EXERCÍCIOS DE SÉRIES DE ANÁLISE MATEMÁTICA III-C

SÉRIES NUMÉRICAS

1. Determine os primeiros três termos das séries cujo termo geral é dado por:

a) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}, \ n = 0, 1, 2, ...$ b) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^n}, \ n = 1, 2, ...$

c) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \ n = 0, 1, 2, ...$ d) $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}), \ n = 0, 1, 2, ... \end{cases}$

2. Determine o termo geral de cada uma das seguintes séries:

a) $2 + \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5^2} + \dfrac{2}{5^3} + ...$

b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{2^2}{6} + \dfrac{2^3}{8} + ...$

c) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{3.5}{2.4} + \dfrac{3.5.7}{2.4.6} + \dfrac{3.5.7.9}{2.4.6.8} + ...$

d) $\dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \dfrac{1}{4.5} + \dfrac{1}{5.6} + ...$

3. Diga justificando quais das seguintes séries geométricas são convergentes. No caso em que a série é convergente determine a sua soma,

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\dfrac{1}{4})^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\dfrac{2}{3})^{n+2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-\dfrac{3}{2})^{n+1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{4^{n+2}}{7^{n-1}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{3n}7^{1-n}$

(Resposta: a) Convergente $S = \dfrac{1}{3}$ b) Convergente $S = \dfrac{8}{9}$ c) Divergente d) Convergente $S = \dfrac{448}{3}$ e) Divergente

4. Represente na forma racional as seguintes dízimas infinitas periódicas:

a) $0,(4)$ b) $5,(37)$ c) $0,(9)$ d) $0,451141414...$

5. Determine os valores da variável real x para os quais as seguintes séries são convergentes e para esses valores determine o valor da soma da cada uma das séries,

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-3)^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ (\dfrac{x}{2})^{2n}$

(Resposta: a) $x \in]-1, 1[$ b) $x \in]2, 4[$ c) $x \in]-2, 2[$

6. Mostre que são convergentes as séries indicadas e determine ainda a sua soma,

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$

d) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{\log((1+\frac{1}{n})^n(n+1))}{(\log n^n)(\log(n+1)^{n+1})}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} ((1+\dfrac{1}{n})^n - (1+\dfrac{1}{n+2})^{n+2})$

7. Estude do ponto de vista da convergência as seguintes séries e, em caso de convergência, se esta é absoluta ou condicional,

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+\sin\frac{n\pi}{2}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n^2}{(n+1)(n+2)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n tg(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \log n}{n}$

(Resposta: a) Convergente b) Divergente c) Convergente d) Convergente

8. A série alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$ é uma série convergente. Seja S_n a sucessão das suas somas parciais.

a) Indique, justificando, uma ordem n a partir da qual, se comete um erro inferior a $0,001$, quando se toma S_n como valor aproximado da soma da série.

b) Indique um majorante do erro que se comete quando se toma para soma da série S_{10}.

9. Recorrendo ao critério do integral, estude a natureza das séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(1+n^2)\, arctg\, n}$ b) $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{\log n - 1}}$

c) $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n\log n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\dfrac{1}{2})^{\sqrt{n}}$

(Resposta: a) Convergente b) Divergente c) Divergente d) Convergente

10. Utilize um dos critérios da comparação para estudar a natureza das seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+n^4}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+\sqrt{n}}{n(n-1)}$ c) $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{\log n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^4 \dfrac{1}{n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n^3+\sqrt{n}}}$ f) $\sum_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{(\log n)^{\frac{1}{n}}}$

(Resposta: a) Convergente b) Divergente c) Divergente d) Convergente e) Divergente f) Divergente

11. A partir do critério da razão ou do critério de D' Alembert, estude a natureza das seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+1)!}{(2(n+2))!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{5.7.9...(2n+3)}{5^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{(2n)!}$

d) $1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2.3}{3.5} + \dfrac{2.3.4}{3.5.7} + ...$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

(Resposta: a) Convergente b) Divergente c) Convergente d) Divergente e) Convergente

12. A partir do critério da raiz ou do critério da raiz de Cauchy, estude a natureza das seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}-1)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\dfrac{3n+4}{3n+2})^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{k^n}{n!},\ k \in \mathbb{R}^+$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(6-(-1)^n)^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin \dfrac{\pi}{n})^n$

(Resposta: a) Divergente b) Divergente c) Convergente d) Convergente e) Convergente

13. A partir do critério de Raabe, ou de algum outro critério adequado, estude a natureza das seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(2.4.6...2n)^2(n+1)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1.3...(2n-1)}{2.4.6...2n} \dfrac{1}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(2n)!}{(2n+1)!}$

(Resposta: a) Convergente b) Convergente c) Divergente

14. Estude a natureza das seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\sqrt{n}}{(n+1)^3\sqrt{n^3+1}}$ b) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2!}{3^2} + \dfrac{3!}{3^3} + ...$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n-1}}{n^2}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+p)!}{n!(n+q)!},\ p, q \in \mathbb{N}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{3^n}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} (\dfrac{2n}{4n+1})^{3n-1}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}2^n$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^{2n}}{(n+1)!}$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\log(n!)}{n^n + 2^n}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(e - (1 + \dfrac{1}{n})^n)$ l) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n})}$

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n + \frac{1}{n})^n}$ n) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$

(Resposta: a) Convergente b) Divergente c) Concergente d) Convergente e) Convergente f) Convergente g) Convergente h) Convergente i) Convergente j) Convergente k) Convergente l) Divergente m) Divergente n) Divergente

SÉRIES DE FUNÇÕES

1. Determine a função limite pontual da série de funções

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x)^n, x \in [0,1].$$

Diga, justificando, se a série converge uniformemente para a função determinada.

2. Considere-se a sucessão de funções contínuas

$$f_n(x) = \begin{cases} x & , n = 1 \\ x^n - x^{n-1} & , n \geq 2 \end{cases}$$

e a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Determine a função limite pontual da série de funções considerada. Diga, justificando, se a série converge uniformemente para a função determinada.

3. Considere-se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-nx}}{2^n}$, $x \in [0,1]$. Utilize o critério de Weierstrass para estudar a convergência uniforme da série considerada.

4. Considere-se a série de funções

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)} \frac{1}{2^{2n}} (\cos x)^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Utilize o critério de Weierstrass para estudar a convergência uniforme da série considerada.

5. Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-5)^n}{n5^n}.$$

Estude a convergência nos extremos do seu intervalo de convergência.

6. Determine a série de MacLaurin da função $f(x) = e^x$. Mostre que $f(x) = e^x$ é soma da sua série de MacLaurin para todo o $x \in \mathbb{R}$.

7. Sabendo que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $\quad x \in]-1,1[$, determine as séries de de MacLaurin das funcões $g(x) = \dfrac{1}{5-4x}$ e $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x-5}$ indicando os respetivos intervalos de convergência.

8. Considere a equação diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$

Pretende-se, com este exercício, obter, por desenvolvimento em série, a solução particular da forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, que satisfaz as condições $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

Determine c_0 e c_1. Mostre que

$$c_{n+2} = \frac{n+3}{(n+1)(n+2)} \ c_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

e determine a solução particular referida.