TRATAMENTO DE RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Semestre Ímpar – 2021/2022

Departamento de Física da FCT-UNL
Edição de Maria Raposo com base em trabalhos de diversos docentes da FCT/UNL

15 de setembro de 2021

Índice

1. A Incerteza das Medições

As experiências, em Física, têm como objetivo último tirar conclusões acerca do comportamento da natureza. Muitas vezes pretende-se obter um valor por diferentes métodos e verificar se são concordantes. Nenhum valor, medido ou calculado, é um valor exato por motivos vários ele está sempre afetado de incerteza.

A incerteza (u do inglês *uncertainty*) é um valor que quantifica a estatística associada aos erros de medição. O erro de medição (e) é a diferença entre o valor medido (x) e o valor verdadeiro (X) da grandeza:

$$e = x - X$$

Quando se faz a mesma medição várias vezes nas mesmas condições, efetivamente, está a fazer-se uma amostragem da população de erros dessa medição:

$$e_i = x_i\text{-X} \qquad i = 1, \dots, N$$

No entanto, cada erro é a soma do erro sistemático (e_s=constante) com um erro aleatório (e_a variável)

$$e_s + e_{ai} = x_i - X$$

ou seja,

$$x_i = e_{ai} + (X + e_s)$$

a estatística das medições ($u(x)$) apenas pode revelar características do erro aleatório. A estatística nada pode revelar nem sobre o erro sistemático nem sobre o valor verdadeiro. Só a Física o pode fazer.

A característica que $u(x)$ quantifica é a largura do intervalo em que existe uma probabilidade razoável de encontrar o valor verdadeiro da grandeza:

$$x - u(x) < X < x + u(x)$$

Pugnar pelo rigor consiste em minimizar a incerteza.

2. Componentes de uma Medição

O registo do resultado de uma medição deve incluir sempre as seguintes componentes:

1. Valor medido.
2. Incerteza da medição.
3. Unidades.

Exemplos:

(80,0±0,2) N

(6,12±0,03) m

(3±2)x10^2 m/s

(1545±7) m^2

(86±2)x10^4 s

O valor experimental é sempre apresentado só até à casa da respetiva incerteza. A incerteza apresenta-se com um único algarismo não-nulo sem zeros à sua direita. As unidades podem incluir uma potência de dez, comum ao valor e à incerteza.

Assim, é necessário determinar a incerteza antes de escrever o valor medido. Quando a determinação da incerteza implicar cálculos estes devem ser efetuados sem arredondamentos. A redução do número de algarismos da incerteza para um único é sempre feita apenas no fim dos cálculos e com um arredondamento que é sempre por excesso.

3. Unidades

Ao medir uma grandeza, esta é comparada com um padrão de referência; quando se diz que um *Porsche 944* tem 4,29 metros de comprimento, está a dizer-se que o seu comprimento é *4,29 vezes* o de uma barra de um metro, tomada como padrão. O padrão define a unidade da grandeza; o metro é unidade de comprimento, o segundo é unidade de tempo, o quilograma é unidade de massa. Quando utilizamos um número para descrever uma grandeza física, temos de especificar a unidade que estamos a utilizar. A descrição do comprimento como sendo simplesmente "*4,29*" não tem qualquer significado.

As unidades que aqui se referem fazem parte do Sistema Internacional de unidades (S.I.) e são as de aplicação mais geral. Casos há em que se torna mais conveniente adotar outros sistemas de unidades (que aqui não iremos referir), ou até os múltiplos e submúltiplos de unidades do S.I. como por exemplo o centímetro, a hora, etc.

É frequente utilizar equações matemáticas para relacionar as grandezas físicas. Para que estas equações estejam corretas é necessário (embora não suficiente) que estejam dimensionalmente corretas. Por exemplo, se dissermos que uma determinada grandeza A, é definida como $A = mx/t$ onde x é uma distância (tendo portanto a dimensão de comprimento, L), t um tempo (T) e m uma massa (M), a dimensão[1] de A será: $[A] = ML/T$, que é a mesma dimensão do momento linear. Assim, A tem a característica de valor numérico de um momento linear.

As dimensões e as unidades podem ser tratadas como os símbolos algébricos nas multiplicações e divisões. Somas e subtrações, apenas são possíveis de efetuar entre grandezas, não só de igual dimensão, mas também de igual unidade não faz sentido, nem tem significado, somar uma hora com dez metros. Da mesma forma que só faz sentido somar dez metros com sessenta centímetros se antes convertermos um deles para a unidade do outro.

Exemplo de conversão de unidades: $24\ cm^3 = 24 \times (10^{-2}\ m)^3 = 24 \times 10^{-6}\ m^3$ onde simplesmente se substituiu "cm" por "10^{-2} m". Quando um problema requer cálculos, deve escolher-se um sistema consistente de unidades (o S.I. de preferência), utilizar todos os valores em unidades desse sistema, e então levar o cálculo até ao fim. Sabendo a dimensão da grandeza que estamos a calcular, facilmente substituiremos os símbolos das dimensões básicas pelas respetivas unidades, obtendo a unidade da grandeza em cálculo.

Exemplo de determinação de unidades: A grandeza A atrás referida, cuja dimensão é MLT^{-1} (leia-se "massa.comprimento por tempo"), terá no S.I. as unidades kg $m.s^{-1}$.

[1] A entre parêntesis retos lê-se "dimensão de A"

4.Tipos de Medições

Distinguem-se quatro tipos de medições e quatro tipos de determinação da incerteza.

Medições diretas. Quando o resultado é lido diretamente de um aparelho de medida. Neste caso, começa-se por considerar que a incerteza da medição é igual à menor divisão da escala em que a leitura é efetuada. Se o aparelho de medida apresentar valores oscilantes soma-se a amplitude de oscilação à incerteza (nas unidades da escala do aparelho). Esta escala tanto pode ser a escala própria do aparelho como uma escala com divisões menores que é visualmente sobreposta à do aparelho. Ver §4.2.

Medições diretas repetidas. Quando se fazem várias leituras da mesma medida. Ver §4.3.

Medições indiretas. Quando o resultado é obtido através de uma expressão matemática. Neste caso a incerteza é determinada pela **fórmula geral de propagação de incertezas (3)**. Ver §4.4.

Medições gráficas. Quando o resultado é obtido por ajuste de uma expressão matemática a um conjunto de dados correspondentes a medidas de pelo menos duas grandezas diferentes. Ver § 5.

4.1 Incerteza relativa

A incerteza relativa de uma grandeza X é

$$x = \frac{\mathrm{u(X)}}{\mathrm{X}}$$

que pode ser apresentada em percentagem. Assim, a equação (1) mostra que, quando Z= W^E,

$$\frac{\mathrm{u(Z)}}{|\mathrm{Z}|} = |E|\,\frac{\mathrm{u(W)}}{|W|} \qquad (1)$$

ou seja, a incerteza relativa de uma potência é o produto da potência pela incerteza relativa da base.

4.2 Incerteza de leitura

A incerteza de leitura $u_r(x)$ surge sempre que se faz uma medição com um aparelho, e corresponde à menor quantidade que esse aparelho consegue discriminar. Normalmente, toma-se como incerteza de leitura a menor divisão da escala do aparelho com que se fez a medição. Por exemplo, uma vulgar régua graduada tem como menor divisão o milímetro, a incerteza de leitura com uma destas réguas será pois de ***1 mm***.

Um outro critério, fazendo uso do **bom senso** (que é imperativo nestas questões de tratamento de dados experimentais), aplica-se quando é possível visualizar uma interpolação entre as marcas da escala analógica, podendo o erro de leitura ser menor do que essa menor divisão.

Numa régua graduada (por exemplo) muitas vezes se admite que se consegue distinguir metade da menor divisão da escala, e que o erro de leitura será de metade desse valor: ***0,5 mm***.

Pelo contrário, a incerteza de leitura poderá ser superior à menor divisão da escala. Por exemplo, quando o ponteiro de um galvanómetro oscila sem parar. Na medida de um comprimento podemos não ter absoluta certeza sobre o ponto onde começa e/ou acaba o dito comprimento (por exemplo, na medida do comprimento de uma esponja). Na medida de um intervalo de tempo podemos não ter absoluta certeza do início e/ou fim de determinado acontecimento (por exemplo, o nascimento de um bebé). Todos os efeitos que influenciam o rigor da medição devem ser adicionados na incerteza de leitura (por exemplo, no nascimento de um bebé, adiciona-se à incerteza do aparelho de medida, o tempo que o bebé demorou a sair da barriga da mãe, considerando como início o momento em que começou a sair).

A incerteza de uma única medição é igual à incerteza de leitura da medida.

4.3 Incerteza estatística

Se uma medição é repetida várias vezes nas mesmas condições, usaremos o seu valor médio como a melhor estimativa para o valor verdadeiro, nos cálculos e comparações posteriores. A repetição sistemática da experiência permite minimizar o efeito dos erros aleatórios. O erro experimental será calculado estatisticamente. O valor médio é dado pela relação

$$x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

em que x_1, x_2, . . . x_N são os vários valores medidos e N é o número de experiências realizadas.

A incerteza de x é então dada por

$$u(x) = \sqrt{S_m^2 + u_r^2(x)} \qquad (2)$$

onde $u_r^2(x)$ é a contribuição associada à resolução do instrumento de medida e S_m é o desvio padrão do valor médio, calculado da seguinte maneira:

$$S_m = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

em que s é o desvio padrão da amostragem:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} d_i^2}{N-1}}$$

onde entram os desvios em relação à média $d_i = x_i - x$. A equação (2) mostra que mesmo repetindo a medição não é possível obter uma incerteza inferior à incerteza de leitura.

4.3.1 Exemplo

Considere o seguinte conjunto de medições do alcance A de um projétil nas mesmas condições:

Ensaio	1	2	3	4	5	6
A/mm $u_r(A)$=0,5 mm	755,0	756,5	747,0	762,5	759,0	752,0

O valor da medição vai ser igual ao valor médio, ou seja:

$$A = \frac{755 + 756,5 + 747 + 762,5 + 759 + 752}{6} = 755,333 \text{ mm}$$

Antes de calcularmos o desvio padrão, vamos calcular os desvios em relação à média:

Ensaio	1	2	3	4	5	6
d/mm	-0,333	1,167	-8,333	7,167	3,667	-3,333

O desvio padrão obtém-se pela definição, obtendo-se:

$$s = \sqrt{\frac{0,333^2 + 1,167^2 + 8,333^2 + 7,167^2 + 3,667^2 + 3,333^2}{N-1}} = 5,42\ mm$$

O desvio padrão da média é:

$$S_m = \frac{5,42}{\sqrt{6}} = 2,21 \text{ mm}$$

A incerteza associada ao alcance é:

$$u(A) = \sqrt{2,21^2 + 0,5^2} = 2,26 = 3\ mm$$

Por fim, juntando a informação, o alcance é:

$A = (755 \pm 3)\ mm$

4.4 Propagação da incerteza

Consoante façamos uma ou mais medidas de uma grandeza assim temos associada, respetivamente, uma incerteza de leitura e/ou uma incerteza estatística. Ao utilizar estes valores em cálculos, essas incertezas vão propagar-se. Seja Z a grandeza em questão, função das variáveis $W_1, W_2, \ldots, Wn$ com incertezas $u(W_1), u(W_2), \ldots, u(W_n)$, respetivamente:

$Z = f(W_1, W_2, \ldots; W_n)$

Então a incerteza associada a Z pode ser calculada com base na expressão geral de propagação da incerteza:

$$u(Z) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial W_1} u(W_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial W_2} u(W_2)\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial W_n} u(W_n)\right)^2} \qquad (3)$$

O símbolo ∂ numa expressão com derivadas significa tratar-se de uma derivada parcial. O cálculo de tal derivada é feito em relação à variável em causa, assumindo que todas as outras variáveis são constantes.

4.4.1 Casos Particulares da Propagação da Incerteza

São de referir dois casos particulares:

Somas e subtrações. Quando

$Z = W_1 \pm W_2 \pm \ldots \pm W_n$

obtêm-se

$$u(Z) = \sqrt{u^2(W_1) + u^2(W_2) + \cdots + u^2(W_n)}$$

Produtos e divisões. Quando

$$Z = \frac{W_1 W_2 \dots W_m}{W_{m+1} W_{m+2} \dots W_n}$$

obtêm-se

$$\frac{u(Z)}{|Z|} = \sqrt{\left(\frac{u(W_1)}{W_1}\right)^2 + \left(\frac{u(W_2)}{W_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{u(W_n)}{W_n}\right)^2} \qquad (4)$$

4.4.2 Primeiro Exemplo

Tendo os valores experimentais do comprimento de dois lados de um retângulo, L_1 e L_2, pretende-se obter o valor experimental da área do retângulo, A.

Os valores experimentais são:

$L_1 = (636{,}0 \pm 0{,}5)\ mm$ e $L_2 = (25{,}3 \pm 0{,}1)\ mm$

A área é:

$A = L1 \times L2 = 636{,}0 \times 25{,}3 = 16090{,}8 = 16091\ mm^2$

A incerteza associada à área é:

$$u(A) = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial L_1} u(L_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial L_2} u(L_2)\right)^2} = \sqrt{\left(L_2 \times u(L_1)\right)^2 + \left(L_1 \times u(L_2)\right)^2}$$

$$u(A) = \sqrt{(25{,}3 \times 0{,}5)^2 + (636{,}0 \times 0{,}1)^2} = 64{,}8\ mm^2 = 7 \times 10^1\ mm^2$$

Ou seja, o valor experimental de área do retângulo é:

$\boldsymbol{A = (1609 \pm 7) \times 10^1\ mm^2 = (160{,}9 \pm 0{,}7)\ cm^2}$

4.4.3 Segundo Exemplo

Pretende-se obter a aceleração de um corpo que desliza sobre um plano muito inclinado através da expressão

$a = g\cos\alpha$

em que $g = (9{,}80 \pm 0{,}05)\ m/s^2$ é a aceleração de queda livre e $\alpha = (10 \pm 1)^o$ é o ângulo do plano em relação à vertical.

A incerteza de a, ou seja, $u(a)$ é obtida pela equação (3):

$$u(a) = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial g} u(g)\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial \alpha} u(\alpha)\right)^2}$$

em que as derivadas parciais são $\frac{\partial a}{\partial g} = cos\alpha$ e $\frac{\partial a}{\partial \alpha} = -gsen\alpha$ ou seja, $u(a) = \sqrt{\left(cos\alpha\, u(g)\right)^2 + \left(-gsen\alpha\, u(\alpha)\right)^2}$. Note-se que a última derivada parcial é uma aceleração e, consequentemente, $u(\alpha)$ é adimensional, ou seja, o ângulo α tem que ser convertido para radianos (a unidade "radiano" é, por definição, adimensional e é usada para identificar números que são ângulos):

$$\alpha = (10 \pm 1)° = (10 \pm 1)°\frac{\pi rad}{180°} = (10 \pm 1)°\frac{3{,}1416}{180°}rad = (0{,}17 \pm 0{,}02)rad$$

Assim, obtemos:

$$u(a) = \sqrt{(cos(0{,}17)\ \times 0{,}05)^2 + (-9{,}80 \times sen(0{,}17) \times\ 0{,}02)^2} = 0{,}0594$$
$$= 0{,}06\, m/s^2$$

e

$a = 9{,}80\ cos(0{,}17) = 9{,}6587\ m/s^2$;

o que que nos permite concluir que

$\boldsymbol{a = (9{,}66 \pm 0{,}06)\ ms^2}$.

5. Gráficos

O objetivo de um gráfico é a visualização fácil da relação entre pelo menos duas grandezas.

Nenhum gráfico está completo se não contiver: título ou legenda; identificação dos eixos; unidades das grandezas em cada eixo; escalas; pontos; e barras de incerteza (ver figura 1).

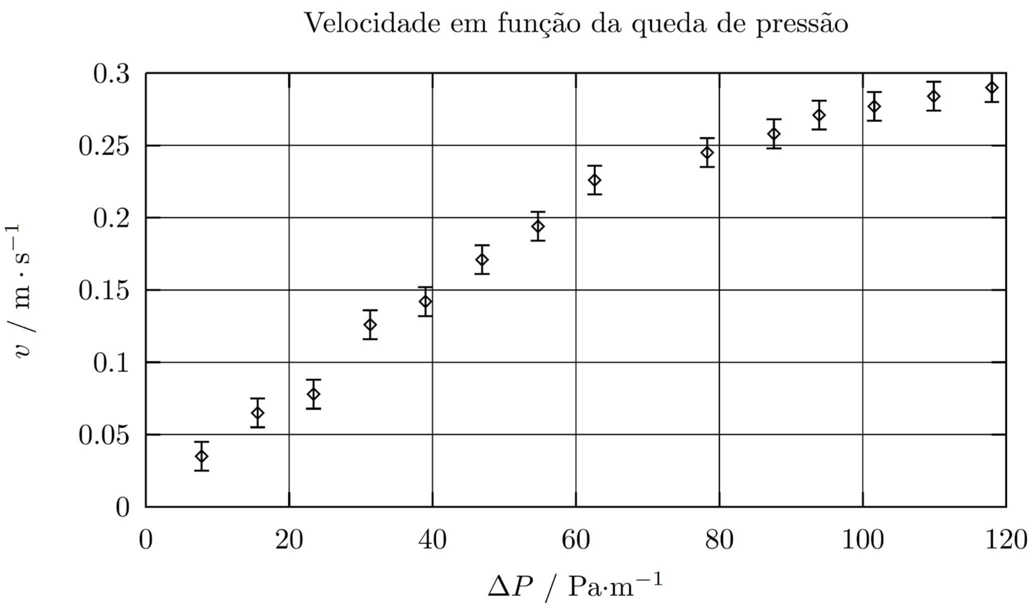
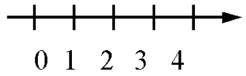


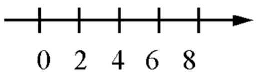
Figura 1 – Exemplo de um gráfico. Denote a presença de título, identificação dos eixos, unidades das grandezas em cada eixo, escalas; pontos e barras de incerteza.

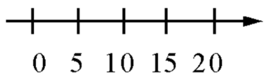
Os dados experimentais devem ser apresentados graficamente sempre que se pretenda visualizar uma determinada relação matemática. O mais comum é um gráfico em escala linear (papel milimétrico). No entanto, podem também ser usadas outras escalas como logarítmicas e semi-logarítmicas. Neste último caso, uma escala é logarítmica e a outra é linear.

Diferentes conjuntos de pontos podem ser representados no mesmo gráfico, utilizando símbolos diferentes para cada conjunto, e identificando-os numa legenda adequada.

Os eixos desse gráfico deverão estar identificados com a grandeza que representam e a respetiva unidade (por exemplo, t/s indicará a grandeza tempo medida em segundos), graduados em múltiplos de 1, 2 ou 5 (eventualmente afetos a potências de 10). A escala deve ser escolhida de forma que os pontos fiquem espalhados na área de representação.



ou


ou


Os erros associados a cada ponto representado marcam-se como **barras de incerteza**. Estas são de comprimento igual ao dobro da incerteza que foi calculada para cada ponto, centradas neste, em ambas as coordenadas. Isto, para um ponto que esteja fora da linha (reta), irá ajudar a compreender se o desvio em relação a essa linha acontece pela incerteza do valor, ou por algum erro sistemático que possa ter ocorrido na experiência.

Quando se espera que a relação entre as coordenadas dos pontos de um gráfico seja linear, ou seja, quando o modelo físico que relaciona as grandezas do gráfico é uma reta, calcula-se o seu declive e a sua ordenada na origem pelo método dos mínimos desvios quadráticos. No entanto, no caso extremo em que só existe ou só se considera um par de pontos experimentais (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2), obtém-se diretamente o declive

$$m_{dec} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \tag{5}$$

e a ordenada na origem

$$b_{ord} = Y_1 - m_{dec} X_1 \tag{6}$$

Assim, a equação (3) fornece

$$\frac{u(m_{dec})}{m_{dec}} = \sqrt{\frac{u^2(X_1) + u^2(X_2)}{\Delta X^2} + \frac{u^2(Y_1) + u^2(Y_2)}{\Delta Y^2}} \tag{7}$$

e

$$u(b_{ord}) = \sqrt{u^2(Y_1) + X_1^2 u^2(m_{dec}) + m_{dec}^2 u^2(X_1)} \tag{8}$$

Note-se que é algo arriscado efetuar o cálculo dos parâmetros de uma reta a partir de apenas dois pontos experimentais. Como se pode ver na figura 1, há demasiados pares de pontos que, tomados isoladamente, fornecem retas enganosas. Assim será conveniente obter mais pares de pontos. Por conseguinte o declive e a ordenada na origem da equação linear com n pares de pontos experimentais serão obtidos usando-se as equações:

$$m_{dec} = \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2} \tag{9}$$

$$b_{ord} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2} \tag{10}$$

As incertezas associadas a m_{dec} e a b_{ord} também podem ser calculadas. No caso em que a coordenada X não tem incerteza associada e em que a grandeza dependente Y tem uma distribuição Gaussiana em torno da melhor reta, demonstra-se que os desvios padrão, ou incertezas, de m_{dec} e de b_{ord} são dados por:

$$u(m_{dec}) = \sqrt{\frac{\frac{n\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-(m_{dec}X_i+b_{ord})\right)^2}{(n-2)}}{\left(n\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right)}} \qquad (11)$$

$$u(b_{ord}) = \sqrt{\frac{\frac{n\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-(m_{dec}X_i+b_{ord})\right)^2\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{(n-2)}}{\left(n\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right)}} \qquad (12)$$

6. Comparações e conclusões

Este é o ponto de maior importância num relatório já que foi para se chegar a conclusões que se executou todo o trabalho! Ao chegar a este ponto deverão estar realizados todos os cálculos das grandezas em jogo, e respetivas incertezas. Assim, dever-se-á representar o(s) intervalo(s) dos valores experimentais obtido(s), e comparar, consoante o caso, com o valor previsto ou com o intervalo obtido por um outro método.

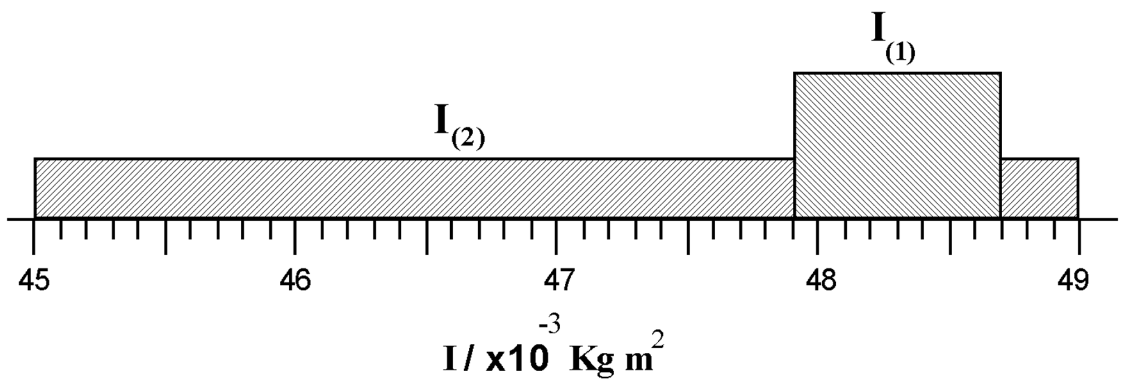
Se o valor previsto estiver contido no intervalo experimental, o resultado será concordante e verificam-se as previsões. No caso em que tenha sido utilizado mais de um método experimental, ou que tenha sido obtida determinada grandeza antes e depois de um dado acontecimento, obter-se-ão dois intervalos.

Por exemplo, quando se determina o momento de inércia de um anel, I, através da sua geometria, e também através da medição do período de oscilação. Suponha que os valores e respetivas incertezas, obtidos por cada um dos métodos, foram, respetivamente,

$I_{(1)} = (48,3 \pm 0,4) \times 10^{-3}\,\text{kg.m}^2$

$I_{(2)} = (47 \pm 2) \times 10^{-3}\,\text{kg.m}^2$

Pode verificar-se que os intervalos de valores admissíveis se intersectam. Pode-se, portanto, dizer que há concordância entre os valores obtidos pelos dois processos.



É, no entanto, de esperar que os valores não sejam sempre concordantes. Uma vez que a incerteza calculada apenas contém informação sobre os erros aleatórios (e uma vez que não pretendemos mascarar a não-concordância com incertezas “inflacionadas"), a não-concordância deve-se a erros sistemáticos que são sempre causados pelas condições específicas da experiência. Não adianta usar causas de erro aleatório para explicar a não-concordância pois as causas de erro aleatório são iguais em todas as experiências.

Adicionalmente, a história mostra que as não-concordâncias que persistem, depois de se terem eliminado todas as causas tecnológicas de erro sistemático, resultam de pressupostos errados dos modelos físicos.

Um modelo físico é uma versão simplificada de um sistema físico complexo, cuja análise completa seria difícil, se não impossível. Analisando um sistema, poder-se-á prever o seu comportamento, com base num modelo - a validade das previsões é a validade do modelo.

7. Antes dos Trabalhos Experimentais

Nesta introdução a tratamento de resultados, optou-se por separar o mais possível a Física dos procedimentos de medição. Embora isto aumente a desconexão entre as aulas teóricas e as aulas laboratoriais, crê-se que só assim a metodologia das medições pode ser devidamente realçada. A metodologia das medições é objeto de normas internacionais [1] que estão subjacentes não só à Ciência, mas também à Engenharia.

8. Bibliografia

[1] Guide to the expression of uncertainty in measurement, Organização Internacional para a Padronização, ISO (1995)

[2] Vocabulário Internacional de Metrologia, Instituto Português de Qualidade (1996)

[3] Guia Prático de Laboratório de Física, Carlos Dias, FCT/UNL (1988)

[4] Manual de elaboração de relatórios e tratamento de resultados experimentais, versão3.1, Jorge Silva, FCT/UNL (2003)

[5] An accurate formula for the period of a simple pendulum oscillating beyond the small angle regime, F. M. S. Lima, P. Arun, American Journal of Physics 74, 892 (2006)

[6] A rank-invariant method of linear and polynomial regression analysis. I, II, III, H. Theil, Nederl. Akad. Wetensch., Proc. 53, 386{392, 521{525, 1397{1412 (1950); Estimates of the regression coeficient based on Kendall's tau, Pranab Kumar Sen, Journal of the American Statistical Association 63, 1379{1389 (1968)

[7] Pêndulo Balístico, Filipe Tiago de Oliveira, FCT/UNL (1999)