



Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial

Engenharia Económica



Engenharia Económica

Aula 1



A. Introdução ao Cálculo Financeiro



Introdução ao cálculo financeiro



Introdução ao cálculo financeiro

A Engenharia Económica é definida como:



Introdução ao cálculo financeiro

A Engenharia Económica é definida como:

“A Engenharia económica é uma área da Economia que aplica os princípios económicos para a tomada de decisão em Engenharia”.

W.T. Morris, Engineering economy: The Analysis of Management Decisions, First Edit, Richard D. Irwin, Homewood, Ill., 1960.



Introdução ao cálculo financeiro

A Engenharia Económica é definida como:



Introdução ao cálculo financeiro

A Engenharia Económica é definida como:

Engineering economy involves the systematic evaluation of the economic merits of proposed solutions to engineering problems. To be economically acceptable (i.e., affordable), *solutions to engineering problems* must demonstrate a positive balance of long-term benefits over long-term costs, and they must also

- promote the well-being and survival of an organization,
- embody creative and innovative technology and ideas,
- permit identification and scrutiny of their estimated outcomes, and
- translate profitability to the “bottom line” through a valid and acceptable measure of merit.



Introdução ao cálculo financeiro

A Engenharia Económica é definida como:

Engineering economy involves the systematic evaluation of the economic merits of proposed solutions to engineering problems. To be economically acceptable (i.e., affordable), *solutions to engineering problems* must demonstrate a positive balance of long-term benefits over long-term costs, and they must also

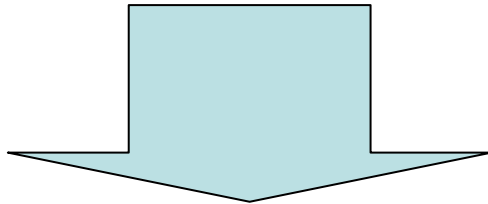
- promote the well-being and survival of an organization,
- embody creative and innovative technology and ideas,
- permit identification and scrutiny of their estimated outcomes, and
- translate profitability to the “bottom line” through a valid and acceptable measure of merit.

W.G. Sullivan, E.M. Wikcs, C.P. Koelling, *Engineering Economy*, Sixteenth, Pearson, Upper Saddle River, NJ, 2015.



Qual o objetivo de qualquer agente económico?

**MAXIMIZAR O SEU
CAPITAL !!!**



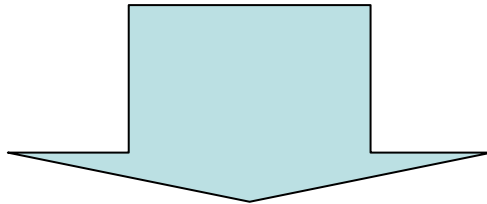
O valor do Capital depende da
TEMPORALIDADE





Qual o objetivo de qualquer agente económico?

**MAXIMIZAR O SEU
CAPITAL !!!**



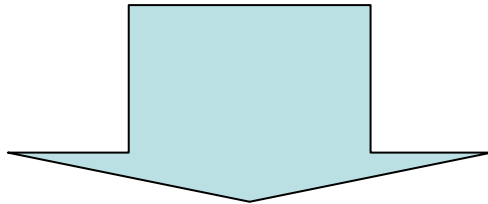
O valor do Capital depende da
TEMPORALIDADE





Qual o objetivo de qualquer agente económico?

**MAXIMIZAR O SEU
CAPITAL !!!**



O valor do Capital depende da
TEMPORALIDADE





Exemplo 1.1 – Valor temporal do dinheiro

Imaginem as duas situações seguintes:



Exemplo 1.1 – Valor temporal do dinheiro

Imaginem as duas situações seguintes:

1. Receberam um prémio de 1000 euros, com a opção de recebê-lo hoje ou daqui a um ano.



Exemplo 1.1 – Valor temporal do dinheiro

Imaginem as duas situações seguintes:

1. Receberam um prémio de 1000 euros, com a opção de recebê-lo hoje ou daqui a um ano.
2. Receberam uma multa hoje de 1000 euros, com a opção de pagá-la hoje ou daqui a um ano.



Exemplo 1.1 – Valor temporal do dinheiro

Imaginem as duas situações seguintes:

1. Receberam um prémio de 1000 euros, com a opção de recebê-lo hoje ou daqui a um ano.
2. Receberam uma multa hoje de 1000 euros, com a opção de pagá-la hoje ou daqui a um ano.

Que decisão tomavam?

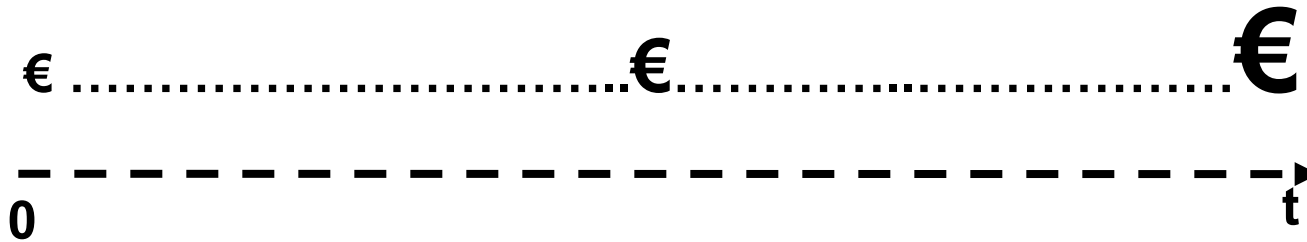


O valor temporal do dinheiro: “Tempo é Dinheiro”



O valor temporal do dinheiro: “Tempo é Dinheiro”

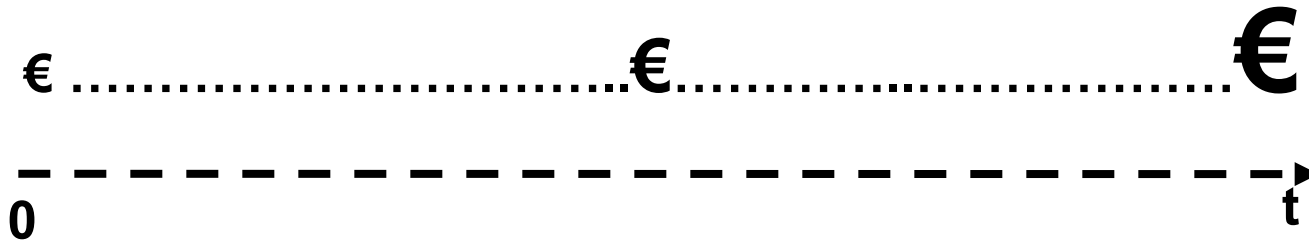
O **tempo** aumenta ou diminui o **Valor** do dinheiro.





O valor temporal do dinheiro: “Tempo é Dinheiro”

O **tempo** aumenta ou diminui o **Valor** do dinheiro.



O problema do valor do dinheiro é um problema de **Equivalência de Valores**.



O valor temporal do dinheiro: “Tempo é Dinheiro”



O valor temporal do dinheiro: “Tempo é Dinheiro”

O Capital (C) é

“todo o conjunto de meios líquidos (moeda ou equivalente) cedidos durante um determinado espaço de tempo, temporariamente ou definitivamente, produzindo uma certa remuneração para o seu detentor”.



O valor temporal do dinheiro: “Tempo é Dinheiro”

O **Capital (C)** é

“todo o conjunto de meios líquidos (moeda ou equivalente) cedidos durante um determinado espaço de tempo, temporariamente ou definitivamente, produzindo uma certa remuneração para o seu detentor”.

O **Tempo (n)** refere-se ao **prazo de aplicação do capital** e é analisado numa base periódica.



O valor temporal do dinheiro: “Tempo é Dinheiro”

O **Capital (C)** é

“todo o conjunto de meios líquidos (moeda ou equivalente) cedidos durante um determinado espaço de tempo, temporariamente ou definitivamente, produzindo uma certa remuneração para o seu detentor”.

O **Tempo (n)** refere-se ao **prazo de aplicação do capital** e é analisado numa base periódica.

Embora o tempo seja uma variável contínua, é convencionalizado que o capital seja analisado numa **base periódica**: diária, semanal, mensal, trimestral, semestral, anual, etc.

Cada um destes lapsos de tempo é denominado de **Período**.



Exemplo 1.2 – capital e período

O Banco Velho empresta ao Eng.º Avelino 100€ durante um prazo de 5 anos, devendo o Eng.º Avelino pagar ao fim de cada ano 7,5 € pelo uso do dinheiro do Banco Velho e reembolsar a dívida em 5 frações iguais, também no fim de cada ano.



Exemplo 1.2 – capital e período

O Banco Velho empresta ao Eng.º Avelino 100€ durante um prazo de 5 anos, devendo o Eng.º Avelino pagar ao fim de cada ano 7,5 € pelo uso do dinheiro do Banco Velho e reembolsar a dívida em 5 frações iguais, também no fim de cada ano.

Qual o valor do capital?



Exemplo 1.2 – capital e período

O Banco Velho empresta ao Eng.º Avelino 100€ durante um prazo de 5 anos, devendo o Eng.º Avelino pagar ao fim de cada ano 7,5 € pelo uso do dinheiro do Banco Velho e reembolsar a dívida em 5 frações iguais, também no fim de cada ano.

Qual o valor do capital?

Qual o Período de Tempo?



Exemplo 1.2 – capital e período

O Banco Velho empresta ao Eng.º Avelino 100€ durante um prazo de 5 anos, devendo o Eng.º Avelino pagar ao fim de cada ano 7,5 € pelo uso do dinheiro do Banco Velho e reembolsar a dívida em 5 frações iguais, também no fim de cada ano.

Qual o valor do capital?

100€

Qual o Período de Tempo?

1 ano, já que é anualmente que é remunerado pela utilização do capital e é reembolsado parte do empréstimo.



Operações financeiras

Uma **operação financeira** é toda a atividade que tem por finalidade produzir ou modificar quantitativamente um dado capital.



Operações financeiras

Uma **operação financeira** é toda a atividade que tem por finalidade produzir ou modificar quantitativamente um dado capital.

As operações financeiras têm as características:

- **Um prazo de duração** - lapso de tempo que medeia entre a aplicação de um capital e o seu retorno;



Operações financeiras

Uma **operação financeira** é toda a atividade que tem por finalidade produzir ou modificar quantitativamente um dado capital.

As operações financeiras têm as características:

- **Um prazo de duração** - lapso de tempo que medeia entre a aplicação de um capital e o seu retorno;
- **Dois sujeitos** – o sujeito ativo que prescinde de um determinado capital, cedendo-o ao sujeito passivo durante um determinado prazo e a um determinado preço – a taxa de juro (ativa);



Operações financeiras

Uma **operação financeira** é toda a atividade que tem por finalidade produzir ou modificar quantitativamente um dado capital.

As operações financeiras têm as características:

- **Um prazo de duração** - lapso de tempo que medeia entre a aplicação de um capital e o seu retorno;
- **Dois sujeitos** – o sujeito ativo que prescinde de um determinado capital, cedendo-o ao sujeito passivo durante um determinado prazo e a um determinado preço – a taxa de juro (ativa);
- **Uma taxa de juro** – rendimento proporcionado pela aplicação de uma unidade monetária, durante o prazo correspondente a uma unidade de tempo.



Operações financeiras

Uma **operação financeira** é toda a atividade que tem por finalidade produzir ou modificar quantitativamente um dado capital.

As operações financeiras têm as características:

- **Um prazo de duração** - lapso de tempo que medeia entre a aplicação de um capital e o seu retorno;
- **Dois sujeitos** – o sujeito ativo que prescinde de um determinado capital, cedendo-o ao sujeito passivo durante um determinado prazo e a um determinado preço – a taxa de juro (ativa);
- **Uma taxa de juro** – rendimento proporcionado pela aplicação de uma unidade monetária, durante o prazo correspondente a uma unidade de tempo.
- **Risco** – grau de incerteza quanto à concretização do objetivo que motivou a realização da operação financeira.



Juro (j)

O **Juro (*interest*)** é a remuneração recebida em contrapartida da cedência do Capital. O Juro é o preço do uso, temporário ou definitivo do capital alheio. Representa o acréscimo de valor de um determinado capital, durante um determinado período de tempo – o **período de aplicação**.



Juro (j)

O **Juro** (*interest*) é a remuneração recebida em contrapartida da cedência do Capital. O Juro é o preço do uso, temporário ou definitivo do capital alheio. Representa o acréscimo de valor de um determinado capital, durante um determinado período de tempo – o **período de aplicação**.

O **JURO** é o preço do crédito

O **JURO** é a “recompensa por renunciar à liquidez” (*Keynes*)

O **JURO** é o preço do tempo (*Bonneau*)

O **JURO** é o valor do dinheiro tendo em conta o fator tempo (*Matias, 2018*)



Juro (j)

O **Juro (j)** é função do **capital (c)**, do **tempo (n)** e da **taxa de juro (i)**.

$$j = f(c, n, i)$$



Juro (j)

O **Juro (j)** é função do **capital (c)**, do **tempo (n)** e da **taxa de juro (i)**.

$$j = f(c, n, i)$$

A fórmula fundamental do **juro simples** é dada por:

$$j = c \cdot n \cdot i$$



Taxa de juro (i)



Taxa de juro (i)

A **Taxa de Juro** é a remuneração devida a 1 unidade de capital, numa unidade de tempo.



Taxa de juro (i)

A **Taxa de Juro** é a remuneração devida a 1 unidade de capital, numa unidade de tempo.



Durante o período compreendido entre t e $t+1$, o capital, C , vai sofrer um acréscimo de valor: a **taxa de Juro**.

A **taxa de juro (i)**, representa o juro (j) produzido por uma unidade de capital (c) numa unidade de tempo (n).



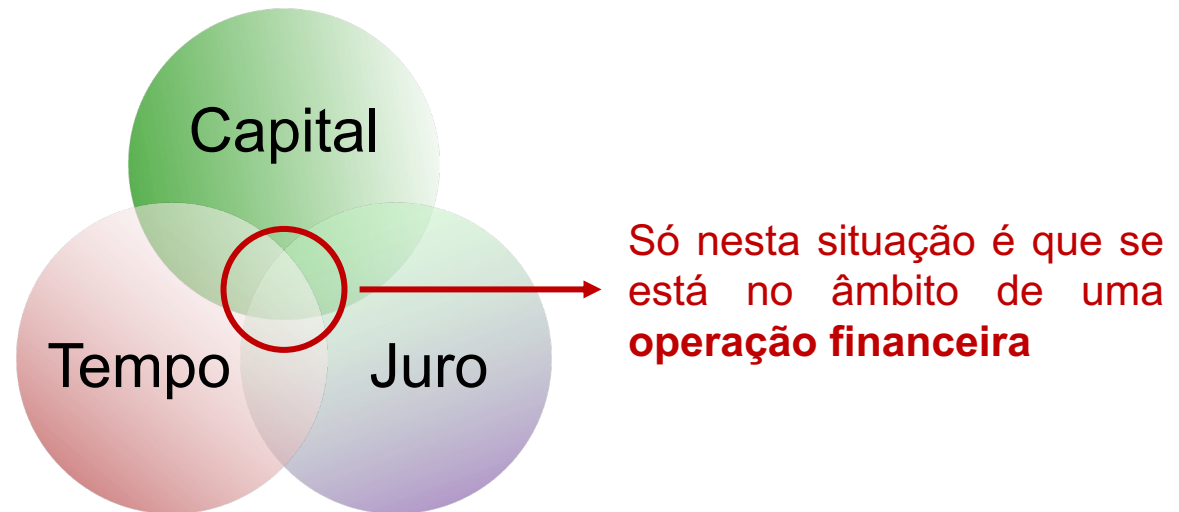
Três regras fundamentais que regem as relações entre C , j e n

- **Regra 1:** A presença de capital e de tempo e ausência de juro é uma impossibilidade em matemática financeira.



Três regras fundamentais que regem as relações entre C , j e n

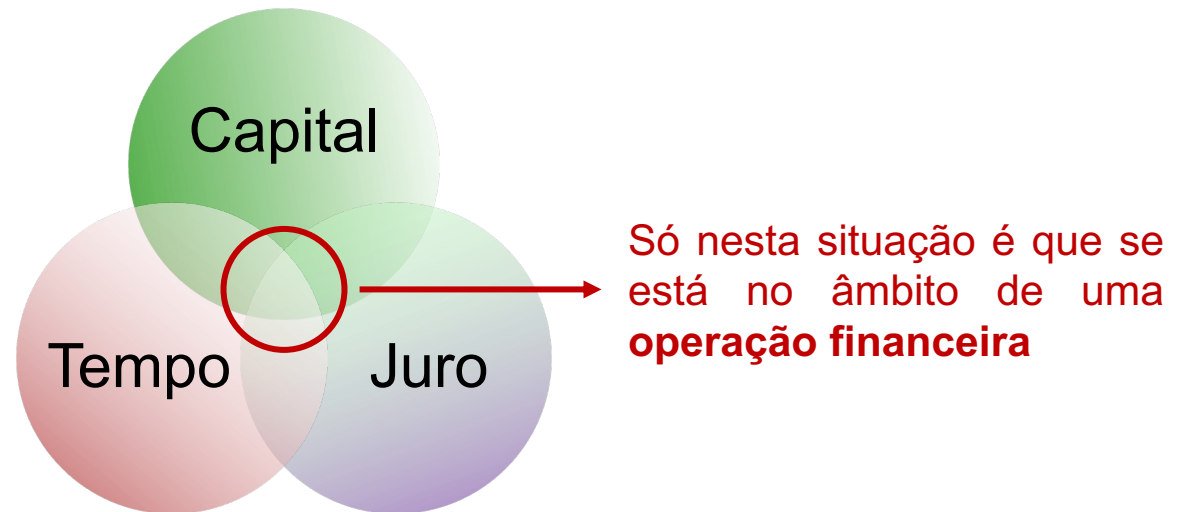
- **Regra 1:** A presença de capital e de tempo e ausência de juro é uma impossibilidade em matemática financeira.





Três regras fundamentais que regem as relações entre C , j e n

- **Regra 1:** A presença de capital e de tempo e ausência de juro é uma impossibilidade em matemática financeira.

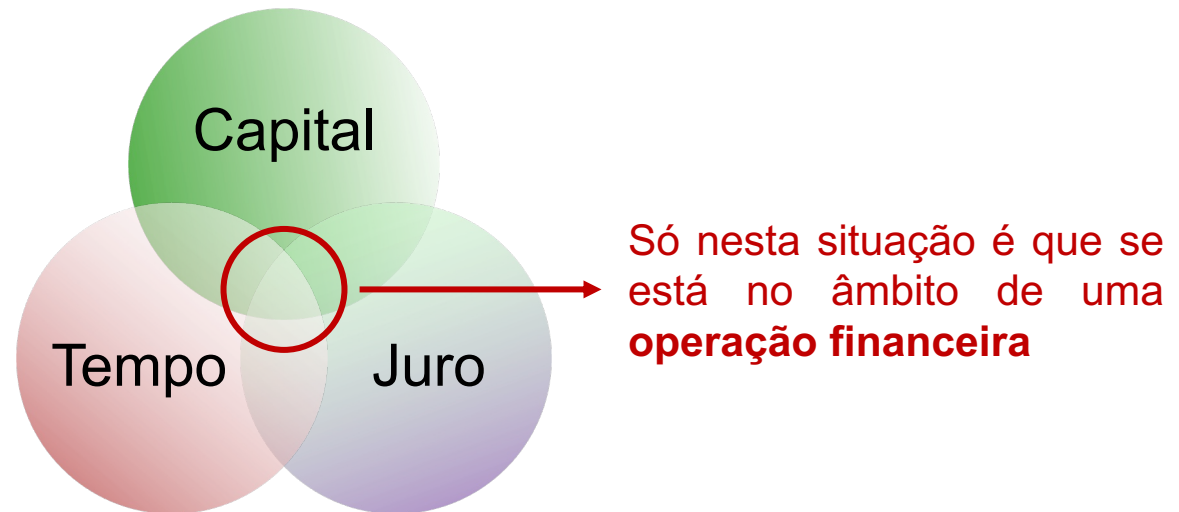


- Se há capital e tempo, tem que haver um juro.



Três regras fundamentais que regem as relações entre C , j e n

- **Regra 1:** A presença de capital e de tempo e ausência de juro é uma impossibilidade em matemática financeira.



- Se há capital e tempo, tem que haver um juro.
- O **juro zero** pode ocorrer se e só se o **capital for zero** e/ou o **prazo for zero**.



Três regras fundamentais que regem as relações entre C , j e n

- **Regra 2:** Qualquer operação matemática sobre dois ou mais capitais requer a sua homogeneização no tempo.



Três regras fundamentais que regem as relações entre C , j e n

- **Regra 2:** Qualquer operação matemática sobre dois ou mais capitais requer a sua homogeneização no tempo.
 - Dados dois capitais quaisquer C e C' , podem-se adicionar ou subtrair ou ainda estabelecer uma relação de grandeza entre eles ($C > C'$ ou $C' > C$ ou $C = C'$) se e só se eles estiverem referidos ao mesmo momento.



Três regras fundamentais que regem as relações entre C , j e n

- **Regra 2:** Qualquer operação matemática sobre dois ou mais capitais requer a sua homogeneização no tempo.
 - Dados dois capitais quaisquer C e C' , podem-se adicionar ou subtrair ou ainda estabelecer uma relação de grandeza entre eles ($C > C'$ ou $C' > C$ ou $C = C'$) se e só **se eles estiverem referidos ao mesmo momento.**
 - É incorreto afirmar que 1000 euros recebidos hoje mais 1000 euros recebidos daqui a um mês são 2000 euros.



Três regras fundamentais que regem as relações entre C , j e n

- **Regra 3:** Sendo J_k o juro do período k , C_{k-1} o capital no início do mesmo período e i_k a taxa de juro em vigor no mesmo período, será:

$$J_k = i_k \cdot C_{k-1} \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$



Operações de capitalização e de desconto

O processo de produção de juro designa-se por **capitalização** e à frequência com que, em determinada operação financeira, se produz juro designa-se por **periodicidade de capitalização**.



Operações de capitalização e de desconto

O processo de produção de juro designa-se por **capitalização** e à frequência com que, em determinada operação financeira, se produz juro designa-se por **periodicidade de capitalização**.

- Uma **operação de capitalização** consiste em adicionar o juro do período ao capital inicial.



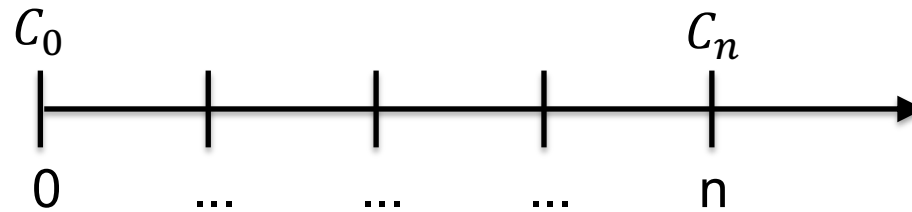
Operações de capitalização e de desconto

O processo de produção de juro designa-se por **capitalização** e à frequência com que, em determinada operação financeira, se produz juro designa-se por **periodicidade de capitalização**.

- Uma **operação de capitalização** consiste em adicionar o juro do período ao capital inicial.
- Um **operação de atualização ou desconto** é o processo inverso à capitalização, em que calculamos, em função da taxa de juro, quanto vale num momento anterior o capital vencível num momento posterior.



Operações de capitalização e de desconto





Operações de capitalização e de desconto

A **capitalização** é o valor do capital futuro.





Operações de capitalização e de desconto

A **capitalização** é o valor do capital futuro.

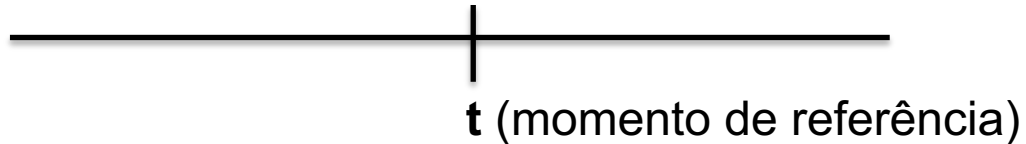


O **desconto ou atualização** é o valor que um capital futuro tem no presente (ou noutro momento de referência).



Valor acumulado e valor descontado

$$C_t = C_0 + j_t$$



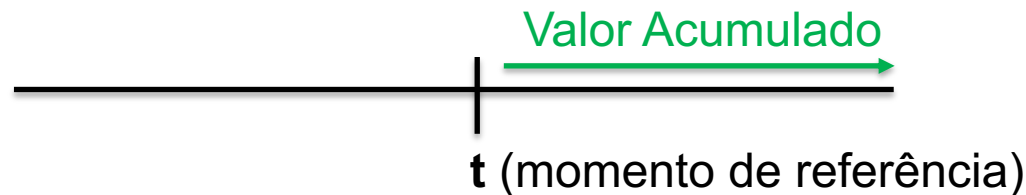


Valor acumulado e valor descontado

O **Valor Acumulado (ou Capitalizado)** será o valor do capital num momento posterior ao momento de referência.

C_t é o **Valor Acumulado** (ou Capitalizado) no momento t .

$$C_t = C_0 + j_t$$





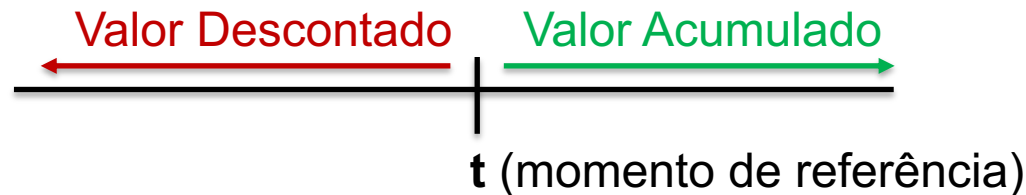
Valor acumulado e valor descontado

O **Valor Acumulado (ou Capitalizado)** será o valor do capital num momento posterior ao momento de referência.

$$C_t = C_0 + j_t$$

C_t é o **Valor Acumulado** (ou Capitalizado) no momento t .

C_0 é o **Valor Atual** (ou Descontado) de C_t no momento t .



Inversamente teremos o **Valor Atual (ou Descontado)**, em que o **montante do desconto, D**, é obtido por:

$$D = C_n - C_0$$



Valor acumulado e valor descontado

Fundamentalmente, os dois problemas relacionados com a determinação do valor do dinheiro no tempo, são os seguintes:



Valor acumulado e valor descontado

Fundamentalmente, os dois problemas relacionados com a determinação do valor do dinheiro no tempo, são os seguintes:

- Qual o valor de um determinado capital, que hoje tem um dado valor, daqui a um determinado lapso de tempo (**valor acumulado ou futuro**)?



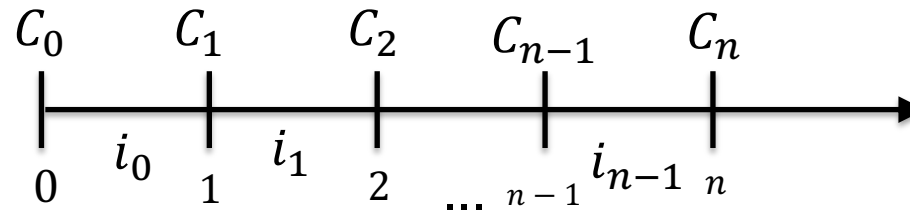
Valor acumulado e valor descontado

Fundamentalmente, os dois problemas relacionados com a determinação do valor do dinheiro no tempo, são os seguintes:

- Qual o valor de um determinado capital, que hoje tem um dado valor, daqui a um determinado lapso de tempo (**valor acumulado ou futuro**)?
- Qual o valor hoje (**atual ou presente ou descontado**) de um capital futuro?

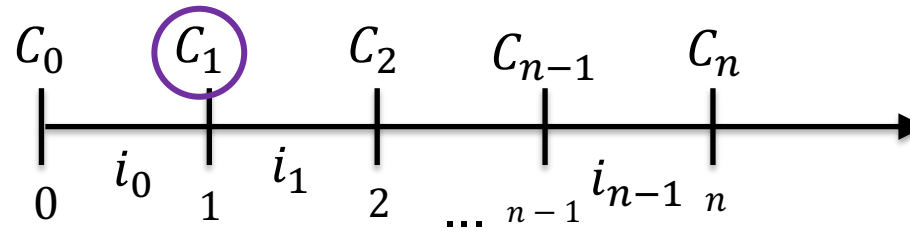


Fórmula Geral de Capitalização





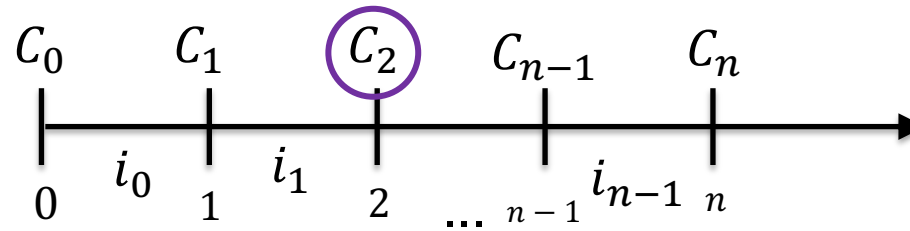
Fórmula Geral de Capitalização



$$C_1 = C_0 + C_0 \times i_0 = C_0 \times (1 + i_0)$$



Fórmula Geral de Capitalização

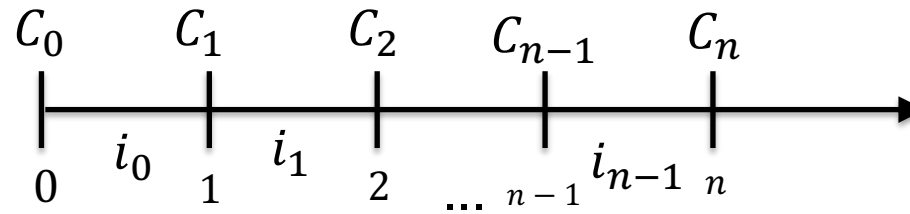


$$C_1 = C_0 + C_0 \times i_0 = C_0 \times (1 + i_0)$$

$$C_2 = C_1 + C_1 \times i_1 = C_1 \times (1 + i_1) = C_0 \times (1 + i_0) \times (1 + i_1)$$



Fórmula Geral de Capitalização



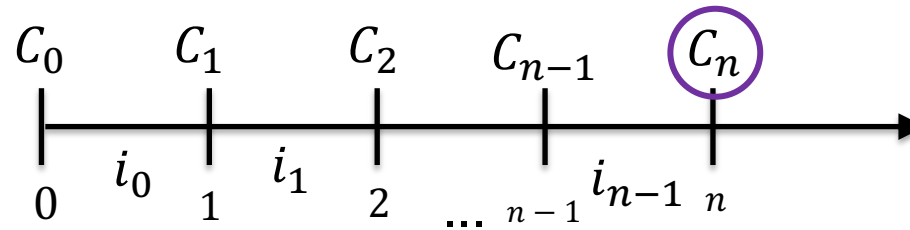
$$C_1 = C_0 + C_0 \times i_0 = C_0 \times (1 + i_0)$$

$$C_2 = C_1 + C_1 \times i_1 = C_1 \times (1 + i_1) = C_0 \times (1 + i_0) \times (1 + i_1)$$

...



Fórmula Geral de Capitalização



$$C_1 = C_0 + C_0 \times i_0 = C_0 \times (1 + i_0)$$

$$C_2 = C_1 + C_1 \times i_1 = C_1 \times (1 + i_1) = C_0 \times (1 + i_0) \times (1 + i_1)$$

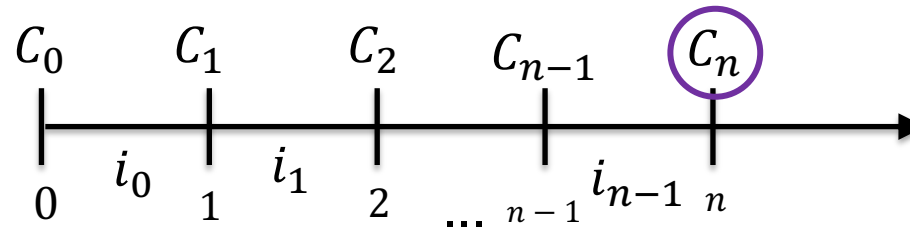
...

$$C_n = C_0 \times (1 + i_0) \dots \times (1 + i_{n-1}) \quad \text{ou}$$

$$C_n = C_0 \times \prod_{k=0}^{n-1} (1 + i_k)$$



Fórmula Geral de Capitalização



$$C_1 = C_0 + C_0 \times i_0 = C_0 \times (1 + i_0)$$

$$C_2 = C_1 + C_1 \times i_1 = C_1 \times (1 + i_1) = C_0 \times (1 + i_0) \times (1 + i_1)$$

...

$$C_n = C_0 \times (1 + i_0) \dots \times (1 + i_{n-1}) \quad \text{ou}$$

$$C_n = C_0 \times \prod_{k=0}^{n-1} (1 + i_k)$$

$C_n = C_0 + j \Rightarrow$ valor acumulado, adição de juro ao capital



Regimes de Capitalização

Os regimes de capitalização podem ser diferentes porque podemos dar destinos diferentes ao juro no final de cada período.



Regimes de Capitalização

Os regimes de capitalização podem ser diferentes porque podemos dar destinos diferentes ao juro no final de cada período.

Regimes de
capitalização



Regimes de Capitalização

Os regimes de capitalização podem ser diferentes porque podemos dar destinos diferentes ao juro no final de cada período.

Regimes de
capitalização



**Regime de Juro
Simples (RJS)**

O juro sai do circuito de capitalização.



Regimes de Capitalização

Os regimes de capitalização podem ser diferentes porque podemos dar destinos diferentes ao juro no final de cada período.





Regime de Juro Simples (RJS)



Regime de Juro Simples (RJS)

- O **RJS** caracteriza-se pela saída dos juros do circuito de capitalização quando estes são vencidos. Consequentemente, o juro vencido não vai gerar juro no(s) período(s) seguinte(s).



Regime de Juro Simples (RJS)

- O **RJS** caracteriza-se pela saída dos juros do circuito de capitalização quando estes são vencidos. Consequentemente, o juro vencido não vai gerar juro no(s) período(s) seguinte(s).
- No **RJS**, os juros são sempre constantes.



Regime de Juro Simples (RJS)

- O **RJS** caracteriza-se pela saída dos juros do circuito de capitalização quando estes são vencidos. Consequentemente, o juro vencido não vai gerar juro no(s) período(s) seguinte(s).
- No **RJS**, os juros são sempre constantes.
- Distinguem-se dois tipos de **RJS**:



Regime de Juro Simples (RJS)

- O **RJS** caracteriza-se pela saída dos juros do circuito de capitalização quando estes são vencidos. Consequentemente, o juro vencido não vai gerar juro no(s) período(s) seguinte(s).
- No **RJS**, os juros são sempre constantes.
- Distinguem-se dois tipos de **RJS**:
 - **Regime de Juro Simples “Puro”** – O juro é pago e sai do processo de capitalização.



Regime de Juro Simples (RJS)

- O **RJS** caracteriza-se pela saída dos juros do circuito de capitalização quando estes são vencidos. Consequentemente, o juro vencido não vai gerar juro no(s) período(s) seguinte(s).
- No **RJS**, os juros são sempre constantes.
- Distinguem-se dois tipos de **RJS**:
 - **Regime de Juro Simples “Puro”** – O juro é pago e sai do processo de capitalização.
 - **Regime de Juro “Dito” Simples** – O juro é mantido no processo de capitalização (i.e., é retido), mas não capitaliza.



Regime de Juro Composto (RJC)



Regime de Juro Composto (RJC)

- No **RJC**, o juro no momento do seu vencimento é sempre adicionado ao capital, entrando no circuito de capitalização, gerando juros no(s) período(s) seguinte(s).



Regime de Juro Composto (RJC)

- No **RJC**, o juro no momento do seu vencimento é sempre adicionado ao capital, entrando no circuito de capitalização, gerando juros no(s) período(s) seguinte(s).
- No **RJC**, existe capitalização de juros sobre juros.



Regime de Juro Composto (RJC)

- No **RJC**, o juro no momento do seu vencimento é sempre adicionado ao capital, entrando no circuito de capitalização, gerando juros no(s) período(s) seguinte(s).
- No **RJC**, existe capitalização de juros sobre juros.
 - A este fenómeno (juros de juros) dá-se o nome de **anatocismo**.

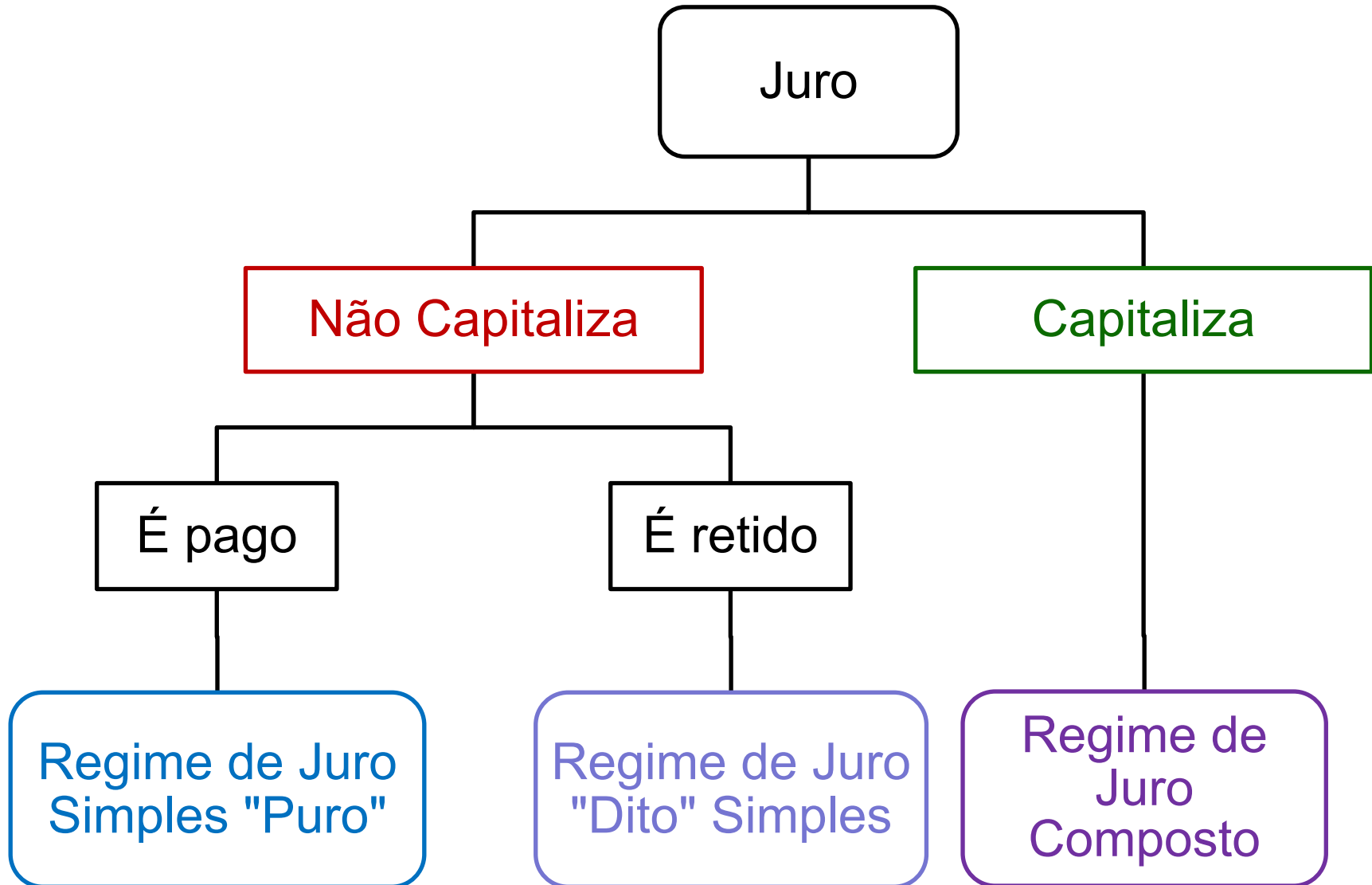
Do grego: **ana** + **tokos**
 (repetição) (juro)



Regimes de Capitalização - Resumo



Regimes de Capitalização - Resumo



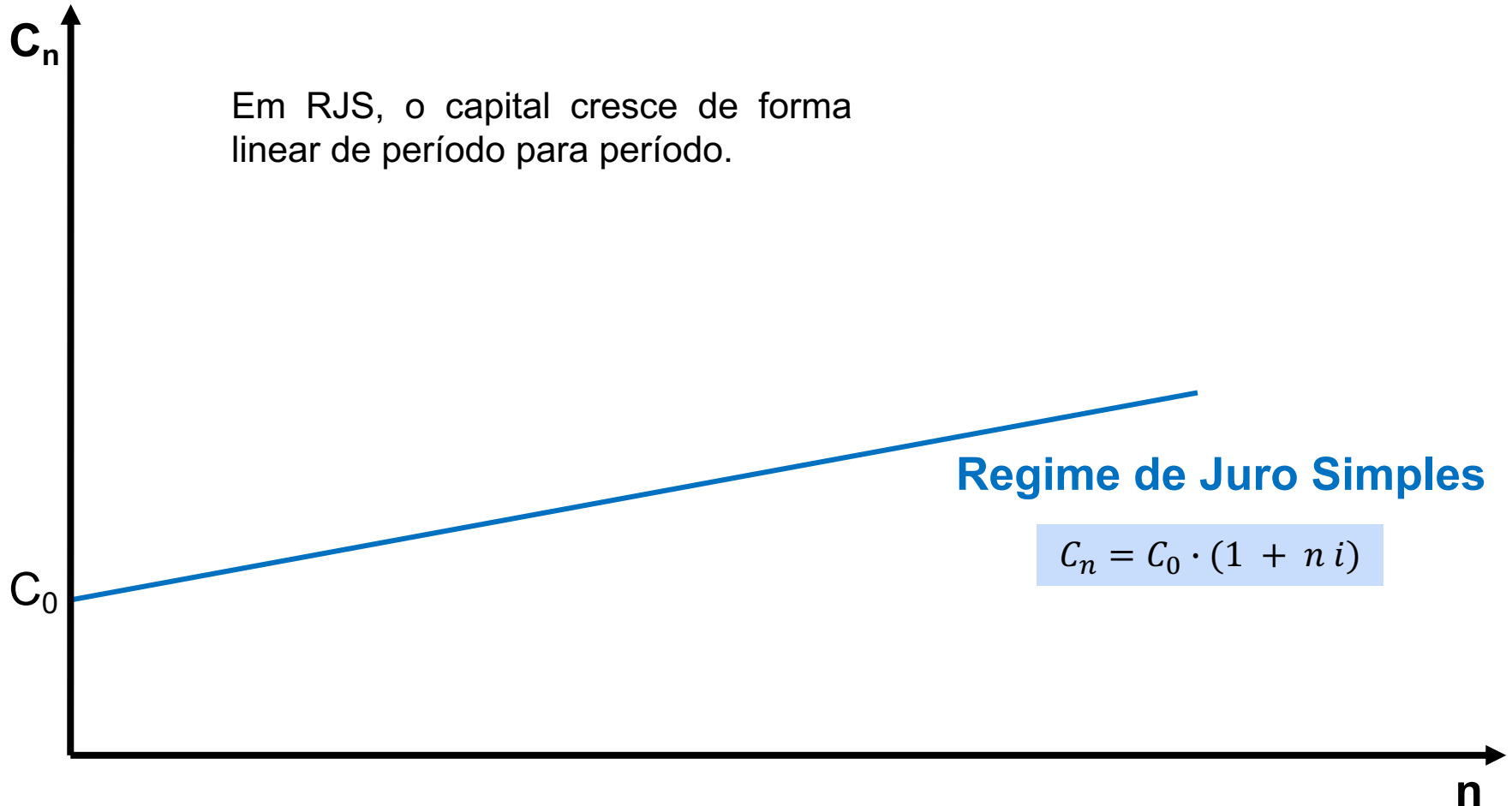


Comparação da função capital acumulado em RJS e em RJC





Comparação da função capital acumulado em RJS e em RJC

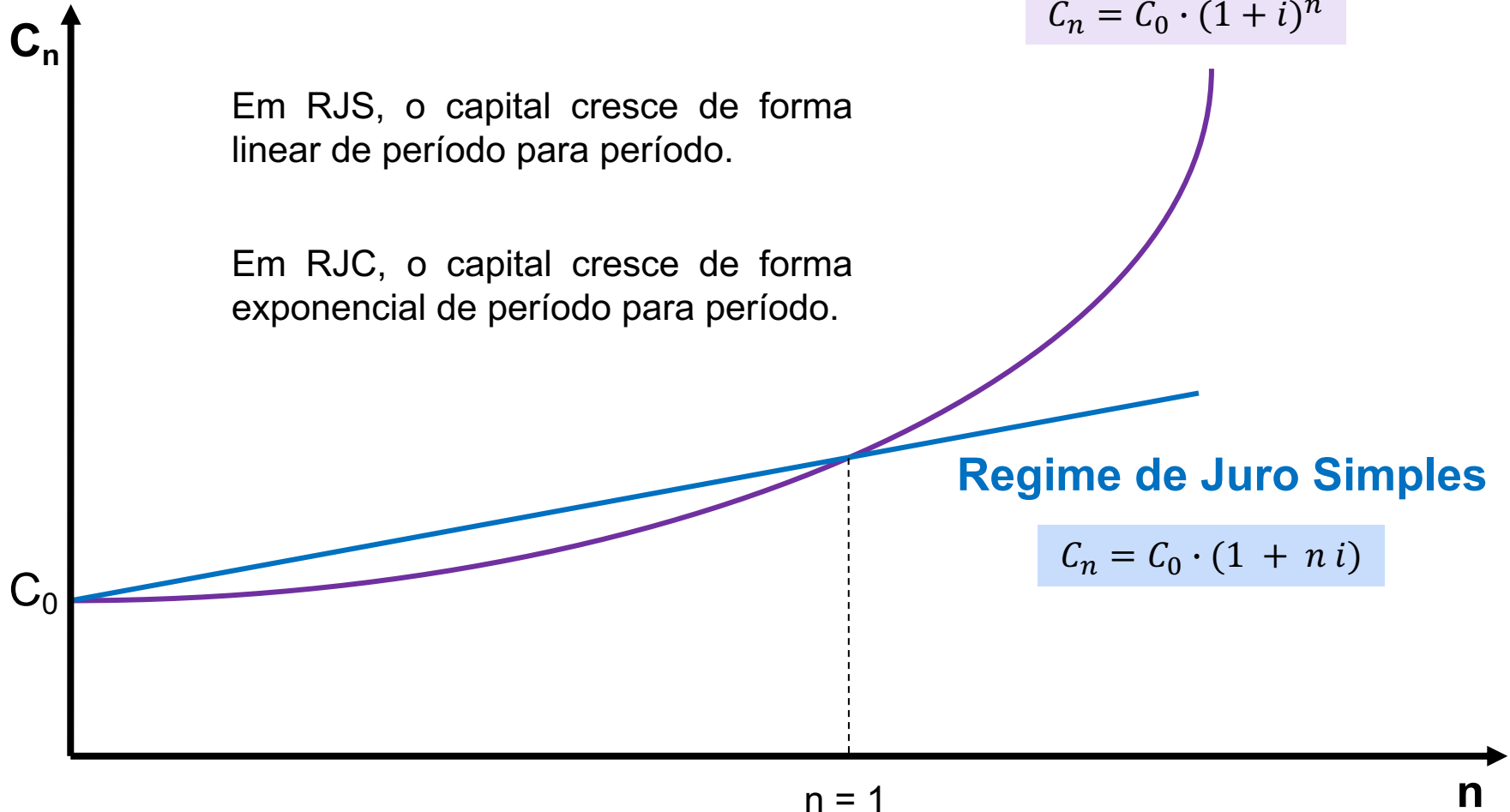




Comparação da função capital acumulado em RJS e em RJC

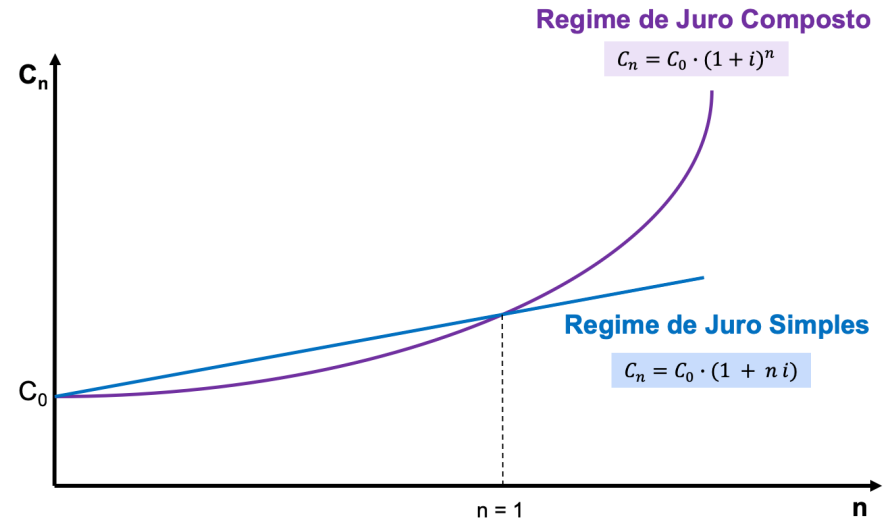
Regime de Juro Composto

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$





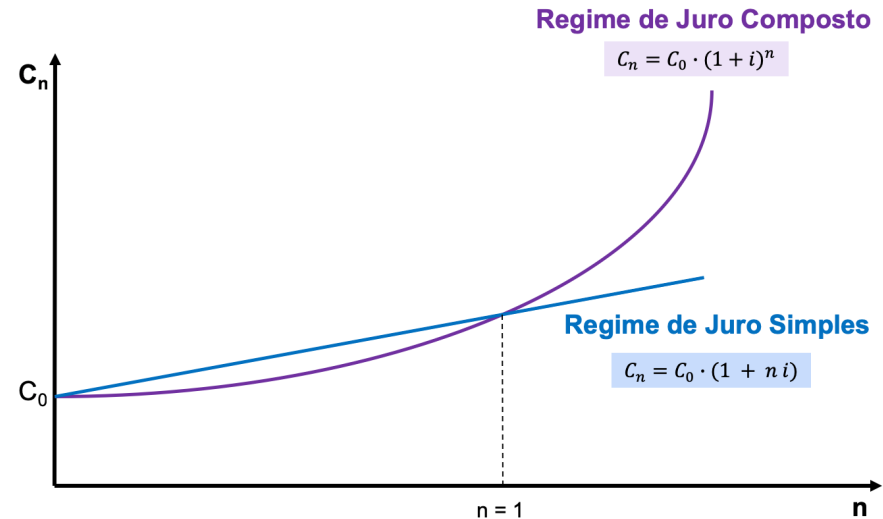
Comparação da função capital acumulado em RJS e em RJC





Comparação da função capital acumulado em RJS e em RJC

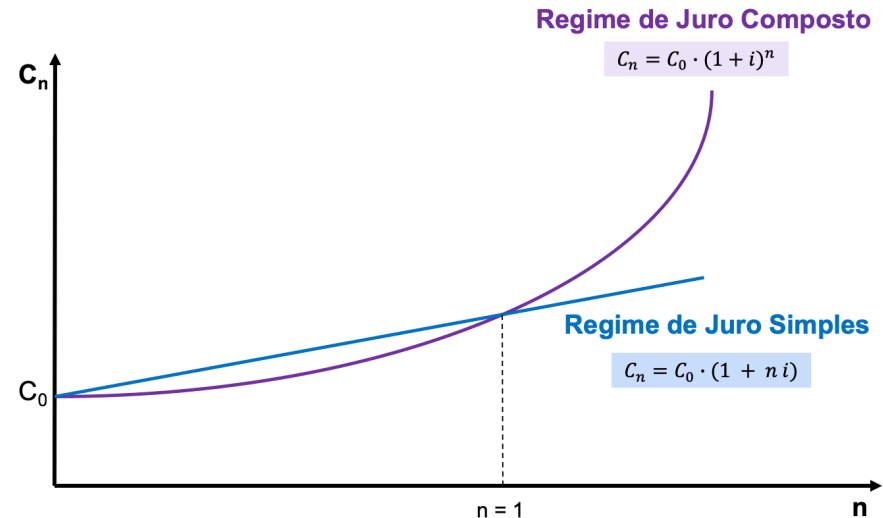
- Para uma fração de um período de capitalização, o valor acumulado em RJC é inferior ao valor acumulado em RJS.





Comparação da função capital acumulado em RJS e em RJC

- Para uma fração de um período de capitalização, o valor acumulado em RJC é inferior ao valor acumulado em RJS.

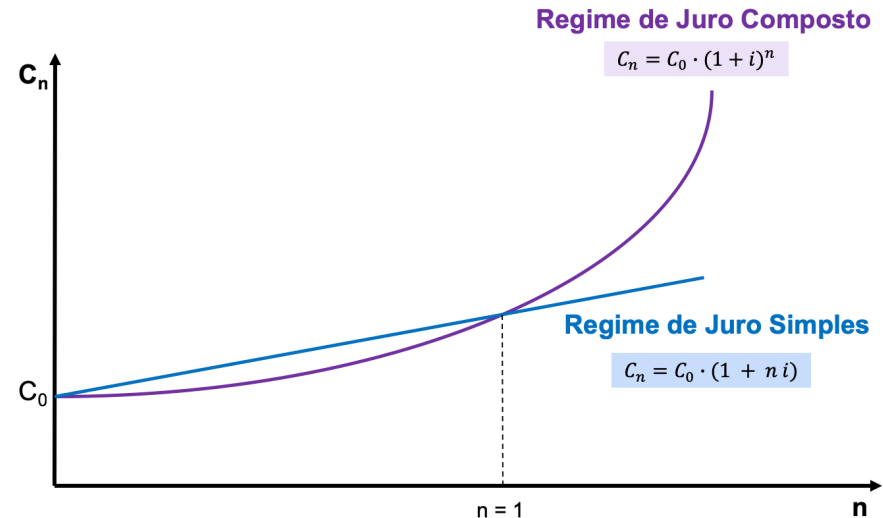


- Para um período de capitalização os valores acumulados proporcionados pelos dois regimes são iguais.



Comparação da função capital acumulado em RJS e em RJC

- Para uma fração de um período de capitalização, o valor acumulado em RJC é inferior ao valor acumulado em RJS.



- Para um período de capitalização os valores acumulados proporcionados pelos dois regimes são iguais.
- Para mais do que um período de capitalização, o RJC proporciona um valor acumulado progressivamente superior ao obtido em RJS.



Equações de Capitalização

Equações do Regime de Juro Simples



Equações de Capitalização

Equações do Regime de Juro Simples

- Fórmula geral de **capitalização**:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + n i)$$

$$C_n = C_0 + j_n$$



Equações de Capitalização

Equações do Regime de Juro Simples

- Fórmula geral de **capitalização**:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + n i)$$

$$C_n = C_0 + j_n$$

- Fórmula geral de **atualização** ou **desconto**:

$$C_0 = C_n \cdot (1 + n i)^{-1}$$



Equações de Capitalização

Equações do Regime de Juro Simples

- Fórmula geral de **capitalização**:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + n i)$$

$$C_n = C_0 + j_n$$

- Fórmula geral de **atualização** ou **desconto**:

$$C_0 = C_n \cdot (1 + n i)^{-1}$$

- Fórmula de cálculo do **juro acumulado**:

$$j_n = C_0 \cdot n \cdot i$$



Exemplo 1.3 – Equações RJS

Cálculo dos juros e valor acumulado em RJS.

Período (n)	Juro (j)	Valor Acumulado (C_n)
Fim do 1º	$j_1 = C_0 \cdot 1 \cdot i$	$C_1 = C_0 + j_1 = C_0(1+i)$
Fim do 2º	$j_2 = C_0 \cdot 2 \cdot i$	$C_2 = C_0 + j_2 = C_0(1+2i)$
...
Fim de n	$J_n = C_0 \cdot n \cdot i$	$C_n = C_0 + J_n = C_0(1+ni)$



Equações do Regime de Juro Simples – unidade de tempo

Atenção: para calcular o juro, é necessário que o **período (n)** e a **taxa de juro (i)** estejam referidas à mesma unidade de tempo.



Equações do Regime de Juro Simples – unidade de tempo

Atenção: para calcular o juro, é necessário que o **período (n)** e a **taxa de juro (i)** estejam referidas à mesma unidade de tempo.

Por exemplo,

Se a taxa de juro estiver expressa em anos e o período em meses, devemos calcular:

$$j = c \frac{n}{12} i$$



Equações do Regime de Juro Simples – unidade de tempo

Atenção: para calcular o juro, é necessário que o **período (n)** e a **taxa de juro (i)** estejam referidas à mesma unidade de tempo.

Por exemplo,

Se a taxa de juro estiver expressa em anos e o período em meses, devemos calcular:

$$j = c \frac{n}{12} i$$

Caso o tempo esteja expresso em dias, devemos saber qual a base de cálculo: **Ano Civil** ou **Ano comercial**.

$$j = c \frac{n}{365} i \quad (\text{Ano Civil})$$

$$j = c \frac{n}{360} i \quad (\text{Ano Comercial})$$

Convenção adotada em EE/AEFI



Equações do Regime de Juro Composto



Equações do Regime de Juro Composto

- Fórmula geral de **capitalização**:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$



Equações do Regime de Juro Composto

- Fórmula geral de **capitalização**:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

- Fórmula geral de **atualização** ou **desconto**:

$$C_0 = C_n \cdot (1 + i)^{-n}$$



Equações do Regime de Juro Composto

- Fórmula geral de **capitalização**:

$$C_n = C_0 \cdot (1 + i)^n$$

- Fórmula geral de **atualização** ou **desconto**:

$$C_0 = C_n \cdot (1 + i)^{-n}$$

- Fórmula de cálculo do **juro acumulado**:

$$j_n = C_0 \cdot ((1 + i)^n - 1)$$



Exemplo 1.4 – Equações RJC

Cálculo dos juros e valor acumulado em RJC.



Exemplo 1.4 – Equações RJC

Cálculo dos juros e valor acumulado em RJC.

Período (n)	Juro (j)	Valor Acumulado (C)
Fim do 1º	$j_1 = C_0 \cdot 1 \cdot i$	$C_1 = C_0 + j_1 = C_0(1+i)$
Fim do 2º	$j_2 = C_0 \cdot (1+i) \cdot i$	$C_2 = C_1 + j_2 = C_0(1+i)^2$
...
Fim de n	$J_n = C_0 \cdot ((1+i)^n - 1)$	$C_n = C_{n-1} + J_n = C_0(1+i)^n$



Exercícios – Regimes de capitalização (1/3)



Exercícios – Regimes de capitalização (1/3)

1.1. Calcular o rendimento obtido pela aplicação de 1.500€, durante 7 meses e 15 dias, à taxa de juro anual de 5%, em regime de capitalização simples. Considerar o ano comercial.



Exercícios – Regimes de capitalização (1/3)

1.1. Calcular o rendimento obtido pela aplicação de 1.500€, durante 7 meses e 15 dias, à taxa de juro anual de 5%, em regime de capitalização simples. Considerar o ano comercial.

Resposta: $j=46,88 \text{ €}$

1.2. A aplicação de 3.000€ pelo prazo de 9 meses, em regime de juro simples, gera um rendimento de 112,50€. Qual a taxa de juro anual aplicada?



Exercícios – Regimes de capitalização (1/3)

1.1. Calcular o rendimento obtido pela aplicação de 1.500€, durante 7 meses e 15 dias, à taxa de juro anual de 5%, em regime de capitalização simples. Considerar o ano comercial.

Resposta: $j=46,88$ €

1.2. A aplicação de 3.000€ pelo prazo de 9 meses, em regime de juro simples, gera um rendimento de 112,50€. Qual a taxa de juro anual aplicada?

Resposta: $i=5\%$

1.3. Qual o investimento necessário para gerar um capital de 1.050€ daqui a 6 meses à taxa de juro anual de 10%, em regime de juro simples?



Exercícios – Regimes de capitalização (1/3)

1.1. Calcular o rendimento obtido pela aplicação de 1.500€, durante 7 meses e 15 dias, à taxa de juro anual de 5%, em regime de capitalização simples. Considerar o ano comercial.

Resposta: $j=46,88 \text{ €}$

1.2. A aplicação de 3.000€ pelo prazo de 9 meses, em regime de juro simples, gera um rendimento de 112,50€. Qual a taxa de juro anual aplicada?

Resposta: $i=5\%$

1.3. Qual o investimento necessário para gerar um capital de 1.050€ daqui a 6 meses à taxa de juro anual de 10%, em regime de juro simples?

Resposta: $C_0= 1000\text{€}$

1.4. Um investidor tem os seguintes pagamentos para efetuar: 20.000€ daqui a 3 meses e 40.000€ daqui a 9 meses. Se pretender prorrogar o pagamento desses mesmos débitos, o primeiro a ser pago daqui a 9 meses e o segundo a ser pago daqui a um ano, quais deverão ser os montantes a pagar nessas datas, considerando uma taxa de juro anual de 20%, em regime de juro simples.



Exercícios – Regimes de capitalização (1/3)

1.1. Calcular o rendimento obtido pela aplicação de 1.500€, durante 7 meses e 15 dias, à taxa de juro anual de 5%, em regime de capitalização simples. Considerar o ano comercial.

Resposta: $j=46,88 \text{ €}$

1.2. A aplicação de 3.000€ pelo prazo de 9 meses, em regime de juro simples, gera um rendimento de 112,50€. Qual a taxa de juro anual aplicada?

Resposta: $i=5\%$

1.3. Qual o investimento necessário para gerar um capital de 1.050€ daqui a 6 meses à taxa de juro anual de 10%, em regime de juro simples?

Resposta: $C_0= 1000\text{€}$

1.4. Um investidor tem os seguintes pagamentos para efetuar: 20.000€ daqui a 3 meses e 40.000€ daqui a 9 meses. Se pretender prorrogar o pagamento desses mesmos débitos, o primeiro a ser pago daqui a 9 meses e o segundo a ser pago daqui a um ano, quais deverão ser os montantes a pagar nessas datas, considerando uma taxa de juro anual de 20%, em regime de juro simples.

Resposta: $C_9= 21\ 904,76 \text{ €}; C_{12}= 41\ 739,10 \text{ €}$



Exercícios – Regimes de capitalização (2/3)



Exercícios – Regimes de capitalização (2/3)

1.5. O Sr. Silva tem um depósito a prazo de 2.000,00 euros por 180 dias. Determine o valor acumulado sabendo que a taxa de juro semestral da operação é de 2,1%. Considerar o ano comercial



Exercícios – Regimes de capitalização (2/3)

1.5. O Sr. Silva tem um depósito a prazo de 2.000,00 euros por 180 dias. Determine o valor acumulado sabendo que a taxa de juro semestral da operação é de 2,1%. Considerar o ano comercial

Resposta: 2.042,00 €

1.6. Qual o rendimento produzido por um capital de 100 mil euros pelo prazo de dois anos à taxa de juro semestral de 2,5%? (RJS)



Exercícios – Regimes de capitalização (2/3)

1.5. O Sr. Silva tem um depósito a prazo de 2.000,00 euros por 180 dias. Determine o valor acumulado sabendo que a taxa de juro semestral da operação é de 2,1%. Considerar o ano comercial

Resposta: 2.042,00 €

1.6. Qual o rendimento produzido por um capital de 100 mil euros pelo prazo de dois anos à taxa de juro semestral de 2,5%? (RJS)

Resposta: 10.000,00 €

1.7. Qual a taxa de juro quadrimestral que, aplicada a um capital de 1.000 euros pelo prazo de 10 meses, produziu um juro de 77 euros? (RJS)



Exercícios – Regimes de capitalização (2/3)

1.5. O Sr. Silva tem um depósito a prazo de 2.000,00 euros por 180 dias. Determine o valor acumulado sabendo que a taxa de juro semestral da operação é de 2,1%. Considerar o ano comercial

Resposta: 2.042,00 €

1.6. Qual o rendimento produzido por um capital de 100 mil euros pelo prazo de dois anos à taxa de juro semestral de 2,5%? (RJS)

Resposta: 10.000,00 €

1.7. Qual a taxa de juro quadrimestral que, aplicada a um capital de 1.000 euros pelo prazo de 10 meses, produziu um juro de 77 euros? (RJS)

Resposta: $i = 3,08\%$



Exercícios – Regimes de capitalização (3/3)



Exercícios – Regimes de capitalização (3/3)

1.8. Considere o montante de 10.000 Euros com vencimento daqui a 3 anos. Determine:



Exercícios – Regimes de capitalização (3/3)

1.8. Considere o montante de 10.000 Euros com vencimento daqui a 3 anos. Determine:

- a) O capital que lhe é equivalente hoje, à taxa anual de 6%, assumindo que vigora o regime de juro simples.



Exercícios – Regimes de capitalização (3/3)

1.8. Considere o montante de 10.000 Euros com vencimento daqui a 3 anos. Determine:

- a) O capital que lhe é equivalente hoje, à taxa anual de 6%, assumindo que vigora o regime de juro simples.
- b) O montante do desconto.



Exercícios – Regimes de capitalização (3/3)

1.8. Considere o montante de 10.000 Euros com vencimento daqui a 3 anos. Determine:

- a) O capital que lhe é equivalente hoje, à taxa anual de 6%, assumindo que vigora o regime de juro simples.
- b) O montante do desconto.

1.9. Qual o valor atual de um capital de 100 euros emprestado por 3 anos a uma taxa de 10 % anual em Regime de Juro Composto?



Exercícios – Regimes de capitalização (3/3)

1.8. Considere o montante de 10.000 Euros com vencimento daqui a 3 anos. Determine:

- a) O capital que lhe é equivalente hoje, à taxa anual de 6%, assumindo que vigora o regime de juro simples.
- b) O montante do desconto.

Resposta: a) 8.474,58 €; b) 1.525,42 €.

1.9. Qual o valor atual de um capital de 100 euros emprestado por 3 anos a uma taxa de 10 % anual em Regime de Juro Composto?



Exercícios – Regimes de capitalização (3/3)

1.8. Considere o montante de 10.000 Euros com vencimento daqui a 3 anos. Determine:

- a) O capital que lhe é equivalente hoje, à taxa anual de 6%, assumindo que vigora o regime de juro simples.
- b) O montante do desconto.

Resposta: a) 8.474,58 €; b) 1.525,42 €.

1.9. Qual o valor atual de um capital de 100 euros emprestado por 3 anos a uma taxa de 10 % anual em Regime de Juro Composto?

Resposta: 75,13 €.



Bibliografia recomendada

- Matias, R. (2018) Cálculo Financeiro - Teoria e Prática. 6aEdição. Lisboa: Escolar Editora. (Capítulo 1)
- Sullivan, W. G., Elin M. W. and James T. L. (2006). Engineering Economy, 13ª Edição. New Jersey: Pearson Prentice Hall, Inc. (Chapter 4)