

# **Cálculo Numérico A**

## **Capítulo 3 – Integração Numérica**

**Fórmulas de integração numérica de Newton-Cotes  
simples e compostas**

**Método de integração de Gauss**

# Fórmulas de Newton-Cotes simples

## Introdução

Muitas vezes torna-se necessário calcular um valor aproximado de um integral  $I = \int_a^b g(x)dx$ , pois é difícil ou impossível, conhecer, à priori, a expressão analítica de  $g$ .

Estas situações ocorrem quando, por exemplo, são apenas conhecidos alguns valores da função (função tabelada) ou quando a sua primitiva é difícil de determinar.

Neste capítulo iremos utilizar a interpolação polinomial para deduzir as fórmulas de integração pretendidas.

## Objetivo

Sejam  $I(g) = \int_a^b g(x)dx$  e  $\widehat{I(g)} = \int_a^b p_n(x)dx \approx I(g)$  , onde  $p_n(x)$  é o polinómio interpolador de  $g$  em  $n + 1$  nodos distintos e igualmente espaçados  $\{x_k\}_{k=0,1,\dots,n}$  , ou seja tal que

$x_{k+1} - x_k = h_k = h$  (constante) ,  $k = 0,1,\dots,n - 1$  , com

$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq b$  .

Estas fórmulas são designadas por **fórmulas de Newton-Cotes**.

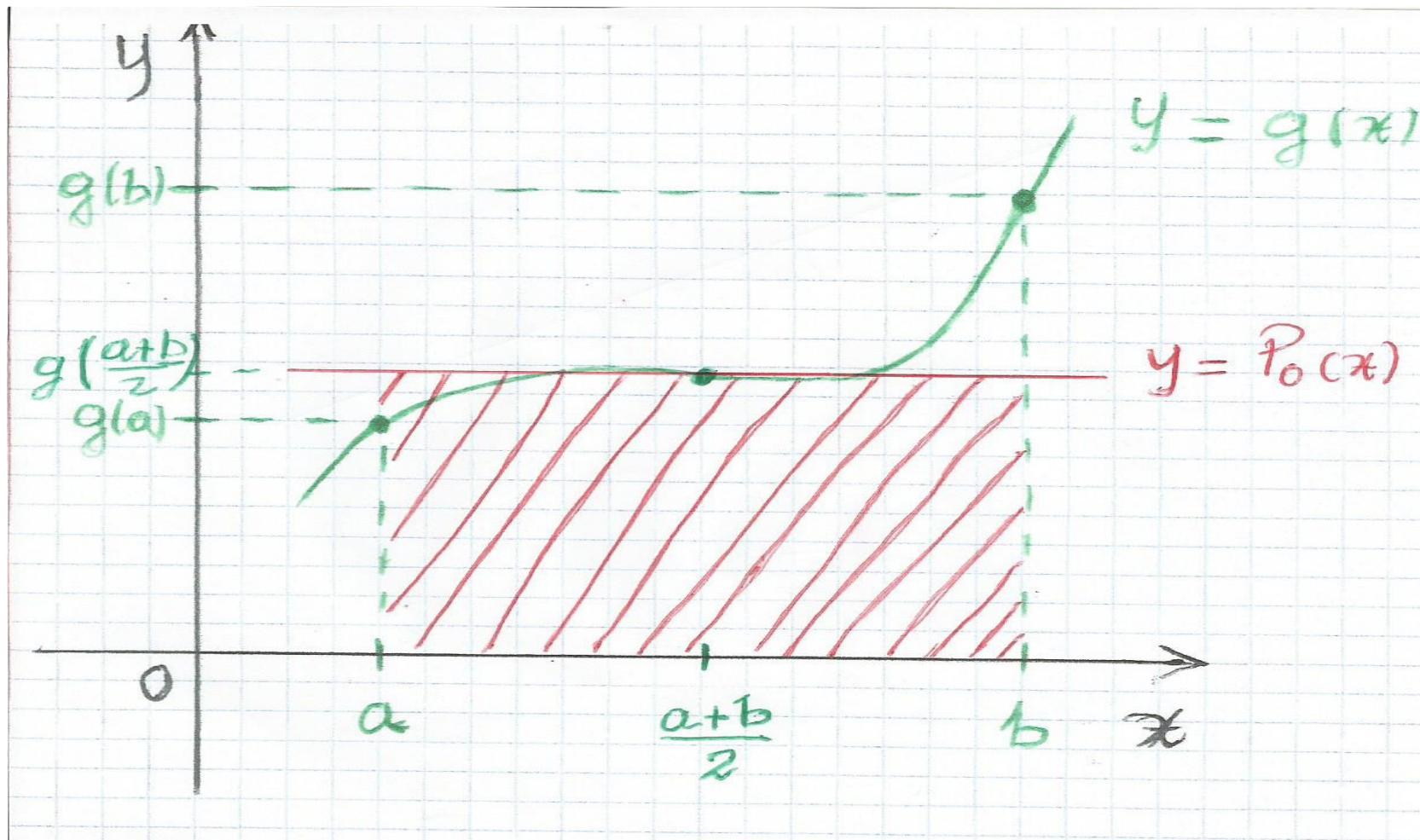
Em particular, se  $g \in C^{n+1}([a, b])$ , então o **erro de integração numérica** cometido é

$$E_I = I(g) - \widehat{I(g)} = \int_a^b (g(x) - \widehat{g(x)}) dx = \int_a^b \underbrace{(g(x) - p_n(x))}_{E(x)} dx,$$

onde  $E(x)$  é o erro de interpolação já anteriormente estudado.

## Regra do ponto médio

Neste caso considera-se  $\widehat{g(x)} = g\left(\frac{a+b}{2}\right)$  e interpola-se a função integranda por um polinómio de grau 0 :



Por conseguinte

- $I(g) = \int_a^b g(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} g(x)dx \approx (x_1 - x_0)g\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) = (b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right) = \widehat{I(g)}.$

Assumindo que  $g \in C^2([a, b])$  e utilizando a fórmula de Taylor tem-se

$$g(x) = \underbrace{g\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{constante} + \left(x - \frac{a+b}{2}\right) \underbrace{g'\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{constante} + \frac{1}{2!} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 g''(\theta_x),$$

onde  $\theta_x \in \left] \min\left(x, \frac{a+b}{2}\right), \max\left(x, \frac{a+b}{2}\right) \right[$ .

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \bullet \quad E_I &= I(g) - \widehat{I(g)} = \int_a^b g(x)dx - (b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right) = \\ &= \int_a^b g(x)dx - \int_a^b g\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = \int_a^b \left(g(x) - g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)dx = \\ &= \int_a^b \left( \left(x - \frac{a+b}{2}\right)g'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 g''(\theta_x) \right)dx = \end{aligned}$$

$$= g'\left(\frac{a+b}{2}\right) \underbrace{\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) dx}_{=0} + \frac{1}{2} \int_a^b \underbrace{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}_{\geq 0} g''(\theta_x) dx = \quad (*)$$

$$= \frac{g''(\gamma)}{2} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \left(\frac{g''(\gamma)}{2}\right) \frac{(b-a)^3}{12} =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{24} g''(\gamma), \text{ com } \gamma \in ]a, b[.$$

#### \* Teorema do valor médio para integrais

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções de classe  $C([a, b])$ .

Supondo que  $f$  não muda de sinal em  $[a, b]$ , tem-se  $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(\beta) \int_a^b f(x)dx$ ,  $\beta \in ]a, b[$ .

Resumindo, temos

## Regra do ponto médio (simples)

- Fórmula de quadratura

Seja  $I(g) = \int_a^b g(x)dx$ .

Então, utilizando a regra do ponto médio simples tem-se

$$\widehat{I(g)} = hg\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \text{com} \quad h = b - a .$$

- Erro de quadratura

Sendo  $g \in C^2([a, b])$ , tem-se

$$E_I = I(g) - \widehat{I(g)} = \frac{h^3}{24}g''(\gamma) , \quad \text{com} \quad \gamma \in ]a, b[.$$

## Exemplo 1

Seja  $I = \int_1^2 \frac{1}{x+2} dx$ .

Determine um valor aproximado de  $I$ ,  $\hat{I}$ , utilizando a regra do ponto médio simples.

Determine ainda um majorante do erro absoluto cometido na aproximação calculada.

## Resolução

- Nodos e função integranda

Tem-se  $x_0 = a = 1$ ,  $x_1 = b = 2$ ,  $g(x) = \frac{1}{x+2}$  e  $h = 2 - 1 = 1$ .

- Cálculo do valor aproximado de  $I$  (fórmula de quadratura)

Assim sendo,

$$\hat{I} = (2 - 1)g\left(\frac{1+2}{2}\right) = g(1.5) = \frac{2}{7} = 0.285714 \dots .$$

- Cálculo do majorante do módulo de erro absoluto cometido em  $\hat{I}$  (Erro de quadratura)

Tem-se

$$|I - \hat{I}| \leq \frac{h^3}{24} M_2 , \text{ com } M_2 = \max |g''(x)| , x \in [1,2] .$$

Ora  $|g''(x)| = \left| \frac{2}{(x+2)^3} \right| = \frac{2}{(x+2)^3} \leq \frac{2}{(1+2)^3} = \frac{2}{27} = M_2$  ,  $\forall x \in [1,2]$ .

Sendo assim tem-se  $|I - \hat{I}| \leq \left(\frac{1^3}{24}\right) \left(\frac{2}{27}\right) = \frac{1}{324} = 0.00308 \dots <$

$< 0.31 \times 10^{-2} \leq 0.5 \times 10^{-2}$  , pelo que estão garantidas, pelo menos, duas casas decimais significativas para o valor

$$\hat{I} = 0.285714\dots .$$

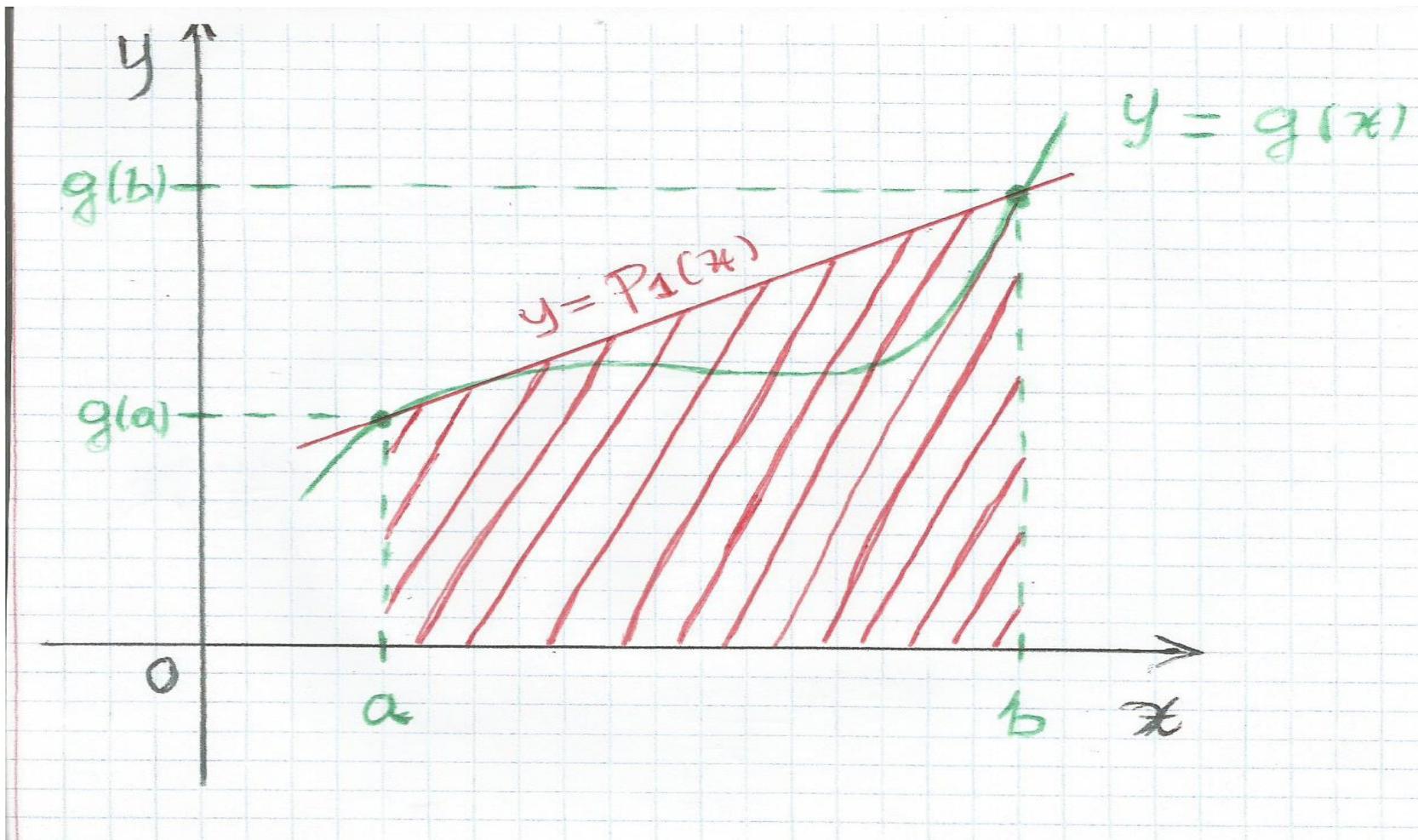
- Observação

Repare-se que  $I = [\ln|x+2|]_1^2 = \ln\left(\frac{4}{3}\right) = 0.287682 \dots$  e

$$|I - \hat{I}| = 0.00196 \dots < 0.31 \times 10^{-2} .$$

## Regra dos trapézios

Neste caso utiliza-se como função integranda o polinómio de grau  $\leq 1$ , interpolador de  $g(x)$  nos pontos  $(x_0, g(x_0))$  e  $(x_1, g(x_1))$ , ou seja  $(a, g(a))$  e  $(b, g(b))$ :



Assim sendo,

$$\begin{aligned}\bullet \quad I(g) &= \int_{x_0=a}^{x_1=b} g(x) dx \approx \\ &\approx \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} g(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} g(x_1) \right) dx = \\ &= \frac{x_1 - x_0}{2} (g(x_0) + g(x_1)) = \frac{b-a}{2} (g(a) + g(b)) = \widehat{I(g)}.\end{aligned}$$

Assumindo novamente que  $g \in C^2([a, b])$ , tem-se

$$I(g) - \widehat{I(g)} = \int_{x_0=a}^{x_1=b} (g(x) - \widehat{g(x)}) dx = \int_a^b E(x) dx =$$

$$= \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2!} g''(\theta_x) dx = \int_a^b \underbrace{(x-a)(x-b)}_{\leq 0} \frac{g''(\theta_x)}{2} dx = \quad (**)$$

$$= \frac{g''(\gamma)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b) dx = \left( \frac{g''(\gamma)}{2} \right) \left( -\frac{(b-a)^3}{6} \right) =$$

$$= -\frac{(b-a)^3}{12} g''(\gamma), \text{ com } \gamma \in ]a, b[.$$

\*\* Utilizando novamente o teorema do valor médio para integrais.

Resumindo, temos

## Regra dos trapézios (simples)

- Fórmula de quadratura

Seja  $I(g) = \int_a^b g(x)dx$ .

Então, utilizando a regra dos trapézios simples tem-se

$$\widehat{I(g)} = \frac{h}{2} (g(a) + g(b)) \quad \text{com} \quad h = b - a .$$

- Erro de quadratura

Sendo  $g \in C^2([a, b])$ , tem-se

$$E_I = I(g) - \widehat{I(g)} = -\frac{h^3}{12} g''(\gamma) , \quad \text{com} \quad \gamma \in ]a, b[.$$

## Exemplo 2

Seja  $I = \int_1^2 \frac{1}{x+2} dx$ .

Determine um valor aproximado de  $I$ ,  $\hat{I}$ , utilizando a regra dos trapézios simples.

Determine ainda um majorante do erro absoluto cometido na aproximação calculada.

## Resolução

- Nodos e função integranda

Tem-se  $x_0 = a = 1$ ,  $x_1 = b = 2$ ,  $g(x) = \frac{1}{x+2}$  e  $h = 2 - 1 = 1$ .

- Cálculo do valor aproximado de  $I$  (fórmula de quadratura)

Assim sendo,

$$\hat{I} = \frac{2-1}{2} (g(1) + g(2)) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{7}{24} = 0.291666 \dots$$

- Cálculo do majorante do módulo de erro absoluto cometido em  $\hat{I}$  (Erro de quadratura)

Assim sendo,

$$|I - \hat{I}| \leq \frac{h^3}{12} M_2 , \text{ com } M_2 = \max |g''(x)| , x \in [1,2] .$$

Como já se viu no exemplo 1,  $M_2 = \frac{2}{27}$  , pelo que

$$|I - \hat{I}| \leq \left(\frac{1^3}{12}\right) \left(\frac{2}{27}\right) = \frac{1}{162} = 0.00617 \dots <$$

$< 0.62 \times 10^{-2} \leq 0.5 \times 10^{-1}$  , pelo que está garantida, pelo menos, uma casa decimal significativa para o valor  $\hat{I} = 0.291666\dots$  .

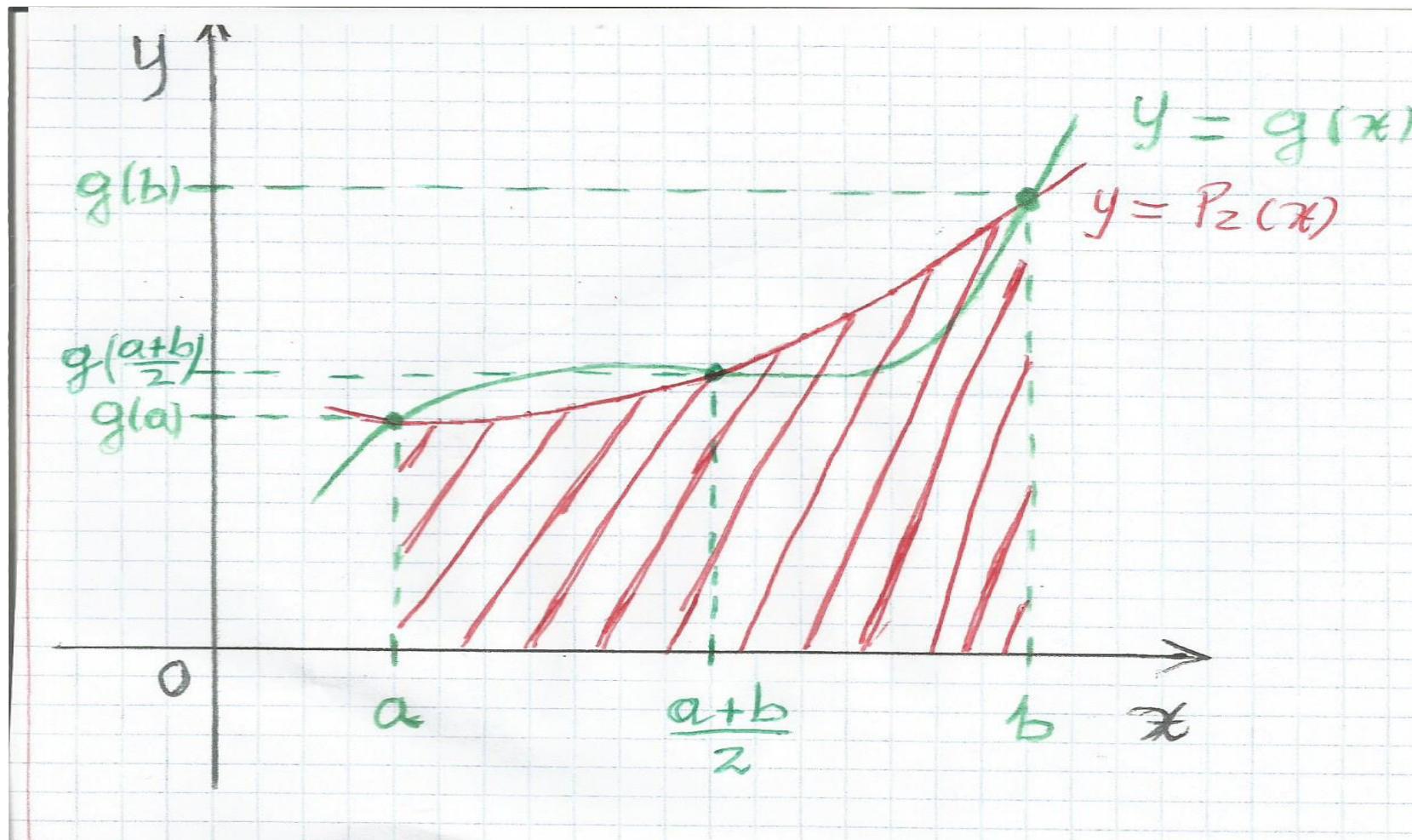
- Observação

Como  $I = [\ln|x+2|]_1^2 = \ln\left(\frac{4}{3}\right) = 0.287682\dots$  tem-se

$$|I - \hat{I}| = 0.00398 \dots < 0.62 \times 10^{-2}.$$

## Regra de Simpson

Neste caso utiliza-se como função integranda o polinómio de grau  $\leq 2$ , interpolador de  $g(x)$  nos pontos  $(x_0, g(x_0))$ ,  $(x_1, g(x_1))$  e  $(x_2, g(x_2))$ , ou seja  $(a, g(a))$ ,  $\left(\frac{a+b}{2}, g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$  e  $(b, g(b))$ :



Assim sendo,

- $I(g) = \int_{x_0=a}^{x_2=b} g(x)dx \approx$

$$\begin{aligned} & \approx \int_{x_0}^{x_2} \left( \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} g(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} g(x_1) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} g(x_2) \right) dx = \\ & = I_0 g(x_0) + I_1 g(x_1) + I_2 g(x_2), \text{ onde} \end{aligned}$$

- $I_0 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx = \frac{h}{3};$

- $I_1 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} dx = \frac{4h}{3}$  ;

- $I_2 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} dx = \frac{h}{3}$  ,

com  $h = \frac{x_2-x_0}{2} = \frac{b-a}{2}$  ,  $x_0 = a$  ,  $x_1 = a + h$  e  $x_2 = a + 2h = b$ .

Finalmente tem-se

$$\widehat{I(g)} = \frac{h}{3} (g(x_0) + 4g(x_1) + g(x_2)).$$

Assumindo agora que  $g \in C^4([a, b])$  , tem-se

$$I(g) - \widehat{I(g)} = \int_{x_0=a}^{x_2=b} (g(x) - \widehat{g(x)}) dx = \int_a^b E(x) dx =$$

$$= \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!} g^{(3)}(\theta_x) dx = \text{ (***)}$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{2880} g^{(4)}(\gamma) = -\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^5}{90} g^{(4)}(\gamma) = -\frac{h^5}{90} g^{(4)}(\gamma), \text{ com } \gamma \in ]a, b[.$$

\*\*\* Prova-se esta igualdade, apesar de não se poder utilizar o teorema do valor médio para integrais, uma vez que o polinómio  $(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$  não tem sinal constante em  $[a, b]$ .

Resumindo, temos

## Regra de Simpson (simples)

- Fórmula de quadratura

Seja  $I(g) = \int_a^b g(x)dx$ .

Então, utilizando a regra de Simpson simples tem-se

$$\widehat{I(g)} = \frac{h}{3} \left( g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right) \quad \text{com} \quad h = \frac{b-a}{2}.$$

- Erro de quadratura

Sendo  $g \in C^4([a, b])$ , tem-se

$$E_I = I(g) - \widehat{I(g)} = -\frac{h^5}{90} g^{(4)}(\gamma), \quad \text{com} \quad \gamma \in ]a, b[.$$

## Exemplo 3

Seja  $I = \int_1^2 \frac{1}{x+2} dx$ .

Determine um valor aproximado de  $I$ ,  $\hat{I}$ , utilizando a regra de Simpson simples.

Determine ainda um majorante do erro absoluto cometido na aproximação calculada.

## Resolução

- Nodos e função integranda

Tem-se  $x_0 = a = 1$ ,  $x_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ ,  $x_2 = b = 2$  e  $g(x) = \frac{1}{x+2}$ .

- Cálculo do valor aproximado de  $I$  (fórmula de quadratura)

Assim sendo,  $h = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$  e

$$\hat{I} = \frac{h}{3} \left( g(1) + 4g\left(\frac{3}{2}\right) + g(2) \right) = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{3} + 4 \left( \frac{2}{7} \right) + \frac{1}{4} \right) = \frac{145}{504} =$$

$$= 0.287698 \dots .$$

- Cálculo do majorante do módulo de erro absoluto cometido em  $\hat{I}$   
(Erro de quadratura)

Assim sendo,

$$|I - \hat{I}| \leq \frac{h^5}{90} M_4 , \text{ com } M_4 = \max |g^{(4)}(x)| , x \in [1,2] .$$

Ora  $|g^{(4)}(x)| = \left| \frac{24}{(x+2)^5} \right| = \frac{24}{(x+2)^5} \leq \frac{24}{(1+2)^5} = \frac{8}{81} , \forall x \in [1,2].$

Sendo assim tem-se  $|I - \hat{I}| \leq \left( \frac{0.5^5}{90} \right) \left( \frac{8}{81} \right) = \frac{1}{29160} =$

$$= 0.0000342 \dots \leq 0.35 \times 10^{-4} \leq 0.5 \times 10^{-4} , \text{ pelo que}$$

estão garantidas, pelo menos, quatro casas decimais significativas para o valor  $\hat{I} = 0.\textcolor{blue}{2876}98\dots$ .

- Observação

Como  $I = [\ln|x + 2|]_1^2 = \ln\left(\frac{4}{3}\right) = 0.287682\dots$  tem-se

$$|I - \hat{I}| = 0.000016\dots < 0.35 \times 10^{-4}.$$

## Algumas regras de Newton\_Cotes

No quadro que se segue estão ilustradas algumas das principais regras de Newton-Cotes.

O grau do polinómio interpolador da função  $g$  nos nodos considerados está representado por  $n$  e  $g_i = g(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots$ .

<b><i>n</i></b>	<b><i>Fórmula de Newton-Cotes</i></b>		<b><i>Erro</i></b>
0	$\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx \approx hg\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) ; h = x_1 - x_0$	(Regra do ponto médio)	$\frac{h^3}{24}g''(\mu) ; \mu \in ]x_0, x_1[$
1	$\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx \approx \frac{h}{2}(g_0 + g_1) ; h = x_1 - x_0$	(Regra dos trapézios)	$-\frac{h^3}{12}g''(\mu) ; \mu \in ]x_0, x_1[$
2	$\int_{x_0}^{x_2} g(x)dx \approx \frac{h}{3}(g_0 + 4g_1 + g_2) ; h = \frac{x_2 - x_0}{2}$	(Regra de Simpson)	$-\frac{h^5}{90}g^{(4)}(\mu) ; \mu \in ]x_0, x_2[$
3	$\int_{x_0}^{x_3} g(x)dx \approx \frac{3h}{8}(g_0 + 3g_1 + 3g_2 + g_3) ; h = \frac{x_3 - x_0}{3}$	(Regra dos 3/8)	$-\frac{3h^5}{80}g^{(4)}(\mu) ; \mu \in ]x_0, x_3[$
4	$\int_{x_0}^{x_4} g(x)dx \approx \frac{2h}{45}(7g_0 + 32g_1 + 12g_2 + 32g_3 + 7g_4) ; h = \frac{x_4 - x_0}{4}$	(Regra de Boole)	$-\frac{8h^7}{945}g^{(6)}(\mu) ; \mu \in ]x_0, x_4[$
5	$\int_{x_0}^{x_5} g(x)dx \approx \frac{5h}{288}(19g_0 + 75g_1 + 50g_2 + 50g_3 + 75g_4 + 19g_5) ; h = \frac{x_5 - x_0}{5}$		$-\frac{275h^7}{12096}g^{(6)}(\mu) ; \mu \in ]x_0, x_5[$
6	$\int_{x_0}^{x_6} g(x)dx \approx \frac{h}{140}(41g_0 + 216g_1 + 27g_2 + 272g_3 + 27g_4 + 216g_5 + 41g_6) ; h = \frac{x_6 - x_0}{6}$	(Regra de Weddle)	$-\frac{9h^9}{1400}g^{(8)}(\mu) ; \mu \in ]x_0, x_6[$

## Definição

### Grau de precisão de uma fórmula de integração

Uma fórmula de integração diz-se ter **grau de precisão  $n$**  ( $n \in \mathbb{N}$ ) quando é exata para todos os polinómios básicos do tipo  $x^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Assim

- O grau de precisão das regras do ponto médio e dos trapézios é 1;
- O grau de precisão da regra de Simpson é 3.

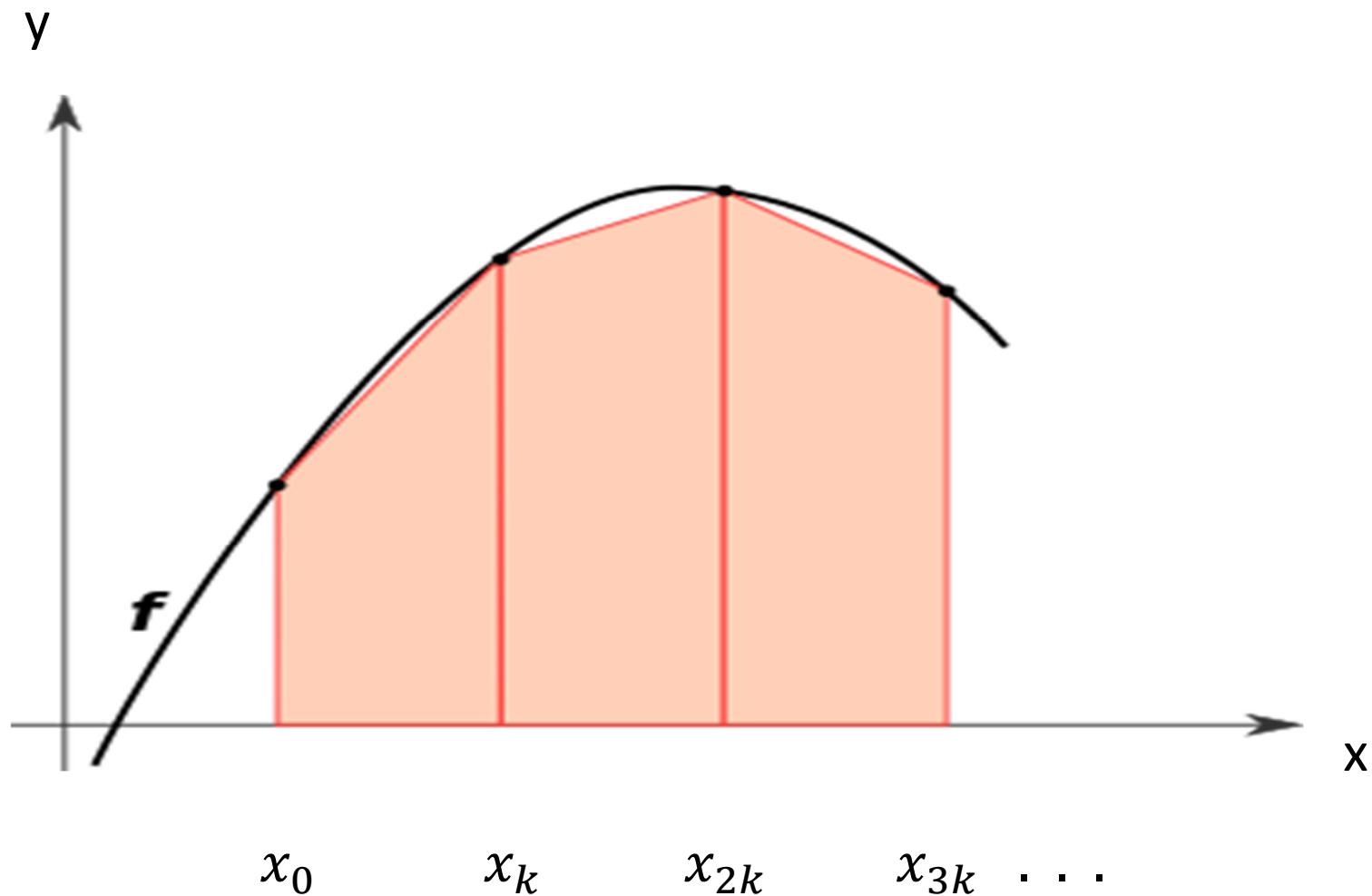
# Fórmulas de Newton-Cotes compostas

## Introdução

O raciocínio utilizado para as regras simples, no cálculo de um valor aproximado de um integral  $I = \int_a^b f(x)dx$ , pode estender-se ao intervalo  $[a, b]$  (com  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ ) se este for dividido em vários intervalos, de igual amplitude, do tipo

$$[x_0, x_k], [x_k, x_{2k}], [x_{2k}, x_{3k}], \dots, [x_{n-k}, x_n],$$

ou seja uma regra de integração designa-se por **composta** quando consiste na aplicação, numa partição do intervalo  $[a, b]$ , de várias vezes a correspondente regra de integração simples.



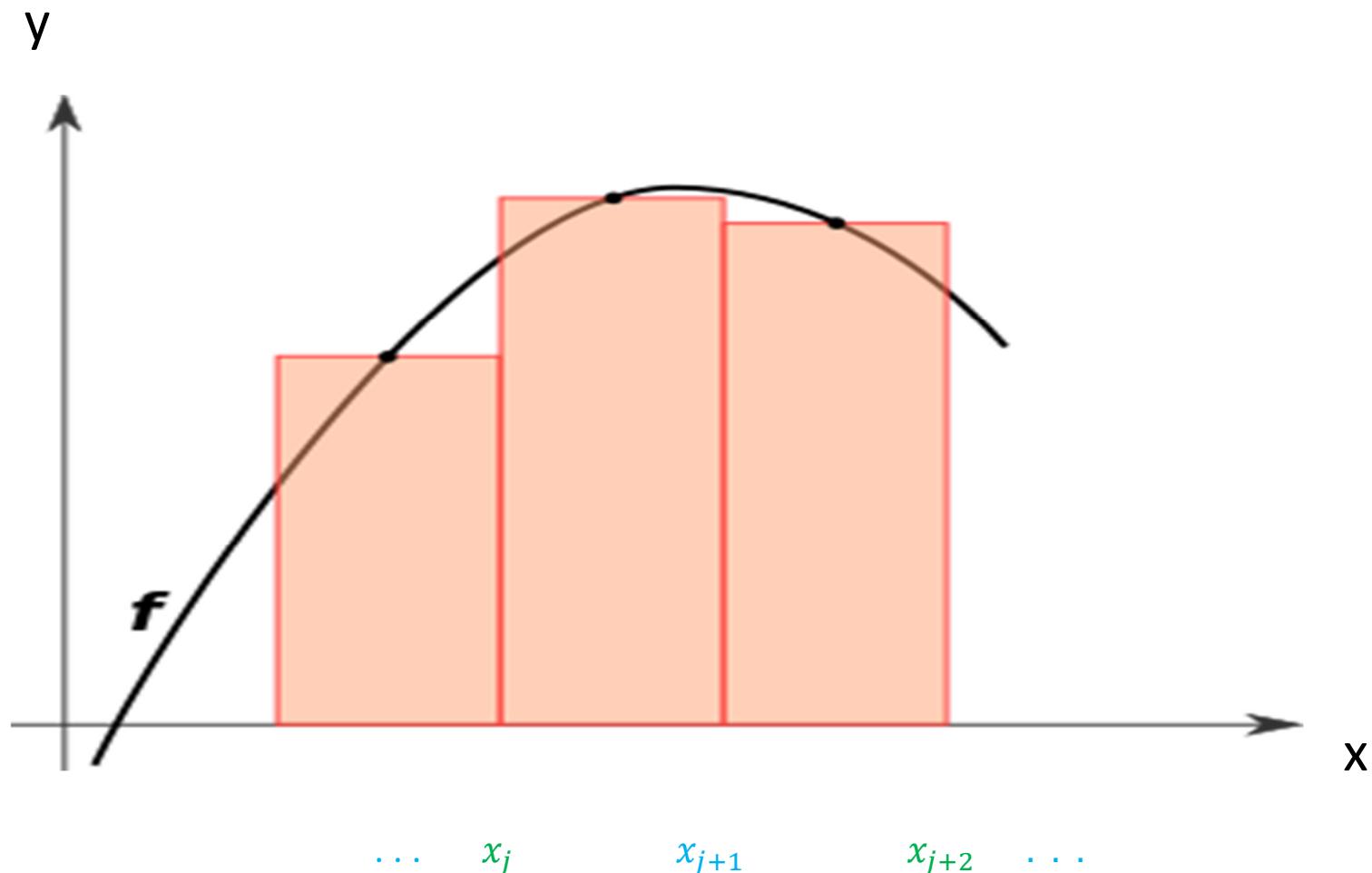
Nesse caso o integral inicial pode escrever-se na forma

$$I(f) = \int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_k} f(x)dx + \int_{x_k}^{x_{2k}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-k}}^{x_n} f(x)dx .$$

## Regra do ponto médio composta

Neste caso, em cada um dos intervalos  $[x_j, x_{j+1}]$  anteriormente considerados, toma-se  $\widehat{f(x)} = f\left(\frac{x_j+x_{j+1}}{2}\right)$ , aproximando-se desta forma a função integranda por um polinómio de grau 0 :

$$y = f\left(\frac{x_j+x_{j+1}}{2}\right).$$



Tem-se então

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx hf\left(\frac{x_j+x_{j+1}}{2}\right) , \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{e}$$

$$h = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n} .$$

Sendo assim

- $I(f) = \sum_{j=0}^n \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx hf\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + hf\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \dots + hf\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) =$

$$\begin{aligned}
&= h \left( f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) \right) = \\
&= h \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) = \widehat{I(f)} , \quad h = \frac{b-a}{n}.
\end{aligned}$$

Por outro lado o erro de quadratura é a soma dos erros de quadratura cometidos em cada um dos intervalos  $[x_j, x_{j+1}]$  (ver regra do ponto médio simples), ou seja

- $E_I = I(f) - \widehat{I(f)} = \frac{h^3}{24} \left( f''(\gamma_0) + f''(\gamma_1) + \cdots + f''(\gamma_{n-1}) \right) =$

$$= \frac{h^3}{24} \sum_{j=0}^{n-1} f''(\gamma_j) , \quad \gamma_j \in ]x_j, x_{j+1}[ .$$

Se a função  $f(x)$  for contínua em  $[a, b]$ , então, aplicando o *Teorema de Weierstrass*<sup>(\*)</sup>, tem-se

$$n \underbrace{\min f''(x)}_{m} \leq \sum_{j=0}^{n-1} f''(\gamma_j) \leq n \underbrace{\max f''(x)}_{M}, \quad x \in [a, b],$$

donde  $m \leq \frac{\sum_{j=0}^{n-1} f''(\gamma_j)}{n} \leq M$ .

---

\* **Teorema de Weierstrass**

Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$ .

Então, existem duas constantes  $k_1$  e  $k_2 \in [a, b]$  tais que  $f(k_1) \leq f(x) \leq f(k_2)$ .  $\forall x \in [a, b]$ .

Aplicando o *Teorema do valor intermédio* <sup>(\*\*)</sup> a  $f''$ , tem-se

$$\exists \theta \in ]a, b[ : f''(\theta) = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} f''(\gamma_j)}{n}.$$

Conclui-se, desta forma, que o erro de quadratura associado à regra do ponto médio composta é

●  $I(f) - \widehat{I(f)} = n \frac{h^3}{24} f''(\theta)$  , com  $\theta \in ]a, b[$  e  $h = \frac{b-a}{n}$ .

---

<sup>\*\*</sup> *Teorema do valor intermédio*

Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e  $k$  uma constante tal que

$k \in [\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))]$ . Então  $\exists c \in ]a, b[ : f(c) = k$ .

Resumindo, tem-se

## Regra do ponto médio (composta)

- Fórmula de quadratura

Seja  $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ .

Então, utilizando a regra do ponto médio composta, tem-se

$$\widehat{I(f)} = h \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{x_j+x_{j+1}}{2}\right) \quad \text{com} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

- Erro de quadratura

Sendo  $f \in C^2([a, b])$ , tem-se

$$E_I = I(f) - \widehat{I(f)} = n \frac{h^3}{24} f''(\theta), \quad \text{com } \theta \in ]a, b[.$$

## Exemplo 1

Seja  $I = \int_1^2 \frac{1}{x+2} dx$ .

Determine um valor aproximado de  $I$ ,  $\hat{I}$ , utilizando a regra do ponto médio composta, com  $h = 0.25$ .

Determine ainda um majorante do erro absoluto cometido na aproximação calculada.

## Resolução

- Nodos e função integranda

Tem-se  $x_0 = a = 1$ ,  $x_1 = 1.25$ ,  $x_2 = 1.5$ ,  $x_3 = 1.75$ ,

$$x_4 = b = 2 , \quad f(x) = \frac{1}{x+2} \quad \text{e} \quad h = 0.25.$$

- Cálculo do valor aproximado de  $I$  (fórmula de quadratura)

Assim sendo,

$$\begin{aligned}\hat{I} &= 0.25 \left( f\left(\frac{1+1.25}{2}\right) + f\left(\frac{1.25+1.5}{2}\right) + f\left(\frac{1.5+1.75}{2}\right) + f\left(\frac{1.75+2}{2}\right) \right) = \\ &= 0.25(f(1.125) + f(1.375) + f(1.625) + f(1.875)) \approx \\ &\approx 0.287556.\end{aligned}$$

- Cálculo do majorante do módulo do erro absoluto cometido em  $\hat{I}$   
(Erro de quadratura)

Tem-se

$$|I - \hat{I}| \leq n \frac{h^3}{24} M_2 , \text{ com } M_2 = \max |g''(x)| , x \in [1,2] \text{ e} \\ n = 4 \text{ (nº de aplicações da regra).}$$

$$\text{Ora } |g''(x)| = \left| \frac{2}{(x+2)^3} \right| = \frac{2}{(x+2)^3} \leq \frac{2}{(1+2)^3} = \frac{2}{27} = M_2 , \forall x \in [1,2].$$

$$\text{Sendo assim tem-se } |I - \hat{I}| \leq 4 \left( \frac{0.25^3}{24} \right) \left( \frac{2}{27} \right) = \frac{1}{5184} = 0.00019 \dots <$$

$< 0.20 \times 10^{-3} \leq 0.5 \times 10^{-3}$  , pelo que estão garantidas, pelo menos, três casas decimais significativas para o valor

$$\hat{I} = 0.\textcolor{blue}{287}555\dots .$$

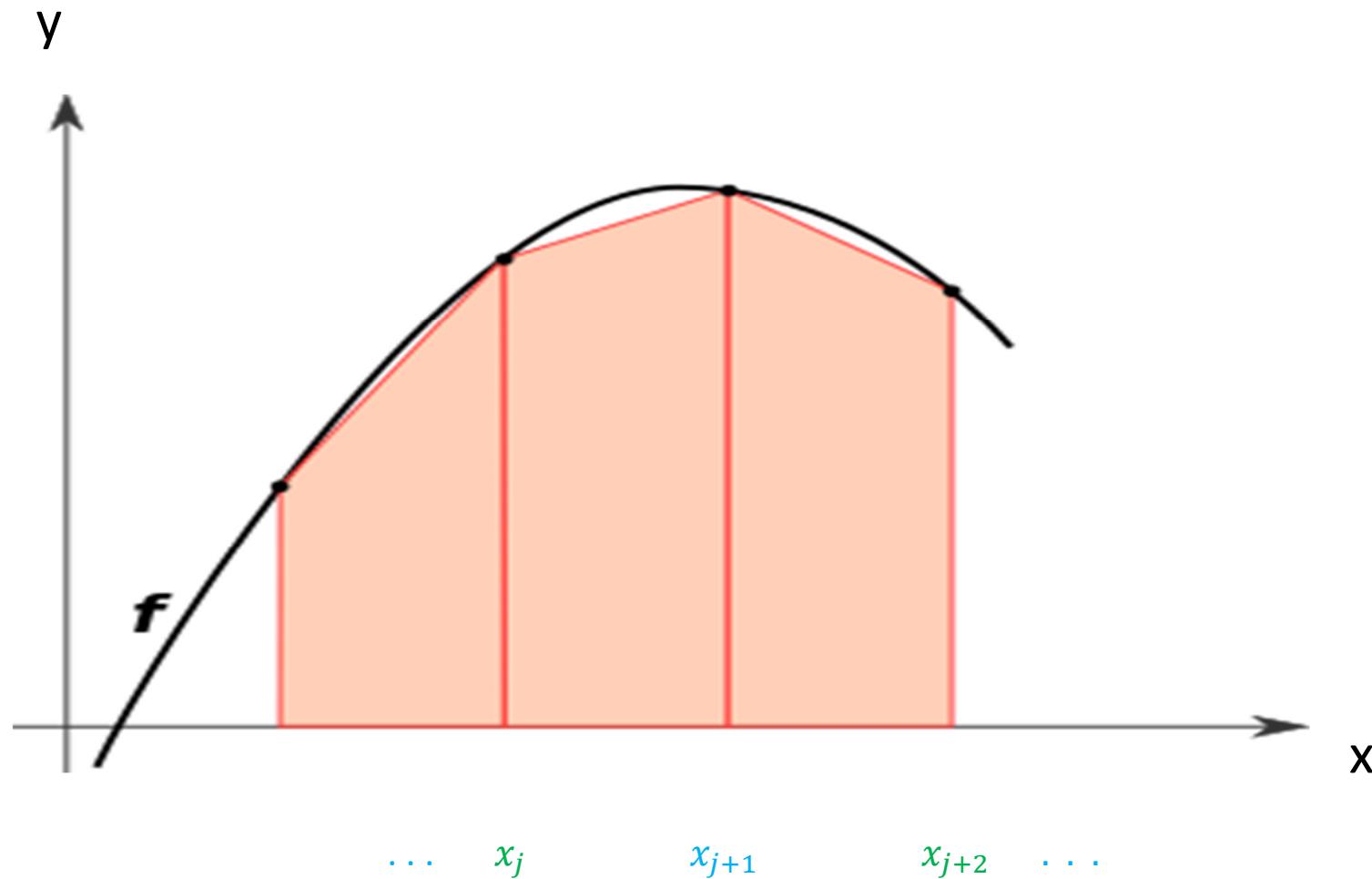
- Observação

Repare-se que  $I = [\ln|x + 2|]_1^2 = \ln\left(\frac{4}{3}\right) = 0.287682\dots$  e

$$|I - \hat{I}| = 0.000126\dots < 0.13 \times 10^{-3} \leq 0.20 \times 10^{-3}.$$

## Regra dos trapézios composta

Neste caso utiliza-se como função integranda o polinómio de grau  $\leq 1$ , interpolador de  $f(x)$  nos pontos  $(x_j, f(x_j))$  e  $(x_{j+1}, f(x_{j+1}))$ :



Sendo assim

- $I(f) \approx \frac{h}{2} (f(x_0) + 2[f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] + f(x_n)) =$   
 $= \frac{h}{2} (f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)) = \widehat{I(f)}, \quad h = \frac{b-a}{n}.$

Utilizando um raciocínio idêntico ao que foi feito para o erro de quadratura associado à regra do ponto médio composta, facilmente se deduz que o erro de quadratura associado à regra dos trapézios composta é

- $I(f) - \widehat{I(f)} = -n \frac{h^3}{12} f''(\mu), \text{ com } \mu \in ]a, b[ \text{ e } h = \frac{b-a}{n}.$

Resumindo, tem-se

## Regra dos trapézios (composta)

- Fórmula de quadratura

Seja  $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ .

Então, utilizando a regra dos trapézios composta, tem-se

$$\widehat{I(f)} = \frac{h}{2} \left( f(x_0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n) \right) \quad \text{com} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

- Erro de quadratura

Sendo  $f \in C^2([a, b])$ , tem-se

$$E_I = I(f) - \widehat{I(f)} = -n \frac{h^3}{12} f''(\mu), \quad \text{com} \quad \mu \in ]a, b[.$$

## Exemplo 2

Seja  $I = \int_1^2 \frac{1}{x+2} dx.$

Determine um valor aproximado de  $I$ ,  $\hat{I}$ , utilizando a regra dos trapézios compostos, com  $h = 0.25$ .

Determine ainda um majorante do erro absoluto cometido na aproximação calculada.

## Resolução

- Nodos e função integranda

Tem-se  $x_0 = a = 1$ ,  $x_1 = 1.25$ ,  $x_2 = 1.5$ ,  $x_3 = 1.75$ ,

$$x_4 = b = 2 , \quad f(x) = \frac{1}{x+2} \quad \text{e} \quad h = 0.25.$$

- Cálculo do valor aproximado de  $I$  (fórmula de quadratura)

Assim sendo,

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \frac{0.25}{2} (f(1) + 2[f(1.25) + f(1.5) + f(1.75)] + f(2)) \approx \\ &\approx 0.287935 .\end{aligned}$$

- Cálculo do majorante do módulo do erro absoluto cometido em  $\hat{I}$   
(Erro de quadratura)

Tem-se

$$|I - \hat{I}| \leq n \frac{h^3}{12} M_2 , \text{ com } M_2 = \max |g''(x)| , x \in [1,2] \text{ e} \\ n = 4 \text{ (nº de aplicações da regra).}$$

Tendo em conta os resultados obtidos no exemplo 1, tem-se

$$|I - \hat{I}| \leq 4 \left( \frac{0.25^3}{12} \right) \left( \frac{2}{27} \right) = \frac{1}{2592} = 0.00038 \dots < \\ < 0.39 \times 10^{-3} \leq 0.5 \times 10^{-3} , \text{ pelo que estão garantidas, pelo}$$

menos, três casas decimais significativas para o valor

$$\hat{I} = 0.\textcolor{blue}{287}935\dots .$$

- Observação

Repare-se que  $I = [\ln|x + 2|]_1^2 = \ln\left(\frac{4}{3}\right) = 0.287682\dots$  e

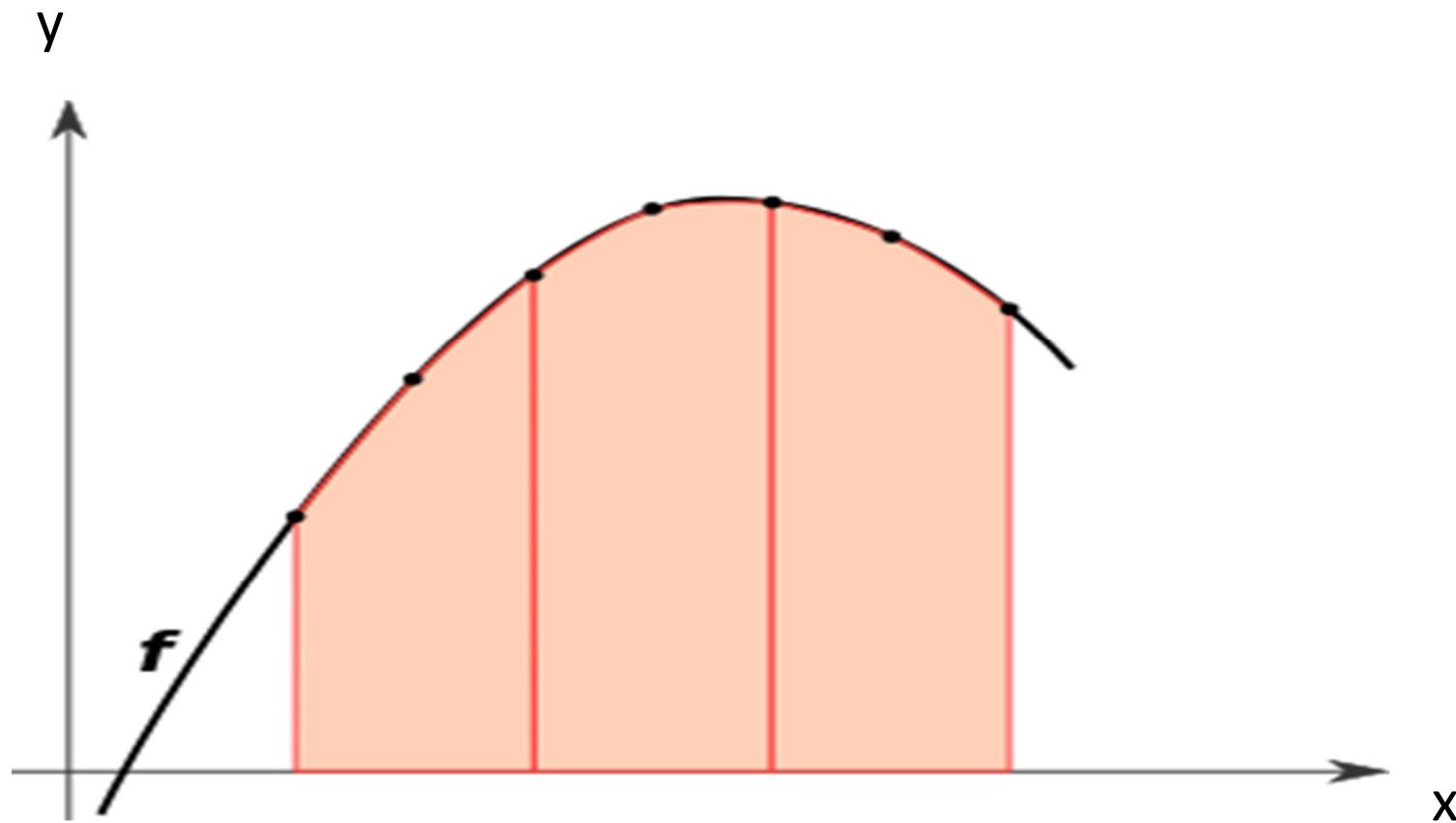
$$|I - \hat{I}| = 0.000252\dots < 0.39 \times 10^{-3}.$$

## Regra de Simpson composta

Neste caso utiliza-se como função integranda o polinómio de grau  $\leq 2$ , interpolador de  $f(x)$  nos pontos  $(x_{2j}, f(x_{2j}))$ ,  $(x_{2j+1}, f(x_{2j+1}))$  e  $(x_{2j+2}, f(x_{2j+2}))$ .

- **Observação**

O número de subintervalos utilizados em cada aplicação da regra de Simpson simples é sempre **par**.



$$\dots \quad x_{2j} \quad x_{2j+1} \quad x_{2j+2} \quad x_{2j+3} \quad x_{2j+4} \quad x_{2j+5} \quad x_{2j+6} \quad \dots$$

Sendo assim

- $I(f) \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots$

$$\dots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})) =$$

$$= \frac{h}{3} \left( f(x_0) + 4 \sum_{j=1}^n f(x_{2j-1}) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + f(x_{2n}) \right) = \widehat{I(f)}, \quad h = \frac{b-a}{2n}.$$

Utilizando novamente um raciocínio idêntico ao que foi feito para o erro de quadratura associado à regra do ponto médio composta,

chegar-se-ia à conclusão que o erro de quadratura associado à regra de Simpson composta é

- $I(f) - \widehat{I(f)} = -n \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\sigma)$  , com  $\sigma \in ]a, b[$  e  $h = \frac{b-a}{2n}$ .

Resumindo, tem-se

## Regra de Simpson (composta)

- Fórmula de quadratura

Seja  $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ .

Então, utilizando a regra de Simpson composta, tem-se

$$\widehat{I(f)} = \frac{h}{3} \left( f(x_0) + 4 \sum_{j=1}^n f(x_{2j-1}) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + f(x_{2n}) \right) , \text{ com } h = \frac{b-a}{2n} .$$

- Erro de quadratura

Sendo  $f \in C^4([a, b])$ , tem-se  $E_I = I(f) - \widehat{I(f)} = -n \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\sigma)$ , com  $\sigma \in ]a, b[$ .

## Exemplo 3

Seja  $I = \int_1^2 \frac{1}{x+2} dx.$

Determine um valor aproximado de  $I$ ,  $\hat{I}$ , utilizando a regra de Simpson composta, com  $h = 0.25$ .

Determine ainda um majorante do erro absoluto cometido na aproximação calculada.

## Resolução

- Nodos e função integranda

Tem-se  $x_0 = a = 1$ ,  $x_1 = 1.25$ ,  $x_2 = 1.5$ ,  $x_3 = 1.75$ ,

$$x_4 = b = 2 , \quad f(x) = \frac{1}{x+2} \quad \text{e} \quad h = 0.25.$$

- Cálculo do valor aproximado de  $I$  (fórmula de quadratura)

Assim sendo,

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \frac{0.25}{3} (f(1) + 4[f(1.25) + f(1.75)] + 2f(1.5) + f(2)) \approx \\ &\approx 0.287683 .\end{aligned}$$

- Cálculo do majorante do módulo do erro absoluto cometido em  $\hat{I}$   
(Erro de quadratura)

Tem-se

$|I - \hat{I}| \leq n \frac{h^5}{90} M_4$  , com  $M_4 = \max |g^{(4)}(x)|$  ,  $x \in [1,2]$  e  
 $n = 2$  (nº de aplicações da regra).

Ora  $|g^{(4)}(x)| = \left| \frac{24}{(x+2)^5} \right| = \frac{24}{(x+2)^5} \leq \frac{24}{(1+2)^5} = \frac{8}{81} = M_4$  ,  $\forall x \in [1,2]$ .

Sendo assim tem-se

$$|I - \hat{I}| \leq 2 \left( \frac{0.25^5}{90} \right) \left( \frac{8}{81} \right) = \frac{1}{466560} = 0.000002 \dots <$$

$< 0.3 \times 10^{-5} \leq 0.5 \times 10^{-5}$ , pelo que estão garantidas, pelo menos, cinco casas decimais significativas para o valor

$$\hat{I} = 0.\textcolor{blue}{28768}3\dots .$$

- Observação

Repare-se que  $I = [\ln|x + 2|]_1^2 = \ln\left(\frac{4}{3}\right) = 0.287682\dots$  e

$$|I - \hat{I}| = 0.000001\dots < 0.3 \times 10^{-5}.$$

# Método de integração de Gauss

## Introdução

Até agora, os métodos de integração estudados, consistem na substituição de uma função inicial  $f(x)$  por um polinómio interpolador  $p_n(x)$  e consequente cálculo do integral

$$\widehat{I(f)} = \int_a^b p_n(x)dx \text{ como valor aproximado do integral}$$

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Desta forma, ao escolher, *à priori*, uma determinada regra de integração, o que se determinava era uma combinação linear dos valores da função  $f(x)$  do tipo

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx c_0f(x_0) + \dots + c_jf(x_j), \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

onde os parâmetros  $x_j \in [a, b]$  e os valores  $f(x_j)$ ,  $j \in \mathbb{N}_0$ , eram conhecidos.

No método de integração de Gauss, o que se pretende é escolher uma combinação linear do tipo

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_i f(x_i), \quad n \in \mathbb{N},$$

tal que a regra de integração resultante seja **exata para polinómios de grau o mais elevado possível**, isto é, para polinómios de grau menor ou igual a  **$2n - 1$** .

Repare-se que, neste caso, há

- $n$  nodos  $x_i$  a determinar
- $n$  constantes (*pesos*)  $c_i$  a determinar ,

o que perfaz um total de  **$2n$**  incógnitas a determinar.

## Regra de Gauss com 2 pontos (simples)

Nesta regra o objetivo é determinar a seguinte fórmula de integração

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2), \text{ onde } x_1, x_2 \text{ são}$$

2 pontos (nodos) distintos e  $c_1$  e  $c_2$  são 2 coeficientes a determinar.

Há assim 4 incógnitas, pelo que se pretende que a regra seja exata para polinómios de grau  $\leq 3$ , ou seja, que seja exata para os polinómios básicos  $p_0(x) = 1$ ,  $p_1(x) = x$ ,  $p_2(x) = x^2$  e  $p_3(x) = x^3$ .

Assim sendo, é necessário resolver o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \widehat{I(1)} = I(1) \\ \widehat{I(x)} = I(x) \\ \widehat{I(x^2)} = I(x^2) \\ \widehat{I(x^3)} = I(x^3) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1(1) + c_2(1) = \int_{-1}^1 1 dx \\ c_1(x_1) + c_2(x_2) = \int_{-1}^1 x dx \\ c_1(x_1^2) + c_2(x_2^2) = \int_{-1}^1 x^2 dx \\ c_1(x_1^3) + c_2(x_2^3) = \int_{-1}^1 x^3 dx \end{array} \right. \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \\ c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \frac{2}{3} \\ c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right. .
 \end{aligned}$$

Resumindo, tem-se

### **Regra de Gauss simples com 2 pontos ( $n=2$ )**

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

## Exemplo 4

Seja  $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{x+2} dx$ .

Determine um valor aproximado de  $I$ ,  $\hat{I}$ , utilizando a regra de Gauss com 2 pontos.

## Resolução

Seja  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ .

$$\text{Então } I \approx \hat{I} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}+2} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}+2} \approx 1.090909.$$

**Nota:**  $I = \ln(3) \approx 1.098612$ .

O mesmo raciocínio podia ser utilizado na dedução das **Regras de Gauss simples com 1, 3 e 4 pontos**

Nº de pontos ( $n$ )	Pontos (nodos)	Pesos
1	0	2
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18 + \sqrt{30}}{36}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18 - \sqrt{30}}{36}$

No caso em que se pretende determinar um valor aproximado,  $\hat{I}$ , de um integral genérico

$$I = I(f) = \int_a^b f(x)dx \quad (a \neq b),$$

pode utilizar-se uma mudança de variável, obtendo, desta forma, o seguinte resultado

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(y)dy , \text{ com}$$

$g(y) = f\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}\right)$ , e aplicar então a Regra de Gauss com 2 ou mais pontos.

## Erro associado à Regra de Gauss simples com $n$ pontos

Demonstra-se que, se  $f \in C^{(2n)}([-1,1])$ , o erro associado à **Regra de Gauss com  $n$  pontos** é dado pela seguinte expressão

$$I(f) - I(\widehat{f}) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\theta) , \quad \theta \in [-1,1] .$$

## Regra de Gauss composta com $m$ pontos

É possível aplicar várias vezes a regra de Gauss simples, utilizando um raciocínio semelhante ao utilizado nas regras de Newton-Cotes compostas.

Considere-se uma partição  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  do intervalo  $[a, b]$  tal que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  , com  $x_j = a + jh$  ,  
 $j = 0, 1, \dots, n$  e  $h = \frac{b-a}{n}$  .

Sendo assim tem-se

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x) dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) \\ &= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{-1}^1 \underbrace{f\left(\frac{h}{2}y + \frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)}_{g(y)} dy \approx \\ &\approx \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^m \underbrace{c_k f\left(\frac{h}{2}y_k + \frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)}_{g(y_k)}. \end{aligned}$$

Resumindo, tem-se

## Regra de Gauss composta com $m$ pontos

$$I(f) \approx \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^m c_k f \left( \underbrace{\frac{h}{2} y_k + \frac{x_j + x_{j+1}}{2}}_{g(y_k)} \right), \text{ onde } h = \frac{b-a}{n} \text{ e } c_k \text{ e } y_k \text{ são}$$

os coeficientes (pesos) e nodos associados à Regra de Gauss com  $m$  pontos

- Observação

Esta regra de integração tem grau de precisão  $2m - 1$ .