AM 3C – Equações Diferenciais Ordinárias

Felipe B. Pinto 61387 – MIEQB

10 de outubro de 2024

Conteúdo

Questão 1

Verifique que cada uma das funções indicadas é solução da equação diferencial considerada.

Q1 a.

$$\boldsymbol{y(x) = e^{2\,x}\,\cos(3\,x), y - 4\,y' + 13\,y = 0}$$

Resposta

$$0 = y - 4\,y' + 13\,y = \left(e^{2\,x}\,\cos\left(3\,x\right)\right) - 4\left(e^{2\,x}\,\cos\left(3\,x\right)\right)' + 13\,y = \left(e^{2\,x}\left(-\sin\left(3\,x\right)3\right) + 2\,e^{2\,x}\,\cos\left(3\,x\right.\right.$$

Q1 b.

$$y(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\ \mathrm{d}t + c_1\, e^{-x^2}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2\,x\,y = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\ \mathrm{d}t = b'(x)\, f(b(x)) - a'(x)\, f(a(x))$$

$$1 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2\,x\,y = \frac{\mathrm{d}\left(e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\ \mathrm{d}t + c_1\, e^{-x^2}\right)}{\mathrm{d}x} + 2\,x\,\left(e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\ \mathrm{d}t + c_1\, e^{-x^2}\right) = \left(\left(e^{-x^2}\,(-2\,x)\right) \int_0^x\right.$$

$$= \ldots$$

Questão 2

Mostre que a equação $2\,x^2\,y - y^2 + 1 = 0$ define implicitamente uma solução da equação diferencial

$$\left(\boldsymbol{x^2} - \boldsymbol{y}\right)\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} + \mathbf{2}\,\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$$

Determine explicitamente a solução que verifica a condição $y(0) = 1$.

Resposta

Questão 3

Determine o valores de k para os quais:

Q3 a.

$y(x) = \exp(k\,x)$ é solução da equação

$$\boldsymbol{y - y' + 6\,y = 0}$$

Q3 b.

$y(x) = x^k$ é solução da equação

$$\boldsymbol{x\,y" + 2\,y' = 0.}$$

Resposta

$$0 = x\,y" + 2\,y' = x\,(x^k)" + 2\,(x^k)' = x\,(k\ (k-1)\,x^(k-2)) + 2\,(k\,x^(k-1)) = x^{k-1}\,k\,(k+1) \implies$$
$$\implies\ k = -1 \vee k = 0$$

Questão 4

Q4 a.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y}^{2} - 3\,\boldsymbol{y}$$

Resposta

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - 3\,y = y(y-3) = 0$$

	$\dots$	0	$\dots$	3	$\dots$
y	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$y-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$y(y-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Equações Diferenciais lienares de primeira ordem e Equações Redutíveis a Lineares de Primeira ordem

Q5 b.

Determine a solução geral da equação diferencial linear homogénea de primeira ordem

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{2\,x\,y} = \boldsymbol{0}$$

Resposta

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2\,x\,y = 0 \implies$$

$$\implies y = \gamma(x)^{-1}\,C + \gamma(x)^{-1}\int \exp a(x) * b(x)\;\mathrm{d}x = \left(\int \exp\left(2\,x\right)\right)^{-1} C + \gamma(x)^{-1}\int \exp a(x) * 0$$

Questão 6

Determine a solu¸c˜ao geral das seguintes equa¸c˜oes diferenciais lineares de primeira ordem:

Q6 a.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\,\tan x = \cos x, \qquad x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$$

Q6 b.

$$\boldsymbol{y^2\ \mathrm{d}x - (2\,x\,y + 3)\ \mathrm{d}y = 0}$$

considere x como fun¸c˜ao inc´ognita e y vari´avel independente

Resposta

$y^2\ \mathrm{d}x - (2\,x\,y + 3)\ \mathrm{d}y = 0 \implies$
x como função de y

$$\implies y^2\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - (2\,x\,y + 3) = 0 \implies \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 2\,x\,y^{-1} + 3\,y^{-2} \implies$$

$$\implies$$

Questão 7

Determine a solução geral da equação

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \left(x - x^{-1}\right) z = 0, \quad x > 0$$

e utilizando o m´etodo da varia¸c˜ao das constantes arbitr´arias determine a solu¸c˜ao geral de

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \left(x - x^{-1}\right) z = -x^2$$

Resposta

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \left(x - x^{-1}\right) z = 0, \quad x > 0 \implies$$

$$\implies z = c\,\gamma^{-1}(x) = c\ \exp - \int \left(x - x^{-1}\right)\,\mathrm{d}x = \cdots = c\ \exp - x^2/2$$

Variação das constantes arbitrárias

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \left(x - x^{-1}\right) z = -x^2 \implies z(x) = c(x)\,x\ \exp - x^2/2;$$

$$z'(x) = c'(x)\,x\,exp{-}x^2/2 + c(x)\left(\exp\left(-x^2/2\right) - x^2\exp\left(-x^2/2\right)\right)$$

Q8 b.

Utilizando a substituição definida por $y = e^{4\,x}$, determine a solução geral da equação:

$$\boldsymbol{x\,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - (4\,x+1)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 4\,y = 0}$$

$$\begin{aligned}
&(x\,D - (4\,x+1)\,D^2 + 4)\,y = Py = 0 \implies \\
&\implies y = e^{4\,x}\int z \implies \\
&\implies ;
\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{4\,x}\right)\int z + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int z\right) = 4\,x\,e^{4\,x}\int z + z\,e^{4\,x};$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(4\,x\,e^{4\,x}\int z + z\,e^{4\,x}\right) = \ldots$$

$$\begin{aligned}
&\implies x\,e^{4\,x}\left(16\int z + 8\,z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) - (4\,x+1)\,e^{4\,x}\left(4\int z + z\right) + 4\,e^{4\,x}\int z = 0 \implies \\
&\implies \cdots \implies \\
&\implies \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (4 - 1/x)\,z = 0 \implies \\
&\implies \ldots z = \frac{C}{\exp\left(\int (4-1/x)\right)} = \cdots = C\,x\,e^{-4\,x} \implies \\
&\implies y = e^{4\,x}\int C\,x\,e^{-4\,x} = C\,e^{4\,x}\left(-\frac{x\,e^{-4\,x}}{4} - \frac{e^{-4\,x}}{16} + k\right) = \cdots = \\
&= -\frac{c}{4}\,(x + 1/4) + c\,k\,e^{4\,x} = c_1\,(x+1/4) + c_2\,e^{4\,x} \quad \forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Q9 c.

Resposta

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \frac{z}{2\sqrt{x}} = -\frac{z^3}{2} \implies z^{-3}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + \frac{z^{-1}}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

Q10 b.

$$\boldsymbol{y' + x\, y^2 - (2\, x^2 + 1)\, y + x^3 + x - 1 = 0}$$

Resposta

$$y' + x\, y^2 - (2\, x^2 + 1)\, y + x^3 + x - 1 = 0 \implies$$
$$\implies y' + y\, \left(-(2\, x^2 + 1)\right) = \left(-x^3 - x + 1\right) + y^2\, (-x)$$

Questão 14

Determine o integral geral de cada uma das seguintes equações diferenciaia lienares de coeficientes constantes:

Q14 a.

$$\boldsymbol{D^3\,(D+1)^2((D-5)^2+16)\,y=0,\quad \left(\text{em que}D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)}$$

Resposta

$$D^3\,(D+1)^2((D-5)^2+16)\,y=0\implies$$

$$\implies\text{Raizes:}\begin{pmatrix}0 & 3\\ -1 & 2\\ 5\pm 4\,i & 1\end{pmatrix}\implies$$

$$\implies y=c_0+c_1\,x+c_2\,x^2+c_3\,e^{-x}+c_4\,x\,e^{-x}+c_5\,e^{-5\,x}\,\cos 4\,x+c_6\,e^{-5\,x}\,\sin 4\,x$$

Q14 b.

$$\left(\boldsymbol{D}^{4}-\mathbf{1}\right)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{3}-\boldsymbol{x}+\mathbf{2},\quad\left(\text{em que }\boldsymbol{D}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\right)$$

Resposta

$$y = y_0 + y_1 =$$
$$= \left(c_1\, e^{x} + c_2\, e^{-x} + c_3\, \cos x + c_4\, \sin x\right) + \left(x^3 - x + 2\right);$$

y_0 é solução de $(D^4 - 1)\, y = 0 \implies$

$$\implies (\alpha^4 - 1) = (\alpha^2 + 1)(\alpha^2 - 1) \implies$$

$$\implies \text{Raizes: } \begin{cases} \text{Raizes} & \text{Multiplicidade} \\ 1 & 1 \\ \text{-1} & 1 \\ \pm\text{i} & 1 \end{cases}$$

$$\implies y_0 = c_1\, e^{x} + c_2\, e^{-x} + c_3\, \cos x + c_4\, \sin x;$$

y_1 é x^p vezes um polinomio de mesmo grau que $x^3 - x + 2$

p é a multiplicidade da raiz$\alpha = 0 \implies \implies$

$$y_1 = x^p \left(a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3\right) \implies$$

$$\implies (D^4 + 1)\, y_1 = 0 + y_1 = y_1 = x^3 - x + 2$$

Q14 c.

$$\boldsymbol{y'' + y = \cos x}$$

Resposta

$$y'' + y = (D^2 + 1)\, y = \cos x \implies$$
$$\implies y = y_0 + y_1 = (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \left(\frac{x}{2} \sin x\right);$$

$$\alpha^2 + 1 = 0 \implies$$
$$\implies \begin{array}{ll} \text{Raizes} & \pm 1 \\ \text{Multiplicidade} & 1 \end{array}$$
$$\implies y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y_1 = x^p\, (r\, e^{a\,x} \cos(b\,x) + s\, e^{a\,x} \sin(b\,x)) = x\, (r \cos x + s \sin x) \implies$$
$$\implies \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = r \cos x + s \sin x = x\, (-r \sin x + s \cos x) \implies$$
$$\implies \frac{\mathrm{d}^2 y_1}{\mathrm{d}x^2} = \cdots \implies$$
$$\implies (D^2 + 1) y_1 = -2\, r \sin x + 2\, s \cos x = \cos x \implies s = 1/2 \wedge r = 0 \implies$$
$$\implies y_1 = \frac{x}{2} \sin x$$

Questão 15

Determine a sol geral da equação diferencial linear homogénea de coeficientes consntantes

$$\mathrm{D}^2 y - 4\ \mathrm{D}y + 5\, y = 0$$

Utilizando uma das substituições $x = e^t$ ou $y = x^{-1} \int z \, \mathrm{d}x$ determine a solução geral da equação

$$\mathrm{D}^2 y - 4\ \mathrm{D}y + 5\, y = \frac{e^{2\,x}}{\sin x}$$

Questão 16

Ultilizando uma das substituições $x = e^t$ ou $y = x^{-1} \int z \, \mathrm{d}x$ determine a solução da equação geral

$$2\,x^2\,\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + 7\,x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3\,x = 0$$

com $x > 0$. Determine anda a solução geral da equação

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{7}{2\,x}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{3}{2\,x^2}\,y = 0.5\,x^{-3/2}$$

Resposta