PRIMEIRO TESTE A (5/11/2022) DURAÇÃO **1.30h** **CÁLCULO NUMÉRICO A**

Número: ________ Curso: ________ Nome: ____________________

A primeira parte do teste é constituida por 5 questões de escolha múltipla.
Nas questões 1 a 5 assinale com "x"a resposta correcta.
Cada resposta correcta vale 1.5 valores. Respostas em branco valem 0 valores.
Se responder erradamente ou de forma ambígua ser-lhe-á atribuída uma cotação negativa correspondente a 0.2 valores.
Se a soma das cotações da escolha múltipla for negativa, será atribuído 0 valores à escolha múltipla.

Classificação
EM -
TOTAL-

1. Considere a seguinte função tabelada, onde α e β são constantes reais:

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	α	0	β

Para que o polinómio interpolador da função em todos os pontos da tabela tenha exactamente grau 3, é necessário que:

☐ **a)** $\beta = 1 - 3\alpha$

☐ **b)** $\beta \neq 1 - \alpha$

☒ **c)** $\beta \neq 1 - 3\alpha$

☐ **d)** $1 - 2\alpha \neq 0$

2. Considere $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ a seguinte tabela para $f(x)$, onde a e b são constantes reais:

x_i	-1	-0.5	0	0.5	1
$f(x_i)$	a	2	-4	3	b

Sabendo que o valor aproximado para I pela regra de Simpson simples é igual a 4, o valor aproximado para I pela regra de Simpson composta será igual a:

☐ **a)** $\frac{28}{3}$

☐ **b)** $\frac{14}{3}$

☒ **c)** $\frac{20}{3}$

☐ **d)** 5

(V.S.F.F)

3. Seja $I = \int_3^5 f(x)dx$, em que $|f''(x)| \leq \dfrac{1}{5}$, $\forall x \in [3,5]$ e seja $\widehat{I} = \dfrac{9}{4}$ a aproximação de I, dada pela regra do ponto médio simples. Indique qual dos seguintes intervalos podemos garantir que contem de certeza o valor de I. Considere nos calculos 3 casas decimais convenientemente arredondadas.

   - [x] **a)** $I \in [2.183, 2.317]$
   - [ ] **b)** $I \in [2.250, 2.317]$
   - [ ] **c)** $I \in [2.183, 2.250]$
   - [ ] **d)** $I \in [2.233, 2.267]$

4. O número de condição duma função $f(x)$, calculado no ponto x é dado por $C_{f(x)} = \left|\dfrac{xf'(x)}{f(x)}\right|$, $f(x) \neq 0$.

   Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{ln(x)}$, então $f(x)$ é uma função:

   - [ ] **a)** Mal condicionada para valores de $x \in]0, 0.1]$
   - [x] **b)** Mal condicionada para valores de $x \in [0.99, 1.01]$
   - [ ] **c)** Bem condicionada para valores de $x \in \mathbb{R}$
   - [ ] **d)** Mal condicionada para valores de x muito elevados

5. Considere os nodos $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$. Seja $p_2(x)$ o polinómio de Lagrange de grau ≤ 2 da duma função f nos nodos x_0, x_1, x_2. Seja $q_2(x)$ o polinómio de Newton com diferenças divididas de grau ≤ 2 da mesma função nos nodos x_1, x_2, x_3. Seja $m_2(x)$ o polinómio de grau ≤ 2 dado pelo método dos minimos quadrados para função f em todos os nodos e seja por fim $S(x)$ o spline cúbico interpolador de f em todos os nodos.

   Verifica-se sempre:

   - [ ] **a)** $p_2(1) = q_2(1) = m_2(1) = S(1)$
   - [ ] **b)** $m_2(3) = S(3)$ e $p_2(2) = q_2(2)$
   - [x] **c)** $p_2(0) = S(0)$ e $q_2(3) = S(3)$
   - [ ] **d)** $q_2(2) \neq m_2(2)$

A segunda parte do teste é constituida por 3 grupos de questões. Cada resposta deverá estar convenientemente justificada.

Cotações: Questão 6: 4.5 valores; **Questão 7:** 6 valores; **Questão 8:** 2 valores

6. Considere a seguinte tabela com valores de uma função f:

x_i	-1	1	2
$f(x_i)$	0	c	3

a) Determine c de forma a que $m(x) = x+1$ seja o polinómio de grau ≤ 1 dado pelo método dos mínimos quadrados.

b) Utilizando o valor obtido em a) para c, determine $p_2(x)$ o polinómio de grau ≤ 2 interpolador de $f(x)$ nos pontos da tabela.

c) Utilizando o valor obtido em a) para c, diga qual o valor obtido para o erro quadrático. Que pode concluir?

7. Considere o integral $I = \int_{-3}^{3} f(x)dx$ e a seguinte tabela com valores de uma função f:

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_i)$	-15.03	-8.35	-2.34	0	-2.34	-8.35	-15.03

a) Determine um valor aproximado $\hat{I}_{PM}$ de I pela regra do ponto médio com n=3 aplicações da regra.

b) Determine um valor aproximado $\hat{I}_T$ de I pela regra dos trapezios com h=6.

c) Determine um valor aproximado $\hat{I}_S$ pela regra de Simpson aos pontos da tabela de forma a obter a melhor aproximação possível para I.

d) Sabendo que $f''(x) = x^2 - \dfrac{121}{25}$, quantas vezes teria de aplicar a regra do ponto médio para obter uma aproximação com pelo menos 2 casas decimais significativas?

8. Seja S a função definida por

$$S(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 + \dfrac{5}{3}x - 1, & -1 \leq x < 0 \\ -2ax^3 + bx^2 + \dfrac{5}{3}x - 1, & 0 \leq x < 1 \\ ax^3 - 2bx^2 + \dfrac{41}{3}x - 5, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

e que passa nos pontos (-1,y_0), (0,y_1) (1,y_2), (2,y_3). Determine as contantes reais a, b de forma a que $S(x)$ seja spline cúbico interpolador e diga se $S(x)$ pode ser um spline natural?

Questão 1

x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	1	α	0	β

tabela de diferenças divididas

x_i	$f(x_i)$	$f[\,,\,]$	$f[\,,\,,\,]$		
-1	1				
		$\alpha-1$			
0	α		$\frac{-2\alpha+1}{2}$		
		$-\alpha$		$\frac{\beta+\alpha+2\alpha-1}{2\times 3} = \frac{\beta+3\alpha-1}{6}$	
1	0		$\frac{\beta+\alpha}{2}$		
		β			
2	β				

$$p_3(x) = 1 + (x+1)(\alpha-1) + (x+1)x\left(-\alpha+\frac{1}{2}\right) + \underbrace{(x+1)x(x-1)}_{\text{polinómio degrau 3}}\underbrace{\left(\frac{\beta+3\alpha-1}{6}\right)}_{\neq 0}$$

Para que $p_3(x)$ tenha exactamente grau 3, $\beta+3\alpha-1 \neq 0$

$\Leftrightarrow \beta \neq 1-3\alpha$

Questão 2

x_i	-1	-0.5	0	0.5	1
$f(x_i)$	a	2	-4	3	b

$\overset{1}{I}_{S,1} = 4$ Simpson simples

$\overset{1}{I}_{S,1} = \frac{1}{3}\left(f(-1) + 4f(0) + f(1)\right) = \frac{1}{3}(a - 16 + b) = \frac{a+b-16}{3}$

$\frac{a+b-16}{3} = 4 \Leftrightarrow a+b = 28$

Regra de simpson composta $\Rightarrow n=2$; $h = \frac{1}{2}$

$\overset{1}{I}_{S,2} = \frac{1/2}{3}\left(f(-1) + 4\left(f(-0.5) + f(0.5)\right) + 2f(0) + f(1)\right)$

$= \frac{1}{6}(a + 4(2+3) - 2\times 4 + b) = \frac{1}{6}(12+a+b)$

$= \frac{1}{6}(12+28) = \frac{20}{3}$

Questão 3

$$I = \int_3^5 f(x)\,dx \quad \text{com } |f''(x)| \leq \frac{1}{5}, \ \forall x \in [3,5]$$

$\hat{I} = \frac{9}{4}$ aproximação dada pela regra do ponto médio simples

$\Rightarrow h = 5-3 = 2$

$$|I - \hat{I}| \leq \frac{h^3}{24}|f''(\gamma)| \leq \frac{2^3}{24} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \leq 0.067$$ ← arredondado com 3 casas decimais

$$I \in [2.25 - 0.067, 2.25 + 0.067] = [2.183, 2.317]$$

Questão 4

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x)} \qquad C_{f(x)} = \left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right|, \ f(x) \neq 0$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x \ln^2(x)}$$

$$C_{f(x)} = \frac{\left|-\cancel{x}\frac{1}{\cancel{x}\ln^2(x)}\right|}{\left|\frac{1}{\ln(x)}\right|} = \left|\frac{\ln(x)}{\ln^2(x)}\right| = \left|\frac{1}{\ln(x)}\right|$$

$\lim_{x \to 1} \left|\frac{1}{\ln(x)}\right| = +\infty \Rightarrow C_{f(x)}$ assume valores muito elevados para valores de x perto de 1, logo f é mal condicionada para $x \in [0.99, 1.01]$

Questão 6

x_i	-1	1	2
$f(x_i)$	0	c	3

a) c?

2.2

$m(x) = x+1 = a_0 x + a_1$ dado pelo metodo dos minimos quadrados

$\sum_{i=0}^{2} x_i = 2$, $\sum_{i=0}^{2} x_i^2 = 6$, $\sum_{i=0}^{2} y_i = c+3$, $\sum_{i=0}^{2} x_i y_i = c+6$

$$\begin{cases} 3a_0 + 2a_1 = c+3 \\ 2a_0 + 6a_1 = c+6 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0 = \dfrac{2c+3}{7} \\ a_1 = \dfrac{c+12}{14} = 1 \end{cases} \qquad a_0 = a_1 = 1 \quad \Leftrightarrow c = 2$$

b) Polinómio interpolador de Newton de grau ≤ 2

1.5

x_i	$f(x_i)$	$f[\,,\,]$	$f[\,,\,,\,]$
-1	0		
		1	
1	2		0
		1	
2	3		

$p_2(x) = 0 + (x+1)\times 1 + (x+1)(x-1)\times 0 = x+1$

c) $p_2(x) = m(x)$ logo o erro quadratico

0.8

$\sum_{i=0}^{2} (f(x_i) - m(x_i))^2 = 0$, pois $m(x_i) = f(x_i)$, $\forall i=0,1,2$

Questão 7

-15.03	-8.35	-2.34	0	-2.34	-8.35	-15.03
-3	-2	-1	0	1	2	3

$$I = \int_{-3}^{3} f(x)\,dx$$

1

a) Regra do ponto médio composta com $n=3 \Rightarrow h = \frac{3-(-3)}{3} = 2$

$$\hat{I}_{PM,3} = (-8.35+0-8.35)\times 2 = -33.4$$

1

b) Regra dos trapézios com $h=6 \Rightarrow h = \frac{6}{n} \Rightarrow n=1$

$$I_{T,1} = \frac{6}{2}(-15.03-15.03) = -90.18$$

2

c) Regra de Simpson aos pontos da tabela

$n=3 \Rightarrow h = \frac{6}{2n} = \frac{6}{2\times 3} = 1$

$$\hat{I}_S = \frac{1}{3}\left(-15.03+4(-8.35+0-8.35)+2(-2.34-2.34)-15.03\right) = -35.41$$

2

d) $f''(x) = x^2 - \frac{121}{25}$

Nº aplicações da regra do ponto médio: $|I - I_{PM,n}| < 0.5\times 10^{-2}$

$$|I - I_{PM,n}| < n\frac{h^3}{24}M_2 \qquad h=\frac{6}{n}$$

$$\max_{x\in[-3,3]} |f''(x)| = f''(0) = \frac{121}{25} = 4.84$$

máximo para $x=0$

$$\frac{n\left(\frac{6}{n}\right)^3}{24}\times\frac{121}{25} < 0.5\times 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6^3}{24n^2}\times\frac{121}{25} < 0.5\times 10^{-2}$$

$$\Leftrightarrow n > 93.33\ldots$$

Seriam necessárias $n=94$ aplicações da regra do ponto médio.

Questão 8 2

$$S(x) = \begin{cases} ax^3 + bx^2 + \frac{5}{3}x - 1 & , \ -1 \leq x < 0 \\ -2ax^3 + bx^2 + \frac{5}{3}x - 1 & , \ 0 \leq x < 1 \\ ax^3 - 2b + x^2 + \frac{41}{3}x - 5 & , \ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Se passa pelos pontos $(-1, y_0), (0, y_1), (1, y_2), (2, y_2)$, não é necessário impôr as condições de interpolação

Só há que impôr a continuidade de S, S' e S''

Continuidade de $S(x)$

$S_0(0) = S_1(0) \Leftrightarrow -1 = -1$ PV

$S_1(1) = S_2(1) \Leftrightarrow -2a + b + 5/3 - 1 = a - 2b + 41/3 - 5$

$\Leftrightarrow -3a + 3b = \frac{24}{3}$

Continuidade de $S'(x)$

$$S'(x) = \begin{cases} 3ax^2 + 2bx + 5/3 & , \ 1 \leq x < 0 \\ -6ax^2 + 2bx + 5/3 & , \ 0 \leq x < 1 \\ 3ax^2 - 4bx + 41/3 & , \ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$S_0'(0) = S_1'(0) \Leftrightarrow 5/3 = 5/3$ PV

$S_1'(1) = S_2'(1) \Leftrightarrow -6a + 2b + 5/3 = 3a - 4b + 41/3$

$\Leftrightarrow -9a + 6b = \frac{36}{3}$

Continuidade de $S''(x)$

$$S''(x) = \begin{cases} 6ax + 2b & , \ 1 \leq x < 0 \\ -12ax + 2b & , \ 0 \leq x < 1 \\ 6ax - 4b & , \ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$S_0''(0) = S_1''(0) \Leftrightarrow 2b = 2b$ PV

$S_1''(1) = S_2''(1) \Leftrightarrow -12a + 2b = 6a - 4b$

$\Leftrightarrow -18a + 6b = 0$

Ficamos então com o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} -3a + 3b = \frac{24}{3} \\ -9a + 6b = \frac{36}{3} \\ -18a + 6b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 4/3 \\ b = 4 \\ 24 = 24 \text{ PV} \end{cases}$$