FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

IPEIO - Probabilidades e Estatística

Ano Lectivo 2017/18
1º Teste - 4 de abril de 2018
Duração: 1h15 horas

Resolução abreviada do 1º Teste

Versão 1

1. Admita que A, B e C são acontecimentos de um espaço de acontecimentos $(\Omega, \mathcal{F})$ e que: $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.4$, $P(A|B) = 0.3$, $P(A \cap C) = 0.1$ e os acontecimentos A e C são independentes.

(0.3) (a) V F $P(C) = 0.3$

(0.3) (b) V F $P(B|A) = 0.6$

(0.3) (c) V F $P(A - C) = 0.1$

F $0.1 = P(A \cap C) = P(A)P(C) = 0.2P(C) \Leftrightarrow P(C) = 1/2 = 0.5$

V $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)} = 0.6$

V $P(A - C) = P(A) - P(A \cap C) = 0.1$

2. Numa determinada empresa de I&D, 60% dos seus colaboradores foram formados na FCT-NOVA. Sabe-se que quando um projecto é entregue a um colaborador formado na FCT-NOVA a probabilidade de ser concluido com sucesso é de 90%, já quando é entregue a um qualquer outro colaborador essa probabilidade desce para 70%.

(0.3) (a) Qual a probabilidade de um projecto ser concretizado com sucesso e por um colaborador formado na FCT-NOVA?

A 0.70 B 0.90 C 0.28 D 0.54 E Nenhuma das anteriores

(0.3) (b) Tendo sido distribuido de forma aleatória um novo projecto por entre os colaboradores da empresa, qual a probabilidade deste ser concretizado com sucesso?

A 0.82 B 0.90 C 0.62 D 0.78 E Nenhuma das anteriores

(0.3) (c) Se um projecto tiver sido concluido com sucesso, qual a probabilidade de ter sido realizado por um colaborador formado na FCT-NOVA?

A 14/41 B 27/41 C 14/82 D 27/82 E Nenhuma das anteriores

(0.3) (d) Se a empresa tiver um total de 100 colaboradores e 10 forem selecionados de forma aleatória para formarem uma equipa, o número de colaboradores formados na FCT-NOVA que participam nessa equipa é uma variável aleatória com distribuição:

A $Bin(10, 0.6)$ B $Bin(100, 0.6)$ C $H(100, 60, 10)$ D $H(60, 40, 10)$ E Nenhuma das anteriores

Considerem-se os acontecimentos: F-"colaborador formado na FCT"e S-"projecto concluído com sucesso". Informação:

- $P(F) = 0.6 \Rightarrow P(\overline{F}) = 0.4$
- $P(S|F) = 0.9$
- $P(S|\overline{F}) = 0.7$

D $P(S \cap F) = P(S|F)\,P(F) = 0.9 \times 0.6 = 0.54$

A $P(S) = P(S|F)\,P(F) + P(S|\overline{F})\,P(\overline{F}) = 0.82$

B $P(F|S) = \dfrac{P(F \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(S|F)\,P(F)}{P(S)} = 0.54/0.82 = 27/41$

C Número de colaboradores formados na FCT numa amostra de dimensão 10, extraída sem reposição de uma população de dimensão 100 e onde 60 elementos têm a característica de interesse (ser formado na FCT) é uma v.a. com distribuição $H(100, 60, 10)$.

3. Considere a seguinte função:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{a}{b}, & x \in [0, b] \\ 0, & x \notin [0, b] \end{cases}$$

(0.4) (a) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Para $a = 1$ e $b = 1$, a função g é uma função densidade de probabilidade.

(b) Considere X, uma v.a. com função densidade $f_X(x) = g(x)$ com $a = 1$ e $b = 2$.

(0.4) i. A $P(X \leq 1)$ é:

$\boxed{\text{A}}$ 1/5 $\boxed{\text{B}}$ 1/4 $\boxed{\text{C}}$ 1/3 $\boxed{\text{D}}$ 1/2 $\boxed{\text{E}}$ Nenhuma das anteriores

(0.4) ii. Sabendo que $E[X^2] = 4/3$, a variância de X é:

$\boxed{\text{A}}$ 1/5 $\boxed{\text{B}}$ 1/4 $\boxed{\text{C}}$ 1/3 $\boxed{\text{D}}$ 1/2 $\boxed{\text{E}}$ Nenhuma das anteriores

$\boxed{\text{V}}$ Com $a = b = 1$ temos que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_0^1 1dx = 1$, logo função densidade.

$\boxed{\text{D}}$ Com $a = 1, b = 2$ temos que: $P(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx = \int_0^1 1/2dx = 1/2$.

$\boxed{\text{C}}$ $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, como $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x/2dx = 1$ e $E(X^2) = 4/3$ teremos $V(X) = 4/3 - 1 = 1/3$.

4. O número de alunos de IPEIO que comparecem no horário de atendimento docente é uma variável aleatória com distribuição de Poisson, com valor médio de 2 por hora:

(0.4) (a) A probabilidade de numa hora de atendimento docente não comparecer nenhum aluno é:

$\boxed{\text{A}}$ e^{-1} $\boxed{\text{B}}$ e^{-2} $\boxed{\text{C}}$ e^{-3} $\boxed{\text{D}}$ e^{-4} $\boxed{\text{E}}$ Nenhuma das anteriores

(0.4) (b) Em duas horas, o número esperado de alunos a comparecerem ao atendimento docente é:

$\boxed{\text{A}}$ 1 $\boxed{\text{B}}$ 2 $\boxed{\text{C}}$ 3 $\boxed{\text{D}}$ 4 $\boxed{\text{E}}$ Nenhuma das anteriores

(0.3) (c) A probabilidade, do tempo entre chegadas consecutivas de alunos ao horário de atendimento, ser inferior a 1 hora é:

$\boxed{\text{A}}$ $\int_0^1 2e^{-2x}dx$ $\boxed{\text{B}}$ $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}dx$ $\boxed{\text{C}}$ $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx$ $\boxed{\text{D}}$ $\int_{-\infty}^1 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx$ $\boxed{\text{E}}$ Nenhuma das anteriores

$\boxed{\text{B}}$ Seja X o número de alunos que comparecem no atendimento docente por hora. Como X tem distribuição de Poisson de valor médio 2, então $X \sim P(2)$ pois $\lambda = E(X) = 2$. Assim, $P(X = 0) = \frac{e^{-2}.2^0}{0!} = e^{-2}$

$\boxed{\text{D}}$ Se o número de alunos que comparecem no atendimento docente por hora é $P(2)$, então em duas horas esse número tem distribuição $P(4)$, pelo que, em média, comparecem 4 alunos em duas horas.

$\boxed{\text{A}}$ Se o número de alunos que comparecem no atendimento docente por hora é $P(2)$, então o tempo entre chegadas de alunos é uma v.a. Y com distribuição $Exp(2)$, logo $P(Y \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx = \int_0^1 2e^{-2x}dx$.

5. O tempo necessário para um qualquer aluno resolver o 1ºteste de IPEIO, é uma variável aleatória X com distribuição normal de valor médio $\mu = 60$ minutos e desvio padrão $\sigma = 5$ minutos.

(0.4) (a) Calcule a probabilidade de um aluno terminar o teste em menos de 50 minutos.

(0.4) (b) Calcule o tempo t, após o qual apenas 2.5% dos alunos ainda não terminaram o teste.

(0.4) (c) Calcule a probabilidade de a média dos tempos de resolução do teste de 10 alunos ser superior a 60 minutos.

(0.4) (d) Suponha agora, que o tempo que cada teste leva a ser corrigido segue uma distribuição exponencial de valor médio 15 minutos. Calcule a probabilidade **aproximada** do docente precisar de mais de 1600 minutos para corrigir um total de 100 testes.

(a) Recorde-se que se $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, queremos:
$P\left(X < 50\right) = P\left(\dfrac{X-60}{5} \leq \dfrac{50-60}{5}\right) = P\left(Z \leq \dfrac{-10}{5}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

(b) Queremos determinar t tal que: $P(X > t) = 0.025 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq t) = 0.025 \Leftrightarrow P\left(\dfrac{X-60}{5} \leq \dfrac{t-60}{5}\right) = 0.975 \Leftrightarrow \Phi\left(\dfrac{t-60}{5}\right) = 0.975 \Leftrightarrow \dfrac{t-60}{5} = 1.96 \Leftrightarrow t = 60 + 5 \times 1.96 = 69.8$

(c) Com $X_i \sim N(60, 5^2)$ o tempo de resolução do aluno i, $i = 1, 2, ..., 10$, podemos definir $\overline{X}_{10} = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}$ como sendo a média dos tempos de resolução dos 10 alunos.
Queremos $P(\overline{X}_{10} > 60)$, mas como $\overline{X}_{10}$ é uma combinação linear de v.a. com distribuição normal e independentes, então $\overline{X}_{10} \sim N\left(E(\overline{X}_{10}), V(\overline{X}_{10})\right)$ com $E(\overline{X}_{10}) = 60$ e $V(\overline{X}_{10}) = 25/10$.
Teremos, $P(\overline{X}_{10} > 60) = 1 - P(\overline{X}_{10} \leq 60) = 1 - P\left(\frac{\overline{X}_{10}-60}{\sqrt{2.5}} \leq \frac{60-60}{\sqrt{2.5}}\right) = 1 - \Phi(0) = 0.5$

(d) Seja Y o tempo que um qualquer teste demora a ser corrigido, então Y tem distribuição Exponencial com $E(Y) = 15$ mas também se sabe que $V(Y) = 15^2$.
Designe-se por Y_i o tempo de correção do i-ésimo teste, com $i = 1, ..., 100$, e por S_{100} o tempo de correção do total dos 100 testes.
Temos que $\forall i = 1, ..., 100, E(Y_i) = 15$ e $V(Y_i) = 15^2$, mas como estamos nas condições do teorema limite central (v.a. i.i.d e $n = 100 > 30$), então temos que

$$Z = \frac{S_{100} - 100 \times 15}{\sqrt{100} \times 15} = \frac{S_{100} - 1500}{150} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

pelo que

$$P(S_{100} > 1600) = 1 - P\left(\frac{S_{100} - 1500}{150} \leq \frac{1600 - 1500}{150}\right) = 1 - P(Z \leq 100/150) \approx 1 - \Phi(2/3) = 0.2514$$

Resolução abreviada do 1º Teste

Versão 2

1. Admita que A, B e C são acontecimentos de um espaço de acontecimentos $(\Omega, \mathcal{F})$ e que: $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.4$, $P(A|B) = 0.3$, $P(A \cap C) = 0.1$ e os acontecimentos A e C são independentes.

(0.3) (a) V F $P(C) = 0.25$

(0.3) (b) V F $P(B|A) = 0.3$

(0.3) (c) V F $P(A - C) = 0.1$

V $0.1 = P(A \cap B) = P(A)P(C) = 0.4P(C) \Leftrightarrow P(C) = 1/4 = 0.25$

V $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)} = 0.3$

F $P(A - C) = P(A) - P(A \cap C) = 0.3$

2. Numa determinada empresa de I&D, 60% dos seus colaboradores foram formados na FCT-NOVA. Sabe-se que quando um projecto é entregue a um colaborador formado na FCT-NOVA a probabilidade de ser concluido com sucesso é de 90%, já quando é entregue a um qualquer outro colaborador essa probabilidade desce para 60%.

(0.3) (a) Qual a probabilidade de um projecto ser concretizado com sucesso e por um colaborador formado na FCT-NOVA?

A 0.70 B 0.90 C 0.28 D 0.54 E Nenhuma das anteriores

(0.3) (b) Tendo sido distribuido de forma aleatória um novo projecto por entre os colaboradores da empresa, qual a probabilidade deste ser concretizado com sucesso?

A 0.82 B 0.90 C 0.62 D 0.78 E Nenhuma das anteriores

(0.3) (c) Se um projecto tiver sido concluido com sucesso, qual a probabilidade de ter sido realizado por um colaborador formado na FCT-NOVA?

A 12/39 B 27/39 C 12/78 D 27/78 E Nenhuma das anteriores

(0.3) (d) Se a empresa tiver um total de 100 colaboradores e 10 forem selecionados de forma aleatória para formarem uma equipa, o número de colaboradores formados na FCT-NOVA que participam nessa equipa é uma variável aleatória com distribuição:

A $Bin(10, 0.6)$ B $Bin(100, 0.6)$ C $H(100, 60, 10)$ D $H(60, 40, 10)$ E Nenhuma das anteriores

Considerem-se os acontecimentos: F-"colaborador formado na FCT"e S-"projecto concluído com sucesso". Informação:

- $P(F) = 0.6 \Rightarrow P(\overline{F}) = 0.4$
- $P(S|F) = 0.9$
- $P(S|\overline{F}) = 0.6$

D $P(S \cap F) = P(S|F)\,P(F) = 0.9 \times 0.6 = 0.54$

D $P(S) = P(S|F)\,P(F) + P(S|\overline{F})\,P(\overline{F}) = 0.78$

A $P(\overline{F}|S) = \dfrac{P(\overline{F} \cap S)}{P(S)} = \dfrac{P(S|\overline{F})\,P(\overline{F})}{P(S)} = 0.24/0.78 = 12/39$

C Número de colaboradores formados na FCT numa amostra de dimensão 10, extraída sem reposição de uma população de dimensão 100 e onde 60 elementos têm a característica de interesse (ser formado na FCT) é uma v.a. com distribuição $H(100, 60, 10)$.

3. Considere a seguinte função:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{a}{b}, & x \in [0, b] \\ 0, & x \notin [0, b] \end{cases}$$

(0.4) (a) $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$ Para $a = 1$ e $b = 1$, a função g é uma função densidade de probabilidade.

(b) Considere X, uma v.a. com função densidade $f_X(x) = g(x)$ com $a = 1$ e $b = 4$.

(0.4) i. A $P(X \leq 1)$ é:

$\boxed{\text{A}}$ 1/5 $\boxed{\text{B}}$ 1/4 $\boxed{\text{C}}$ 1/3 $\boxed{\text{D}}$ 1/2 $\boxed{\text{E}}$ Nenhuma das anteriores

(0.4) ii. Sabendo que $E[X^2] = 16/3$, a variância de X é:

$\boxed{\text{A}}$ 1/3 $\boxed{\text{B}}$ 2/3 $\boxed{\text{C}}$ 1 $\boxed{\text{D}}$ 4/3 $\boxed{\text{E}}$ Nenhuma das anteriores

$\boxed{\text{V}}$ Com $a = b = 1$ temos que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 0$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_0^1 1dx = 1$, logo função densidade.

$\boxed{\text{B}}$ Com $a = 1, b = 4$ temos que: $P(X \leq 1) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(x)dx = \int_0^1 1/4dx = 1/4$.

$\boxed{\text{D}}$ $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, como $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^4 x/4dx = 2$ e $E(X^2) = 16/3$ teremos $V(X) = 16/3 - 4 = 4/3$.

4. O número de alunos de IPEIO que comparecem no horário de atendimento docente é uma variável aleatória com distribuição de Poisson, com valor médio de 3 por hora:

(0.4) (a) A probabilidade de numa hora de atendimento docente não comparecer nenhum aluno é:

$\boxed{\text{A}}$ e^{-1} $\boxed{\text{B}}$ e^{-2} $\boxed{\text{C}}$ e^{-3} $\boxed{\text{D}}$ e^{-4} $\boxed{\text{E}}$ Nenhuma das anteriores

(0.4) (b) Em duas horas, o número esperado de alunos a comparecerem ao atendimento docente é:

$\boxed{\text{A}}$ 8 $\boxed{\text{B}}$ 6 $\boxed{\text{C}}$ 4 $\boxed{\text{D}}$ 2 $\boxed{\text{E}}$ Nenhuma das anteriores

(0.3) (c) A probabilidade, do tempo entre chegadas consecutivas de alunos ao horário de atendimento, ser inferior a 1 hora é:

$\boxed{\text{A}}$ $\int_0^1 2e^{-2x}dx$ $\boxed{\text{B}}$ $\int_0^1 3e^{-3x}dx$ $\boxed{\text{C}}$ $\int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx$ $\boxed{\text{D}}$ $\int_{-\infty}^1 \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx$ $\boxed{\text{E}}$ Nenhuma das anteriores

$\boxed{\text{C}}$ Seja X o número de alunos que comparecem no atendimento docente por hora. Como X tem distribuição de Poisson de valor médio 3, então $X \sim P(3)$ pois $\lambda = E(X) = 3$. Assim, $P(X = 0) = \dfrac{e^{-3}.3^0}{0!} = e^{-3}$

$\boxed{\text{B}}$ Se o número de alunos que comparecem no atendimento docente por hora é $P(3)$, então em duas horas esse número tem distribuição $P(6)$, pelo que, em média, comparecem 6 alunos em duas horas.

$\boxed{\text{B}}$ Se o número de alunos que comparecem no atendimento docente por hora é $P(3)$, então o tempo entre chegadas de alunos é uma v.a. Y com distribuição $Exp(3)$, logo $P(Y \leq 1) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(x)dx = \int_0^1 3e^{-3x}dx$.

5. O tempo necessário para um qualquer aluno resolver o 1ºteste de IPEIO, é uma variável aleatória X com distribuição normal de valor médio $\mu = 60$ minutos e desvio padrão $\sigma = 5$ minutos.

(0.4) (a) Calcule a probabilidade de um aluno terminar o teste em menos de 50 minutos.

(0.4) (b) Calcule o tempo t, após o qual apenas 2.5% dos alunos ainda não terminaram o teste.

(0.4) (c) Calcule a probabilidade de a média dos tempos de resolução do teste de 10 alunos ser superior a 60 minutos.

(0.4) (d) Suponha agora, que o tempo que cada teste leva a ser corrigido segue uma distribuição exponencial de valor médio 15 minutos. Calcule a probabilidade **aproximada** do docente precisar de mais de 1600 minutos para corrigir um total de 100 testes.

(a) Recorde-se que se $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$, queremos:

$P\left(X < 50\right) = P\left(\dfrac{X-60}{5} \leq \dfrac{50-60}{5}\right) = P\left(Z \leq \dfrac{-10}{5}\right) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$

(b) Queremos determinar t tal que: $P(X > t) = 0.025 \Leftrightarrow 1 - P(X \leq t) = 0.025 \Leftrightarrow P\left(\dfrac{X-60}{5} \leq \dfrac{t-60}{5}\right) = 0.975 \Leftrightarrow \Phi\left(\dfrac{t-60}{5}\right) = 0.975 \Leftrightarrow \dfrac{t-60}{5} = 1.96 \Leftrightarrow t = 60 + 5 \times 1.96 = 69.8$

(c) Com $X_i \sim N(60, 5^2)$ o tempo de resolução do aluno i, $i = 1, 2, ..., 10$, podemos definir $\overline{X}_{10} = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}$ como sendo a média dos tempos de resolução dos 10 alunos.
Queremos $P(\overline{X}_{10} > 60)$, mas como $\overline{X}_{10}$ é uma combinação linear de v.a. com distribuição normal e independentes, então $\overline{X}_{10} \sim N\left(E(\overline{X}_{10}), V(\overline{X}_{10})\right)$ com $E(\overline{X}_{10}) = 60$ e $V(\overline{X}_{10}) = 25/10$.
Teremos, $P(\overline{X}_{10} > 60) = 1 - P(\overline{X}_{10} \leq 60) = 1 - P\left(\frac{\overline{X}_{10}-60}{\sqrt{2.5}} \leq \frac{60-60}{\sqrt{2.5}}\right) = 1 - \Phi(0) = 0.5$

(d) Seja Y o tempo que um qualquer teste demora a ser corrigido, então Y tem distribuição Exponencial com $E(Y) = 15$ mas também se sabe que $V(Y) = 15^2$.
Designe-se por Y_i o tempo de correção do i-ésimo teste, com $i = 1, ..., 100$, e por S_{100} o tempo de correção do total dos 100 testes.
Temos que $\forall i = 1, ..., 100, E(Y_i) = 15$ e $V(Y_i) = 15^2$, mas como estamos nas condições do teorema limite central (v.a. i.i.d e $n = 100 > 30$), então temos que

$$Z = \frac{S_{100} - 100 \times 15}{\sqrt{100} \times 15} = \frac{S_{100} - 1500}{150} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

pelo que

$$P(S_{100} > 1600) = 1 - P\left(\frac{S_{100} - 1500}{150} \leq \frac{1600 - 1500}{150}\right) = 1 - P(Z \leq 100/150) \approx 1 - \Phi(2/3) = 0.2514$$