Resolução do 1º Teste de Análise Matemática II-C

Grupo I

1 - A parábola com foco em $(2,0)$ e recta directriz $x = -2$, e a elipse com centro em $(0,1)$, foco em $(\sqrt{7},1)$ e vértice em $(4,1)$ admitem, respectivamente, as seguintes equações:

☒ $x = \frac{y^2}{8}$ e $9x^2 + 16(y-1)^2 = 144$ ☐ $x = 8y^2$ e $9x^2 + 16(y-1)^2 = 144$

☐ $x = \frac{y^2}{8}$ e $9x^2 + (y-1)^2 = 144$ ☐ $x = 8y^2$ e $9x^2 + (y-1)^2 = 144$

☐ $x = \frac{y^2}{8}$ e $9x^2 + (y-1)^2 = 36$ ☐ $x = 8y^2$ e $9x^2 + (y-1)^2 = 36$

*Respo*sta: Se a parábola tem foco em $(2,0)$ e recta directriz $x = -2$, o seu centro é o ponto $(0,0)$. A distância do foco ao centro é $p = 2$. Como a parábola tem por equação $4px = y^2$, então $x = \frac{y^2}{8}$.
Se a elipse tem vértice em $(4,1)$ e foco em $(\sqrt{7},1)$, o eixo maior é paralelo ao eixo dos xx. A distância do centro ao vértice é $a = 4$ e a distância do foco ao centro é $c = \sqrt{7}$. Como o seu centro é $(x_0, y_0) = (0,1)$ e a equação canónica é da forma

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

com $a^2 = b^2 + c^2$, a elipse tem por equação

$$\frac{x^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1,$$

ou equivalentemente

$$9x^2 + 16(y-1)^2 = 144. \qquad \square$$

2 - Considere-se as seguintes funções reais de variável real:

$$f(x,y) = \frac{yx^3}{y+x^3}, g(x,y) = \frac{sen(x^2+y^2)}{e^{\frac{1}{x^2+y^2}}}, h(x,y) = \frac{2x+y}{x-y}.$$

Relativamente ao limite de cada uma delas no ponto $(0,0)$ tem-se que:

☐ **f e g têm limite zero, e h não tem limite.**
☐ **f e g têm limite zero, e h tem limite 2.**
☐ **f e g têm limite zero, e h tem limite -1.**
☐ **f tem limite zero, h tem limite 2 e o limite de g é infinito**

☐ **f e h não têm limite e o limite de g é infinito.**
☒ **f e h não têm limite e o limite de g é zero.**

*Respo*sta: Fazendo $y = x^6 - x^3$, na função $f(x, y)$, vem que $\lim\limits_{x\to 0} f(x, x^6 - x^3) = -1$; mas fazendo $y = 0$ vem que $\lim\limits_{x\to 0} f(x, 0) = 0$; portanto f não tem limite em $(0, 0)$.
De $x^2 + y^2 \to 0$ vem que $e^{\frac{1}{x^2+y^2}} \to \infty$. Como $sen(x^2 + y^2)$ é uma função limitada, tem-se que g tem limite 0 em $(0, 0)$.
Calculando limites iterados

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0}\frac{2x+y}{x-y}\Big) = 2 \neq -1 = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0}\frac{2x+y}{x-y}\Big)$$

conclui-se que h não tem limite em $(0, 0)$. ☐

3 - Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\boldsymbol{f(x, y) = (3x - y^2, x^3 - 3y^2) = (u, v),}$$

que é invertível numa vizinhança do ponto $(1, 1)$. Tem-se que:

☐ $\frac{\partial x}{\partial u}(2, -2) = \frac{\partial x}{\partial v}(2, -2)$ ☐ $\frac{\partial x}{\partial u}(2, -2) = \frac{\partial y}{\partial u}(2, -2)$.
☐ $\frac{\partial x}{\partial u}(2, -2) = -\frac{\partial x}{\partial v}(2, -2)$ ☐ $\frac{\partial y}{\partial u}(2, -2) = \frac{\partial y}{\partial v}(2, -2)$.
☒ $\frac{\partial y}{\partial u}(2, -2) = -\frac{\partial y}{\partial v}(2, -2)$ ☐ $\frac{\partial x}{\partial v}(2, -2) = \frac{\partial y}{\partial v}(2, -2)$

Resposta: Tem-se que

$$J_{f^{-1}}(2, -2) = J_{f^{-1}}(f(1, 1)) = (J_f(1, 1))^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2y \\ 3x^2 & -6y \end{bmatrix}^{-1}_{(1,1)}$$ ☐

$$= \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-18-(-6)}\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{12} & -\frac{2}{12} \\ \frac{3}{12} & -\frac{3}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

4 - A equação

$$\boldsymbol{x^4 + y^4 + (x+1)e^z + 8x\mathrm{sen}(z) - 4 = 0}$$

define z como função de x e de y numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$. Então:

☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1, -1) = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1, -1) = \frac{2}{5}$
☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1, -1) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1, -1) = -\frac{2}{5}$

☒ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = \frac{2}{5}$

☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = \frac{1}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = 2$

☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = 2$

☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = -2$

Resposta: Seja $f(x,y) = x^4 + y^4 + (x+1)e^z + 8x\text{sen}(z) - 4$. Tem-se que:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,0)} = -\frac{(4x^3 + e^z + 8\text{sen}(z))_{(1,-1,0)}}{((x+1)e^z + 8x\cos(z))_{(1,-1,0)}} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,0)} = -\frac{4y^3_{(1,-1,0)}}{((x+1)e^z + 8x\cos(z))_{(1,-1,0)}} = \frac{2}{5}.$$

☐

5 - Sejam g e h duas funções reais e de classe C^1 em $\mathbb{R}$. Considere a função $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x,y,z) = \left(x\,g\left(\frac{x}{z}\right), h(x^2y)\right).$$

Determine a matriz jacobiana de f no ponto $(-1,0,-1)$ em função das derivadas de g e de h.

☐ $\begin{bmatrix} g(1) & 0 & -g'(1) \\ 0 & h'(0) & 0 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} g(1) + g'(1) & 0 & g'(1) \\ 0 & h'(0) & 0 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} g(1) & 0 & -g'(1) \\ 0 & h'(1) & 0 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} g(1) - g'(1) & 0 & g'(1) \\ 0 & h'(0) & 0 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} g(1) & 0 & g'(1) \\ 0 & h'(1) & 0 \end{bmatrix}$

☒ $\begin{bmatrix} g(1) + g'(1) & 0 & -g'(1) \\ 0 & h'(0) & 0 \end{bmatrix}$

Resposta: A matriz pedida é

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g\left(\frac{x}{z}\right) + xg'\left(\frac{x}{z}\right)\frac{1}{z} & 0 & xg'\left(\frac{x}{z}\right)\left(-\frac{x}{z^2}\right) \\ h'(x^2y)2xy & h'(x^2y)x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

que no ponto $(1,0,1)$ é igual a $\begin{bmatrix} g(1) + g'(1) & 0 & -g'(1) \\ 0 & h'(0) & 0 \end{bmatrix}$. ☐

Grupo II

1. Considere a função real g, de duas variáveis reais, definida por

$$\boldsymbol{g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}}$$

a) Estude, por definição, a continuidade de $g(x,y)$ em $(0,0)$.

b) Determine $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

c) Estude a diferenciabilidade de g no ponto $(0,0)$.

Resposta: (a) A função será contínua no ponto $(0,0)$ se tiver limite neste ponto e o valor for zero. Mostremos que, de facto, o limite no ponto considerado é zero. Mostremos que

$$\forall\,\delta>0\,\exists\,\epsilon<0:(x,y)\neq(0,0)\wedge\sqrt{x^2+y^2}<\epsilon\Rightarrow\ |\,g(x,y)-0\,|<\delta.$$

Tem-se

$$\Big|\frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}\Big|\leq|x|\frac{x^2+3y^2}{x^2+y^2}\leq|x|\frac{3x^2+3y^2}{x^2+y^2}=3|x|\leq3\sqrt{x^2+y^2}<3\epsilon.$$

Basta agora considerar $\epsilon=\dfrac{\delta}{3}$. Conclui-se então que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}=0$ e $g(x,y)$ é contínua em $(0,0)$.

(b) Tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)&=\lim_{h\to0}\frac{g(h,0)-g(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h-0}{h}=1\\ \frac{\partial g}{\partial y}(0,0)&=\lim_{h\to0}\frac{g(0,h)-g(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0.\end{aligned}$$

(c) A função será diferenciável em $(0,0)$ se

$$g(h,k)-g(0,0)=\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)h+\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)k+\epsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2},$$

com $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)}\epsilon(h,k)=0$. Tem-se que

$$\frac{h^3-3hk^2}{h^2+k^2}=h+\epsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2},$$

e daqui vem que $\epsilon(h,k)=\dfrac{-\,4hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$. Mostremos que a função $\epsilon(h,k)$ não tem limite 0 no ponto $(0,0)$. Fazendo, por exemplo, $h=k\to0,k>0$ vem que

$$\lim_{k\to0,k>0}\epsilon(k,k)=\lim_{k\to0}\frac{-\,4k^3}{2k^2\sqrt{2k^2}}=\ -\sqrt{2}$$

e portanto g não é diferenciável em $(0,0)$. □

2. Considere a função real f de duas variáveis reais, definida por

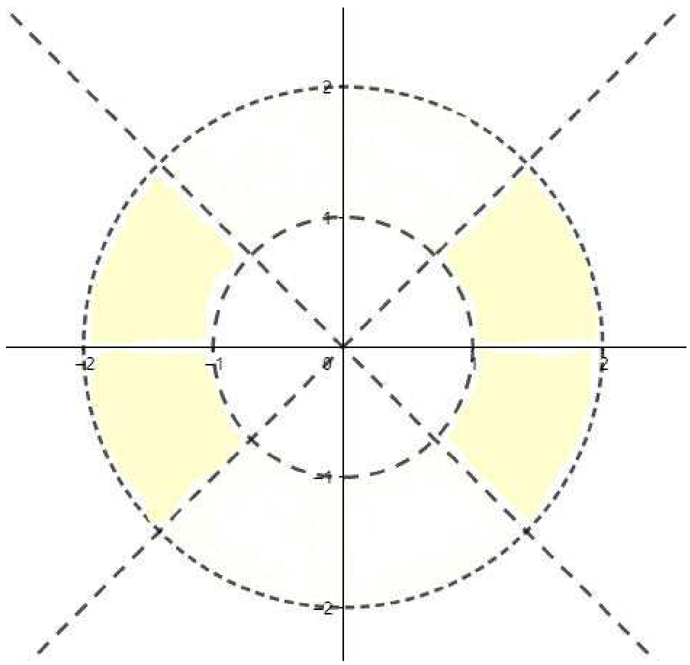
$$f(x,y) = \frac{\log(x^2+y^2-1)\log(x^2-y^2)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

Indique o seu domínio D e esboce-o. Caracterize $int(D)$ usando coordenadas polares. Diga, justificando, se D é um conjunto aberto ou fechado.

Resposta: Tem-se

$$\begin{aligned}\text{Dom } f = D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-1>0 \wedge x^2-y^2>0 \wedge 4-x^2-y^2>0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2-y^2>0 \wedge 1<x^2+y^2<4\}.\end{aligned}$$

O seu gráfico é o seguinte:



Como $D = int(D)$, é um conjunto aberto. Usando coordenadas polares podemos escrever o conjunto na forma

$$D = \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty[\times [-\pi,\pi[: 1<\rho<2 \wedge -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$
$$\cup \left\{(\rho,\theta) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi[: 1<\rho<2 \wedge \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}\right\}.$$ □

Grupo III

1 - (a) Considere a função

$$\begin{aligned} f : D \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\to x^2+xy+y^2. \end{aligned}$$

Calcule os extremos locais de $f(x,y)$ quando $D=\mathbb{R}^2$.

(b) No conjunto $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ a função $f(x,y)$ admite mínimo e máximo absolutos. Escreva a função lagrangiana associada a este problema e determine os referidos extremos.

Resolução: $a)$ Em primeiro lugar calculamos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=2x+y=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y+x=0 \end{cases}$$

isto é,

$$y=-2x \wedge x=-2y$$

donde $y=4y \Leftrightarrow y=0 \wedge x=0$. O único ponto crítico é o $(0,0)$.

Como $Det\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix}=Det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=3$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)=2>0$ conclui-se que se trata de um mínimo local.

b) A função lagrangiana é $L=f+\lambda g=x^2+xy+y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$. Resolvemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+\lambda(2x)=0 \\ 2y+x+\lambda(2y)=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\lambda+1)2x+y=0 \\ (\lambda+1)2y+x=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2(\lambda+1)(x-y)=(x-y) \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \vee \lambda=-\frac{1}{2} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Se $\lambda=-\frac{1}{2}$ conclui-se de $(\lambda+1)2x+y=0$ que $x+y=0$ e de $(\lambda+1)2y+x=0$ que $y+x=0$. Em ambos os casos obtemos $x=-y$.

Daqui se conclui que os pontos críticos são

$$P_1=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ e } P_4=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Tendo em conta que $f(x,y)$ admite extremos em D estes serão atingidos em P_1, P_2, P_3 e P_4. Como se tem que $f(P_2)=f(P_3)=\frac{1}{2}$ e $f(P_1)=f(P_4)=\frac{3}{2}$, os pontos P_2 e P_3 são minimizantes e os pontos P_1 e P_4 são maximizantes. □

Grupo IV

1 - Determine os pontos da superfície de equação $x^2+2y^2-3z^2=1$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano de equação $3x-2y+3z=1$.

Resposta: A equação do plano tangente à superficie considerada num ponto genérico (x_0, y_0, z_0) é

$$(x - x_0)2x_0 + (y - y_0)4y_0 + (z - z_0)(-6z_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0x + 4y_0y - 6z_0z = 2x_0^2 + 4y_0^2 - 6z_0^2.$$

Portanto um vector normal num ponto genérico (x_0, y_0, z_0) será $(2x_0, 4y_0, -6z_0)$, que será paralelo ao vector $(3, -2, 3)$ se

$$\frac{2x_0}{3} = \frac{4y_0}{-2} = \frac{-6z_0}{3} = k.$$

Então

$$(2x_0, 4y_0, -6z_0) = k(3, -2, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 = 3k \\ 4y_0 = -2k \\ -6z_0 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 = 3k \\ 2y_0 = -k \\ 2z_0 = -k. \end{cases}$$

Como o ponto (x_0, y_0, z_0) pertence à superfície vem que

$$\left(\frac{3k}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{k}{2}\right)^2 - 3\left(-\frac{k}{2}\right)^2 = 1$$

e daqui vem que

$$9k^2 + 2k^2 - 3k^2 = 4 \Leftrightarrow 8k^2 = 4 \Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Então os pontos são $\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ e $\left(-\frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. $\square$