AM 2C – Anotações 0: Cónicas

Felipe B. Pinto 71951 – EQB

29 de dezembro de 2024

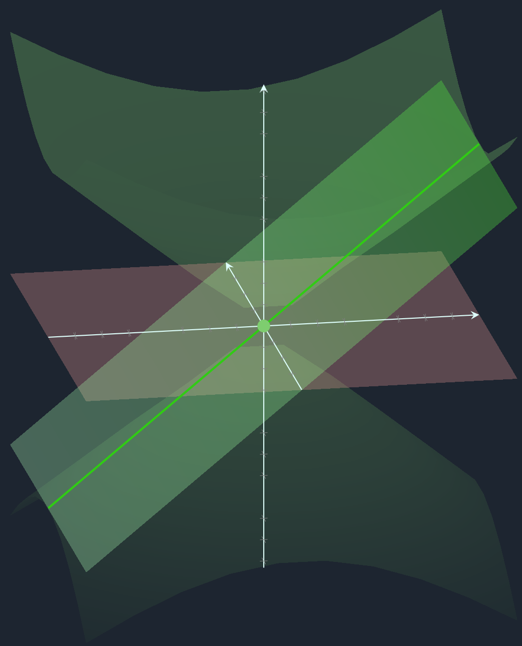
Conteúdo

1 Cônicas 2
2 Degeneração 4
3 Expressão geral 5
4 Espaço 6
5 Reta 7
6 Plano 8
7 Parabolas e Paraboloides 9
8 Elipse e Elipsóides 13
9 Hiperboles e Hiperbolóides . . 17

1 Cônicas

Definições

Intersecção de um plano com um cone



Focos e Diretrizes

$$\boldsymbol{\mathcal{C}on}_m \subset \mathbb{R}^m : |\overrightarrow{\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}}| = e|\overrightarrow{\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}}|$$

$$\left(\begin{array}{ll} \quad \boldsymbol{P} \in \boldsymbol{\mathcal{C}on}_m & \wedge \\ \wedge\, \boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^m & \wedge \\ \wedge\, \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^m & \wedge \\ \wedge\, \boldsymbol{e} \in \mathbb{R} & \end{array}\right)$$

1.1 Ecentricidade

Podemos classificar as conicas em grupos distintos pela ecentricidade

$$\begin{aligned} e = 0 \quad &\implies \quad \text{Circunferencia} \\ 0 < e < 1 \quad &\implies \quad \text{Elipse} \\ e = 1 \quad &\implies \quad \text{Parabola} \\ e > 1 \quad &\implies \quad \text{Hipérbole} \\ \lim(e) = \infty \quad &\implies \quad \text{Reta} \end{aligned}$$

Para encontrar a eccentricidade de uma conica podemos usar imágens simétricas de mesma eccentricidade para que esta seja nula

$$|\overrightarrow{P\,F_1}| \Big/ |\overrightarrow{P\,D_1}| = |\overrightarrow{P\,F_2}| \Big/ |\overrightarrow{P\,D_2}|$$

Notas:

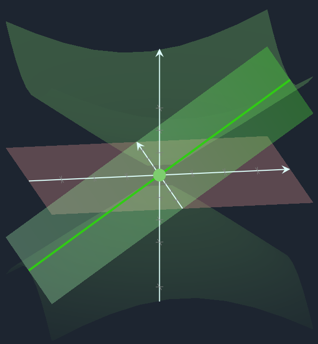
- Em parabolas temos $e = 1$ desnessitando tal ferramenta
- Em elipses a imagem da original é sobreposta com sua simétrica

2 Degeneração

Quando o plano que intersecta a superfície cônica contem o vértice da superfície cônica está é considerada degenerada

Degeneradas

- Ponto
- Reta
- Módulo



Não Degeneradas

- Parábolas
- Elípses
- Hipérboles

3 Expressão geral

$$\boldsymbol{\mathcal{C}on_m} \subset \mathbb{R}^n : \left\{ (\boldsymbol{\lambda}^T + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')^T \boldsymbol{A})(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}') = \boldsymbol{k} \quad \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ll} \quad \{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{p}'\} \subset \mathbb{R}^n & \wedge \\ \wedge\, \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{\mathcal{C}_m} & \wedge \\ \wedge\, \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n \times n} & \wedge \\ \wedge\, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R} & \end{array} \right)$$

$$|\overrightarrow{P\,F}| = e\,|\overrightarrow{P\,D}| \implies$$
$$\implies \sqrt{(x - x')^2 + (y - (y' + c))^2} = e\,\sqrt{(x - x')^2 + (y - (y' - e\,c))^2} \ldots$$

Forma canônica

$$\boldsymbol{\mathcal{C}on_m} \subset \mathbb{R}^n : \left\{ (\boldsymbol{\lambda}^T + \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{A})\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ll} \quad \{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{p}'\} \subset \mathbb{R}^n & \wedge \\ \wedge\, \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{\mathcal{C}on_m} & \wedge \\ \wedge\, \boldsymbol{A} \in \boldsymbol{\mathcal{M}}_{n \times n} : \left\{ \boldsymbol{a}_{i,j} = 0 \forall\, \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j} \right. & \wedge \\ \wedge\, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R} & \end{array} \right)$$

Despresa:

- Ponto central (p')
- Rotações (apenas matrizes A diagonais)

para $\mathbb{R}^2$ e $p' = 0_2$

$$\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{e} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}/2 \\ \boldsymbol{c}/2 & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = -\boldsymbol{f} \implies$$
$$\implies \boldsymbol{a\,x^2 + b\,y^2 + c\,x\,y + d\,x + e\,y + f = 0}$$

Para $\mathbb{R}^3$ e $p' = 0_3$

$$\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{i} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{d}/2 & \boldsymbol{e}/2 \\ \boldsymbol{d}/2 & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{f}/2 \\ \boldsymbol{e}/2 & \boldsymbol{f}/2 & \boldsymbol{c} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = -\boldsymbol{j} \implies$$
$$\implies \boldsymbol{a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + d\,x\,y + e\,x\,z + f\,y\,z +}$$
$$\boldsymbol{+ g\,x + h\,y + i\,z + j = 0}$$

4 Espaço

Equação vetorial

$$\boldsymbol{E_m} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : \left\{ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{\lambda_i} \boldsymbol{U_i} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ll} & \{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A}\} \subset \boldsymbol{E} \quad \wedge \\ \wedge & \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}\} \subset \mathbb{N} \quad \wedge \\ \wedge & \boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{n} \end{array} \right)$$

Equações paramétricas

$$\boldsymbol{P_i} = \boldsymbol{A_i} + \sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{\lambda_{j,i}} \boldsymbol{U_{j,i}}$$

Exemplos

- $m = 0 \implies \text{ponto}$
- $m = 1 \implies \text{reta}$
- $m = 2 \implies \text{plano}$

5 Reta

Equação vetorial

$$r \subset \mathbb{R}^n : \{P = A + \lambda U\}$$

$$\begin{pmatrix} \{P, A\} \in r & \wedge \\ \wedge\, U \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\} & \wedge \\ \wedge\, \lambda \in \mathbb{R} & \end{pmatrix}$$

Definem uma reta:

- 2 Pontos
- 1 Ponto e 1 vetor

Vetor diretor: Vetor não nulo paralelo a reta

Equações cartezianas

Equações paramétricas

$$P_i = A_i + \lambda U_i \quad \forall\, i \leq n$$

Equações normais

$$\left\{\begin{matrix} P_i = A_i + \lambda U_i & \wedge \\ \wedge\, P_j = A_j + \lambda U_j & \end{matrix}\right\} \implies \lambda = \frac{P_i - A_i}{U_i} = \frac{P_j - A_j}{U_j}$$
$$\begin{pmatrix} \{i, j\} \leq n & \wedge \\ \wedge\, \{U_i, U_j\} \neq 0 & \end{pmatrix}$$

Equações reduzidas

$$r \subset \mathbb{R}^n : \left\{P_i = A'_i + P_j\, U'_i\right\}$$

$$\begin{pmatrix} \{i, j\} \in \mathbb{N} & \wedge \\ \wedge\, \{i, j\} \leq n & \wedge \\ \wedge\, i \neq j & \wedge \\ \wedge\, U'_i = U_i / U_j & \wedge \\ \wedge\, A'_i = A_i - A_j\, U'_i & \wedge \\ \wedge\, U_j \neq 0 & \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{matrix} P_i = A_i + \lambda U_i & \wedge \\ \wedge\, \lambda = (P_j - A_j)/U_j : U_j \neq 0 & \end{matrix}\right\} \implies$$
$$\implies P_i = A_i + U_i\, (P_j - A_j)/U_j =$$
$$= A'_i + U'_i\, P_j : \left\{\begin{matrix} U'_i = U_i / U_j & \wedge \\ \wedge\, A'_i = A_i - A_j\, U'_i & \wedge \\ \wedge\, U_j \neq 0 & \end{matrix}\right\}$$

Reduzida pois possui uma equação a menos comparando com as equações cartezianas

6 Plano

Equação vetorial

$$\boldsymbol{\pi} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : \left\{ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} + \sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{j}} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} \quad \{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{A}\} \in \boldsymbol{\pi} & \wedge \\ \wedge \{\boldsymbol{n}, \boldsymbol{j}\} \in \mathbb{N} & \wedge \\ \wedge\, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{2} & \wedge \\ \wedge\, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} & \wedge \\ \wedge\, \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{j}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}\, \forall\, \boldsymbol{j} & \end{pmatrix}$$

Definem um plano:

- 3 Pontos
- 1 Ponto e 1 Vetor
- 1 Ponto e 2 vetores não paralelos

Vetores diretores: Vetores não nulos e não colineares paralelos ao plano.

Equações cartesianas

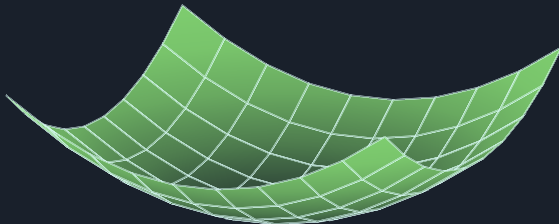
Equações paramétricas

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{i}} + \sum_{\boldsymbol{j}=\mathbf{1}}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}} \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}}$$

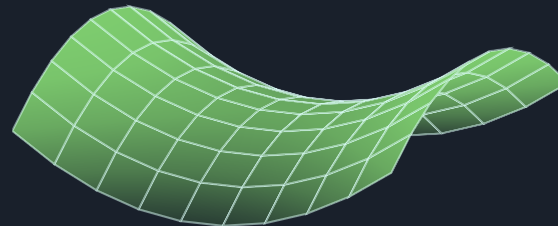
Equação geral

$$\boldsymbol{A} + \sum_{\boldsymbol{i}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{i}} = \mathbf{0}$$

7 Parabolas e Paraboloides



Elíptico



Hiperbólico

Definição

$$\boldsymbol{\mathcal{P}ar_m \subset \mathcal{C}on_m : e = 1}$$

Um conjunto que consiste em todos os pontos em um plano equidistantes de um determinado ponto fixo e uma determinada linha fixa no plano é uma parábola. O ponto fixo é o foco da parábola. A linha fixa é a diretriz.

7.1 Parabolas em $\mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}ar_2 \subset \mathcal{C}on_2 : (\lambda^T + (p - p')A)(p - p') = k \implies}$$

$$\implies \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{4\,a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \end{bmatrix} = 0 \implies$$

$$\implies \left\{ \begin{matrix} y = \dfrac{(x - x')^2}{4\,a} + y' \\ \vee \\ x = \sqrt{4\,a(y - y')} + x' \end{matrix} \right\} \implies$$

$$\implies y = x^2 \left(\frac{1}{4\,a} \right) + x \left(\frac{-x'}{2\,a} \right) + \left(\frac{x'^2}{4\,a} + y' \right)$$

$$f \in \mathbb{R}^2 : (x', y' + a)$$
$$L \subset \mathbb{R}^2 : y = y' - a$$

Demonstração

$$|\overrightarrow{p\,f}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - (a + y'))^2} =$$
$$= |\overrightarrow{p\,L}| = \sqrt{(x - x)^2 + (y - (-a + y'))^2} \implies$$
$$\implies (x - x')^2 + ((y - y') - a)^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 - 2\,a(y - y') + a^2 =$$
$$= ((y - y') + a)^2 = (y - y')^2 + 2\,a(y - y') + a^2 \implies$$
$$\implies y = \frac{(x - x')^2}{4\,a} + y' \vee x = \sqrt{4\,a(y - y')} + x'$$

Partindo da forma reduzida

$$y = \alpha\,x^2 + \beta\,x + \gamma \implies$$

$$\implies \left\{ \begin{matrix} a = (4\,\alpha)^{-1} \\ x' = -\beta\,2\,a = -\beta/2\,\alpha \\ y' = \gamma - x'^2/4\,a = \gamma - (\beta^2/4\,\alpha) \end{matrix} \right\}$$

Raizes de uma parabola

$$\boldsymbol{y = 0 = c(x - x_1)(x - x_2)}$$

$$y = 0 = c(x - x_1)(x - x_2) = c\,x^2 - c\,x(x_1 + x_2) + c\,x_1\,x_2$$

$$\boldsymbol{y = a\,x^2 + b\,x + c, \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}}$$

7.2 Parabolas em $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{\mathcal{P}ar_3 \subset \mathcal{C}on_3 : (\lambda^T + (p - p')A)(p - p') = k \implies}$$

$$\implies \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4\,a & 0 & 0 \\ 0 & 4\,b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{bmatrix} =$$

$$= 0 \implies z = \frac{(x - x')^2}{4\,a} + \frac{(y - y')^2}{4\,b} + z'$$

Demonstração

$$p \in \{p \in \mathcal{P}ar_3 : y = y'\} \implies$$
$$\implies |\overrightarrow{p\,f}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y' - y')^2 + (z - (z' + a))^2} =$$
$$= |\overrightarrow{p\,L}| = \sqrt{(x - x)^2 + (y' - y')^2 + (z - (z' - a))^2} \implies$$
$$\implies (x - x')^2 + (z - z')^2 - 2\,a(z - z') + a^2 =$$
$$= (z - z')^2 + 2\,a(z - z') + a^2 \implies$$
$$\implies z = \frac{(x - x')^2}{4\,a} + z'$$

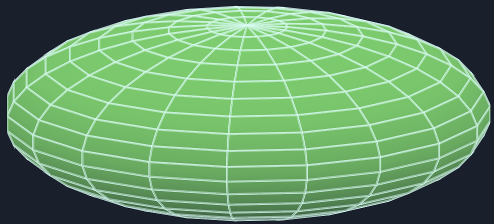
$$p \in \{p \in \mathcal{P}ar_3 : x = x'\} \implies$$
$$\implies |\overrightarrow{p\,f}| = \sqrt{(x' - x')^2 + (y - y')^2 + (z - (z' + b))^2} =$$
$$= |\overrightarrow{p\,L}| = \sqrt{(x' - x')^2 + (y - y')^2 + (z - (z' - b))^2} \implies$$
$$\implies (y - y')^2 + (z - z')^2 - 2\,b(z - z') + b^2 =$$
$$= (z - z')^2 + 2\,b(z - z') + b^2 \implies$$
$$\implies z = \frac{(y - y')^2}{4\,b} + z'$$

$$\therefore z = \frac{(x - x')^2}{4\,a} + \frac{(y - y')^2}{4\,b} + z'$$

Paraboloide Hiperbólico: Possume um dos termos negativos.

$$\boldsymbol{\mathcal{P}ar_3 : b < 0 \veebar a < 0}$$

8 Elipse e Elipsóides



Definição

$$\mathcal{E}li_m \subset \mathcal{C}on_m : 0 < e < 1 \implies$$
$$\implies |\overrightarrow{f_1\,p}| + |\overrightarrow{f_2\,p}| = k \qquad (k \in \mathbb{R})$$

Uma elipse é o conjunto de pontos em um plano cujas distâncias de dois pontos fixos no plano têm uma soma constante. Os dois pontos fixos são os focos da elipse.

A linha através dos focos de uma elipse é o eixo focal da elipse. O ponto no eixo a meio caminho entre os focos é o centro. Os pontos onde o eixo focal e a elipse se cruzam são os vértices da elipse.

Ecentricidade

$$e = \frac{|\overrightarrow{p'\,f}|}{\max(|\overrightarrow{p'\,p}|)}$$

8.1 Elipses em $\mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}li_2 \subset \mathcal{C}on_2 : ((p - p')^T\, A)\,(p - p') = 1 \implies}$$

$$\boldsymbol{\implies \left(\begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} r_1^{-2} & 0 \\ 0 & r_2^{-2} \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \end{bmatrix} = 1 \implies}$$

$$\boldsymbol{\implies \frac{(x - x')^2}{r_1^2} + \frac{(y - y')^2}{r_2^2} = 1}$$

$$\boldsymbol{A \cup \{c\} \subset \mathbb{R}^+ : c < r_1 > r_2}$$

$$\boldsymbol{r_1 = |\overrightarrow{p'\,p}| : p = (\max(x), y')}$$

$$\boldsymbol{r_2 = |\overrightarrow{p'\,p}| : p = (x', \max(y))}$$

$$\boldsymbol{c = |\overrightarrow{p'\,f}| = \sqrt{r_1^2 - r_2^2}}$$

$$\boldsymbol{f_1 \in \mathbb{R}^2 : f_1 = (x' - c, y')}$$

$$\boldsymbol{f_2 \in \mathbb{R}^2 : f_1 = (x' + c, y')}$$

Demonstração

$$|\overrightarrow{p\,f_1}| + |\overrightarrow{p\,f_2}| = k \land \{f_1, f_2\} \subset \mathbb{R}^2 : |\overrightarrow{p'\,f}| = c \land y = y' \implies$$

$$\implies \sqrt{(x - (x' - c))^2 + (y - y')^2} + \sqrt{(x - (x' + c))^2 + (y - y')^2} = 2\,r_1 \implies$$

$$\implies \frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_1^2 - c^2} = 1 \land r_2^2 + c^2 = r_1^2 \implies \frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} = 1$$

8.2 Elípses em $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{E}li_3 \subset \mathcal{C}on_3 : ((p - p')^T A)(p - p') = 1 \implies$$

$$\implies \left(\begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} r_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & r_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r_3^{-2} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x - x' \\ y - y' \\ z - z' \end{bmatrix} = 1 \implies$$

$$\implies \frac{(x - x')^2}{r_1^2} + \frac{(y - y')^2}{r_2^2} + \frac{(z - z')^2}{r_3^2} = 1$$

$$A \cup \{c\} \subset \mathbb{R}^+ : c < r_1 \wedge r_2 < r_1 > r_3$$

$$r_1 = |\overrightarrow{p'\,p}| : p = (\max(x), y', z')$$

$$r_2 = |\overrightarrow{p'\,p}| : p = (x', \max(y), z')$$

$$r_3 = |\overrightarrow{p'\,p}| : p = (x', y', \max(z))$$

$$c = |\overrightarrow{p'\,f}|$$

$$f_1 \in \mathbb{R}^3 : f_1 = (x' - c, y', z')$$

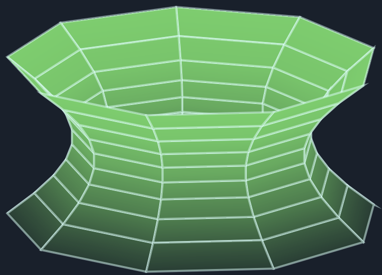
$$f_2 \in \mathbb{R}^3 : f_1 = (x' + c, y', z')$$

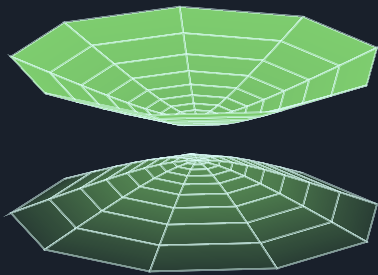
8.3 Parametrização em $\mathbb{R}^3$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}li_3} \subset \mathbb{R}^{\mathbf{3}} : \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}' + \boldsymbol{\lambda} \begin{bmatrix} \cos(\boldsymbol{\theta})\ \cos(\boldsymbol{\lambda}) \\ \cos(\boldsymbol{\theta})\ \sin(\boldsymbol{\lambda}) \\ \sin(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e} \in \boldsymbol{\mathcal{E}li_3} & \wedge \\ \wedge \{\boldsymbol{e}', \boldsymbol{\lambda}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbf{3}} & \wedge \\ \wedge \{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\lambda}\} \subset \mathbb{R} & \wedge \\ \wedge |\boldsymbol{\theta}| \leq \boldsymbol{\pi}/\mathbf{2} & \wedge \\ \wedge\, \mathbf{0} \leq \boldsymbol{\lambda} \leq \mathbf{2}\,\boldsymbol{\pi} & \end{pmatrix}$$

9 Hiperboles e Hiperbolóides





Definição

$$\mathcal{H}ip_m \subset \mathcal{C}on_m : e > 1 \implies$$
$$\implies \left| |\overrightarrow{P\,F_1}| - |\overrightarrow{P\,F_2}| \right| = k \quad (k \in \mathbb{R})$$

Uma hipérbole é o conjunto de pontos em um plano cujas distâncias de dois pontos fixos no plano têm uma diferença constante. Os dois pontos fixos são os focos da hipérbole.

A linha através dos focos de uma hipérbole é o eixo focal. O ponto no eixo a meio caminho entre os focos é o centro da hipérbole. Os pontos onde o eixo focal e a hipérbole se cruzam são os vértices

Eccentricidade

$$e = \left|\overrightarrow{P'\,F}\right| \Big/ \left|\overrightarrow{P'\,V}\right|$$

9.1 Hipérboles em $\mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}ip_2 \subset \mathcal{C}on_2 : \big((P-P')^T\,A\big)(P-P') = 1 \implies}$$
$$\boldsymbol{\implies \left(\begin{bmatrix} x-x' \\ y-y' \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/r_1^2 & 0 \\ 0 & -1/r_2^2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x-x' \\ y-y' \end{bmatrix} = 1 \implies}$$
$$\boldsymbol{\implies \left(\frac{x}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{y}{r_2}\right)^2 = 1}$$

$$\boldsymbol{c = |\overrightarrow{P'\,F}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$$
$$\boldsymbol{V = (x' \pm r_1, y')}$$
$$\boldsymbol{f = (x' \pm c, y')}$$

Demonstração

$$2\,r_1 = |P\,F_2| - |P\,F_1| =$$
$$= \sqrt{(x-(x'-c))^2 + (y-y')^2} - \sqrt{(x-(x'+c))^2 + (y-y')^2} \implies$$
$$\implies \left(2\,r_1 + \sqrt{(x-(x'+c))^2 + (y-y')^2}\right)^2 =$$
$$= 4\,r_1^2 + 4\,r_1\sqrt{(x-x'-c)^2 + (y-y')^2} + \big((x-(x'+c))^2 + (y-y')^2\big) =$$
$$= 4\,r_1^2 + 4\,r_1\left(\sqrt{\begin{matrix}(x-x')^2 \\ -2\,c\,(x-x') + c^2 \\ +(y-y')^2\end{matrix}}\right) + \begin{pmatrix} +(x-x')^2 \\ -2\,c(x-x') \\ +c^2 \\ +(y-y')^2 \end{pmatrix} =$$
$$= \left(\sqrt{(x-(x'-c))^2 + (y-y')^2}\right)^2 = \begin{pmatrix} (x-x')^2 \\ +2\,c\,(x-x') \\ +c^2 \\ +(y-y')^2 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \frac{c\,(x-x')}{r_1} - r_1 = \sqrt{\begin{matrix} (x-x')^2 \\ -2\,c\,(x-x') \\ +c^2 \\ +(y-y')^2 \end{matrix}} \implies$$
$$\implies \left(\frac{c\,(x-x')}{r_1} - r_1\right)^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{c^2\,(x-x')^2}{r_1^2} \\ -2\,c\,(x-x') \\ +r_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x-x')^2 \\ -2\,c\,(x-x') \\ +c^2 \\ +(y-y')^2 \end{pmatrix} \implies$$
$$\implies \left(\frac{x-x'}{r_1}\right)^2 (c^2 - r_1^2) - (y-y')^2 = c^2 - r_1^2 \implies$$
$$\implies \left(\frac{x-x'}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{y-y'}{\sqrt{c^2 - r_1^2}}\right)^2 = \left(\frac{x-x'}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{y-y'}{r_2}\right)^2 = 1$$

Assintotas

$$A(\mathcal{H}ip_2) = \left\{ (x, y) : (y - y') = \pm \frac{r_2}{r_1}(x - x') \right\}$$

9.2 Hipérboles em $\mathbb{R}^3$

Hiperbole de 1 folha

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/c^2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1 \implies$$
$$\implies \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hiperbole de 2 folha

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/c^2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1 \implies$$
$$\implies \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Equações paramétricas para $\mathbb{R}^3$

unica folha

$$\begin{cases} x = a\cosh(v)\cos(\theta) \\ y = b\cosh(v)\sin(\theta) \\ z = c\sinh(v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v \in (-\infty, \infty) \\ \theta \in [0, 2\,pi) \end{cases}$$

duas folhas

$$\begin{cases} x = \quad a\sinh(v)\cos(\theta) \\ y = \quad b\sinh(v)\sin(\theta) \\ z = \pm c\cosh(v) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v \in [0, \infty) \\ \theta \in [0, 2\,pi) \end{cases}$$