Resolução do 2º teste de Análise Matemática II-C

Grupo I

1. Seja $u = g(t)$ com g uma função continuamente derivável até à segunda ordem e $t = 2xy + y^2$. Sabendo que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\frac{dg}{dt} + f(x,y)\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$

então:

☐ $f(x,y) = 2(x+y)$ ☐ $f(x,y) = 4(x^2+y^2)$ ☐ $f(x,y) = 4(x^2-y^2)$
☒ $f(x,y) = 4(xy+y^2)$ ☐ $f(x,y) = 2(x-y)$ ☐ $f(x,y) = 4(xy+x^2)$

2. A equação

$$x^3 + y^3 + (x+1)e^z - 8xyz - 2 = 0$$

define z como função de x e de y numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, 0)$. Então:

☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = -1, \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = 0$ ☒ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = -\frac{2}{5}, \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = -\frac{3}{10}$
☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = 0, \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = -1$ ☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = -\frac{1}{5}, \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = -\frac{3}{10}$
☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = 0, \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = 0$ ☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = -\frac{2}{5}, \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = -\frac{3}{5}$

3. Seja D uma bola centrada em $\left(\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$ e que não intersecta os eixos coordenados, $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida pela expressão

$$f(x,y) = (u,v) = \left(x + \cos\left(\frac{1}{y}\right), 1 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Então:

☐ $J_{f^{-1}}\left(\frac{2}{\pi}, 1\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{\pi^2} \\ \frac{4}{\pi^2} & \frac{16}{\pi^4} \end{bmatrix}$ ☐ $J_{f^{-1}}\left(\frac{2}{\pi}, 1\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{\pi^2} \\ -\frac{4}{\pi^2} & \frac{16}{\pi^4} \end{bmatrix}$
☐ $J_{f^{-1}}\left(\frac{2}{\pi}, 1\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{\pi^2} \\ -\frac{4}{\pi^2} & -\frac{16}{\pi^4} \end{bmatrix}$ ☒ $J_{f^{-1}}\left(\frac{2}{\pi}, 1\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{\pi^2} \\ \frac{4}{\pi^2} & -\frac{16}{\pi^4} \end{bmatrix}$

☐ $J_{f^{-1}}\left(\frac{2}{\pi},1\right)=\begin{bmatrix}\frac{16}{\pi^4} & \frac{4}{\pi^2}\\ \frac{4}{\pi^2} & 0\end{bmatrix}$ ☐ $J_{f^{-1}}\left(\frac{2}{\pi},1\right)=\begin{bmatrix}-\frac{16}{\pi^4} & \frac{4}{\pi^2}\\ \frac{4}{\pi^2} & 0\end{bmatrix}$

4. Considere a função

$$f(x,y)=3xy-(x^3+y^3).$$

A função tem como pontos de estacionaridade os pontos:

☐ $(0,0),(1,-1)$ e $(-1,1)$. No primeiro não tem extremo, no segundo tem um máximo relativo e no terceiro um mínimo relativo.

☐ $(0,0),(1,-1)$ e $(-1,1)$. No primeiro não tem extremo, no segundo tem um mínimo relativo e no terceiro um máximo relativo.

☐ $(0,0)$ e $(1,1)$. Em nenhum deles tem extremos relativos.

☐ $(0,0)$ e $(1,1)$. No primeiro não tem extremo e no segundo tem um mínimo relativo.

☐ $(0,0)$ e $(-1,-1)$. No primeiro não tem extremo e no segundo tem um máximo relativo.

☒ $(0,0)$ e $(1,1)$. No primeiro não tem extremo e no segundo tem um máximo relativo.

5. Considere a secção feita pelo plano $x+y+z=2$ na superfície cónica $x^2+y^2-z^2=0$. Pretende-se determinar o ponto da secção considerada que se encontra à distância mínima do ponto $(0,0,0)$. A função de Lagrange para o problema considerado é:

☐ $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x+y+z)+\mu(x^2+y^2-z^2)$

☐ $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2-z^2+\lambda(x+y+z)+\mu(x^2+y^2-z^2)$

☐ $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2-z^2+\lambda(x+y+z-1)+\mu(x^2+y^2-z^2)$

☐ $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x+y+z+\lambda(x^2+y^2-z^2)+\mu(x^2+y^2+z^2)$

☒ $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x+y+z-2)+\mu(x^2+y^2-z^2)$

☐ $F(x,y,z,\lambda,\mu)=x+y+z-2+\lambda(x^2+y^2-z^2)+\mu(x^2+y^2+z^2)$

Grupo II

1. Seja $h(x,y)$ uma função real continuamente derivável ate à segunda ordem. Seja $z=h(x,y)$ com $x=s^2-t^2$ e $y=2st$. Utilizando a regra da derivada da função composta, mostre que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s\partial t}=4x\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}-2y\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial h}{\partial y}.$$

Resposta: Derivando em ordem a s tem-se que

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial x}(2s) + \frac{\partial h}{\partial y}(2t).$$

Derivando agora em ordem a t tem-se que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial z}{\partial s}\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial h}{\partial x}(2s)\Big) + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial h}{\partial y}(2t)\Big) \qquad \square\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial h}{\partial x}\Big)(2s) + \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial h}{\partial y}\Big)(2t) + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}(2t)\\
&= \Big(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\,\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}\,\frac{\partial y}{\partial t}\Big)(2s) + \Big(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\,\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\,\frac{\partial y}{\partial t}\Big)(2t) + 2\frac{\partial h}{\partial y}\\
&= \Big(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(-2t) + \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(2s)\Big)(2s) + \Big(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(-2t) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}2s\Big)(2t) + 2\frac{\partial h}{\partial y}\\
&= -4\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}st - 4\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}t^2 + 4\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}s^2 + 4\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}st + 2\frac{\partial h}{\partial y}\\
&= 4(s^2 - t^2)\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} - 2y\Big(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\Big) + 2\frac{\partial h}{\partial y}.
\end{aligned}$$

2. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} a^3 + ub - v = 0 \\ b^3 + va - u = 0, \end{cases}$$

define implicitamente, numa vizinhança do ponto $P_0 = (u_0, v_0, a_0, b_0) = (0, 1, 1, -1)$, a e b como funções de u e de v e determine $\dfrac{\partial a}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial b}{\partial u}$ no ponto em que $u_0 = 0$ e $v_0 = 1$.

Resposta: Teorema das funções implícitas. Consideremos o sistema de duas equações

$$\begin{cases} f_1(a, b, u, v) = a^3 + ub - v = 0 \\ f_2(a, b, u, v) = b^3 + va - u = 0 \end{cases}$$

sendo f_1, f_2 funções das quatro variáveis u, v, a, b definidas num aberto de $\mathbb{R}^4$. Tem-se:

$i)$ No ponto $P_0 = (u_0, v_0, a_0, b_0) = (0, 1, 1, -1)$ as equações são verificadas. Basta notar que $a_0^3 + u_0 b_0 - v_0 = 1^3 + 0^3(-1) - 1 = 0$ e $b_0^3 + v_0 a_0 - u_0 = (-1)^3 + 1 \cdot 1 - 0 = 0$.

$ii)$ As funções f_1, f_2 são continuamente deriváveis em $\mathbb{R}^4$ por se tratarem de funções polinomiais nas variáveis u, v, a, b.

$iii)$ O Jacobiano $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a} & \frac{\partial f_1}{\partial b} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a} & \frac{\partial f_2}{\partial b} \end{vmatrix}(P_0) = \begin{vmatrix} 3a^2 & u \\ v & 3b^2 \end{vmatrix}_{(0,1,1,-1)} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$

Nestas condições existe uma vizinhança do ponto P_0 na qual o sistema dado define implicitamente duas funções

$$\phi_1(u,v) = a \text{ e } \phi_2(u,v) = b$$

que, substituídas nas equações do sistema dado, as convertem em identidades e que, para $u = u_0 = 0$ e $v = v_0 = 1$ tomam os valores $a = a_0 = 1, b = b_0 = -1$.

Para calcular as derivadas pretendidas consideremos as equações anteriores, onde assumimos que a e b são função de u, v:

$$\begin{cases} a(u,v)^3 + ub(u,v) - v = 0 \\ b(u,v)^3 + va(u,v) - u = 0. \end{cases}$$

Derivando em ordem a u e calculando no ponto $(u_0, v_0) = (0,1)$ vem

$$\begin{cases} 3a(0,1)^2 \frac{\partial a}{\partial u}(0,1) + b(0,1) + u(0,1)\frac{\partial b}{\partial u}(0,1) = 0 \\ 3b(0,1)^2 \frac{\partial b}{\partial u}(0,1) + v(0,1)\frac{\partial a}{\partial u}(0,1) - 1 = 0 \end{cases}$$

isto é

$$\begin{cases} 3\frac{\partial a}{\partial u}(0,1) - 1 + 0 \cdot \frac{\partial b}{\partial u}(0,1) = 0 \\ 3\frac{\partial b}{\partial u}(0,1) + 1 \cdot \frac{\partial a}{\partial u}(0,1) - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\frac{\partial a}{\partial u}(0,1) = 1 \\ 3\frac{\partial b}{\partial u}(0,1) + \frac{\partial a}{\partial u}(0,1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial u}(0,1) = \frac{1}{3} \\ \frac{\partial b}{\partial u}(0,1) = \frac{2}{9} \end{cases} \quad \square$$

3. Seja a uma constante real. Considere a função

$$f(x,y) = \frac{a}{x} - \frac{1}{y} + xy, x \neq 0, y \neq 0, a \neq 0.$$

Estude os extremos relativos de f. Considere os casos $a > 0$ e $a < 0$.

Resposta: Comecemos por calcular os pontos críticos

$$\nabla f = \left(-\frac{a}{x^2} + y, \frac{1}{y^2} + x \right) = (0,0).$$

Vem que $y = \dfrac{a}{x^2}$ e $x = -\dfrac{1}{y^2}$ donde $y = \dfrac{a}{(-1/y^2)^2} = ay^4$. Então $y = 0$ (caso excluído) ou $y^3 = a^{-1}$, isto é, $y = a^{-1/3}$. Para este valor de y vem $x = -a^{2/3}$. Conisdere-se então $P_0 = (-a^{2/3}, a^{-1/3})$.

A matriz hessiana é $\begin{bmatrix} \dfrac{2a}{x^3} & 1 \\ 1 & -\dfrac{1}{y^3} \end{bmatrix}$ e o hessiano Δ_2 é dado por $-\dfrac{2a}{(xy)^3} - 1$. Em P_0 $\Delta_2(P_0)$ é igual a

$$-\frac{2a}{(-a^{2/3}a^{-1/3})^3} - 1 = 2 - 1 > 0$$

e portanto P_0 é extremo local. Tem-se ainda que

$$\frac{\partial^2 f}{dx^2}(P_0) = \Delta_1(P_0) = \frac{2a}{x^3}_{(x=-a^{2/3})} = -\frac{2a}{a^2} = -\frac{2}{a}$$

que é negativo se $a > 0$ (portanto para $a > 0$ o ponto P_0 é máximo local) e positivo se $a < 0$ (portanto para $a < 0$ o ponto P_0 é mínimo local). $\square$

Grupo III

1. Seja A um domínio fechado e limitado de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$I = \int\int_A y\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\sqrt{3}\,y}^{\sqrt{1-y^2}} y\,dx \Big) dy.$$

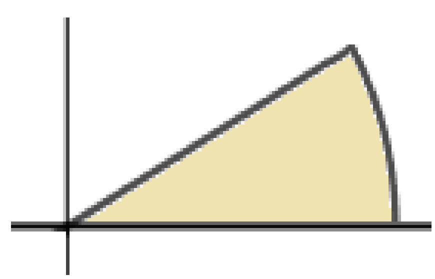
Determine I. Exprima I, utilizando a ordem de integração inversa da apresentada (não calcule este último integral).

Resposta: Tem-se

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\sqrt{3}\,y}^{\sqrt{1-y^2}} y\,dx \Big) dy = \int_0^{\frac{1}{2}} [yx]_{\sqrt{3}\,y}^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_0^{\frac{1}{2}} [y\sqrt{1-y^2} - y^2\sqrt{3}] dy,$$

que é igual a

$$\begin{aligned}[-\frac{(1-y^2)^{3/2}}{3} - \frac{y^3}{3}\sqrt{3}]_0^{\frac{1}{2}} &= -\frac{(1-(\frac{1}{2})^2)^{3/2}}{3} - \frac{(\frac{1}{2})^3}{3}\sqrt{3} + \frac{(1-0^2)^{3/2}}{3} + \frac{0^3}{3}\sqrt{3} \\ &= -\frac{(\frac{3}{4})^{3/2}}{3} - \frac{1}{24}\sqrt{3} + \frac{1}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{24} - \frac{\sqrt{3}}{24} + \frac{1}{3} = \frac{2-\sqrt{3}}{6}.\end{aligned}$$



Mudando a ordem de integração tem-se que

$$I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big(\int_0^{\frac{x}{\sqrt{3}}} y\,dy \Big) dx + \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^1 \Big(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy \Big) dx.$$

$\square$

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Seja

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \text{ e } C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b).$$

Suponhamos que $\nabla f(a, b) = (0, 0)$ e que $A \neq 0$ e $AC - B^2 > 0$.

Considere-se o desenvolvimento de Taylor de segunda ordem da função f numa vizinhança de (a, b)

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \frac{1}{2!}[h^2\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta h, b+\theta k) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta h, b+\theta k) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h, b+\theta k)], 0 < \theta < 1$$

a) Justifique que, nas hipóteses consideradas, para uma escolha de (h, k) conveniente,

$$h^2\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta h, b+\theta k) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta h, b+\theta k) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h, b+\theta k)$$

e

$$h^2 A + 2hkB + k^2 C$$

têm o mesmo sinal.

b) Determine uma função $\varphi(A, B, h, k)$ não negativa tal que

$$h^2 A + 2hkB + k^2 C = \frac{\varphi(A, B, h, k) + k^2(AC - B^2)}{A}$$

c) Utilizando apenas as alíneas anteriores, conclua a natureza do ponto crítico (a, b) em função do sinal de A.

Resposta: (a) Para h, k suficientemente pequenos

$$h^2\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta h, b+\theta k) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta h, b+\theta k) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h, b+\theta k)$$

e

$$h^2 A + 2hkB + k^2 C$$

têm o mesmo sinal tendo em conta que as segundas derivadas da função f são contínuas.

(b) A função φ é obtida escrevendo

$$\begin{aligned}\varphi(A, B, h, k) &= A(h^2 A + 2hkB + k^2 C) - k^2(AC - B^2) \\ &= h^2 A^2 + 2hkAB + k^2 AC - k^2 AC + k^2 B^2 \\ &= h^2 A^2 + 2hkAB + k^2 B^2 = (hA + kB)^2 \geq 0\end{aligned}$$

(c) Se $A > 0$, como $\varphi(A, B, h, k) + k^2(AC - B^2) > 0$, então $h^2A + 2hkB + k^2C$ também é positivo e portanto

$$h^2 \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta h, b + \theta k) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta h, b + \theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + \theta h, b + \theta k) > 0,$$

pelo que $f(a + h, b + k) > f(a, b)$. Consequentemente (a, b) é mínimo local de f.

De forma análoga se conclui que se $A < 0$ então a função f tem um máximo local no ponto (a, b). $\square$