AM 2C – 02/11/22 - Teste 2 Resolução

Felipe B. Pinto 61387 – MIEQB

25 de outubro de 2023

Conteúdo

Grupo I

Questão 1

Seja E um espaço vectorial onde está definido um produto interno notado com o símbolo $|$ e seja $\|\cdot\|$ a norma induzida pelo produto interno. Apenas uma das seguintes afirmações é verdadeira. Indique qual.

Nota: No que segue u,v são elementos arbitrários de E

1. $\|u+v\| < |u| + |v|$
2. se $u \neq 0$, $\|u\| + \|-u\| = 0$
3. $(\lambda\, u|v) = |\lambda|\,(u|v), \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$
4. se $u \neq 0 \wedge v = \frac{u}{\|u\|} \implies u|v = 1$
5. se $\|u\| = \|v\| = 1 \implies \|u+v\| = 2$
6. se $\|u\| = 1 \implies -\|v\| \leq (u|v) \leq \|v\|$

Resposta

Grupo II

Questão 1

Considere a função real g, de duas variáveis reais, defenda por

$$g_{(x,y)} = \begin{cases} \frac{x^4\,\cos(2\,x) - 2\,x^2\,y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Q1 a.

Montre, por definiçao, que *g(x,y)* é continua em (0,0).

Resposta

$$\forall\, \delta > 0\, \exists \epsilon > 0 : (x,y) \neq 0 \wedge \sqrt{x^2+y^2} < \epsilon \implies$$
$$\implies |g(x,y) - 0| = \left| \frac{x^4\,\cos(2\,x) - 2\,x^2\,y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right| =$$
$$= \frac{x^4\,|\cos(2\,x)| + 2\,x^2\,y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \leq$$
$$\leq \frac{x^4 * 1 + 2\,x^2\,y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} =$$
$$= \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} =$$
$$= (x^2+y^2)^{1/2} < \epsilon = \delta \implies$$
$$\implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0)$$

$\therefore g$ é continua em $(0,0)$

Q1 b.

Determine, por definição, $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

Resposta

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4\,\cos(2\,h) - 2\,h^2\,0^2}{(h^2+0^2)^{3/2}} - 0}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^4\,\cos(2\,h)}{h\,|h|^3} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^4\,\cos(2\,h)}{h\,|h|^3} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}\,\cos(2\,h) =$$
$$= \lim_{h\to 0} \operatorname{sgn}(h)\,\cos(2\,h) = \operatorname{sgn}(h) \neq$$

$$\neq \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0,h) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0^4\,\cos(2*0) - 2*0^2\,h^2}{(0^2+h^2)^{3/2}} - 0}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h\,|h|^3} = 0$$

Q1 c.

Estude a diferenciabilidade em g no ponto (0,0).