CN A – Test 2023.2 Resolution

Felipe B. Pinto 71951 – EQB

18 de dezembro de 2024

Conteúdo

Questão 1

Considere o integral $I = \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x$ onde $1 - 1/\sqrt{3}$ é o ponto fixo de f e $1 + 1/\sqrt{3}$ é razi da equação $f(x) = 0$.
O valor da aproximação dada pela regra de Gauss com 2 pontos simples é:

a) $I_G = 0$

b) $I_G = f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3})$

c) $I_G = 1 - 1/\sqrt{3}$

d) $I_G = 2$

Resposta

$$I_{G,2} = \int_0^2 f(x)\ \mathrm{d}x =$$

Using simple gauss rule ($n = 2$)

$$= \frac{2-0}{2} \int_{-1}^{1} g(x)\ \mathrm{d}x \approx g(-1/\sqrt{3}) + g(1/\sqrt{3}) =$$

Using (1)

$$f(1 - 1/\sqrt{3}) + f(1 + 1/\sqrt{3}) = \left(1 - 1/\sqrt{3}\right) + 0$$

$$g(x) = f\left(\frac{b-a}{2} y + \frac{b+a}{2}\right) = f\left(\frac{2-0}{2} y + \frac{2+0}{2}\right) = f(y+1) \tag{1}$$

Questão 2

Considere $\alpha \in [a,b]$ e uma função $G \in C^1([a,b]) : G'(\alpha) = -0.5$. Considere ainda $x_n = G(x_{n-1}), n \in \mathbb{N}$ uma sucessão de iteradas.
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

a) x_n converge para α se e só se $x_0 = \alpha$

b) x_n converge para α qualquer que seja $x_0 \in [a,b]$ suficientemente próximo de α

c) x_n converge para α com ordem de convergência $p = 2$

d) x_n converge para qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$

Resposta b)

Questão 3

Seja $\alpha \in [1,3]$ a raiz única da equação não linear $f(x) = 0$, sendo $f(x)$ uma função continua em $[1,3]$ tal que $f(2) > 0$ e $f(2.25) > 0$. Considere a sucessão $x_n, n = 0, 1, 2, \ldots$ gerada pelo método da bissecção para obter uma aproximação para α, em que $x_2 \in [2, 2.5]$.
Assinale a opção correta:

a) $x_3 = 2.125$ e $|\alpha - x_{21}| < 0.5\,\mathrm{E}^{-6}$

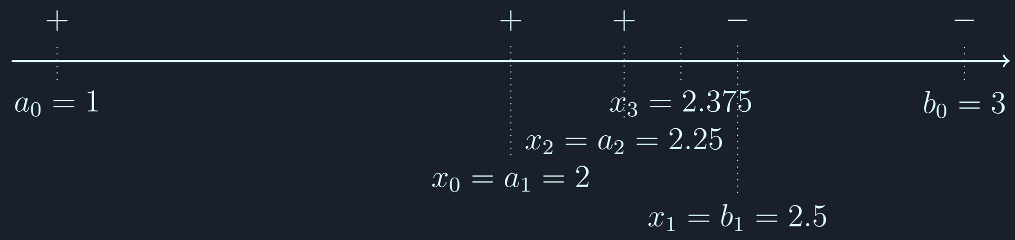
b) $x_3 = 2.125$ e $|\alpha - x_{20}| < 0.5\,\mathrm{E}^{-6}$

c) $x_3 = 2.375$ e $|\alpha - x_{21}| < 0.5\,\mathrm{E}^{-6}$

d) $x_3 = 2.375$ e $|\alpha - x_{20}| < 0.5\,\mathrm{E}^{-6}$

Resposta d)

Usando (2) (3) (4) (5) (6) (7)



Encontramos x_3 iterando x_n de 0 a 3

$$\alpha \in [1,3] \text{ Raiz única } f(x) = 0 \implies f(1) * f(3) < 0 \implies \begin{cases} f(1) > 0 \\ f(3) < 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \wedge f(2) > 0 \tag{3}$$

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{2+3}{2} = 2.5 \tag{4}$$

$$\text{como } x_2 = 2.25 \text{ e } f(2.25) > 0$$
$$\wedge f(2.5) < 0 \tag{5}$$

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{2+2.5}{2} = 2.25 \wedge f(2.25) > 0 \tag{6}$$

$$x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{2.25+2.5}{2} = 2.375 \tag{7}$$

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} = \frac{3-1}{2^{n+1}} = 2^{-n} < 0.5\,\mathrm{E}^{-6} \implies$$
$$\implies n = -\log_2 0.5\,\mathrm{E}^{-6} = 20.932 \cong 21$$

Questão 4

Seja $\alpha \in [a,b]$ raíz unica da equação $f(x) = 0$ com $f \in C^2([a,b])$, em que $f'(x) < 0$ e $f"(x) > 0, \forall\, x \in [a,b]$. Considere ainda uma função iteradora $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ com $\phi'(\alpha) = 0$. Seja $x_n = \phi(x_{n-1}), n \in \mathbb{N}$ uma sucessão de iteradas tal que $f(x_0) = 1$.
Qual das seguintes afimações é verdadeira?

1) Não se conseguie garantir a convergencia de x_n para α

2) x_n converge para α com ordem de convergência $p > 1$

3) x_n não converge qualquer que seja $x_0 \in [a,b]$.

4) x_n converge para α com ordem de convergência $p = 1$

Questão 5

Considere o seguinte sistema de equações lineares $A\,X = B$ com n incógnitas e n equações e a sucessão de vetores obtida pelo método iterativo geral $X^{(k)} = G\,X^{(k-1)} + H, k = 1, 2, \ldots$, onde $G \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é a matriz de iteração e $H \in \mathbb{R}^n$.
Sabe-se que $\|G\|_1 = 2/3$ e $\|G\|_\infty = 3/2$
Assinale a opção correta

a) A sucessão não converge se a matriz A do sistema não for de diagonal estritamente dominante

b) A sucessão não converge porque $\|G\|_\infty > 1$.

c) A sucessão converge qualquer que seja $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

d) Nada se pode concluir quanto à convergência da sucessão.

e) Se a matriz A do sistema for de diagonal estritamente dominante então é certo que a sucessão converge.

Questão 6

Considere a sucessão

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_0 \in [0, \pi/2]} \\ \boldsymbol{x_{n+1} = \varphi_c(x_n),} \qquad \boldsymbol{n = 0, 1, 2, \ldots} \end{cases}$$

onde $\varphi_c(x) = \frac{1+\sin(x)}{c}$, com $c > 0$

Nota: Apresente os cálculos com 6 casas decimais convenientemente arredondadas

Q6 a.

Prove que α é raiz de equação $1 + \sin(x) - c\,x = 0$ se e só se α é ponto fixo de $\varphi_c(x)$

Q6 b.

Sendo α a raiz unica em $[0, \pi/2]$, prove que se $c \geq 4/\pi$ então x_n converge para α e a ordem de convergência é $p = 1$ se $\alpha \neq \pi/4$

Q6 c.

Considerando $c = 2$ e $x_0 = 0$ determine x_2 e uma estimativa para o erro absoluto associado a x_2.

Q6 d.

Nas mesmas condições da alinea anterior diga quantas iteradas teria de calcular para ter uma estimativa para o erro absoluto inferior a 10^{-6}.

Questão 7

Considere o seguinte sistema de equações lineares $A\,X = B$, com $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & -4 \end{bmatrix}$ e $b = [1\,1\,1]^T$.

Q7 a.

Mostre que o método de Gauss-Seidel converge para a solução de $AX = B$, qualquer que seja a iterada $X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ que se considere.

Q7 b.

Usando o método de Gauss-seidel obtenha a iterada $x^{(2)}$ partindo de $X^{(0)} = [0\,0\,0]^T$ e diga quantas casas decimais significativas no mínimo pode garantir para cada componente de $X^{(2)}$. Justifique

Q7 c.

Sem calcular a iterada $X^{(10)}$ diga quantas casas decimais significativas no mínimo pode garantir para cada componente $X^{(10)}$. Justifique.

Questão 8

Considere o problema de valor inicial bem posto

$$\begin{cases} \boldsymbol{y'(t) = 1 + (t - y(t))^2,} & \boldsymbol{t \in [2, 3]} \\ \boldsymbol{y(2) = 1} \end{cases}$$

Determine um valor paroximado para $y(2.4)$ pelo método de Taylor de ordem 2 com $h = 0.2$. Justifique devidamente os cálculos.

Nota: Apresente os cálculos com 6 casas decimais conveninentemente arredondadas