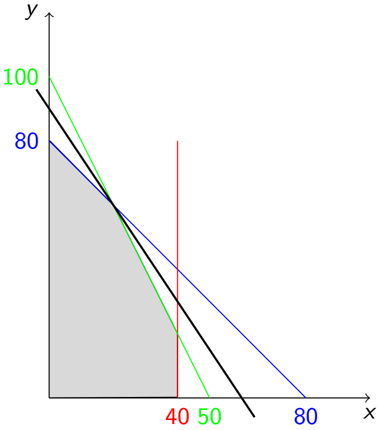
Resolução geométrica

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 300x + 200y \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \leq 80 \\ & x \leq 40 \\ & 2x + y \leq 100 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$



Resolução geométrica

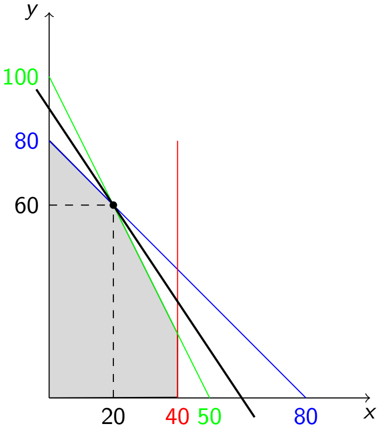
$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 300x + 200y \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \leq 80 \\ & x \leq 40 \\ & 2x + y \leq 100 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$



$300x + 200y = 18000$

Resolução geométrica

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 300x + 200y \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \le 80 \\ & x \le 40 \\ & 2x + y \le 100 \\ & x, y \ge 0. \end{aligned}$$



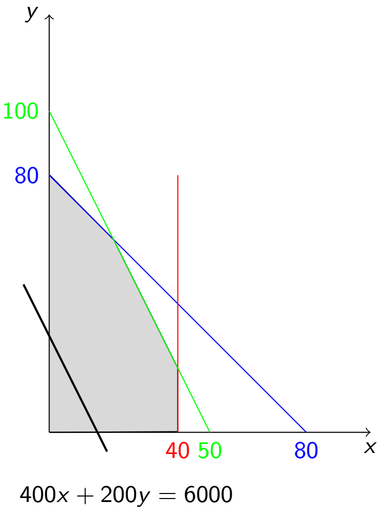
$300x + 200y = 18000$

Resolução geométrica

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 400x + 200y \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \leq 80 \\ & x \leq 40 \\ & 2x + y \leq 100 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$

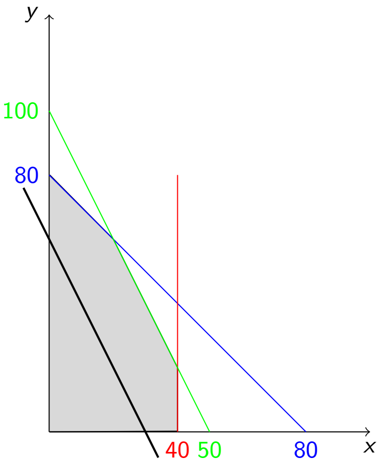
Resolução geométrica

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 400x + 200y \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \leq 80 \\ & x \qquad \leq 40 \\ & 2x + y \leq 100 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$



Resolução geométrica

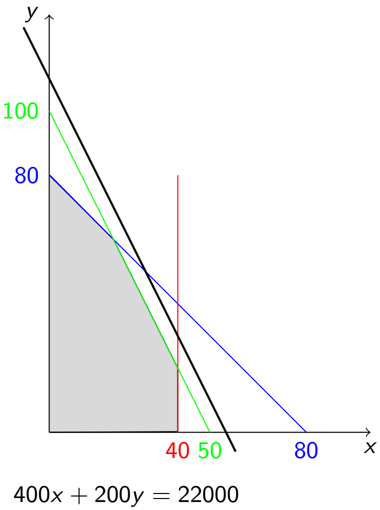
$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = 400x + 200y \\
\text{sujeito a} \quad & x + y \leq 80 \\
& x \qquad \leq 40 \\
& 2x + y \leq 100 \\
& x, y \geq 0.
\end{aligned}
$$



$400x + 200y = 12000$

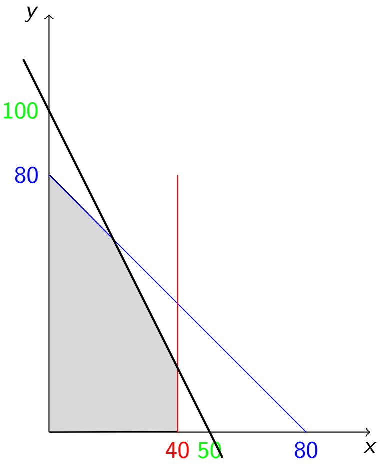
Resolução geométrica

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = 400x + 200y \\
\text{sujeito a} \quad & x + y \leq 80 \\
& x \qquad \leq 40 \\
& 2x + y \leq 100 \\
& x, y \geq 0.
\end{aligned}
$$



Resolução geométrica

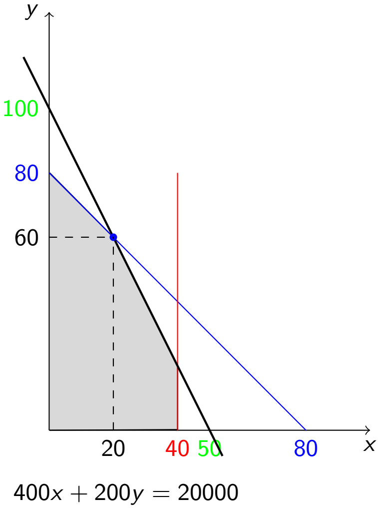
$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = 400x + 200y \\
\text{sujeito a} \quad & x + y \le 80 \\
& x \le 40 \\
& 2x + y \le 100 \\
& x, y \ge 0.
\end{aligned}
$$



$400x + 200y = 20000$

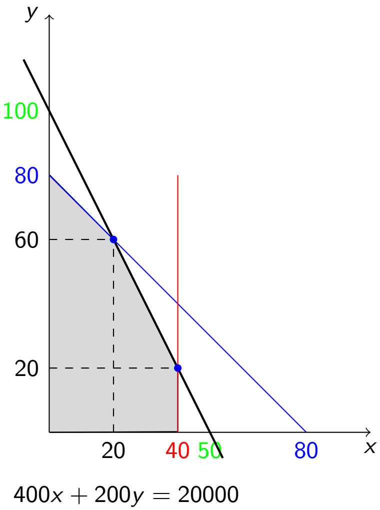
Resolução geométrica

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 400x + 200y \\ \text{sujeito a} \quad & x + y \leq 80 \\ & x \leq 40 \\ & 2x + y \leq 100 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$



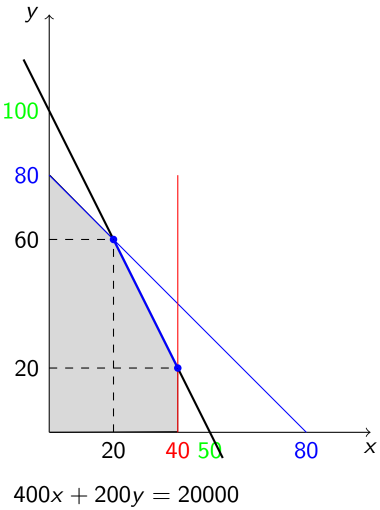
Resolução geométrica

$$\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = 400x + 200y \\
\text{sujeito a} \quad & x + y \leq 80 \\
& x \leq 40 \\
& 2x + y \leq 100 \\
& x, y \geq 0.
\end{aligned}$$



Resolução geométrica

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = 400x + 200y \\
\text{sujeito a} \quad & x + y \leq 80 \\
& x \leq 40 \\
& 2x + y \leq 100 \\
& x, y \geq 0.
\end{aligned}
$$



Exemplo

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{sujeito a} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 24 \\
& x_1 + x_2 \leq 10 \\
& x_1 \leq 8 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

1. Represente geometricamente a região admissível;
2. Indique uma solução ótima, o valor da função objectivo;
3. Neste ponto, identifique as restrições saturadas (satisfeitas com igualdades);
4. Indique o maior intervalo de variação do membro direito da terceira restrição que mantém ótima a solução que calculou anteriormente;
5. Dê exemplo de uma outra função objectivo relativamente à qual se mantém ótima a solução que indicou anteriormente.

Exemplo

Representente geometricamente a região admissível e resolva

$$\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeito a} \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
& x_1 \leq 4 \\
& x_2 \leq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Exemplo

Represente geometricamente a região admissível e resolva

$$\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = 10x_1 + 20x_2 \\
\text{sujeito a} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 15 \\
& x_1 + x_2 \leq 12 \\
& 5x_1 + 3x_2 \leq 45 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Exemplo

Represente geometricamente a região admissível e resolva

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = 15x_1 + 20x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ & 2x_1 - 3x_2 \geq 6 \\ & x_1 + x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Otimalidade

Nota:

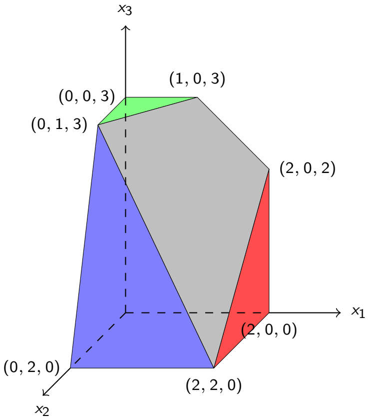
A otimalidade ocorre em pelo menos um vértice da região admissível.

Resolução geométrica

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = x_1 + 2x_3 \\
\text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\
& x_1 \leq 2 \\
& x_3 \leq 3 \\
& 3x_2 + x_3 \leq 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

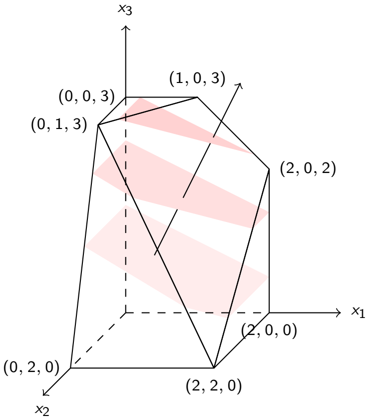
Resolução geométrica

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = x_1 + 2x_3 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_3 \leq 3 \\ & 3x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$



Resolução geométrica

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = x_1 + 2x_3 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ & x_1 \qquad\qquad\quad\;\; \le 2 \\ & \qquad\qquad\quad\;\; x_3 \le 3 \\ & \qquad\;\; 3x_2 + x_3 \le 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$



Poliedros

Hiperplano

Um hiperplano é o conjunto das soluções de uma equação linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = b,$$

com pelo menos um dos $a_i \neq 0$;

Poliedros

Hiperplano

Um hiperplano é o conjunto das soluções de uma equação linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n = b,$$

com pelo menos um dos $a_i \neq 0$;

O hiperplano divide $\mathbb{R}^n$ nos semi-espaços definidos por

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n \leq b \qquad a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n \geq b$$

Poliedros

Poliedro

Um poliedro é a intersecção de um número finito de inequações lineares.

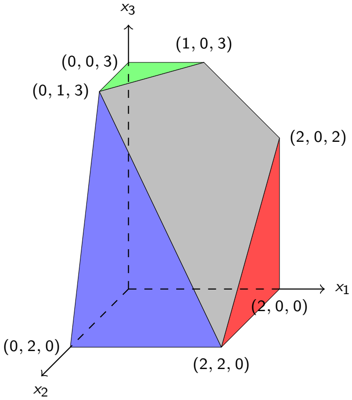
$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\leq 4 \\
x_1 \qquad\qquad\; &\leq 2 \\
x_3 &\leq 3 \\
3x_2 + x_3 &\leq 6 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Poliedros

Poliedro

Um poliedro é a intersecção de um número finito de inequações lineares.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\le 4 \\
x_1 \qquad\qquad &\le 2 \\
x_3 &\le 3 \\
3x_2 + x_3 &\le 6 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

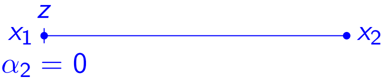


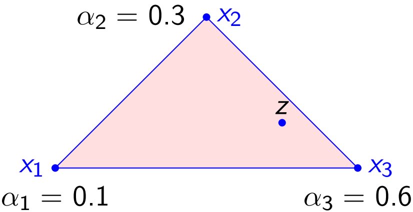
Combinação linear convexa

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Uma combinação linear convexa de x_1 e x_2 é o ponto

$$z = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

com $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ e $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$.





Vértices e a solução ótima

Teorema

Se $\mathcal{P}$ é um poliedro não vazio limitado de $\mathbb{R}^n$ e $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ é um vetor de $\mathbb{R}^n$,

1. existe um vértice de $\mathcal{P}$ que é solução ótima do problema de programação linear

$$\begin{aligned} \text{maximizar (minimizar) } & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = c^T x \\ \text{sujeito a } & x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}, \end{aligned}$$

2. Se k vértices de $\mathcal{P}$ são soluções ótimas, toda a combinação convexa desses vértices é também solução ótima.

Forma Canónica

Problema na forma canónica, com n variáveis e m restrições:

$$
\begin{array}{rl}
\text{maximizar} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
 & \ldots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
 & x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0
\end{array}
$$

Caraterização da forma canónica

- problema de maximização;
- restrições de menor ou igual;
- variáveis não negativas;

Forma Canónica

Problema na forma canónica, com n variáveis e m restrições:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s. a} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\
& x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Forma Canónica

Problema na forma canónica, com n variáveis e m restrições:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s. a} \quad & Ax \leq b, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

em que c é uma matriz coluna $n \times 1$, b é uma matriz coluna $m \times 1$, A é uma matriz $m \times n$ e x é a matriz coluna $n \times 1$ de variáveis.

Forma standard

Qualquer problema de PL pode ser escrito na forma standard:

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar(minimizar)} \quad & c^T x \\
\text{sujeito a} \quad & Ax = b \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

Caraterização da forma standard

- problema de maximização ou minimização;
- restrições de igualdade;
- variáveis não negativas;

Forma standard

Qualquer problema de PL pode ser escrito na forma standard:

$$\begin{aligned} \text{maximizar(minimizar)} \quad & c^T x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Forma standard

Qualquer problema de PL pode ser escrito na forma standard:

$$\begin{aligned} \text{maximizar(minimizar)} \quad & c^T x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

- $x_j \leq 0$: substituir na formulação x_j por $-\bar{x}_j$ e exigir $\bar{x}_j \geq 0$.

Forma standard

Qualquer problema de PL pode ser escrito na forma standard:

$$\begin{aligned} \text{maximizar(minimizar)} \quad & c^T x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

- $x_j \leq 0$: substituir na formulação x_j por $-\bar{x}_j$ e exigir $\bar{x}_j \geq 0$.
- x_j livre: substituir na formulação x_j por $x_j^1 - x_j^2$ e exigir $x_j^1, x_j^2 \geq 0$.

Forma standard

Qualquer problema de PL pode ser escrito na forma standard

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar ou minimizar} \quad & c^T x \\
\text{sujeito a} \quad & Ax = b \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

Forma standard

Qualquer problema de PL pode ser escrito na forma standard

$$\begin{aligned} \text{maximizar ou minimizar} \quad & c^T x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

- $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \leq b$ - substituir por

Forma standard

Qualquer problema de PL pode ser escrito na forma standard

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar ou minimizar} \quad & c^T x \\
\text{sujeito a} \quad & Ax = b \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

- $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b$ - substituir por
- $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + x_{n+1} = b$ e $x_{n+1} \geq 0$

Forma standard

Qualquer problema de PL pode ser escrito na forma standard

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar ou minimizar} \quad & c^T x \\
\text{sujeito a} \quad & Ax = b \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

- $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b$ - substituir por
- $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + x_{n+1} = b$ e $x_{n+1} \geq 0$
- $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b$ - substituir por

Forma standard

Qualquer problema de PL pode ser escrito na forma standard

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar ou minimizar} \quad & c^T x \\
\text{sujeito a} \quad & Ax = b \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

- $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \leq b$ - substituir por
- $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n + x_{n+1} = b$ e $x_{n+1} \geq 0$
- $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \geq b$ - substituir por
- $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n - x_{n+1} = b$ e $x_{n+1} \geq 0$

Forma standard

Qualquer problema de PL pode ser escrito na forma standard

$$\begin{aligned} \text{maximizar ou minimizar} \quad & c^T x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

- $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leq b$ - substituir por
- $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + x_{n+1} = b$ e $x_{n+1} \geq 0$
- $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geq b$ - substituir por
- $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - x_{n+1} = b$ e $x_{n+1} \geq 0$
- x_{n+1} chama-se *variável de folga*.

Exemplo

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = x_1 + 2x_3 \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\
& x_1 \qquad\qquad\quad \leq 2 \\
& \qquad\qquad\quad x_3 \leq 3 \\
& \qquad 3x_2 + x_3 \leq 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x_1 + 2x_3 \\
\text{s. a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\
& x_1 \qquad\qquad\quad \leq 2 \\
& \qquad\qquad\quad x_3 \leq 3 \\
& \qquad 3x_2 + x_3 \leq 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\max \quad z = x_1 + 2x_3$$

Exemplo

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = x_1 + 2x_3 \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\
& x_1 \qquad\qquad\quad \leq 2 \\
& \qquad\qquad\quad x_3 \leq 3 \\
& \qquad 3x_2 + x_3 \leq 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = x_1 + 2x_3 \\
\text{s. a} & x_1 + \ x_2 + x_3 + {\color{blue}x_4} \qquad\qquad\qquad\qquad = 4
\end{array}
$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x_1 + 2x_3 \\
\text{s. a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\
& x_1 \leq 2 \\
& x_3 \leq 3 \\
& 3x_2 + x_3 \leq 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x_1 + 2x_3 \\
\text{s. a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + {\color{blue}x_4} = 4 \\
& x_1 + {\color{blue}x_5} = 2
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x_1 + 2x_3 \\
\text{s. a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\
& x_1 \leq 2 \\
& x_3 \leq 3 \\
& 3x_2 + x_3 \leq 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = x_1 + 2x_3 \\
\text{s. a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + \color{blue}{x_4} = 4 \\
& x_1 + \color{blue}{x_5} = 2 \\
& x_3 + \color{blue}{x_6} = 3
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = x_1 + 2x_3 \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\
& x_1 \leq 2 \\
& x_3 \leq 3 \\
& 3x_2 + x_3 \leq 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\max & z = x_1 + 2x_3 \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 + x_3 + \color{blue}{x_4} = 4 \\
& x_1 + \color{blue}{x_5} = 2 \\
& x_3 + \color{blue}{x_6} = 3 \\
& 3x_2 + x_3 + \color{blue}{x_7} = 6 \\
& x_1, x_2, x_3, \color{blue}{x_4, x_5, x_6, x_7} \geq 0
\end{array}
$$

Exemplo

x_{ij} - quantidade de água, em milhões de m^3, que a barragem B_i fornece à região R_j, $i = 1, 2$ e $j = 1, 2, 3$.

$$
\begin{array}{rl}
\text{minimizar} & z = 14x_{11} + 10x_{12} + 9x_{13} + 13x_{21} + 11x_{22} + 12x_{23} \\
\text{sujeito a} & x_{11} + x_{21} \geq 10 \\
& x_{12} + x_{22} \geq 5 \\
& x_{13} + x_{23} \geq 15 \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 14 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 16 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0
\end{array}
$$

Correspondência entre soluções admissíveis

$$
\begin{array}{llll}
\max & z = x_1 + 2x_3 & & \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 & \qquad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\
& x_1 \leq 2 & & x_1 + x_5 = 2 \\
& x_3 \leq 3 & & x_3 + x_6 = 3 \\
& 3x_2 + x_3 \leq 6 & & 3x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\
& & & \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

Correspondência entre soluções admissíveis

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = x_1 + 2x_3 & \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\
& x_1 \leq 2 & x_1 + x_5 = 2 \\
& x_3 \leq 3 & x_3 + x_6 = 3 \\
& 3x_2 + x_3 \leq 6 & 3x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\
& & \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

$$(1, 0, 2)$$

Correspondência entre soluções admissíveis

$$
\begin{array}{llll}
\max & z = x_1 + 2x_3 & & \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 & \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\
& x_1 \leq 2 & & x_1 + x_5 = 2 \\
& x_3 \leq 3 & & x_3 + x_6 = 3 \\
& 3x_2 + x_3 \leq 6 & & 3x_2 + x_3 + x_7 = 6 \\
& & & \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{array}
$$

$$(1, 0, 2) \quad \longleftrightarrow \quad (1, 0, 2, 1, 1, 1, 4)$$

Correspondência entre soluções admissíveis

$$\begin{array}{lllllll}
\max & z = x_1 + 2x_3 & & & \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 & \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 4 \\
& x_1 \leq 2 & & x_1 + x_5 & = 2 \\
& x_3 \leq 3 & & x_3 + x_6 & = 3 \\
& 3x_2 + x_3 \leq 6 & & 3x_2 + x_3 + x_7 & = 6 \\
& & & & \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0 &
\end{array}$$

$$(1, 0, 2) \quad \longleftrightarrow \quad (1, 0, 2, 1, 1, 1, 4)$$

$$\longleftrightarrow \quad (0, 1, 0, 3, 2, 3, 3)$$

Correspondência entre soluções admissíveis

$$
\begin{array}{llcl}
\max & z = x_1 + 2x_3 & & \\
\text{s. a} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 & & x_1 + x_2 + x_3 + {\color{blue}x_4} = 4 \\
 & x_1 \leq 2 & & x_1 + {\color{blue}x_5} = 2 \\
 & x_3 \leq 3 & & x_3 + {\color{blue}x_6} = 3 \\
 & 3x_2 + x_3 \leq 6 & & 3x_2 + x_3 + {\color{blue}x_7} = 6 \\
 & & & \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & & x_1, x_2, x_3, {\color{blue}x_4}, {\color{blue}x_5}, {\color{blue}x_6}, {\color{blue}x_7} \geq 0
\end{array}
$$

$$(1, 0, 2) \quad \longleftrightarrow \quad (1, 0, 2, 1, 1, 1, 4)$$

$$(0, 1, 0) \quad \longleftrightarrow \quad (0, 1, 0, 3, 2, 3, 3)$$

Soluções básicas

Seja A uma matriz $m \times n$ e b um vector $m \times 1$, com $\mathrm{car}(A) = m$. Seja $\beta = \{A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m}\}$ um conjunto de m colunas de A linearmente independentes.

$$\begin{array}{rl} \max(\min) & c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Soluções básicas

Seja A uma matriz $m \times n$ e b um vector $m \times 1$, com $\mathrm{car}(A) = m$. Seja $\beta = \{A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_m}\}$ um conjunto de m colunas de A linearmente independentes.

$$\begin{array}{rl} \max(\min) & c^T x \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Solução básica

É uma solução que se obtem resolvendo o sistema apenas com as variáveis associadas (m) às colunas de β, e igualando a zero as restantes variáveis ($n - m$).

Solução básica admissível

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad &= 4 \\
x_1 \quad + x_5 \quad &= 2 \\
x_3 \quad + x_6 \quad &= 3 \\
3x_2 + x_3 \quad + x_7 &= 6
\end{aligned}
$$

Solução básica admissível

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\
x_1 + x_5 &= 2 \\
x_3 + x_6 &= 3 \\
3x_2 + x_3 + x_7 &= 6
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Solução básica admissível

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + {\color{blue}x_4} \quad &= 4 \\
x_1 \quad + {\color{blue}x_5} \quad &= 2 \\
x_3 \quad + {\color{blue}x_6} \quad &= 3 \\
3x_2 + x_3 \quad + {\color{blue}x_7} &= 6
\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução básica admissível

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & & = 4 \\
x_1 + x_5 & & = 2 \\
x_3 + x_6 & & = 3 \\
3x_2 + x_3 + x_7 & & = 6
\end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0,$

Solução básica admissível

$$
\begin{array}{lllllll}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & & & & = 4 \\
x_1 & + x_5 & & & = 2 \\
x_3 & & + x_6 & & = 3 \\
3x_2 + x_3 & & & + x_7 & = 6
\end{array}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 4, x_5 = 2, x_6 = 3, x_7 = 6$$

Solução básica admissível

Solução básica admissível

$$
\begin{array}{l}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\
x_1 + x_5 = 2 \\
x_3 + x_6 = 3 \\
3x_2 + x_3 + x_7 = 6
\end{array}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
(0,0,0) \longleftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 4, x_5 = 2, x_6 = 3, x_7 = 6
$$

Solução básica admissível

Solução básica admissível

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\
x_1 + x_5 &= 2 \\
x_3 + x_6 &= 3 \\
3x_2 + x_3 + x_7 &= 6
\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução básica admissível

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + {\color{blue}x_4} &= 4 \\
x_1 + {\color{blue}x_5} &= 2 \\
x_3 + {\color{blue}x_6} &= 3 \\
3x_2 + x_3 + {\color{blue}x_7} &= 6
\end{aligned}
$$

$$
A = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
$$

Solução básica admissível

$$
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & & = 4 \\
x_1 + x_5 & & = 2 \\
x_3 + x_6 & & = 3 \\
3x_2 + x_3 + x_7 & & = 6
\end{array}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$x_1 = 0,$ $x_3 = 0, x_4 = 0,$

Solução básica admissível

$$\begin{array}{rcl}
\boxed{x_1} + x_2 + \boxed{x_3 + x_4} & & = 4 \\
x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 & & = 2 \\
x_3 \qquad\qquad + x_6 & & = 3 \\
3x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad + x_7 & & = 6
\end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 2, x_6 = 3, x_7 = -6$$

Solução básica não admissível

Solução básica admissível

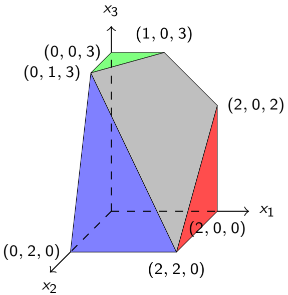
$$
\begin{array}{lllllllll}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & & = 4 \\
x_1 & & & & & & & + & x_5 & & = 2 \\
& & & & x_3 & & & & & + x_6 & = 3 \\
& & 3x_2 & + & x_3 & & & & & + x_7 & = 6
\end{array}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 2, x_6 = 3, x_7 = -6 < 0$$

Solução básica não admissível

Vértices $\longleftrightarrow$ soluções básicas admissíveis



$$\begin{array}{lcl}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 4 \\
x_1 + x_5 & = & 2 \\
x_3 + x_6 & = & 3 \\
3x_2 + x_3 + x_7 & = & 6
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
(0,0,0) \longrightarrow (0,0,0,4,2,3,6) \\
(0,2,0) \longrightarrow (0,2,0,2,2,3,0) \\
(2,2,0) \longrightarrow (2,2,0,0,0,3,0) \\
(2,0,0) \longrightarrow (2,0,0,2,0,3,6) \\
(2,0,2) \longrightarrow (2,0,2,0,0,1,4) \\
(1,0,3) \longrightarrow (1,0,3,0,1,0,3) \\
(0,0,3) \longrightarrow (0,0,3,1,2,0,3) \\
(0,1,3) \longrightarrow (0,1,3,0,2,0,0)
\end{array}$$

Variáveis básicas

Variáveis básicas

Variáveis que correspondem às colunas da base.

Variáveis básicas

Variáveis básicas

Variáveis que correspondem às colunas da base.

Variáveis não básicas

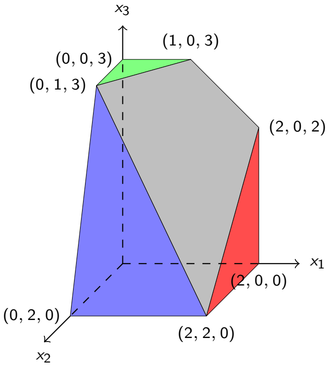
São as restantes variáveis, aquelas que igualamos a zero.

Vértices/sba's adjacentes

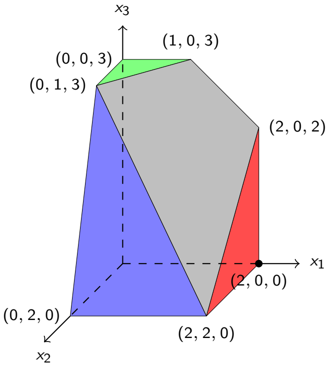
sba's adjacentes

Duas soluções básicas admissíveis (e correspondentes vértices) dizem-se adjacentes se as correspondentes bases diferirem apenas numa coluna, ou se, o conjunto das correspondentes variáveis básicas diferirem apenas numa variável.

Vértices adjacentes

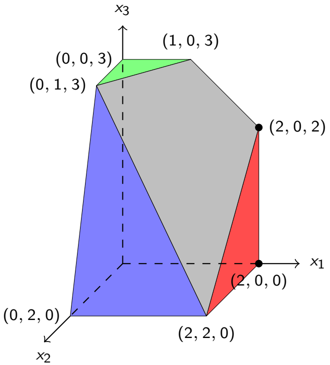


Vértices adjacentes



$$\beta = \{1, 4, 6, 7\} \quad x_\beta = (2, 0, 0, 2, 0, 3, 6) \quad \longrightarrow \quad (2, 0, 0)$$

Vértices adjacentes



$$\beta = \{1, 4, 6, 7\} \quad x_\beta = (2, 0, 0, 2, 0, 3, 6) \quad \longrightarrow \quad (2, 0, 0)$$

$$\beta' = \{1, 3, 6, 7\} \quad x_{\beta'} = (2, 0, 2, 0, 0, 1, 4) \quad \longrightarrow \quad (2, 0, 2)$$

Solução básica admissível degenerada

- sba's diferentes $\longrightarrow$ vertices diferentes

Solução básica admissível degenerada

- sba's diferentes $\longrightarrow$ vertices diferentes
- Diferentes bases podem corresponder à mesma sba

Solução básica admissível degenerada

- sba's diferentes $\longrightarrow$ vertices diferentes
- Diferentes bases podem corresponder à mesma sba

Solução básica admissível degenerada

- sba's diferentes $\longrightarrow$ vertices diferentes
- Diferentes bases podem corresponder à mesma sba

$$\text{Base } \beta = \{1, 2, 3, 6\}, \quad x_4 = x_5 = x_7 = 0$$

Solução básica admissível degenerada

- sba's diferentes $\longrightarrow$ vertices diferentes
- Diferentes bases podem corresponder à mesma sba

$$\text{Base } \beta = \{1, 2, 3, 6\}, \quad x_4 = x_5 = x_7 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_6 = 3 \end{cases}$$

$$sba \longrightarrow x_\beta = (2, 2, 0, 0, 0, 3, 0)$$

Solução básica admissível degenerada

- sba's diferentes $\longrightarrow$ vertices diferentes
- Diferentes bases podem corresponder à mesma sba

$$\text{Base } \beta = \{1, 2, 3, 6\}, \quad x_4 = x_5 = x_7 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_6 = 3 \end{cases}$$

$$sba \longrightarrow x_\beta = (2, 2, 0, 0, 0, 3, 0)$$

Solução básica admissível degenerada

- sba's diferentes $\longrightarrow$ vertices diferentes

Solução básica admissível degenerada

- sba's diferentes $\longrightarrow$ vertices diferentes
- Diferentes bases podem corresponder à mesma sba

Solução básica admissível degenerada

- sba's diferentes $\longrightarrow$ vertices diferentes
- Diferentes bases podem corresponder à mesma sba

Solução básica admissível degenerada

- sba's diferentes $\longrightarrow$ vertices diferentes
- Diferentes bases podem corresponder à mesma sba

$$\text{Base } \beta' = \{1, 2, 4, 6\}, \quad x_3 = x_5 = x_7 = 0$$

Solução básica admissível degenerada

- sba's diferentes $\longrightarrow$ vertices diferentes
- Diferentes bases podem corresponder à mesma sba

$$\text{Base } \beta' = \{1,2,4,6\}, \quad x_3 = x_5 = x_7 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_4 = 0 \\ x_6 = 3 \end{cases}$$

$$sba \longrightarrow x_{\beta'} = (2,2,0,0,0,3,0)$$

Solução básica admissível degenerada

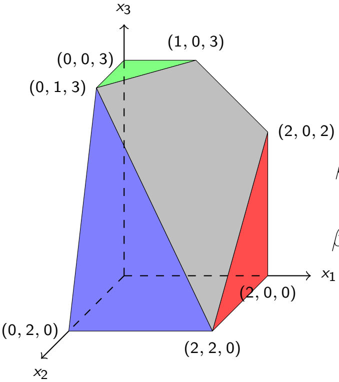
- sba's diferentes $\longrightarrow$ vertices diferentes
- Diferentes bases podem corresponder à mesma sba

$$\text{Base } \beta' = \{1, 2, 4, 6\}, \quad x_3 = x_5 = x_7 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_4 = 0 \\ x_6 = 3 \end{cases}$$

$$sba \longrightarrow x_{\beta'} = (2, 2, 0, 0, 0, 3, 0)$$

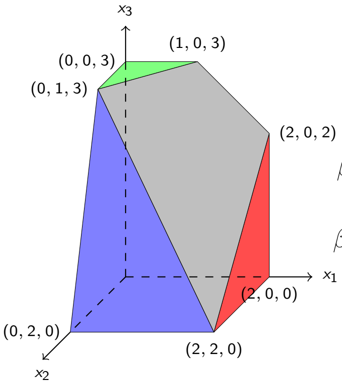
Solução básica admissível degenerada



$$\beta = \{1, 2, 3, 6\} \quad x_\beta = (2, 2, 0, 0, 0, 3, 0)$$

$$\beta' = \{1, 2, 4, 6\} \quad x_\beta = (2, 2, 0, 0, 0, 3, 0)$$

Solução básica admissível degenerada



$$\beta = \{1, 2, 3, 6\} \quad x_\beta = (2, 2, 0, 0, 0, 3, 0)$$

$$\beta' = \{1, 2, 4, 6\} \quad x_\beta = (2, 2, 0, 0, 0, 3, 0)$$

Solução degenerada

Uma sba e o correspondente vértice são degenerados se alguma variável básica é zero (variáveis nulas $>$ variáveis não básicas).

Problema de PL na forma *standard*

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & c^T x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Algoritmo do Simplex para maximização

1. Determina uma sba inicial x;

Algoritmo do Simplex para maximização

1. Determina uma sba inicial x;
2. se toda a sba adjacente à sba corrente x tem valor da função objetivo menor ou igual que $c^T x$, pára. Caso contrário, segue para o passo 3;

Algoritmo do Simplex para maximização

1. Determina uma sba inicial x;
2. se toda a sba adjacente à sba corrente x tem valor da função objetivo menor ou igual que $c^T x$, pára. Caso contrário, segue para o passo 3;
3. identifica uma sba cujo valor da função objetivo é maior do que $c^T x$, define-a como solução corrente e volta a 2.

Exemplo

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ \text{sujeito a} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \\ & x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \leq 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = 2x_1 - x_2 + x_3 \\
\text{sujeito a} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\
& x_1 + x_2 - x_3 \leq 20 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = 2x_1 - x_2 + x_3 \\
\text{sujeito a} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 + \color{red}{x_4} = 60 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 + \color{red}{x_5} = 10 \\
& x_1 + x_2 - x_3 + \color{red}{x_6} = 20 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0
\end{aligned}
$$

Algoritmo do Simplex para maximização

1. Determina uma sba inicial x;

Algoritmo do Simplex para maximização

1. Determina uma sba inicial x;
2. Se todos os coeficientes das variáveis na linha 0 do quadro corrente do *simplex* são não negativas, pára (a sba corrente x é ótima). Caso contrário, segue para o passo 3.

Algoritmo do Simplex para maximização

1. Determina uma sba inicial x;
2. Se todos os coeficientes das variáveis na linha 0 do quadro corrente do *simplex* são não negativas, pára (a sba corrente x é ótima). Caso contrário, segue para o passo 3.
3. identifica uma sba cujo valor da função objetivo é maior do que $c^T x$, define-a como solução corrente e volta a 2.

Algoritmo do Simplex para maximização

1. Determina uma sba inicial x;
2. Se todos os coeficientes das variáveis na linha 0 do quadro corrente do *simplex* são não negativas, pára (a sba corrente x é ótima). Caso contrário, segue para o passo 3.
3. identifica uma sba cujo valor da função objetivo é maior do que $c^T x$, define-a como solução corrente e volta a 2.
   3.1 Escolhe para entrar na base uma variável x_j a que corresponde o menor coeficiente na linha 0 do quadro;

Algoritmo do Simplex para maximização

1. Determina uma sba inicial x;
2. Se todos os coeficientes das variáveis na linha 0 do quadro corrente do *simplex* são não negativas, pára (a sba corrente x é ótima). Caso contrário, segue para o passo 3.
3. identifica uma sba cujo valor da função objetivo é maior do que $c^T x$, define-a como solução corrente e volta a 2.
   3.1 Escolhe para entrar na base uma variável x_j a que corresponde o menor coeficiente na linha 0 do quadro;
   3.2 Em cada linha em que o coeficiente de x_j é positivo, calcula a razão Mdir/coeficiente de x_j , e identifica uma linha (pivot) em que ocorre a menor dessas razões;

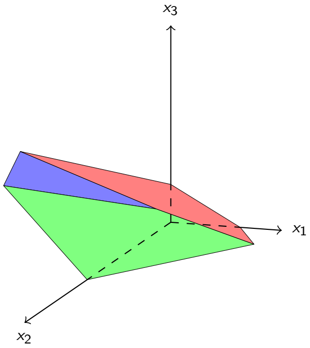
Algoritmo do Simplex para maximização

1. Determina uma sba inicial x;
2. Se todos os coeficientes das variáveis na linha 0 do quadro corrente do *simplex* são não negativas, pára (a sba corrente x é ótima). Caso contrário, segue para o passo 3.
3. identifica uma sba cujo valor da função objetivo é maior do que $c^T x$, define-a como solução corrente e volta a 2.
   3.1 Escolhe para entrar na base uma variável x_j a que corresponde o menor coeficiente na linha 0 do quadro;
   3.2 Em cada linha em que o coeficiente de x_j é positivo, calcula a razão Mdir/coeficiente de x_j , e identifica uma linha (pivot) em que ocorre a menor dessas razões;
   3.3 Efetua operações elementares para igualar a 1 o coeficiente da variável x_j na linha pivot e anular os coeficientes de x_j nas outras linhas;

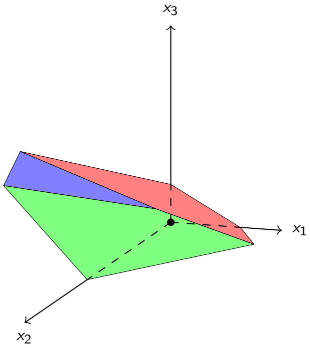
Algoritmo do Simplex para maximização

1. Determina uma sba inicial x;
2. Se todos os coeficientes das variáveis na linha 0 do quadro corrente do *simplex* são não negativas, pára (a sba corrente x é ótima). Caso contrário, segue para o passo 3.
3. identifica uma sba cujo valor da função objetivo é maior do que $c^T x$, define-a como solução corrente e volta a 2.
   - 3.1 Escolhe para entrar na base uma variável x_j a que corresponde o menor coeficiente na linha 0 do quadro;
   - 3.2 Em cada linha em que o coeficiente de x_j é positivo, calcula a razão Mdir/coeficiente de x_j , e identifica uma linha (pivot) em que ocorre a menor dessas razões;
   - 3.3 Efetua operações elementares para igualar a 1 o coeficiente da variável x_j na linha pivot e anular os coeficientes de x_j nas outras linhas;
   - 3.4 Volta a 2.

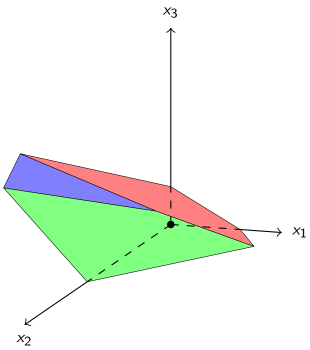
Exemplo



Exemplo

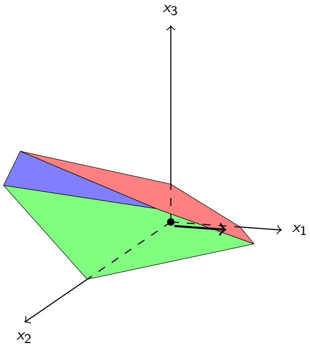


Exemplo



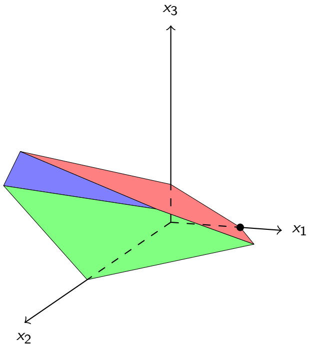
aumentar x_1

Exemplo

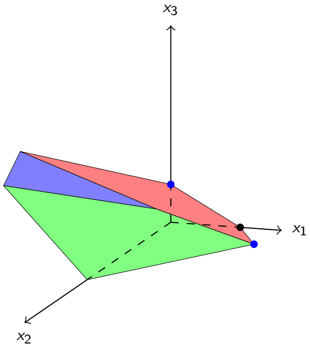


aumentar x_1

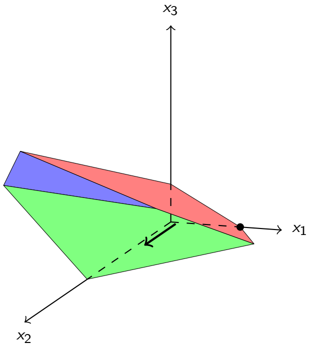
Exemplo



Exemplo

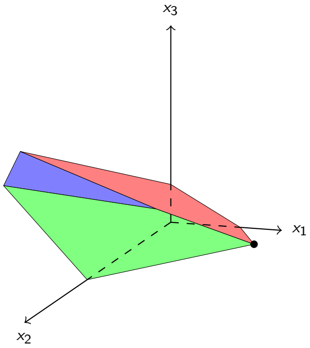


Exemplo



aumentar x_2

Exemplo



Problema de Minimização: Exemplo

Utilize o algoritmo do simplex para resolver o seguinte problema

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & z = 2x_1 - 3x_2 \\
\text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1 - x_2 \leq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Algoritmo do Simplex: problema de minimização

- Para resolver problemas de minimização basta ter em conta que

  minimizar $f(x)$ é equivalente a maximizar $-f(x)$.

Algoritmo do Simplex: problema de minimização

- Para resolver problemas de minimização basta ter em conta que

  minimizar $f(x)$ é equivalente a maximizar $-f(x)$.

- Basta trocar os sinais dos coeficientes das variáveis na função objetivo e aplicar o *Simplex* para maximização;

Algoritmo do Simplex: problema de minimização

- Ou, equivalentemente, **poder-se-á aplicar o Simplex ao problema original e substituir os passos 2 e 3.1 por**:

Algoritmo do Simplex: problema de minimização

- Ou, equivalentemente, **poder-se-á aplicar o Simplex ao problema original e substituir os passos 2 e 3.1 por**:
  2a. Se todos os coeficientes das variáveis na linha 0 do quadro corrente do simplex são não positivas, pára (a sba corrente x é ótima). Caso contrário, segue para o passo 3.1a;

Algoritmo do Simplex: problema de minimização

- Ou, equivalentemente, **poder-se-á aplicar o Simplex ao problema original e substituir os passos 2 e 3.1 por**:
  - 2a. Se todos os coeficientes das variáveis na linha 0 do quadro corrente do simplex são não positivas, pára (a sba corrente x é ótima). Caso contrário, segue para o passo 3.1a;
  - 3.1a Escolhe para entrar na base uma variável x_j a que corresponde o maior coeficiente na primeira linha do quadro.

Algoritmo do Simplex: região admissível ilimitada

- Se em todas as linhas o coeficiente de x_j (a variável a entrar na base) não é positivo, paramos o algoritmo.

Algoritmo do Simplex: região admissível ilimitada

- Se em todas as linhas o coeficiente de x_j (a variável a entrar na base) não é positivo, paramos o algoritmo.
- Isto significa que a região admissível não é limitada e a função objetivo não é majorada na região admissível.

Algoritmo do Simplex: região admissível ilimitada

- Se em todas as linhas o coeficiente de x_j (a variável a entrar na base) não é positivo, paramos o algoritmo.
- Isto significa que a região admissível não é limitada e a função objetivo não é majorada na região admissível.

Algoritmo do Simplex: região admissível ilimitada

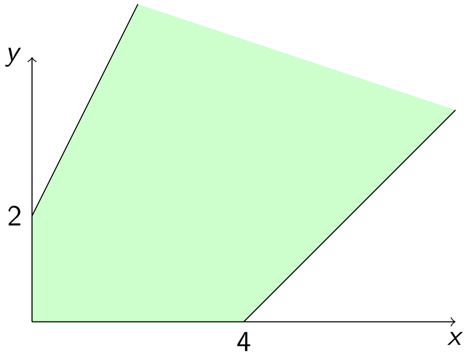
- Se em todas as linhas o coeficiente de x_j (a variável a entrar na base) não é positivo, paramos o algoritmo.
- Isto significa que a região admissível não é limitada e a função objetivo não é majorada na região admissível.

Exemplo

Mostre, utilizando o algoritmo do *Simplex*, que a região admissível do seguinte problema é ilimitada.

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = x_1 + x_2 \\
\text{sujeito a} \quad & x_1 - x_2 \leq 4 \\
& -2x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Região admissível ilimitada: exemplo



Algoritmo do Simplex: múltiplas soluções ótimas

- No quadro final do *Simplex* uma variável não básica tem coeficiente na primeira linha nulo;

Algoritmo do Simplex: múltiplas soluções ótimas

- No quadro final do *Simplex* uma variável não básica tem coeficiente na primeira linha nulo;
- isto significa que pode entrar na base, sem alterar o valor da função objetivo;

Algoritmo do Simplex: múltiplas soluções ótimas

- No quadro final do *Simplex* uma variável não básica tem coeficiente na primeira linha nulo;
- isto significa que pode entrar na base, sem alterar o valor da função objetivo;
- a sba que se obtém, ao introduzir esta variável na base, se diferente da anterior, é uma solução ótima alternativa.

Múltiplas soluções ótimas: exemplo

Utilizando o método do *Simplex*, decida sobre a existência de soluções ótimas múltiplas

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = 40x + 20y \\
\text{sujeito a} \quad & x + y \leq 80 \\
& x \leq 40 \\
& 2x + y \leq 100 \\
& x, y \geq 0
\end{aligned}
$$

Múltiplas soluções ótimas: exemplo

Utilizando o método do *Simplex*, decida sobre a existência de soluções ótimas múltiplas

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = x_1 + x_2 - x_3 \\
\text{sujeito a} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\
& x_1 \leq 2 \\
& x_3 \leq 3 \\
& 3x_2 + x_3 \leq 6 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Algortimo do Simplex: sba inicial

- Determinar uma solução básica admissível inicial ou concluir que a região admissível é vazia, pode não ser imediato.

Algortimo do Simplex: sba inicial

- Determinar uma solução básica admissível inicial ou concluir que a região admissível é vazia, pode não ser imediato.
- Quando a determinação de uma sba, não é imediata, é usual utilizar a técnica das *variáveis artificiais*.

Algortimo do Simplex: sba inicial

- Determinar uma solução básica admissível inicial ou concluir que a região admissível é vazia, pode não ser imediato.
- Quando a determinação de uma sba, não é imediata, é usual utilizar a técnica das *variáveis artificiais*.

Algortimo do Simplex: sba inicial

- Determinar uma solução básica admissível inicial ou concluir que a região admissível é vazia, pode não ser imediato.
- Quando a determinação de uma sba, não é imediata, é usual utilizar a técnica das *variáveis artificiais*.

Exemplo

Vamos determinar uma solução básica admissível do seguinte problema utilizando variáveis artificiais.

$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeito a} & x_1 + 2x_2 = 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 \leq 20 \\ & x_1 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

O problema anterior, com variáveis artificiais, formula-se como

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = 4x_1 + 3x_2 - Ma_1 - Ma_2 \qquad \text{com } M >> 0 \\
\text{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 + a_1 = 10 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 20 \\
& x_1 - x_4 + a_2 = 2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, a_1, a_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

O problema anterior, com variáveis artificiais, formula-se como

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = 4x_1 + 3x_2 - Ma_1 - Ma_2 \qquad \text{com } M >> 0 \\
\text{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 + a_1 = 10 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 20 \\
& x_1 - x_4 + a_2 = 2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, a_1, a_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- O método do *Simplex* (caso a região admissível seja limitada) vai determinar uma sba ótima;

O problema anterior, com variáveis artificiais, formula-se como

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = 4x_1 + 3x_2 - Ma_1 - Ma_2 \qquad \text{com } M >> 0 \\
\text{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 + a_1 = 10 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 20 \\
& x_1 - x_4 + a_2 = 2 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, a_1, a_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- O método do *Simplex* (caso a região admissível seja limitada) vai determinar uma sba ótima;
- caso as variáveis artificiais sejam todas nulas, temos uma sba ótima da formulação *standard*;

O problema anterior, com variáveis artificiais, formula-se como

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 4x_1 + 3x_2 - Ma_1 - Ma_2 \qquad \text{com } M >> 0 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 + 2x_2 + a_1 = 10 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 20 \\ & x_1 - x_4 + a_2 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, a_1, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- O método do *Simplex* (caso a região admissível seja limitada) vai determinar uma sba ótima;
- caso as variáveis artificiais sejam todas nulas, temos uma sba ótima da formulação *standard*;
- se alguma variável artificial for não nula, significa que a região admissível inicial é vazia.

Problema artificial

Procedimento

- Construir o problema artificial;
- Introduzindo variáveis artificiais nas restrições;
- Penalizar na função objetivo as variáveis artificiais (a), juntado:
  - $-Ma$, se o problema for de maximização, $M >> 0$;
  - Ma, se o problema for minimização, $M >> 0$;
- Eliminar os coeficientes não-zero nas colunas das variáveis artificiais, na linha da função objetivo;
- Aplicar o método do Simplex.

Problema da Mochila (knapsack problem)

Definição

Consideremos um conjunto de objetos com peso e valor, determinar os objetos (ou quantidade de cada objeto) a colocar na mochila, de forma a não excedermos a capacidade da mochila e maximizar o valor total dos objetos. A mochila tem capacidade b, o objeto i tem valor c_i e peso a_i.

Problema da Mochila (knapsack problem)

Definição

Consideremos um conjunto de objetos com peso e valor, determinar os objetos (ou quantidade de cada objeto) a colocar na mochila, de forma a não excedermos a capacidade da mochila e maximizar o valor total dos objetos. A mochila tem capacidade b, o objeto i tem valor c_i e peso a_i.

Formulação

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \\
& x \geq 0 \\
& x \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

Problema de Afectação

Na tabela seguinte estão indicados valores que estimam os desempenho de cada um de quatro operadores na execução de tarefas em cada um de quatro equipamentos.
Estabeleça uma afetação dos operadores aos equipamentos que expectavelmente corresponda ao maior valor das somas das estimativas dos desempenhos.

	E1	E2	E3	E4
T1	6	10	4	7
T2	9	8	9	3
T3	7	11	13	8
T4	4	11	9	7

Problema de Afetação

Consideremos um número fixo de agentes e de tarefas. Qualquer agente pode ser afetado a qualquer tarefa, em que há um custo de afetação agente-tarefa. Todas as tarefas terão de ser executadas afetando exatamente um agente para cada tarefa, exatamente uma tarefa para cada agente de forma a minimizar o custo total de afetação.

Variáveis

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se o agente } i \text{ é afeto à tarefa } j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Problema de Afetação

Formulação

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; j \in \{1, \ldots, n\} \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; i \in \{1, \ldots, n\} \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}, \;\; i, j \in \{1, \ldots, n\}
\end{aligned}
$$