Coordenadas polares

Definição

Um sistema de coordenadas polares no plano é definido por um ponto $O \in \mathbb{R}^2$ e uma semirreta com origem no ponto O. O ponto diz-se polo e a semirreta diz-se eixo polar.

Considerado um sistema de coordenadas polares

Coordenadas polares

A cada ponto P podemos associar um par de coordenadas polares (r, θ), sendo r a distância do ponto P ao polo O e θ o ângulo que a semirreta $\dot{O}P$ faz com o eixo polar. r e θ dizem-se coordenadas radial e polar de P, respetivamente. Se P coincide com o polo, $(0, \theta)$ são coordenadas polares de P para qualquer valor de θ.

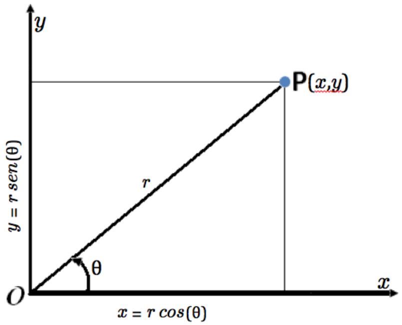
Observação

A coordenada radial toma valores não negativos $0 \leq r < \infty$.

- Vamos considerar $r \in [0, +\infty[$ e $\theta \in [0, 2\pi]$.

Coordenadas cartesianas - Coordenadas polares

Dado um sistema de coordenadas polares podemos traçar um sistema de coordenadas cartesianas tomando como origem o polo e como semieixo positivo dos x o eixo polar. Assim qualquer ponto P do espaço pode ser descrito em coordenadas cartesianas (x, y) e em coordenadas polares (r, θ).



Coordenadas cartesianas - Coordenadas polares

As coordenadas (x, y) e (r, θ) do ponto P têm a seguinte relação:

$$\begin{cases} x = r \cos\theta, \\ y = r \operatorname{sen}\theta. \end{cases}$$

Esta relação permite obter diretamente as coordenadas cartesianas (x, y) sabendo as coordenadas polares (r, θ). Se forem dadas as coordenadas cartesianas e quisermos calcular as coordenadas polares é mais conveniente usar as relações:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Coordenadas polares - Exemplos

Exemplo

considere o ponto P com coordenadas cartesianas $(\sqrt{3}, 1)$. Determine as coordenadas polares de P.

Resolução:

P pertence ao 1º quadrante. $r = \sqrt{4} = 2$ e $\mathrm{tg}(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

portanto $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. As coordenadas polares de P são $\left(2, \dfrac{\pi}{6}\right)$

Coordenadas polares - Exemplos

Exemplos

considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ definidos em coordenadas cartesianas e caracterize-os usando coordenadas polares.

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} = 2\}$

Resolução:

A condição $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$ corresponde, em coordenadas polares, a $r = 2$. Então

$$A = \{(x, y) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta) : \ r = 2 \wedge \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Coordenadas polares - Exemplos

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \sqrt{3}\, x\}$

Resolução:

$y = \sqrt{3}\, x$, então $\dfrac{y}{x} = \sqrt{3}, \quad x \neq 0$. Obtemos $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}$, que é equivalente a $\theta = \dfrac{\pi}{3} \ \vee \ \theta = \dfrac{\pi}{3} + \pi$.

A condição $y = \sqrt{3}\, x$ corresponde, em coordenadas polares, a $\theta = \dfrac{\pi}{3} \ \vee \ \theta = \dfrac{4\pi}{3}$ e r arbitrário. Notar que $(0, \dfrac{\pi}{3})$ e $(0, \dfrac{4\pi}{3})$ são coordenadas polares da origem.

$$B = \{(x, y) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) : \ r \in [0, +\infty[\ \wedge (\theta = \frac{\pi}{3} \vee \theta = \frac{4\pi}{3})\}.$$

Coordenas polares - Exemplos

(c) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x\}$

Resolução:

A condição $0 \leq y \leq x$ corresponde, em coordenadas polares, a $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$(fazer um esboço geométrico). Então

$$C = \Big\{(x, y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) : \; r \in [0, +\infty[\wedge 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\Big\}.$$

Coordenas polares - Exemplos

(d) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3 \wedge x \leq 0\}$

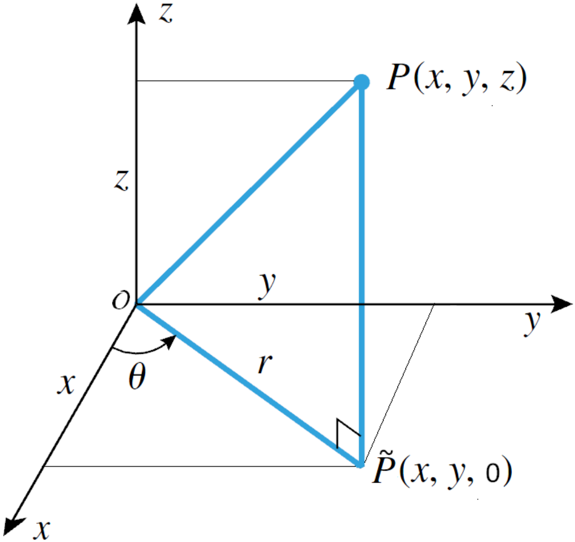
Resolução:

A condição $2 \leq x^2 + y^2 \leq 3$ corresponde, em coordenadas polares, a $\sqrt{2} \leq r \leq \sqrt{3}$. A condição $x \leq 0$ corresponde, em coordenadas polares, a $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$. Então $D = \{(x, y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) : \sqrt{2} \leq r \leq \sqrt{3} \wedge \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\}$.

Coordenadas cilíndricas

- Para localizar um ponto P em $\mathbb{R}^3$ normalmente usamos as coordenadas cartesianas ou retangulares (x, y, z).
- As coordenadas cilíndricas de um ponto P com coordenadas cartesianas (x, y, z) são (r, θ, z) sendo (r, θ) as coordenadas polares no plano $z = 0$ do ponto $(x, y, 0)$.

Coordenadas cilíndricas



Coordenadas cartesianas - Coordenadas cilíndricas

As coordenadas (x, y, z) e (r, θ, z) de um ponto P têm a seguinte relação:

$$\begin{cases} x = r \cos\theta, \\ y = r \operatorname{sen}\theta, \\ z = z. \end{cases}$$

Esta relação permite obter diretamente as coordenadas cartesianas (x, y, z) através das coordenadas cilíndricas (r, θ, z). Se forem dadas as coordenadas cartesianas e quisermos calcular as coordenadas cilíndricas é mais conveniente usar as relações:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0 \\ z = z. \end{cases}$$

Coordenadas cilíndricas - Exemplos

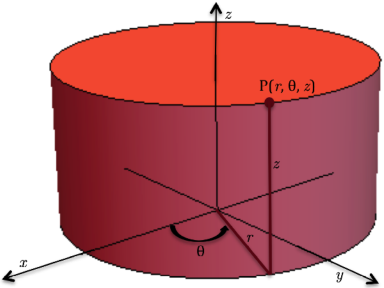
- $r \in [0, +\infty[$ e $\theta \in [0, 2\pi]$ e $z \in]-\infty, +\infty[$.

Exemplo

Considere o ponto P com coordenadas cartesianas $(-6, -6, 8)$. Determine as coordenadas cilíndricas de P.

Resolução:
A projeção de P no plano $z = 0$ é $\tilde{P} = (-6, -6, 0)$.
$r = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}(\theta) = \dfrac{-6}{-6} = 1$ e $\tilde{P}$ pertence ao 3º quadrante no plano $z = 0$, portanto $\theta = \dfrac{5\pi}{4}$. As coordenadas cilíndricas de P são $(6\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{4}, 8)$.

Coordenadas cilíndricas



Coordenadas cilíndricas - Exemplos

Exemplos

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ definidos em coordenadas cartesianas e caracterize-os usando coordenadas cilíndricas.

(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge -1 \leq z \leq 1\}$

Resolução:

A projeção do conjunto A no plano $z = 0$ é $\tilde{A} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4\}$. A condição $x^2 + y^2 \leq 4$ corresponde, em coordenadas polares, a $0 \leq r \leq 2$. Assim $\tilde{A} = \{(x, y, 0) = (r\cos\theta, r\mathrm{sen}\,\theta, 0) : r \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Então

$$A = \{(x, y, z) = (r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta, z) : 0 \leq r \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge \\ -1 \leq z \leq 1\}.$$

Coordenadas cilíndricas - Exemplos

(b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge |z| \leq 1 \wedge y \geq 0\}$

Resolução:

A projeção do conjunto B no plano $z = 0$ é $\tilde{B} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq 0\}$. A condição $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ corresponde, em coordenadas polares, a $1 \leq r \leq 2$. A condição $y \geq 0$ em coordenadas polares escreve-se $0 \leq \theta \leq \pi$. Assim

$$\tilde{B} = \{(x, y, 0) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 0) : 1 \leq r \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

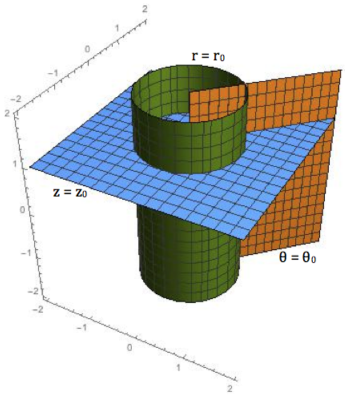
Então

$$B = \{(x, y, z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) : 1 \leq r \leq 2 \wedge 0 \leq \theta \leq \pi \wedge -1 \leq z \leq 1\}.$$

Coordenadas cilíndricas

Em coordenadas cilíndricas:

- A equação $r = r_0$, $r_0 > 0$ define uma superfície cilíndrica.
- A equação $\theta = \theta_0$ define um semiplano.
- A equação $z = z_0$ define um plano horizontal.



Coordenadas esféricas

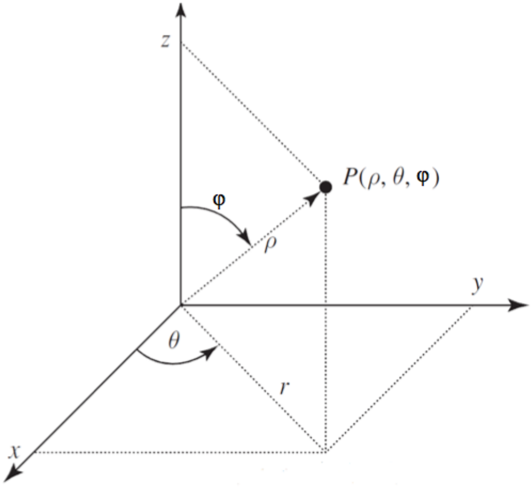
Seja P um ponto em $\mathbb{R}^3$ com coordenadas cartesianas (x, y, z). As coordenadas esféricas de P são (ρ, θ, φ) onde

- ρ é a distância de P à origem $O = (0, 0, 0)$,
- θ e o ângulo que a semirreta $\dot{O}\tilde{P}$ faz com o semieixo positivo dos x, sendo $\tilde{P}$ a projeção de P no plano $z = 0$,
- φ e o ângulo que a semirreta $\dot{O}P$ faz com o semieixo positivo dos z.

As coordenadas esféricas são apropriadas para descrever subconjuntos com uma forma esférica.

- $\rho \in [0, +\infty[$ e $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [0, \pi]$.

Coordenadas esféricas



Coordenadas cartesianas - Coordenadas esféricas

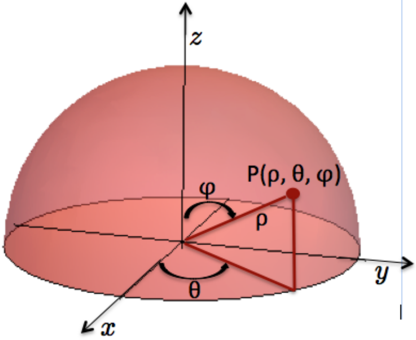
As coordenadas (x, y, z) e (ρ, θ, φ) de em ponto P têm a seguinte relação:

$$\begin{cases} x = \rho \,\mathrm{sen}\varphi \cos\theta, \\ y = \rho \,\mathrm{sen}\varphi \,\mathrm{sen}\,\theta, \\ z = \rho \cos\varphi. \end{cases}$$

Esta relação permite obter diretamente as coordenadas cartesianas (x, y, z) através das coordenadas esféricas (ρ, θ, φ). Se forem dadas as coordenadas cartesianas e quisermos calcular as coordenadas esféricas é mais conveniente usar as relações:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0 \\ \rho \cos\varphi = z. \end{cases}$$

Coordenadas esféricas



Coordenadas esféricas - Exemplos

Exemplos

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ definidos em coordenadas cartesianas e caracterize-os usando coordenadas esféricas.

(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$

Resolução:

$$A = \{(x, y, z) = (\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\varphi) : \rho = 2 \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$

Coordenadas esféricas - Exemplos

Exemplos

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ definidos em coordenadas cartesianas e caracterize-os usando coordenadas esféricas.

(b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \wedge z \geq 0\}$

Resolução:

$$B = \{(x, y, z) = (\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\varphi) :$$
$$0 \leq \rho \leq \sqrt{2} \wedge 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

Coordenadas esféricas - Exemplos

Exemplos

Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ definidos em coordenadas cartesianas e caracterize-os usando coordenadas esféricas.

(c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \wedge y \geq 0\}$

Resolução:

$$C = \{(x, y, z) = (\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\varphi) : 0 \leq \rho \leq \sqrt{2} \wedge 0 \leq \theta \leq \pi \wedge 0 \leq \varphi \leq \pi\}.$$

Coordenadas esféricas

Em coordenadas esféricas:

- A equação $\rho = \rho_0$, $\rho_0 > 0$ define uma superfície esférica de raio ρ_0.
- A equação $\theta = \theta_0$ define um semiplano.
- A equação $\varphi = \varphi_0$, $\varphi_0 > 0$ define uma folha de uma superfície cónica.