ANÁLISE MATEMÁTICA III C

7ªsemana de aulas

NOVA SCHOOL OF
SCIENCE & TECHNOLOGY

Cláudio Fernandes

caf@fct.unl.pt

Slides para acompanhamento das aulas TP1 e TP4

O material completo do Prof. João de Deus Marques encontra-se no CLIP, na página da UC

Teorema da Translação na variável s

Afigura-se bastante útil, em diversas aplicações, saber determinar de forma expedita a transformada de Laplace de uma função da forma $e^{at}f(t)$, assumindo que já é conhecida a transformada de Laplace de $f(t)$. O teorema seguinte responde de forma eficaz à questão colocada.

(Teorema 4 exercícios P)

Teorema (Translação na variável s)

Seja a uma constante real e suponhamos que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad s \in]\gamma, \infty[.$$

Então

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a), \quad s \in]a+\gamma, \infty[,$$

por aplicação da transformada de Laplace inversa resulta que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t). \tag{0.11}$$

Exemplo

Já foi visto anteriormente que

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \;\; e \;\; \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\} = \frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

Como consequência do teorema 0.5 tem-se que,

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}t^n\right\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \;\; e \;\; \mathcal{L}\{e^{at}\cos(\omega t)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}.$$

Exemplo

Considere-se o problema de valores iniciais

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad com\ y(0) = 2,\ \ y'(0) = -4.$$

Designando $\mathcal{L}(y)$ *por* Y *e utilizando 0.5, obtém-se*

$$(s^2 + 2s + 5)Y = sy(0) + y'(0) + 2y(0),$$

ou ainda, atendendo às condições iniciais,

$$Y = \frac{2s}{s^2 + 2s + 5}.$$

Exemplo (continuação)

Tendo em conta que

$$s^2 + 2s + 5 = (s+1)^2 + 4 \;\; e \;\; 2s = 2(s+1) - 2,$$

Y pode ser escrita na forma

$$Y = \frac{2(s+1) - 2}{(s+1)^2 + 4} = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2 + 4} - \frac{2}{(s+1)^2 + 4}.$$

Por aplicação da transformada de Laplace inversa vem

$$y(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2 + 4}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2 + 4}\right\}.$$

Atendendo a (0.11), obtém-se a solução para o PVI considerado

$$y(t) = 2e^{-t}\cos 2t - e^{-t}\sin 2t.$$

Teorema da Translação na variável t. A função de Heaviside

Definição

Sendo a uma constante positiva, define-se a função

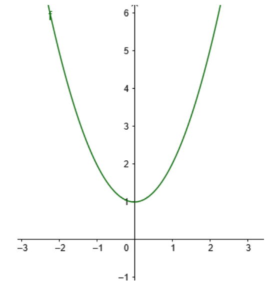
$$u(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ 1, & t > a \end{cases}$$

a que se chama *função de Heaviside* (ou *função-salto* no ponto a).

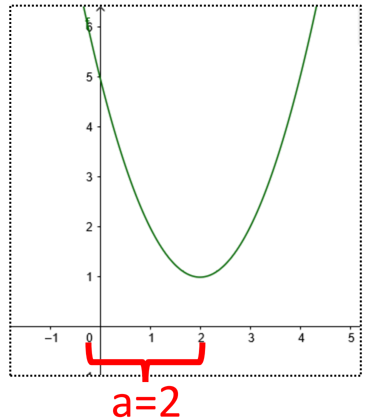
Dada uma função $f(t)$ define-se a função $\widetilde{f}(t)$ como sendo

$$\widetilde{f}(t) = f(t-a)u(t-a).$$

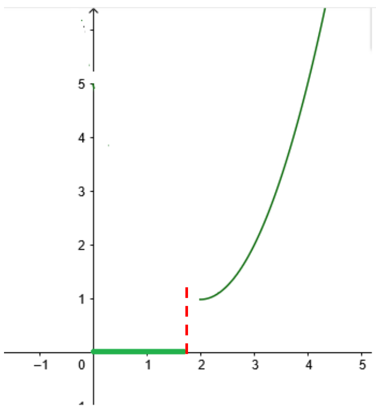
OBSERVAÇÃO: Seja $f(t)$ uma função



Então $f(t-2)$ é a função,



e $\tilde{f}(t) = f(t-2)u(t-2)$ é a função,



Exemplo

Se $a = 3$ *e* $f(t) = e^{2t}$ *vem*

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0, & t < 3 \\ e^{2t-6}, & t > 3. \end{cases}$$

Teorema (Translação na variável t)

Seja a uma constante positiva e suponhamos que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad s \in]\gamma, \infty[$$

então

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s), \quad s \in]\gamma, \infty[,$$

por aplicação da transformada de Laplace inversa tem-se que

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)u(t-a). \tag{0.12}$$

(Teorema 5 exercícios P)

Exemplo

Seja a uma constante positiva. Fazendo $f(t) = 1$ no teorema anterior vem que

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = e^{-as}\mathcal{L}\{1\} = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Exemplo

Determine-se a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{e^{-3s}}{s^3}.$$

Atendendo a que $$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3},$$

vem que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{s^3}\right\} &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-3s}\mathcal{L}\left\{t^2\right\}\right\} \\
&= \frac{1}{2}(t-3)^2\, u(t-3) \\
&= \begin{cases} 0, & 0 < t < 3 \\ \dfrac{(t-3)^2}{2}, & t > 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Exemplo

Determine-se a transformada de Laplace da função $f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ 0, & \pi < t < 2\pi \\ \sin t, & t > 2\pi. \end{cases}$$

Tem-se que

$$f(t) = 1 - u(t-\pi) + u(t-2\pi)\sin t,$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\} =& \mathcal{L}\left\{1 - u(t-\pi) + u(t-2\pi)\sin t\right\} \\ =& \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{u(t-\pi)\} + \mathcal{L}\{u(t-2\pi)\sin(t-2\pi)\} \\ =& \frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Exemplo

Considere-se o problema de valores iniciais

$$y'' + 3y' + 2y = r(t), \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0,$$

com

$$r(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Tem-se que

$$r(t) = 1 - u(t-1).$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação e fazendo $Y = \mathcal{L}\{y\}$, *vem que*

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 3sY - 3y(0) + 2Y = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{u(t-1)\},$$

isto é,

Exemplo (continuação)

$$(s^2 + 3s + 2)Y - (s+3)y(0) - y'(0) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s},$$

ou ainda,

$$Y = \frac{1 - e^{-s}}{s(s+1)(s+2)}.$$

Tendo em conta a decomposição

$$\frac{1}{s\,(s+1)\,(s+2)} = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}}{s+2},$$

tem-se que

$$Y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-s}}{s} - \frac{2e^{-s}}{s+1} + \frac{e^{-s}}{s+2}\right).$$

A solução do PVI é então dada por

Exemplo (continuação)

$$y(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}\right) - e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}\right)\right)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
y(t) &= \frac{1}{2}\left(1 - 2e^{-t} + e^{-2t}\right) - \frac{1}{2}u(t-1)\left(1 - 2e^{-(t-1)} + e^{-2(t-1)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - 2e^{-t} + e^{-2t} - u(t-1)\left(1 - 2e^{1-t} + e^{2-2t}\right)\right) \\
&= \begin{cases} \dfrac{1 - 2e^{-t} + e^{-2t}}{2}, & 0 < t < 1 \\ \dfrac{e^{-2t}(1 - e^{2})}{2} + (e-1)e^{-t}, & t > 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

A função delta de Dirac

Em mecânica é frequente encontrar situações em que uma força de grande intensidade actua sobre um corpo durante um período de tempo muito curto. Situações deste tipo ocorrem, por exemplo, quando se bate numa bola de ténis, quando um avião faz uma aterragem forçada, quando um barco é atingido por uma única onda muito forte, etc.

Em mecânica o impulso de uma força $f(t)$ durante o intervalo de tempo $a \leq t \leq a+k$ é definido como sendo o integral de $f(t)$ entre os instantes a e $a+k$; no caso de um circuito eléctrico é o integral da força electromotriz aplicada ao circuito integrado entre os instantes a e $a+k$. Na prática, têm particular interesse, situações em que o intervalo de tempo é tão curto que se pode considerar instantâneo (isto é, $k \to 0$). Neste sentido considerem-se as seguintes funções:

$$f_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{se } a \leq t \leq a+k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad k > 0.$$

O impulso I_k é unitário uma vez que

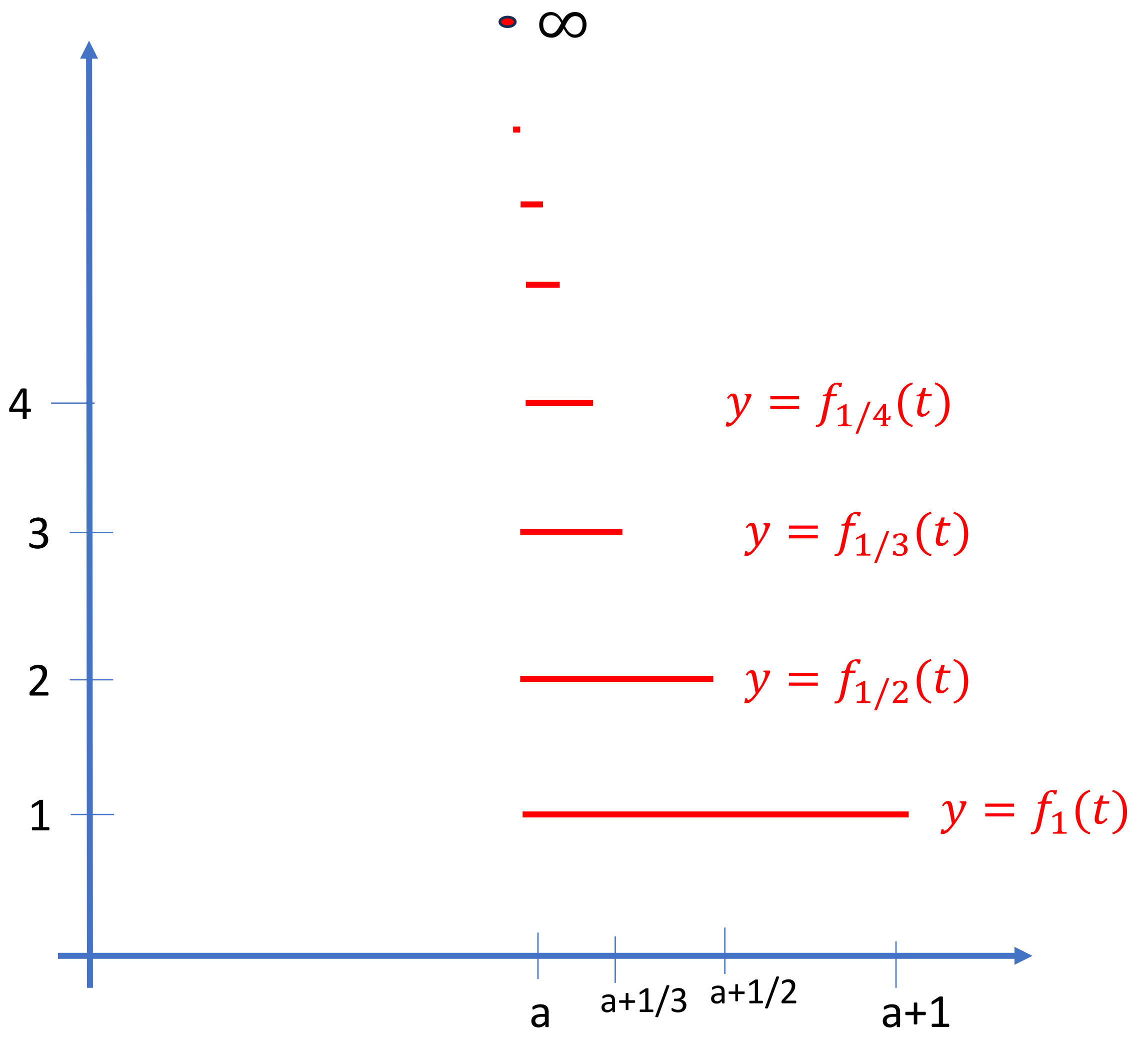
$$I_k = \int_a^{a+k} \frac{1}{k}\, dt = \frac{1}{k} \cdot (a + k - a) = 1. \tag{0.13}$$

Ao limite de $f_k(t)$ quando $k \to 0$ chama-se *"função" Delta de Dirac*, e representa-se por $\delta(t-a)$. Tem-se então que

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & \text{se } t = a \\ 0, & \text{se } t \neq a \end{cases}, \quad . \tag{0.14}$$

OBSERVAÇÃO:

$$f_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{se } a \le t \le a+k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad k > 0.$$



$$\boxed{\lim_{k \to 0} f_k = \delta(t-a)}$$

$$\delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & \text{se } t = a \\ 0, & \text{se } t \neq a \end{cases},$$

É importante referir que $\delta(t-a)$ não é uma função no sentido usual do conceito, uma vez que para $t=a$ toma o valor ∞. Além disso, o integral de uma função que se anula em todo o domínio (excepto num número finito de pontos), é zero, o que não acontece com esta "função". Efectivamente,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \delta(t-a)dt &= \lim_{k\to 0}\int_0^\infty f_k(t)\,dt \\
&= \lim_{k\to 0}\left[\int_0^a f_k(t)\,dt + \int_a^{a+k} f_k(t)\,dt + \int_{a+k}^\infty f_k(t)\,dt\right] \\
&= \lim_{k\to 0}\int_a^{a+k} f_k(t)\,dt \\
&= 1.
\end{aligned}$$

A "função" delta de Dirac faz parte de um tipo de "funções" habitualmente designadas por *funções generalizadas* ou *distribuições*.

Vejamos como determinar a transformada de Laplace de $\delta(t-a)$. Tem-se que

$$f_k(t) = \frac{1}{k}\left(u(t-a) - u(t-(a+k))\right),$$

onde u designa a função de Heaviside. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f_k(t)\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{k}(u(t-a) - u(t-(a+k)))\right\} \\
&= \frac{1}{k}\mathcal{L}\{u(t-a)\} - \frac{1}{k}\mathcal{L}\{u(t-(a+k))\} \\
&= \frac{1}{k} \cdot \frac{e^{-as}}{s} - \frac{1}{k} \cdot \frac{e^{-(a+k)s}}{s} \\
&= \frac{e^{-as}}{ks}(1 - e^{-ks}).
\end{aligned}$$

Assumindo formalmente a continuidade da transformada de Laplace obtém-se

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \lim_{k\to 0}\mathcal{L}\{f_k(t)\} = \lim_{k\to 0}\left\{ e^{-as}\cancelto{1}{\left(\frac{1-e^{-ks}}{sk}\right)}\right\} = e^{-as}.$$

Teorema

Sendo a uma constante real positiva tem-se que

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}, \quad s > 0. \tag{0.15}$$

Derivação e integração da transformada de Laplace

Teorema (Derivação e integração da transformada de Laplace)

Suponhamos que $f(t)$ está nas condições do teorema de existência de transformada de Laplace e que $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$, $s \in]\gamma, \infty[$. Então:

1.
$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad n = 1, 2, \ldots \quad .$$

2. *Se existe e é finito,*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}$$

então

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)\, du, \quad s \in]\gamma, +\infty[.$$

Exemplo

Sabendo que

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2} \;\; e \;\; \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad a \in \mathbb{R},$$

determine-se

$$\boxed{\mathcal{L}\{t\sin(at)\} \;\; e \;\; \mathcal{L}\{t^2e^{at}\}.}$$

As funções $f(t) = \sin(at)$ *e* $g(t) = e^{at}$ *estão nas condições do último teorema, pelo que*

$$\mathcal{L}\{t\sin(at)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right) = \frac{2as}{(s^2+a^2)^2}, \quad s > 0$$

e

$$\mathcal{L}\{t^2e^{at}\} = (-1)^2\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{1}{s-a}\right) = \frac{2}{(s-a)^3}, \quad s > a.$$

Convolução

Sendo $f(t)$ e $g(t)$ duas funções definidas e integráveis em $[0, +\infty[$, represente-se por $f * g$ a função

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau, \quad t \geq 0.$$

À função $f * g$ chama-se *convolução de* $f(t)$ *com* $g(t)$.
É um exercício de rotina mostrar que

$$\int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t - \tau)d\tau,$$

isto é, $f * g = g * f$, pelo que a convolução é comutativa. Para além da comutatividade a convolução possui também, por exemplo, as propriedades:

1. $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$ (distributividade);
2. $(f * g) * h = g * (f * h)$ (associatividade);
3. $f * 0 = 0 * f = 0$ (elemento absorvente).

Observe-se no entanto que $1 * g$ não é em geral igual a $g(t)$ (como é usual estamos a cometer o abuso de linguagem ao representar por 1 a função definida em $[0, \infty[$ identicamente igual a um).

Exemplo

Calcule-se $\cos t * 1$. *Tem-se*

$$\cos t * 1 = \int_0^t \cos(\tau)\, d\tau = [\sin(\tau)]_0^t = \sin t.$$

Exemplo

Determine-se $e^{at} * e^{bt}$ com a e b constantes reais distintas. Tem-se que

$$
\begin{aligned}
e^{at} * e^{bt} &= \int_0^t e^{a\tau} e^{b(t-\tau)} d\tau = e^{bt} \int_0^t e^{(a-b)\tau} d\tau \\
&= e^{bt} \left[\frac{e^{(a-b)\tau}}{a-b} \right]_0^t = \frac{e^{bt}}{a-b} \left(e^{(a-b)t} - 1 \right) \\
&= \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

O cálculo de $\cos t * u(t-\pi)$ *fica facilitado se utilizarmos a comutatividade da convolução [verifique].*

Se $t < \pi$

$$u(t-\pi) * \cos t = \int_0^t 0 \cdot \cos(t-\tau) d\tau = 0;$$

se $t > \pi$

$$u(t-\pi) * \cos t = \int_\pi^t \cos(t-\tau) d\tau = \sin(t-\pi),$$

tendo-se assim que

$$u(t-\pi) * \cos t = -\sin t \cdot u(t-\pi). \tag{0.16}$$

Com o objectivo de motivar o teorema seguinte, considere-se a convolução das funções

$$f(t) = e^t \quad \text{e} \quad g(t) = \sin t.$$

A função $f * g$ pode ser obtida, por exemplo, primitivando a função integranda por partes duas vezes, vindo que

$$(f * g)(t) = \int_0^t e^\tau \sin(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2}(-\sin t - \cos t + e^t).$$

Por outro lado, sabe-se que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s-1} \quad (s > 1) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s^2+1} \quad (s > 0).$$

Efetuando o produto $\mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}$, obtém-se

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}, \quad (s > 1). \tag{0.17}$$

Calculemos agora a transformada de Laplace $f * g$. Tem-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f * g\} &= \frac{1}{2}(-\mathcal{L}\{\sin t\} - \mathcal{L}\{\cos t\} + \mathcal{L}\{e^t\}) \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s-1}\right) \\ &= \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}, \quad (s > 1). \end{aligned} \tag{0.18}$$

Comparando (0.17) e (0.18) verifica-se que

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\}.$$

A igualdade obtida não foi uma coincidência nem é exclusiva das funções f e g consideradas. Com efeito, tem-se o resultado:

Teorema (Teorema da convolução)

Suponhamos que as funções $f(t)$ e $g(t)$ se encontram nas condições do teorema de existência de transformada de Laplace e sejam $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{g\} = G(s)$, $s \in]\gamma, +\infty[$. Então

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\} = F(s)G(s), \quad s \in]\gamma, +\infty[, \tag{0.19}$$

ou equivalentemente

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f\}\mathcal{L}\{g\}\} = f * g, \quad s \in]\gamma, +\infty[. \tag{0.20}$$

Exemplo

Sendo a uma constante real diferente de zero, determine-se

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\}.$$

É conhecido que

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}\ (s > 0) \quad e \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}\ (s > a).$$

Pelo teorema (0.9) vem

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{t\}\mathcal{L}\{e^{at}\}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{t * e^{at}\}\} = t * e^{at}.$$

Exemplo (continuação)

Como,

$$
\begin{aligned}
(t * e^{at})(t) &= \int_0^t \tau e^{a(t-\tau)} d\tau = e^{at} \int_0^t \tau e^{-a\tau} d\tau \\
&= e^{at} \left[-\frac{e^{-a\tau}}{a} \left(\tau + \frac{1}{a} \right) \right]_0^t = \frac{e^{at}}{a^2} \left(-e^{-at}(at+1) + 1 \right)
\end{aligned}
$$

tem-se que

$$
\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2(s-a)} \right\} = \frac{e^{at} - at - 1}{a^2}.
$$

Formulário

Transformadas de Laplace			
$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}$
1	$\dfrac{1}{s}$	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$t^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$\cos wt$	$\dfrac{s}{s^2+w^2}$
$t^a \quad (a \geq 0)$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$\sin wt$	$\dfrac{w}{s^2+w^2}$
$u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$	$\cosh wt$	$\dfrac{s}{s^2-w^2}$
$\delta(t-a) \quad (a > 0)$	e^{-as}	$\sinh wt$	$\dfrac{w}{s^2-w^2}$

Exemplo

Considere-se o problema de valores iniciais

$$y'' + 2y = r(t), \quad y'(0) = 0, \; y(0) = 0,$$

e

$$r(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}.$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação e designando $\mathcal{L}\{y\}$ *por* Y, *obtém-se*

$$s^2 Y + 2Y = \mathcal{L}\{r(t)\}$$

ou ainda

$$Y = \frac{\mathcal{L}\{r(t)\}}{s^2 + 2}.$$

Exemplo (continuação)

Utilizando o teorema (0.9) e a igualdade

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2}\right\} = \frac{\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}}(s > 0)$, *vem que*

$$\begin{aligned} Y &= \frac{\mathcal{L}\{r(t)\}}{s^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}\{r(t)\}\mathcal{L}\{\sin(\sqrt{2}t)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}\{r(t) * \sin(\sqrt{2}t)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}\{(1 - u(t-1)) * \sin(\sqrt{2}t)\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{L}\{1 * \sin(\sqrt{2}t) - u(t-1) * \sin(\sqrt{2}t)\} \end{aligned}$$

e

Exemplo (continuação)

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 * \sin(\sqrt{2}t) - u(t-1) * \sin(\sqrt{2}t)).$$

Tem-se que

$$1 * \sin\sqrt{2}t = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \cos\sqrt{2}t), \quad \textit{[verifique]}.$$

Relativamente a $u(t-1) * \sin(\sqrt{2}t)$ *tem-se*

$$u(t-1) * \sin(\sqrt{2}t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ \displaystyle\int_1^t \sin\sqrt{2}(t-\tau)d\tau, & t > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 \le t < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 - \cos\sqrt{2}(t-1)), & t > 1. \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

obtendo-se a solução do problema considerado

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos\sqrt{2}t}{2}, & 0 \leq t < 1 \\[2ex] \dfrac{\cos\sqrt{2}(t-1) - \cos\sqrt{2}t}{2}, & t > 1. \end{cases}$$

BOM 1ºTeste!

(Chegaram até aqui… ? Valentes!)