CN A – Interpolação e Aproximação Polinomial

Felipe B. Pinto 71951 – EQB

17 de dezembro de 2024

Conteúdo

1 Interpolação

Dado o conjunto Ω, se põe em questão existir um polinómio p com menor grau possível que passa por todos os pontos

$$\boldsymbol{p : p_{(x_i)} = y_i \quad \forall\, i \in [0, n]}$$

$$\boldsymbol{\Omega = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n), \};}$$
$$\boldsymbol{x_i \neq x_j \quad \forall \{i, j\} \in \mathbb{N} : i \neq j}$$

1.1 Grau do polinomio

$$\text{grau de } p \leq n$$

$$p_{n\,(x)} = \sum_{i=0}^{n} a_0\, x^i \implies$$

$$\implies S \equiv \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} a_i\, x_j^i = y_j \\ j \in [0, n] \end{cases}$$

1.2 Matriz de Vandermonde

Representação matricial das equações S

$$\boldsymbol{V\ A = Y : \begin{cases} V \in \mathcal{M}_{n+1\times n+1} : v_{i,j} = x_j^i \\ \{A, Y\} \in \mathcal{R}^n \end{cases}}$$

Prova?

$$|V| = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n} (x_i - x_j) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^{n} (x_j - x_i) \right) \neq 0$$

$$: x_j - x_i \neq 0 \forall \{i, j\} \in \mathbb{N} : i \neq j$$

1.3 Funções de Lagrange

$$L_{k\,(x)} = \left(\prod_{i=0}^{k-1} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}\right)\left(\prod_{i=k+1}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}\right)$$

$$k \in [0, n] :$$

$$\left\{ L_{i\,(x_j)} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} ; \{i, j\} \in [0, n] \right.$$

As funções $L_{k\,(x)}$ são funções base pois tem-se

$$p_{n\,(x)} = \sum_{i=0}^{n} L_{i\,(x)}\, y_i$$

Exemplo 1

Determine a expressão analítica do polinómio de Lagrange de grau $\leq 2, p_{2\,(x)}$, interpolador de f nos nodos $\{0.2, 0.5, 1\}$.

$$\boldsymbol{f_{(x)} = 1/x}$$

Resposta

$$p_{2\,(x)} = \sum_{i=0}^{2} y_i \, L_{i\,(x)} = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \left(\prod_{j=0}^{i-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c} f_{(x_0)} \, \dfrac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \quad + \\ +f_{(x_1)} \, \dfrac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \quad + \\ +f_{(x_2)} \, \dfrac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c} \dfrac{1}{0.2} \, \dfrac{(x - 0.5)(x - 1)}{(0.2 - 0.5)(0.2 - 1)} \quad + \\ +\dfrac{1}{0.5} \, \dfrac{(x - 0.2)(x - 1)}{(0.5 - 0.2)(0.5 - 1)} \quad + \\ +\dfrac{1}{1} \, \dfrac{(x - 0.2)(x - 0.5)}{(1 - 0.2)(1 - 0.5)} \end{array} \right) =$$

$$= 10\,x^2 - 17\,x + 8$$

2 Erro de Interpolação

$$E_{n\,(x)} = g_{(x)} - p_{n\,(x)} = g_{(x)} - \widehat{g_{(x)}}$$

$$g_{(\tilde{x})} - p_{n\,(\tilde{x})} = \frac{\mathrm{d}^{n+1} g_{(\gamma)}}{\mathrm{d}x^{n+1}} \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (\tilde{x} - x_i)$$

$$\begin{cases} \gamma \in \,]a, b[; \\ g \in C^{n+1}([a, b]) \\ \Omega = \{(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)\} \\ \{x_k\}_{k=0,1,\ldots,n} \text{ um conjunto de nodos distintos entre si} \\ y_k = g(x_k), k = 0, 1, \ldots, n \end{cases}$$