PRIMEIRO TESTE (3 de Maio de 2021) DURAÇÃO **2 h**

CÁLCULO NUMÉRICO

Número: ________ Curso: ________ Nome: ______________________________

A primeira parte do teste é constituida por 5 questões de escolha múltipla.
Nas questões 1 a 5 assinale com "x"a resposta correcta.
Cada resposta correcta vale 1.5 valores. Respostas em branco valem 0 valores.
Se responder erradamente ou de forma ambígua ser-lhe-á atribuída uma cotação negativa correspondente a 0.3 valores.
Se a soma das cotações da escolha múltipla for negativa, será atribuído 0 valores à escolha múltipla.

Classificação
EM -
TOTAL-

1. Seja $f(x) = a_0+a_1x+...+a_nx^n$ com $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ e $a_n \neq 0$. Seja $p_{n-1}(x)$ o polinómio interpolador de $f(x)$ nos pontos $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_{n-1}, y_{n-1})\}$ com $y_i = f(x_i), i = 0, ...n-1$, então o erro de interpolação num ponto $x' \in [x_0, x_{n-1}]$ é dado por:

☒ **a)** $f(x') - p_{n-1}(x') = (x' - x_0)(x' - x_1)...(x' - x_{n-1})a_n$

☐ **b)** $f(x') - p_{n-1}(x') = (x' - x_0)(x' - x_1)...(x' - x_{n-1})\frac{a_n}{n!}$

☐ **c)** $f(x') - p_{n-1}(x') = (x' - x_0)(x' - x_1)...(x' - x_{n-1})\frac{a_n}{(n+1)}$

☐ **d)** $f(x') - p_{n-1}(x') = 0$

2. Considere-se a seguinte tabela de pontos:

x_i	0	0.5	0.8	1
y_i	2	-1	4	0

Seja p_3 o polinómio de Lagrange de grau menor ou igual 3 que interpola os pontos tabelados e r a recta tal que $\sum_{i=0}^{4} [y_i - r(x_i)]^2 \neq 0$ é o mínimo possível. Seja ainda S o spline cúbico interpolador dos mesmos pontos. Verifica-se sempre:

☐ **d)** $p_3(0.2) = S(0.2)$

☐ **a)** $p_3(0) = r(0) = S(0) = 2$

☐ **b)** $p_3(0.5) \neq r(0.5)$

☒ **c)** $p_3(0.8) = S(0.8)$

(V.S.F.F)

3. Considere $I = \int_1^2 \frac{1}{\ln(x)} dx$. O valor da aproximação para I utilizando uma regra de integração numérica que tenha um grau de precisão 3 é dado por:

- ☐ **a)** $\dfrac{1}{\ln(\frac{3}{2})}$
- ☐ **b)** $\dfrac{1}{\ln(-\frac{1}{\sqrt{3}})} + \dfrac{1}{\ln(\frac{1}{\sqrt{3}})}$
- ☒ **d)** $\dfrac{1}{2\ln(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}})} + \dfrac{1}{2\ln(\frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}})}$
- ☐ **c)** $\dfrac{1}{2\ln(\frac{5}{2})} + \dfrac{1}{2\ln(\frac{7}{2})}$

4. Seja f uma função para a qual se tem $f'(0) = 5$, $f'(3) = 4$ e a tabela de dados seguinte:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	6	9	2	4

Considere-se ainda a função:

$$S(x) = \begin{cases} -2x^3 + 5x + 6, & 0 \leq x < 1 \\ 4x^3 - 18x^2 + 23x, & 1 \leq x < 2 \\ -2x^3 + 18x^2 - 50x + 50, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

- ☐ **a)** S é spline cúbico completo;
- ☐ **b)** S não é spline mas é interpoladora da função tabelada;
- ☒ **c)** S não é interpoladora da função tabelada;
- ☐ **d)** S é spline cúbico mas não é completo.

5. Seja $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$, $\hat{I}_{PM,2} = 5.85$ uma aproximação de I dada pela regra do ponto médio com $n = 2$ e $\hat{I}_{T,2} = 6.45$ a aproximação de I dada pela regra dos trapézios com $n = 2$. O valor da aproximação para I dada pela regra de Simpson com $n = 2$ é:

- ☐ **a)** $\hat{I}_{S,2} = 6.30$
- ☒ **b)** $\hat{I}_{S,2} = 6.05$
- ☐ **c)** $\hat{I}_{S,2} = 7.46$
- ☐ **d)** $\hat{I}_{S,2} = 4.98$

A segunda parte do teste é constituida por 3 grupos de questões. Cada resposta deverá estar convenientemente justificada.

Cotações: Questão 6: 3.5 valores; **Questão 7:** 4 valores; **Questão 8:** 5 valores.

6. Considere a seguinte tabela com valores observados de uma variável y nos momentos $t_i, i = 0, 1, 2, 3$:

t_i	0	1	2	3
y_i	0.2	0.4	1.5	1.5

a) Considere a recta que melhor se ajusta aos pontos tabelados no sentido dos mínimos quadrados. Determine a ordenada na origem e o declive da recta.

b) Utilizando a recta obtida na alínea anterior obtenha uma estimativa para o valor observado de y no momento $t = 4$.

c) Seja

$$S(t) = \begin{cases} S_0(t), & 0 \leq t < 1 \\ S_1(t), & 1 \leq t < 2 \\ S_2(t), & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

o spline cúbico natural interpolador dos pontos tabelados no intervalo [0,3] tal que $S_0'(1) = \dfrac{1}{3}$ e $S_2'(2) = 0.8$. Determine o valor de $Z = 2S(0) + S_1'(2) + S''(3)S(0.5) + 4S_1'(1)S(2) + S'(3)S''(0)$.

7. Considere o integral $I = \int_{-2}^{2} xe^x dx$.

a) Determine um valor aproximado $\hat{I}$ de I pela regra dos trapézios composta com $h = 1$.

b) Determine um valor aproximado $\hat{I}$ de I pela regra de Simpson composta com $h = 1$. Obtenha um majorante para o erro absoluto associado a essa aproximação. Quantos algarimos significativos pode garantir para $\hat{I}$?

c) Considere o integral $I_\alpha = \int_{\alpha}^{2} xe^x dx$ com $\alpha < 2$. Qual o menor valor que α pode tomar de modo a garantir que toda a aproximação de I_α obtida pela regra de Simpson composta seja uma aproximação por excesso? Justifique adequadamente.

Nos cálculos utilize 6 casas decimais convenientemente arredondadas.

8. Considere a seguinte tabela de divididas para uma função f:

x_i	$f(x_i)$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$
1	-2			
		a		
2	0		$-\frac{1}{2}$	
		1		$-\frac{1}{3}$
3	$f(3)$		c	
		b		
4	$f(4)$			

a) Determine os valores de a, b e c.

b) Determine o polinómio de Newton de grau ≤ 3, $p_3(x)$, interpolador de f nos nodos x_i da tabela.

c) Usando a alinea anterior obtenha os valores de $f(3)$ e $f(4)$.

d) Sabendo que $|f^{(4)}(x)| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ obtenha $\eta > 0$ tal que $|f(1.5) - p_3(1.5)| \leq \eta$.

e) Quantas casas decimais significativas pode garantir para aproximação $p_3(1.5)$ de $f(1.5)$? Além disso diga se a aproximação é por excesso ou por defeito.

1. 1.5

$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$a_n \neq 0$; $p_{n-1}(x)$ interpolador de $f(x)$

$$f(x') - p_{n-1}(x') = (x'-x_0)(x'-x_1)\dots(x'-x_{n-1}) \frac{f^{(n)}(\gamma)}{n!} \quad \gamma \in]x_0, x_{n-1}[$$

$$f^{(n)}(x) = p_n^{(n)}(x) = a_n n!$$

$$f(x) - p_{n-1}(x') = (x'-x_0)(x'-x_1)\dots(x'-x_{n-1}) \frac{a_n \cancel{n!}}{\cancel{n!}}$$

2. 1.5

x	0	0.5	0.8	1
$f(x)$	2	-1	4	0

$p \to$ Lagrange de grau $n \leq 3$ interpolador

r - mínimos quadrados de grau 1

S - Spline cúbico interpolador

d) $p_3(0.2) = S(0.2)$ Falso, pois $p_3(0.2)$ e $S(0.2)$ não são o mesmo polinómio

a) $p_3(0) = r(0) = S(0) = 2$ Falso, pois $r(x)$ não está obrigado a passar por $x = 0$

b) $p_3(0.5) \neq r(0.5)$, Falso, pois pode ocorrer que $r(0.5) = p(0.5)$

c) $p_3(0.8) = S(0.8)$ Verdadeiro pois p_3 e S são interpoladores de f nos pontos da Tabela

3. seja $I = \int_1^2 \frac{1}{\ln(x)} dx$

1.5

$\hat{I} \simeq I$ com grau de precisão $= 3$

$f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ $\qquad f(1) = \frac{1}{\ln(1)} = \frac{1}{0} = \infty$

I é integral impróprio logo as regra com grau de precisão 3 que pode ser utilizada é a regra de Gauss com 2 pontos com mudança de variável

$$I = \int_1^2 \frac{1}{\ln(x)} dx = \frac{2-1}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{2-1}{2} y + \frac{1+2}{2}\right) dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2} y + \frac{3}{2}\right) dy$$

$$I \simeq \hat{I}_G = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} f\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{2\ln\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)} + \frac{1}{2\ln\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)}$$

4.

1.5

x	0	1	2	3
$f(x)$	6	9	2	4

$$S(x) = \begin{cases} -2x^3+5x+6, & 0 \leq x < 1 \\ 4x^3-18x^2+23x, & 1 \leq x < 2 \\ -2x^3+18x^2-50x+50, & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

S é interpoladora de f nos pontos da tabela?

$S(0) = 6 = f(0)$

$S(1) = 9 = f(1)$

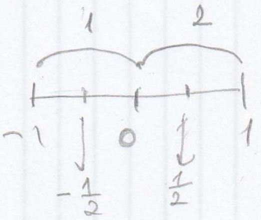
$S(2) = 6 \neq f(2)$ logo S não é interpoladora da função

$S(3) = 8 \neq f(3)$

5. $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$; $\hat{I}_{PM,2} = 5.85$ regra ponto médio com $n=2$

1.5

$\hat{I}_{T,2} = 6.45$ regra trapézios com $n=2$



$$\hat{I}_{PM,2} = \frac{2}{2}\left(f\left(-\tfrac{1}{2}\right) + f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = 5,85$$

$$I_{T,2} = \frac{1}{2}\left(f(-1) + 2f(0) + f(1)\right) = 6.45$$

$$I_S = \frac{\frac{1}{2}}{3}\left(f(-1) + 4\left(f\left(-\tfrac{1}{2}\right) + f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) + 2f(0) + f(1)\right) = 6.05$$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) + f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 5.85$$

$$f(-1) + 2f(0) + f(1) = 6.45 \times 2 = 12.90$$

$$I_S = \frac{1}{6}\left(f(-1) + 2f(0) + f(1) + 4\left(f\left(-\tfrac{1}{2}\right) + f\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(12.90 + 4 \times 5.85\right) = 6.05$$

6.

$$\begin{array}{c|cccc} t_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_i & 0.2 & 0.4 & 1.5 & 1.5 \end{array}$$

$\overbrace{0 \; 1}^{S_0} \; \overbrace{1 \; 2}^{S_1} \; \overbrace{2 \; 3}^{S_2}$

1.5

a) $p_1(t) = a + bt$? no sentido dos mínimos quadrados

Sistema de equações normais

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{3} 1 & \sum_{i=0}^{3} t_i \\ \sum_{i=0}^{3} t_i & \sum_{i=0}^{3} t_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{3} t_i y_i \\ \sum_{i=0}^{3} t_i^2 y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6 \\ 7.9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.15 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

A ordenada na origem é $a = 0.15$

O declive da reta é $b = 0.5$

0.5

b) A estimativa do valor observado no momento $t = 4$ é dada por $y = 0.15 + 0.5 \times 4 = 2.15$

1.5

c) S spline natural interpolador dos pontos (t_i, y_i) e $S'_0(1) = \frac{1}{3}$ e $S'_2(2) = 0.8$

$$Z = 2S(0) + S'_1(2) + S''(3)S(0.5) + 4S'_1(1)S(2) + S'(3)S''(0)$$

$$= 2 \times 0.2 + 0.8 + 0 \times S(0.5) + 4 \times \frac{1}{3} \times 1.5 + S'(3) \times 0$$

$$= 0.4 + 0.8 + 2 = 3.2$$

7. $I = \int_{-2}^{2} x e^{x} dx \qquad f(x) = x e^{x}, \; [a,b] = [-2,2]$

a) Regra dos trapézios com $h = 1 \Rightarrow$ composta

0.8

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$

$\underbrace{\qquad}_{h=1}$

$f(-2) = -2e^{-2}$

$f(-1) = -e^{-1}$

$f(0) = 0$

$f(1) = e$

$f(2) = 2e^{2}$

$1 = h = \frac{b-a}{n} = \frac{4}{n} \iff n = 4$

$$\hat{I}_{T,4} = \frac{h}{2}\left(f(-2) + 2\left(f(-1) + f(0) + f(1)\right) + f(2)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-2e^{-2} + 2(-e^{-1} + 0 + e) + 2e^{2}\right) = -e^{-2} - e^{-1} + e + e^{2} = 9.604123$$

b) Regra Simpson com $h = 1 \Rightarrow$ composta

1.2

$1 = h = \frac{b-a}{2n} = \frac{4}{2n} \iff n = 2$

$$\hat{I}_{S,2} = \frac{h}{3}\left(f(-2) + 4\left(f(-1) + f(1)\right) + 2f(0) + f(2)\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(-2e^{-2} + 4(-e^{-1} + e) + 2e^{2}\right) = 7.969684$$

Majorante erro absoluto

$f^{(4)}(x) = e^{x}(x+4) \Rightarrow |f^{(4)}(x)| \leq f^{4}(2) = 6e^{2}$

função crescente e positiva

$|I - \hat{I}_{S,2}| \leq \left| -2 \times \frac{1^5}{90} \times 6e^{2} \right| = \frac{12}{90} e^{2} = 0.985207.. < 0.985208 < 0.5 \times 1$

$-K = 1$

Nº de algarismos significativos?

$10^{0} < 7.969684 < 10^{1 = m+1}$ logo $\underbrace{m+1}_{=1} - n = -K = 1 \iff n = 0$

não tem algarismos significativos

cont. ex. 7

c) $I_\alpha = \int_\alpha^2 x e^x dx \ , \ \alpha < 2$

(2)

$I_\alpha - \hat{I}_S = -n \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\theta)$ $\qquad h = \frac{2-\alpha}{2n} > 0$

$f^{(4)}(\theta) = (\theta+4)e^\theta \ , \ \theta \in]\alpha, 2[$

$\boxed{\begin{array}{l} I_\alpha - \hat{I}_S > 0 \Rightarrow \text{aproximação por defeito} \\ I_\alpha - \hat{I}_S < 0 \Rightarrow \text{aproximação por excesso} \end{array}}$

$I_\alpha - \hat{I}_S = -n \frac{\left(\frac{2-\alpha}{2n}\right)^5}{90} (\theta+4)e^\theta$ $\quad + \quad >0$

$\alpha < \theta < 2$

$\alpha + 4 < \theta + 4 < 2 + 4 = 6$

se $\alpha > -4 \Rightarrow \theta + 4 > 0 \Rightarrow -n \frac{\left(\frac{2-\alpha}{2n}\right)^5}{90} (\theta+4)e^\theta < 0$ $\quad +$

$\Rightarrow$ a aproximação é por excesso

se $\alpha < -4 \Rightarrow \theta + 4 < 0 \Rightarrow -n \frac{\left(\frac{2-\alpha}{2n}\right)^5}{90} (\theta+4)e^\theta > 0$ $\quad -$

$\Rightarrow$ a aproximação é por defeito

logo $\alpha > -4$, portanto o valor mínimo que α pode tomar é $\underline{\underline{\alpha = -4}}$.

8.

x_i	$f(x_i)$	$f[\,,\,]$	$f[\,,\,,\,]$	$f[\,,\,,\,,\,]$
1	-2			
		a		
			$-\frac{1}{2}$	
2	0			$-\frac{1}{3}$
		1		
3	$f(3)$		c	
		b		
4	$f(4)$			

a) a, b, c ?

1.5

$$-\frac{1}{3} = \left(c+\frac{1}{2}\right) \Big/ (4-1) \Leftrightarrow c+\frac{1}{2} = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow c = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{b-1}{4-2} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow b-1 = -3 \Leftrightarrow b = -2$$

$$\frac{1-a}{3-1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-a = -1 \Leftrightarrow a = 2$$

b) $p_3(x) = -2 + (x-1)\times 2 + (x-1)(x-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right) + (x-1)(x-2)(x-3)\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

0.5

c) $f(3)$ e $f(4)$?

1

$$p_3(3) = -2 + 2(3-1) - \frac{1}{2}(3-1)(3-2) - \frac{1}{3}(3-1)(3-2)(3-3) = -2+4-1 = 1$$

$$\Rightarrow f(3) = 1$$

$$p_3(4) = -2 + 2(4-1) - \frac{1}{2}(4-1)(4-2) - \frac{1}{3}(4-1)(4-2)(4-3)$$

$$= -2+6-3-2 = 6-7 = -1 \Rightarrow f(4) = -1$$

d) $|f^{(4)}(x)| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad ? > 0 : |f(1.5) - p_3(1.5)| < ?$

1.5

cont. ex. 8 d)

$$|f(1.5)-p_3(1.5)| \leq |(1.5-1)(1.5-2)(1.5-3)(1.5-4)| \times \frac{|f^{(4)}(\gamma)|}{4!} \quad n=3$$

$\gamma \in]1,4[$

dado que $|f^{(4)}(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$|f(1.5)-p_3(1.5)| \leq \left|-0.9375 \times \frac{1}{24}\right| = 0.03906\ldots < \underline{0.04} = 0.4 \times 10^{-1} < 0.5 \times 10^{-1}$$

logo $\eta = 0.04$

e) $p_3(1.5)$ Tem 1 e.d.s

0.5

$$f(1.5)-p_3(1.5) = -0.9375 \times \frac{f^{(4)}(\gamma)}{24}, \quad \gamma \in]1,4[$$

Se $f^{(4)}(\gamma) > 0$ então $f(1.5)-p_3(1.5) < 0 \Rightarrow$ aproximação por excesso

se $f^{(4)}(\gamma) < 0$ então $f(1.5)-p_3(1.5) > 0 \Rightarrow$ aproximação por defeito