Cálculo Numérico A

Capítulo 4 – Resolução de Equações Não Lineares

Introdução

Ordem de convergência de uma sucessão

Método da bissecção

Método do ponto fixo

Método de Newton

Método da secante

Introdução

Muitas vezes é necessário resolver equações não lineares do tipo $f(x) = 0$ cuja solução não pode ser obtida de uma forma imediata (caso da fórmula resolvente quando se tem uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$).

Definição

Raíz de uma equação

Designa-se por **raíz real de uma equação** $f(x) = 0$ em $[a, b]$ (ou zero de uma função $f(x)$) em $[a, b]$) todo o número real $\propto \in]a, b[$ tal que $f(\propto) = 0$.

Objetivo

Neste capítulo irão ser tratados vários métodos numéricos para a resolução de equações não lineares.

Estes métodos, designados por **métodos iterativos** , baseiam-se na construção de uma sucessão de valores (iteradas) $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, partindo de uma iterada (aproximação inicial) x_0.

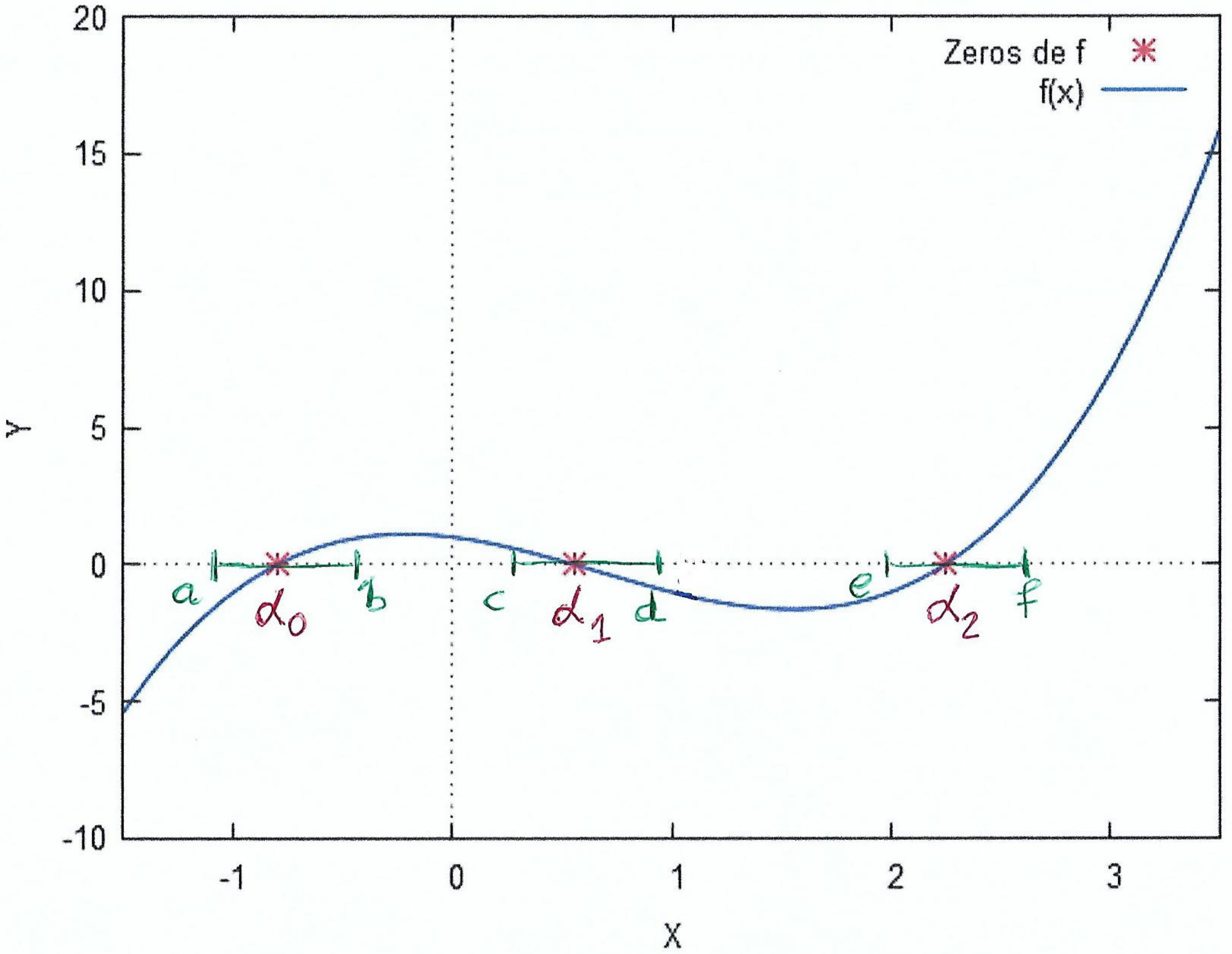
O objectivo é que esta sucessão seja convergente para $\propto$, ou seja que se verifique $\lim_{k\to+\infty} x_k = \propto$.

Para que a aplicação de um método iterativo (para a obtenção de um valor aproximado $\hat{\propto}$ de $\propto$) seja bem sucedida é necessário determinar um intervalo $[a, b]$ onde

- $\propto \in [a, b]$;

- não esteja presente qualquer outra raiz da equação $f(x) = 0$.

Se a equação $f(x) = 0$ admitir várias raízes reais $\propto_0$, $\propto_1$, $\propto_2$, … , é necessário identificar intervalos $[a, b]$, $[c, d]$, $[e, f]$, … , disjuntos 2 a 2, tais que qualquer um desses intervalos **contenha uma e uma só raiz**, ou seja, é necessário **separar as raízes da equação**.


Zeros de f
f(x)
20
15
10
5
0
-5
-10
Y
-1
0
1
2
3
X
a
b
c
d
e
f
α_0
α_1
α_2

Ordem de convergência de uma sucessão

Definição

Seja $\{u_k\}_{k=0,1,\ldots}$ uma sucessão que converge para $\propto$ $(u_k \neq \propto\,,\, k = 0,1,\ldots)$.

Diz-se que u_k converge para $\propto$ com **ordem de convergência** $\boldsymbol{p > 0}$

e **coeficiente assimptótico** $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$ se

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|\propto - u_{k+1}|}{|\propto - u_k|^p} = \lambda\,.$$

● Sejam $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ e $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ duas sucessões convergentes para $\propto$, com ordens de convergência $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$, respectivamente.

Então

→ Se $\boldsymbol{m} > \boldsymbol{n}$, a sucessão $\{u_k\}$ converge **mais rapidamente** do que a sucessão $\{v_k\}$;

→ Se $\boldsymbol{p} = \mathbf{1}$ (e $\lambda < 1$) a convergência diz-se **linear** ;

→ Se $\boldsymbol{p} > \mathbf{1}$ a convergência diz-se **supralinear** ;

→ Em particular, se $\boldsymbol{p} = \mathbf{2}$ a convergência diz-se **quadrática** .

Exemplo

Sejam $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ e $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ duas sucessões cujos termos gerais são

$$u_k = (0.6)^{2k} \quad \text{e} \quad v_k = (0.6)^{2^k-3} \;, \quad k = 0,1,\dots\,.$$

Determinar a ordem de convergência e o coeficiente assimptótico para cada uma das sucessões anteriores.

Resolução

Tem-se $\lim_{k\to+\infty} u_k = \lim_{k\to+\infty} v_k = 0 \ \ (\propto = 0)$.

- **Sucessão** $\{u_k\}_{k=0,1,\ldots}$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|\alpha - u_{k+1}|}{|\alpha - u_k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|0 - u_{k+1}|}{|0 - u_k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(0.6)^{2k+2}}{(0.6)^{2k}} =$$

$$= (0.6)^2 = 0.36\ .$$

→ A sucessão $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ converge linearmente $(p=1)$ para 0 $(\propto = \ 0)$ com coeficiente assimptótico $\lambda = 0.36$.

- **Sucessão $\{v_k\}_{k=0,1,\ldots}$**

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{|\alpha-v_{k+1}|}{|\alpha-v_k|^2}=\lim_{k\to+\infty}\frac{|0-v_{k+1}|}{|0-v_k|^2}=\lim_{k\to+\infty}\frac{|v_{k+1}|}{|v_k|^2}=\lim_{k\to+\infty}\frac{(0.6)^{2^{k+1}-3}}{\left((0.6)^{2^k-3}\right)^2}=$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\frac{(0.6)^{2^{k+1}-3}}{(0.6)^{2(2^k-3)}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{(0.6)^{2^{k+1}-3}}{(0.6)^{2^{k+1}-6}}=(0.6)^3=0.216\,.$$

→ A sucessão $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ converge quadraticamente $(p=2)$

para 0 $(\propto = 0)$ com coeficiente assimptótico $\lambda=0.216$.

k	Convergência linear		Convergência quadrática	
	$\lvert\propto - u_k\rvert$	$\dfrac{\lvert\propto - u_{k+1}\rvert}{\lvert\propto - u_k\rvert}$	$\lvert\propto - v_k\rvert$	$\dfrac{\lvert\propto - v_{k+1}\rvert}{\lvert\propto - v_k\rvert^2}$
0	1	0.36	2.777778	0.216
1	0.36	0.36	1.666667	0.216
2	0.1296	0.36	0.6	0.216
3	0.046656	0.36	0.0776	0.216
4	0.167962×10^{-1}	0.36	0.130607×10^{-2}	0.216
5	0.604662×10^{-2}	0.36	0.368457×10^{-6}	0.216
6	0.217678×10^{-2}	$\vdots$	0.293242×10^{-13}	$\vdots$

Um outro resultado importante é o seguinte

Teorema

Seja $x_k = \varphi(x_{k-1})$ uma sucessão convergente para $\propto$, com $x_k \neq \propto$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$.

Suponha-se que a função φ é de classe C^p numa vizinhança de $\propto$ e que

$$\varphi'(\propto) = \varphi''(\propto) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(\propto) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi^{(p)}(\propto) \neq 0.$$

Então a ordem de convergência da sucessão $\{x_k\}$ é p e o coeficiente assimptótico é $\lambda = \dfrac{|\varphi^{(p)}(\propto)|}{p!}$.

Método da bissecção

Este método tem como suporte um dos corolários do Teorema do valor Intermédio de Bolzano (*).

Considere-se uma função f real de variável real, tal que

→ f é contínua em $I = [a, b]$, intervalo que contém um **único zero** , $\propto$, de f ;

→ $f(a) \times f(b) < 0$.

---

* **Corolário do Teorema do valor intermédio de Bolzano**

Seja f uma função real de variável real, contínua em $[a, b]$.

Se $f(a)f(b) < 0$, então existe pelo menos um zero de f em $]a, b[$.

Pretende-se construir

→ Uma sucessão de intervalos fechados do tipo $I_k = [a_k, b_k]$ tais que

- $I_k \subseteq I$;
- $\propto \in I_k$, $n \in \mathbb{N}_0$.

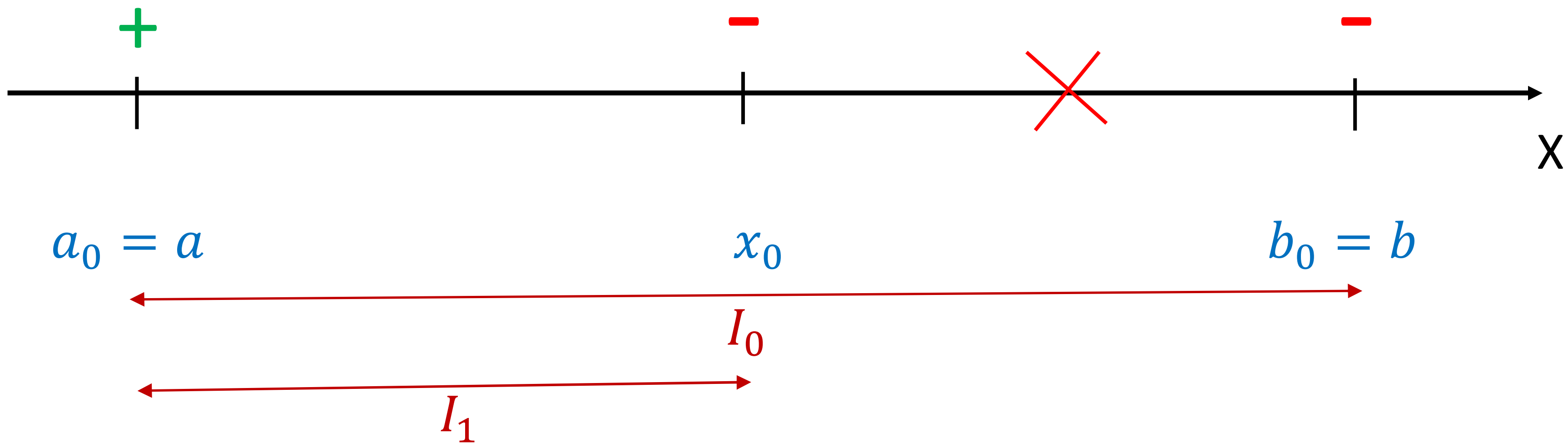
→ Uma sucessão de números reais (iteradas) $x_k \in I_k$ que se pretende ser convergente para $\propto$.

Seja $I_0 = I$, ou seja $a_0 = a$ e $b_0 = b$.

Suponha-se, por exemplo, que $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$.

- A iterada inicial (aproximação inicial de $\propto$) é dada por

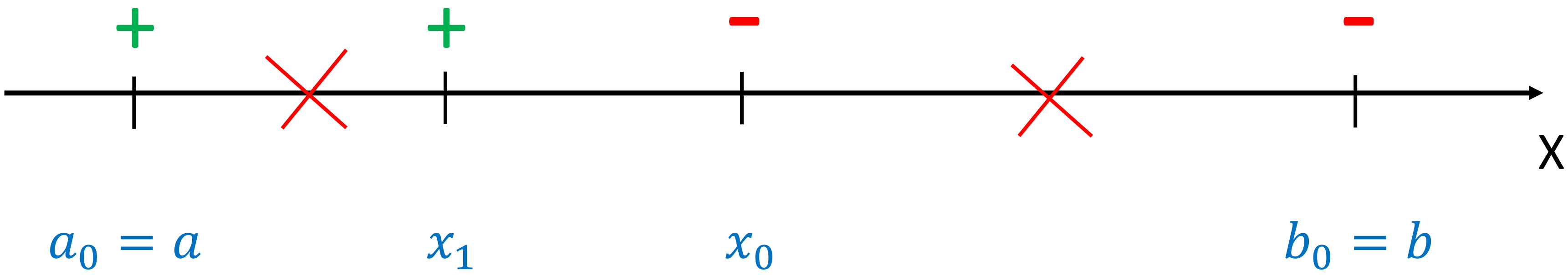
$$\boldsymbol{x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}}$$



- Estimativa do erro absoluto associado a $\boldsymbol{x_0}$

$$|\propto - \boldsymbol{x_0}| \leq \frac{\boldsymbol{amp(I_0)}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{b_0 - a_0}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{b - a}}{\boldsymbol{2}}$$

- Determinação de $\boldsymbol{x_1}$



→ Se $f(x_0) = 0$ então

- $x_0 = \propto$ e o algoritmo de cálculo termina

→ Se $f(x_0) \neq 0$ e, por exemplo, $f(x_0) < 0$ então

- $\propto \in [a, x_0]$ e tem-se

  → $a_1 = a$;

  → $b_1 = x_0$;

  → $\boldsymbol{x_1} = \frac{\boldsymbol{a_1 + b_1}}{\boldsymbol{2}} = \frac{a + x_0}{2}$.

- Estimativa do erro absoluto associado a $\boldsymbol{x_1}$

$$|\propto - \boldsymbol{x_1}| \leq \frac{\boldsymbol{amp(I_1)}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{b_1 - a_1}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\frac{\boldsymbol{b-a}}{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{b-a}}{\boldsymbol{2^2}} .$$

- Determinação das iteradas $\boldsymbol{x_k}$

  → $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$;

  → $I_k = [a_k, b_k]$;

- Estimativa do erro absoluto associado a $\boldsymbol{x_k}$

$$|\propto - \boldsymbol{x_k}| \leq \frac{\boldsymbol{amp(I_k)}}{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{amp(I_{k-1})}}{\boldsymbol{2^2}} = \cdots = \frac{\boldsymbol{amp(I_0)}}{\boldsymbol{2^{k+1}}} = \frac{\boldsymbol{b-a}}{\boldsymbol{2^{k+1}}}.$$

- Determinação da iterada $\boldsymbol{x_{k+1}}$

  → Se $f(x_k) = 0$ então $x_k = \propto$;

  → Se $f(a_k) \times f(x_k) < 0$ então $\propto \in [a_k, x_k] \equiv I_{k+1}$;

  → Se $f(x_k) \times f(b_k) < 0$ então $\propto \in [x_k, b_k] \equiv I_{k+1}$;

  → $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$ e $\boldsymbol{x_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}}$.

- RESUMO

  No método da bissecção é construída uma sucessão de intervalos fechados, I_k e uma sucessão de números reais $\{x_k\}$ tais que

→ $\ldots \subseteq I_k \subseteq I_{k-1} \subseteq \cdots \subseteq I_0 = I$, $amp(I_k) = b_k - a_k \underset{k \to +\infty}{\to} 0$

→ $\cap I_k = \propto$ e $x_k \in I_k = [a_k, b_k]$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

É válido o seguinte

Teorema (Método da bissecção)

Seja f uma função contínua num intervalo $[a, b]$ que contém um único zero real, $\propto$, de f.

Se $f(a) \times f(b) < 0$ então a sucessão de iteradas $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, gerada pelo método da bissecção, converge para $\propto$ e tem-se

$$|\propto - \boldsymbol{x_k}| \leq \frac{\boldsymbol{b-a}}{\boldsymbol{2^{k+1}}} \quad , \quad \forall \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}_{\boldsymbol{0}} .$$ **[Fórmula do erro]**

Exemplo 1

Considere-se a equação $x^2 + ln(x) + 1 = 0$.

Provar que esta equação admite uma única raiz real, $\propto$, no intervalo $[0.2,0.5]$.

Determinar, utilizando o método da bissecção, uma aproximação de $\propto$ com, pelo menos, duas casas decimais significativas.

Resolução

- Demonstração da existência e unicidade de um único zero real de f em $[0.2,0.5]$

1) A função f é contínua em $[0.2,0.5]$ e $f(0.2) \times f(0.5) \approx -0.317 < 0$ logo f tem, <u>pelo menos</u>, um zero real, $\propto$, neste intervalo ;

2) $f'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$, $\forall x \in [0.2,0.5]$, donde se conclui que f é estritamente crescente neste intervalo e, por conseguinte, tem, <u>no máximo</u>, um zero real, $\propto$, em $[0.2,0.5]$;

3) De 1) e 2) conclui-se que f tem um único zero real, $\propto$, em $[0.2,0.5]$.

- Determinação do número mínimo de iteradas, k

Pretende-se obter o número mínimo de iteradas, k, por forma a ter-se $|\propto - x_k| \leq 0.5 \times 10^{-2}$.

Assim, uma vez que $|\propto - x_k| \leq \frac{0.5-0.2}{2^{k+1}}$, basta impôr a condição

$\frac{0.5-0.2}{2^{k+1}} \leq 0.5 \times 10^{-2}$, ou seja, $k \geq 4.908 \ldots$.

Desta forma, são necessárias 5 iteradas (6, contando com a iterada x_0) para se obter um valor aproximado de $\propto$ com, pelo menos, duas casas decimais significativas.

- Determinação dos intervalos I_k e das iteradas x_k , $k = 0,1, \ldots 5$.

Tem-se $I_0 = [a_0, b_0] = [a, b] = [0.2,0.5]$, $f(a_0) \approx -0.569 < 0$ e $f(b_0) \approx 0.557 > 0$.

Podemos resumir os resultados no seguinte quadro

k	$[a_k, b_k]$	$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$	$f(a_k)$	$f(x_k)$	$f(b_k)$
0	$[0.2\,, 0.5]$	0.35	-	+	+
1	$[0.2\,, 0.35]$	0.275	-	-	+
2	$[0.275\,, 0.35]$	0.3125	-	-	+
3	$[0.3125\,, 0.35]$	0.33125	-	+	+
4	$[0.3125\,, 0.33125]$	0.321875	-	-	+
5	$[0.321875\,, 0.33125]$	**0.3265625**	---	---	---

Conclui-se que o valor aproximado, $\hat{\propto}$, da raiz da equação $f(x) = 0$,

em $[0.2\,, 0.5]$ é $\hat{\propto} = 0.327 \approx 0.33$.

Ordem de convergência da sucessão gerada pelo método da bissecção

Uma vez que $|\propto - x_k| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}}$ e $|\propto - x_{k+1}| \leq \frac{b-a}{2^{k+2}}$ tem-se que, ao comparar os dois majorantes dos módulos dos erros absolutos associados a duas iteradas consecutivas, x_k e x_{k+1}, se pode afirmar que, globalmente, a ordem de convergência da sucessão gerada pelo método da bissecção é dada por

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{|\alpha - x_{k+1}|}{|\alpha - x_k|} \approx \frac{\frac{b-a}{2^{k+2}}}{\frac{b-a}{2^{k+1}}} = \frac{1}{2},$$

ou seja

→ A sucessão $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ gerada pelo método da bissecção, converge global e linearmente $(p = 1)$ para $\propto$ com coeficiente assimptótico $\lambda = 0.5$.

Método do ponto fixo

Neste método o objetivo é transformar-se a equação inicial $\boldsymbol{f(x)=0}$ numa equação equivalente (com o mesmo conjunto-solução) do tipo $\boldsymbol{\varphi(x)=x}$.

Inicialmente há que fazer uma separação de raízes, tal como para o método da bissecção.

Depois de feita essa separação de raízes e escolhido um intervalo $[a,b]$ que só contenha uma raíz, $\propto$, da equação $f(x)=0$, ter-se-á

$$f(\propto)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(\propto)=\propto .$$

Definição

Ponto fixo de uma função φ

Designa-se por **ponto fixo** de uma função $\varphi(x)$ definida em $[a,b]$ qualquer ponto $\boldsymbol{p} \in [a,b]$ tal que se verifique

$$\boldsymbol{\varphi(p) = p}\ .$$

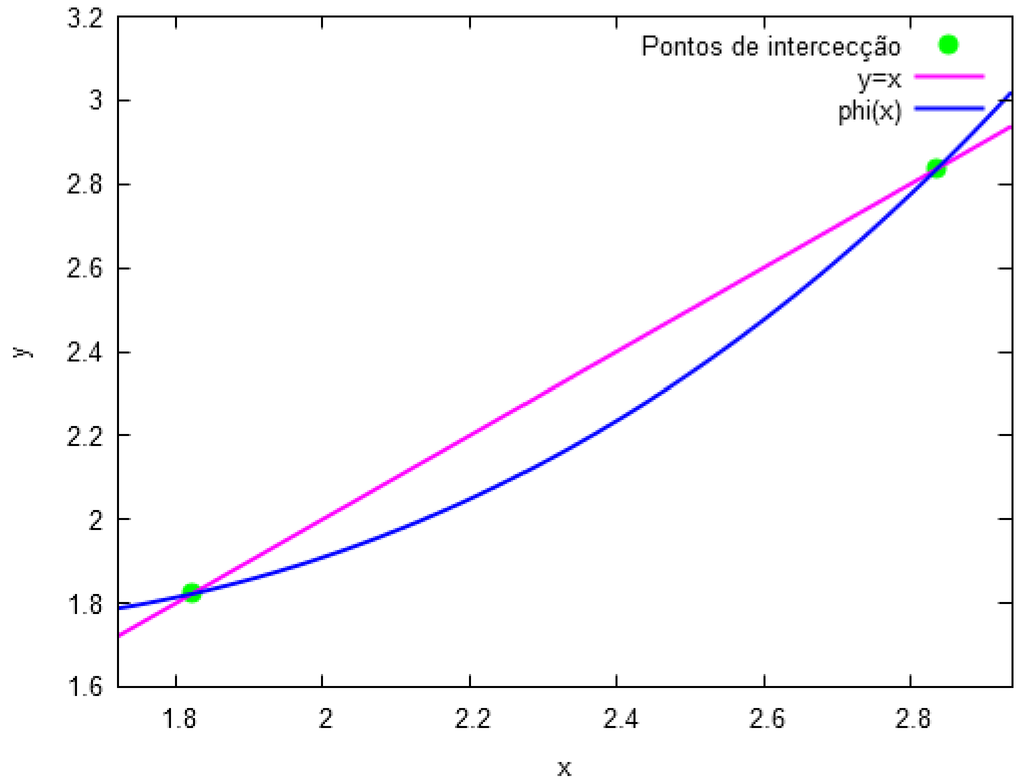


Figura 1 Os pontos fixos da função φ são as abcissas dos pontos de intercecção dos gráficos da curva $y = \varphi(x)$ e da reta $y = x$.

Desta forma, determinar as aproximações das **raízes da equação** $f(x) = 0$ é equivalente a determinar os **pontos fixos** de uma função $y = \varphi(x)$.

A função φ designa-se **função iteradora** (pois as iteradas serão construidas utilizando esta função).

- Observações

→ Se α é ponto fixo de φ então é zero da função $f(x) = \varphi(x) - x$;

→ Se α é zero de f então é ponto fixo das funções

$\varphi_1(x) = x - f(x)$, $\varphi_2(x) = x + f(x)$, $\varphi_3(x) = x + 3f(x)$, ...

É válido o seguinte

Teorema 1 (Condições suficientes que garantem a existência e unicidade de um ponto fixo de uma função num intervalo fechado e limitado)

Seja φ uma função definida num intervalo $[a, b]$.

$[I]$ Se φ é uma função contínua em $[a, b]$ e se $\varphi(x) \in [a, b]$, $\forall x \in [a, b]$;

$[II]$ Se, além disso, φ' estiver definida em $]a, b[$ e existir $0 < M < 1$ tal que

$$|\varphi'(x)| \leq M \ , \ \forall x \in [a, b] \ ;$$

Então, **φ tem um único ponto fixo em $[a, b]$**.

Teorema 2

Seja φ uma função definida num intervalo $[a, b]$ e que verifica as condições $[\boldsymbol{I}]$ e $[\boldsymbol{II}]$ do Teorema 1.

Então a sucessão definida por

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] & \text{(aproximação inicial de } \alpha) \\ x_k = \varphi(x_{k-1}) & , \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

converge para o único ponto fixo, α , de φ em $[a, b]$.

Corolário

Considere-se a sucessão $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, definida no Teorema 2.

Então, para as iteradas desta sucessão, são válidas as seguintes estimativas do erro absoluto

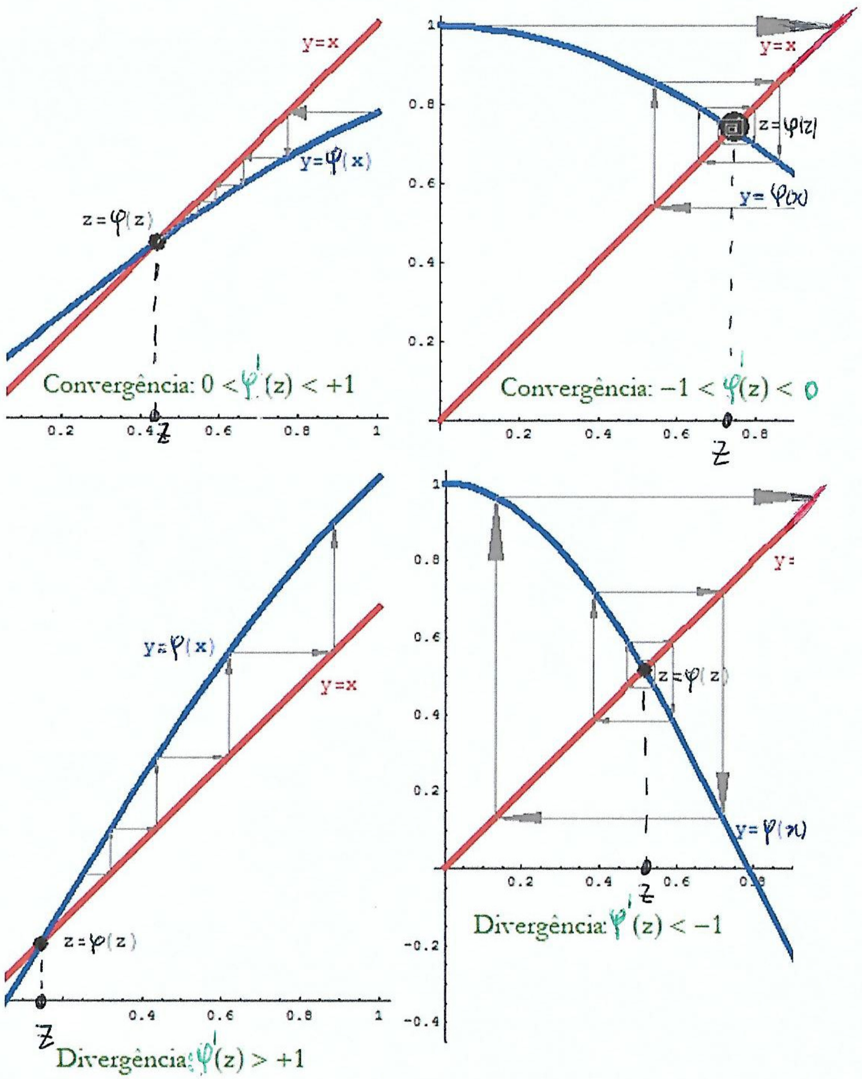
- $|\propto - x_k| \leq \frac{M^k}{1-M}|x_1 - x_0|$, $k \in \mathbb{N}$ **[Fórmula do erro à priori]**
- $|\propto - x_k| \leq \frac{M}{1-M}|x_k - x_{k-1}|$, $k \in \mathbb{N}$, **[Fórmula do erro à posteriori]**

sendo M tal como definido no Teorema 1.

Nos esquemas que se seguem, estão representados, geometricamente, os vários tipos de situações que podem ocorrer, relativamente ao valor de

$\varphi'(x)$.

O ponto fixo de φ é z .


y=x
y=φ(x)
z=φ(z)
Convergência: 0 < φ'(z) < +1
z
y=x
z=φ(z)
y=φ(x)
Convergência: −1 < φ'(z) < 0
z
y=φ(x)
y=x
z=φ(z)
z
Divergência: φ'(z) > +1
z=φ(z)
y=φ(x)
z
Divergência: φ'(z) < −1

Teorema 3

Seja φ uma função com derivada contínua numa vizinhança de um seu ponto fixo α.

Então

$[\boldsymbol{I}]$ Se $|\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{\alpha})| < \mathbf{1}$, a sucessão $x_k = \varphi(x_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$, **converge** para α , **desde que** $\boldsymbol{x_0}$ **esteja suficientemente próximo de** $\boldsymbol{\alpha}$;

[convergência local]

$[\boldsymbol{II}]$ Se $|\boldsymbol{\varphi}'(\boldsymbol{\alpha})| > \mathbf{1}$, a sucessão $x_k = \varphi(x_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$, **converge** para α , **se e só se** $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{\alpha}$. **[divergência]**

No caso $[I]$ o ponto fixo diz-se **atractor** e no caso $[II]$ **repulsor**.

Exemplo 2

Considere-se novamente a equação $f(x) = x^2 + ln(x) + 1 = 0$, que admite, no intervalo $[0.2,0.5]$, uma única raiz real, $\propto$.

a) Provar que a sucessão definida por

$$\begin{cases} x_0 = 0.2 \\ x_k = e^{-(x_{k-1})^2-1} , \quad k \in \mathbb{N} \end{cases},$$

converge para $\propto$.

b) Determinar uma aproximação de $\propto$ com, pelo menos, duas casas decimais significativas.

Resolução

a)

- Verificação das condições de aplicação dos Teoremas 1 e 2

1) A função $\varphi(x) = e^{-x^2-1}$ está definida em $[0.2,0.5]$;

2) A função $\varphi(x) = e^{-x^2-1}$ é contínua em $[0.2,0.5]$;

3) $\varphi'(x) = -2xe^{-x^2-1} < 0$, $\forall x \in [0.2,0.5]$, logo $\varphi(x)$ é uma função estritamente decrescente em $[0.2,0.5]$, isto é

$$\underbrace{\varphi(0.5)}_{0.286\ldots} \leq \varphi(x) \leq \underbrace{\varphi(0.2)}_{0.353\ldots}$$

Conclui-se então que $\forall x \in [0.2{,}0.5]$, $\varphi(x) \in [0.286\ldots, 0.353\ldots]$,

e como $[0.286\ldots, 0.353\ldots] \subset [0.2{,}0.5]$, então

$\forall x \in [0.2{,}0.5]$, $\varphi(x) \in [0.2{,}0.5]$;

4) $|\varphi'(x)| = \left|-2xe^{-x^2-1}\right| = 2xe^{-x^2-1} \leq 2(0.5)e^{-0.5^2-1} =$

$= 0.286\ldots \leq 0.287 = M$, $\forall x \in [0.2{,}0.5]$.

$\therefore$ De acordo com o Teorema 1, a função $\varphi(x)$ tem um único ponto fixo , $\propto \in [0.2{,}0.5]$.

Aplicando desta vez o Teorema 2, pode concluir-se que a sucessão

$$\begin{cases} x_0 = 0.2 \\ x_k = \varphi(x_{k-1}) = e^{-(x_{k-1})^2-1} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N} \ ,$$

converge para $\propto$.

b)

- Determinação do número mínimo de iteradas, k

Pretende-se obter o número mínimo de iteradas, k , por forma a ter-se $|\propto - x_k| \leq 0.5 \times 10^{-2}$.

Assim, de acordo com o Corolário do Teorema 2, sabe-se que

$|\propto -x_k| \leq \frac{M^k}{1-M}|x_1 - x_0|$, logo basta impor a condição

$\frac{M^k}{1-M}|x_1 - x_0| \leq 0.5 \times 10^{-2}$.

Como

$$\begin{cases} x_0 = 0.2 \\ x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(0.2) = e^{-0.2^2-1} = 0.353454\ldots \end{cases},$$

Então

$$\frac{M^k}{1-M}|x_1 - x_0| \leq 0.5 \times 10^{-2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{0.287^k}{1-0.287}|0.353454\ldots-0.2| \leq 0.5\times 10^{-2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad k \geq 3.013\ldots .$$

Desta forma, são necessárias 4 iteradas para se obter um valor aproximado de $\propto$ com, pelo menos, duas casas decimais significativas.

- Determinação das iteradas

$$\begin{cases} x_0 = 0.2 \\ x_1 = 0.353454\ldots \\ x_2 = 0.324675\ldots \\ x_3 = 0.331073\ldots \\ x_4 = 0.329687\ldots \end{cases} .$$

Conclui-se que o valor aproximado, $\widehat{\propto}$, da raiz da equação $f(x) = 0$, em $[0.2\,, 0.5]$ é $\widehat{\propto} = 0.330 \approx 0.33$ (resultado idêntico ao obtido para o método da bissecção).

Método de Newton

Este método é um caso particular do método do ponto fixo.

Neste caso tem-se $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Suponha-se novamente que f é uma função contínua em $I = [a, b]$, intervalo que contém um **único zero** , $\propto$, de f, que $f \in C^2([a, b])$ e que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$.

A sucessão gerada pelo método de Newton é dada por

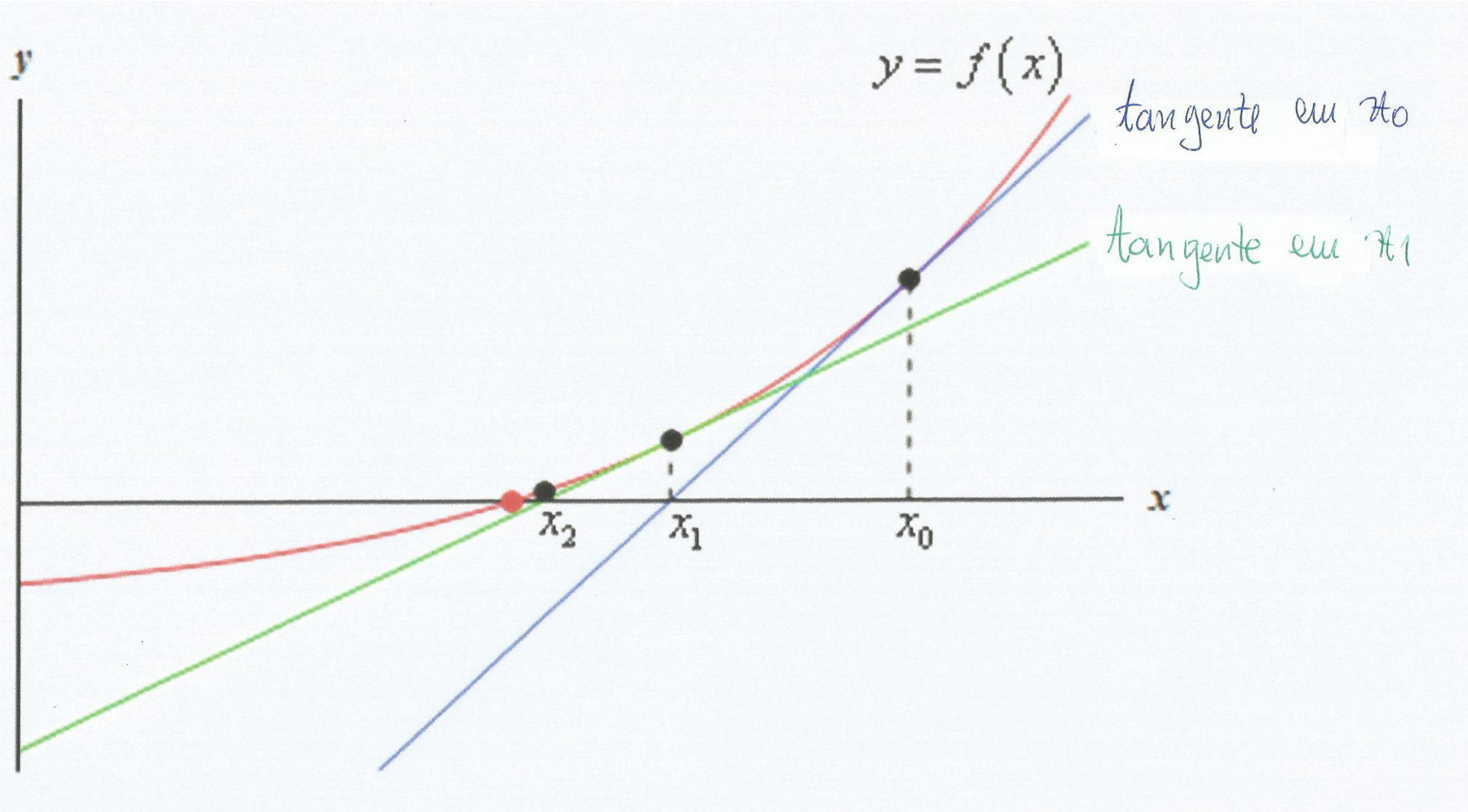
$$\begin{cases} x_0 \quad , \ \text{iterada inicial} \\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad , \ k = 0,1,\ldots \end{cases} .$$

Repare-se que

$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}$ donde se conclui que $\varphi'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{\left(f'(\alpha)\right)^2} = 0.$

Desta forma, existe uma vizinhança de $\propto$, $[\alpha - \delta , \alpha + \delta]$ para a qual todos os pontos que a ela pertencem satisfazem $|\varphi'(x)| < 1$.

Ilustração geométrica do método de Newton



- x_0 → Iterada inicial
- x_1 → Iterada que satisfaz a condição

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- x_2 → Iterada que satisfaz a condição

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad ,$$

ou seja, genericamente tem-se

$$x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \quad , \quad k = 1,2, \dots .$$

É válido o seguinte

Teorema 4 (Condições suficientes para a convergência do método de Newton)

Seja $f \in C^2([a,b])$ tal que

[I] $f(a) \times f(b) < 0$;

[II] f' e f'' não se anulam em $[a,b]$;

Então, a sucessão gerada pelo método de Newton

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \quad , \text{tal que } f(x_0) \times f''(x_0) > 0 \\ x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \qquad , \qquad k = 1,2,\ldots \,. \end{cases} ,$$

converge para a única raiz real, α , de $f(x) = 0$, em $[a,b]$.

Sendo válido o teorema anterior, verifica-se a seguinte estimativa do erro (absoluto) para o método de Newton

Estimativa do erro absoluto (Método de Newton)

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_k - x_{k-1})^2 \quad , \quad k = 1,2, \ldots ,$$

sendo α a única raiz real da equação $f(x) = 0$, em $[a, b]$ e

$$0 < m_1 \leq |f'(x)| \quad , \quad M_2 \geq |f''(x)| \quad , \quad \forall x \in [a, b] \ .$$

Exemplo 3

Considere-se a equação $f(x) = x^2 + ln(x) + 1 = 0$, que admite, no intervalo $[0.2,0.5]$, uma única raiz real, $\propto$.

a) Provar que a sucessão definida por

$$\begin{cases} x_0 = 0.2 \\ x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N},$$

converge para $\propto$.

b) Determinar uma aproximação de $\propto$ com, pelo menos, duas casas decimais significativas.

Resolução

a)

- Verificação das condições de convergência do Teorema 3

5) A função $f(x) = x^2 + ln(x) + 1$ é contínua em $[0.2,0.5]$;

6) A função $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ é contínua em $[0.2,0.5]$;

7) A função $f''(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$ é contínua em $[0.2,0.5]$;

8) $f(0.2) \times f(0.5) \approx -0.317 < 0$;

9) $f'(x) > 0 \quad \text{e} \quad f''(x) < 0 \ , \ \forall x \in [0.2{,}0.5]$;

10) Como $f(0.2) \approx -0.569 < 0 \ \text{ e } \ f''(0.2) < 0$, pode escolher – se $x_0 = 0.2$, pois tem – se $f(0.2) \times f''(0.2) > 0$.

∴ De acordo com o Teorema 3, a sucessão gerada pelo método de Newton, definida por

$$\begin{cases} x_0 = 0.2 \\ x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})} \ , \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} ,$$

converge para $\propto$.

b)

- Determinação de uma aproximação de α com 2 casas decimais significativas

$$\rightarrow \quad |f'(x)| = \left|\underbrace{2x + \frac{1}{x}}_{\substack{>0 \text{ em} \\ [0.2,0.5]}}\right| = 2x + \frac{1}{x} \geq f'(0.5) = 3 = m_1 \ ;$$

$$\rightarrow \quad |f''(x)| = \left|\underbrace{2 - \frac{1}{x^2}}_{\substack{<0 \text{ em} \\ [0.2,0.5]}}\right| = \frac{1}{x^2} - 2 \leq -f''(0.2) = 23 = M_2 \ .$$

Então tem-se

$x_0 = 0.2$;

$x_1 = 0.2 - \frac{f(0.2)}{f'(0.2)} \approx 0.305451465$ e, por conseguinte

$|\alpha - x_1| \leq \frac{23}{2\times3}(0.305451465 - 0.2)^2 \approx 0.0426 > 0.5 \times 10^{-2}$.

→ É necessário calcular mais iteradas …

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 0.329304710$$ e , por conseguinte

$$|\alpha - x_2| \leq \frac{23}{2\times 3}(0.329304710 - 0.305451465)^2 \approx 0.0022 <$$
$$\leq 0.5 \times 10^{-2} \; .$$

Conclui-se que o valor aproximado, $\widehat{\propto}$, da raiz da equação $f(x) = 0$, em $[0.2\,, 0.5]$ é $\widehat{\propto} = 0.329 \approx 0.33$ (resultado idêntico aos obtidos para os métodos da bissecção e do ponto fixo).

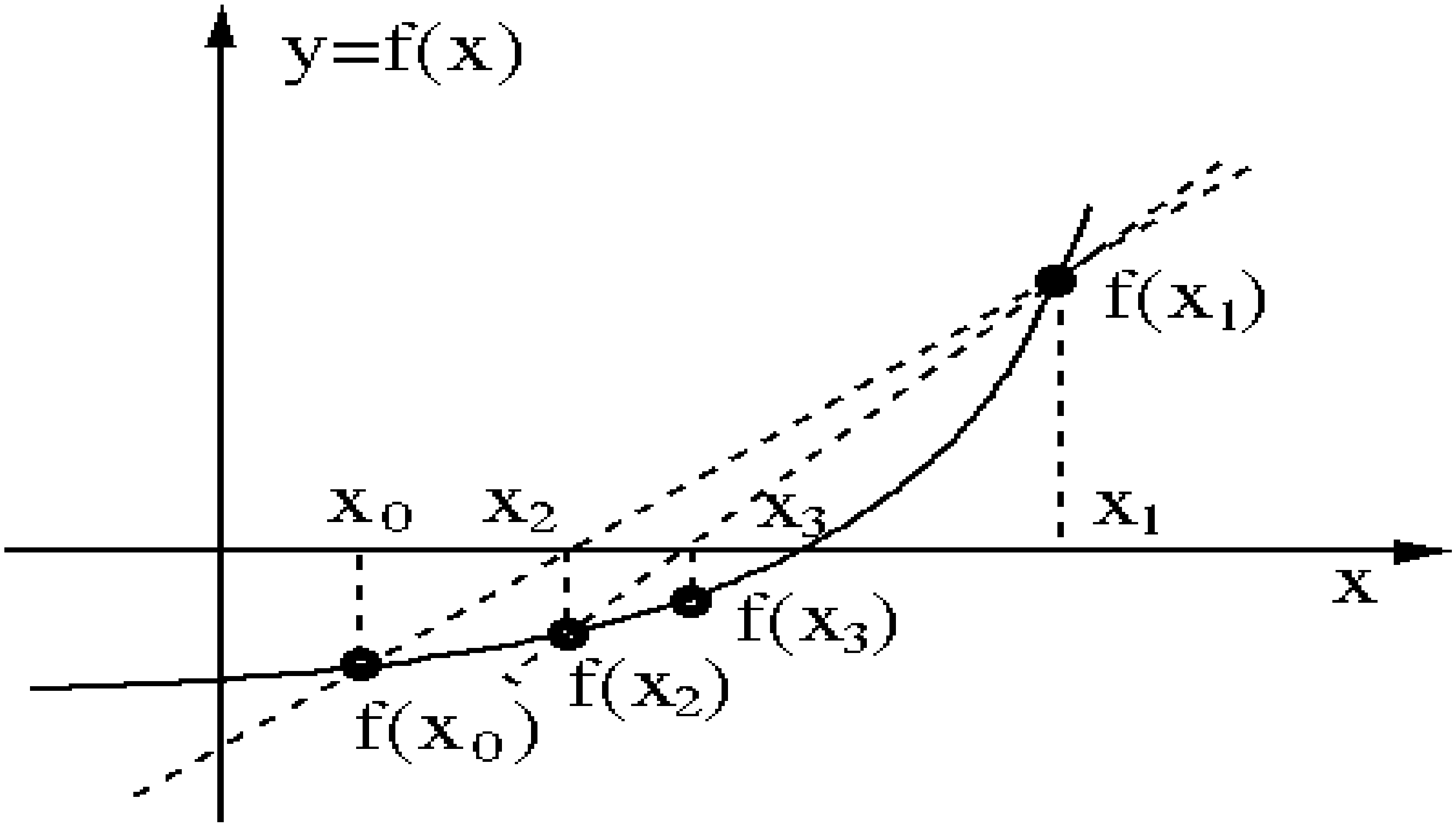
Método da secante

Este método é uma alternativa ao método de Newton, evitando-se, neste caso, o cálculo da derivada de $f(x)$ em cada iterada x_{k+1}.

Para este efeito, substitui-se a reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto inicial $\left(x_0, f(x_0)\right)$ por uma reta secante ao gráfico da mesma função em 2 pontos iniciais com abcissas distintas $\left(x_0, f(x_0)\right)$ e $\left(x_1, f(x_1)\right)$.

Suponha-se, tal como anteriormente, que f é uma função contínua em $I = [a, b]$, intervalo que contém um **único zero** , $\propto$, de f, que $f \in$ C$^2([a, b])$ e que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in [a, b]$.

Ilustração geométrica do método da secante



- x_0 , x_1 → Iteradas iniciais
- x_2 → Iterada que satisfaz a condição

$$\frac{-f(x_0)-0}{x_2-x_0}=\frac{f(x_1)-0}{x_1-x_2} \quad \Leftrightarrow \quad x_2=\frac{x_0 f(x_1)-x_1 f(x_0)}{f(x_1)-f(x_0)} \; .$$

Considerando agora as iteradas x_1 e x_2 e fazendo um raciocínio semelhante, obtemos

- x_3 → Iterada que satisfaz a condição

$$\frac{-f(x_2)-0}{x_3-x_2}=\frac{f(x_1)-0}{x_1-x_3} \quad \Leftrightarrow \quad x_3=\frac{x_1 f(x_2)-x_2 f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)} \; ,$$

ou seja, genericamente tem-se

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad , \quad k = 1,2, \dots .$$

É válido o teorema que se segue.

Teorema 5 (Condições suficientes para a convergência do método da secante)

Seja $f \in C^2([a,b])$ tal que

[I] $f(a) \times f(b) < 0$;

[II] f' e f'' não se anulam em $[a,b]$;

[III] $\left|\frac{f(a)}{f'(a)}\right| < b-a$ e $\left|\frac{f(b)}{f'(b)}\right| < b-a$;

Então, a sucessão gerada pelo método da secante

$$\begin{cases} x_0 \ , \ x_1 \in [a,b] \\ x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \end{cases} , \qquad k = 1,2,\ldots \ ,$$

converge para a única raiz real, α , de $f(x) = 0$, em $[a,b]$.

Sendo válido o teorema anterior, verifica-se a seguinte estimativa do erro (absoluto) para o método da secante

Estimativa do erro absoluto (Método da secante)

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{M_2}{2m_1} |\alpha - x_{k-1}| \times |\alpha - x_{k-2}| \ , \quad k = 2,3, \dots ,$$

sendo α a única raiz real da equação $f(x) = 0$, em $[a, b]$ e

$$0 < m_1 \leq |f'(x)| \quad , \quad M_2 \geq |f''(x)| \quad , \quad \forall x \in [a, b] \ .$$

Exemplo 4

Considere-se a equação $f(x) = x^2 + ln(x) + 1 = 0$, que admite, no intervalo $[0.2,0.35]$, uma única raiz real, $\propto$.

c) Provar que a sucessão definida por

$$\begin{cases} x_0 = 0.2 \quad ; \quad x_1 = 0.35 \\ x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad , \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} ,$$

converge para $\propto$.

d) Determinar uma aproximação de $\propto$ com, pelo menos, duas casas decimais significativas.

Resolução

a)

- Verificação das condições de convergência do Teorema 3

1) A função $f(x) = x^2 + ln(x) + 1$ é contínua em $[0.2,0.35]$;

2) A função $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$ é contínua em $[0.2,0.35]$;

3) A função $f''(x) = 2 - \frac{1}{x^2}$ é contínua em $[0.2,0.35]$;

4) $f(0.2) \times f(0.35) \approx -0.041 < 0$;

5) $f'(x) > 0 \quad \text{e} \quad f''(x) < 0 \; , \; \forall x \in [0.2{,}0.35]$;

6) Finalmente, tem-se

$$\begin{cases} \left|\dfrac{f(0.2)}{f'(0.2)}\right| \approx 0.105 < b - a = 0.15 \\ \left|\dfrac{f(0.35)}{f'(0.35)}\right| \approx 0.020 < b - a = 0.15 \end{cases},$$

$\therefore$ De acordo com o Teorema 4, a sucessão gerada pelo método da secante, definida por

$$\begin{cases} x_0 = 0.2 \ ; \ x_1 = 0.35 \\ x_{k+1} = \dfrac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \ , \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} ,$$

converge para $\propto$.

b)

- Determinação de uma aproximação de α com 2 casas decimais significativas

$$\rightarrow \quad |f'(x)| = \left| \underbrace{2x + \frac{1}{x}}_{\substack{>0 \text{ em} \\ [0.2,0.35]}} \right| = 2x + \frac{1}{x} \geq f'(0.35) = \frac{249}{70} = m_1 \ ;$$

$$\rightarrow \quad |f''(x)| = \left|\underbrace{2-\frac{1}{x^2}}_{\substack{<0 \text{ em} \\ [0.2,0.35]}}\right| = \frac{1}{x^2} - 2 \leq -f''(0.2) = 23 = M_2 \,.$$

Então tem-se

$x_0 = 0.2$ e $x_1 = 0.35$

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{0.2 f(0.35) - 0.35 f(0.2)}{f(0.35) - f(0.2)} \approx 0.333022250 \quad \text{e ,}$$

por conseguinte

$$|\alpha - x_2| \leq \frac{23}{2\times\frac{249}{70}} \underbrace{|\alpha - x_0|}_{\leq 0.15} \times \underbrace{|\alpha - x_1|}_{\leq 0.15} \leq 0.073 \; > \; 0.5 \times 10^{-2} \, .$$

→ É necessário calcular mais iteradas …

$$x_3 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \approx 0.329877590 \text{ e ,}$$

por conseguinte

$$|\alpha - x_3| \leq \frac{23}{2\times\frac{249}{70}} \underbrace{|\alpha - x_1|}_{\leq 0.15} \times \underbrace{|\alpha - x_2|}_{\leq 0.073} \leq 0.036 \; > \; 0.5 \times 10^{-2}$$

→ Ainda é necessário calcular mais iteradas …

$$x_4 = \frac{x_2 f(x_3) - x_3 f(x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} \approx 0.329935854 \ \text{e} \ ,$$

por conseguinte

$$|\alpha - x_4| \leq \frac{23}{2 \times \frac{249}{70}} \underbrace{|\alpha - x_2|}_{\leq 0.073} \times \underbrace{|\alpha - x_3|}_{\leq 0.036} \leq 0.009 \ > \ 0.5 \times 10^{-2}.$$

→ Calculemos mais uma iterada …

$$x_5 = \frac{x_3 f(x_4) - x_4 f(x_3)}{f(x_4) - f(x_3)} \approx 0.329935680 \ .$$

Então

$$|\alpha - x_5| \leq \frac{23}{2\times\frac{249}{70}} \underbrace{|\alpha - x_3|}_{\leq 0.036} \times \underbrace{|\alpha - x_4|}_{\leq 0.009} \leq 0.002 \ \leq \ 0.5 \times 10^{-2}$$

Conclui-se que o valor aproximado, $\hat{\propto}$, da raiz da equação $f(x) = 0$, em $[0.2\,, 0.35]$ é $\hat{\propto} = 0.330 \approx 0.33$ (resultado idêntico aos obtidos para os métodos anteriores).