CN A – Teoria dos Erros

Felipe B. Pinto 61387 – MIEQB

21 de outubro de 2023

Conteúdo

1 Definindo Erros

Erros iniciais do problema: erros iniciais independentes do processo de cálculo

- Relativos ao modelo matemático escolhido
- prevenientes dos dados iniciais

Erros que ocorrem durante a aplicação de métodos numéricos: erros que ocorrem durante o processo de cálculo

- Erros de arredondamento
- Erros de truncatura

1.1 Definições

$$x \approx \hat{x} \implies \begin{cases} \text{Erro:} & \varepsilon_x = x - \hat{x} \\ \text{Erro absoluto:} & |\varepsilon_x| = |x - \hat{x}| \\ \text{Erro relativo:} & r_x = \frac{|x-\hat{x}|}{|x|} \end{cases}$$

$$\varepsilon_x \begin{cases} > 0, \therefore \hat{x} \text{ é um valor aproximado por defeito} \\ < 0, \therefore \hat{x} \text{ é um valor aproximado por excesso} \end{cases}$$

Erro relativo: Mede a precisão do valor aproximado $\hat{x}$

1.2 Intervalo que contem x

$$\boldsymbol{I_x = [\hat{x} - \eta_x, \hat{x} + \eta_x] : |x - \hat{x}| \leq \eta_x}$$

$$\boldsymbol{\eta_x \begin{cases} 0.5 * 10^{-i} & : \hat{x} * 10^i \in \mathbb{Z} \\ \eta_x & : \hat{x} \pm \eta_x \\ y * 10^{-i} & : \hat{x}\,(y) \wedge \hat{x} * 10^i \in \mathbb{Z} \end{cases}}$$

Exemplo 1

12.3

Resposta

$|x - \hat{x}| \leq 0.5 * 10^{-1} = \eta_x$
$\therefore I_x = [12.3 - 0.05, 12.3 + 0.05] =$
$= [12.25, 12.35]$

Exemplo 2

87.9 ± 0.07

Resposta

$|x - \hat{x}| \leq 0.07 = \eta_x$
$\therefore I_x = |87.9 - 0.07, 87.9 + 0.07| =$
$= |87.83, 87.97|$

Exemplo 3

$400.32\,(6)$

Resposta

$|x - \hat{x}| \leq 6 * 10^{-2} = \eta_x$
$\therefore I_x = [400.26, 400.38]$

Exemplo 4

$$\boldsymbol{x = 1/17 \qquad \hat{x} = 0.059}$$

Resposta

(i) Erro Absoluto

$$|\varepsilon_x| = |x - \hat{x}| = |1/17 - 0.059| = 0.17647\ldots \text{ E} -3 \leq 0.177 \text{ E} -3$$

(ii) Erro relativo

$$r_x = \frac{|x - \hat{x}|}{|x|} = \frac{|1/17 - 0.059|}{|1/17|} = 0.300 \text{ E} -2$$

2 Significancia

Disemos que $\hat{x}$ se aproxima de x com, no mínimo k casas decimais significativas $\iff$

$$\boldsymbol{k \in \mathbb{N}_0 : |\varepsilon_x| \leq 0.5 * 10^{-k}}$$

Disemos que $\hat{x}$ se aproxima de x com, com n algarismos significativos $\iff$

$$\boldsymbol{n \in \mathbb{N}_0 : \begin{cases} |\varepsilon_x| \leq 0.5 * 10^{m+1-n} \\ m \in \mathbb{Z} : 10^m \leq |x| < 10^{m+1} \end{cases}}$$

Exemplo 5

Na determinação de x obteve-se o resultado $0.001\,773(8)$.

Resposta

(i) Casas decimais significativas

$$k : |x - \hat{x}| = |\varepsilon_x| \leq 0.8 * 10^{-5} = 0.5 * 10^{-4} \implies k = 4$$

(ii) Algarismos significativos

$$n : 10^{-3} \leq |x| \approx |\hat{x}| < 10^{-2} \implies$$
$$\implies m + 1 - n = -2 - n = -k = -4 \implies$$
$$\implies n = 2$$

Condicionamento de um problema

3 Propagação de erro absoluto

Fórmula fundamental do cálculo dos erros

$$\boldsymbol{\left|\varepsilon_{g_{(x)}}\right| \leq M_1 \, |\varepsilon_x| : \left|\frac{\mathrm{d}g_{(z)}}{\mathrm{d}x}\right| \leq M_1, z \in V_{\delta\,(x)}}$$

Desenvolvimento

Seja g uma função diferenciável numa vizinhança $V_{\delta\,(x)}$ de x. Utilizando a fórmula de Taylor tem-se:

$$g_{(x)} = g_{(\hat{x})} + \frac{\mathrm{d}g_{(\xi)}}{\mathrm{d}x}(x - \hat{x}) : \quad \xi \in [x, \hat{x}] \implies$$

$$\implies \varepsilon_{g_{(x)}} = g_{(x)} - g_{(\hat{x})} = \frac{\mathrm{d}g_{(\xi)}}{\mathrm{d}x}(x - \hat{x}) = M_1 \, \varepsilon_x \implies$$

$$\implies \left|\varepsilon_{g_{(x)}}\right| \leq M_1 \, |\varepsilon_x|$$

4 Propagação do erro relativo

$$\boldsymbol{r_{g(x)} \approx C_{g\,(x)}\, r_x}$$

Desenvolvimento

Considerando novamente g, mas de classe $C^2(V_{\delta\,(x)})$, aplicando a formula de Taylor:

$$g_{(\hat{x})} = g_{(x)} + \frac{\mathrm{d}g_{(x)}}{\mathrm{d}x}(x-\hat{x}) + \frac{\mathrm{d}^2 g_{(x)}}{\mathrm{d}x^2}\frac{(x-\hat{x})^2}{2} \underset{x\approx\hat{x}}{\approx} g_{(x)} + \frac{\mathrm{d}g_{(x)}}{\mathrm{d}x}(x-\hat{x}) + \frac{\mathrm{d}^2 g_{(x)}}{\mathrm{d}x^2}\frac{0}{2} =$$
$$= g_{(x)} + \frac{\mathrm{d}g_{(x)}}{\mathrm{d}x}(x-\hat{x}) \implies \left|g_{(x)} - g_{(\hat{x})}\right| \approx \left|\frac{\mathrm{d}g_{(x)}}{\mathrm{d}x}\right| |x-\hat{x}| \implies$$
$$\implies \frac{\left|g_{(x)} - g_{(\hat{x})}\right|}{\left|g_{(x)}\right|} = r_{g(x)} \approx \left|\frac{x}{g_{(x)}}\frac{\mathrm{d}g_{(x)}}{\mathrm{d}x}\right| \frac{|x-\hat{x}|}{|x|} = \left|\frac{x}{g_{(x)}}\frac{\mathrm{d}g_{(x)}}{\mathrm{d}x}\right| r_x = C_{g\,(x)} r_x$$

Numero de condição de uma função g num ponto x

$$\boldsymbol{C_{g\,(x)} = \left|\frac{x}{g_{(x)}}\frac{\mathrm{d}g_{(x)}}{\mathrm{d}x}\right|, \quad g_{(x)} \neq 0}$$

Exemplo 6

$$\boldsymbol{g_{1\,(x)} = x^2 \quad (x > 0).}$$

$$C_{g_1\,(x)} = \left|\frac{x}{g_{1\,(x)}}\,\frac{\mathrm{d}g_{1\,(x)}}{\mathrm{d}x}\right| = \left|\frac{x}{x^x}\left(x\,x^{x-1} + x^x\,\ln(x)\right)\right| = |x\,(1 + \ln(x))|$$

5 Condicionamento de uma função/problema

Uma função diz-se:

- Bem condicionado: Pequenas variações nos dados iniciais/parametros implicam em pequenas variações nos resultados
- Mal condicionado: Situação inversa

Nota: Independe do método numérico utilizado

6 Estabilidade de um método numérico

Um método numérico diz-se

- Estável: Acumulação dos erros não afeta significativamente o resultado final;
- Instável: Caso contrário

Exemplo 7

Considere as duas funções matematicamente idênticas:

$$f_{(\theta)} = \frac{\tan^2\theta}{\theta^2} \qquad g_{(\theta)} = \frac{1-\cos(2\,\theta)}{\theta^2\,(1+\cos(2\,\theta))}$$

$$\lim_{\theta\to 0} f_{(\theta)} = \lim_{\theta\to 0} g_{(\theta)} = 1$$

θ	$f_{(\theta)}$	$g_{(\theta)}$
10^{-1}	1.006 704 642	1.006 704 642
10^{-2}	1.000 066 670	1.000 066 670
10^{-3}	1.000 000 667	1.000 000 667
10^{-4}	1.000 000 007	1.000 000 004
10^{-5}	1.000 000 000	1.000 000 083
10^{-6}	1.000 000 000	0.999 977 878
10^{-7}	1.000 000 000	0.999 200 722
10^{-8}	1	1.110 223 025
10^{-9}	1	0
10^{-10}	1	0

$$\therefore \begin{cases} f_{(\theta)}: & \text{estável} \\ g_{(\theta)}: & \text{instável} \end{cases}$$