Capítulo 4 - Teorema Limite Central

Teorema Limite Central

Antes de enunciarmos o Teorema do Limite Central (TLC), enunciamos e demonstramos a seguinte proposição:

Proposição

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.a.'s independentes e identicamente distribuídas a X onde X é tal que $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2 < \infty$. Então tem-se

$$E\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = n\mu \qquad \text{e} \qquad V\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = n\sigma^2$$

e como consequência imediata ainda que

$$E(\bar{X}) = \mu \qquad \text{e} \qquad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Dem.

$$E\Big(\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(X_i) \underset{X_i ident.dists.}{=} \sum_{i=1}^{n} E(X) = n\mu \qquad \textbf{c.q.d.}$$

$$V\Big(\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) \underset{X_i indeps}{=} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} V(X_i) \underset{X_i ident.dists.}{=} \sum_{i=1}^{n} V(X) = n\sigma^2 \qquad \textbf{c.q.d.}$$

Teorema Limite Central (Soma)

Teorema (Teorema Limite Central-1)

Seja $X_1, \ldots, X_i, \ldots$ uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), com valor médio μ e variância $\sigma^2 \neq 0$, finitos. Com base nestas define-se a v.a. Z_n como:

$$Z_n = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}, \qquad \text{com} \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Então a distribuição de Z_n converge para a distribuição Normal reduzida, quando $n \to +\infty$, ou seja, a sua distribuição assimptótica é uma Normal reduzida:

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Observe que

$$E(Z_n) = E\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) = \frac{E(S_n) - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{E(\sum_{i=1}^{n} X_i) - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X_i) - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} =$$

$$\underset{X_i\, ident.dists}{=} \frac{nE(X) - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{n\mu - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = 0$$

$$V(Z_n) = V\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right) = \frac{V(S_n)}{n\sigma^2} = \frac{V(\sum_{i=1}^{n} X_i)}{n\sigma^2} \underset{X_i\, i.i.d.}{=} \frac{nV(X)}{n\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Teorema Limite Central (Média)

Nota: Se no quociente que define Z_n atrás dividirmos tanto o numerador como o denominador por n, o T.L.C. passa a ser enunciado não em relação ao total, S_n, mas em relação à média das variáveis aleatórias X_i, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Teorema (Teorema Limite Central-2)

Seja $X_1, \ldots, X_i, \ldots$ uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), com valor médio μ e variância $\sigma^2 \neq 0$, finitos. Então:

$$Z_n = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Observação: O Teorema Limite Central não indica nada sobre a velocidade de convergência de Z_n para a distribuição $N(0,1)$. Essa velocidade de convergência depende da distribuição das v.a.'s X_i.

Quando usar? Este teorema usa-se habitualmente quando a distribuição das v.a.'s X_i não é Normal e desde que $n \geq 30$ (embora este valor nem sempre garanta uma boa aproximação).

Ilustração

Exemplo

Considere $X_1, \ldots, X_i, \ldots$ *uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição uniforme no intervalo* $[0, 1]$, *isto é, com função densidade de probabilidade dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \ , & c.c. \end{cases} \quad .$$

Então

$$E(X_i) = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad V(X_i) = \frac{1}{12}, \quad \forall i \geq 1.$$

TPC

Considere ainda uma outra sucessão, $Y_1, \ldots, Y_i, \ldots$, *de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição* $Exp(1)$.
Assim sendo,

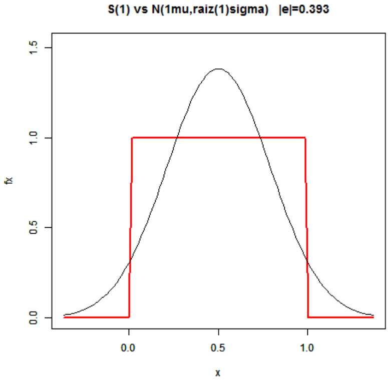
$$E(Y_i) = 1 \qquad \text{e} \qquad V(Y_i) = 1, \quad \forall i \geq 1.$$

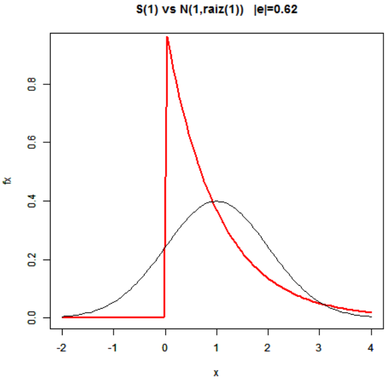
Considerem-se agora as somas,

$$S_{X,n} = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{e} \qquad S_{Y,n} = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Ilustração (cont.)

Apresentamos abaixo os gráficos animados das f.d.p.'s de $S_{X,n}$ (esquerda; linha vermelha) e $S_{Y,n}$ (direita; linha vermelha) versus a f.d.p. da distribuição $N(E(S_n), V(S_n))$ para cada uma das somas (linhas pretas) para vários valores de n. (para a correcta visualização do mesmo é necessário abrir este pdf com recurso ao software Adobe Reader).





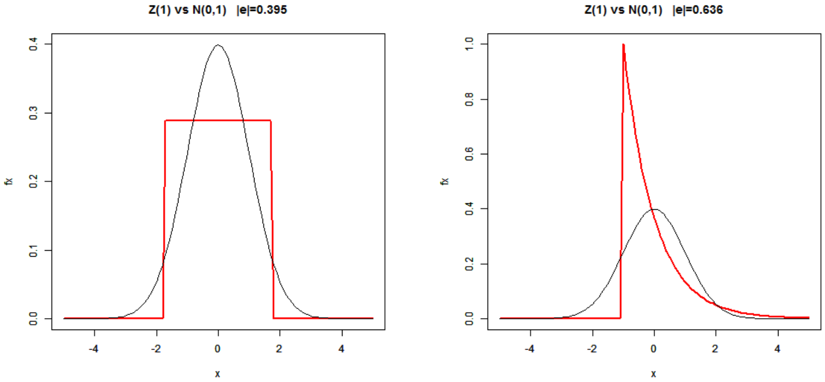
Qual das somas converge mais depressa para a distribuição limite?

Ilustração (cont.)

Temos neste slide o mesmo que anteriormente mas considerando agora as variáveis aleatórias,

$$Z_{X,n} = \frac{S_{X,n} - E(S_{X,n})}{\sigma(S_{X,n})} \text{ e } Z_{Y,n} = \frac{S_{Y,n} - E(S_{Y,n})}{\sigma(S_{Y,n})}.$$

Nos gráficos seguintes comparam-se as densidades de $Z_{X,n}$ e $Z_{Y,n}$ com a densidade $N(0,1)$.



Exemplo

Exemplo

O tempo necessário para uma qualquer criança de um jardim de infância resolver um puzzle, é uma variável aleatória X com distribuição de valor médio $\mu = 55$ minutos e desvio padrão $\sigma = 5$ minutos.

Calcule a probabilidade de a média dos tempos de resolução do puzzle de 40 crianças ser superior ou igual a 56 minutos.

Começamos por definir

$$X_i = \text{tempo necessário para a criança } i \text{ resolver o puzzle}, \qquad i = 1, \ldots, 40,$$

caso em que estamos interessados em calcular $P(\bar{X} \geq 56)$. Observamos então agora que

- $X_1, \ldots, X_{40}$ são v.a.'s independentes e identicamente distribuídas à v.a. X onde $E(X) = 55$ e $V(X) = 25$ pelo que também teremos
$$E(X_i) = 55 \qquad \text{e} \qquad V(X_i) = 25 \quad \forall i = 1, \ldots, 40$$
- $E(\bar{X}) = E(X) = 55 \qquad \text{e} \qquad V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{40} = 0.625$
- Uma vez que $n = 40 \geq 30$ o TLC garante-nos então que
$$Z = \frac{\bar{X} - 55}{\sqrt{0.625}} \underset{a}{\sim} N(0,1)$$

Exemplo

Estamos então finalmente em condições de calcular

$$P(\bar{X} \geq 56) = 1 - P(\bar{X} < 56) \underset{\bar{X} v.a.cont.}{=} 1 - P(\bar{X} \leq 56) = 1 - P\left(\frac{\bar{X}-55}{\sqrt{0.625}} \leq \frac{56-55}{\sqrt{0.625}}\right) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.264911) \simeq 1 - P(Z \leq 1.26) \underset{TLC}{\overset{a}{\approx}} 1 - \Phi(1.26)$$

$$\underset{tabela}{\simeq} 1 - 0.8962 = 0.1038.$$