FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C - REPETIÇÃO 2020/2021
28 DE JANEIRO DE 2021

**VERSÃO 1**

PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES DO GRUPO I ESCOLHA A LETRA CORRESPONDENTE À ÚNICA ALTERNATIVA CORRECTA (de A a F).

GRUPO I

[*1,5 valores*] 1. Sejam $V$ e $F$ o vértice e o foco, respetivamente, da cónica de equação

$$x^2 + 4x - 8y - 4 = 0.$$

Então:

**A**. $V = (2,1)$ e $F = (2,2)$ **B**. $V = (-2,-1)$ e $F = (-2,-3)$ **C**. $V = (2,1)$ e $F = (2,0)$
**D**. $V = (2,1)$ e $F = (2,3)$ **E**. $V = (-2,-1)$ e $F = (-2,-2)$ **F**. $V = (-2,-1)$ e $F = (-2,0)$

[*1,5 valores*] 2. Seja $E$ um espaço vetorial real onde está definido um produto interno notado com o símbolo | e seja $||.||$ a norma induzida por este produto interno. Apenas uma das seguintes expressões é falsa. Indique qual:

**A**. Se $v = \lambda u$ e $\lambda < 0$ então $u|v \leq 0$. **B**. $(u-v)|(v-u) \leq 0, \ \forall u, v \in E$.

**C**. $u|v \leq ||u|| \, ||v||, \ \ \forall u, v \in E$. **D**. $(u+v)|(u+v) \geq u|u + v|v, \ \forall u, v \in E$.

**E**. $(-u)|(-v) = u|v, \ \ \forall u, v \in E$. **F**. $u|u \geq 0 \ \forall u \in E$.

[*1,5 valores*] 3. Considere a função real de duas variáveis reais, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y, & \text{se } \ xy \neq 0 \\ 0, & \text{se } \ xy = 0. \end{cases}$$

**A**. A função $f(x,y)$ é descontínua no ponto $(0,0)$.

**B**. A função $f(x,y)$ é contínua e diferenciável no ponto $(0,0)$.

**C**. A função $f(x,y)$ não tem limite no ponto $(0,0)$ mas possui nesse ponto derivadas parciais.

**D**. A função $f(x,y)$ tem limite no ponto $(0,0)$ mas não possui derivadas parciais nesse ponto.

**E**. A função $f(x,y)$ tem derivada direcional no ponto $(0,0)$ segundo qualquer vetor mas não é diferenciável em $(0,0)$.

**F**. A função $f(x,y)$ tem derivada direcional no ponto $(0,0)$ segundo qualquer vetor e é diferenciável em $(0,0)$.

[*1,5 valores*] 4. Seja $w = f(u)$ com $f$ uma função continuamente derivável até à segunda ordem e $u = \sin x + \cos y$. Então:

**A**. $\cos x \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sin y \dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = -f''(u)\cos x \cos y$

**B**. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = -f''(u)\sin y \sin x$

**C**. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -f'(u)\cos y - f''(u)\sin y$

**D**. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = -f''(u)\sin y$

**E**. $\cos x \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sin y \dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = -f'(u)\cos x \cos y$

**F**. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -f'(u)\cos y + f'(u)\sin^2 y$

1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C - REPETIÇÃO 2020/2021
28 DE JANEIRO DE 2021

**VERSÃO 1**

GRUPO II

[*2,5 valores*] 1. Considere a função real $f$ de duas variáveis reais, definida por

$$f(x,y) = \frac{\log(4 - x^2 - y^2)}{\sqrt{xy}}.$$

Indique o seu domínio $D$ e esboce-o. Indique a fronteira de $D$. Diga, justificando, se $D$ é um conjunto aberto. O conjunto $D$ é conexo? Justifique.

2. Considere a função real de duas variáveis reais, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3 \left( \dfrac{x-y}{x^2+y^2} \right) & se (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[*2,5 valores*] a) Dado $\delta > 0$ indique $\epsilon > 0$ tal que se $||(x,y)|| < \epsilon$ então $|f(x,y)| < \delta$. Diga, justificando, qual o valor do limite de $f(x,y)$ no ponto $(0,0)$.

[*2,5 valores*] b) Mostre que $f(x,y)$ é diferenciável no ponto $(0,0)$.

[*3 valores*] 3. Considere o sistema

$$\begin{cases} u + v - xy = 0 \\ uv - x + y = 0 \end{cases}$$

Mostre que este sistema define implicitamente $u$ e $v$ como funções de $x$ e $y$ numa vizinhança do ponto $P_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0) = (3,1,1,2)$, e determine ainda o valor de $\dfrac{\partial u}{\partial y}(3,1)$ e $\dfrac{\partial v}{\partial y}(3,1)$.

GRUPO III

[*2 valores*] 1. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y) = (y\cos x, y \sin x) = (u,v).$$

Mostre que a função $f$ é invertível na vizinhança de qualquer ponto $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, com $y_0 \neq 0$. Tendo em conta que $f\left(\dfrac{\pi}{6}, 1\right) = (\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2})$, determine $J_{f^{-1}}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2})$.

[*1,5 valores*] 2. Considere em $\mathbb{R}^2$ as normas $||(x,y)||_1$ e $||(x,y)||_2$ definidas por

$$||(x,y)||_1 = Max\{|x|,|y|\} \text{ e } ||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Mostre que existem constantes reais positivas $c_1, c_2$ tais que:

$$c_1||(x,y)||_2 \leq ||(x,y)||_1 \leq c_2||(x,y)||_2, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

o que prova que as duas normas consideradas são equivalentes.