Álgebra Linear e Geometria Analítica

1-Matrizes

Departamento de Matemática
FCT/UNL

Programa

1.1 Algumas definições e exemplos

Ao longo desta unidade curricular, consideramos os seguintes conjuntos e notações:

- $\mathbb{R}$ - conjunto dos números reais
- $\mathbb{C}$ - conjunto dos números complexos
- $\mathbb{K}$ - conjunto dos escalares
- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
- $n, m \in \mathbb{N}$

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Chamamos **matriz** $m \times n$, sobre $\mathbb{K}$, a qualquer aplicação de $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ em $\mathbb{K}$.

$$\begin{array}{rcl} A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i, j) & \longmapsto & A(i, j) = a_{ij} \end{array}$$

1.1 Algumas definições e exemplos

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Chamamos **matriz** $m \times n$, sobre $\mathbb{K}$, a qualquer quadro que se obtenha dispondo mn elementos de $\mathbb{K}$ segundo m linhas e n colunas, isto é, a qualquer quadro da forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{21}- elemento de A situado na linha 2 e na coluna 1

linha i de $A = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$

coluna j de $A = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$

$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ - conjunto das matrizes $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$

Exemplo

Consideremos a matriz 3×4 sobre $\mathbb{R}$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

- O elemento a_{32} da matriz A é 2
- A linha 3 de A é $(1, 2, -3, 2)$
- A coluna 2 de A é $(1, 2, 2)$
- Dizemos então que $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$

1.1 Algumas definições e exemplos

Definição

Dizemos que as matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ são **iguais**, e escrevemos $A = B$, se $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$. Caso contrário escrevemos $A \neq B$.

Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, para $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ dizemos que os elementos a_{ij}, b_{ij} são elementos **homólogos**

Assim, podemos afirmar que só podem ser iguais matrizes com igual número de linhas, igual número de colunas e com elementos homólogos iguais.

Exemplo

1. As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & -1 & i \\ -i & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & i \\ b & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ são iguais se, e só se, $a = 3$ e $b = -i$.
2. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & a & 3 \\ 2a & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ então $A \neq B$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

1.1 Algumas definições e exemplos

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

A diz-se uma **matriz–linha** se $m = 1$.

A diz-se uma **matriz–coluna** se $n = 1$.

A diz-se uma **matriz quadrada** se $m = n$. Neste caso diz-se que A é quadrada de **ordem** n ou, simplesmente, que A é uma matriz de ordem n.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \pi \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -e^{-2} & 5\pi \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

1.1 Algumas definições e exemplos

Definição

Seja A uma matriz de ordem n, isto é, uma matriz da forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ - **elementos diagonais** de A

$(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ - **diagonal principal** de A

A matriz diz-se **triangular superior** se tem a forma $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}, \end{bmatrix}$

isto é, se ($a_{ij} = 0$ para $i > j$)

1.1 Algumas definições e exemplos

Definição

A matriz diz-se **triangular inferior** se tem a forma $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,
isto é se, ($a_{ij} = 0 \quad$ para $\quad i < j$)

A matriz diz-se **diagonal** se tem a forma $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$,
isto é, se ($a_{ij} = 0 \quad$ para $\quad i \neq j$)

A matriz diz-se **escalar** se tem a forma
isto é , se (diagonal com $a_{ii} = \alpha, \; i = 1, \ldots, n$) $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha \end{bmatrix}$,

A matriz é a **matriz identidade** se tem a forma $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

1.1 Algumas definições e exemplos

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} e^\pi & 0 \\ 0 & e^\pi \end{bmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição

Designamos por **matriz nula** de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e representamos por $0_{m\times n}$ ou simplesmente por 0 se não houver ambiguidade a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$

$$0_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, representamos por $-A$ a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que:

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.1 Algumas definições e exemplos

Definição

Designamos por **matriz de Toeplitz** uma matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ em que cada diagonal descendente da esquerda para a direita tem valor constante. Ou seja, dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, diz-se que A é uma **matriz de Toeplitz** se, para quaisquer $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{ij} = a_{i-1,j-1}$ com $i, j \geq 2$.

Exemplo

São matrizes de Toeplitz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & -1 \\ 6 & 2 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 9 & 4 \\ 8 & 2 & 1 & -3 & 9 \\ 6 & 8 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 7 & -2 & -3 \\ 1 & 5 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 & -9 \\ -9 & 2 & 3 & -5 \\ -5 & -9 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & -9 & 2 \end{bmatrix}.$$

1.2 Operações com matrizes - Adição de matrizes

Definição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **matriz soma** da matriz A com a matriz B, e denotamos por $A+B$ à matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cuja entrada (i,j) é $a_{ij}+b_{ij}$ isto é

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad i = 1,\ldots,m \quad j = 1,\ldots,n$$

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2 Operações com matrizes - Propriedades da Adição de matrizes

Proposição

Tem-se:

1. $\forall_{A,B\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad A+B=B+A$ (comutativa).
2. $\forall_{A,B,C\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad (A+B)+C=A+(B+C)$ (associativa).
3. $\exists_{0_{m\times n}\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \ \forall_{A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad A+0_{m\times n}=0_{m\times n}+A=A$ (existência de elemento neutro).
4. $\forall_{A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \ \exists_{-A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})} \quad A+(-A)=(-A)+A=0_{m\times n}$ (existência de oposto).

Observação

Se $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, representamos por $A-B$ a matriz $A+(-B)$.

Dem. Demonstramos a propriedade 2, deixando a demonstração das restantes como exercício.

2. Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Notemos que as matrizes $(A+B)+C$ e $A+(B+C)$ pertencem ambas a $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. De acordo com a definição de adição de matrizes, tem-se

$$\Big((A+B)+C\Big)_{ij} = (A+B)_{ij} + c_{ij} = (a_{ij}+b_{ij}) + c_{ij}$$

e

$$\Big(A+(B+C)\Big)_{ij} = a_{ij} + (B+C)_{ij} = a_{ij} + (b_{ij}+c_{ij}) \,.$$

Como a_{ij}, b_{ij} e c_{ij} são elementos de $\mathbb{K}$ e, em $\mathbb{K}$, a adição é associativa, concluímos que os elementos homólogos

$$\Big((A+B)+C\Big)_{ij} \quad \text{e} \quad \Big(A+(B+C)\Big)_{ij}$$

são iguais, para $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Logo

$$(A+B)+C = A+(B+C).$$

Exemplo

Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Tem-se:

1. $A + B = \begin{bmatrix} 2+(-5) & -3+1 & 0+4 \\ 0+2 & 5+0 & 1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.
2. $A + 0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A$.
3. $A + (-A) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix} = 0_{2\times 3}$.

1.2 Operações com matrizes - Multiplicação de um escalar por uma matriz

Definição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **matriz produto do escalar** α **pela matriz** A, e denotamos por αA, à matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ cujo elemento (i,j) é αa_{ij}, isto é,

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m \quad j = 1, \ldots, n.$$

Ou seja, se $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tem-se

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

1.2 Operações com matrizes - Propriedades da Multiplicação de um escalar por uma matriz

Proposição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. *Tem-se*

1. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
2. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
3. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.
4. $1A = A$.
5. $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$.
6. *Se* $\alpha A = 0_{m\times n}$ *então* $\alpha = 0$ *ou* $A = 0_{m\times n}$.

Dem. Demonstramos apenas as propriedades 2 e 6 ficando como exercício a demonstração das restantes.

2 . Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Como $\alpha A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\beta A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ concluímos que $\alpha A + \beta A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal como a matriz $(\alpha+\beta)A$. Verifiquemos que os elementos homólogos das matrizes $(\alpha+\beta)A$ e $\alpha A + \beta A$ são iguais. Tem-se

$$\Big((\alpha+\beta)A\Big)_{ij} = (\alpha+\beta)a_{ij} \quad \text{e} \quad (\alpha A + \beta A)_{ij} = (\alpha A)_{ij} + (\beta A)_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta a_{ij},$$

$i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$

Como, em $\mathbb{K}$, a multiplicação é distributiva em relação à adição, tem-se $(\alpha+\beta)a_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta a_{ij}$. Logo

$$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A.$$

6. Suponhamos que $\alpha A = 0_{m\times n}$. Se $\alpha = 0$ então é verdadeira a proposição $\alpha = 0$ ou $A = 0_{m\times n}$. Se $\alpha \neq 0$ então, multiplicando por α^{-1} ambos os membros da igualdade $\alpha A = 0_{m\times n}$, resulta

$$\alpha^{-1}(\alpha A) = \alpha^{-1}0_{m\times n} \Leftrightarrow \left(\alpha^{-1}\alpha\right) A = 0_{m\times n}$$
$$1A = 0_{m\times n} \Leftrightarrow A = 0_{m\times n}.$$

Logo, se $\alpha A = 0_{m\times n}$ então $\alpha = 0$ ou $A = 0_{m\times n}$.

1.2 Operações com matrizes - Multiplicação de matrizes

Definição

Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Define-se **produto** da matriz A pela matriz B, e representa-se por AB, a matriz de $\mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ tal que

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, p.$$

Assim,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

1.2 Operações com matrizes - Multiplicação de matrizes

Exemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ -8 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0\times 9 + 1\times(-8) + 2\times(-1) & 0\times 8 + 1\times(-2) + 2\times 0 & 0\times 7 + 1\times 6 + 2\times 4 \\ 3\times 9 + 0\times(-8) + 5\times(-1) & 3\times 8 + 0\times(-2) + 5\times 0 & 3\times 7 + 0\times 6 + 5\times 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -10 & -2 & 14 \\ 22 & 24 & 41 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Uma empresa comercializa quatro produtos. A tabela seguinte indica o número de unidades vendidas, de cada um desses produtos, nos três primeiros meses do ano.

	Produto 1	Produto 2	Produto 3	Produto 4
Mês 1	10	15	4	8
Mês 2	14	18	6	10
Mês 3	15	20	12	7

Na tabela seguinte apresentam-se o preço de venda e o lucro, em Euros, de cada um desses produtos.

	Preço de venda	Lucro
Produto 1	50	8
Produto 2	1200	100
Produto 3	300	50
Produto 4	250	30

Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 4 & 8 \\ 14 & 18 & 6 & 10 \\ 15 & 20 & 12 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 50 & 8 \\ 1200 & 100 \\ 300 & 50 \\ 250 & 30 \end{bmatrix}$$

concluímos que $(AB)_{i1}$ é o total de vendas, em Euros, no Mês i e que $(AB)_{i2}$ é o lucro total, em Euros, no Mês i, com $i = 1, 2, 3$.

Observação

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

1. Sejam $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ e sejam $A_1, \dots, A_n$, respectivamente, as colunas $1, \dots, n$ de A. Tem-se

$$A\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \mid \cdots \mid A_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \beta_1 A_1 + \cdots + \beta_n A_n, \text{ pois}$$

$$A\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 a_{11} + \cdots + \beta_n a_{1n} \\ \vdots \\ \beta_1 a_{m1} + \cdots + \beta_n a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \beta_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + \beta_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

2. Se $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $B_1, \dots, B_p$ são, respectivamente, as colunas $1, \dots, p$ de B então

$$AB = A\begin{bmatrix} B_1 | \cdots | B_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB_1 \mid \cdots \mid AB_p \end{bmatrix},$$

conforme se verifica facilmente atendendo à definição de matriz produto.

1.2 Operações com matrizes - Propriedades da Multiplicação de matrizes

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e sejam B, C matrizes do tipo adequado de forma a que as operações indicadas estejam definidas. Tem-se

1. $(AB)C = A(BC)$ *(associativa).*
2. $A(B+C) = AB + AC$ *(distributiva, à esquerda),*
   $(B+C)A = BA + CA$ *(distributiva, à direita).*
3. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.
4. $AI_n = I_mA = A$.

Algumas propriedades da multiplicação em $\mathbb{K}$ não são verificadas pela multiplicação de matrizes:

- *A multiplicação de matrizes <u>não</u> é comutativa.*
- $AB = 0 \not\Rightarrow (A = 0 \quad \text{ou} \quad B = 0)$,
  isto é, pode ter-se $AB = 0$ com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.
- $(AB = AC \quad \text{e} \quad A \neq 0) \not\Rightarrow B = C, \quad (BA = CA \quad \text{e} \quad A \neq 0) \not\Rightarrow B = C.$

1.2 Operações com matrizes - Potência de expoente k de uma matriz

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **potência de expoente** k **de** A ($k \in \mathbb{N}_0$) à matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, que representamos por A^k, definida, por recorrência, do seguinte modo:

$$A^k = \begin{cases} I_n, & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A, & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Proposição

Quaisquer que sejam $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e* $k, l \in \mathbb{N}_0$, *tem-se*

1. $A^k A^l = A^{k+l}$.
2. $(A^k)^l = A^{kl}$.

1.3 Matrizes invertíveis

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A é **invertível**, ou que tem inversa, se A tem oposto para a multiplicação de matrizes, isto é, se existir uma matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, tal que $AB = BA = I_n$.

Teorema

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível então existe uma, e uma só, matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Dem. Suponhamos que $B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são tais que

$$AB = I_n = BA \quad \text{e} \quad AC = I_n = CA.$$

Como

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$$

concluímos que $B = C$.

1.3 Matrizes invertíveis

Definição

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, a única matriz B tal que $AB = BA = I_n$ designa-se por a **inversa** de A e é denotada por A^{-1}.

Exemplo

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. Como

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = I_2 \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = I_2$$

concluímos que A é invertível e que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.

2. I_n é invertível e $(I_n)^{-1} = I_n$ pois

$$I_n I_n = I_n = I_n I_n.$$

1.3 Matrizes invertíveis

Exemplo

1. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tem uma linha nula então A não é invertível pois, para qualquer matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$, AB tem uma linha nula e, portanto, $AB \neq I_n$.
2. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ tem as linhas i e j iguais, com $i \neq j$, então A não é invertível pois, para qualquer matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, AB tem as linhas i e j iguais pelo que $AB \neq I_n$.

Exemplo

Em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$*,* $A \neq 0 \quad \not\Rightarrow \quad A$ *invertível.*
A matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *<u>não</u> tem inversa porque, para qualquer* $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$*, se tem*

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ 5a & 5b \end{bmatrix} \neq I_2.$$

1.3 Matrizes invertíveis

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível.

1. *Se $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é tal que $AB = I_n$ então $B = A^{-1}$ e, portanto, $BA = I_n$.*
2. *Se $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é tal que $BA = I_n$ então $B = A^{-1}$ e, portanto, $AB = I_n$.*

Dem. Como A é invertível, a matriz A^{-1} existe e é única. Da igualdade $AB = I_n$ resulta, multiplicando ambos os membros, à esquerda, por A^{-1},

$$\begin{aligned} A^{-1}(AB) &= A^{-1}I_n \\ (A^{-1}A)B &= A^{-1} \\ I_nB &= A^{-1} \\ B &= A^{-1}, \end{aligned}$$

como pretendíamos demonstrar.

1.3 Matrizes invertíveis

Teorema

1. *Se* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *é invertível então* A^{-1} *é invertível e* $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. *Se* $\alpha \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$ *e* A *é invertível então* αA *é invertível e* $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$.
3. *Se* $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *são invertíveis então* AB *é invertível e* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
4. *Mais geralmente, se* $k \in \mathbb{N}$ *e* $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *são invertíveis então* $A_1 \cdots A_k$ *é invertível e* $(A_1 \cdots A_k)^{-1} = {A_k}^{-1} \cdots {A_1}^{-1}$.
5. *Se* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *é invertível então, para qualquer* $k \in \mathbb{N}$, A^k *é invertível e* $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.

Dem.

1. A demonstração é trivial se atendermos à definição de inversa.

2. Notemos que, como $\alpha \neq 0$, existe α^{-1}. Tem-se então
$$(\alpha A)\left(\alpha^{-1}A^{-1}\right) = \left(\alpha\alpha^{-1}\right)\left(AA^{-1}\right) = 1I_n = I_n$$
e analogamente concluímos que
$$\left(\alpha^{-1}A^{-1}\right)(\alpha A) = I_n.$$

3. Demonstremos que
$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = I_n \quad \text{e} \quad \left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = I_n.$$
Como
$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$
e
$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n,$$
concluímos o que pretendíamos.

4. Exercício.

5. Basta considerar, em (4) $A_1 = \cdots = A_k$.

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **matriz transposta** de A, e representamos por $A^\top$, a matriz de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que

$$\left(A^\top\right)_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m.$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ a matriz transposta da matriz A é a matriz $A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

Proposição

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ de tipos adequados para que as operações indicadas tenham sentido. Tem-se

1. $\left(A^\top\right)^\top = A$.
2. $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$.
3. $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$.
4. $(AB)^\top = B^\top A^\top$.
5. $\left(A^k\right)^\top = \left(A^\top\right)^k$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$.
6. *Se A é invertível então $A^\top$ é invertível e* $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$.

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

Definição

Uma matriz A diz-se **simétrica** se $A = A^\top$ e **hemi–simétrica** se $A = -A^\top$.

Definição

Dizemos que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é **simétrica** se $a_{ij} = a_{ji} \quad i, j = 1, \ldots, n$ e que é **hemi-simétrica** se $a_{ij} = -a_{ji} \quad i, j = 1, \ldots, n$.

Exemplo

A matriz $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} & \pi \end{bmatrix}$ *é simétrica. A matriz* $\begin{bmatrix} 0 & \pi i & 2i \\ -\pi i & 0 & -3 \\ -2i & 3 & 0 \end{bmatrix}$ *é hemi–simétrica. A matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ *não é simétrica nem hemi–simétrica.*

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

$\mathbb{K} = \mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

$i^2 = -1$

O **conjugado** de $z = a + bi$ é o número $\overline{z} = a - bi$.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Define-se a **conjugada** de A e representa-se por $\overline{A}$ a matriz que se obtém de A substituindo cada elemento pelo seu conjugado. Tem-se, pois, $\overline{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ e $\left(\overline{A}\right)_{ij} = \overline{a_{ij}}$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \cdots & \overline{a_{1n}} \\ \overline{a_{21}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{m1}} & \overline{a_{m2}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

Proposição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$ *e* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Tem-se*

1. $\overline{\overline{A}} = A$.
2. $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$.
3. $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$.
4. $\overline{AC} = \overline{A}\,\overline{C}$.
5. *Se* $m = n$ *então* $\overline{A^k} = \left(\overline{A}\right)^k$.
6. *Se* $m = n$ *e* A *for uma matriz invertível então* $\overline{A}$ *é invertível e* $\left(\overline{A}\right)^{-1} = \overline{A^{-1}}$.
7. $\left(\overline{A}\right)^\top = \overline{A^\top}$.

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Define-se **transconjugada** de A e representamos por A^* a matriz

$$\left(\overline{A}\right)^\top = \overline{A^\top}.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A^* = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}$$

Definição

Uma matriz A diz-se **hermítica** se $A = A^*$ ou, equivalentemente ,se $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ e **hemi–hermítica** se $A = -A^*$ ou, equivalentemente ,se $a_{ij} = -\overline{a}_{ji}$.

1.4 Transposição e conjugação de matrizes

Exemplo

- As matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 2+3i \\ 2-3i & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -1 & -2+i & 3i \\ -2-i & 0 & -4 \\ -3i & -4 & 2 \end{bmatrix}$ são hermíticas.

- As matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 2+3i \\ -2+3i & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & -2+i & 3i \\ 2+i & 0 & -4 \\ 3i & 4 & 0 \end{bmatrix}$ são hemi–hermíticas.

- As matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 2+3i \\ 2-3i & i \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & -2+i & 3i \\ 2+i & 7 & -4 \\ 3i & 4 & 0 \end{bmatrix}$ não são hermíticas nem hemi–hermíticas.

1.5 Transformações e matrizes elementares

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **transformação elementar sobre as linhas de** A a uma transformação de um dos seguintes tipos:

Transformação Elementar do Tipo

- **I** Troca de posição, na matriz A, da linha i com a linha j, com $i \neq j$;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

1.5 Transformações e matrizes elementares

Transformação Elementar do Tipo

II *Multiplicação de uma linha de A por um* $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \overrightarrow{\alpha \ell_i} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overrightarrow{2\ell_1} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1.5 Transformações e matrizes elementares

Transformação Elementar do Tipo

III *Substituição da linha i de A pela sua soma com a linha j de A multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$, com $i \neq j$.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_i+\beta\ell_j]{} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+\beta a_{j1} & a_{i2}+\beta a_{j2} & \cdots & a_{in}+\beta a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2+(-3)\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1.5 Transformações e matrizes elementares

Notação

- $A \xrightarrow[T]{} B$, *para representar que a matriz B se obteve de A efectuando a transformação elementar T (de tipo não especificado).*

Definição

Diz-se que $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas a $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se B se pode obter a partir de A efectuando uma sequência finita com k, $k \in \mathbb{N}_0$, transformações elementares sobre linhas. Tal será denotado por $A \xrightarrow[(linhas)]{} B$.

1.5 Transformações e matrizes elementares

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Para qualquer transformação elementar sobre linhas T existe uma transformação elementar sobre linhas T' tal que

$$A \xrightarrow[T]{} B \xrightarrow[T']{} A.$$

Dizemos então que qualquer transformação elementar sobre linhas é "*reversível*".

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se:

1. $A \xrightarrow[(linhas)]{} A.$
2. *Se* $A \xrightarrow[(linhas)]{} B$ *então* $B \xrightarrow[(linhas)]{} A.$
3. *Se* $A \xrightarrow[(linhas)]{} B$ *e* $B \xrightarrow[(linhas)]{} C$ *então* $A \xrightarrow[(linhas)]{} C.$

1.5 Transformações e matrizes elementares

Definição

Chamamos **matriz elementar** de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, sobre linhas, de tipo I, II ou III, a toda a matriz que se obtém de I_n por aplicação de uma <u>única</u> transformação elementar nas suas linhas, de tipo I, II, ou III, respectivamente.

Exemplo

São matrizes elementares de $\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$, sobre linhas, as matrizes:

$$E_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ pois } I_4 \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} E_1;$$

$$E_{II} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ pois } I_4 \xrightarrow[7\ell_3]{} E_2;$$

$$E_{III} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{pois } I_4 \xrightarrow[\ell_3 + \pi\ell_2]{} E_3.$$

1.5 Transformações e matrizes elementares

Proposição

Tem-se:

1. *Se* $I_n \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} E_1$ *então* $I_n \xrightarrow[c_i \leftrightarrow c_j]{} E_1$.
2. *Se* $I_n \xrightarrow[\alpha \ell_i]{} E_2$ *então* $I_n \xrightarrow[\alpha c_i]{} E_2$.
3. *Se* $I_n \xrightarrow[\ell_i + \beta \ell_j]{} E_3$ *então* $I_n \xrightarrow[c_j + \beta c_i]{} E_3$.

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

1. *Se* $I_m \xrightarrow[T]{} E$, *sendo* T *uma transformação elementar sobre* *<u>linhas</u>*, *então* $A \xrightarrow[T]{} EA$.
2. *Se* $I_n \xrightarrow[T']{} E'$, *sendo* T' *uma transformação elementar sobre* *<u>colunas</u>*, *então* $A \xrightarrow[T']{} AE'$.

1.5 Transformações e matrizes elementares

Proposição

Toda a matriz elementar $E \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é invertível e tem-se, quaisquer que sejam $i, j \in \{1, \ldots, n\}$:

1. *Se $i \neq j$ e $I_n \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} E$ então $I_n \xrightarrow[\ell_i \leftrightarrow \ell_j]{} E^{-1}$.*
2. *Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e $I_n \xrightarrow[\alpha\ell_i]{} E$ então $I_n \xrightarrow[\frac{1}{\alpha}\ell_i]{} E^{-1}$.*
3. *Se $i \neq j$, $\beta \in \mathbb{K}$ e $I_n \xrightarrow[\ell_i+\beta\ell_j]{} E$ então $I_n \xrightarrow[\ell_i+(-\beta)\ell_j]{} E^{-1}$.*

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Definição

Chamamos **pivô** de uma linha não nula de uma matriz ao elemento não nulo mais à esquerda dessa linha.Consideramos que uma linha nula não tem pivô.
Chamamos pivôs de uma matriz não nula aos pivôs de todas as suas linhas não nulas.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A está em **forma de escada** (abreviadamente, denotado por **f.e.**) se $A = 0_{m\times n}$ ou se os pivôs da matriz A estão nas linhas $\{1, \ldots, s\}$ nas posições $(1, k_1), \ldots, (s, k_s)$, com $1 \leq k_1 < \ldots < k_s \leq n$.

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Exemplo

Estão em forma de escada, por exemplo, matrizes com o seguinte aspecto:

$$\begin{bmatrix} 0 & \bullet & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \bullet & * & * \\ 0 & \bullet & * \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix} \quad \textit{ou} \quad \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$$

não está em forma de escada. Porquê?

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Proposição

Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *é* **equivalente por linhas** *a uma matriz em forma de escada. Abreviadamente*

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A' \quad (f.e.).$$

- **Processo para redução de uma matriz** $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ **à forma de escada.**

P1: Se $A = 0_{m\times n}$ ou A é uma matriz linha então A está em forma de escada e o processo termina.
Suponhamos então que $A \neq 0_{m\times n}$.

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

P2: Por troca de linhas (isto é, efectuando transformações elementares do tipo I), se necessário, obtenha-se uma matriz B cuja linha 1 tem, entre todas as linhas não nulas da matriz, um pivô com índice de coluna mínimo. Seja tal elemento B_{1t}. Obtemos uma matriz da forma

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & B_{1t} & B_{1,t+1} & \cdots & B_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & B_{2t} & B_{2,t+1} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_{mt} & B_{m,t+1} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix},$$

onde $B_{1t} \neq 0$ (se $t = 1$ então as colunas nulas à esquerda da coluna t não existem).

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

P3: Para cada linha i de B, $i = 2, \ldots, m$, substitua-se a linha i pela sua soma com o produto de $-\frac{B_{it}}{B_{1t}}$ pela linha 1 (transformações elementares do tipo III). Obtém-se uma matriz da forma

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & B_{1t} & B_{1,t+1} & \cdots & B_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & C_{2,t+1} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & C_{m,t+1} & \cdots & C_{mn} \end{bmatrix},$$

onde $B_{1t} \neq 0$.

P4: Se a matriz C estiver em forma de escada, o processo termina e está encontrada uma matriz em forma de escada.
Caso contrário, "despreza-se" a linha 1 da matriz C e aplica-se os passos 1 e 2 à matriz resultante do tipo $(m-1)\times n$.

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R})$.

Utilizando o procedimento anterior, determinemos uma matriz equivalente por linhas a A e em forma de escada.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 9 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_2 + (-4)l_1]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 + (-2)l_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}.$$

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Definição

Dizemos que uma matriz está em **forma de escada reduzida** (abreviadamente, denotado por **f.e.r.**) se está em forma de escada e os pivôs, se existirem, são iguais a 1 e todos os restantes elementos das colunas dos pivôs são nulos.

Exemplo

A matriz identidade, de qualquer ordem, está em forma de escada reduzida.

A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *está em forma de escada reduzida.*

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

- **Processo para redução de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, não nula e em forma de escada, à forma de escada reduzida.**

P1: Seja A_{sk} o pivô com maior índice de linha. Para garantir que o pivô passa a "1", multiplica-se a linha s por $\frac{1}{A_{sk}}$ (transformação elementar do tipo II).
Seja B a matriz obtida. Se $s = 1$ a matriz B está em forma de escada reduzida e o processo termina.

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

P2: Para cada linha i de B, com $i = 1, \ldots, s-1$, substitua-se a linha i pela sua soma com o produto de $-B_{ik}$ pela linha s (transformações elementares do tipo III).(Note que tal corresponde a anular os elementos da coluna do pivô B_{sk}, com índice de linha inferior ao do pivô.)

Obtem-se uma nova matriz C que continua em forma de escada e em que as entradas da coluna k são todas nulas à excepção do pivô C_{sk} que é igual a 1.

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

P3: Se a matriz C estiver em forma de escada reduzida, o processo termina e está encontrada uma matriz em forma de escada reduzida. Caso contrário, "desprezem-se" as linhas de C de índice superior ou igual a s e aplique-se o processo à matriz do tipo $(s-1)\times n$ resultante.

Exemplo

$$\mathcal{M}_{4\times 5}(\mathbb{R}) \ni B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}\ell_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\ell_1 + 1\ell_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 + (-2)\ell_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{(f.e.r.)}.$$

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Proposição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *matrizes equivalentes por linhas. para cada* $i \in \{1, \dots, n\}$ *seja* A_i *a coluna* i *de* A *e seja* B_i *a coluna* i *de* B*.*
se existem $s \in \{2, \dots, n\}$ *e* $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1} \in \mathbb{K}$ *tais que*

$$A_s = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_{s-1} A_{s-1}$$

então

$$B_s = \alpha_1 B_1 + \cdots + \alpha_{s-1} B_{s-1}.$$

Proposição

Unicidade Da Forma De Escada Reduzida

Qualquer matriz A *é equivalente por linhas a uma* <u>*única*</u> *matriz em forma de escada reduzida. Abreviadamente,*

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A'' \quad (f.e.r.), \text{ com } A'' \ \underline{única}.$$

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. À única matriz equivalente por linhas a A e em forma de escada reduzida chamamos **forma de escada reduzida de** A **ou forma de Hermite de** A.

Proposição

As matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *são equivalentes por linhas se, e só se, têm a mesma forma de escada reduzida.*

Dem. Suponhamos que A e B são equivalentes por linhas. Tem-se

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B \xrightarrow[(linhas)]{} A'' \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Dada a unicidade da forma de escada reduzida de A e de B, concluímos que A e B têm a mesma forma de escada reduzida, A''.
Reciprocamente, suponhamos que A e B têm a mesma forma de escada reduzida e demonstremos que A e B são equivalentes por linhas. Por hipótese, tem-se

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A'' \quad \text{(f.e.r.)} \qquad \text{e} \qquad B \xrightarrow[(linhas)]{} A'' \quad \text{(f.e.r.)}.$$

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Dem. (continuação)
Então porque cada transformação elementar é reversivel, tem-se

$$A'' \xrightarrow[(linhas)]{} B$$

e, portanto,

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B.$$

Logo A e B são equivalentes por linhas.

Exemplo

As matrizes de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

não são equivalentes por linhas pois,sendo A'' a forma de escada reduzida de A e B'' a forma de escada reduzida de B, tem-se

$$A'' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B'' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ com } A'' \neq B''$$

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Proposição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ matrizes equivalentes por linhas. Se A' e B' são matrizes em forma de escada e equivalentes por linhas a A e a B, respectivamente, então A' e B' têm o mesmo número de linhas não nulas. Em particular, quaisquer matrizes equivalentes por linhas a A e em forma de escada têm o mesmo número de linhas não nulas.

Dem. O resultado é trivial se A é a matriz nula.
Suponhamos que A é não nula. Como A e B são equivalentes por linhas, a Proposição anterior permite afirmar que A e B têm a mesma forma de escada reduzida C.
Qualquer que seja A' em forma de escada e equivalente por linhas a A, seguindo o processo indicado para redução de A' à sua forma de escada reduzida C, verificamos que o número de linhas não nulas de A' é igual ao de C.
Analogamente, se B' é uma matriz em forma de escada e equivalente por linhas a B então o número de linhas não nulas de B' é igual ao de C.
Logo A' e B' têm o mesmo número de linhas não nulas.

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Ao número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada equivalente por linhas a A chamamos **característica** de A e denotamos por $\mathrm{r}(A)$.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se* $\mathrm{r}(A) \leq m$ e $\mathrm{r}(\mathrm{A}) \leq \mathrm{n}$, *isto é,* $\mathrm{r}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Dem. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Da definição de característica resulta que $\mathrm{r}(A) \leq m$. Demonstremos que $\mathrm{r}(A) \leq n$. De facto, tal é trivial se $\mathrm{r}(A) = 0$ (isto é, se $A = 0_{m\times n}$). Se $\mathrm{r}(A) > 0$ (isto é, se $A \neq 0_{m\times n}$), como na forma de escada os pivôs, em número igual a $\mathrm{r}(A)$, têm índices de coluna dois a dois distintos, concluímos que $\mathrm{r}(A) \leq n$.

1.6 Formas de escada e característica de uma matriz

Proposição

As transformações elementares sobre linhas não alteram a característica, isto é, se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B$$

então

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B),$$

ou seja, matrizes equivalentes por linhas têm a mesma característica.

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

Teorema

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. As afirmações seguintes são equivalentes:

1. *A é invertível.*
2. $\mathrm{r}(A) = n$.
3. *I_n é a forma de escada reduzida de A.*
4. *A pode escrever-se como produto de matrizes elementares.*

Dem. Vamos demonstrar que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Suponhamos que A é invertível e que

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A' \quad \text{(f.e.)}.$$

Seja t o número de transformações elementares sobre linhas efectuadas para obter a matriz A'.

Demonstremos primeiramente que A' é invertível.

Se $t = 0$ então $A' = A$ e, portanto, A' é invertível.

Se $t > 0$ então, tem-se $A' = E_t \cdots E_1 A$, em que $E_1, \ldots, E_t$ são matrizes elementares.

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

Dem. (continuação)
Dado que toda a matriz elementar é invertível, A é invertível e, como, o produto de matrizes invertíveis é invertível, concluímos que A' é invertível.

Como observámos se uma matriz tem alguma linha nula então não é invertível pelo que a matriz A' não tem linhas nulas. Atendendo a que A' está em forma de escada e tem n linhas não nulas concluímos que $\mathrm{r}(A) = n$.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ Suponhamos que $\mathrm{r}(A) = n$ e seja A'' a forma de escada reduzida de A. Notemos que

$$\mathrm{r}(A'') = n$$

e, portanto, todas as linhas de A'' são não nulas.

Dado que A'' está na forma de escada reduzida podemos afirmar que todos os n pivôs de A'' são 1 e que os restantes elementos dessas n colunas são zeros.

Como A'' tem, no total, n colunas concluímos que $A'' = I_n$.

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

Dem. (Continuação)

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$ Suponhamos que I_n é a forma de escada reduzida de A. Tem-se

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} I_n \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Seja s o número de transformações elementares sobre linhas efectuadas para obter I_n.

Se $s = 0$ o resultado é trivial.

Se $s > 0$ então $I_n = (E_s \cdots E_1)A$, em que $E_1, \ldots, E_s$ são matrizes elementares.
Como $E_1, \ldots, E_s$ são invertíveis concluímos que $E_s \cdots E_1$ é invertível e que,
$(E_s \cdots E_1)^{-1} = A$. Assim $A = {E_1}^{-1} \cdots {E_s}^{-1}$.
Como, a inversa de uma matriz elementar é uma matriz elementar, a matriz A é igual a um produto de matrizes elementares.

$\boxed{4 \Rightarrow 1}$ Suponhamos que A é igual a um produto de matrizes elementares.

Como as matrizes elementares são invertíveis e o produto de matrizes invertíveis é invertível, concluímos que A é invertível.

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

Observação

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível. Como a forma de escada reduzida de A é I_n, existem transformações elementares sobre linhas $T_1, \ldots, T_s$ tais que

$$A = A_0 \xrightarrow[T_1]{} A_1 \xrightarrow[T_2]{} \cdots \xrightarrow[T_{s-1}]{} A_{s-1} \xrightarrow[T_s]{} A_s = I_n.$$

Assim

$$I_n = (E_s \cdots E_1)A$$

onde E_i, $i = 1, \ldots, s$, é a matriz elementar associada à transformação elementar T_i.

Logo

$$A^{-1} = E_s \cdots E_1 = (E_s \cdots E_1)\, I_n.$$

Concluímos então que, se efectuarmos em I_n a mesma sequência de transformações elementares que permitiram obter I_n a partir de A, obtemos a matriz A^{-1}.

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível podemos calcular A^{-1} pelo **processo** seguinte:
Efectuamos transformações elementares sobre linhas de modo a obter I_n a partir de A. Se, a partir de I_n efectuarmos a mesma sequência de transformações elementares sobre linhas, a matriz que no final obtemos é A^{-1}

$$[A \mid I_n] \xrightarrow[(linhas)]{} [I_n \mid A^{-1}].$$

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e verifiquemos se A é invertível calculando a sua característica.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2+(-2)l_1 \\ l_3+l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}.$$

$r(A) = 3$ logo A é invertível.

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

Exemplo

Determinemos A^{-1}.

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+l_1]{l_2+(-2)l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{2}l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1+(-1)l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] = [I_3 \mid A^{-1}].$$

Logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.7 Caracterizações das matrizes invertíveis

Proposição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Tem-se:*

1. *A matriz* AB *é invertível se, e só se,* A *e* B *são ambas invertíveis.*
2. *Se* $AB = I_n$ *então* A *e* B *são ambas invertíveis, tendo-se* $A^{-1} = B$ *e* $BA = I_n$.

Observação

O resultado anterior permite que sejam simplificadas definições, de tipos particulares de matrizes, que envolvam igualdades da forma

$$AB = I_n = BA,$$

com $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, referindo apenas uma das igualdades

$$AB = I_n \quad \text{ou} \quad BA = I_n.$$

Por exemplo, a definição de matriz ortogonal, habitualmente dada como sendo qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$AA^\top = I_n = A^\top A,$$

pode ser simplificada referindo que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é ortogonal se

$$AA^\top = I_n \qquad (\text{ou } A^\top A = I_n).$$