Álgebra Linear e Geometria Analítica

3 - Determinantes

Departamento de Matemática
FCT/UNL

Programa

1. Matrizes
2. Sistemas de Equações Lineares
3. **Determinantes**
4. Espaços Vectoriais
5. Aplicações Lineares
6. Valores e Vectores Próprios
7. Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
8. Geometria Analítica

3.1 Uma definição por recorrência

Neste capítulo consideramos apenas matrizes quadradas e iremos determinar se uma matriz pode ou não ser invertível analogamente ao resultado do Capítulo 1

$$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \text{ é invertível se, e só se, } \mathrm{r}(A) = n.$$

Exemplo

- $n = 1$

$$A = [a_{11}] \in \mathcal{M}_{1\times 1}(\mathbb{K}) \text{ é invertível se, e só se, } \mathrm{r}(A) = 1,$$

  ou equivalentemente, $a_{11} \neq 0$.

- $n = 2$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ é invertível se, e só se, } \mathrm{r}(A) = 2.$$

  Vejamos que tal é equivalente a afirmar que

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

3.1 Uma definição por recorrência

- Se $a_{11} \neq 0$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 + \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) l_1]{} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix}.$$

  $\mathrm{r}(A) = 2$ se, e só se, $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

- Se $a_{11} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

  - Se $a_{21} \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \longleftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{12} \end{bmatrix} f.e.$$

    $\mathrm{r}(A) = 2$ se, e só se, $a_{12} \neq 0$ se, e só se, $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

  - Se $a_{11} = 0 = a_{21}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

    não é invertível e $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$.

3.1 Uma definição por recorrência

Notação

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Dados $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, representamos por

$$A(i|j) \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$$

a matriz que se obtém de A suprimindo a linha i e a coluna j.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

$$A(1|2) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}, \ A(2|1) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \ \ e \ \ A(1|1) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

3.1 Uma definição por recorrência

Definição

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **determinante** de A, e representa-se por $\det A$ ou $|A|$, o elemento de $\mathbb{K}$ assim definido:

Se $n = 1$ então $\det A = a_{11}$.

Se $n > 1$ então

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + \cdots + a_{1n}(-1)^{1+n}\det A(1|n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k}(-1)^{1+k}\det A(1|k). \end{aligned}$$

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + a_{12}(-1)^{1+2}\det A(1|2) \\ &= a_{11}\det[a_{22}] - a_{12}\det[a_{21}] \\ &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

3.1 Uma definição por recorrência

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\det A =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\det A(1|1) + a_{12}(-1)^{1+2}\det A(1|2) + a_{13}(-1)^{1+3}\det A(1|3)$$

$$= a_{11}\det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}).$$

3.1 Uma definição por recorrência

Regra de Sarrus:

Atendendo ao Exemplo anterior, se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$*, então*

$$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

As 3 parcelas do aditivo são dadas pelo produto dos elementos da diagonal principal e pelo produto dos elementos abrangidos por cada um dos dois triângulos com base paralela à diagonal principal.
As 3 parcelas do subtractivo são obtidas procedendo de forma análoga em relação à diagonal secundária (constituída pelos elementos a_{13}, a_{22} *e* a_{31}*).*

Devemos realçar que a Regra de Sarrus tem a limitação de só poder ser aplicada a matrizes de ordem 3.

3.1 Uma definição por recorrência

Observação

A definição de determinante apresentada anteriormente permite calcular o determinante de uma matriz de ordem n, com $n \geq 2$, através do cálculo do determinante de n matrizes de ordem $n-1$.
Para $n = 4$ teríamos 4 determinantes de matrizes de ordem 3, cada um destes com 6 parcelas, o que daria origem a $24 = 4!$ parcelas.
No caso geral de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ a expressão de $\det A$ tem $n!$ parcelas, conforme se pode demonstrar por indução em n.
Assim, se A tem ordem n, com $n \geq 4$, pode não ser expedito calcular o determinante de A através da definição anteriormente apresentada.

Processos alternativos

Definição

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$.Designa-se por **complemento algébrico** do elemento da posição (i,j) de A, o elemento de $\mathbb{K}$, que representaremos por $\hat{a}_{ij}$, dado por

$$\hat{a}_{ij} = (-1)^{i+j}\det A(i|j).$$

3.1 Uma definição por recorrência

Notemos que $\widehat{a}_{ij}$ não depende do elemento da posição (i, j) de A pois esse elemento não figura na matriz $A(i|j)$.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & a & 8 \end{bmatrix}, \qquad \hat{a}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -(6-12) = 6,$$

independente do valor de a.

De acordo com a Definição anterior e a definição de determinante, se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $n \geq 2$ então o determinante de A é igual à soma dos produtos dos elementos da linha 1 pelos complementos algébricos das respectivas posições, isto é,

$$\det A = a_{11}\widehat{a}_{11} + \cdots + a_{1n}\widehat{a}_{1n}.$$

3.1 Uma definição por recorrência

Teorema (Teorema de Laplace)

Se $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *então*

$$\det A = a_{i1}\hat{a}_{i1} + \cdots + a_{in}\hat{a}_{in}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

O mesmo resultado é válido se substituirmos "linhas" por "colunas", isto é,

$$\det A = a_{1j}\hat{a}_{1j} + \cdots + a_{nj}\hat{a}_{nj}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

À expressão (1) chamamos o desenvolvimento do determinante de A através da linha i ou dizemos que é a expressão resultante da **aplicação do Teorema de Laplace à linha i de A**.

Analogamente, dizemos que (2) é a expressão resultante da **aplicação do Teorema de Laplace à coluna j de A**.

3.1 Uma definição por recorrência

Notação

$$\det A \overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_i}{=}} \qquad \text{ou} \qquad \det A \overset{\text{Lapl.}}{\underset{c_j}{=}}$$

indica que o desenvolvimento que se segue, para o determinante de A, decorre da aplicação do Teorema de Laplace à linha i ou à coluna j de A, respectivamente.

Observação

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, podemos calcular $\det A$ por $2n$ processos, aplicando o Teorema de Laplace a cada uma das n linhas de A ou a cada uma das n colunas de A, que conduzem ao mesmo escalar (o determinante de A). Uns podem ser mais expeditos do que outros.

Se a matriz tiver elementos nulos, tem vantagem em aplicar o Teorema de Laplace a uma linha ou a uma coluna com um número máximo de zeros.

3.1 Uma definição por recorrência

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A forma mais expedita de calcular $\det A$ *será pela aplicação do Teorema de Laplace à linha 3.*
Aplicar o Teorema de Laplace à

- *linha 1 de A*

$$\det A \overset{Lapl.}{\underset{l_1}{=}} 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 9(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 1\times 10 - 9\times 8 + 3\times 0 = 10 - 72 = -62.$$

- *linha 2 de A*

$$\det A \overset{Lapl.}{\underset{l_2}{=}} 4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -4\times 18 + 5\times 2 = -72 + 10 = -62.$$

3.1 Uma definição por recorrência

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- *linha 3 de A*

$$\det A \underset{l_3}{\overset{Lapl.}{=}} 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times (-31) = -62.$$

- *coluna 1 de A*

$$\det A \underset{c_1}{\overset{Lapl.}{=}} 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1\times 10 - 4\times 18 = 10 - 72 = -62.$$

- *coluna 2 de A*

$$\det A \underset{c_2}{\overset{Lapl.}{=}} 9(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= -9\times 8 + 5\times 2 = -72 + 10 = -62.$$

- *coluna 3 de A*

$$\det A \underset{c_3}{\overset{Lapl.}{=}} 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 3\times 0 + 2 \times (5 - 36) = 2 \times (-31) = -62.$$

3.2 Algumas propriedades do determinante

Os resultados sobre determinantes que sejam enunciados para linhas são válidos substituindo "linha" por "coluna".

Proposição

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tem uma linha nula então $\det A = 0$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Se A tem a linha i igual à linha j, com $i \neq j$, então

$$\det A = 0.$$

Dem. A demonstração é feita por indução em n.

- $n = 2$ $$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} \text{ e } \det A = ab - ba = 0$$
- $n \geq 3$. Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz que tem a linha i igual à linha j, com $i \neq j$.

3.2 Algumas propriedades do determinante

Dem.

- Hipótese de Indução: O determinante de qualquer matriz de $\mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$ com duas linhas iguais é zero.
- Como $n \geq 3$, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $k \neq i$ e $k \neq j$. Aplicando o Teorema da Laplace à linha k de A obtemos

$$\det A = a_{k1}\hat{a}_{k1} + \cdots + a_{kn}\hat{a}_{kn}.$$

Para $l = 1, \ldots, n$ tem-se, por definição,

$$\hat{a}_{kl} = (-1)^{k+l} \det A(k|l).$$

Uma vez que $A(k|l) \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$ e continua a ter duas linhas iguais, pela hipótese de indução, $\det A(k|l) = 0$. Assim

$$\hat{a}_{k1} = \cdots = \hat{a}_{kn} = 0 \quad \text{e} \quad \det A = 0$$

3.2 Algumas propriedades do determinante

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se* $\det A = \det A^\top$.

Dem. A demonstração é feita por indução em n.

- $n = 1$

$$A = [a_{11}] = A^\top \text{ portanto } \det A = \det A^\top$$

- $n \geq 2$
  - Hipótese de Indução: O determinante de qualquer matriz de $\mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$, é igual ao determinante da sua transposta.
  - Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $B = A^\top$. Desenvolvemos o $\det A$ segundo a linha 1

$$\det A = a_{11}\hat{a}_{11} + \cdots + a_{1n}\hat{a}_{1n}.$$

3.2 Algumas propriedades do determinante

Dem.

- $n \geq 2$
  - Por definição,

$$\hat{a}_{1k} = (-1)^{1+k} \det A(1|k), \qquad k = 1, \ldots, n$$

Como $A(1|k) \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$, pela hipótese de indução

$$\hat{a}_{1k} = (-1)^{1+k} \det(A(1|k))^\top.$$

Como

$$(A(1|k))^\top = B(k|1),$$

obtemos

$$\hat{a}_{1k} = (-1)^{k+1} \det B(k|1) = \hat{b}_{k1}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}\hat{b}_{11} + \cdots + a_{1n}\hat{b}_{n1} \\ &= b_{11}\hat{b}_{11} + \cdots + b_{n1}\hat{b}_{n1} \\ &= \det B = \det A^\top \end{aligned}$$

3.2 Algumas propriedades do determinante

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. *Tem-se* $\det \overline{A} = \overline{\det A}$.

Teorema

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *é uma matriz triangular superior (respectivamente, inferior) então o determinante de* A *é igual ao produto dos elementos da diagonal principal de* A.

Dem.

- $n = 1$, é trivial pois $A = [a_{11}]$ e $\det A = a_{11}$.
- $n \geq 2$, seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz triangular superior.
  - Hipótese de Indução: O determinante de qualquer matriz triangular superior de $\mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$ é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal.

3.2 Algumas propriedades do determinante

Dem.

- Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ com } n \geq 2.$$

- Aplicando o Teorema de Laplace à linha n de A, concluímos que

$$\begin{aligned} \det A &= a_{nn}(-1)^{n+n} \det A(n|n) \\ &= a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Dado que $A(n|n) \in \mathcal{M}_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K})$ e é triangular superior pela hipótese de indução

$$\det A(n|n) = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}.$$

3.2 Algumas propriedades do determinante

Dem. Logo

$$\begin{aligned}\det A &= a_{nn}(a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}) \\ &= a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn},\end{aligned}$$

como pretendíamos demonstrar.

- Se A é triangular inferior então $A^\top$ é triangular superior e $\det A = \det A^\top$, concluímos que o determinante de A é igual ao produto dos elementos da diagonal principal de $A^\top$ que são iguais aos elementos da diagonal principal de A.

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Pode ter-se $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

Exemplo

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\det A = 0\ , \quad \det B = 0 \quad e \quad \det(A+B) = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 5.$$

Proposição

Para $i = 1, \ldots, n$, tem-se:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ b_{i1} + c_{i1} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dem. Da esquerda para a direita, sejam, respectivamente, A, B e C as matrizes referidas no enunciado. Aplicamos o Teorema de Laplace à linha i de A

$$\begin{aligned} \det A &= (b_{i1} + c_{i1})\hat{a}_{i1} + \cdots + (b_{in} + c_{in})\hat{a}_{in} \\ &= (b_{i1}\hat{a}_{i1} + \cdots + b_{in}\hat{a}_{in}) + (c_{i1}\hat{a}_{i1} + \cdots + c_{in}\hat{a}_{in}). \end{aligned}$$

Para $l = 1, \ldots, n$, $A(i|l) = B(i|l) = C(i|l)$ pelo que $\hat{a}_{il} = \hat{b}_{il} = \hat{c}_{il}$
Logo $b_{i1}\hat{a}_{i1} + \cdots + b_{in}\hat{a}_{in} = b_{i1}\hat{b}_{i1} + \cdots + b_{in}\hat{b}_{in} = \det B$ e

$$c_{i1}\hat{a}_{i1} + \cdots + c_{in}\hat{a}_{in} = c_{i1}\hat{c}_{i1} + \cdots + c_{in}\hat{c}_{in} = \det C.$$

3.3 Transformações elementares e determinantes

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se*

1. *Se* $i \neq j$ *e* $A \xrightarrow[l_i \longleftrightarrow l_j]{} B$ *então* $\det B = -\det A$.
2. *Se* $\alpha \neq 0$ *e* $A \xrightarrow[\alpha l_i]{} B$ *então* $\det B = \alpha \det A$.
3. *Se* $i \neq j$ *e* $A \xrightarrow[l_i + \beta l_j]{} B$ *então* $\det B = \det A$.

Dem. 1. Se uma matriz tem duas linhas iguais então o seu determinante é nulo. Sendo $L_1, \ldots, L_n$, n-uplos, tem-se

$$\det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i + L_j \\ \cdots \\ L_i + L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} = 0$$

3.3 Transformações elementares e determinantes

Dem.

$$\det\begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i+L_j \\ \cdots \\ L_i+L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_i+L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_i+L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} =$$

$$= \det\begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} \text{(prop. anterior)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 + \det\begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} + 0 \Leftrightarrow \det\begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix}.$$

3.3 Transformações elementares e determinantes

Dem. 2. (Se $\alpha \neq 0$ e $A \xrightarrow[\alpha l_i]{} B$ então $\det B = \alpha \det A$.)
Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ \alpha a_{i1} & \cdots & \alpha a_{in} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Aplicamos o Teorema de Laplace à linha i de B

$$\begin{aligned} \det B &= (\alpha a_{i1})\hat{b}_{i1} + \cdots + (\alpha a_{in})\hat{b}_{in} \\ &= \alpha \left(a_{i1}\hat{b}_{i1} + \cdots + a_{in}\hat{b}_{in} \right). \end{aligned}$$

Para $l = 1, \ldots, n$, tem-se $A(i|l) = B(i|l)$ e, portanto, $\hat{b}_{il} = \hat{a}_{il}$. Logo

$$\det B = \alpha \left(a_{i1}\hat{a}_{i1} + \cdots + a_{in}\hat{a}_{in} \right) = \alpha \det A.$$

3.3 Transformações elementares e determinantes

Dem. 3. (Se $i \neq j$ e $A \xrightarrow[l_i+\beta l_j]{} B$ então $\det B = \det A$.)

Sejam $\beta \in \mathbb{K}$, $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i + \beta L_j \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix}$, com $L_1, \ldots, L_n$ n-uplos.

Tem-se

$$\det B = \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i + \beta L_j \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ \beta L_j \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_i \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_j \\ \cdots \\ L_n \end{bmatrix} = \det A + \beta \times 0 = \det A.$$

3.3 Transformações elementares e determinantes

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Tem-se*

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A.$$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e* $A \xrightarrow[(linhas)]{} B$, *então*

$$\det A = 0 \text{ se, e só se, } \det B = 0.$$

Atenda a que $\det B = (-1)^r \alpha_1 \cdots \alpha_s \det A$ *com* $r, s \in \mathbb{N}_0$.

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 15 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 9 & 15 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\times 3\times 5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

3.3 Transformações elementares e determinantes

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $A \xrightarrow[(linhas)]{} B$ (f.e.) então B é triangular superior (eventualmente com elementos nulos na diagonal principal).

Processo para calcular o determinante de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$

- Efectuam-se transformações elementares sobre linhas de forma a transformar A numa matriz B em forma de escada.
- Considerando as correspondentes alterações no determinante resultantes de cada uma dessas transformações elementares obtém-se a relação entre $\det A$ e $\det B$.
- Como $\det B$ é igual ao produto dos elementos da sua diagonal principal e é conhecida a relação entre $\det A$ e $\det B$, obtém-se $\det A$.

3.3 Transformações elementares e determinantes

Exemplo

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \end{vmatrix} \underset{l_1 \longleftrightarrow l_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 2 & 6 & 8 \end{vmatrix} \underset{l_3+(-2)l_1}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{l_3+(-2)l_2}{=} -5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-5)\times(1\times 1\times(-2)) = 10.$$

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se A é invertível se, e só se, $\det A \neq 0$.

Dem. Consideremos que $A \xrightarrow[(linhas)]{} B$ (f.e.).

Sabemos que A é invertível se, e só se, $\mathrm{r}(A) = n(= \mathrm{r}(B))$.

Tal equivale a afirmar que todos os elementos da diagonal principal de B são não nulos, ou equivalentemente, que $\det B \neq 0$.

Como, pela Proposição anterior, $\det B \neq 0$ se, e só se, $\det A \neq 0$, obtemos o que pretendíamos.

3.4 Determinante do produto de matrizes

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e seja* $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *uma matriz elementar. Tem-se* $\det(EA) = \det E \det A$.

Proposição

1. *Sejam* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se* $\det(AB) = \det A \det B$.
2. *Mais geralmente, se* $t \geq 2$ *e* $A_1, \ldots, A_t \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *então*

$$\det\left(A_1 \cdots A_t\right) = \det A_1 \cdots \det A_t.$$

Dem. 1. Consideramos a demonstração dividida em dois casos.
Caso 1 A matriz A não é invertível.
Como A não é invertível, então tem-se $\det A = 0$ e, pelo capítulo 1 podemos afirmar que a matriz AB não é invertível.
Assim, podemos concluir que $\det(AB) = 0$.

$$\text{Logo, } \det(AB) = 0 = \det A \det B.$$

3.4 Determinante do produto de matrizes

Dem. **Caso 2** A matriz A é invertível.
Neste caso, podemos afirmar que a matriz A é igual a um produto de matrizes elementares.
Sejam $E_1, \ldots, E_t$ matrizes elementares tais que $A = E_1 \cdots E_t$.
Por aplicação sucessiva da Proposição anterior concluímos que

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det\left(E_1 \cdots E_t B\right) = \det E_1 \cdots \det E_t \det B \\ &= \left(\det E_1 \cdots \det E_t\right) \det B = \det\left(E_1 \cdots E_t\right) \det B \\ &= \det A \det B,\end{aligned}$$

como pretendíamos demonstrar.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *uma matriz invertível, ou equivalentemente, uma matriz tal que* $\det A \neq 0$. *Tem-se*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Dem. (Exercício)

3.5 Cálculo da inversa a partir da adjunta

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Chamamos **matriz dos complementos algébricos** *de A, e representamos por $\widehat{A}$, a matriz que se obtém de A substituindo cada elemento pelo complemento algébrico da respectiva posição.*

Chamamos **adjunta** *de A, e representamos por $\operatorname{adj} A$, à transposta da matriz dos complementos algébricos de A, isto é, $\operatorname{adj} A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e*

$$\operatorname{adj} A = \hat{A}^\top.$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \widehat{A} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -8 \\ 0 & -7 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -8 \\ 0 & -7 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & -7 & 0 \\ -8 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

3.5 Cálculo da inversa a partir da adjunta

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$. Se $i \neq j$, com $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, então $a_{i1}\hat{a}_{j1} + a_{i2}\hat{a}_{j2} + \cdots + a_{in}\hat{a}_{jn} = 0$.

Dem. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$, e seja B a matriz que se obtém de A substituindo a linha j por uma linha igual à linha i.
Supondo sem perda de generalidade que $i < j$, tem-se

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

3.5 Cálculo da inversa a partir da adjunta

Dem.

Como B tem duas linhas iguais (as linhas i e a j) tem-se $\det B = 0$.
Por outro lado, aplicando o Teorema de Laplace à linha j de B obtemos

$$0 = \det B = b_{j1}\widehat{b}_{j1} + \cdots + b_{jn}\widehat{b}_{jn} = a_{i1}\widehat{b}_{j1} + \cdots + a_{in}\widehat{b}_{jn}.$$

Dado que, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$, se tem

$$\widehat{b}_{jk} = (-1)^{j+k} \det B(j|k) = (-1)^{j+k} \det A(j|k) = \widehat{a}_{jk}$$

concluímos, como pretendíamos, que $a_{i1}\widehat{a}_{j1} + a_{i2}\widehat{a}_{j2} + \cdots + a_{in}\widehat{a}_{jn} = 0$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se

1. $$A \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \det A \end{bmatrix} = (\det A) I_n.$$
2. *Se A é invertível então $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$.*

3.5 Cálculo da inversa a partir da adjunta

Dem. 1. Tem-se:

$$A \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \cdots & \hat{a}_{1n} \\ & \cdots & \\ \hat{a}_{n1} & \cdots & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix}^{\top}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \cdots & \hat{a}_{n1} \\ & \cdots & \\ \hat{a}_{1n} & \cdots & \hat{a}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pela definição de produto de matrizes, o elemento (i,i) da matriz $A \operatorname{adj} A$ é

$$a_{i1}\hat{a}_{i1} + a_{i2}\hat{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\hat{a}_{in}$$

que pelo Teorema de Laplace aplicado à linha i, vai ser igual a $\det A$.
Para $i \neq j$, o elemento (i,j) da matriz $A \operatorname{adj} A$ é

$$a_{i1}\widehat{a}_{j1} + a_{i2}\widehat{a}_{j2} + \cdots + a_{in}\widehat{a}_{jn}$$

que, pela Proposição anterior, é igual a 0.
Logo

$$A \operatorname{adj} A = (\det A) I_n.$$

3.5 Cálculo da inversa a partir da adjunta

Dem. 2. Suponhamos que A é invertível, ou equivalentemente, que $\det A \neq 0$.

Multiplicando ambos os membros da igualdade

$$A \operatorname{adj} A = (\det A) I_n,$$

à esquerda, por A^{-1}, resulta

$$\operatorname{adj} A = (\det A) A^{-1}$$

e, portanto, tem-se

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A.$$

3.6 Regra de Cramer

Relembremos a definição de sistema de Cramer que apresentámos no capítulo 2:

Definição

Sistema de Cramer é um sistema de equações lineares em que a matriz simples do sistema é quadrada e invertível.

Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares, com $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertível. Do Capítulo 2, sabemos que um sistema deste tipo é possível determinado.

Sabemos também determinar a sua solução utilizando a inversa da matriz simples do sistema.

O resultado seguinte diz-nos como podemos, utilizando determinantes, calcular a solução única de tal sistema.

3.6 Regra de Cramer

Teorema (Regra de Cramer)

Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares, com $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertível. Seja $A_{(j)}$ a matriz que se obtém de A substituindo a coluna j pela coluna de B. A solução (única) do sistema anterior é o elemento de $\mathbb{K}^n$

$$\left(\frac{\det A_{(1)}}{\det A}, \frac{\det A_{(2)}}{\det A}, \ldots, \frac{\det A_{(n)}}{\det A}\right).$$

Dem. Seja $AX = B$ um sistema de equações lineares com $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertível e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

A solução (única) do sistema $AX = B$ é $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que

$$A\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = A^{-1}B.$$

3.6 Regra de Cramer

Dem. Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior, à esquerda, por A^{-1} obtemos

$$A^{-1}B = \left(\frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A\right) B = \frac{1}{\det A}\left((\operatorname{adj} A)\, B\right)$$

e o elemento da linha j da matriz $(\operatorname{adj} A)B \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é

$$\hat{a}_{1j} b_1 + \cdots + \hat{a}_{nj} b_n = b_1 \hat{a}_{1j} + \cdots + b_n \hat{a}_{nj}.$$

Aplicando o Teorema de Laplace à coluna j da matriz $A_{(j)}$ concluímos que

$$\det A_{(j)} = b_1 \hat{a}_{1j} + \cdots + b_n \hat{a}_{nj}.$$

Exemplo

Consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases} \quad \text{, sobre } \mathbb{R}$$

tal sistema tem matriz simples $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, invertível, pois

3.6 Regra de Cramer

Exemplo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{l_2+(-2)l_1 \\ l_3+(-1)l_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \underset{l_3+(-1)l_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Pelo teorema anterior, a solução, única, de tal sistema é $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ com

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2}$$

$$\text{Tem-se: } \alpha_1 = \frac{2}{2} = 1, \quad \alpha_2 = \frac{-2}{2} = -1 \quad \text{e} \quad \alpha_3 = \frac{0}{2} = 0.$$

$(1, -1, 0)$ é a solução única do sistema.

3.6 Regra de Cramer

A Regra de Cramer pode utilizar-se para resolver sistemas $AX = B$ em que $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ é invertível (sistemas de Cramer). Mesmo nestes casos, salvo para valores pequenos de n, não tem interesse computacional, sendo preferível utilizar o método referido no Capítulo 2.