FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

EXERCÍCIOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA III-C

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E SUAS SOLUÇÕES. EQUAÇÕES AUTÓNOMAS

1. Verifique que cada uma das funções indicadas é solução da equação diferencial considerada.

a) $y(x) = e^{2x} \cos 3x, \quad y'' - 4y' + 13y = 0.$

b) $y(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + c_1 e^{-x^2}, \quad \dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1.$

2. Mostre que a equação $2x^2y - y^2 + 1 = 0$ define implicitamente uma solução da equação diferencial

$$(x^2 - y)\frac{dy}{dx} + 2xy = 0.$$

Determine explicitamente a solução que verifica a condição $y(0) = 1$.

3. Determine os valores de k para os quais:

a) $y(x) = e^{kx}$ é solução da equação diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

b) $y(x) = x^k$ é solução da equação

$$xy'' + 2y' = 0.$$

4. Em cada uma das seguintes equações autónomas determine os pontos de equilíbrio e represente o respetivo retrato de fase. Classifique os pontos críticos e represente graficamente os diferentes tipos de soluções em cada uma das regiões determinadas pelas soluções de equilíbrio.

a) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 3y, \qquad$ b) $\dfrac{dy}{dx} = (y-2)^4, \qquad$ c) $\dfrac{dy}{dx} = y^2(4 - y^2).$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM E EQUAÇÕES REDUTÍVEIS A LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM

5. a) Determine a solução geral da equação diferencial linear homogénea de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0.$$

b) Determine também a solução geral da equação diferencial linear de primeira ordem não homogénea

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = -x,$$

e ainda a sua solução que verifica a condição inicial $y(0) = \frac{3}{2}$.

(Resposta: a)$y = ce^{-x^2}$, b) $y = ce^{-x^2} - \frac{1}{2}$ e $y = 2e^{-x^2} - \frac{1}{2}$.

6. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem:

a) $\frac{dy}{dx} - (\tan x)y = \cos x, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

b) $y^2 dx - (2xy + 3)dy = 0$ (considere x como função incógnita e y variável independente)

(Resposta: a) $y = \sec x(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c)$, b) $x = cy^2 - \frac{1}{y}$.)

7. Determine a solução geral da equação

$$\frac{dz}{dx} + (-\frac{1}{x} + x)z = 0, \quad x > 0$$

e utilizando o método da variação das constantes arbitrárias determine a solução geral de

$$\frac{dz}{dx} + (-\frac{1}{x} + x)z = -x^2$$

(Resposta: $z = -x + cxe^{-\frac{x^2}{2}}, c \in \mathbb{R}$.)

8. a)Determine a solução geral da equação diferencial linear de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + (-\frac{1}{x} + 4)y = x, \quad x > 0.$$

b) Utilizando a substituição definida por $y = e^{4x}\int z dx$, determine a solução geral da equação

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - (4x+1)\frac{dy}{dx} + 4y = 0.$$

(Resposta: a) $y = \frac{x}{4} + cxe^{-4x}, c \in \mathbb{R}$ b) $y = c_1(x + \frac{1}{4}) + c_2e^{4x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)

9. a) Determine a solução geral da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{\sqrt{x}}y = 0, \quad x > 0.$$

b) Utilizando o método da variação das constantes arbitrárias determine a solução geral de

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{\sqrt{x}}y = 1, \quad x > 0.$$

(Sugestão: Calcule $\int e^{-2\sqrt{x}}dx$ efetuando a mudança de variável $x = u^2$.)

c) Mostre que efetuando a mudança de variável definida por $y = z^{-2}$ na equação de Bernoulli

$$\frac{dz}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{x}}z = -\frac{1}{2}z^3, \quad x > 0$$

esta se transforma numa equação diferencial linear de primeira ordem e determine a sua solução geral.

(Resposta: a) $y = ce^{2\sqrt{x}}$, b) $y = ce^{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} - \frac{1}{2}$, c) $z^2 = \frac{1}{ce^{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} - \frac{1}{2}}$)

10. Considere as seguintes equações diferenciais de primeira ordem não lineares.

a) Identifique a equação

$$2xyy' + (1+x)y^2 = e^x.$$

Indique uma mudança de variável que a permita transformar numa equação linear. Determine a solução geral da equação.

b) Identifique a equação

$$y' + xy^2 - (2x^2+1)y + x^3 + x - 1 = 0.$$

Sabendo que a função $y_1(x) = x$ é uma sua solução, indique uma mudança de variável que a permita transformar numa equação linear. Determine a solução geral da equação.

(Resposta: a) $y^2 = \frac{c}{xe^x} + \frac{e^x}{2x}$, b) $y = x + \frac{1}{ce^{-x} + x - 1}$)

11. Mostre que $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$ e $y_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$ são soluções particulares e linearmente independentes da equação

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

e indique justificando qual a sua solução geral. Usando o método da variação das constantes arbitrárias, determine a solução geral de

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$$

(Resposta: $y^* = \dfrac{c_1}{x} + \dfrac{c_2}{x^2}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, y = \dfrac{c_1}{x} + \dfrac{c_2}{x^2} + \dfrac{e^x}{x^2}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)

12. Utilizando o facto de $y_1(x) = e^x$ ser uma solução particular da equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

determine a sua solução geral. Determine utilizando pelo método da variação das constantes arbitrárias a solução geral da equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = e^x + e^{2x}.$$

(Resposta:
$y^* = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ \ y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x + \dfrac{x}{3} e^x + \dfrac{1}{4} e^{2x},\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$)

13. Utilizando a substituição definida por $y = x^2 z$ determine a solução geral da equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{6}{x^2} y = x, \quad x > 0.$$

Determine ainda a solução particular $y_1(x)$ que satisfaz $y_1(1) = 0$ e $y_1'(1) = 0$.

(Resposta: $y(x) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + x^3 \log x,\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,\ \ y(x) = -x^3 + x^2 + x^3 \log x$)

14. Determine o integral geral de cada uma das seguintes equações diferenciais lineares de coeficientes constantes:

a) $D^3(D+1)^2((D-5)^2+16)y=0,\quad$ (em que $D=\dfrac{d}{dx}$)

b) $(D^4-1)y=x^3-x+2,\quad$ (em que $D=\dfrac{d}{dx}$)

c) $y''+y=\cos x$

d) $y'''-3y'+2y=3e^x$

(Resposta: a) $y=c_0+c_1x+c_2x^2+(c_3+c_4x)e^{-x}+c_5e^{5x}\cos 4x+c_6e^{5x}\sin 4x$, b) $y=c_1e^{-x}+c_2e^x+c_3\cos x+c_4\sin x-x^3+x-2,\ \ c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$ c) $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\dfrac{1}{2}x\sin x,\ \ c_1,c_2\in\mathbb{R}$ d) $y=(c_1+c_2x)e^x+c_3e^{-2x}+\dfrac{1}{2}x^2e^x,\ \ c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$)

15. Determine a solução geral da equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes

$$D^2y-4Dy+5y=0$$

em que $D=\frac{d}{dx}$. Utilizando o método da variação das constantes arbitrárias determine a solução geral da equação

$$D^2y-4Dy+5y=\frac{e^{2x}}{\sin x}$$

(Resposta: $y^*=c_1e^{2x}\cos x+c_2e^{2x}\sin x,\ \ c_1,c_2\in\mathbb{R},\ \ y=c_1e^{2x}\cos x+c_2e^{2x}\sin x+e^{2x}(\sin x\, log\,|\sin x|-x\cos x),\ \ c_1,c_2\in\mathbb{R}$)

16. Utilizando uma das substituições $x=e^t$ ou $y=\frac{1}{x}\int z dx$ determine a solução geral da equação

$$2x^2\frac{d^2y}{dx^2}+7x\frac{dy}{dx}+3y=0$$

com $x>0$. Determine ainda a solução geral da equação

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{7}{2x}\frac{dy}{dx}+\frac{3}{2x^2}y=\frac{1}{2}x^{-3/2}.$$

(Resposta: $y^*=c_1x^{-\frac{3}{2}}+c_2\dfrac{1}{x},\ \ c_1,c_2\in\mathbb{R},\ \ y=c_1x^{-\frac{3}{2}}+c_2\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{6}x^{\frac{1}{2}},\ \ c_1,c_2\in\mathbb{R}$)

17. Determine a solução geral da equação

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2y=x-1,\quad x>0$$

sabendo que $y_1=x^2$ é uma solução particular da equação homogénea associada.

(Resposta: $y=c_1\dfrac{1}{x}+c_2x^2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x.$)

18. Determine a solução geral da equação

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+x^2y=0$$

efetuando a mudança de variável definida por $y(x)=z(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.

(Resposta: $y=c_1e^{-\frac{x^2}{2}+x}+c_2e^{-\frac{x^2}{2}-x}$.)

19. Determine a solução geral da equação

$$2(x+1)^2\frac{d^2y}{dx^2}-(x+1)\frac{dy}{dx}+y=x,\quad x>-1$$

efetuando a mudança de variável definida por $x+1=e^t$

(Resposta: $y=c_1(x+1)+c_2\sqrt{x+1}+(x+1)\log(x+1)-1$.)

20. Considere a equação diferencial

$$y\frac{d^2y}{dx^2}-(\frac{dy}{dx})^2-y^2 log\, y=0, x>0, \qquad (1)$$

a) Mostre que efectuando a substituição $y(x)\longrightarrow z(x)$ definida por

$$y(x)=e^{-z(x)}$$

a equação (1) se transforma na equação diferencial linear de coeficientes constantes

$$\frac{d^2z}{dx^2}-z=0.$$

b) Determine a solução geral da equação (1).

(Resposta: b) $y=e^{c_1e^x+c_2e^{-x}}$.)

21. a) Determine a solução geral da equação diferencial linear de coeficientes constantes

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=2x.$$

b) Utilizando a substituição $x\longrightarrow t$ definida por $t=\dfrac{1}{x}$ determine a solução geral da equação diferencial

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}+\frac{4}{x^2}y=\frac{2}{x^3},\quad x>0$$

(Resposta: a) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{2}x$, b) $y = c_1 \cos \frac{2}{x} + c_2 \sin \frac{2}{x} + \frac{1}{2x}$.)

22. a) Sabendo que a equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + (4x^2 + 2)y = 0,$$

admite as soluções $y_1(x)$ e $y_2(x) = xy_1(x)$, com $y_1(0) = 1$, determine-as e indique, justificando, o integral geral da equação.

b) Utilizando o método da variação das constantes arbitrárias determine a solução geral da equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + (4x^2 + 2)y = e^{-x^2}.$$

(Resposta: a) $y = c_1 e^{-x^2} + c_2 x e^{-x^2}$, b) $y = c_1 e^{-x^2} + c_2 x e^{-x^2} + \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2}$.)

23. Utilizando a mudança de variável definida por $y = (x+3)\int z(x)dx$, determine a solução geral da equação

$$(x+3)^2 \, \frac{d^2y}{dx^2} - (x+3)\frac{dy}{dx} + y = 0, \quad x > -3.$$

Por aplicação do método da variação das constantes arbitrárias, determine a solução geral de

$$(x+3)^2 \, \frac{d^2y}{dx^2} - (x+3)\frac{dy}{dx} + y = (x+3)^2, \quad x > -3.$$

(Resposta: $y = c_1(x+3) + c_2(x+3)\log(x+3)$,
$y = c_1(x+3) + c_2(x+3)\log(x+3) + (x+3)^2$.)

24. O polinómio característico de equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes e de coeficiente líder igual a 1 tem 0 como raíz tripla e i e $-i$ ambas duplas. Determine a equação diferencial considerada e a sua solução geral.

(Resposta: $\frac{d^7y}{dx^7} + 2\frac{d^5y}{dx^5} + \frac{d^3y}{dx^3} = 0$,
$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + (c_4 + c_5x)\cos x + (c_6 + c_7x)\sin x$.)

25. Determine a solução geral da equação diferencial linear de coeficientes constantes não homogénea

$$4\frac{d^2y}{dx^2} + 16\frac{dy}{dx} + 17y = \frac{\sin \frac{x}{2}}{e^{2x}}$$

(Resposta: $y=e^{-2x}\left((c_1-\frac{x}{4})\cos\frac{x}{2}+c_2\sin\frac{x}{2})\right)$.)

26. Considere a equação

$$\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}+k\frac{dy}{dx}=0$$

em que k é uma constante real.

a) Determine k de modo a que $\alpha=-1$ seja raíz do polinómio característico da equação e determine a solução geral da equação para o valor de k determinado.

b) Determine ainda, para o valor de k determinado na alínea anterior, a solução geral da equação

$$\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}+k\frac{dy}{dx}=2e^{-x}.$$

(Resposta: a) $k=5$, $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^x\cos 2x+c_4e^x\sin 2x$, b) $y=c_1+c_2e^{-x}+c_3e^x\cos 2x+c_4e^x\sin 2x-\dfrac{1}{4}xe^{-x}$.)

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NÃO LINEARES

27. Determine as soluções gerais das equações diferenciais de variáveis separáveis:

a) $\sqrt{1-x^2}dy=(1+y^2)dx$
b) $(x^2-yx^2)\dfrac{dy}{dx}+y^2+xy^2=0$

Determine as soluções gerais das equações diferenciais exactas:

c) $(3x^2+2y\sin 2x)dx+(2\sin^2 x+6y^2)dy=0$
d) $(xe^y+e^{2y})dx+(\frac{x^2}{2}e^y+2xe^{2y}+2e^y)dy=0$
e) $e^y dx+(xe^y-2y)dy=0$
f) $y\log x dx+(x\log x-x+ye^y)dy=0$

(Resposta: a) $y=tg(\arcsin x+c)$, b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\log|\dfrac{y}{x}|=c$, c) $2y\sin^2 x+2y^3+x^3=c\,,c\in\mathbb{R}$, d) $(\dfrac{x^2}{2}+xe^y+2)e^y=c\,,c\in\mathbb{R}$, e) $xe^y-y^2=c$, f) $xy(\log x-1)+e^y(y-1)=c$.

28. a) Determine a solução geral da equação

$$(x\sin y+y\cos y)dx+(x\cos y-y\sin y)dy=0$$

sabendo que admite o fator integrante $\varphi(x) = e^x$.

b) A equação

$$(xy^2 + x^2y^2 + 3)dx + x^2ydy = 0$$

admite factores integrantes que são apenas funções de x. Determine um desses factores integrantes e o integral geral da equação. Determine a solução particular que passa pelo ponto $(1, 0)$.

(Resposta: a) $e^x((x-1)\sin y + y\cos y) = c$, b) Os factores integrantes são da forma $\varphi(x) = ce^{2x}$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Um factor integrante é, por exemplo, $\varphi(x) = e^{2x}$. Integral geral $e^{2x}(x^2y^2 + 3) = c\,, c \in \mathbb{R}$, solução particular $e^{2x}(x^2y^2 + 3) = 3e^2$)

29. A equação

$$\left(\frac{e^{3x}}{\cos y} - \frac{\sin y}{\cos y}\right)dx + dy = 0$$

tem factores integrantes da forma $h(x, y) = f(x)\cos y$. Determine um desses factores integrantes e a solução geral da equação.

(Resposta: Os factores integrantes são da forma $\varphi(x, y) = ce^{-x} cos\, y$, $c \in \mathbb{R}$. Um factor integrante, é por exemplo, $\varphi(x, y) = e^{-x} cos\, y$. Integral geral: $e^{-x}\sin y + \frac{1}{2}e^{2x} = c\,, c \in \mathbb{R}$)

30. Determine o integral geral das seguintes equações diferenciais:

a) $y = 2x\dfrac{dy}{dx} - e^{\frac{dy}{dx}}$ b) $y = x\dfrac{dy}{dx} - e^{\frac{dy}{dx}}$ $x > 0$

(Resposta: a) $\begin{cases} x = \dfrac{(p-1)e^p + c}{p^2} \\ y = 2xp - e^p \end{cases}$, $p = \dfrac{dy}{dx}$ parâmetro, b) Solução geral $y = cx - e^c$, $c \in \mathbb{R}$, solução singular $y = x\log x - x$.

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES

31. Determine as funções $x(t)$ e $y(t)$ que satisfazem os seguintes sistemas de equações diferenciais:

a)
$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + x + \dfrac{dy}{dt} + 2y = t \\[2ex] -\dfrac{d^3x}{dt^3} + 3\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} + 3x - \dfrac{d^2y}{dt^2} = 3t - 1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + x + 2\dfrac{dy}{dt} = e^{2t} \\[2ex] -\dfrac{d^3x}{dt^3} - \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} = -2e^{2t} \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} - 3y = 4t \\[2ex] 3\dfrac{d^3x}{dt^3} - \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} - 6y = e^t - 8t - 4 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} (D^2 + 1)x + (D - 2)y = t \\[2ex] (3D^4 + 2D^2 - 1)x + (3D^3 - 6D^2 + 2)y = 1 - t \end{cases}$$

onde $D = \frac{d}{dt}$.

e)
$$\begin{cases} (D^3 + 25D)x + (D^2 + D - 20)y = 5cos5t \\[2ex] (D^4 - D^3 + 26D^2 - 25D + 25)x + (D^3 - 21D + 20)y = -24\sin 5t - 5cos5t \end{cases}$$

onde $D = \frac{d}{dt}$.

(Resposta: a) $\begin{cases} x = c_2\cos t + c_3 \sin t + t + \dfrac{4}{37}c_1 e^{-6t} \\ y = c_1 e^{-6t} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = c_3\cos t + c_4 \sin t + t + \dfrac{1-4c_2}{5}e^{2t} \\ y = c_1 + c_2 e^{2t} \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = c_1 + c_2 e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} + c_3 e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - e^t + 2t^2 \\ y = c_4 e^{3t} - \dfrac{1}{2}e^t + \dfrac{2\sqrt{3}}{9-2\sqrt{3}}c_2 e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}t} - \dfrac{2\sqrt{3}}{9+2\sqrt{3}}c_3 e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}t} \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = c_2\cos t + c_3 \sin t + 3t + 2c_1 - 1 \\ y = t + c_1 \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x = c_1\cos 5t + c_2 \sin 5t - \dfrac{1}{10}t\cos 5t \\ y = c_3 e^{-5t} + c_4 e^{4t} \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$