ANÁLISE MATEMÁTICA III C

3ªsemana de aulas

NOVA SCHOOL OF
SCIENCE & TECHNOLOGY

Cláudio Fernandes

caf@fct.unl.pt

Slides para acompanhamento das aulas TP1 e TP4

O material completo do Prof. João de Deus Marques encontra-se no CLIP, na página da UC

Método da variação das constantes arbitrárias para a equação linear de ordem n

Tal como foi visto aquando do estudo da equação linear de primeira ordem, *o método da variação das constantes arbitrárias*, permite determinar o integral geral da equação linear completa a partir do integral geral da equação homogénea associada.
Considere-se a equação linear de segunda ordem não homogénea

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

e suponhamos que

$$y^* = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

é o integral geral da equação homogénea associada

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Suponhamos também que c_1 e c_2 são funções de x,

$$c_1 = c_1(x), \; c_2 = c_2(x),$$

a determinar, de forma a que

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

seja o integral geral da equação completa.
Uma vez que, temos duas funções a determinar, para além de exigirmos que $y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, verifique a equação

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

imporemos também que

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0.$$

Substituindo

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

na equação

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

tendo em conta que y_1 e y_2 são soluções da equação homogénea e que

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0,$$

obtém-se

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)}.$$

As funções $c_1(x)$ e $c_2(x)$ determinam-se então a partir do sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = \dfrac{f(x)}{a_2(x)}. \end{cases} \tag{0.11}$$

Este último sistema é possível e determinado uma vez que o determinante

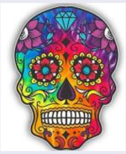
$$W(y_1, y_2) = Det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$

não se anula uma vez que se trata do Wronskiano das funções y_1 e y_2 que são linearmente independentes.

Exemplo

Considere-se a equação

$$y'' + 9y = \frac{1}{\cos(3x)}, \qquad x \in]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[\tag{0.13}$$



As funções $\cos(3x)$ *e* $\sin(3x)$ *são duas soluções linearmente independentes da equação homogénea*

$$y'' + 9y = 0, \tag{0.14}$$

pelo que o seu integral geral será dado por

$$y = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Utilizemos o método da variação das constantes arbitrárias para determinar o integral geral da equação completa.

Exemplo (continuação)

Comecemos por considerar que $y = c_1(x)\cos(3x) + c_2(x)\sin(3x)$ *é o integral geral da equação* (0.13)*com* $c_1(x)$ *e* $c_2(x)$ *funções a determinar através do sistema:*

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos(3x) + c_2'(x)\sin(3x) = 0 \\ c_1'(x)(-3\sin(3x)) + c_2'(x)(3\cos(3x)) = \dfrac{1}{\cos(3x)} \end{cases} .$$

Pela regra de Cramer,

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sen(3x) \\ \dfrac{1}{\cos(3x)} & 3\cos(3x) \end{vmatrix}}{W(\cos(3x), \sin(3x))} = \frac{-\dfrac{\sin(3x)}{\cos(3x)}}{3} = -\frac{\sin(3x)}{3\cos(3x)},$$

Exemplo (continuação)

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(3x) & 0 \\ -3\sin(3x) & \dfrac{1}{\cos(3x)} \end{vmatrix}}{W(\cos(3x), \sin(3x))} = \frac{\dfrac{\cos(3x)}{\cos(3x)}}{3} = \frac{1}{3},$$

donde

$$c_1(x) = \frac{log(\cos(3x))}{9} + c_1, \;\; c_2(x) = \frac{x}{3} + c_2, \quad com\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Então, o integral geral da equação diferencial linear (0.13) *é*

$$y = \left(\frac{1}{9}\, log(\cos(3x)) + c_1\right)\cos(3x) + \left(\frac{x}{3} + c_2\right)\sin(3x)$$
$$= c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) + \frac{x\ \sin(3x)}{3} + \frac{1}{9} log(\cos(3x))\cos(3x).$$

Exemplo (continuação)

Observe-se que, e de acordo com o teorema ***** *, o integral geral determinado é da forma*

$$y = y^* + \bar{y}$$

em que

$$y^* = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

é o integral geral da equação linear homogénea associada e

$$\bar{y} = \frac{x \sin(3x)}{3} + \frac{1}{9} log(\cos(3x)) \cos(3x)$$

é uma solução particular da equação (0.13).

Generalização

O método da variação das constantes arbitrárias, generaliza-se para a equação linear de ordem n

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

e permite também determinar a solução geral desta equação a partir da solução geral da equação homogénea associada

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Sendo $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$ a solução geral da equação homogénea suporemos também que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são n funções de x,

$$c_1 = c_1(x),\ c_2 = c_2(x), \ldots,\ c_n = c_n(x),$$

a determinar, de forma a que

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x)$$

seja o integral geral da equação completa.
As funções $c_1(x),\ c_2(x), \ldots,\ c_n(x)$, determinam-se começando por resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + \ldots + c_n'(x)y_n = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + \ldots + c_n'(x)y_n' = 0 \\ \ldots \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)} + c_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_n(x)} \end{array}\right. . \tag{0.12}$$

Tal como no caso da equação linear de segunda ordem, este último sistema é possível e determinado pois o determinante

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(x) = Det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

não se anula uma vez que se trata do Wronskiano das funções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ que são linearmente independentes.

Obtidas as funções

$$c_1'(x),\ c_2'(x), \ldots, c_n'(x)$$

calculam-se as suas primitivas

$$c_1(x),\ c_2(x), \ldots, c_n(x)$$

e a equação completa tem por integral geral

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x),$$

com as funções $c_1(x),\ c_2(x), \ldots, c_n(x)$ assim obtidas.

A equação linear de ordem n de coeficientes constantes

Vamos, em seguida, considerar um caso particular de equações lineares: as *equações lineares de coeficientes constantes*. Uma equação linear de coeficientes constantes é uma equação da forma

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0) y = f(x),$$

em que $a_0, \dots, a_n$ são constantes reais e $a_n \neq 0$. Ao operador

$$P = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0,$$

chama-se operador de coeficientes constantes de ordem n.

Exemplo

$$2y'' - 3y' + y = \cos x$$

Considere-se a equação linear homogénea de segunda ordem e de coeficientes constantes

$$(a_2D^2 + a_1D + a_0)y = 0.$$

Vamos associar ao operador $P = a_2D^2 + a_1D + a_0$ um polinómio real na variável real r com os mesmos coeficientes de P, isto é

$$a_2r^2 + a_1r + a_0.$$

A este polinómio, chama-se polinómio característico da equação diferencial linear de segunda ordem e de coeficientes constantes, e a

$$a_2r^2 + a_1r + a_0 = 0,$$

equação característica da mesma equação.

Exemplo

A equação linear homogénea de segunda ordem e de coeficientes constantes

$$2y'' - 3y' + y = 0,$$

usando o operador D de derivação escreve-se na forma

$$(2D^2 - 3D + 1)y = 0.$$

Esta equação tem por polinómio característico

$$2r^2 - 3r + 1,$$

e por equação característica

$$2r^2 - 3r + 1 = 0.$$

A equação linear homogénea de segunda ordem de coeficientes constantes (reais), escrita na forma normal (coeficiente líder igual a 1)

$$(D^2 + a_1 D + a_0)y = 0,$$

tem por equação característica

$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0.$$

As soluções de uma equação de segunda ordem de coeficientes reais podem ser reais e distintas, reais e iguais, ou complexas conjugadas. No que segue iremos considerar cada um destes três casos.

Analisemos cada um dos casos...

1 Comecemos por supor que

$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0,$$

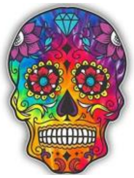
tem por soluções $r = \alpha_1$ e $r = \alpha_2$ reais e distintas. Então a equação

$$(D^2 + a_1 D + a_0)y = 0,$$

pode ser escrita na forma

$(D - \alpha_2)(D - \alpha_1)y = 0,$ (resp. na forma $(D - \alpha_1)(D - \alpha_2)y = 0$).

Vejamos que as funções



$$y_1(x) = e^{\alpha_1 x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{\alpha_2 x}$$

são duas soluções linearmente independentes. Com efeito,

$$(D - \alpha_1)e^{\alpha_1 x} = De^{\alpha_1 x} - \alpha_1 e^{\alpha_1 x} = \alpha_1 e^{\alpha_1 x} - \alpha_1 e^{\alpha_1 x} = 0,$$

pelo que

$$(D - \alpha_2)(D - \alpha_1)e^{\alpha_1 x} = 0,$$

analogamente, se mostra que

$$(D - \alpha_1)(D - \alpha_2)e^{\alpha_2 x} = 0.$$

Segue-se que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação.

Provemos que são linearmente independentes mostrando que o seu Wronskiano não se anula. Tem-se que

$$W(y_1, y_2) = Det \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \alpha_2 e^{\alpha_2 x} \end{bmatrix} = (\alpha_2 - \alpha_1)e^{(\alpha_1 + \alpha_2)x} \neq 0.$$

Então o conjunto $\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}\}$ é um sistema fundamental de soluções e a equação considerada tem por solução geral

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

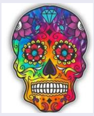
Considere-se a equação diferencial linear de segunda ordem homogénea e de coeficientes constantes

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Utilizando o operador de derivação D a equação escreve-se na forma

$$(D^2 - 2D - 3)y = 0,$$

e tem por equação característica



$$r^2 - 2r - 3 = 0,$$

que tem por soluções $r = -1$ e $r = 3$. Então o conjunto $\{e^{-x}, e^{3x}\}$ é um sistema fundamental de soluções e a equação tem por solução geral

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2

Suponhamos agora que as soluções $r = \alpha_1$ e $r = \alpha_2$ são reais mas iguais, isto é, α_1 é uma raíz dupla do polinómio característico. Então o polinómio característico da equação admite a factorização

$$(r - \alpha_1)^2,$$

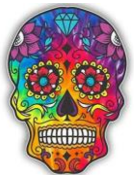
e a equação, pode ser escrita na forma

$$(D - \alpha_1)^2 y = 0.$$

Vejamos que neste caso as funções

$$y_1(x) = e^{\alpha_1 x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = xe^{\alpha_1 x}$$

são duas soluções linearmente independentes.



É óbvio que $y_1(x)$ é solução da equação, vejamos que $y_2(x)$ também o é. Tem- se que

$$
\begin{aligned}
(D-\alpha_1)^2(xe^{\alpha_1 x}) =& (D^2 - 2\alpha_1 D + \alpha_1^2)(xe^{\alpha_1 x}) \\
=& D^2(xe^{\alpha_1 x}) - 2\alpha_1 D(xe^{\alpha_1 x}) + \alpha_1^2(xe^{\alpha_1 x}) = 0.
\end{aligned}
$$

Provemos que são linearmente independentes. Tem-se que

$$W(y_1, y_2) = Det \begin{bmatrix} e^{\alpha_1 x} & xe^{\alpha_1 x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_1 x} + \alpha_1 xe^{\alpha_1 x} \end{bmatrix} = e^{2\alpha_1 x} \neq 0.$$

Então o conjunto $\{e^{\alpha_1 x}, xe^{\alpha_1 x}\}$ é um sistema fundamental de soluções e a equação tem por solução geral

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 xe^{\alpha_1 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

que pode ser escrita na forma

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\alpha_1 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

Considere-se a equação diferencial linear de segunda ordem homogénea e de coeficientes constantes

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Utilizando o operador de derivação D a equação escreve-se na forma

$$(D^2 - 4D + 4)y = 0,$$

e tem por equação característica

$$r^2 - 4r + 4 = 0,$$

que tem a solução dupla $r = 2$. Então o conjunto $\{e^{2x}, xe^{2x}\}$ é um sistema fundamental de soluções e a equação tem por solução geral

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} = (c_1 + c_2 x)e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3

Suponhamos agora que as soluções $r = \alpha_1$ e $r = \alpha_2$ são complexas conjugadas, isto é, $\alpha_1 = a + ib$ e $\alpha_2 = a - ib$ $(b \neq 0)$. Neste caso o polinómio característico da equação admite a factorização

$$(r-a)^2 + b^2,$$

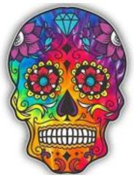
e a equação, pode ser escrita na forma

$$((D-a)^2 + b^2)y = 0.$$

Neste caso as funções

$$y_1(x) = e^{ax}\cos bx \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{ax}\sin bx,$$

são duas soluções linearmente independentes.



Facilmente se verifica que

$$((D-a)^2+b^2)e^{ax}\cos bx = (D^2-2aD+a^2+b^2)(e^{ax}\cos bx) = 0,$$

e também que

$$((D-a)^2+b^2)e^{ax}\sin bx = (D^2-2aD+a^2+b^2)(e^{ax}\sin bx) = 0.$$

A independência linear prova-se uma vez mais mostrando que o Wronskiano destas funções não se anula. Com efeito

$$\begin{aligned} W(y_1,y_2) =& Det \begin{bmatrix} e^{ax}\cos bx & e^{ax}\sin bx \\ ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx & ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx \end{bmatrix} \\ =& be^{2ax} \neq 0, \end{aligned}$$

Então o conjunto $\{e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx\}$ é um sistema fundamental de soluções e a equação tem por solução geral

$$y = c_1 e^{ax}\cos bx + c_2 e^{ax}\sin bx, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

A equação

$$y'' - 10y' + 41y = 0,$$

utilizando o operador de derivação D escreve-se na forma

$$(D^2 - 10D + 41)y = 0,$$

e tem por equação característica

$$r^2 - 10r + 41 = 0.$$

Esta equação tem como soluções $r = 5 \pm 4i$, pelo que o conjunto $\{e^{5x}\cos 4x, e^{5x}\sin 4x\}$ é um sistema fundamental de soluções e a equação tem por solução geral

$$y = c_1 e^{5x}\cos 4x + c_2 e^{5x}\sin 4x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4

Exemplo

Pelo que acabou de ser visto a equação

$$(D^3+15D^2+75D+125)y=0$$

$$(D+5)^3y=0,$$

Generalização da situação 4 (anterior)

No que se segue, sendo α uma constante real e $k \in \mathbb{N}$, pretendemos determinar a solução geral da equação

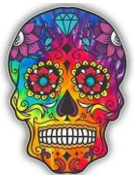
$$(D-\alpha)^k y = 0.$$

Trata-se de uma equação diferencial linear homogénea de ordem k, cujo polinómio característico

$$(r-\alpha)^k$$

tem a raíz $r = \alpha$ com multiplicidade k.

$y_1(x) = e^{\alpha x}$ $\quad y_2(x) = xe^{\alpha x}$ $\quad y_3(x) = x^2 e^{\alpha x}$ $\quad \ldots y_k = (x)x^{k-1}e^{\alpha x}$



São K soluções l.i. da equação homogénea correspondente

Já foi visto que equação diferencial

$$Dy = 0,$$

(equação diferencial linear homogénea de primeira ordem com $p(x) = 0$) tem por solução geral as funções constantes (funções polinomiais de grau zero) isto é da forma

$$y = c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R},$$

e também que a equação diferencial

$$(D - \alpha)y = 0,$$

(equação diferencial linear homogénea de primeira ordem com $p(x) = -\alpha$) tem por solução geral as funções

$$y = c_0 e^{\alpha x}, \quad c_0 \in \mathbb{R},$$

produto da exponencial $e^{\alpha x}$ por funções polinomiais de grau zero.

A equação diferencial

$$D^2 y = 0,$$

(equação diferencial linear homogénea de segunda ordem em que $r = 0$ é raíz dupla polinómio característico) tem por solução geral as funções polinomiais do primeiro grau

$$y = c_0 + c_1 x, \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Já foi visto também, que a equação diferencial

$$(D - \alpha)^2 y = 0,$$

(equação diferencial linear homogénea de segunda ordem em que $r = \alpha$ é raíz dupla polinómio característico) tem por solução geral as funções

$$y = (c_0 + c_1 x)e^{\alpha x}, \quad c_0 \in \mathbb{R},$$

que são o produto da exponencial $e^{\alpha x}$ por funções polinomiais do primeiro grau.

Tendo em conta que a equação diferencial de ordem k

$$D^k y = 0,$$

tem por tem por solução geral as funções polinomiais de grau $k-1$,

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{k-1} x^{k-1}, \quad c_0, c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R},$$

o que foi visto para o caso $k=1$ e $k=2$ parece sugerir que a equação

$$(D-\alpha)^k y = 0,$$

tem por solução geral

$$y = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{k-1} x^{k-1}) e^{\alpha x}, \quad c_0, c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbb{R},$$

produto da exponencial $e^{\alpha x}$ por funções polinomiais de grau $k-1$. De facto assim é e para o demonstrarmos comecemos por considerar a seguinte proposição.

Proposição

Seja α uma constante real e y uma função com derivadas de todas as ordens em $\mathbb{R}$. Então

$$D^n(e^{-\alpha x}y) = e^{-\alpha x}(D-\alpha)^n y, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Demonstração:

Para $n = 1$ vem que

$$D(e^{-\alpha x}y) = -\alpha e^{-\alpha x}y + e^{-\alpha x}Dy = e^{-\alpha x}(Dy - \alpha y) = e^{-\alpha x}(D-\alpha)y.$$

Admitindo por hipótese que

$$D^n(e^{-\alpha x}y) = e^{-\alpha x}(D-\alpha)^n y,$$

Demonstração: (continuação)

mostremos que

$$D^{n+1}(e^{-\alpha x}y) = e^{-\alpha x}(D-\alpha)^{n+1}y.$$

Ora,

$$\begin{aligned}
D^{n+1}(e^{-\alpha x}y) =& D(D^n(e^{-\alpha x}y)) \\
=& D(e^{-\alpha x}(D-\alpha)^n y) \\
=& -\alpha e^{-\alpha x}(D-\alpha)^n y + e^{-\alpha x}D(D-\alpha)^n y \\
=& e^{-\alpha x}(-\alpha(D-\alpha)^n + D(D-\alpha)^n)y \\
=& e^{-\alpha x}(D-\alpha)(D-\alpha)^n y \\
=& e^{-\alpha x}(D-\alpha)^{n+1}y,
\end{aligned}$$

como pretendido.

Mostremos, então que a equação

$$(D-\alpha)^k y = 0,$$

tem por solução geral

$$y = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{k-1} x^{k-1}) e^{\alpha x}.$$

Se mostrarmos que $e^{-\alpha x}(D-\alpha)^k y = 0$, então $(D-\alpha)^k y = 0$ e ficará provado o resultado pretendido. Provemos então que

$$e^{-\alpha x}(D-\alpha)^k y = 0.$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} e^{-\alpha x}(D-\alpha)^k y =& e^{-\alpha x}(D-\alpha)^k (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{k-1} x^{k-1}) e^{\alpha x} \\ =& D^k (e^{-\alpha x}(c_0 + c_1 x + \ldots + c_{k-1} x^{k-1}) e^{\alpha x}) \\ =& D^k (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{k-1} x^{k-1}) \\ =& 0. \end{aligned}$$

Em particular cada uma das k funções

$$y_1 = e^{\alpha x},\ y_2 = xe^{\alpha x},\ \ldots,\ y_k = x^{k-1}e^{\alpha x},$$

é solução da equação. A independência linear destas funções é uma consequência imediata da independência linear dos polinómios $1, x, x^2, \ldots, x^{k-1}$ já provada anteriormente, pelo que o conjunto

$$\{e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\}$$

contitui um sistema fundamental de soluções e a equação tem por solução geral

$$y = c_0 e^{\alpha x} + c_1 x e^{\alpha x} + c_2 x^2 e^{\alpha x} + \ldots + c_{k-1} x^{k-1} e^{\alpha x},$$

ou ainda

$$y = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{k-1} x^{k-1}) e^{\alpha x}.$$

Exemplo

A equação

$$(D^2 - 4D + 5)^2 y = 0,$$

tem como polinómio característico

$$(r^2 - 4r + 5)^2$$

cujas raízes são $r = 2 \pm i$, *cada uma com multiplicidade dois pelo que a equação admite a factorização*

$$((D-2)^2 + 1)^2 y = 0.$$

Exemplo (continuação)

O conjunto

$$\{e^{2x}\cos x, xe^{2x}\cos x, e^{2x}\sin x, xe^{2x}\sin x\}$$

é sistema fundamental de soluções e a equação tem como solução geral

$$y = (a_0 + a_1 x)e^{2x}\cos x + (b_0 + b_1 x)e^{2x}\sin x, \quad a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{R}.$$

Generalização da situação 5 (anterior)

É possível mostrar que a equação

$$((D-\alpha)^2+\beta^2)^k y = 0,$$

cujo polinómio característico tem o par de raizes complexas conjugadas $\alpha \pm i\beta$ cada uma com multiplicidade k tem como sistema fundamental de soluções o conjunto constituído pelas $2k$ funções

$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x \quad x^2e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \ldots \quad x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$

+

$e^{\alpha x}\sin\beta x \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x \quad x^2e^{\alpha x}\sin\beta x \quad \ldots \quad x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

A solução geral da equação é

$$
\begin{aligned}
y =& a_0 e^{\alpha x} \cos \beta x + a_1 x e^{\alpha x} \cos \beta x + \ldots + a_{k-1} x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x + \\
& b_0 e^{\alpha x} \sin \beta x + b_1 x e^{\alpha x} \sin \beta x + \ldots + b_{k-1} x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x,
\end{aligned}
$$

ou ainda

$$
\begin{aligned}
y =& (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1} x^{k-1}) e^{\alpha x} \cos \beta x + \\
& (b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1} x^{k-1}) e^{\alpha x} \sin \beta x,
\end{aligned}
$$

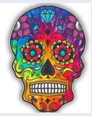
com $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{k-1} \in \mathbb{R}$.

E quando tudo surge numa mesma equação?

Exemplo

A equação diferencial linear de coeficientes constantes

$$(D^2-2)((D-2)^2+9)^2y=0$$



tem como polinómio característico $(r^2-2)((r-2)^2+9)^2$*, que tem as raízes simples* $r=\sqrt{2}$ *e* $r=-\sqrt{2}$ *e o par de raizes complexas* $r=2\pm 3i$*, cada uma com multiplicidade dois. O sistema fundamental de soluções desta equação é o conjunto*

$$\{e^{\sqrt{2}x}, e^{-\sqrt{2}x}, e^{2x}\cos 3x, xe^{2x}\cos 3x, e^{2x}\sin 3x, xe^{2x}\sin 3x\}$$

e a sua solução geral é

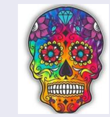
$$y(x)=c_1e^{\sqrt{2}x}+c_2e^{-\sqrt{2}x}+(c_3+c_4x)e^{2x}\cos 3x+(c_5+c_6x)e^{2x}\sin 3x,$$

com $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ *constantes arbitrárias.*

Exemplo

A equação diferencial linear de coeficientes constantes

$$(D^5 + 6D^4 + 9D^3)(D^2 + 2D + 17)y = 0$$



tem como polinómio característico $(r^5 + 6r^4 + 9r^3)(r^2 + 2r + 17)$, *que tem a raíz tripla* $r = 0$, *a raíz dupla* $r = -3$ *e o par de raizes complexas* $r = -1 \pm 4i$ *simples. O sistema fundamental de soluções desta equação é o conjunto*

$$\{1, x, x^2, e^{-3x}, xe^{-3x}, e^{-x}\cos 4x, e^{-x}\sin 4x\}$$

e a sua solução geral é

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + (c_4 + c_5x)e^{-3x} + c_6e^{-x}\cos 4x + c_7e^{-x}\sin 4x,$$

com $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$ *constantes arbitrárias.*

Mas como obter a solução geral da equação linear completa (não homogénea) de coeficientes constantes?

O método da variação das constantes arbitrárias já estudado permite, tal como foi visto, determinar o integral geral de uma equação linear não homogénea, se for conhecido o integral da equação homogénea associada. No entanto, este método nem sempre é o mais expedito. Sabemos que o integral geral da equação completa se obtém somando uma solução da equação completa ao integral geral da equação homogénea. No que se segue iremos ver como determinar, em alguns casos, soluções da equação linear completa.

1. Método da variação das constantes (muitas vezes difícil);
2. Procurar uma sua solução particular.

Vejamos o que se sabe sobre 2...

Proposição

Seja P um operador de coeficientes constantes e considere-se a equação

$$Py = P_k(x), \tag{0.17}$$

em que $P_k(x)$ é um polinómio de grau k.

1. *Se zero não é raiz do polinómio característico da equação $Py = 0$, então a equação (0.17) admite uma solução particular da forma*

$$\overline{y} = Q_k(x)$$

em que $Q_k(x)$ é um polinómio de grau k.

2. *Se zero é raiz do polinómio característico da equação $Py = 0$ com multiplicidade p, então a equação (0.17) admite uma solução particular da forma*

$$\overline{y} = x^p Q_k(x)$$

em que $Q_k(x)$ é um polinómio de grau k.

Exemplo

Considere-se a equação

$$y^{(5)} - 3y''' - 2y'' = x^2 - 3x + 1. \tag{0.18}$$

A equação característica da equação linear homogénea associada é

$$r^5 - 3r^3 - 2r^2 = 0,$$

que tem por soluções $r = 0$ *e* $r = -1$*, ambas com multiplicidade dois, e a solução simples* $r = 2$*. O integral geral da equação homogénea é*

$$y = c_0 + c_1 x + (c_2 + c_3 x)e^{-x} + c_4 e^{2x},$$

com c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 *constantes arbitrárias.*

Exemplo (continuação)

Como o termo independente é um polinómio e zero é raíz do polinómio característico com multiplicidade dois, a equação tem uma solução particular da forma

$$\overline{y} = x^2(\rho_0 + \rho_1 x + \rho_2 x^2) = \rho_0 x^2 + \rho_1 x^3 + \rho_2 x^4.$$

Substituindo $\overline{y}$ *na equação completa obtém-se*

$$0 - 3(6\rho_1 + 24\rho_2 x) - 2(2\rho_0 + 6x\rho_1 + 12x^2\rho_2) = x^2 - 3x + 1,$$

que conduz aos valores de $\rho_0 = -\frac{5}{2}, \rho_1 = \frac{1}{2}, \rho_2 = -\frac{1}{24}$. *O integral geral da equação*(0.18)*é então dado por*

$$y = c_0 + c_1 x + (c_2 + c_3 x)e^{-x} + c_4 e^{2x} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^4,$$

ccom c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 *constantes arbitrárias.* □

As duas proposições que se seguem, tem demonstrações semelhantes à da última proposição e permitem calcular soluções particulares nos casos em que os termos independentes são da forma

$$f(x) = P_k(x)e^{\alpha x},$$

produto de um polinómio por uma exponencial e

$$f(x) = a\cos wx + b\sin wx,$$

a, b e w constantes.

Proposição

Seja P um operador de coeficientes constantes e considere-se a equação

$$Py = P_k(x)e^{\alpha x}, \tag{0.19}$$

em que $P_k(x)$ é um polinómio de grau k e α é uma constante real.

1. Se α não é raiz do polinómio característico da equação $Py = 0$, então a equação (0.19) *admite uma solução particular da forma*

$$\overline{y} = Q_k(x)e^{\alpha x}$$

em que $Q_k(x)$ é um polinómio de grau k.

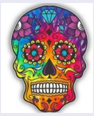
2. Se α é raiz do polinómio característico da equação $Py = 0$ com multiplicidade p, então a equação (0.19) *admite uma solução particular da forma*

$$\overline{y} = x^p Q_k(x)e^{\alpha x}$$

em que $Q_k(x)$ é um polinómio de grau k.

Exemplo

Considere-se a equação



$$y'' - y' = xe^x.$$

O polinómio característico da equação homogénea associada é $r^2 - r$ *cujas raizes são* $r = 0$ *e* $r = 1$*, ambas simples. O integral geral da equação homogénea é*

$$y^*(x) = c_0 + c_1 e^x,$$

com c_0, c_1 *constantes arbitrárias.*
A equação completa é o produto de um polinómio do primeiro grau pela exponencial e^x $(\alpha = 1)$*.*

Exemplo (continuação)

Tendo em conta que $r = 1$ é raiz da equação característica com multiplicidade um, a equação vai admitir uma solução particular da forma

$$\overline{y}(x) = x(\alpha_0 + \alpha_1 x)e^x.$$

Substituindo $\overline{y}$ na equação completa obtêm-se os valores $\alpha_0 = -1$ e $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, pelo que o seu integral geral é

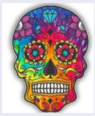
$$y(x) = y^*(x) + y_1(x) = c_0 + c_1 e^x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right) e^x,$$

onde c_0, c_1 são constantes arbitrárias. $\square$

Proposição

Seja P um operador de coeficientes constantes e considere-se a equação

$$Py = a\cos wx + b\sin wx, \tag{0.20}$$



em que a, b e w são constantes.

1. Se wi não é raiz do polinómio característico da equação $Py = 0$, então a equação (0.20) *admite uma solução particular da forma*

$$\overline{y} = a_0\cos wx + b_0\sin wx,$$

em que a_0 e b_0 são constantes a determinar.

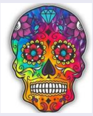
2. Se wi é raiz do polinómio característico da equação $Py = 0$ com multiplicidade p, então a equação (0.20) *admite uma solução particular da forma*

$$\overline{y} = x^p(a_0\cos wx + b_0\sin wx)$$

em que a_0 e b_0 são constantes a determinar.

Exemplo

A equação homogénea associada à equação



$$y' + 2y = \cos x$$

tem como integral geral $y^*(x) = c_0 e^{-2x}$, *com* c_0 *constante arbitrária [justifique]. Tendo em conta que* $r = i$ *não é raiz da equação característica, a equação admite uma solução particular da forma*

$$\overline{y} = a_0 \cos x + b_0 \sin x.$$

Substituindo $\overline{y}$ *na equação completa obtêm-se os valores* $a_0 = \dfrac{2}{5}$ *e* $b_0 = \dfrac{1}{5}$, *pelo que o integral geral da equação completa é*

$$y(x) = c_0 e^{-2x} + \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x, \;\; c_0 \;\; \textit{constante arbitrária.}$$