1. Considere a linha L, fronteira do conjunto

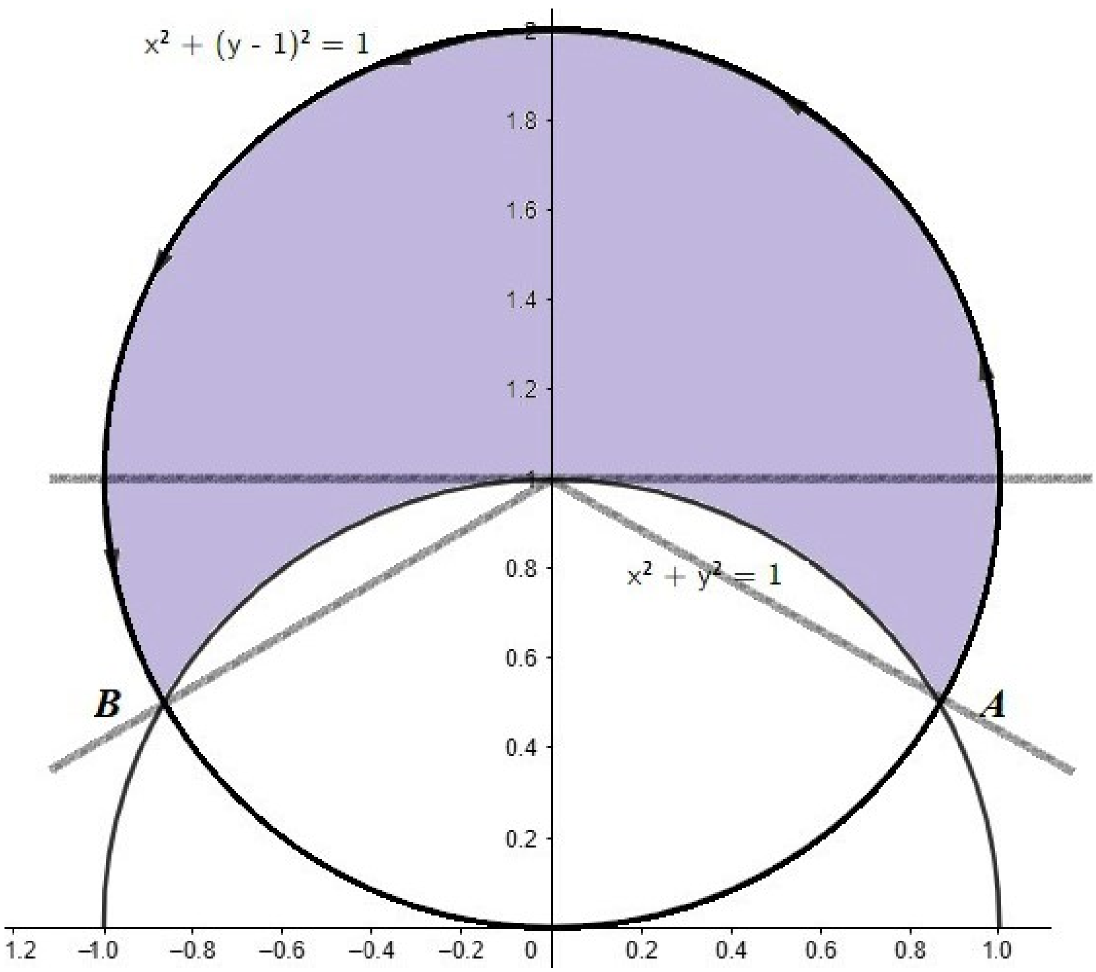
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \wedge x^2 + y^2 \geq 1\right\},$$

percorrida no sentido directo.
a) Parametrize o arco da linha L pertencente a circunferência de equação

$$x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

Resposta: Tendo em conta que se trata do arco da linha L pertencente a circunferência de raio 1, centrada em $(0,1)$, uma parametrização do arco da linha, considerado, é

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}, \; t_0 \leq t \leq t_1.$$



As duas circunferências intersectam-se nos pontos $A = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ e $B = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, sendo que o arco de circunferência considerado e percorrido no sentido indicado tem início em A e termina em B. O valor do parâmetro t em A obtém-se fazendo $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$ na parametrização, conduzindo ao valor $t_0 = -\frac{\pi}{6}$; procedendo de forma análoga obtém-se que o valor do parâmetro t em B é $t_1 = \frac{7\pi}{6}$. Portanto uma parametrização do arco da linha é

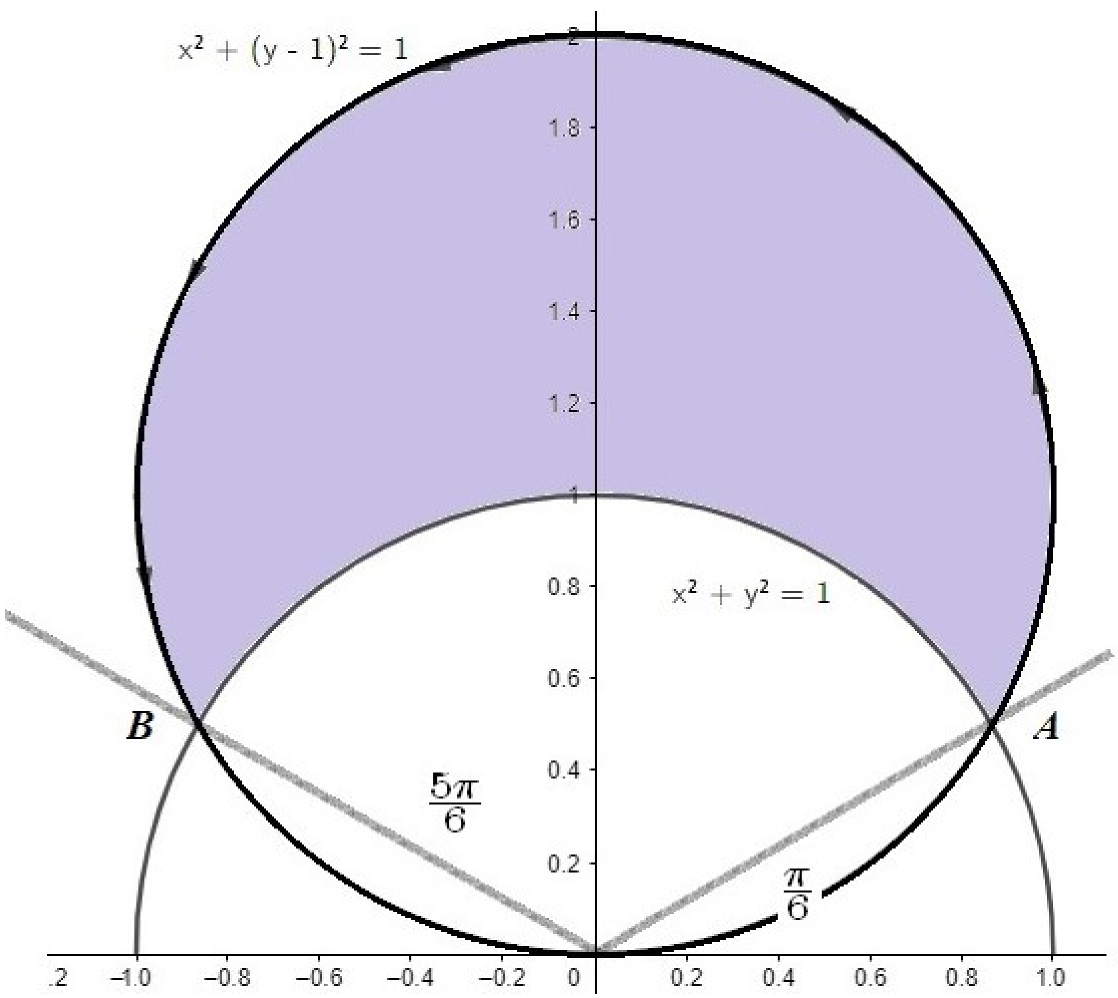
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}, \quad -\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{7\pi}{6}. \qquad \square$$

b) O integral de linha

$$\int_{L^+} (xe^x)dx + \left(\frac{1}{3}x^3 + xy^2\right)dy$$

pode ser calculado a partir de um integral duplo. Utilizando coordenadas polares indique o integral repetido que teria de calcular para determinar o valor do integral de linha considerado **(não calcule o integral que indicou).**

Resposta:



Sejam $\varphi(x,y) = xe^x$, $\psi(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy^2$ e A o domínio limitado pela linha L. A função φ é contínua e continuamente derivável em ordem a y, a função ψ é contínua e continuamente derivável em ordem a x, o domínio A é fechado, limitado e simplesmente conexo e a linha L é seccionalmente regular. Utilizando a fórmula de Riemann-Green tem-se

$$\int_{L^+} (xe^x)dx + \Big(\frac{1}{3}x^3 + xy^2\Big)dy = \int\int_A \Big(\frac{\partial(\frac{1}{3}x^3 + xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xe^x)}{\partial y}\Big)dxdy = \int\int_A (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Considere-se as coordenadas polares $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$. No domínio considerado a variável ρ varia desde a equação da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ à equação da circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Substituindo nessas equações x por $\rho\cos\theta$, y por $\rho\sin\theta$ e resolvendo em ordem a ρ obtém-se, respectivamente, $\rho = 1$ e $\rho = 2\ \sin\theta$. Relativamente à variável θ: os pontos onde θ é mínimo e máximo são os pontos A e B, sendo que para ambos se tem $\rho = 1$. Para obter θ resolvem-se as equações

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \rho\cos\theta = \cos\theta \wedge \frac{1}{2} = \rho\sin\theta = \sin\theta, \text{ que conduz a } \theta = \frac{\pi}{6},$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = \rho\cos\theta = \cos\theta \wedge \frac{1}{2} = \rho\sin\theta = \sin\theta,, \text{ que conduz a } \theta = \frac{5\pi}{6}.$$

Então

$$A \to \begin{cases} x = \rho\cos\theta, & \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{5\pi}{6} \\ y = \rho\sin\theta, & 1 \le \rho \le 2\ \sin\theta. \end{cases}$$

Tendo ainda em conta que $x^2 + y^2 = \rho^2$ e que o jacobiano é ρ, o integral pretendido é

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{5\frac{\pi}{6}} \Big(\int_1^{2\sin\theta} \rho^3 d\rho\Big) d\theta.$$