AM1 - Anotações

Felipe B. Pinto 61387 - MIEQB

7 de julho de 2021

Conteúdo

I $15/03$ - Conceitos Básicos I	7	3 Sucessão Convergente	12
1 Majorante	. 7	3.1 Exemplo	12
2 Minorante		VI 90/02 Damanatus 2 as none as	
3 Infimo	. 7	VI $26/03$ - Demonstrações para su-	13
4 Supremo		cessões	
5 Minimo		1 Sucessão convergente \implies Limitada .	13
6 Maximo		2 Sucessão é monótona e limitada \implies	1.0
7 Conjunto Limitado		convergente	13
8 Vizinhanca		m VII~~29/03 - Lemas de Desigualda-	
9 Interior		des	14
10 Exterior			
11 Fronteira	. 8	1 Lema $\lim_{n \to \infty} u_{(n)} \le \lim_{n \to \infty} v_{(n)} \dots$	
II 16/03 - Conceitos Básicos II	9	2 Lema das sucessões enquadradas	14
1 Conjunto Aberto		2.1 Exemplo: $u_{(n)} = \sin(n)/n$	
2 Conjunto Fechado		3 Lema $u_{(n)} * v_{(n)} \rightarrow 0 \dots \dots$	
3 Feixe		3.1 Exemplo: $S_{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n^2} \dots$	
4 Ponto de Acumulação		3.2 Exercicio: $\frac{2^n-n}{3^n+1}$	
1 1 onto de Heamanagae I I I I I I I I	. 0	4 Lema	14
III $19/03$ - Indução por igualdade	10	VIII 30/03	15
1 Exemplo	. 10	1	
IV 22/02 Induces non Designal		2 Sucessão que tende para o infinito	15
IV 22/03 - Indução por Desigualdade	- 11	3 Indeterminações	15^{-3}
		4 Exercicios	
1 Exemplo 1			
2 Exemplo 2	. 11	IX 06/04 - $Subsucessões$	16
V 23/03 - Sucessões	12	1 Exemplo: $u_{(n)} = (-1)^n \dots \dots$	16
1 Sucessão monótona		2 Exemplo: $u_{(n)} = \sin(n \pi/4)$	
		3 Subsusecção convergente	
1.1 Decrescente		4 Lema	
1.2 Crescente		5	16
2 Sucessão limitada	. 12	6	16

X = 09/04 - Limites	17	3.2 Exemplo Aplicação	24
1 Lema geral das funções enquadradas . 1.1 Exemplo		XVII 26/04 - Funções Inversas	25
2 Lema		1 Exemplo	25
		2 Exemplo	25
XI 12/04 - Sucessão de Cauchy	18	3 Exemplo	25
1 Criterio suficiente para uma sucessão		4 Exemplo	25
ser Cauchy	18	XVIII 27/04 - Derivadas	26
1.1 Exemplo	18		26
2 Convergencia	18	1 Definição	$\frac{20}{26}$
XII 13/04 - Sucessões de Cauchy II	19	3 Definição derivada para funções de	20
1		imagens abertas	26
2	19 19	0	
2.1 Limite	19	XIX 30/04 - Regras de Derivação	27
2.2 Visualização gráfica do limite	19	1 Derivação da Soma	27
		2 Derivação do Produto	27
XIII 16/04	20	3 Derivada da Divisão	27
1	20	3.1 Previa	27
2 Definição derivada	20	4 Derivada de Conjugada	27
3 Existencia de limite	20	4.1 Exemplo	27
4 Exemplo	20	4.2 Exemplo	27
5 Exemplo	20	5 Tecnica de encontrar derivações	27
5.1 Usando sucessões para encontrar li-		5.1 $\ln'(x) = 1/x \dots \dots$	27
$\mathrm{mites} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	20	5.2 $\arctan'(x) = 1/(1+x^2) \dots$	27
6	21	5.3 $\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2} \dots \dots$	28
XIV 19/04 - Limites	22	XX 03/05 - Teoremas da diferenci-	20
1 Limite notável: $\sin(x)/x$	22	abilidade	29
1.1 Exemplo		1 Teorema de Rolle	
1.2 Exemplo	22	1.1 Demonstração	29
1.3 Exemplo	22	2 Teorema de Lagrange	29
1.4 Exemplo	22	2.1 Corolário	29
2 Limite notável: $(e^x - 1)/x$	22	2.2 Ideia de Demonstração do teorema	
	22	de Lagrange	29
XV = 20/04 - Funções continuas	23	3 Regra de L'Hospital-Cauchy	30
1	$\begin{array}{c} 23 \\ 23 \end{array}$	XXI 04/05 - Formula de Taylor	31
2.1 Exemplo	23	1 Aproximação com funções polinomiais	31
2.2 Exemplo	23	1.1 Polinômio de grau 1	31
3 Continuidade segundo Cauchy	23	1.2 Polinômio de grau 2	31
,		1.3 Polinômio de grau 3	31
XVI 23/04 - Continuidade: Teore-		2 Formula de Taylor com grau n e resto	
mas	24	de lagrange	31
1 Teorema de Bolzano	24	2.1 Exemplo: Ordem 3 em 0	31
2 Teorema de Weierstrass	24		2.5
3 Corolário de Bolzano e Weirestrass	2.4	VVII OF OF D	32
5 Coloiallo de Doizallo e Wellestiass	24	XXII 07/05 - Resto Lagrange	02

1.1 Exemplo	32 32	3 Critério necessário e suficiente para a integralidade de uma função4 Exemplo	40 40
XXIII $10/05$ - 1° Teste: Revisão	33	5 Exemplo	40
1 Não foi visto	33	XXX 25/05 - Integração II	41
XXIV 11/05 - Primitivação	34	1 Função monotona	41
1 Exercício	34	2 Contra Exemplo	41
2 Propriedades de Primitivas	34	3 Diâmetro de uma partição	41
2.1 Exercicio	34	4 Soma de Riemam	41
3 Primitivas Imediatas	34	5 Exercicio	42
3.1 Exercicio	34	6 Exercicio	42
3.2 Exercicio	34	7 Exercicio	42
m XXV ~~14/05 - Primitivação II	35	XXXI 28/05 - Integrais Indefinidas	43
1 Exercicio: $f(x) = x(x^2 + 1)^3$	35	1 Propriedade de Integração	43
2 Primitivas por substituição	35	2 Propriedade de Integração	43
2.1 Exemplo: $f(x) = e^x/(1 + e^{2x})$	35	3 Integral Indefinida	43
2.2 Exemplo: $f(x) = e^{\sqrt{x}/\sqrt{x}}$	35	4 Teorema fundamental do cálculo	43
2.3 Exemplo: $f(x) = \sqrt{x-1}/x$	35	5 Regra de Barrow	43
XXVI 17/05 - Introdução a Trigo-		6 Exercicio	44
nometria Hiperbólica	36	7 Exercicio	44
		8 Exercicio	44 44
1 Funções Trigonométricas Hiperbólicas1.1 Relação fundamental da trigonome-	36	9 Exercicio	44
tria hiperbólica clássica	36	XXXII 32/05 - Teorema Funda-	
2 Exemplo: $f(x) = \sqrt{1 + x^2} \dots$	36	mental do Cálculo	45
3 Exemplo: $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \dots$	36	1 Exercicio	45
4 Desafio: $f(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$	36	2 Exercicio	45
		3 Exemplo	46
XXVII 18/05 - Primitivação III	37	4 Exemplo	46
1 Primitivação por partes	37	5 Exemplo	46
1.1 Exemplo: $f(x) = x e^x$	37	6 Exemplo	46
1.2 Exercício: $f(x) = x \cos(x) \dots$	37	VVVIII 01/00 Transmar de cal	
1.3 Exercício: $f(x) = \ln(x) \dots$	37	XXXIII 01/06 - Teoremas do calculo integral	47
1.4 Exercício: $f(x) = \arctan(x)$	37	S .	
1.5 Exercício: $f(x) = e^x \sin(x) \dots$	37	1 Teorema do Valor Médio	47
1.6 Exercicio: $f(x) = e^x \cos(x) \dots$	37	2	47 47
XXVIII 21/05 - Revisões Primiti-		4 Integração por Partes	$\frac{47}{47}$
visação (Aula vazia)	38	4.1 Exercicio	47
		4.2 Aplicação: Area de uma elipse	48
XXIX 24/05 - Integração: Soma de			
Darboux	39	XXXIV 15/06 - Exercícios para o	
1 Introdução: Cálculo de Areas	39	Teste	49
2 Definição: Integração de Rieman	40	Q0 - a)	49

Formulas de Recorrência

1.
$$\int \sin^n(a\,u)\,du = -\frac{\sin^{n-1}(a\,u)\,\cos(a\,u)}{a\,n} + (n-1)/n\,\int \sin^{n-2}(a\,u)\,du$$

2.
$$\int \cos^n(a u) du = \frac{\sin(a u) \cos^{n-1}(a u)}{a n} + (n-1)/n \int \cos^{n-2}(a u) du$$

3.
$$\int \tan^n(a u) du = \frac{\tan^{n-1}(a u)}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2}(a u) du$$

4.
$$\int \cot^n(a u) du = -\frac{\cot^{n-1}(a u)}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2}(a u) du$$

5.
$$\int \sec^n(a u) du = \frac{\sec^{n-2}(a u) \tan(a u)}{a (n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2}(a u) du$$

6.
$$\int \csc^n(a \, u) \, du = -\frac{\csc^{n-2}(a \, u) \cot(a \, u)}{a \, (n-1)} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2}(a \, u) \, du$$

Identidades Trigonométricas

1.
$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

2.
$$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$$

3.
$$1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$$

4.
$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

5.
$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$6. \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

7.
$$2\sin(x)\cos(y) = \sin(x-y) + \sin(x+y)$$

8.
$$2\sin(x)\sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

9.
$$\cos(x) \cos(y) = \cos(x - y) + \cos(x + 1)$$

10.
$$1 \pm \sin(x) = 1 \pm \cos(\pi/2 - x)$$

Trigonometria Hiperbólica

$$1. \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2.
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3.
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

4.
$$\coth(x) = 1/\tanh(x)$$

5.
$$\operatorname{sech}(x) = 1/\cosh(x)$$

6.
$$\operatorname{csch}(x) = 1/\sinh(x)$$

Tabela de Derivadas

1.
$$(u^n)' = n u^{n-1} u'$$

2.
$$(uv)' = u'v + v'u$$

3.
$$(u/v)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

4.
$$(a^u)' = a^u \ln(a) u' \dots (a > 0, a \neq 1)$$
 17. $\tanh'(u) = 1 - \tanh^2(u)$

5.
$$(e^u)' = e^u u'$$

6.
$$\log_a'(u) = \frac{u'}{u} \log_a(e)$$

7.
$$\ln'(u) = \frac{1}{u}u'$$

8.
$$(u^v)' = v u^{v-1} u' + u^v \ln(u) v'$$

$$9. \sin'(u) = u' \cos(u)$$

10.
$$\cos'(u) = -u' \sin(u)$$

11.
$$\tan'(u) = u' \sec^2(u)$$

12.
$$\cot'(u) = -u' \csc^2(u)$$

13.
$$\sec'(u) = u' \sec(u) \tan(u)$$

14.
$$\csc'(u) = -u' \csc(u) \cot(u)$$

15.
$$\sinh'(u) = \cosh(u)$$

16.
$$\cosh'(u) = \sinh(u)$$

17.
$$\tanh'(u) = 1 - \tanh^2(u)$$

18.
$$\coth'(u) = 1 - \coth^2(u)$$

19.
$$\operatorname{sech}'(u) = -\tanh(u)\operatorname{sech}(u)$$

20.
$$\operatorname{csch}'(u) = -\coth(u) \operatorname{csch}(u)$$

21.
$$\arcsin'(u) = u'/\sqrt{1-u^2}$$

22.
$$\arccos'(u) = -u'/\sqrt{1 - u^2}$$

23.
$$\arctan'(u) = u'/1 + u^2$$

24.
$$\operatorname{arccot}'(u) = -u'/1 + u^2$$

25.
$$\operatorname{arcsec}'(u) = u'/(|u|\sqrt{u^2-1}) . . . (|u| > 1)$$

26.
$$\operatorname{arccsc}'(u) = -u'/(|u|\sqrt{u^2-1}) . . . (|u| > 1)$$

Tabela de Integrais

1.
$$\int du = u + c$$

2.
$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$
 $(n \neq -1)$ 13. $\int \csc(u) \cot(u) du = -\csc(u) + c$

$$3. \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + c$$

4.
$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + c, a > 0$$
 $(a \neq 1)$ 15. $\int \csc^2(u) du = -\cot(u) + c$

$$5. \int e^u du = e^u + c$$

6.
$$\int \sin(u) \, \mathrm{d}u = -\cos u + c$$

7.
$$\int \cos(u) du = \sin u + c$$

8.
$$\int \tan(u) du = \ln|\sec(u)| + c$$

9.
$$\int \cot(u) \, \mathrm{d}u = \ln|\sin(u)| + c$$

10.
$$\int \sec(u) du = \ln|\sec(u) + \tan(u)| + c$$

11.
$$\int \csc(u) du = \ln|\csc(u) - \cot(u)| + c$$

12.
$$\int \sec(u) \tan(u) du = \sec(u) + c$$

13.
$$\int \csc(u) \cot(u) du = -\csc(u) + \epsilon$$

14.
$$\int \sec^2(u) \, \mathrm{d}u = \tan(u) + c$$

15.
$$\int \csc^2(u) du = -\cot(u) + c$$

16.
$$\int du/(u^2 + a^2) = \arctan(u/a)/a + c$$

17.
$$\int du/(u^2 - a^2) = \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| / 2a + c \quad (u^2 > a^2)$$

18.
$$\int du/\sqrt{u^2 + a^2} = \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + c$$

19.
$$\int du/\sqrt{u^2 - a^2} = \arcsin(u/a) + c \quad (u^2 < a^2)$$

20.
$$\int du/\sqrt{a^2 - u^2} = \arcsin(u/a) + c \quad (u^2 < a^2)$$

21.
$$\int du/\left(u\sqrt{a^2-u^2}\right) = \operatorname{arcsec}|u/a|/a + c$$

I | 15/03 - Conceitos Básicos I

1 Majorante

 $m \in \text{Majorante}(X) \iff m \in \mathbb{R} \land x \le m \ \forall x \in X$

3 Infimo

(i) Standalone

$$Inf(X) = i \iff i \in \mathbb{R} \land x \ge m \ \forall x \in X \land \land \nexists y \in \mathbb{R} \backslash X : i < y < x \ \forall x \in X$$

(ii) Usando Vizinhança

$$Inf(X) = i \iff i \in \mathbb{R} \land x > i \ \forall \ x \in X \land V_{\delta}(i) \cap X \neq \emptyset$$

5 Minimo

(i) Standalone

$$Min(X) = m \iff m \in X \land m \le y \ \forall \ y \in m$$

(ii) Usando Minorante

$$Min(X) = m \iff$$

 $\iff m \in X \land m \in Minorante(X)$

7 Conjunto Limitado

X é um conjunto limitado \iff \iff $\{m_1 \le x \le m_2 \mid \forall x \in X : m_1 \in \text{Minorante}(X), m_2 \in \text{Majorante}(X)\}$

8 Vizinhanca

$$V_{\delta}(x) = (x - \delta, x + \delta) \quad \delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2 Minorante

$$m \in \text{Minorante}(X) \iff m \in \mathbb{R} \land x \ge m \ \forall x \in X$$

4 Supremo

(i) Standalone

$$Sup(X) = s \iff s \in \mathbb{R} \land x \le s \ \forall \ x \in X \land \land \nexists \ y \in \mathbb{R} \backslash X : x < y < s$$

(ii) Usando Vizinhança

$$Sup(X) = s \iff \\ \iff s \in \mathbb{R} \land x < s \ \forall \ x \in X \land V_{\delta}(s) \cap X \neq \emptyset$$

6 Maximo

(i) Standalone

(ii) Usando Majorante

$$= \operatorname{Max}(X) = m \iff \\ \iff m \in X \land m \in \operatorname{Majorante}(X)$$

9 Interior

(i) Standalone

$$x \in \text{Int}(X) \iff$$

 $\iff \exists \, \delta > 0 : (x - \delta, x + \delta) \subseteq X$

(ii) Usando Vizinhança

$$x \in \operatorname{Int}(X) \iff V_{\delta}(x) \subseteq X$$

11 Fronteira

$$f \in \operatorname{Fr}(X) \iff V_{\delta}(f) \cap X \neq \emptyset \land V_{\delta}(f) \cap \mathbb{R} \backslash X \neq \emptyset$$

10 Exterior

(i) Standalone

$$x \in \operatorname{Ext}(X) \iff \\ \iff \exists \, \delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (x - \delta, x + \delta) \cap X = \emptyset$$

(ii) Usando Vizinhança

$$x \in \operatorname{Ext}(X) \iff$$

 $\iff V_{\delta}(x) \cap X = \emptyset$

II | 16/03 - Conceitos Básicos II

1 Conjunto Aberto

$$X$$
 é um conjunto aberto \iff $X = Int(X)$

3 Feixe

$$\bar{X} = \operatorname{Int}(X) \cup \operatorname{Fr}(X)$$

2 Conjunto Fechado

$$X$$
 é um conjunto fechado \iff $X = Int(X) \cup Fr(X)$

4 Ponto de Acumulação

$$x$$
 é um ponto de acumulação de $X \iff V_{\delta}(x) \cap (X \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

III | 19/03 - Indução por igualdade

- 1. Prove que algum numero pertence ao conjunto
- 2. Prove que o proximo pertence ao conjunto

Seja
$$V = \{P_{(n)} \mid \forall n \in \text{Dominio}\}$$

 $P_{(x)} \in V; P_{(x+1)} \in V$

1 Exemplo

$$\sum_{i=0}^n rac{1}{2^i} = 2 - rac{1}{2^n} \quad orall \, n \in \mathbb{N}_0$$

(i)
$$n = 0$$

(ii)
$$n = m + 1$$

$$\sum_{i=0}^{0} \frac{1}{2^i} = 1 = 2 - \frac{1}{2^0} = 2 - 1 = 1$$

$$\sum_{i=0}^{m+1} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{m+1}} =$$

$$= 2 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} = 2 - \frac{1}{2^{m+1}}$$

IV | 22/03 - Indução por Desigualdade

1 Exemplo 1

$$n \leq 2^{n-1} \quad orall \, n \in \mathbb{N}$$

(i)
$$n = 1$$

$$1 \le 2^{1-1} = 1$$

(ii)
$$n = m + 1$$

$$m+1 \le 2^{m-1}+1 = \frac{2^m+2}{2} \le 2^{m+1-1} = 2^m \implies$$

 $\implies 2 \le 2^{m+1}-2^m = 2^m(2-1) = 2^m$

2 Exemplo 2

$$n^2 \leq 2^n \quad orall \, n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4$$

(i)
$$n = 4$$

$$4^2 \le 2^4 = 4^2$$

(ii)
$$n = m + 1$$

$$(m+1)^{2} = m^{2} + 2m + 1 \le$$

$$\le 2^{m} + 2m + 1 \le 2 * 2^{m} = 2^{m+1} \implies$$

$$\implies 2m + 1 \le 2^{m};$$

$$\begin{cases} m = 4 \implies 2 * 4 + 1 = 9 \le 2^{4} = 16 \\ m = n + 1 \implies 2 * (n+1) + 1 = 2n + 1 + 2 \le$$

$$\le 2^{n} + 2 \le 2 * 2^{n} = 2^{n+1} \implies 2 \le 2^{n} \end{cases}$$

$m V \mid 23/03$ - Sucessões

 $u_{(n)}:\mathbb{N} o \mathrm{Imagem}$

1 Sucessão monótona

1.1 Decrescente

 $u_{(n)} \ge u_{(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2 Sucessão limitada

$$u_{(n)}$$
 é limitada \iff $m_1 \le u_{(n)} \le m_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3 Sucessão Convergente

 $u_{(n)}$ converge para $l \in \mathbb{R} \iff$ $\iff \exists p \in \mathbb{N} : u_{(n)} \in V_{\delta}(l) \quad \forall n > p$

Nota:

$$u_{(n)} \in V_{\delta}(l) \iff |u_{(n)} - l| < \delta \iff$$

 $\iff l - \delta < u_{(n)} < l + \delta$

1.2 Crescente

$$u_{(n)} \le u_{(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

3.1 Exemplo

$$u_{(n)} = 1/\sqrt{2 n - 1};$$

 $u_{(n)} > 0; \ \delta = 1/10$

$$\iff 0 < \frac{1}{\sqrt{2n-1}} < \frac{1}{10} \iff$$

$$\iff 0 < \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{100}; \ 2n-1 > 100 \implies$$

$$\implies \lfloor 101/2 \rfloor < n$$

VI | 26/03 - Demonstrações para sucessões

1 Sucessão convergente \implies Limitada

```
u_{(n)} é uma sucessão convergente \iff u_{(n)} \in V_{\varepsilon}(l) \quad \forall \, \varepsilon > 0 \iff l - \varepsilon < u_{(n)} < l + \varepsilon \iff \exists \, \{m_1, m_2\} \subset \mathbb{R} : m_1 < u_{(n)} < m_2 \quad \forall \, n \in \mathbb{N} \iff u_{(n)} \text{ é uma sucessão limitada}
```

2 Sucessão é monótona e limitada \implies convergente

```
u_{(n)} é uma sucessão monotona e limitada \iff \Leftrightarrow (u_{(n)} < u_{(n+1)} \lor u_{(n)} > u_{(n+1)}) \land \exists \{m_1, m_2\} \subset \mathbb{R} : m_1 < u_{(n)} < m_2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \exists \operatorname{Sup}(u_{(n)}) \in \mathbb{R} \backslash u_{(n)} \iff u_{(n)} é uma sucessão convergente
```

VII | 29/03 - Lemas de Desigualdades

1 Lema $\lim_{n\to\infty} u_{(n)} \leq \lim_{n\to\infty} v_{(n)}$

$$u_{(n)}$$
 e $v_{(n)}$ são convergentes \land
 $\land u_{(n)} \le v_{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies$
 $\implies \lim_{n \to \infty} u_{(n)} \le \lim_{n \to \infty} v_{(n)}$

2 Lema das sucessões enquadradas

$$\{u_{(n)}, v_{(n)}, w_{(n)}\} : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \land$$

$$\land v_{(n)} \le u_{(n)} \le w_{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \land$$

$$\land \exists l \in \mathbb{R} : \{v_{(n)}, w_{(n)}\} \xrightarrow{\text{converge}} l \implies$$

$$\implies u_{(n)} \xrightarrow{\text{converge}} l$$

2.1 Exemplo: $u_{(n)} = \sin(n)/n$

$$\frac{-1}{n} \le \frac{\sin(n)}{n} \le \frac{1}{n}; \ \left\{ \frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right\} \to 0 \implies \\ \implies \frac{\sin(n)}{n} \to 0$$

3 Lema
$$u_{(n)} * v_{(n)} \to 0$$

$$u_{(n)} \notin \text{limitada} \land v_{(n)} \to 0 \implies$$

$$\implies 0 \le |u_{(n)} * v_{(n)}| = |u_{(n)}| * |v_{(n)}| \le$$

$$\le \text{Majorante}(u_n) * 0 = 0 \implies$$

$$\implies u_{(n)} * v_{(n)} \to 0$$

3.1 Exemplo: $S_{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n^2}$

$$0 \le S_{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n^2} \le \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \implies$$

$$\implies S_{(n)} \to 0$$

3.2 Exercicio: $\frac{2^n-n}{3^n+1}$

$$0 \le \frac{2^n - n}{3^n + 1} \le \frac{2^n}{3^n} = (2/3)^n \to 0 \implies$$

$$\implies \frac{2^n - n}{3^n + 1} \to 0$$

4 Lema

$$u_{(n)} \to l_1 \wedge v_{(n)} \to l_2 \implies$$

$$\implies u_{(n)} + v_{(n)} \to l_1 + l_2 \implies$$

$$\implies |u_{(n)} + v_{(n)} - (l_1 + l_2)| =$$

$$= |u_{(n)} - l_1 + v_{(n)} - l_2| \le |u_{(n)} - l_1| + |v_{(n)} - l_2| < \varepsilon$$

$m VIII \mid 30/03$

1

2

nito

 $u_{(n)} \to \infty \iff$

 $\iff u_{(n)} > m \quad \forall m \in \mathbb{R} \land \forall \{n, p\} \subset \mathbb{N} : n > p$

$$u_{(n)} \to l_1 \wedge v_{(n)} \to l_2 \implies$$

$$\implies 0 \le |u_{(n)} v_{(n)} - l_1 l_2| =$$

$$= |(u_{(n)} - l_1) v_{(n)} + v_{(n)} l_1 - l_1 l_2| =$$

$$= |(u_{(n)} - l_1) v_{(n)} + l_1 (v_{(n)} - l_2)| \le$$

$$\le |(u_{(n)} - l_1)| |v_{(n)}| + |l_1| |(v_{(n)} - l_2)| \to 0 \implies$$

$$\implies u_{(n)} * v_{(n)} \to l_1 * l_2$$

3 Indeterminações

- $u_{(n)} v_{(n)} : u_{(n)} \to 0 \land v_{(n)} \to \infty$
- (ii) $u_{(n)}/v_{(n)}:u_{(n)}\to\infty\wedge v_{(n)}\to\infty$
- (iii) $u_{(n)} + v_{(n)} : u_{(n)} \to \infty \land v_{(n)} \to -\infty$
- (iv) $(1+1/n)^n : n \to \infty$

Exercicios

(i)
$$u_{(n)} = \sqrt{n^2 + 2n} - n$$

$$= \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n + n}} = \frac{2}{\sqrt{1 + 2/n + 1}} \to \frac{2}{\sqrt{1 + 1}} \to \frac{2}{\sqrt{1 + 1}} = 1$$

(ii)
$$a_{(n)} = \frac{n + \cos(n)}{n \ln(n+1)}$$

$$\lim_{n \to \infty} a_{(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} + \lim_{n \to \infty} \frac{\cos(n)}{n} *$$

$$* \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 + 0 * 0 = 0$$

(iii)
$$b_{(n)} = \left(\frac{n^2 - 2n + 1}{n^2 + 2n + 1}\right)^n$$

Sucessão que tende para o infinito
$$\lim_{n\to\infty} b_{(n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n} = \\ = \left(\frac{\lim_{n\to\infty} (1-1/n)^n}{\lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n}\right)^2 = \left(\frac{e^{-1}}{e^1}\right)^2 = e^{-4}$$

IX | 06/04 - Subsucessões

$$u\circ i_{(n)}=u_{(i_{(n)})}$$

1 Exemplo: $u_{(n)} = (-1)^n$

(i)
$$i_{(n)} = 2n$$

$$u \circ i_{(n)} = (-1)^{2n} = 1$$

(ii)
$$j_{(n)} = 2n - 1$$

$$u \circ j_{(n)} = (-1)^{2n-1} = -1$$

2 Exemplo: $u_{(n)} = \sin(n \pi/4)$

(i)
$$i_{(n)} = 4 n$$

$$u \circ i_{(n)} = \sin(4 \, n \, \pi/4) = \sin(n \, \pi) = 0$$

3 Subsusecção convergente

$$u_{(n)}$$
 é uma sucessão convergente \Longrightarrow
 $\Longrightarrow u_{(n)} \in V_{\varepsilon}(l) \quad \forall \{n,p\} \subset \mathbb{N} : n > p;$
 $i_{(p)} \geq p \implies u \circ i_{(n)} \in V_{\varepsilon}(l)$
 $\forall \{n,p\} \subset \mathbb{N} : n > p \implies$
 $\Longrightarrow u \circ i_{(n)}$ é uma sucessão convergente

$$u: \mathbb{N}
ightarrow \mathbb{R} \wedge i: \mathbb{N}
ightarrow \mathbb{N} \wedge \ \wedge i_{(n)} < i_{(n+1)} \ \ orall \, n \in \mathbb{N}$$

4 Lema

$$u \circ i_{(n)}$$
 é uma sucessão monotona \Longrightarrow
 $\Longrightarrow u \circ i_{(n)} < u \circ i_{(m)} \quad \forall \{m,n\} \in \mathbb{N} : m > n$

5

"Qualquer Sucessão possui pelo menos uma subsucessão monótona"

6

"Qualquer sucessão limitada possui pelo menos uma subsucessão monótona convergente"

 $u_{(n)}$ é limitada \Longrightarrow $u \circ i_{(n)}$ é uma sucessão convergente

$X \mid 09/04$ - Limites

$$\limsup u_{(n)} = \sup\{l: l \text{ \'e sublimite de } u\}$$

 $\liminf u_{(n)} = \inf\{l: l \text{ \'e sublimite de } u\}$

$$u_{(n)} \to l \iff \limsup u_{(n)} = \liminf u_{(n)} = l$$

1 Lema geral das funções enquadradas

$$\{u_{(n)}, v_{(n)}, w_{(n)}\} : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : w_{(n)} \le u_{(n)} \le v_{(n)} \Longrightarrow$$
$$\implies \liminf w_{(n)} \le \liminf u_{(n)} \le \limsup u_{(n)} \le \limsup v_{(n)}$$

1.1 Exemplo

$$u_{(n)} = \left(1 + \frac{1 + (-1)^n}{n}\right)^n$$

$$1^n = 1 \le u_{(n)} \le \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \to e^2$$

2 Lema

"Se
$$u_{(n)} \to l$$
 então a sucessão $s_{(n)} = \frac{\sum_{i=0}^n u_{(n)}}{n} \to l$ "

XI | 12/04 - Sucessão de Cauchy

$$u_{(n)}:|u_{(m)}-u_{(n)}|p\wedge n>p$$

1 Criterio suficiente para uma sucessão ser Cauchy

$$\begin{aligned} |u_{(n+2)} - u_{(n+1)}| &\leq \alpha |u_{(n+1)} - u_{(n)}| \\ \forall \, n \in \mathbb{N} : n > p \wedge \alpha \in (0,1) \implies \\ &\implies u_{(n)} \,\, \text{\'e Cauchy} \end{aligned}$$

1.1 Exemplo

$$u_{(n)} = \begin{cases} 0 & n = 1\\ (2/3) u_{(n-1)} + 1 & n > 1 \end{cases}$$

$$|u_{(n+2)} - u_{(n+1)}| =$$

$$= |(2/3) u_{(n+1)} + 1 - (2/3) u_{(n)} - 1| =$$

$$= (2/3) |u_{n+1} - u_{(n)}|$$

$$\therefore u_{(n)} \text{ \'e Cauchy}$$

2 Convergencia

$$u_n \begin{cases} 0 & n = 1 \\ u_{(n-1)} 2/3 + 1 & n > 1 \end{cases}$$

$$u_n \to l$$
; $u_n 2/3 + 1 \to l 2/3 + 1$ $\therefore l = l 2/3 + 1 \Longrightarrow$
 $\Longrightarrow l = 3$

XII | 13/04 - Sucessões de Cauchy II

1

$$u_n = 1/2^n$$

$$|u_m - u_n| = \left| u_m + \sum_{k=n+1}^{m-1} (-u_k + u_k) - u_n \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=n}^{m-1} u_{k+1} - u_k \right| \le \sum_{k=n}^{m-1} |u_{k+1} - u_k|$$

2

$$u_n = egin{cases} 1 & n=1 \ 1+1/u_{n-1} & n>1 \end{cases}$$

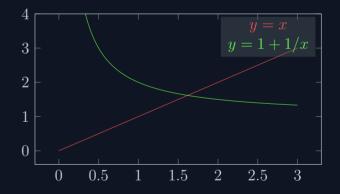
$$1 \le u_n \le 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies 1 \le u_{n+1} \le 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies 2 \ge 1 + 1/u_n \ge 3/2 \ge 1$$

2.1 Limite

$$u_{n+1} = 1 + 1/u_n \implies l = 1 + 1/l \implies$$

 $\implies l^2 - l - 1 = 0 \implies l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

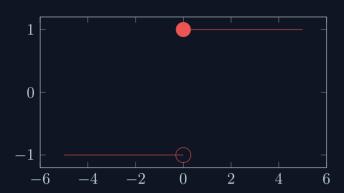
2.2 Visualização gráfica do limite



XIII | 16/04

1

$$H(x) = egin{cases} 1 & x \geq 0 \ -1 & x < 0 \end{cases}$$



2 Definição derivada

$$\lim_{x o a}rac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

- (i) f não é obrigada a estar definida em x = a
- (ii) (x_n) é uma sucessão que aproxima de a por valores diferentes de a

3 Existencia de limite

$$\exists \lim_{x o a} f(x) \quad \iff \quad$$

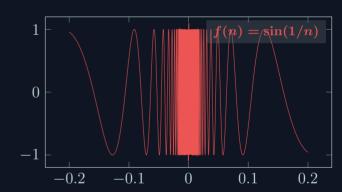
$$\iff \begin{cases} \exists \lim_{x \to a^{-}} f(x) \\ \exists \lim_{x \to a^{+}} f(x) \\ \lim_{x \to a^{+}} f(x) = \lim_{x \to a^{-}} f(x) \end{cases}$$

4 Exemplo

$$g(a) = egin{cases} x^2 & x < 0 \ x & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\exists \lim_{x \to 0} g(x) \iff \lim_{x \to 0^{-}} g(x) = 0; \ \lim_{x \to 0^{+}} g(x) = 0$$

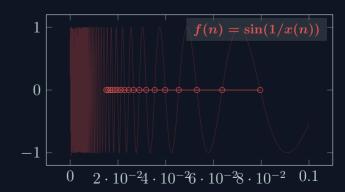
5 Exemplo



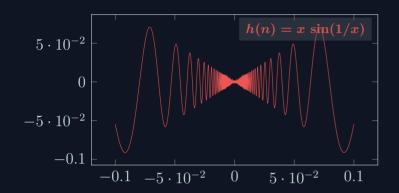
5.1 Usando sucessões para encontrar limites

$$x(n) = 1/(n \pi)$$
 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$f(x(n)) = \sin\left(\frac{1}{1/(n\pi)}\right) = \sin(n\pi) \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$



$$h(x) = x \, \sin(1/x) \quad x \in \mathbb{R} ackslash \{0\}$$



$$h(x) = x \sin(1/x) = \frac{\sin(1/x)}{1/x}$$

$\overline{\rm XIV}$ | 19/04 - Limites

 $f:\overline{\mathrm{D}}\subseteq\mathbb{R} o\mathbb{R}$ $f ext{ está definida em }V_{\delta}(a)ackslash\{a\}$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R} \iff \lim f(x(n)) = L \quad \forall x(n) : x(n) \to a$$

1 Limite notável: $\sin(x)/x$

graph missing

area triangulo menor = x/2 << area triangulo maior = $\tan(x)/2 \implies$

$$\implies x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \implies \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \implies$$

$$\implies \lim_{x \to 0} \cos(x) = 1 < \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} < \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

1.1 Exemplo

$$\lim_{x o 0} \sin(x^2)/x^2$$

= 1

1.2 Exemplo

$$\lim_{x \to 0} \sin(x^2)/x$$

$$= \lim_{x \to 0} x \left(\frac{\sin(x^2)}{x^2} \right) = 0$$

1.3 Exemplo

$$\lim_{x \to 0} \sin(2x)/x$$

$$= \lim_{x \to 0} 2 \left(\frac{\sin(2x)}{2x} \right) = 2$$

1.4 Exemplo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x (1 + \cos(x))} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{1 + \cos(x)} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = 0$$

2 Limite notável: $(e^x - 1)/x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{(n-1)}}{n!} = \lim_{x \to 0} 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{(n-1)}}{n!} = 1$$

XV | 20/04 - Funções continuas

1

$$f: \mathrm{I} o \mathbb{R} \ \ \ a \in \mathrm{int}(\mathrm{I})$$

f é continua em $x = a \iff \exists \lim_{x \to a} f(x) = L \land f(a) = L$

2 Continuidade

f é continua em x = a

$$\iff \exists \lim_{x \to a^+} = L^+ \land \exists \lim_{x \to a^-} = L^- \land L^+ = L^- = f(a)$$

$$\exists \ \lim_{x o a} f(x) \wedge
etin f(a)$$

$$\overline{f} = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ L & x = a \end{cases}$$

2.1 Exemplo

$$h(x) = \sin(x)/x$$

$$\overline{h} = \begin{cases} \sin(x)/x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

2.2 Exemplo

$$g(x)=e^{-1/|x|}$$

$$\overline{g} = \begin{cases} e^{-1/|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

3 Continuidade segundo Cauchy

$$f: \mathrm{I} o \mathbb{R} \wedge a \in \mathrm{int}(\mathrm{I})$$

∴ f é continua em x = a segundo Cauchy \iff $\exists \, \delta_{(\varepsilon)} > 0 \quad \forall \, \varepsilon > 0 : |f(a) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall \, |x - a| < \delta$

XVI | 23/04 - Continuidade: Teoremas

f é continua em [a,b]

$$\iff f \text{ \'e continua em } x \in (a,b) \land \\ \land \lim_{x \to a^{-}} f(x) = f(a) \land \lim_{x \to b^{+}} f(x) = f(b)$$

1 Teorema de Bolzano

$$f: [a,b]
ightarrow \mathbb{R} \wedge f ext{ \'e continua em } [a,b] \ : f(a) < f(b) \quad orall \, k: f(a) < k < f(b) \ \implies \exists \, c \in (a,b): f(c) = k$$

2 Teorema de Weierstrass

$$f:[a,b] o \mathbb{R} \wedge f ext{ \'e continua em } [a,b] \ dots \exists \left\{x_{ ext{max}},x_{ ext{min}}
ight\} \subset [a,b]: \ :f(x_{ ext{min}}) \leq f(x) \leq f(x_{ ext{max}})$$

3 Corolário de Bolzano e Weirestrass

$$f:[a,b] o \mathbb{R} \wedge f$$
 é continua em $[a,b]$ $\therefore f([a,b])=[x_{ ext{max}},x_{ ext{min}}]$

3.1 Exemplo Aplicação

$$e^{-x} = x$$

$$f: [0,1] \to \mathbb{R}; \quad f(x) = e^{-x} - x \implies$$

 $\implies f(0) = 1; \quad f(1) = 1/e - 1 < 0$
 $\therefore \exists c \in [0,1] : e^{-c} = c$

3.2 Exemplo Aplicação

$$g:[0,\pi] o\mathbb{R}; \quad g(x)=x\,\sin(x)$$

$$g(0) = g(\pi) = 0 : \exists x_{\text{max}} \ge 0$$

XVII | 26/04 - Funções Inversas

 $f: \mathcal{I} o \mathcal{J} \wedge \mathcal{I}, \overline{\mathcal{J}} \subset \mathbb{R} \wedge f$ é injetiva e subjetiva (bijetiva)

$$f^{-1}: \mathrm{J} o \mathrm{I} \quad egin{cases} f^{-1} \circ f(x) = x & & orall \, x \in \mathrm{I} \ f \circ f^{-1}(y) = y & & orall \, y \in \mathrm{J} \end{cases}$$

1 Exemplo

$$egin{aligned} f &: [0,+\infty]
ightarrow [0,+\infty] & f(x) = x^2 \ f^{-1} : [0,+\infty]
ightarrow [0,+\infty] & f^{-1}(x) = \sqrt{x} \end{aligned}$$

2 Exemplo

$$f:[0,1] o\mathbb{R}$$
 $f(x)=2x+1$

- (i) f é injetiva?
- $\iff f$ é estritamente monotona
- (ii) Contradomínio de f

$$= [1, 3]$$

(iii) f^{-1}

$$f^{-1}:[1,3] \to [0,1]$$
 $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$

3 Exemplo

$$\sin: [-\pi/2,\pi/2] o [-1,1] \ \mathrm{arcsin}: [-1,1] o [-\pi/2,\pi/2]$$

4 Exemplo

$$an: [-\pi/2,\pi/2] o [-\infty,\infty]$$
 $\operatorname{arctan}: [-\infty,\infty] o [-\pi/2,\pi/2]$

XVIII | 27/04 - Derivadas

1 Definição

$$f: \mathrm{I} o \mathbb{R} \wedge a \in \mathrm{int}(\mathrm{I})$$

$$D \in \mathbb{R}: D = f'(a) = rac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x} = \lim_{x o a} rac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h o 0} rac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

2 Definição Alternativa

$$egin{aligned} \exists\, f'(a) & \Longleftarrow \exists\, \mathrm{D} \in \mathbb{R}, \ Z: V_\delta(0) & \to \mathbb{R}: \ f(x) &= f(a) + D\,(x-a) + \ + (x-a)\,Z(x-a) \end{aligned}$$

3 Definição derivada para funções de imagens abertas

$$f: \mathrm{I} o \mathbb{R} \wedge \mathrm{I}
eq ar{\mathrm{I}}$$

$$f' : \mathrm{I} o \mathbb{R} \quad f'(x) = \lim_{h o 0} rac{f(x+h) \, f(h)}{h}$$

XIX | 30/04 - Regras de Derivação

1 Derivação da Soma

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$(f+g)'(a) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) =$$

$$= f'(a) + g'(a)$$

2 Derivação do Produto

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

$$(fg)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(f(x) - f(a))g(x) + f(a)(g(x) - g(a))}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \left(g(x)\frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(x)\frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right) =$$

$$= g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

3 Derivada da Divisão

3.1 Previa

$$(1/f(x))' = -f'(a)/f^2(a)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{1/f(x) - 1/f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(a) - f(x)}{(x - a) f(x) f(a)} =$$
$$= -f'(a)/f^{2}(a)$$

4 Derivada de Conjugada

$$(f\circ u)'(a)=f'(u(a))\,u'(a)$$

$$(f \circ u)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(u(x)) - f(u(a))}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(u(x)) - f(u(a))}{u(x) - u(a)} \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = f'(u(a)) u'(a)$$

4.1 Exemplo

$$(e^{u(x)})' = e^{u(x)} u'(x)$$
 $(e^{x^3})' = e^{x^3} 3x^2$

4.2 Exemplo

Nota: $(\ln)'(u) = u'/u$

$$(\ln'(1/\cos(x))) = \frac{-\sin(x)/x^2}{\cos(x)} = \frac{1}{\tan(x) x^2}$$

5 Tecnica de encontrar derivações

5.1
$$\ln'(x) = 1/x$$

$$(e^{\ln(x)})' = (x)' \implies e^{\ln(x)} \ln'(x) = x \ln'(x) = 1 \implies$$

 $\implies (\ln)'(x) = 1/x$

5.2
$$\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$$

$$(\tan(\arctan(x)))' = (x)' \implies \tan'(\arctan(x)) \arctan'(x) =$$

$$= (1 + \tan^2(\arctan(x))) \arctan'(x) =$$

$$= (1 + x^2) \arctan'(x) = 1 \implies$$

$$\implies \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

5.3
$$\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$$

$$(\sin(\arcsin(x)))' = (x)' \implies \cos(\arcsin(x)) \arcsin'(x) =$$

= $\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} \arcsin'(x) =$
= $\sqrt{1 - x^2} \arcsin'(x) = 1 \implies \arcsin'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$

$XX \mid 03/05$ - Teoremas da diferenciabilidade

1 Teorema de Rolle

$$fegin{cases} f:[a,b] o\mathbb{R}\wedge\ f ext{ \'e continua em }[a,b]\wedge\ \exists\,f'(x)\quadorall\,x\in(a,b)\wedge\ f(a)=f(b) \end{cases}$$

$$\exists \, c \in [a,b] : f'(c) = 0 \land \\ \max(f), \min(f) \subset f(c)$$

$$\min(f) = x_0 \in (a,b):$$
 $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0; \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$$

$$\therefore f'(x_0) = 0$$

1.1 Demonstração

$$h \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \to x \sin(x) \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} 20 \\ 0 \\ -20 \\ -30 \end{array} \begin{array}{c} x \sin(x) \\ -20 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ -30 \end{array} \begin{array}{c} -20 \\ -10 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \\$$

2 Teorema de Lagrange

$$fegin{cases} f:[a,b] o\mathbb{R}\ f ext{ \'e continua em }[a,b]\ \exists\, f'(x)\;orall\,x\in(a,b) \end{cases}$$

$$egin{aligned} \therefore \exists \, c \in (a,b) : f'(c) = rac{f(b) - f(a)}{b - a}, \ f(b) = f(a) + f'(c) \, (b - a) \end{aligned}$$

2.1 Corolário

$$fegin{cases} f:[a,b] o\mathbb{R}\,\wedge\ f ext{ \'e continua em }[a,b]\,\wedge\ \exists\,f'(x)\quadorall\,x\in(a,b)\,\wedge\ f'(x)>0\quadorall\,x\in(a,b) \end{cases}$$

 $\therefore f$ é estritamente crescente em (a, b)

$$\{x, y\} \in (a, b) : f(x) < f(y) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow f(y) = f(x) + f'(c)(y - x)$$

2.2 Ideia de Demonstração do teorema de Lagrange

Nota: REVER

$$h(x) = (b-a) f(x) - (f(b) - f(a))(x-a)$$

$$\begin{cases} h(a) = (b-a) f(a) \\ h(b) = (b-a) f(b) - (f(b) - f(a))(b-a) = (b-a) f(a) \end{cases}$$

$$\implies h'(x) = (b-a) f'(x) - (f(b) - f(a)) = 0 \implies$$

$$\implies f(b) = f(a) + f'(x)(b-a)$$

3 Regra de L'Hospital-Cauchy

$$a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}; \quad arepsilon>0;$$

$$\{f,g\} egin{cases} ext{continua em } (a,\infty) \land \ & ((ext{diferenciaveis em } (a,a+arepsilon) \land a \in \mathbb{R}) \lor \ & ext{diferenciaveis em } (-\infty,-arepsilon) \land a = -\infty) \end{cases}$$

$$\lim_{x o a^+}f(x)=\lim_{x o a^+}g(x)=egin{cases}0\+\infty\end{cases}$$

$$\exists L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} : L = \lim_{x o a^+} f'(x)/g'(x) \implies \ \lim_{x o a^+} f(x)/g(x) = \lim_{x o a^+} f'(x)/g'(x) = L$$

$XXI \mid 04/05$ - Formula de Taylor

1 Aproximação com funções polinomiais

$$f(x) = e^x egin{cases} f(0) = 1 \ f'(0) = 1 \ f''(0) = 1 \end{cases}$$

1.1 Polinômio de grau 1

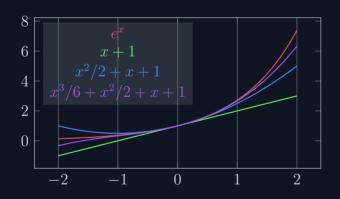
$$f_1(x) = f'(0)(x-0) + f(0) = x+1$$

1.2 Polinômio de grau 2

$$f_2(x) = f''(0)\frac{(x-0)^2}{2} + f'(x-0) + f(0) = x^2/2 + x + 1$$

1.3 Polinômio de grau 3

$$f_2(x) = f'''(0)\frac{(x-0)^3}{6} + f''(0)\frac{(x-0)^2}{2} + f''(x-0) + f(0) = x^3/6 + x^2/2 + x + 1$$



2 Formula de Taylor com grau n e resto de lagrange

$$egin{aligned} f: & \exists rac{\mathrm{d}^{n+1}f}{\mathrm{d}x^{n+1}} & orall \, x \in \mathrm{I} : a \in \mathrm{I} \implies \ & \Longrightarrow f_{(\mathrm{ord}=n, \,\, \mathrm{em}=a)} = \ & = \sum_{k=0}^n rac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} rac{(x-a)^k}{k!} + r_n(x-a) \ & orall \, x \in \mathrm{I} ackslash \{a\} \end{aligned}$$

$$r_n(x-a) = \frac{\mathrm{d}^{n+1} f(c)}{\mathrm{d} x^{n+1}} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$
 $c \in [x,a]$

2.1 Exemplo: Ordem 3 em 0

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f_3(x) = \sin(0) + \cos(0) x - \sin(0) x^2/2 + \cos(0) x^3/6 + \sin(c) x^4/24 = x - x^3/6 + \sin(c) x^4/24$$

XXII | 07/05 - Resto Lagrange

1 Resto de Lagrange

$\overline{f_{({ m ord}=1,\;em=0)}} = f(0) + \overline{f'(0)\,x + M_x\,x^2};$

$$h(x) = f(x) - f(0) + f'(0) x + M_x x^2; h(0) = 0;$$

$$h'(x) = f'(x) - f'(0) + M_x 2 x; h'(0) = 0;$$

$$h''(x) = f''(x) - M_x 2; h'(c) = 0$$

$$\implies M_x = f''(c)/2$$

1.1 Exemplo

$$f(x) = \ln(x); \quad a = 1$$

$$f_{(\text{ord}=1, \text{em}=1)} = \ln(1) + c^{-1} (x - 1) = (x - 1)/c$$

$$\implies \begin{cases} x > 1 \implies f_{(1,1)}(x) < x - 1 > 0 \\ x < 1 \implies f_{(1,1)}(x) < x - 1 < 0 \end{cases}$$

1.2 Exemplo

$$f(x) = \arctan(x)$$

$$f_{\text{(ord=1, em=0)}} = \arctan(0) + (1+0^2)^{-1}(x-0) +$$

- $(1+c^2)^{-2} 2 * c (x-0)^2/2 = x - \frac{c x^2}{(1+c^2)^2}$

$$0 < x < n \implies 0 < c < x : x \to 0^+ \implies c \to 0$$

(i)
$$\lim_{x\to 0^+} (\arctan(x) - x)/x^2$$

$$= \lim_{x \to 0^+} x^{-2} \left(x - \frac{c x^2}{(1+c^2)^2} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{c}{(1+c^2)^2} = \frac{0}{(1+0^2)^2} = 0$$

XXIII | 10/05 - 1º Teste: Revisão

1 Não foi visto

$\overline{\rm XXIV} \mid 11/05$ - ${ m Primitiva}$ ção

 $f: \mathrm{I} o \mathbb{R}$ F é primitiva de $f \iff F' = f$

$$\int f(x) \, \mathrm{d}x = F(x) + c$$

1 Exercício

$$F: egin{cases} F(0) = 0 \ f = \sin(x) \end{cases}$$

$$F = 1 - \cos(x)$$

2 Propriedades de Primitivas

$$egin{aligned} &\int (k\,f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \ &= \int k\,f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x = \ &= k\,F(x) + C_f + G(x) + C_g \end{aligned}$$

2.1 Exercicio

$$f(x) = 1 + x + x^2/2! + x^3/3!$$

$$F(x) = x + x^{2}/2 + x^{3}/6! + x^{4}/4! + C =$$

$$= x + x^{2}/2 + x^{3}/6! + x^{4}/4! + 1$$

3 Primitivas Imediatas

$$f(x) = e^{2x}$$

$$F(x) = \int e^{2x} dx = e^{2x}/2 + c \iff$$

 $\iff F'(x) = 2e^{2x}/2 = e^{2x}$

3.1 Exercicio

$$f(x) = \cos(2\,x)$$

$$F(x) = \int \cos(2x) dx = \sin(2x)/2 + C \iff$$
$$\iff F'(x) = 2 \cos(2x)/2 = f(x)$$

3.2 Exercicio

$$f(x)=2\,x/(1+x^2)$$

$$F(x) = \int 2x \, dx/(1+x^2) = \ln(1+x^2) + c \iff$$
$$\iff F'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

XXV | 14/05 - Primitivação II

1 Exercicio: $f(x) = x(x^2 + 1)^3$

$$F(x) = \int x(x^2 + 1)^3 dx = 0.5 \int u'(u)^3 dx =$$

$$= u^4/4 + c \iff F'(x) = 3 u^3 u' = f(x)$$

2 Primitivas por substituição

$$F'(x(t)) = f(x(t)) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

2.1 Exemplo: $f(x) = e^x/(1 + e^{2x})$

$$F'(x) = \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \int \frac{t}{1 + t^2} \frac{d \ln(t)}{dt} dt =$$
$$= \int (1 + t^2)^{-1} dt = \arctan(t) + c = \arctan(e^x) + c$$

2.2 Exemplo: $f(x) = e^{\sqrt{x}}/\sqrt{x}$

$$F(x) = \int e^{\sqrt{x}} \sqrt{x^{-1}} dx = \int e^t t^{-1} \frac{dt^2}{dt} dt =$$

$$= \int 2e^t dt = 2e^t + c = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

2.3 Exemplo: $f(x) = \sqrt{x-1}/x$

$$F(x) = \int \sqrt{x - 1} x^{-1} dx = \int \frac{t}{t^2 + 1} \frac{d(t^2 + 1)}{dt} dt =$$

$$= \int \frac{2(t^2 + 1 - 1)}{t^2 + 1} dt = \int 2 dt - \int \frac{2}{t^2 + 1} dt =$$

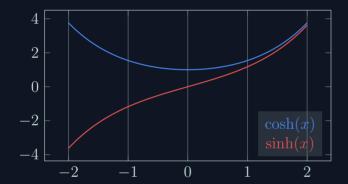
$$= 2t - 2 \arctan(t) + c =$$

$$= 2(\sqrt{x - 1} - \arctan(\sqrt{x - 1})) + c$$

XXVI | 17/05 - Introdução a Trigonometria Hiperbólica

1 Funções Trigonométricas Hiperbólicas

$$\cosh(x) = rac{e^x + e^{-x}}{2}$$
 $\sinh(x) = rac{e^x - e^{-x}}{2}$
 $\cosh'(x) = \sinh(x)$
 $\sinh'(x) = \cosh(x)$



1.1 Relação fundamental da trigonometria hiperbólica clássica

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

$$\cosh^{2}(x) - \sinh^{2}(x) =
= \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)^{2} =
= (1/4)\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right) = 1$$

2 Exemplo: $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

$$F(x) = \int \sqrt{1 + x^2} \, dx =$$

$$= \int \sqrt{1 + \sinh^2(t)} \, \frac{d \sinh(t)}{dt} \, dt = \int \cosh^2(t) \, dt =$$

$$= \int \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 \, dt = \int \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} \, dt =$$

$$= (1/4) \left(e^{2t}/2 + 2t - e^{-2t}/2\right) + c =$$

$$= \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 (1/4) + t/4 + c =$$

$$= \frac{\sinh^2 t + t}{4} + c = \frac{x^2 + \operatorname{arcsinh}(x)}{4} + c$$

3 Exemplo: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$$F(x) = \int \sqrt{1 - x^2} \, dx =$$

$$= \int \sqrt{1 - \sin^2(t)} \, \frac{d \sin(t)}{dt} \, dt = \int \cos^2(t) \, dt =$$

$$= \int (\cos(2t)/2 + 1/2) \, dt = \sin(2t)/2 + t/2 + c =$$

$$= \sin(2 \arcsin(x))/4 + \arcsin(x)/2 + c =$$

$$= (2/4)(\sin(\arcsin(x) \cos(\arcsin(x)))) +$$

$$+ \arcsin(x)/2 + c = (x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin(x))/2 + c$$

4 **Desafio:**
$$f(x) = 1/\sqrt{1+x^2}$$

$$F(x) = \int \sqrt{1+x^2}^{-1} dx =$$

$$= \int \sqrt{1+\sinh^2(t)}^{-1} \frac{d\sinh(x)}{dt} dt = \int \frac{\cosh(t)}{\cosh(t)} dt =$$

$$= t + c = \operatorname{arcsinh}(x) + c$$

XXVII | 18/05 - Primitivação III

1 Primitivação por partes

$$u\,v = \int u\,v'\,\mathrm{d}x + \int u'\,v\,\mathrm{d}x \iff \int u\,v'\,\mathrm{d}x = u\,v - \int u'\,v\,\mathrm{d}x$$

$$\int (u v)' dx = u v = \int u v' dx + \int u' v dx$$

1.1 Exemplo: $f(x) = x e^x$

$$F(x) = \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx =$$

$$= x e^x - e^x + c = e^x (x - 1) + c$$

1.2 Exercício: $f(x) = x \cos(x)$

$$F(x) = \int x \cos(x) dx = x \sin(x) - \int \sin(x) dx =$$
$$= x \sin(x) + \cos(x) + c$$

1.3 Exercício: $f(x) = \ln(x)$

$$F(x) = \int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x x^{-1} dx =$$

$$= x \ln(x) - x + c = x(\ln(x) - 1) + c$$

1.4 Exercício: $f(x) = \arctan(x)$

$$F(x) = \int \arctan(x) dx =$$
= $x \arctan(x) - (1/2) \int 2x (1+x^2)^{-1} dx =$
= $x \arctan(x) - 0.5 \ln(|1+x^2|) + c$

1.5 Exercício: $f(x) = e^x \sin(x)$

Rever!

$$F(x) = \int e^x \sin(x) dx =$$

$$= -e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx \implies$$

$$\implies F(x) = -e^x \cos(x)/2 + c$$

$$F(x) = \int e^x \sin(x) dx =$$

$$= e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx =$$

$$= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx \implies$$

$$\implies F(x) = \frac{e^x (\sin(x) - \cos(x))}{2} + c$$

1.6 Exercicio: $f(x) = e^x \cos(x)$

$$F(x) = \int e^x \cos(x) dx =$$

$$= e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx =$$

$$= e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx \implies$$

$$\implies F(x) = \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2} + c$$

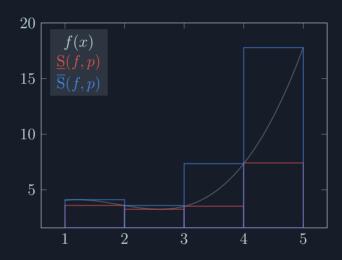
XXVIII | 21/05 - Revisões Primitivisação (Aula vazia)

XXIX | 24/05 - Integração: Soma de Darboux

1 Introdução: Cálculo de Areas

$$ext{Area}_{\min}(f(x)) = \underline{ ext{S}}(f(x),p) = \sum_{k=0}^n \inf(f([x_k,\,x_k+1]))$$

$$ext{Area}_{ ext{max}}(f(x)) = \overline{ ext{S}}(f(x),p) = \sum_{k=0}^n \sup(f([x_k,\,x_k+1]))$$



$$\int_{a}^{b}\!\!f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left(\underline{\mathbf{S}}(f,p):p \text{ partição de }[a,b]\right)$$

$$\overline{\int_a^b} f(x) \, \mathrm{d}x = \inf \left(\overline{\mathbf{S}}(f,p) : p ext{ partição de } [a,b]
ight)$$

$$\int_a^b \! f(x) \, \mathrm{d}x \geq \int_a^b \! f(x) \, \mathrm{d}x$$

Definição: Integração de Rie-2 man

$$figg\{f:[a,b] o \mathbb{R} \wedge \ ext{limitada}$$

f é integrável em Rieman \Leftarrow

$$\iff \underline{\int_a^b} f(x) \, \mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x) \, \mathrm{d}x$$

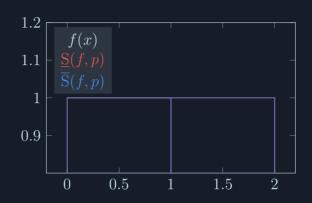
Critério necessário e suficiente 3 para a integralidade de uma função

$$figg\{f:[a,b] o\mathbb{R}\wedge \ ext{Limitada}$$

$$\exists P_n \subset [a,b] : \lim_{n \to \infty} (\overline{\mathbf{S}}(f, P_n) - \underline{\mathbf{S}}(f, P_n)) = 0$$

Exemplo 4

$$fegin{cases} f:[0,1] o\mathbb{R}\wedge\ f(x)=1 \end{cases}$$

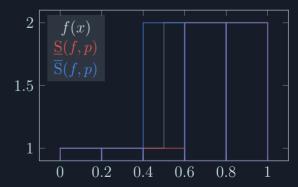


$$= \underline{\mathbf{S}}(f, P) = \overline{\mathbf{S}}(f, P) = 1 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{1}{3} = 1$$

5 Exemplo

$$fegin{cases} f:[0,1] o\mathbb{R}\ f(x)=egin{cases} 1&x<0.5\ 2&x>0.5 \end{cases}$$

$$f\left\{f(x)=egin{cases} 1 & x < 0.5 \ 2 & x \geq 0.5 \end{cases}
ight.$$

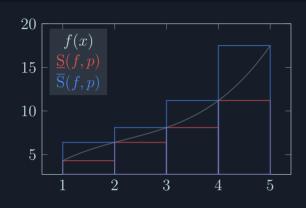


$$\underline{\underline{S}}(f, P) - \overline{\underline{S}}(f, P) = (2 - 1)\varepsilon;$$

$$\lim_{n \to \infty} \underline{\underline{S}}(f, P) - \overline{\underline{S}}(f, P) = (2 - 1)0 = 0$$

XXX | 25/05 - Integração II

1 Função monotona



(i) $\overline{S}(f, P_n)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \sup(f([k, k+1])) \frac{b-a}{n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \frac{b-a}{n}$$

(ii) $\underline{S}(f, P_n)$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \inf(f([k, k+1])) \frac{b-a}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \frac{b-a}{n}$$

$$\overline{S}(f, P_n) - \underline{S}(f, P_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f(k+1) - f(k)) =$$

$$= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$$

(iii) Limite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a))=0$$
 $f(x)$ é integrável por Rieman

2 Contra Exemplo

$$fegin{cases} f:[0,1] o\mathbb{R}\wedge\ f(x)=egin{cases} 1&x\in\mathbb{Q}\ 0&x
ot\in\mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\sup(f([k,k+1])) = 1 \wedge \inf(f([k,k+1])) = 0$$

$$\forall k \in P_n \text{ Partição de } [a,b] : \overline{S}(f,P_n) - \underline{S}(f,P_n) \neq 0$$

3 Diâmetro de uma partição

$$egin{aligned} \delta(P) &= \max(|x_{k+1} - x_k|) \ orall \, k \in [0, n-1] \end{aligned}$$

4 Soma de Riemam

$$egin{aligned} &\int_a^b f(x) \, \mathrm{d} x = \ &= \lim_{\delta(P) o 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k') (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \ &x_k' \in [x_k, x_{k+1}] \end{aligned}$$

Propriedades da soma de Rieman

(i)

$$\int_a^b (k\,f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x =
onumber \ = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

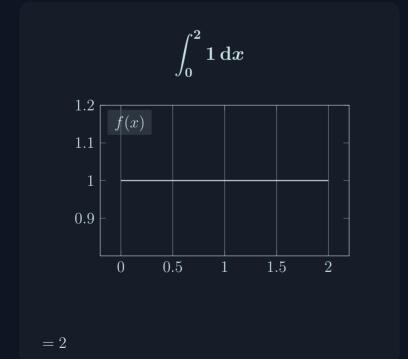
(ii)

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \le \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$$
 $orall \left\{ f, g
ight\} : f(x) \le g(x) \quad orall \, x \in [a, b]$

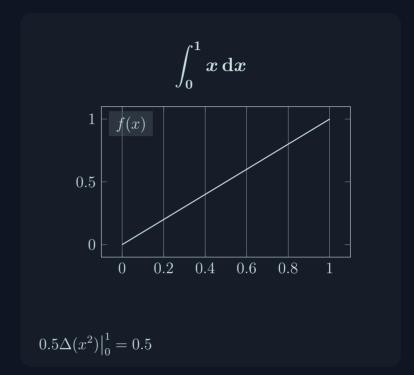
(iii)

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x
ight| \leq \int_a^b |f(x)\,\mathrm{d}x|$$

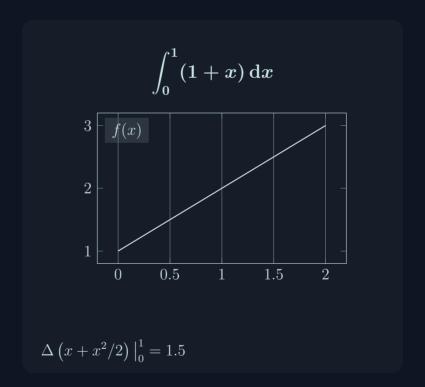
5 Exercicio



6 Exercicio



7 Exercicio



XXXI | 28/05 - Integrais Indefinidas

1 Propriedade de Integração

Por convenção

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_b^a f(x) \, \mathrm{d}x$$

2 Propriedade de Integração

$$fegin{cases} f: \mathrm{I} o \mathbb{R} \wedge \ & ext{integrável em I} \ &\{a,b,c\} \in \mathrm{I} \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \ = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

4 Teorema fundamental do cálculo

$$f: \mathrm{I} o \mathbb{R}$$

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

 F_a é Primitiva de f que se anula em x=a

5 Regra de Barrow

$$fegin{cases} ext{continua em }[a,b] \ F'=f \end{cases}$$

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \Delta F(x)ig|_a^b$$

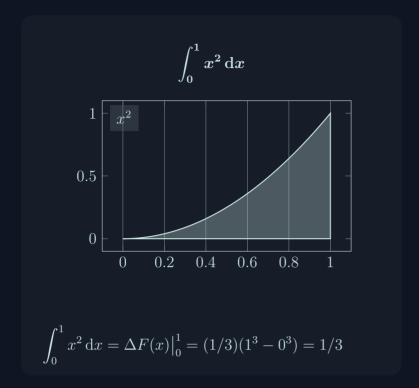
3 Integral Indefinida

$$fegin{cases} f:\mathcal{I} o\mathbb{R}\ f \ ext{integrável em todo subintervalo} \ ext{compacto de I} \end{cases}$$

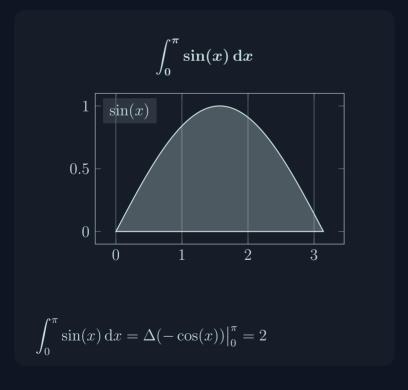
Definição:

$$F_a: x o \int_a^x f(t) \,\mathrm{d}t$$

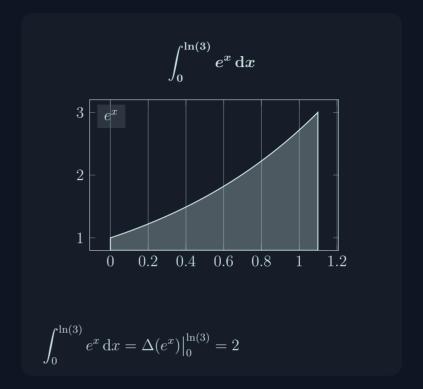
6 Exercicio



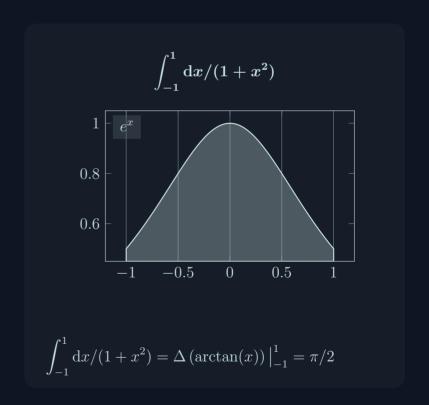
7 Exercicio



8 Exercicio



9 Exercicio



XXXII | 32/05 - Teorema Fundamental do Cálculo

Area dentre funções

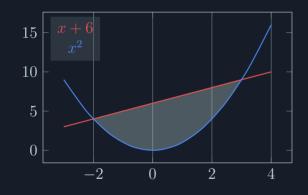
1 Exercicio

$$f(x) = x + 6; \ g(x) = x^2$$

(i) $\{a, b\}$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 * 6 * (-1)}}{-1 * 2} = \frac{1 \mp 5}{2}$$

$$\therefore a = -2; b = 3$$



$$\int_{-2}^{3} (x+6-x^2) dx \Delta \left(x^2/2 + 6x - x^3/3\right) \Big|_{-2}^{3} = 5 + 30 - 11/3 = 116/3$$

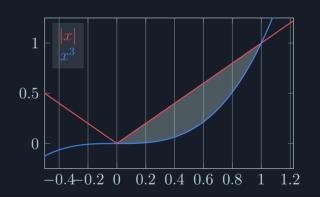
2 Exercicio

$$f(x) = |x|; \ g(x) = x^3$$

(i) $\{a, b\}$

$$x: f(x) - g(x) = |x| - x^3 =$$

= $x(1 - x^2) = 0 \quad \forall x \ge 0$
\therefore $a = 0; b = 1$



$$\int_0^1 (x - x^3) \, dx = \Delta \left(x^2 / 2 - x^4 / 4 \right) \Big|_0^1 = 1/4$$

Integrais Indefinidas Compostas

3 Exemplo

$$H(x) = \int_0^{\ln(x)} \sin(e^t) dt$$

$$H'(x) = \sin(e^{\ln(x)})/x = \sin(x)/x$$

4 Exemplo

$$F(x) = \int_x^1 e^t \,\mathrm{d}t$$

$$F'(x) = -e^x$$

5 Exemplo

$$H(x) = \int_x^{x^2} f(t) \, \mathrm{d}t$$

$$H'(x) = f(x^2) 2x - f(x)$$

6 Exemplo

$$H(x) = \int_x^{ an(x)} f(t) \, \mathrm{d}t$$

$$H'(x) = f(\tan(x))/(1 + \tan^2(x)) - f(x)$$

$XXXIII \mid 01/06$ - Teoremas do calculo integral

1 Teorema do Valor Médio

$$gegin{cases} g:[a,b] o\mathbb{R}\ ext{continua em }[a,b] \end{cases}$$

$$\exists \, g(c) \in [a,b] : c*(b-a) = \ = \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\min(g([a,b]))(b-a) \le \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \le$$

$$\le \max(g([a,b]))(b-a)$$

$$\therefore \exists c \in [a,b] : g(c)(b-a) = \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$$

Integração por substituição

3 Exemplo

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \, dx$$

$$= \int_{\arcsin(-1)}^{\arcsin(1)} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \, \frac{d \sin(t)}{dt} \, dt =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) \, dt = (1/2) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(2t) + 1) \, dt =$$

$$= 0.5 \, \Delta \left(\sin(2t)/2 + t \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi/2$$

4 Integração por Partes

$$\int_a^b f'(x) \, g(x) \, \mathrm{d}x =
onumber \ = \Delta(f(x) \, g(x))ig|_a^b - \int_a^b f(x) \, g'(x) \, \mathrm{d}x$$

4.1 Exercicio

$$\int_{1}^{e} \ln(x) dx$$

$$= \Delta(x \ln(x)) \Big|_{1}^{e} \int_{1}^{e} x x^{-1} dx = \Delta(x \ln(x) - x) \Big|_{1}^{e} =$$

$$= e (1 - e) - 1(0 - 1) = e - e^{2} + 1$$

2

$$\lim_{h \to 0} \int_{x}^{x+h} f(x) dx = \lim_{h \to 0} h f(c)/h =$$
$$= f(c) : c \in [x, x+h] = f(x)$$

4.2 Aplicação: Area de uma elipse

$$\int_{-a}^{a} b\sqrt{a^{2} - x^{2}} \, dx/a$$

$$= \int_{-a/a}^{a/a} b\sqrt{a^{2} - (at)^{2}} \, \frac{dat}{dt} \, dt/a =$$

$$= \int_{-1}^{1} b\sqrt{1 - t^{2}} \, a \, dt =$$

$$= ab \int_{\arcsin(-1)}^{\arcsin(1)} \sqrt{1 - \sin^{2}(t_{2})} \, \frac{d\sin(t_{2})}{dt_{2}} \, dt_{2} =$$

$$= ab \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{2}(t_{2}) \, dt_{2} =$$

$$= \frac{ab}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2t_{2})) \, dt_{2} =$$

$$= \frac{ab}{2} \Delta \left(t_{2} + \sin(2t_{2})/2 \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{ab}{2} \pi/2$$

XXXIV | 15/06 - Exercícios para o Teste

Q0 - a)

$$\int\limits_{arepsilon^3}^{8\,\pi^3} rac{\cos(\sqrt[3]{x})}{3\,\sqrt[3]{x}} \mathrm{d}x = \int\limits_{arepsilon}^{2\,\pi} t\,\cos(t)\,\mathrm{d}t \ (x=t^3)$$

$$\int_{\varepsilon^3}^{8\pi^3} \frac{\cos(\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x}} dx = \int_{\sqrt[3]{\varepsilon^3}}^{\sqrt[3]{8\pi^3}} \frac{\cos(\sqrt[3]{t^3})}{3\sqrt[3]{t^3}} d(t^3) =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{2\pi} \frac{\cos(t)}{3t} 3t^2 dt = \int_{\varepsilon}^{2\pi} t \cos(t) dt$$