Operador ∇

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad (n = 2)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \quad (n = 3).$$

A divergência de um campo vetorial (n=2)

A divergência de um campo vetorial

$$\vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j}$$

de classe C^1 é definida por

$$\mathrm{div}\vec{F}(x,y) = \nabla \cdot \vec{F}(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y).$$

A divergência de um campo vetorial (n=3)

A divergência de um campo vetorial

$$\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z)\vec{k}$$

de classe C^1 é definida por

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) &= \nabla \cdot \vec{F}(x,y,z) \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z).\end{aligned}$$

O rotacional de um campo vetorial (n=2)

O rotacional de um campo vetorial

$$\vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j}$$

de classe C^1 é definido por

$$\mathrm{rot}\vec{F}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y).$$

O rotacional de um campo vetorial (n=3)

O rotacional de um campo vetorial

$$\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z)\vec{k}$$

de classe C^1 é definido por

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\vec{F}(x,y,z) &= \nabla \times \vec{F}(x,y,z) \\
&= \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1(x,y,z) & F_2(x,y,z) & F_3(x,y,z) \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z) - \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) \right) \vec{i} \\
&+ \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) - \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z) \right) \vec{j} \\
&+ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) \right) \vec{k}.
\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule a divergência e o rotacional do campo

$$\vec{F}(x, y, z) = e^{xy}\vec{i} - \cos y\vec{j} + \sin^2 z\vec{k}.$$

Resolução:

campos conservativos

Sejam $n = 2$ ou $n = 3$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. O campo vetorial

$$\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

diz-se um campo conservativo se existir uma função

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

de classe C^1 tal que

$$\forall X \in \Omega \quad \vec{F}(X) = \nabla f(X).$$

A função f chama-se potencial do campo vetorial.

Propriedades dos campos conservativos

Teorema

Sejam $n = 2$ *ou* $n = 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto e*

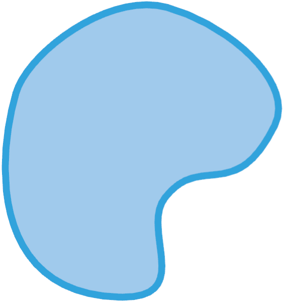
$$\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

um campo conservativo de classe C^1. *Então*

$$\mathrm{rot}\vec{F} = 0.$$

Conjuntos simplesmente conexos no plano

Diz-se que um conjunto Ω em $\mathbb{R}^2$ é simplesmente conexo se nenhuma curva simples fechada em Ω envolver pontos que não pertençam a Ω.



Teste de campo conservativo

Teorema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *um conjunto aberto*

$$\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j}$$

um campo vetorial de classe C^1*. Se* Ω *for simplesmente conexo e*

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega,$$

então $\vec{F}$ *é conservativo.*

Exemplo

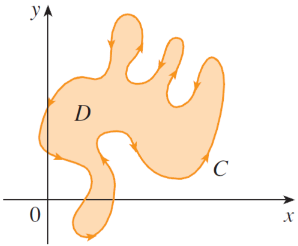
Seja

$$\vec{F}(x,y) = 2xy^3\vec{i} + (1 + 3x^2y^2)\vec{j}.$$

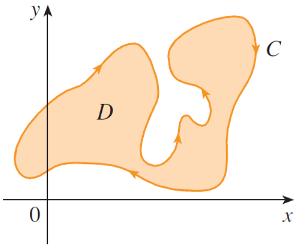
Mostre que $\vec{F}$ é um campo conservativo em $\mathbb{R}^2$ e determine uma função potencial de $\vec{F}$.

Resolução:

Orientação positiva de uma curva fechada no plano



curva orientada positivamente



curva orientada negativamente

Teorema

Seja Ω uma região plana simplesmente conexa, cuja fronteira C é uma curva seccionalmente regular, fechada, simples e orientada positivamente. Se

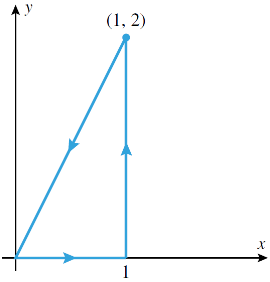
$$\vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j}, \quad \vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

for um campo vetorial de classe C^1 num conjunto aberto contendo Ω, então

$$\oint_C F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy.$$

Exemplo

Exemplo



Usando o teorema de Green, calcule o integral ao longo do caminho triangular

$$\int_C x^2 y \, dx + x \, dy.$$

Resolução

Resolução:

Aplicação do teorema de Green para determinar áreas de regiões planas

Usando o teorema de Green podemos deduzir fórmulas para cálcular a área de uma região Ω plana que satisfaça as condições do teorema:

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} dA = \oint_{C} x\, dy,$$

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} dA = \oint_{C} (-y)\, dx,$$

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} dA = \frac{1}{2} \oint_{C} (-y) dx + x\, dy.$$