ANÁLISE MATEMÁTICA III C

13ªsemana de aulas

NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY

Cláudio Fernandes

caf@fct.unl.pt

Slides para acompanhamento das aulas TP1 e TP4

O material completo do Prof. João de Deus Marques encontra-se no CLIP, na página da UC

Princípio da sobreposição de soluções

Suponhamos que $u_1, u_2, \cdots, u_n$ são n soluções de uma equação com derivadas parciais linear homogénea, e com condições de fronteira também homogéneas. Então a função

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i,$$

com c_1, c_2,...,u_n constantes arbitrárias, também é solução da equação e verifica as condições de fronteira consideradas.
Se $u_1, u_2, \cdots, u_n, \ldots$ são uma infinidade numerável de soluções de uma equação com derivadas parciais linear homogénea, e com condições de fronteira também homogéneas assumiremos "formalmente" que a equação admite uma solução da forma

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i.$$

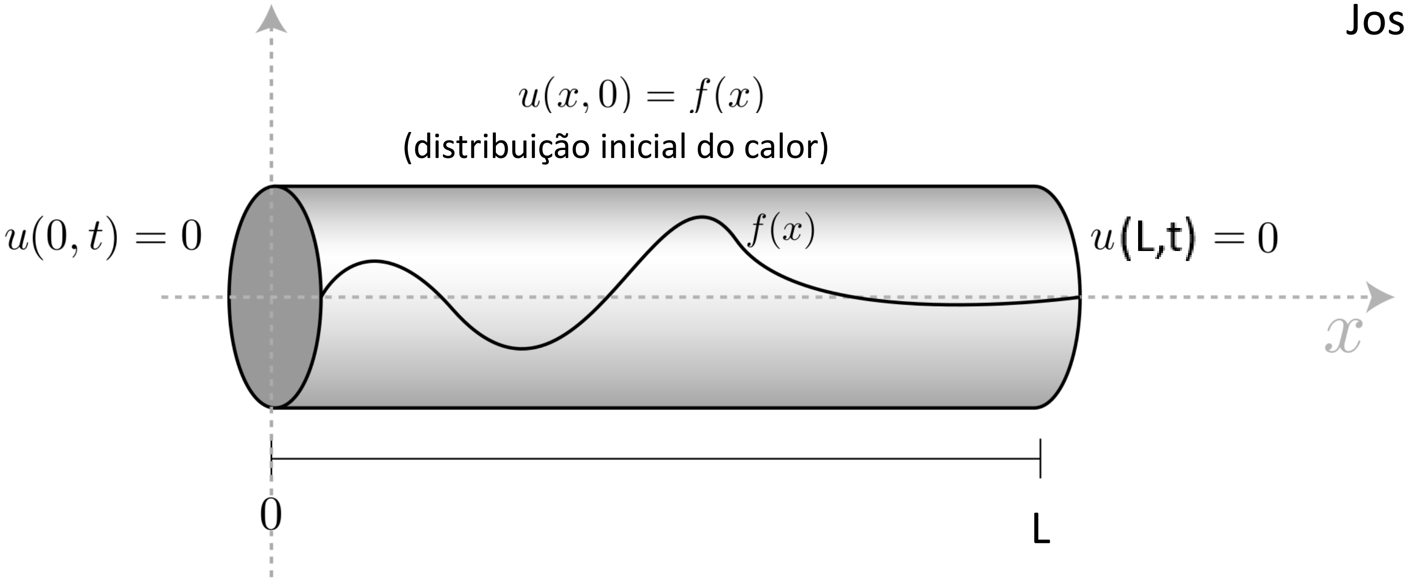
A equação do calor (unidimensional)

Hoje a análise de Fourier é uma das técnicas matemáticas com maior número de aplicações práticas.

Joseph Fourier

1768-1830

Teoria Analítica do Calor



A equação do calor (unidimensional)

Considere-se um fio (ou uma barra estreita) de comprimento $L > 0$ e forma cilíndrica de um material homogéneo e de secção constante, orientada segundo o eixo dos XX. Suponhamos que se encontra lateralmente isolada (isto é, não há trocas de calor com o exterior) excepto nas extremidades. Suponhamos ainda que o calor se propaga apenas na direcção do eixo dos XX e é constante em cada secção circular. A função $u(x, t)$ que descreve a propagação do calor ao longo da barra, isto é que dá o valor da temperatura no ponto de abcissa x no instante t, obedece à equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

em que c é uma constante não nula, que depende da condutividade térmica, do calor específico e da massa específica do material que constitui a barra.

Pretendem-se soluções não triviais da equação supondo que os extremos da barra se encontram à temperatura zero, isto é, com as condições de fronteira

$$u(0,t) = 0, u(L,t) = 0, \ t > 0.$$

Supõe-se também que a temperatura em cada ponto de abcissa x no instante $t = 0$ é dada pela função $f(x)$ isto é, considera-se a condição inicial

$$u(x,0) = f(x), \ x \in]0, L[.$$

Tal como na equação das ondas, iremos resolver esta equação seguindo o *Método de Fourier.*

Iremos resolver esta equação seguindo o *Método de Fourier*, que pode ser esquematizado nos três seguintes passos:

1. Utilizando o método de separação das variáveis, isto é, admitindo-se que a equação tem soluções da forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$ obtêm-se duas equações diferenciais lineares ordinárias.
2. Resolvem-se as equações obtidas no ponto anterior com as condições resultantes das condições homogéneas do problema inicial.
3. Aplicando o princípio da sobreposição de soluções obtém-se uma solução "formal" da equação satisfazendo também as condições não homogéneas.

Passemos à resolução da equação seguindo os passos indicados:

1. Aplicando o método de separação de variáveis, admitem-se soluções da forma

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

que conduzem à equação

$$X(x)T'(t) = c^2 X''(x)T(t).$$

Separando as variáveis nesta última equação vem

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = k$$

(k constante) obtendo-se as equações

$$X''(x) - kX(x) = 0 \quad \text{e} \quad T'(t) - c^2 kT(t) = 0.$$

2 Procedendo de forma análoga à efetuada no segundo passo da resolução da equação das ondas, as condições de fronteira

$$u(0,t) = 0 \;\text{ e }\; u(L,t) = 0, \;\; t > 0$$

conduzem às condições

$$X(0) = 0 \;\text{ e }\; X(L) = 0.$$

A solução do problema

$$X''(x) - kX(x) = 0, \;\; X(0) = 0 \;\text{ e }\; X(L) = 0$$

já foi determinada durante a resolução da equação da corda vibrante. Foi então visto que apenas para volores de k negativos se obtinham soluções não triviais. Fazendo $k = -\omega^2$, foi visto que $\omega = \dfrac{n\pi}{L}$ e foram obtidas as soluções

$$X_n(x) = b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), n \in \mathbb{N}.$$

Tendo em conta que $k = -\omega^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 < 0$, a segunda equação a resolver é

$$T'(t) + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 T(t) = 0.$$

Esta equação tem como equação característica

$$\alpha + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 = 0$$

donde

$$\alpha = -\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2,$$

pelo que

$$T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}.$$

Assim, com $c_n = a_n b_n$, obtêm-se as funções

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}.$$

3. Tal como na equação da corda vibrante as funções $u_n(x,t)$ satisfazem a equação diferencial e as condições homogéneas mas não satisfarão, em geral, a condição $u(x,0) = f(x)$. Utilizando uma vez mais o princípio da sobreposição de soluções considere-se a solução formal

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(c\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

e determinem-se as constantes c_n de forma a que a condição inicial

$$u(x,0) = f(x)$$

seja verificada, isto é

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=f(x).$$

Esta última igualdade verifica-se se as constantes c_n forem os coeficientes de Fourier da extensão ímpar e de período $2L$ da função $f(x)$, isto é, da função $F(x)$ definida por

$$F(x)=\begin{cases} -f(-x), & -L\leq x\leq 0 \\ f(x), & 0\leq x\leq L \end{cases} \quad \text{e } F(x)=F(x+2L)$$

(admitindo que $F(x)$ é soma da sua série de Fourier em senos, o que sucede, por exemplo, se em $[-L,L]$ a função $f(x)$ for contínua e $f'(x)$ seccionalmente contínua), isto é

$$c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx. \quad \blacksquare$$

Equação das ondas unidimensional (corda vibrante)

A equação usualmente designada por equação das ondas é uma equação que ocorre frequentemente em fenómenos envolvendo a propagação de ondas em meio contínuo (ondas acústicas, ondas eletromagnéticas, ondas sísmicas...). Provavelmente o caso mais simples de visualizar é o das ondas mecânicas. Considere-se uma corda perfeitamente elástica de comprimento L com massa homogénea, fixa sob tensão em dois pontos do eixo dos xx - digamos $x = 0$ e $x = L$. Suponhamos que a corda só descreve movimentos transversais no plano vertical de pequena amplitude, que a tensão a que está sujeita tem magnitude constante e é tal que permite desprezar a força da gravidade. Suponhamos que no instante $t = 0$ é exercida uma distorção na corda e, em seguida, esta é deixada a vibrar livremente. Seja $u(x, t)$ o deslocamento (deflexão) na vertical de cada ponto da corda medido a partir do eixo dos xx num instante $t > 0$.

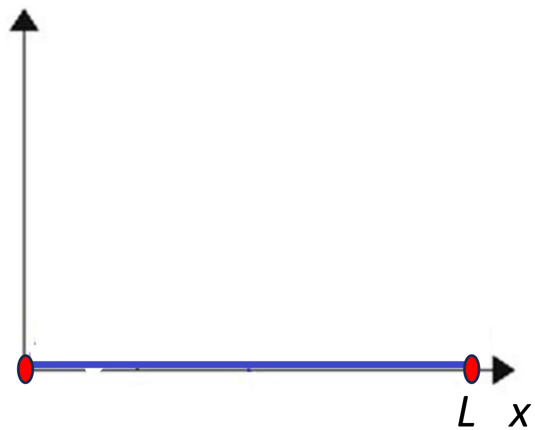


Figura 1 : Corda elástica em tenção fixa nas extremidades

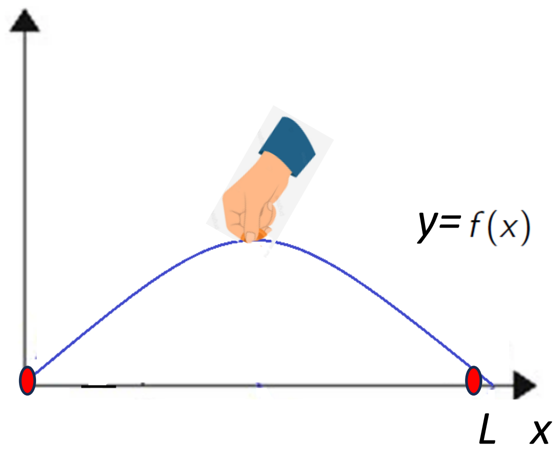


Figura 2 : No instante t=0 provocamos uma distorção na curva

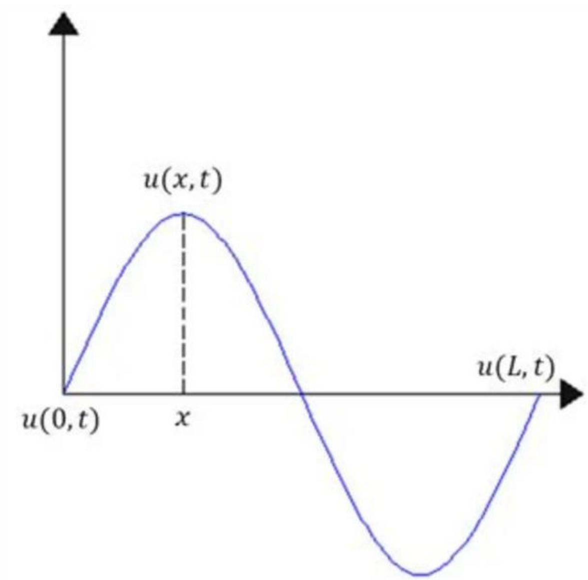


Figura 3 : A corda é depois deixada a vibrar

A equação a que $u(x, t)$ obedece é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \; t > 0$$

com $c^2 = T/\rho$ constante; T designa a magnitude da tensão e ρ a massa por unidade de comprimento.
Tendo em conta que a corda está fixa nos extremos têm-se as condições de fronteira:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Supondo que a função $f(x)$ que define a deflexão inicial é uma função contínua em $[0, L]$, que $f(0) = f(L) = 0$ e que a velocidade inicial é definida pela função $g(x) = 0$ para $x \in [0, L]$, obtêm-se as condições iniciais:

$$u(x, 0) = f(x) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L.$$

1. Admitindo que $u(x,t) = X(x)T(t)$ obtém-se por substituição na equação que

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t).$$

Esta equação pode ser escrita na forma

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = k, \quad k \ \text{constante}$$

uma vez que $\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ é apenas função de x, e $\dfrac{T''(t)}{T(t)}$ é apenas função de t. Obtém-se as duas equações diferenciais homogéneas de segunda ordem

$$X''(x) - kX(x) = 0 \quad \text{e} \quad T''(t) - c^2 kT(t) = 0.$$

2. Pretende-se, em seguida, determinar soluções das equações diferenciais anteriores com as condições que resultam das condições homogéneas

$$u(0,t)=0 \;\text{ e }\; u(L,t)=0, \quad t\geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0, \quad 0\leq x\leq L$$

e que não conduzam à solução trivial $u(x,t)\equiv 0$.
A condição $u(0,t)=0,\; t\geq 0$ conduz a

$$X(0)T(t)=0,\; t\geq 0$$

o que permite concluir que

$$X(0)=0$$

uma vez que $T(t)=0,$ para todo o $t\geq 0$ conduz à solução trivial $u(x,t)\equiv 0$. De forma análoga se deduz que $X(L)=0$ e $T'(0)=0$.

Sendo assim pretende-se resolver o problema

$$X''(x) - kX(x) = 0, \quad X(0) = 0, \; X(L) = 0.$$

Trata-se de uma equação diferencial linear de segunda ordem de coeficientes constantes de equação característica

$$\alpha^2 - k = 0.$$

As soluções da equação vão ser distintas conforme a constante k seja zero, positiva ou negativa. Assim iremos resolver a equação considerando cada um destes casos.

Se $\boxed{k = 0}$ então $\alpha = 0$ é raiz dupla da equação característica e a equação tem como solução

$$X(x) = c_0 + c_1 x.$$

A condição $X(0) = 0$ implica que $c_0 = 0$ pelo que

$$X(x) = c_1 x;$$

como $X(L) = 0$ conclui-se que $c_1 = 0$. Então

$$X(x) \equiv 0$$

e $u(x, t)$ é a solução trivial.

Se $\boxed{k > 0}$ então $k = \omega^2$ e $\alpha = \pm\omega$. A equação tem por solução

$$X(x) = c_0 e^{\omega x} + c_1 e^{-\omega x}.$$

De $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ vem que

$$\begin{cases} c_0 + c_1 = 0 \\ c_0 e^{\omega L} + c_1 e^{-\omega L} = 0. \end{cases}$$

O determinante da matriz simples associada ao sistema é diferente de zero pelo que o sistema é possível e determinado. Assim admite apenas a solução $c_1 = c_2 = 0$ que conduz a $X(x) \equiv 0$ e consequentemente à solução trivial.

Se $\boxed{k < 0}$ então $k = -\omega^2$ e $\alpha = \pm\omega i$. A solução da equação é dada por

$$X(x) = c_0 \cos(\omega x) + c_1 \sin(\omega x).$$

De $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ vem que

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_0 \cos(\omega L) + c_1 \sin(\omega L) = 0, \end{cases}$$

ou equivalentemente

$$c_1 \sin(\omega L) = 0.$$

Se $c_1 = 0$ obter-se-ia, de novo, a solução trivial, pelo que

$$\sin(\omega L) = 0,$$

isto é

$$\boxed{\omega = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}.}$$

Tendo em conta a imparidade da função seno basta considerar apenas as soluções

$$\boxed{X_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), n \in \mathbb{N}.}$$

Considere-se agora o problema

$$\boxed{T''(t) - c^2 k T(t) = 0, \quad T'(0) = 0}$$

que com $k = -\omega^2$ toma a forma

$$T''(t) + c^2 w^2 T(t) = 0.$$

A sua equação característica é

$$\alpha^2 + c^2 w^2 = 0$$

cujas soluções são

$$\alpha = \pm c\,\omega i.$$

A equação diferencial tem por solução

$$T(t) = A\cos(c\,\omega t) + B\sin(c\,\omega t).$$

Da condição $T'(0) = 0$ conclui-se que $B = 0$, pelo que

$$T(t) = A\cos(c\,\omega t).$$

Tendo em conta que $\omega = \dfrac{n\pi}{L}$,

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{c\,n\pi}{L} t\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Assim são soluções da equação inicial e satisfazem as condições homogéneas as funções

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)\,T_n(t) \\ &= A_n^* \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{c\,n\pi}{L} t\right) \end{aligned}$$

onde $A_n^* = c_n A_n$.

3. É evidente que as funções $u_n(x,t)$ não satisfarão, em geral, a condição não homogénea $u(x,0) = f(x)$. Utilizando o princípio da sobreposição de soluções considere-se a solução formal

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right), \qquad (0.8)$$

e determinem-se as constantes A_n^* de forma a que a condição não homogénea $u(x,0) = f(x)$ também seja verificada. A verificar-se a condição $u(x,0) = f(x)$ ter-se-á que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin(\frac{n\pi}{L}x) = f(x).$$

Esta última igualdade verifica-se se

$$A_n^* = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \tag{0.9}$$

ou seja, se as constantes A_n^* forem os coeficientes de Fourier da extensão ímpar e de período $2L$ da função $f(x)$, isto é, da função

$$F(x) = \begin{cases} -f(-x), & -L \le x \le 0 \\ f(x), & 0 \le x \le L \end{cases} \quad \text{e } F(x) = F(x+2L) \tag{0.10}$$

(supondo que $F(x)$ é soma da sua série de Fourier em senos, o que sucede, por exemplo, se para além da continuidade de $f(x)$ já anteriormente exigida, $f'(x)$ for pelo menos seccionalmente contínua em $[0, L]$).
A solução formal do problema considerado é assim dada por (0.8) com os coeficientes dados por (0.9).

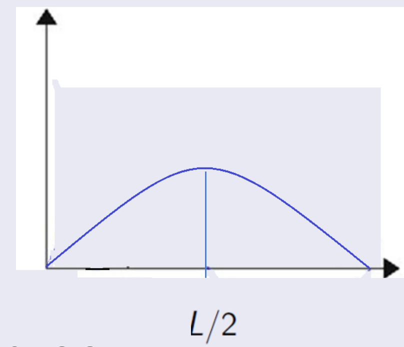
Exemplo

Pretende-se determinar a solução da equação da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

com as condições de fronteira $u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$ *e com velocidade e deflexão iniciais dadas respetivamente pelas funções* $g(x) = 0$ *e*

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq L/2 \\ L - x, & L/2 \leq x \leq L. \end{cases}$$



Calculados os coeficientes de Fourier de f , obtem-se

$$A^*_{2n} = b_{2n} = 0 \quad e \quad A^*_{2n-1} = b_{2n-1} = \frac{4L}{\pi^2} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}.$$

e portanto

Exemplo (continuação)

a solução do problema é dada por

$$u(x,t) = \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{c(2n-1)\pi t}{L}\right).$$


The End

NOVA
FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

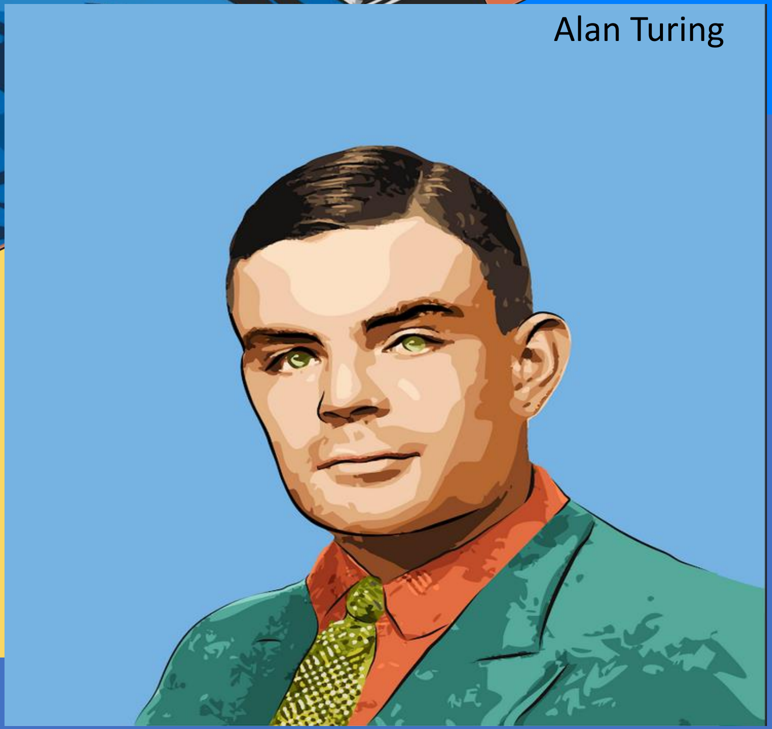
EXPO FCT 2025
30 Abril


Stephen Hawking

- Voluntários

- Partilhar o evento nas redes sociais (na altura certa)


Rosalind Franklin


Alan Turing

Coordenador: Cláudio Fernandes

NOVA
NOVA SCHOOL OF
SCIENCE & TECHNOLOGY

Conto convosco para realizarmos a maior EXPO FCT de sempre!