CN A – Exam 2022.3 Resolution

Felipe B. Pinto 71951 – EQB

20 de janeiro de 2025

Conteúdo

Questão 1

Considere o intervalo $[a, b]$, com $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{10} = b$ e uma função não linear, f, da qual se conhece a seguinte tabela:

x	x_0	x_1	...	x_{10}
$f(x)$	y_0	y_1	...	y_{10}

Pretende-se aproximar f por uma função interpoladora nos pontos da tabela de forma a que esta tenha poucas ou nenhumas oscilações junto das extremidades do intervalo $[a, b]$. Para o efeito deve utilizar-se:

a. O polinómio de Lagrange interpolador de f nos pontos da tabela.

b. O polinómio do grau 2 que aproxima a função tabelada segundo o método dos mínimos quadrados.

c. O polinómio de Newton com diferenças divididas interpolador de f nos pontos da tabela.

d. O spline cúbico natural, interpolador de f dos pontos da tabela.

Resposta d.

Questão 2

Seja $f(x) \in C^2[1,3]$ uma função que verifica $f^n(x) = x^n/3, \forall\, x \in [1,3]$. Se pretendesse calcular um valor aproximado de $I = \int_1^3 f(x)\ \mathrm{d}x$ utilizando a regra dos trapézios, qual o menor número de sub-intervalos de igual amplitude em que teria de dividir o intervalo $[1,3]$, por forma a garantir pelo menos 1 casa decimal significativa para do erro absoluto da aproximação?

Resposta (3)

Finding subdivisions number n

$$\begin{aligned}
&|R_n| = \left|\frac{-h^3}{12}\, n\, f''(\xi)\right| = \\
&&& h = (3-1)/n;\ f^{(n)}(x) = x^n/3 \\
&= \left|\frac{-((3-1)/n)^3}{12}\, n\, \xi^2/3\right| = \left|\frac{-2}{n^2\, 9}\,\xi^2\right| = \frac{2}{n^2\, 9}\,\xi^2 \leq \\
&&& k = 1 \text{ casa decimal} \\
&\leq 5\,\mathrm{E}^{-1-1} = 5\,\mathrm{E}^{-2} \implies n \geq \sqrt{\frac{2\,\xi^2}{9 * 5\,\mathrm{E}^{-2}}} = \frac{2\,\xi\,\sqrt{10}}{3} \leq \\
&&& \xi \in [1,3] \\
&\leq \frac{2 * 3\,\sqrt{10}}{3} = 2\sqrt{10} \implies n = \lceil 2\sqrt{10} \rceil = 7
\end{aligned} \tag{3}$$

Questão 3

Considere a função $f(x) = x/e^x$ e $S(x)$ o spline cúbico natural interpolador de f nos pontos $0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = 1$. Qual o valor da expressão $S(0) - S''(0) - 2\,S(1) + 2\,S''(1)$?

Resposta (5)

Solving expression

$$
\begin{aligned}
& S(0) - S"(0) - 2\,S(1) + 2\,S"(1) = && \\
& && \text{spline natural: } y_0''(x_0) = y_n''(x_n) = 0 \\
& = S(0) - 2\,S(1) = && \\
& && S_k(k) = f_k \\
& = f(0) - 2\,f(1) = \frac{0}{e^0} - 2\,\frac{1}{e^1} = \frac{-2}{e} && (5)
\end{aligned}
$$

Questão 4

Seja α a raiz única da equação não linear $f(x) = 0$ no intervalo $[a, b]$. Considere as sucessões definidas por recorrência $x_n = g_1(x_{n-1})$ e $y_n = g_2(y_{n-1}), n \in \mathbb{N}$, ambas convergentes para α, com g_1 e g_2 duas funções definidas e continuas em $[a, b]$ tais que $g_1(\alpha) = \alpha$ e $g_2(x) = x - f(x)/f'(x)$. Além disso tem-se $0 \neq |g_1'(\alpha)| < 1$ e $g_2'(\alpha) = 0$. Considerando que $x_0 = y_0 \in [a, b]$, qual das opções seguintes é correta

a. A sucessão x_n tem ordem de convergencia $p > 1$

b. A sucessão x_n converge mais rapidamente que y_n

c. A sucessão y_n converge mais rapidamente que x_n

d. A sucessão y_n tem ordem de convergencia $p > 1$

Resposta c.

Questão 5

Considere a matrix A do sistema de equações lineares $AX = B$ com $a \in \mathbb{R}$ e $X, B \in \mathbb{R}^3$. De forma a garantir a vonvergência do método de Gauss-Siedel para a solução de $AX = B$, qual dos seguintes valores pode ser assumido por a?

$$\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} a/2 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -a \\ 0 & -3 & a \end{bmatrix}}$$

a. 4

b. 5.5

c. -3

d. 8

Resposta (6)

Finding a bounds

$$a \left\{ \begin{array}{ll} |a/2| & > |-2| + 0 \\ 7 & > 0 + |-a| \\ |a| & > 0 + |-3| \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} |a| & > 4 \\ |a| & < 7 \\ |a| & > 3 \end{array} \right\} = 4 < |a| < 7$$

Closest option

$$a = 5.5 \tag{6}$$

Questão 6

Seja f uma função da qual se conhece a seguinte tabela de valores

x	-1	0	1
$f(x)$	10	3	7

Q6 a.

Construa uma tabela de diferenças divididas e o correspondente polinómio de Newton interpolador de f na tabela dada. Determine um valor aproximado de $f(-0.5)$ (Não necessita apresentar o polinómio na forma simplificada).

Resposta Tabela 1, (7)

Construindo tabela de diferencas divididas

x_i	$f(x_i)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$
-1	10		
		-7	
0	3		$11/2$
		4	
1	7		

Tabela 1: Diferencas divididas Q6 a.

Calculando valor aproximado $f(-0.5)$

$$f(-0.5) \approx p_2(-0.5) = 10 + (-0.5+1)(-7 - 0.5 * 11/2) = 5.125;$$

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2] =$$

using table 1

$$= 10 + (x - (-1))\ -7 + (x - (-1))(x - 0)\, 11/2 =$$

$$= 10 + (x+1)(-7 + x\, 11/2) \tag{7}$$

Q6 b.

Sabendo que $f^{(3)}(x) = 12$, determine um majorante do erro absoluto para a aproximação de $f(-0.5)$ obtida em Q6 a..

Resposta (8)

Calculating error

$$
\begin{aligned}
&|f(-0.5) - p_2(-0.5)| = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{using (9)} \\
&= 2|(-0.5 - (-1))(-0.5 - 0)(-0.5 - 1)| = \\
&= 0.75
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Finding error formula

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{abs} = |f(x^*) - p_2(x^*)| = \\
&= \left|(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2) f^{(3)}(\theta)/3!\right| = \\
&= |(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2) 12/6| = \\
&= 2|(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2)|
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Questão 7

Considere a seguinte tabela relativa a uma função f

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-5	-6	k	22

Com $k \in \mathbb{R}$ e $I = \int_{-1}^{3} f(x)\ \mathrm{d}x$. Sabe-se que f é uma função do tipo $a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e$ em que $a = 1$ e $b, c, d, e \in \mathbb{R}$

Q7 a.

Determine uma aproximação de I usando a regra de Simpson simples.

Resposta (10)

$$I \approx \hat{I}_S \approx \frac{h}{3}\,(f_0 + 4\,f_2 + f_4) =$$

$$h = (3 - (-1))/3 = 2$$

$$= \frac{2}{3}\,(-2 + 4\,(-6) + 22) = -\frac{8}{3}$$

(10)

Q7 b.

Determine uma aproximação de I usando a regra de Simpson composta em função de k.

Resposta (11)

Finding approximation

$$
\begin{aligned}
I \approx \hat{I} = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{j=1}^{n} f(x_{2j-1}) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2j}) + f(x_{2n})\right) = \\
h = \tfrac{3-(-1)}{2n} = 4/4 = 1 \\
= \frac{1}{3}(f(x_0) + 4\,(f(x_1) + f(x_3)) + 2\,(f(x_2)) + f(x_4)) = \\
= \frac{1}{3}(-2 + 4\,(-5 + k) + 2\,(-6) + 22) = \\
= k\,4/3 - 4
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Q7 c.

Usando as alineas anteriores determine k

Resposta (12)

Encontrando valor de k

$$I \approx \hat{I}_c + \varepsilon_{I,c} =$$

$$\text{formula error simson composta e usando (11)}$$

$$= k\,4/3 - 4 - n\,\frac{h^5}{90}\,f^{(4)}(\sigma) =$$

$$f^{(4)}(x) = 4! = 24$$

$$= k\,4/3 - 4 - 2\,\frac{1^5}{90}\,24 = k\,4/3 - \frac{68}{15} =$$

$$= \hat{i}_s + \varepsilon_{I,s} \approx$$

$$\text{formula erro simpson simples e usando (10)}$$

$$\approx (-8/3) - \frac{h^5}{90}\,f^{(4)}(\xi) =$$

$$f^{(4)}(x) = 4! = 24$$

$$= -8/3 - \frac{2^5}{90}\,24 = -\frac{56}{5} \implies$$

$$\implies k = \frac{3}{4}\left(-\frac{56 * 3}{5 * 3} + \frac{68}{15}\right) = \frac{3}{4}\left(-\frac{100}{15}\right) = -5 \tag{12}$$

Questão 8

Considere a equação $1 - x - \sin(x) = 0$ a qual tem uma única solução α no intervalo $[0.1, 1]$.

Q8 a.

Prove que α é o ponto fixo de $\varphi(x) = 1 - \sin(x)$

Resposta

$$\varphi(\alpha) - \alpha = 1 - \sin(\alpha) - \alpha =$$

α∈I

$$= 0 \implies \varphi(\alpha) = \alpha, \alpha \in I$$

α é ponto fixo de $\varphi(x)$

Q8 b.

Prove que a sucessão $x_n = \varphi(x_{n-1}), n = 1, 2, \ldots$ em que $x_0 = 0.5$ converge para α.

Resposta x_n converges to α

Condições de convergencia do metodo do ponto fixo:

1. $\varphi(x), \varphi'(x)$ é continua no intervalo I
2. $\varphi(x) \in I, \forall\, x \in I$
3. $|\varphi'(x)| \leq \lambda < 1, \forall\, x \in I$

Checking condition 3

$$|\varphi'(x)| = |-\cos(x)| = \underset{x \in [0.1, 1]}{=} \cos(x) \leq \cos(0.1) \cong 0.995 < 0.996 = \lambda < 1 \tag{13}$$

condition 3 is verified

Checking condition 1

$$\varphi(1) = 1 - \sin(1) \cong 0.159 \in [0.1, 1] = I;$$
$$\varphi(0.1) = 1 - \sin(0.1) \cong 0.900 \in [0.1, 1] = I;$$
$$\varphi'(x) = -\cos(x) \underset{\cos(x) > 0, \forall\, x \in [0.1, 1]}{<} 0 \implies \varphi(x_1) > \varphi(x_2)\,\forall\,(x_1, x_2) \in I : x_1 < x_2$$

$\varphi(x)$ é extritamente decrescente e $\varphi'(x)$ é continua em I

Q8 c.

Determine x_2. Quantas casas decimais significativas pode garantir para x_2. Justifique

---

Resposta (14)

Finding x_2 by sucession

$$x_2 = \varphi(x_1) \cong \varphi(0.521) = 1 - \sin(0.521) \cong 0.503; \tag{14}$$
$$x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(0.5) = 1 - \sin(0.5) \cong 0.521 \tag{15}$$

Finding uncertainty

$$\varepsilon_{x_2} = |\alpha - x_2| \leq$$

Error a posteriori

$$\leq \frac{\lambda}{1-\lambda}|x_2 - x_1| \cong$$

using (13) (14) (15)

$$\cong \frac{0.996}{1-0.996}\,|0.503 - 0.521| \cong 4.470 < 5\,\mathrm{E}^{-1+1}$$

Não tem casas decimais significativas

Questão 9

Considere o sistema de equações lineares $AX = B$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} \end{bmatrix}$$

Nota: Em todas as alíneas utilize 3 casas decimais convenientemente arredondadas.

Q9 a.

Obtenha a matriz de iteração para o método de Jacobi e com base nessa matriz verifique a convergencia da sucessão definida pelo mesmo método para a solução $AX = B$

Resposta

Checando convergencia

$$\|G_J\|_\infty = \qquad \text{using (16)}$$

$$= \left\|\begin{matrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.2 \\ -0.25 & 0.5 & 0 \end{matrix}\right\|_\infty = \max(0.5, 0.8, 0.75) = 0.8 < 1$$

Converge para a solução de $AX = B$

Método de Jacobi

$$G_J = -D^{-1}(L+U) = \qquad \text{using (17) (18)}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & +1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & +1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.2 \\ -0.25 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

Matrizes do método de Jacobi

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right. \qquad (17)$$

$$-D^{-1} = -\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2-5+4} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & +1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/ \end{bmatrix} \qquad (18)$$

Q9 b.

Considerando como aproximação inicial

$$\boldsymbol{X^{(0)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}^{\boldsymbol{T}}$$

obtenha $X^{(2)}$

Resposta (19)

Encontrando $X^{(2)}$

$$X^{(2)} = G_J X^{(1)} + H_J = \qquad \text{using (16)(20)}$$

$$= \cdots = \begin{bmatrix} 0.365 \\ 0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix}; \qquad (19)$$

$$X^{(1)} = G_J X^{(0)} + H_J = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Encontrando H_J

$$H_J = D^{-1} B = \qquad \text{using (18)}$$

$$= \cdots = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.4 \\ -0.25 \end{bmatrix} \qquad (20)$$

Q9 c.

Sabendo que

$$\boldsymbol{X^{(9)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.372} \\ \mathbf{-0.270} \\ \mathbf{-472} \end{bmatrix}; \qquad \boldsymbol{X^{(10)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.365} \\ \mathbf{-0.271} \\ \mathbf{-0.478} \end{bmatrix}$$

São iteradas obtidas por aplicação do método de jacobi com 3 casas decimais davidamente arredondadas, quantas casas decimais significativas pode garantir $X^{(10)}$? Justifique

Resposta

$$X^{(10)} - X^{(9)} = \begin{bmatrix} -0.007 \\ -0.001 \\ -0.006 \end{bmatrix};$$

$$\left\|X^{(10)} - X^{(9)}\right\|_\infty = 0.007;$$

$$\left\|X^* - X^{(10)}\right\|_\infty \leq \frac{\|G\|_\infty}{1 - \|G\|_\infty} \left\|X^{(10)} - X^{(9)}\right\|_\infty =$$

$$= \frac{0.8}{1 - 0.8} * 0.007 = 0.028 < 0.5\,\mathrm{E}^1$$

$\therefore$ Garante pelo menos 1 casa decimal

Q9 d.

Sabendo que a solução exata do sistema é

$$\boldsymbol{X^*} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.36} & \mathbf{-0.28} & \mathbf{-0.48} \end{bmatrix}^{\boldsymbol{T}}$$

Determine o erro relativo associado a cada componente de $X^{(10)}$

Resposta

$$r_{x^*} = \frac{|x^* - \tilde{x}|}{|x^*|} \begin{cases} r_{x_1^*} = \frac{|0.36 - 0.365|}{|0.36|} \\ r_{x_2^*} = \frac{|-0.28 + 0.271|}{|-0.28|} \\ r_{x_3^*} = \frac{|-0.48 + 0.478|}{|-0.48|} \end{cases}$$

Q9 e.

Obtenha a matriz de iteração para o método de Jacobi e com base nessa matriz verifique a convergência da sucessão definida pelo mesmo método para a solução de $AX = B$.

Resposta

$$\|G_J\| < 1 : G_J = -D^{-1}(L+U) :$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies G_J = -\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 3/5 & 0 & 1/5 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \implies$$

$$\implies \|G_J\| = \max(0.5, 0.8, 0.75) = 0.8 < 1 \therefore \text{o método converge}$$

Q9 f.

Considerando como aproximação inicial $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ obtenha $X^{(3)}$.

Resposta

$$H_J = D^{-1}\,B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.4 \\ -0.25 \end{bmatrix};$$

$$X^{(1)} = G_J\,X^{(0)} + H_J =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 3/5 & 0 & 1/5 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.4 \\ -0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$X^{(2)} = G_J\,X^{(1)} + H_J =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 3/5 & 0 & 1/5 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.4 \\ -0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix};$$

$$X^{(3)} = G_J\,X^{(2)} + H_J =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 3/5 & 0 & 1/5 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.2 \\ -0.3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.4 \\ -0.25 \end{bmatrix} = \dots$$