Nome:

N^{o} de aluno: Curso:

INSTRUÇÕES PARA O 2^{o} TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C

LEIA ATENTAMENTE AS SEGUINTES INSTRUÇÕES ATÉ AO FIM

Hora de início do teste: 13.00 Duração: 2 horas (sem tolerância e sem intervalo)

Todas as respostas são dadas no enunciado que vos será distribuído pelo que não necessitam, nem podem, utilizar outras folhas de resposta.

O teste possui 7 folhas agrafadas, que **não podem** desagrafar, que para além desta primeira folha de instruções, é constituído por quatro grupos e por duas folhas em branco que se destinam a rascunho.

No cabeçalho da página 3 (Grupo I), devem preencher completamente os vossos dados pessoais no espaço para isso reservado: nome completo, curso e n^{o} de aluno. **O não preenchimento dos vossos dados pessoais conduz ao anulamento da prova**.

O Grupo I possui 6 perguntas de escolha múltipla. Devem selecionar de forma inequívoca a opção (única) de resposta. Respostas erradas **não são** penalizadas.

Nos Grupos II,III, IV as perguntas são de resposta aberta e são respondidas no próprio enunciado.

A cotação de cada pergunta está assinalada no início da mesma. Devem ter em atenção o espaço destinado à resposta de cada alínea e gerir esse espaço convenientemente (por exemplo, não utilizar letra ou símbolos matemáticos demasiado grandes). As folhas 6 e 7 estão em branco e destinam-se a ser utilizadas como rascunho e **não serão corrigidas**.

No final da prova, o aluno deverá pedir licença para entregar o teste, em seguida deverá colocar a prova, na mesma mesa onde se encontra a folha de presenças (que deverá assinar neste momento) em cima de outras provas que já tenham sido eventualmente entregues.

COTAÇÕES

Grupo I

Grupo II

1.a)

b)

Grupo III

1.

2.

Grupo IV

1.

2.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

2º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2020/2021
18 DE JUNHO DE 2021

Nome:

Nº de aluno: Curso:

PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES DO GRUPO I ASSINALE COM X O QUADRADO CORRESPONDENTE À ALTERNATIVA CORRECTA.

GRUPO I

[*1,5 valores*] 1. O integral repetido

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_{-x}^{x} xy\ dy \right) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy\ dy \right) dx,$$

utilizando a ordem de integração inversa da apresentada, pode ser calculado a partir de:

☐ $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \left(\int_{-y}^{-\sqrt{1-y^2}} xy\ dx \right) dy + \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_{y}^{\sqrt{1-y^2}} xy\ dx \right) dy$ ☐ $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_{y}^{\sqrt{1-y^2}} xy\ dx \right) dy$

☐ $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \left(\int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy\ dx \right) dy + \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_{y}^{\sqrt{1-y^2}} xy\ dx \right) dy$ ☐ $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} xy\ dx \right) dy$

☐ $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{0} \left(\int_{-y}^{-\sqrt{1-y^2}} xy\ dx \right) dy + \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_{y}^{-\sqrt{1-y^2}} xy\ dx \right) dy$ ☐ $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\int_{-y}^{-\sqrt{1-y^2}} xy\ dx \right) dy$

[*1,5 valores*] 2. Utilizando coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

o volume $V(D)$ de um domínio fechado D, limitado superiormente pela superfície cónica $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ e inferiormente pela superfície cónica $z = \sqrt{x^2+y^2}$ pode ser calculado a partir dos seguintes integrais repetidos:

☐ $\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\rho}^{1-\rho} \rho\ dz \Big) d\rho \Big) d\theta$ ☐ $\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\rho}^{1-\rho} \rho(1-2\rho)\ dz \Big) d\rho \Big) d\theta$

☐ $\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{1} \Big(\int_{1-\rho}^{\rho} \rho\ dz \Big) d\rho \Big) d\theta$ ☐ $\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{1} \Big(\int_{1-\rho}^{\rho} \rho(1-2\rho)\ dz \Big) d\rho \Big) d\theta$

☐ $\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Big(\int_{\rho}^{1-\rho} \rho\ dz \Big) d\rho \Big) d\theta$ ☐ $\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Big(\int_{1-\rho}^{\rho} \rho(1-2\rho)\ dz \Big) d\rho \Big) d\theta$

[*1,5 valores*] 3. A função potencial $\varphi(x, y, z)$ do campo conservativo

$$\vec{u} = (yze^{xyz} - 1)\vec{i} + (xze^{xyz} + ze^{yz})\vec{j} + (xye^{xyz} + ye^{yz} - sinz)\vec{k},$$

que no ponto $(2, 1, 0)$ toma o valor zero é:

☐ $\varphi(x, y, z) = yze^{xyz} + ze^{yz} - x + \sin z + 2$ ☐ $\varphi(x, y, z) = xye^{xyz} + ye^{yz} - y + \sin z - 2$

☐ $\varphi(x, y, z) = xze^{xyz} + xe^{yz} - z - \cos z - 1$ ☐ $\varphi(x, y, z) = e^{xyz} + e^{yz} - x + \cos z - 1$

☐ $\varphi(x, y, z) = e^{xyz} + e^{yz} + x - \cos z - 3$ ☐ $\varphi(x, y, z) = e^{xyz} - e^{yz} - x + \cos z + 1$

[*1,5 valores*] 4. A área da porção de superfície esférica

$$z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad 1 \leq z \leq 2$$

é:

☐ 5π ☐ 6π ☐ 7π ☐ 8π ☐ 9π ☐ 10π

[*1,5 valores*] 5. Considere a superfície de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv, \qquad u, v \in \mathbb{R} \\ z = u + v. \end{cases}$$

As equações paramétricas do plano tangente e da recta normal no ponto $(0, -2, 0)$ correspondente aos valores de $u = 1, v = -1$ são respetivamente:

☐ $\begin{cases} x = 2\alpha + 2\beta \\ y = -2\alpha + 2\beta, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$, $\begin{cases} x = -4\lambda \\ y = 2, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 8\lambda \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x = 2\alpha + 2\beta \\ y = -2 - 2\alpha + 2\beta, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$, $\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 2, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 8\lambda \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = 2\alpha + 2\beta \\ y = -2 - 2\alpha + 2\beta, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$, $\begin{cases} x = -4\lambda \\ y = -2, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 8\lambda \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x = 2\alpha + 2\beta \\ y = -2\alpha + 2\beta, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = \alpha - \beta \end{cases}$, $\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -2, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 8\lambda \end{cases}$

☐ $\begin{cases} x = 2\alpha - 2\beta \\ y = 2 - 2\alpha + 2\beta, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$, $\begin{cases} x = -4\lambda \\ y = 2, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -8\lambda \end{cases}$ ☐ $\begin{cases} x = 2\alpha + 2\beta \\ y = 2 - 2\alpha + 2\beta, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = \alpha + \beta \end{cases}$, $\begin{cases} x = 4\lambda \\ y = -2, \ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 8\lambda \end{cases}$

[*1,5 valores*] 6. Seja S a face exterior da superfície total, que limita o domínio fechado limitado superiormente pela superfície esférica $x^2+y^2+z^2=1$ e inferiormente pelo plano $z=\dfrac{1}{2}$. O integral de superfície

$$\iint_S \left(-x\vec{i}-y\vec{j}\right).\vec{n}\ dS,$$

pode ser calculado a partir de um integral triplo que utilizando as coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = r\sin u\cos v \\ y = r\sin u\sin v \\ z = r\cos u \end{cases}$$

pode ser determinado a partir do seguinte integral repetido:

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{6}}\Big(\int_0^1 -2r^2\sin u\ dr\Big)du\Big)dv$ ☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\Big(\int_0^1 r^2\sin u\ dr\Big)du\Big)dv$

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\Big(\int_{\frac{1}{2\cos u}}^1 r^2\sin u\ dr\Big)du\Big)dv$ ☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{3}}\Big(\int_{\frac{1}{2\cos u}}^1 -2r^2\sin u\ dr\Big)du\Big)dv$

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{6}}\Big(\int_0^1 r^2\sin u\ dr\Big)du\Big)dv$ ☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{6}}\Big(\int_{\frac{1}{2\cos u}}^1 -2r^2\sin u\ dr\Big)du\Big)dv$

2ºTESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2020/2021
18 DE JUNHO DE 2021

GRUPO II

1. Considere a linha L fronteira do conjunto

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4 \wedge x^2+(y-1)^2 \geq 1 \wedge x \leq 0 \wedge y \geq 0\}$, percorrida no sentido direto.

[*1,5 valores*] a) Parametrize o arco da linha L pertencente à circunferência de equação

$$x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

1.a) Resposta:

[*2,5 valores*] b) Calcule $\int_{L^+} xydx - x^2dy$, a partir de um integral duplo e utilizando coordenadas polares.

1.b) Resposta:

GRUPO III

[*2,5 valores*] 1. Considere o integral triplo

$$\iiint_D (x^2 + y^2)z \; dx\, dy\, dz,$$

sendo D o domínio fechado limitado superiormente pela porção de superfície parabólica $z = 2 - 2(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq 2$ e inferiormente pela semisuperfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$. Utilizando coordenadas cilíndricas indique o integral repetido que teria de calcular para calcular o valor do integral triplo considerado. (**Não calcule o integral repetido que indicou**.)

1. Resposta:

[*2,5 valores*] 2. Seja S a porção da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ com $-2 \leq z \leq -1$. Determine equações paramétricas de S. O integral de superfície

$$\iint_S \nabla \times (x\,\vec{j} - y^4\,\vec{k})\,.\,\vec{n}\; dS,$$

na face "exterior" de S pode ser calculado a partir de um integral curvilíneo. Escreva, detalhadamente, o integral curvilíneo que permite calcular o integral de superfície considerado. (**Não calcule o integral curvilíneo que escreveu**).

2. Resposta:

GRUPO IV

[*1 valor*] 1. Seja $\vec{u}(x,y,z) = u_1(x,y,z)\vec{i} + u_2(x,y,z)\vec{j} + u_3(x,y,z)\vec{k}$ um campo vetorial definido em $D \subset \mathbb{R}^3$. Quando se diz que $\vec{u}(x,y,z)$ é conservativo? Indique uma condição necessária e suficiente para que $\vec{u}(x,y,z)$ seja conservativo.

Resposta:

[*1 valor*] 2. Sejam $f(x,y)$ e $g(x,y)$ duas funções reais de variáveis reais continuamente deriváveis em $\mathbb{R}^2$ e sejam $\vec{u}(x,y) = g(x,y)\vec{i} + f(x,y)\vec{j}$ e $\vec{v}(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right)\vec{j}$. Seja D o círculo centrado na origem e de raio um. Sabendo que na fronteira de D se tem que $f(x,y) = x$ e $g(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$, determine o valor de c sabendo que

$$\iint_D \vec{u}.\vec{v}\,dxdy = 1.$$

Resposta:

.

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*