Álgebra Linear e Geometria Analítica

4 - Espaços Vectoriais

Departamento de Matemática
FCT/UNL

Programa

1. Matrizes
2. Sistemas de Equações Lineares
3. Determinantes
4. Espaços Vectoriais
5. Aplicações Lineares
6. Valores e Vectores Próprios
7. Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
8. Geometria Analítica

4.1 Espaços Vectoriais: definição, exemplos e propriedades

Definição

Seja E um conjunto não vazio e $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Suponhamos definidas duas operações:

- uma que designamos por adição em E que é uma operação binária:

$$\begin{aligned} + :& E \times E \to E \\ & (a, b) \mapsto a + b \end{aligned}$$

- outra operação, que denominamos multiplicação externa:

$$\begin{aligned} \cdot \ :& \mathbb{K} \times E \to E \\ & (\alpha, u) \mapsto \alpha \cdot u \text{ (ou simplesmente } \alpha u) \end{aligned}$$

4.1 Espaços Vectoriais: definição, exemplos e propriedades

Definição

Dizemos que E, com estas duas operações, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ ou que $(E, +, \cdot)$ é um **espaço vectorial** sobre $\mathbb{K}$ se

1. A adição tem as propriedades:
   - (A_1) $u + v = v + u$.
   - (A_2) $(u + v) + w = u + (v + w)$.
   - (A_3) Existe $0_E \in E$ tal que para qualquer $u \in E$ se tem $u + 0_E = 0_E + u = u$.
   - (A_4) Para cada $u \in E$ existe$-u \in E$ tal que $u + (-u) = -u + u = 0_E$.

   para quaisquer $u, v, w \in E$.
2. A multiplicação externa goza das seguintes propriedades:
   - (M_1) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.
   - (M_2) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.
   - (M_3) $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$.
   - (M_4) $1u = u$,

4.1 Espaços Vectoriais: definição, exemplos e propriedades

Definição

- *aos elementos de E chamamos vectores*
- *aos elementos de $\mathbb{K}$ chamamos escalares*
- *se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dizemos que E é um espaço vectorial complexo*
- *se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dizemos que E é um espaço vectorial real*

Exemplo

- *$\mathbb{K}$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, com as operações usuais de adição e multiplicação de elementos de $\mathbb{K}$. Assim,*

  $\mathbb{R}$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$

  $\mathbb{C}$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$.

  Note que *$\mathbb{C}$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$*

  mas *$\mathbb{R}$ não é um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$. (Porquê?)*

4.1 Espaços Vectoriais: definição, exemplos e propriedades

Exemplo

- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, *com a operação de adição usual de matrizes e com a operação de multiplicação de um elemento de* $\mathbb{K}$ *por uma matriz, definidas no Capítulo 1, é um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$.
- $\mathbb{K}^n$, *com a operação usual de adição de n-uplos, dada por*

$$\forall_{(a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{K}^n} \quad (a_1,\ldots,a_n)+(b_1,\ldots,b_n)=(a_1+b_1,\ldots,a_n+b_n)$$

e com a operação de multiplicação de um escalar por um n-uplo dada por

$$\forall_{\alpha\in\mathbb{K}} \ \forall_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{K}^n} \quad \alpha\cdot(a_1,\ldots,a_n)=(\alpha a_1,\ldots,\alpha a_n),$$

é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

4.1 Espaços Vectoriais: definição, exemplos e propriedades

Exemplo

- $\mathbb{K}_n[x]$, *o conjunto de todos os polinómios na variável* x, *com coeficientes em* $\mathbb{K}$, *de grau menor ou igual a* n, *com* $n \in \mathbb{N}_0$, *isto é,*

$$\mathbb{K}_n[x] = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 : \ a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{K}\}.$$

$\mathbb{K}_n[x]$ *com as operação de adição usual de polinómios, dada por*
$\forall_{(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0),(b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0) \in \mathbb{K}_n[x]}$

$$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0) =$$

$$= (a_n + b_n) x^n + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

e com a multiplicação usual de um escalar por um polinómio, dada por
$\forall_{\alpha \in \mathbb{K}} \quad \forall_{(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) \in \mathbb{K}_n[x]}$

$$\alpha \cdot (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = (\alpha a_n) x^n + \cdots + (\alpha a_1) x + (\alpha a_0),$$

é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

4.1 Espaços Vectoriais: definição, exemplos e propriedades

Observação

- $\mathbb{C}_n[x]$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}_n[x]$ não é um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$.

Exemplo

- *Representamos por $\mathbb{K}[x]$ o conjunto de todos os polinómios na variável x, com coeficientes em $\mathbb{K}$ (sem restrição do grau).*

  Podemos afirmar que $\mathbb{K}[x]$, com as operações usuais de adição de polinómios e de multiplicação de um elemento de $\mathbb{K}$ por um polinómio, é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$.

4.1 Espaços Vectoriais: definição, exemplos e propriedades

Exemplo

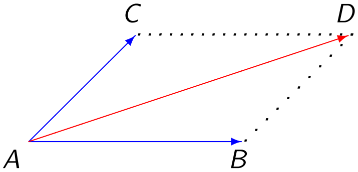
- $\mathcal{A}$ - *o conjunto dos pontos do plano (ou do espaço).*

  vector $\overrightarrow{AB}$ *- o segmento orientado com origem no ponto A e extremidade final no ponto B (A e B de* $\mathcal{A}$*);*

  V_A *- o conjunto dos vectores aplicados com origem no ponto A.*

  V_A *com a adição dada pela regra do paralelogramo:*

  $$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

  e multiplicação externa que a cada real α *e a cada vector* $\overrightarrow{AB}$ *associa o vector* $\alpha\overrightarrow{AB}$ *cuja direcção é a do vector* $\overrightarrow{AB}$*,o sentido é o de* $\overrightarrow{AB}$ *se* $\alpha > 0$ *e é o contrário se* $\alpha < 0$ *(se* $\alpha = 0$ *então* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ *) e cujo comprimento é* $\|\alpha\overrightarrow{AB}\| = |\alpha|\,\|\overrightarrow{AB}\|$

  é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$ *(isto é, um espaço vectorial real).*

4.1 Espaços Vectoriais: definição, exemplos e propriedades

Proposição

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e seja $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in E$. Tem-se:

1. *O elemento neutro da adição em E é único (representa-se por 0_E);*
2. *Para cada $u \in E$, o oposto de u, para a adição em E é único (o oposto para a adição de $u \in E$ representa-se por $-u$);*
3. $\alpha 0_E = 0_E$;
4. $0_{\mathbb{K}} u = 0_E$;
5. $(-1)u = -u$.
6. *Se $\alpha u = 0_E$ então $\alpha = 0$ ou $u = 0_E$.*

Dem. **1.** Suponhamos que z e z' são ambos elementos neutros da adição em E. Como z é elemento neutro, tem-se $z + z' = z'$. Por outro lado, como z' também é elemento neutro, verifica-se que $z + z' = z$. Logo

$$z = z'.$$

4.1 Espaços Vectoriais: definição, exemplos e propriedades

Dem. **4.** Como $0 = 0 + 0$, tem-se $0u = (0 + 0)u$ e aplicando a propriedade (M_2) da Definição de Espaco Vectorial obtemos$0u = 0u + 0u$. Adicionando o oposto de $0u$ a cada um dos membros da igualdade anterior concluímos que

$$0_E = 0u.$$

5. Para demonstrar que $(-1)u = -u$ basta verificar que $(-1)u + u = 0_E$. Atendendo a (M_4) e a (M_2) da definição de espaço vectorial tem-se

$$(-1)u + u = (-1)u + 1u = ((-1) + 1)u = 0u.$$

Por 3. desta proposição concluímos o que pretendíamos.

6. Suponhamos que $\alpha u = 0_E$.
Tem-se um, e um só, dos seguintes casos: $\alpha = 0$ ou $\alpha \neq 0$.
Se $\alpha = 0$ então o resultado está demonstrado.
Se $\alpha \neq 0$ então α^{-1} existe. Da igualdade $\alpha u = 0_E$ resulta

$$\alpha^{-1}(\alpha u) = \alpha^{-1}0_E \Leftrightarrow (\alpha^{-1}\alpha)u = 0_E \Leftrightarrow 1_{\mathbb{K}}u = 0_E \Leftrightarrow u = 0_E,$$

conforme pretendíamos demonstrar.

Notação

Sendo E um espaço vectorial, é usual designar o vector 0_E por **vector nulo** de E ou **zero** de E.
Para $u, v \in E$ também se utiliza a notação $u - v$ para representar o vector $u + (-v)$.

Observação

1. Na Definição Espaço Vectorial a afirmação de que E é um conjunto *não vazio* é redundante dado que E tem, pelo menos, o elemento 0_E. Tal elemento pode ser o único elemento de E.
2. Na definição de espaço vectorial também é redundante a afirmação de que a adição é *comutativa*.(Porquê?)

4.2 Subespaços vectoriais

Definição

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Um subconjunto F de E diz-se um subespaço vectorial de E, ou simplesmente um subespaço de E, se F é também um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações nele naturalmente definidas por ser subconjunto de E (a que chamamos as operações induzidas pelas operações de E no conjunto F).

Teorema

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Tem-se que F é um subespaço de E se, e só se, satisfizer as condições seguintes:

1. $F \subseteq E$
2. $0_E \in F$ *(2'. ou $F \neq \emptyset$)*
3. $\forall_{u,v \in F} \quad u + v \in F$
4. $\forall_{\alpha \in \mathbb{K}} \ \forall_{u \in F} \quad \alpha u \in F$

4.2 Subespaços vectoriais

Dem. Suponhamos que F é um subespaço de E. Logo, por definição de subespaço, verificam-se trivialmente 1, 3 e 4.
Para demonstrar 2 vejamos que se tem $0_E = 0_F$ e, portanto, $0_E \in F$.
Basta atender a que, se $u \in F$ então $u + 0_F = u$, e, como $F \subseteq E$, verifica-se ainda que $u + 0_E = u$. Assim

$$u + 0_E = u + 0_F.$$

Adicionando a ambos os membros da igualdade anterior o vector $-u$ resulta que

$$0_E = 0_F.$$

Notemos que, como $0_E \in F$, se tem 2'.
Reciprocamente, suponhamos que 1, 2, 3 e 4 são satisfeitas.
Notemos que as propriedades (A_1), (A_2), (M_1), (M_2), (M_3) e (M_4) da definição de espaço vectorial, sendo válidas para quaisquer elementos de E, também são válidas para quaisquer elementos de F pois $F \subseteq E$.

4.2 Subespaços vectoriais

Dem.

Assim, e como E é um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, para concluir que F é também um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, temos apenas de demonstrar as propriedades (A_3) e (A_4), isto é, que existe elemento neutro para a adição em F (o que está garantido por 2) e que todo o elemento $v \in F$ tem, em F, oposto para a adição.

Como, por 4, para qualquer $v \in F$, se tem $(-1)v \in F$ e dado que $-1(v) = -v$ para todo o elemento $v \in E$, concluímos,que

$$-v \in F,$$

conforme pretendíamos demonstrar.

Se forem satisfeitas 1, 2', 3 e 4 concluímos analogamente que F é um espaço vectorial. Temos apenas de garantir que, em F, existe elemento neutro para a adição.

De $2'$. $F \neq \emptyset$ resulta que existe $u \in F$. Por 4, tem-se $0u \in F$.

Como $u \in E$ e se verifica $0u = 0_E$, concluímos que

$$0_E \in F.$$

4.2 Subespaços vectoriais

Exemplos

Consideremos o espaço vectorial $\mathbb{R}^2$. Facilmente se verifica que são subespaços de $\mathbb{R}^2$:

1. $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = 0\right\} = \{(x,0) : \; x \in \mathbb{R}\}$ *(eixo OX)*
2. $G = \{(0,y) : \; y \in \mathbb{R}\}$ *(eixo OY)*
3. $H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = y\right\}$ *(bissectriz dos quadrantes ímpares)*
4. $L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = -y\right\}$ *(bissectriz dos quadrantes pares)*
5. *Para cada* $m \in \mathbb{R}$,
   $R_m = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = mx\right\}$ *(recta que passa na origem e tem declive m)*

No entanto

1. $R_{m,b} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = mx + b\right\}$, *com* $m, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$
   (recta, com declive m, que não passa na origem)
2. $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \neq y\right\}$

não são subespaços de $\mathbb{R}^2$. (Porquê?)

4.2 Subespaços vectoriais

Exemplos

Consideremos o espaço vectorial $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.
São exemplos de subespaços de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *o conjunto das matrizes de* $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$:

1. *Triangulares superiores;*
2. *Triangulares inferiores;*
3. *Diagonais;*
4. *Escalares;*
5. *Simétricas;*
6. *Hemi-simétricas;*
7. *Com a diagonal principal nula.*

Não são subespaços de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *o conjunto das matrizes de* $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$:

1. *Invertíveis;*
2. *Com a diagonal principal com pelo menos um elemento não nulo.*

4.2 Subespaços vectoriais

Exemplos

Seja $\mathbb{K}[x]$ *o conjunto dos polinómios, na variável* x*, com coeficientes em* $\mathbb{K}$.

- *O conjunto dos polinómios de* $\mathbb{K}[x]$ *de grau inferior ou igual a* r*, com* $r \in \mathbb{N}$*, é um subespaço de* $\mathbb{K}[x]$.
- *O conjunto dos polinómios de* $\mathbb{K}[x]$ *de grau igual a* r*, com* $r \in \mathbb{N}$*, não é um subespaço de* $\mathbb{K}[x]$.

Proposição (Subespaços triviais)

Se E *é um espaço vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *então* E *e* $\{0_E\}$ *são subespaços vectoriais de* E.

Observação

Os subespaços de E referidos na proposição anterior designam-se por **subespaços triviais** de E, sendo iguais se, e só se, $E = \{0_E\}$.

4.3 Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Definição

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $u_1, \ldots, u_r$ elementos de E.Dizemos que $v \in E$ é combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_r$ se existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ (não necessariamente únicos) tais que

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r.$$

Aos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ chamamos os coeficientes da combinação linear e a $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ a sequência dos coeficientes da combinação linear.

Exemplo

1. *0_E é combinação linear de quaisquer vectores $u_1, \ldots, u_r$ de um espaço vectorial E pois*

$$0_E = 0u_1 + \cdots + 0u_r.$$

Exemplos

2. *Qualquer vector de* $\mathbb{R}^3$ *é combinação linear dos vectores* $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ *pois*

$$\forall_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \qquad (a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1).$$

3. *Mais geralmente, qualquer vector de* $\mathbb{K}^n$ *é combinação linear dos vectores*

$$e_1, \ldots, e_n$$

em que e_i, $i = 1, \ldots, n$, *é o n-uplo com todas as componentes iguais a 0, excepto a i-ésima componente que é igual a 1, i. e.,*

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,\ldots,0), \\ e_2 & = & (0,1,0,\ldots,0), \\ \vdots & & \ldots \\ e_n & = & (0,\ldots,0,1). \end{array}$$

4.3 Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Exemplo

4. *Em* $\mathbb{R}^2$ *o vector* $(3,3)$ *é combinação linear dos vectores* $(1,1)$, $(2,2)$. *Os coeficientes da combinação linear não são únicos pois*

$$\begin{aligned} (3,3) &= \mathbf{3}(1,1) + \mathbf{0}(2,2), \\ (3,3) &= \mathbf{1}(1,1) + \mathbf{1}(2,2), \\ (3,3) &= \mathbf{7}(1,1) + (\text{-}\mathbf{2})(2,2). \end{aligned}$$

De facto, é suficiente que em $(3,3) = \alpha_1(1,1) + \alpha_2(2,2)$ *se tenha*

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 = 3.$$

Proposição

Seja E *um espaço vectorial e* $u_1, \ldots, u_r$ *elementos de* E. *O conjunto de todas as combinações lineares dos vectores* $u_1, \ldots, u_r$, *isto é,*

$$\{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}\},$$

é um subespaço de E.

4.3 Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Dem. Utilizemos o Critério de Subespaço Vectorial para justificar que $\mathcal{C} = \{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}\}$ é subespaço de E.
Trivialmente, tem-se $\mathcal{C} \subseteq E$.
Atendendo a que $0_E = 0u_1 + \cdots + 0u_r$, concluímos que $0_E \in \mathcal{C}$.
Demonstremos que, para qualquer $\beta \in \mathbb{K}$ e quaisquer $v, w \in \mathcal{C}$, se tem $v + w \in \mathcal{C}$ e $\beta v \in \mathcal{C}$.
Como $v, w \in \mathcal{C}$, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_r \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r \qquad \text{e} \qquad w = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r.$$

Assim,

$$\begin{aligned} v + w &= (\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r) + (\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)\, u_1 + \cdots + (\alpha_r + \beta_r)\, u_r \end{aligned}$$

pelo que $v + w \in \mathcal{C}$.
Dado que

$$\beta v = \beta\,(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r) = (\beta\alpha_1)\, u_1 + \cdots + (\beta\alpha_r)\, u_r$$

tem-se $\beta v \in \mathcal{C}$.
Logo $\mathcal{C}$ é subespaço de E.

4.3 Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Definição

Sejam $u_1, \ldots, u_r$ elementos de um espaço vectorial E. Chamamos subespaço (de E) gerado pela sequência $(u_1, \ldots, u_r)$ ou pelos vectores $u_1, \ldots, u_r$ ao conjunto de todas as combinações lineares dos vectores $u_1, \ldots, u_r$. Tal subespaço é frequentemente denotado por $\langle u_1, \ldots, u_r \rangle$, isto é,

$$\langle u_1, \ldots, u_r \rangle = \{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}\}.$$

Se $F = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ dizemos, ainda, que $u_1, \ldots, u_r$ geram F ou que $u_1, \ldots, u_r$ são geradores de F ou que a sequência $(u_1, \ldots, u_r)$ é geradora de F.

Exemplos

1. $\mathbb{R}^3 = \langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle$.
2. $\mathbb{K}^n = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ sendo $e_i \in \mathbb{K}^n$ o n-uplo com todas as componentes nulas excepto a i-ésima componente que é igual a 1, $i = 1, \ldots, n$.

4.3 Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Exemplos

3. *Quaisquer que sejam $u_1, \ldots, u_r$ vectores de um espaço vectorial E tem-se*
$$0_E \in \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$$
e, para $i \in \{1, \ldots, r\}$,
$$u_i \in \langle u_1, \ldots, u_r \rangle.$$

4. $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = \langle E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{m1}, E_{m2}, \ldots, E_{mn} \rangle$ *em que E_{ij} é a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ com todas as entradas nulas excepto a entrada (i, j) que é igual a 1, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.*

5. $F = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \ a = 2b + c\right\}$ *é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.* *Observemos que*
$$F = \{(2b + c, b, c) : \ b, c \in \mathbb{R}\}$$
e que
$$(2b + c, b, c) = b(2, 1, 0) + c(1, 0, 1)$$
donde
$$F = \langle (2, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle.$$

4.3 Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Exemplos

6. $\mathbb{K}_n[x] = \langle x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1\rangle$ *pois*

$$\forall_{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}_n[x]} \quad a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n \cdot x^n + \cdots + a_1 \cdot x + a_0 \cdot 1.$$

7. *Em* $\mathbb{R}^2$, *considerem-se os vectores*

$$(1,0), (0,1), (-1,3), (-3,4).$$

Tem-se

$$\begin{array}{l}
\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1), (-1,3), (-3,4)\rangle \\
\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1), (-1,3)\rangle \\
\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1)\rangle \\
\langle (1,0)\rangle = \{(x,0) : \ x \in \mathbb{R}\} \subsetneq \mathbb{R}^2.
\end{array}$$

4.3 Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Definição

Um espaço vectorial E diz-se finitamente gerado se existem $r \in \mathbb{N}$ e $u_1, \ldots, u_r \in E$ tais que

$$E = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle.$$

Exemplos

- *São espaços finitamente gerados:* $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[x]$, V_A;
- $\mathbb{K}[x]$ *(o conjunto dos polinómios, na variável x, com coeficientes em $\mathbb{K}$, sem restrição ao grau) não é de dimensão finita.*
  Se $\mathbb{K}[x]$ tivesse dimensão finita
  $$\exists_{r\in\mathbb{N}}\ \exists_{p_1(x),\ldots,p_r(x)\in\mathbb{K}[x]} \qquad \mathbb{K}[x] = \langle p_1(x), \ldots, p_r(x)\rangle\,.$$
  Considerando k o máximo grau dos polinómios $p_1(x), \ldots, p_r(x)$.
  Qualquer polinómio com grau superior a k não se pode escrever como combinação linear dos polinómios $p_1(x), \ldots, p_r(x)$ e, portanto,
  $$\langle p_1(x), \ldots, p_r(x)\rangle \subsetneq \mathbb{K}[x] \qquad \text{(contradição)}.$$

4.3 Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Proposição

Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \ldots, u_r$ e $v_1, \ldots, v_s$ vectores de E. Tem-se

1. $\langle u_1, \ldots, u_r \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$
   se, e só se, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, u_i é combinação linear dos vectores $v_1, \ldots, v_s$.
2. $\langle u_1, \ldots, u_r \rangle = \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$
   se, e só se, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, u_i é combinação linear dos vectores $v_1, \ldots, v_s$ e para todo $j \in \{1, \ldots, s\}$, v_j é combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_r$.

Dem. 1. Suponhamos que $\langle u_1, \ldots, u_r \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$.
Como, para qualquer $i \in \{1, \ldots, r\}$, se tem $u_i \in \langle u_1, \ldots, u_r \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$ concluímos que $u_i \in \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$ o que equivale a afirmar que u_i é combinação linear dos vectores $v_1, \ldots, v_s$.

4.3 Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Dem. Reciprocamente, suponhamos que, para qualquer $i \in \{1, \ldots, r\}$, o vector u_i é combinação linear dos vectores $v_1, \ldots, v_s$, ou equivalentemente, que

$$u_i \in \langle v_1, \ldots, v_s \rangle, \text{ para } i = 1, \ldots, r.$$

Dado que $\langle v_1, \ldots, v_s \rangle$ é um subespaço podemos afirmar que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r \in \langle v_1, \ldots, v_s \rangle,$$

para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$. Assim, se $u \in \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ então $u \in \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$ e, portanto,

$$\langle u_1, \ldots, u_r \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_s \rangle.$$

2. Imediato, atendendo a 1

Proposição

Se $u_1, \ldots, u_r$ são vectores de um espaço vectorial E e existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que u_i é combinação linear dos restantes $r - 1$ vectores então

$$\langle u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_r \rangle = \langle u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_r \rangle.$$

4.3 Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Se numa sequência de vectores existe um vector que é combinação linear dos restantes, a proposição anterior permite afirmar que esse vector pode ser "eliminado" dando origem a uma sequência que, apesar de ter um número de vectores inferior, gera o mesmo subespaço que a sequência inicial.
Se uma sequência de vectores de E inclui o vector 0_E, tal vector pode ser "eliminado" da sequência que o subespaço gerado por esses vectores não se altera.

Proposição

Seja $S = (u_1, \dots, u_r)$ uma sequência de elementos de um espaço vectorial E sobre $\mathbb{K}$ e seja $S' = (u'_1, \dots, u'_r)$ uma sequência que se obtém de S efectuando uma transformação de um dos seguintes tipos:

(I) *Troca de ordem na sequência dos vectores u_i e u_j, com $i \neq j$.*

(II) *Multiplicação do vector u_i, $i \in \{1, \dots, r\}$, por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.*

(III) *Substituição do vector u_i, $i \in \{1, \dots, r\}$, por $u_i + \beta u_j$, com $j \in \{1, \dots, r\}$, $j \neq i$ e $\beta \in \mathbb{K}$.*

Tem-se $\langle u_1, \dots, u_r \rangle = \langle u'_1, \dots, u'_r \rangle$.

4.3 Combinação linear de vectores e subespaço gerado

Observação

De acordo com o resultado anterior, se tivermos m vectores de $\mathbb{K}^n$ e os tomarmos como linhas de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, podemos efectuar na matriz quaisquer transformações elementares sobre linhas, em número finito, que o subespaço (de $\mathbb{K}^n$) gerado pelas linhas não se altera, isto é,se

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} A'$$

então o subespaço gerado pelas linhas da matriz A é igual ao subespaço gerado pelas linhas da matriz A'.
Em particular, podemos transformar A numa matriz A' em forma de escada e garantir que as linhas não nulas de A' geram o mesmo subespaço de $\mathbb{K}^n$ que as linhas da matriz A.

4.4 Dependência e independência linear

Definição

Seja E um espaço vectorial. Sejam $u_1, \ldots, u_r \in E$, com $r \in \mathbb{N}$.

- Para $r = 1$, dizemos que a sequência (u_1) ou que o vector u_1 é **linearmente dependente** quando $u_1 = 0_E$.
- Para $r \geq 2$ dizemos que $(u_1, \ldots, u_r)$ é uma sequência **linearmente dependente**, ou que os vectores $u_1, \ldots, u_r$ são linearmente dependentes,quando pelo menos um dos vectores da sequência é combinação linear dos restantes vectores.

A uma sequência $(u_1, \ldots, u_r)$ que não é linearmente dependente chamamos **linearmente independente** e dizemos que os vectores $u_1, \ldots, u_r$ são linearmente independentes.

Observação

Dois vectores são linearmente dependentes se, e só se, um dos vectores é **múltiplo escalar** do outro, isto é, se é igual ao produto de um escalar pelo outro vector.

4.4 Dependência e independência linear

Exemplos

1. *Em $\mathbb{R}^3$, a sequência $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ é linearmente independente.*
2. *Em $\mathbb{K}^n$, a sequência $(e_1,\ldots,e_n)$ é linearmente independente.*
3. *Em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a sequência $(E_{11},E_{12},\ldots,E_{1n},E_{21},E_{22},\ldots,E_{2n},\ldots,E_{m1},E_{m2},\ldots,E_{mn})$ é linearmente independente.*
4. *No espaço vectorial $F=\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3:\ a=2b+c\}$, a sequência $((2,1,0),(1,0,1))$ é linearmente independente.*
5. *Em $\mathbb{K}_n[x]$, a sequência $(x^n,x^{n-1},\ldots,x,1)$ é linearmente independente.*
6. *Em $\mathbb{R}^2$,*

   $((1,0),(0,1),(-1,3),(-3,4))$ *é uma sequência linearmente dependente.*

   $((1,0),(0,1),(-1,3))$ *é uma sequência linearmente dependente.*

   $((1,0),(0,1))$ *é uma sequência linearmente independente.*

   $((1,0))$ *é uma sequência linearmente independente.*

4.4 Dependência e independência linear

Teorema (Critério de Independência Linear)

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $u_1, \dots, u_r$ vectores de E. Os vectores $u_1, \dots, u_r$ são linearmente independentes se, e só se,a única forma de escrever 0_E como combinação linear dos vectores $u_1, \dots, u_r$ é tomando todos os coeficientes da combinação linear iguais a zero, isto é, se, e só se,

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0.$$

Tal equivale a afirmar que os vectores $u_1, \dots, u_r$ são linearmente dependentes se, e só se,existem $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ não todos nulos tais que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E.$$

Dem. Suponhamos que $u_1, \dots, u_r$ são linearmente dependentes e demonstremos que existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E.$$

4.4 Dependência e independência linear

Dem. Se $r = 1$ então, por definição de dependência linear, tem-se $u_1 = 0_E$. Logo, para qualquer $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, verifica-se que $\alpha u_1 = 0_E$, ficando demonstrado o que se pretendia.
Suponhamos $r \geq 2$. Por hipótese existe $i \in \{1, \ldots, r\}$ tal que u_i é combinação linear dos restantes $r-1$ vectores. Sejam

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$$

tais que

$$u_i = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{i-1} u_{i-1} + \alpha_{i+1} u_{i+1} + \cdots + \alpha_r u_r.$$

Como

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{i-1} u_{i-1} + (-1) u_i + \alpha_{i+1} u_{i+1} + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E,$$

concluímos o que pretendíamos.

4.4 Dependência e independência linear

Exemplo

Em $\mathbb{R}^4$, utilizemos o Critério de Independência Linear para determinar se a sequência $S = ((1,1,1,-1), (0,-1,0,2), (1,0,1,1))$ é linearmente independente.

Se $\alpha_1(1,1,1,-1) + \alpha_2(0,-1,0,2) + \alpha_3(1,0,1,1) = (0,0,0,0)$ isto é, se $(\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0,0)$ então

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

A sequência S é linearmente independente se, e só se, o sistema homogéneo anterior, $AX = 0$, tem apenas a solução $(0,0,0)$, ou equivalentemente, se este sistema é possível determinado.

4.4 Dependência e independência linear

Exemplo

Tal sucede se, e só se, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

verifica

$$\mathrm{r}(A) = 3 = \text{número de incógnitas.}$$

Cálculos simples permitem concluir que $\mathrm{r}(A) = 2$ e, portanto, a sequência S é linearmente dependente.

Proposição

Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \ldots, u_r$ vectores de E. Os vectores $u_1, \ldots, u_r$ são linearmente independentes se, e só se,para todo o vector que se possa escrever como combinação linear de $u_1, \ldots, u_r$ (isto é, vector de $\langle u_1, \ldots, u_r \rangle$) os coeficientes da combinação linear são únicos.

4.4 Dependência e independência linear

Proposição

Seja $S = (u_1, \ldots, u_r)$ uma sequência de vectores de um espaço vectorial E e seja $S' = (u'_1, \ldots, u'_r)$ uma sequência que se obtenha de S efectuando um número finito de transformações dos tipos (I), (II), (III) descritos anteriormente.
Tem-se, S é linearmente dependente (respectivamente, independente) se, e só se, S' é linearmente dependente (respectivamente, independente).

Proposição

Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \ldots, u_r$ vectores de E linearmente independentes. Se $v \in E$ não é combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_r$ tem-se:

1. *$u_1, \ldots, u_r, v$ são linearmente independentes.*
2. $\langle u_1, \ldots, u_r \rangle \subsetneqq \langle u_1, \ldots, u_r, v \rangle$.

Dem. **1.** Consideremos que v não é combinação linear dos vectores linearmente independentes $u_1, \ldots, u_r$ e demonstremos que $u_1, \ldots, u_r, v$ são linearmente independentes.

4.4 Dependência e independência linear

Dem. Suponhamos que $u_1, \ldots, u_r, v$ são linearmente dependentes e cheguemos a uma contradição.
Se $u_1, \ldots, u_r, v$ são linearmente dependentes então, pelo Critério de Independência Linear, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1} \in \mathbb{K}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \alpha_{r+1} v = 0_E.$$

Tem-se $\alpha_{r+1} = 0$ ou $\alpha_{r+1} \neq 0$.
Se $\alpha_{r+1} = 0$ então $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = 0_E$ e, como $u_1, \ldots, u_r$ são linearmente independentes, concluímos que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$, o que contradiz a hipótese de $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$ não serem todos nulos.
Se $\alpha_{r+1} \neq 0$ então, de $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \alpha_{r+1} v = 0_E$, resulta

$$\alpha_{r+1} v = (-\alpha_1) u_1 + \cdots + (-\alpha_r) u_r,$$

ou ainda, $v = \left(-\alpha_{r+1}^{-1}\alpha_1\right) u_1 + \cdots + \left(-\alpha_{r+1}^{-1}\alpha_r\right) u_r$, o que contradiz a hipótese de v não ser combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_r$.
Logo os vectores $u_1, \ldots, u_r, v$ são linearmente independentes.

2.(Exercício)

4.5 Bases e dimensão

Definição

Seja E um espaço vectorial e $(u_1, \ldots, u_n)$ uma sequência de vectores de E. Dizemos que $(u_1, \ldots, u_n)$ é uma **base** de E se é uma sequência geradora de E e linearmente independente.
Convenciona-se que se $E = \{0_E\}$ então o conjunto vazio é base de E.

Observação

Em $\mathbb{R}^2$, tem-se:

- $((1,0),(0,1))$ é uma sequência geradora de $\mathbb{R}^2$ e é linearmente independente.
- $((1,0),(0,1),(-1,3))$ é uma sequência geradora de $\mathbb{R}^2$ mas não é linearmente independente.
- $((1,1),(2,2))$ não é geradora de $\mathbb{R}^2$ e não é linearmente independente.
- $((1,1))$ não é geradora de $\mathbb{R}^2$ mas é linearmente independente.

4.5 Bases e dimensão

Proposição

Num espaço vectorial E finitamente gerado qualquer sequência geradora de E tem um número de vectores superior ou igual ao número de vectores de qualquer sequência linearmente independente.

Dem. Seja $(u_1, \ldots, u_r)$ uma sequência linearmente independente de vectores de E e seja $(v_1, \ldots, v_s)$ uma sequência geradora de E.
Pretendemos demonstrar que $s \geq r$.
Suponhamos que $s < r$ e cheguemos a uma contradição.
Como $u_1, \ldots, u_r \in E$ e $E = \langle v_1, \ldots, v_s \rangle$, concluímos que

$$u_j \in \langle v_1, \ldots, v_s \rangle\,, \quad j = 1 \ldots, r.$$

Sejam $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, s$, $j = 1, \ldots, r$, tais que

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11} v_1 + \cdots + a_{s1} v_s \\ &\vdots \\ u_r &= a_{1r} v_1 + \cdots + a_{sr} v_s\ . \end{aligned}$$

4.5 Bases e dimensão

Dem. Seja

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ & \cdots & \\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{s\times r}(\mathbb{K}).$$

Como $s < r$, podemos afirmar que o sistema homogéneo $AX = 0$ é indeterminado pois um sistema homogéneo é sempre possível e, neste caso, tem-se $\mathrm{r}(A) \leq s < r =$ número de incógnitas.
Seja $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r$ uma solução não nula de tal sistema, isto é,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ & \cdots & \\ a_{s1} & \cdots & a_{sr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou equivalentemente,

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}\alpha_1 & + & \cdots & + & a_{1r}\alpha_r & = & 0 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{s1}\alpha_1 & + & \cdots & + & a_{sr}\alpha_r & = & 0 \end{array} \right. ,$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ não todos nulos.

4.5 Bases e dimensão

Dem. Tem-se

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r = \\
&= \alpha_1(a_{11}v_1 + \cdots + a_{s1}v_s) + \cdots + \alpha_r(a_{1r}v_1 + \cdots + a_{sr}v_s) \\
&= (\alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_r a_{1r})v_1 + \cdots + (\alpha_1 a_{s1} + \cdots + \alpha_r a_{sr})v_s \\
&= (a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1r}\alpha_r)v_1 + \cdots + (a_{s1}\alpha_1 + \cdots + a_{sr}\alpha_r)v_s \\
&= 0v_1 + \cdots + 0v_s = 0_E,
\end{aligned}
$$

com $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ não todos nulos. Pelo Critério de Independência Linear, chegamos a uma contradição com a hipótese de $(u_1, \ldots, u_r)$ ser uma sequência linearmente independente.

Proposição

Se um espaço vectorial E admite uma base com n elementos então todas as bases de E têm n elementos.

Dem. Dado que o resultado é trivial para $n = 0$ consideramos $n \geq 1$. Suponhamos que $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ e $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_p)$ são bases de E. Como $\mathcal{B}$ é uma sequência geradora de E e $\mathcal{B}'$ é uma sequência linearmente independente concluímos, pela Proposição anterior, que $n \geq p$.

4.5 Bases e dimensão

Dem. Por outro lado, como $\mathcal{B}'$ é uma sequência geradora de E e $\mathcal{B}$ é uma sequência linearmente independente, a Proposição anterior permite também concluir que $p \geq n$. Logo $p = n$.

Definição

Seja E um espaço vectorial que admite uma base com n elementos, $n \in \mathbb{N}$. Dizemos que E tem **dimensão** n e escrevemos $\dim E = n$.

Observação

Como convencionámos que o conjunto vazio é base de $E = \{0_E\}$ então, neste caso, $\dim E = 0$.
Um espaço vectorial que como $\mathbb{K}[x]$ não é finitamente gerado diz-se de **dimensão infinita**.

4.5 Bases e dimensão

Exemplos

1. $\dim \mathbb{K}^n = n$, $\dim \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$ e $\dim \mathbb{K}_n[x] = n+1$.

2. Se $\mathcal{D}$ é o conjunto das matrizes diagonais de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ então $\dim \mathcal{D} = n$.

3. Se $\mathcal{T}$ é o conjunto das matrizes triangulares superiores de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ então $\dim \mathcal{T} = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

4. $\mathbb{C}$ é um espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$, mas também é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. No primeiro caso, a sua dimensão é 1 e no segundo caso é 2. (Porquê?) Escrevemos então $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ e $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

4.5 Bases e dimensão

Exemplo

Seja F o subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definido por

$$F = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ b & -b \end{bmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tem-se

$$F = \left\{ a\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Como nenhuma das matrizes geradoras de F é um múltiplo escalar da outra, a sequência

$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

é linearmente independente e, portanto, é uma base de F. Logo

$$\dim F = 2.$$

4.5 Bases e dimensão

Proposição

Seja E um espaço vectorial finitamente gerado. São equivalentes as afirmações:

1. $\dim E = n$.
2. *Existe uma sequência geradora, com n vectores de E, e qualquer sequência geradora de vectores de E tem, no mínimo, n elementos.*
3. *Existe uma sequência linearmente independente, com n vectores de E, e qualquer sequência linearmente independente de vectores de E tem, no máximo, n elementos.*

4.5 Bases e dimensão

Proposição

Seja E um espaço vectorial finitamente gerado. São equivalentes as afirmações:

1. $\dim E = n$.
2. *Qualquer sequência geradora de E, com n vectores , é uma base de E.*
3. *Qualquer sequência linearmente independente, com n vectores de E, é uma base de E.*

4.5 Bases e dimensão

Proposição

Se $S = (v_1, \ldots, v_s)$ é uma sequência geradora de um espaço vectorial E então existe uma subsequência de S que é uma base de E

Esquematicamente temos:

$$\boxed{\begin{array}{c} S \text{ é sequência} \\ \\ \text{geradora de } E \end{array}} \xrightarrow[r \text{ etapas}]{\qquad\qquad (*)} \boxed{S' \text{ base de } E}$$

$^{(*)}$ Em cada uma das r etapas "elimina-se" <u>um</u> vector da sequência que seja combinação linear dos restantes.

4.5 Bases e dimensão

Teorema do Completamento

Se $S = (u_1, \ldots, u_r)$ é uma sequência linearmente independente de vectores de um espaço vectorial E de dimensão n então existe uma base de E que tem S como subsequência. Ou seja, existem vectores $w_1, \ldots, w_{n-r}$ de E, com $n - r \geq 0$, tais que

$$(u_1, \ldots, u_r, w_1, \ldots, w_{n-r})$$

é uma base de E.

Esquematicamente tem-se:

$$\boxed{\begin{array}{c} S \text{ sequência} \\ \text{linearmente independente} \\ \text{de vectores de } E \end{array}} \xrightarrow[s \in \mathbb{N}_0]{s \text{ etapas}^{(**)}} \boxed{S'' \text{ é base de } E}$$

(**) Em cada uma das s etapas "acrescenta-se" um vector à sequência que não seja combinação linear dos restantes.

Proposição

Seja E um espaço vectorial de dimensão finita. Tem-se:

1. *Se F é um subespaço de E então $\dim F \leq \dim E$.*
2. *Se F é um subespaço de E e $\dim F = \dim E$ então $F = E$.*

Proposição

Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \ldots, u_n$ vectores de E. Tem-se, $(u_1, \ldots, u_n)$ é uma base de E se, e só se, todo o vector de E é combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_n$ e são únicos os coeficientes da combinação linear

Definição

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e $(u_1, \ldots, u_n)$ uma base de E. Para cada $v \in E$ os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, únicos, tais que $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ dizem-se as coordenadas de v na base $(u_1, \ldots, u_n)$ ou, mais correctamente, dizemos que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é a sequência das coordenadas de v na base $(u_1, \ldots, u_n)$.

Exemplo

1. $\big((1,0),(0,1)\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Se $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ então, como
$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1),$$
a sequência das coordenadas de (a,b) na base anterior é (a,b).

2. $\big((0,1),(1,0)\big)$ é também uma base de $\mathbb{R}^2$. Em relação a essa base, como
$$(a,b) = b(0,1) + a(1,0),$$
a sequência das coordenadas de (a,b) é (b,a).

3. $\mathcal{B} = \big((-1,1),(0,1)\big)$ é também uma base de $\mathbb{R}^2$. Determinemos a sequência das coordenadas de (a,b) em relação a essa base.
$$(a,b) = \alpha_1(-1,1) + \alpha_2(0,1) \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha_1 = a \\ \alpha_1 + \alpha_2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -a \\ \alpha_2 = a + b \end{cases}.$$
Assim a sequência das coordenadas do vector (a,b) na base $\mathcal{B} = \big((-1,1),(0,1)\big)$ é $(-a, a+b)$.

Exemplo

1. O vector que em relação à base

$$\mathcal{B} = \big((-1,2,3),(0,3,4),(0,0,5)\big)$$

de $\mathbb{R}^3$ tem a sequência de coordenadas $(7,-1,4)$ é o vector

$$\begin{aligned} &7(-1,2,3)+(-1)(0,3,4)+4(0,0,5)= \\ =&(-7,14,21)+(0,-3,-4)+(0,0,20) \\ =&(-7,11,37). \end{aligned}$$

Definição

Designamos por base canónica de $\mathbb{K}^n$, e representamos por $b.c._{\mathbb{K}^n}$, a base $(e_1,\ldots,e_n)$ sendo e_i, $i=1,\ldots,n$, o n-uplo com todas as componentes nulas excepto a i-ésima componente que é igual a 1.

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Teorema

Se F e G são subespaços de um espaço vectorial E então $F \cap G$ é, ainda, um subespaço de E.

Dem. Demonstremos, utilizando o Critério de Subespaço Vectorial, que se F e G são subespaços de E então o mesmo sucede a

$$F \cap G = \{u \in E : \ u \in F \ \wedge \ u \in G\}.$$

Atendendo a que $F \subseteq E$ e $G \subseteq E$ podemos afirmar que $F \cap G \subseteq E$.

Como $0_E \in F$ e $0_E \in G$ concluímos que $0_E \in F \cap G$.

Sejam $u, v \in F \cap G$ e demonstremos que $u + v \in F \cap G$.
Dado que $u, v \in F \cap G$ tem-se $u, v \in F$ e $u, v \in G$.
Atendendo a que $u, v \in F$ e F é um subespaço concluímos que $u + v \in F$. De forma idêntica, dado que $u, v \in G$ e G é um subespaço tem-se $u + v \in G$. Assim, $u + v \in F \cap G$.

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Dem. Finalmente, sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \in F \cap G$ e demonstremos que $\alpha u \in F \cap G$.
Dado que $u \in F \cap G$, podemos afirmar que $u \in F$ e $u \in G$. Como F (respectivamente, G) é um subespaço, concluímos que $\alpha u \in F$ (respectivamente, $\alpha u \in G$). Logo $\alpha u \in F \cap G$.

Exemplo

Em $\mathbb{R}^4$ consideremos os subespaços
$F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - b = 0 \wedge a - b - d = 0\}$
$G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b - c = 0 \wedge d = 0\}$
Sabemos então que
$F \cap G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - b = 0 \wedge a - b - d = 0 \wedge b - c = 0 \wedge d = 0\}$
e, portanto,
$F \cap G = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = c \wedge b = c \wedge d = 0\} = \{(c, c, c, 0) : c \in \mathbb{R}\} =$
$\{c(1, 1, 1, 0) : c \in \mathbb{R}\} = \langle(1, 1, 1, 0)\rangle$.

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Processo para a determinação da intersecção de dois subespaços:

1. Obter um sistema (S_1) (resp. (S_2)) de equações lineares cujo conjunto de soluções é F (resp. G).
2. Considerar um sistema (S) constituído por todas as equações de (S_1) e por todas as equações de (S_2).
3. O conjunto das soluções do sistema (S) é $F \cap G$.

Ao contrário do que sucede com a intersecção de subespaços, a união de subespaços pode não ser um subespaço, conforme ilustra o exemplo seguinte.

Exemplo

Em $\mathbb{R}^2$, consideremos os subespaços
$F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = 0\right\}$ e $G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = 0\right\}$.
Tem-se $F \cup G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = 0 \; \vee \; y = 0\right\}$.
Logo

$$(2, 0) \in F \cup G \qquad \text{e} \qquad (0, 3) \in F \cup G$$

mas

$$(2, 0) + (0, 3) = (2, 3) \notin F \cup G.$$

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Proposição

Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E. Tem-se $F \cup G$ é um subespaço de E se, e só se, $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

Dem. Conforme já observámos, se $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$ então $F \cup G$ é um subespaço de E.
Demonstremos que se $F \cup G$ é um subespaço de E então $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.
Suponhamos que $F \cup G$ é um subespaço de E, com $F \not\subseteq G$, e justifiquemos que $G \subseteq F$, isto é, que para todo $v \in G$ se tem $v \in F$.
Como $F \not\subseteq G$ existe $u \in F$ tal que $u \notin G$. Seja $u \in F$ tal que $u \notin G$ e seja $v \in G$. Notemos que $u, v \in F \cup G$ e dado que, por hipótese, $F \cup G$ é um subespaço de E podemos afirmar que $u + v \in F \cup G$.
Assim $u + v \in F$ ou $u + v \in G$. Não pode ter-se $u + v \in G$ porque, nesse caso, como $v \in G$ e $-v \in G$, concluíamos que $(u + v) + (-v) = u \in G$, o que é uma contradição pois, por hipótese, $u \notin G$.
Logo $u + v \in F$. Como $u \in F$ e, portanto, $-u \in F$, concluímos que $(-u) + (u + v) = v \in F$, conforme pretendíamos demonstrar.

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Definição

Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E. Chamamos **soma** *dos subespaços F e G ao conjunto*

$$F + G = \{u + v : \ u \in F \ \wedge \ v \in G\}.$$

Proposição

A soma de dois subespaços de um espaço vectorial E é ainda um subespaço de E.

Exemplo

Sejam $E = \mathbb{R}^2$, $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ e $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.
Tem-se $F \cup G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0 \ \vee \ y = 0\}$.
Assim, por exemplo, $(2,3) \notin (F \cup G)$ e, portanto, $F \cup G \subsetneq \mathbb{R}^2$.
Mas $F + G = \mathbb{R}^2$, pois com $(x,0) \in F$ e $(0,y) \in G$ temos

$$\forall_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \quad (x,y) = (x,0) + (0,y).$$

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Proposição

Seja E um espaço vectorial e F e G subespaços de E tais que

$$F = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle \qquad e \qquad G = \langle v_1, \ldots, v_s \rangle.$$

Tem-se

$$F + G = \langle u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s \rangle.$$

Exemplo

Sejam $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y + 2z\}$ e $G = \langle (1, 0, -1), (0, 3, 1) \rangle$.

Temos que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y + 2z\} = \{(y + 2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$.

Como para quaisquer $y, z \in \mathbb{R}$ se tem $(y + 2z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(2, 0, 1)$, concluímos que $F = \langle (1, 1, 0), (2, 0, 1) \rangle$.

Dado que $G = \langle (1, 0, -1), (0, 3, 1) \rangle$, pela proposição anterior, temos

$$F + G = \langle (1, 1, 0), (2, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 1) \rangle.$$

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Proposição

Seja E um espaço vectorial e sejam F e G subespaços de E. São equivalentes as afirmações:

1. *Se $(u_1, \ldots, u_n)$ é uma base de F e $(v_1, \ldots, v_s)$ é uma base de G então $(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_s)$ é uma base de $F + G$.*
2. $F \cap G = \{0_E\}$.
3. *Se $u, u' \in F$ e $v, v' \in G$ são tais que $u + v = u' + v'$ então $u = u'$ e $v = v'$.*

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Definição

Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E.
Dizemos que E é a **soma directa** dos subespaços F e G e escrevemos

$$E = F \oplus G$$

se para cada $w \in E$ existe um único par (u, v) com $u \in F$ e $v \in G$ tal que $w = u + v$.

Nestas condições dizemos que F (resp. G) é um **subespaço suplementar** de G (resp. F) em E.

Dizemos ainda que o vector u é a **projecção** de w sobre F, segundo G e que o vector v é a **projecção** de w sobre G, segundo F.

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Proposição

Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E. São equivalentes as afirmações:

1. $E = F \oplus G$.
2. $E = F + G$ e $F \cap G = \{0_E\}$.

Exemplo

Em $\mathbb{R}^3$, consideremos os subespaços $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; y = 0\right\}$,
$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x = 0 \wedge y = z\right\}$ e $H = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; y = -z\right\}$.

1 - Verifiquemos que $F + G = \mathbb{R}^3$. De facto, é trivial que $F + G \subseteq \mathbb{R}^3$.

Para demonstrar que $\mathbb{R}^3 \subseteq F + G$ basta atender a que, para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, se tem $(x, y, z) = (x, 0, z - y) + (0, y, y)$, com $(x, 0, z - y) \in F$ e $(0, y, y) \in G$.

Assim $F + G = \mathbb{R}^3$.

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Exemplo

2 - Analogamente se conclui que $F + H = \mathbb{R}^3$ pois,

para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, se tem $(x, y, z) = (x, 0, z + y) + (0, y, -y)$, com $(x, 0, z + y) \in F$ e $(0, y, -y) \in H$.

3 - Atendendo à Definição de soma directa, ou alternativamente à Proposição anterior, podemos afirmar que para os subespaços F, G e H se tem $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ mas a soma $\mathbb{R}^3 = H + F$ não é directa.

Tem-se ainda $\mathbb{R}^3 = H \oplus G$ (verifique).

4 - Atendendo a que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ e, como $(2, 3, 1) = (2, 0, -2) + (0, 3, 3)$ em que $(2, 0, -2) \in F$ e $(0, 3, 3) \in G$, podemos afirmar que $(2, 0, -2)$ é a projecção de $(2, 3, 1)$ sobre F segundo G e que $(0, 3, 3)$ é a projecção de $(2, 3, 1)$ sobre G segundo F.

Analogamente, como $\mathbb{R}^3 = H \oplus G$ e $(2, 3, 1) = (2, 1, -1) + (0, 2, 2)$ em que $(2, 1, -1) \in H$ e $(0, 2, 2) \in G$, podemos afirmar que $(2, 1, -1)$ é a projecção de $(2, 3, 1)$ sobre H segundo G e que $(0, 2, 2)$ é a projecção de $(2, 3, 1)$ sobre G segundo H.

4.6 Intersecção, união e soma de subespaços

Proposição

Seja E um espaço vectorial de dimensão finita. Se F é um subespaço de E então existe um subespaço G de E tal que

$$E = F \oplus G,$$

isto é, todo o subespaço de um espaço vectorial de dimensão finita tem um suplementar.

Dem. Seja $n = \dim E$. Se $\dim F = 0$, isto é, se $F = \{0_E\}$ então considere-se $G = E$. Se $\dim F = n$, isto é, se $F = E$ então considere-se $G = \{0_E\}$.
Suponhamos então que $\dim F = p$, com $1 \leq p \leq n - 1$.
Seja $(u_1, \ldots, u_p)$ uma base de F. Pelo Teorema do Completamento existem $v_1, \ldots, v_{n-p} \in E$ tais que $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_{n-p})$ é uma base de E.
Considerando $G = \langle v_1, \ldots, v_{n-p} \rangle$ podemos afirmar, que $E = F + G$ e que tal soma é directa.

4.7 O Teorema das Dimensões

Proposição

Teorema das Dimensões

Se E é um espaço vectorial e F e G são subespaços de E de dimensão finita então $F + G$ e $F \cap G$ também têm dimensão finita e

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Observação

Se F e G são subespaços de um espaço vectorial E são equivalentes as afirmações:

1. $F \cap G = \{0_E\}$,
2. $\dim(F \cap G) = 0$,
3. $\dim(F + G) = \dim F + \dim G$.

4.7 O Teorema das Dimensões

Dem. Se F e G têm dimensão finita então o mesmo sucede a $F+G$. Como F tem dimensão finita e $F \cap G$ é um subespaço de F, podemos afirmar que $F \cap G$ tem dimensão finita.
Demonstremos que $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ considerando três casos.

1. $F = \{0_E\}$ ou $G = \{0_E\}$.
Se $F = \{0_E\}$ então $F + G = G$ e $F \cap G = \{0_E\}$. Logo

$$\dim(F+G) = \dim G = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

A demonstração é análoga para $G = \{0_E\}$.

2. $F \neq \{0_E\}$ e $G \neq \{0_E\}$ e $F \cap G = \{0_E\}$.
Seja $(u_1, \ldots, u_r)$ uma base de F e seja $(v_1, \ldots, v_s)$ uma base de G. Como $F \cap G = \{0_E\}$,
sabemos, por uma proposição anterior que a sequência $(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s)$ é uma base de $F+G$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\dim(F+G) &= r + s = r + s - 0 \\ &= \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).\end{aligned}$$

4.7 O Teorema das Dimensões

Dem. **3.** $F \neq \{0_E\}$ e $G \neq \{0_E\}$ e $F \cap G \neq \{0_E\}$.
Sejam $r = \dim F$, $s = \dim G$ e $t = \dim(F \cap G)$. Seja $(w_1, \ldots, w_t)$ uma base de $F \cap G$. Como $(w_1, \ldots, w_t)$ é uma sequência
linearmente independente de vectores de $F \cap G$ e, portanto, de vectores de F, pelo Teorema do Completamento existem $y_1, \ldots, y_{r-t} \in F$ tais que

$$(w_1, \ldots, w_t, y_1, \ldots, y_{r-t})$$

é uma base de F.
Argumentos análogos permitem afirmar que existem vectores
$z_1, \ldots, z_{s-t} \in G$ tais que $(w_1, \ldots, w_t, z_1, \ldots, z_{s-t})$ é uma base de G.
Dado que

$$F = \langle w_1, \ldots, w_t, y_1, \ldots, y_{r-t} \rangle \quad \text{e} \quad G = \langle w_1, \ldots, w_t, z_1, \ldots, z_{s-t} \rangle,$$

podemos afirmar que

$$\begin{aligned} F + G &= \langle w_1, \ldots, w_t, y_1, \ldots, y_{r-t}, w_1, \ldots, w_t, z_1, \ldots, z_{s-t} \rangle \\ &= \langle w_1, \ldots, w_t, y_1, \ldots, y_{r-t}, z_1, \ldots, z_{s-t} \rangle. \end{aligned}$$

4.7 O Teorema das Dimensões

Dem. Utilizando o Critério de Independência Linear demonstremos que a sequência $(w_1, \dots, w_t, y_1, \dots, y_{r-t}, z_1, \dots, z_{s-t})$ é linearmente independente. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_t, \beta_1, \dots, \beta_{r-t}, \gamma_1, \dots, \gamma_{s-t} \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_t w_t + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_{r-t} y_{r-t} + \\ + \gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_{s-t} z_{s-t} = 0_E.$$

Considerando
$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_t w_t + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_{r-t} y_{r-t} \\ &= (-\gamma_1) z_1 + \cdots + (-\gamma_{s-t}) z_{s-t}, \end{aligned}$$

podemos afirmar que $u \in F \cap G$ e, como $F \cap G = \langle w_1, \dots, w_t \rangle$, existem $\delta_1, \dots, \delta_t \in \mathbb{K}$ tais que

$$u = \delta_1 w_1 + \cdots + \delta_t w_t.$$

Dado que

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_t w_t + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_{r-t} y_{r-t} \\ &= \delta_1 w_1 + \cdots + \delta_t w_t + 0 y_1 + \cdots + 0 y_{r-t} \end{aligned}$$

4.7 O Teorema das Dimensões

Dem. e como $(w_1, \ldots, w_t, y_1, \ldots, y_{r-t})$ é linearmente independente, então

$$\alpha_1 = \delta_1, \ldots, \alpha_t = \delta_t, \beta_1 = 0, \ldots, \beta_{r-t} = 0.$$

Analogamente, como $(w_1, \ldots, w_t, z_1, \ldots, z_{s-t})$ é linearmente independente, da igualdade

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_t w_t + 0y_1 + \cdots + 0y_{r-t} + +\gamma_1 z_1 + \cdots + \gamma_{s-t} z_{s-t} = 0_E,$$

resulta

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_t = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{s-t} = 0.$$

Assim a sequência $(w_1, \ldots, w_t, y_1, \ldots, y_{r-t}, z_1, \ldots, z_{s-t})$ é linearmente independente e, portanto, é uma base de $F + G$. Logo

$$\begin{aligned} \dim(F+G) &= t + (r-t) + (s-t) \\ &= r + s - t \\ &= \dim F + \dim G - \dim(F \cap G), \end{aligned}$$

como pretendíamos demonstrar.

4.8 Matrizes e Espaços Vectoriais

Nesta secção veremos como utilizar as matrizes para resolver os seguintes problemas:

1. Determinar se uma sequência de vectores de E é linearmente independente.
2. Determinar se um vector pertence ao subespaço gerado por uma dada sequência de vectores.
3. Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência de geradora.
4. Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência linearmente independente, sendo conhecida a dimensão do espaço.
5. Verificar se duas sequências de vectores geram o mesmo espaço vectorial.

4.8 Matrizes e Espaços Vectoriais

Recordemos que se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e

$$A \xrightarrow[(linhas)]{} B$$

então o subespaço gerado pelas linhas da matriz A é igual ao subespaço gerado pelas linhas da matriz B e que as linhas de A são linearmente independentes se, e só se, o mesmo suceder às linhas de B.

Proposição

As linhas não nulas de uma matriz em forma de escada são linearmente independentes.

4.8 Matrizes e Espaços Vectoriais

Vejamos como, utilizando matrizes, respondemos facilmente aos problemas anteriormente enunciados no caso do espaço vectorial $\mathbb{K}^n$.

Seja F um subespaço de $\mathbb{K}^n$ e $S = (u_1, \ldots, u_p)$ uma sequência de vectores de F tais que $F = \langle u_1, \ldots, u_p \rangle$.

Seja $A \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{K})$ a matriz cuja linha i é u_i, $i = 1, \ldots, p$ e seja A' a matriz em forma de escada equivalente por linhas a A.

Sem exigências de rigor escrevemos $\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$ para representar a matriz cuja linha i é u_i, $i = 1, \ldots p$.

1. Determinar se uma sequência de vectores de E é linearmente independente.

1. A sequência S é linearmente independente se, e só se, A' não tem linhas nulas, ou seja, $r\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}\right) = p$.

Exemplo

Considere-se a sequência de vectores de $\mathbb{R}^4$
$S = \big((1,4,3,6),(0,0,0,2),(2,8,1,3)\big)$.

Tal sequência é linearmente independente se, e só se, $r\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}\right) = 3$.

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+(-2)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \longleftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$

concluímos que S é linearmente independente.

2. Determinar se um vector pertence ao subespaço gerado por uma dada sequência de vectores.

2. Determinar se um vector v pertence ao subespaço F de $\mathbb{K}^n$ é equivalente a averiguar se v é combinação linear dos vectores da sequência S, geradora de F.

Isto é $\mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}\right) = \mathrm{r}\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \\ v \end{bmatrix}\right)$.

Exemplo

Seja $F = \left\langle (1,4,3,6),(0,0,0,2),(2,8,1,3) \right\rangle$.
Como vimos no exemplo anterior, a sequência $\big((1,4,3,6),(0,0,0,2),(2,8,1,3)\big)$ é linearmente independente e, portanto,

$$\text{Base de } F = \big((1,4,3,6),(0,0,0,2),(2,8,1,3)\big).$$

Determinemos se $(1,4,-2,-3) \in F$, utilizando matrizes.

2. Determinar se um vector pertence ao subespaço gerado por uma dada sequência de vectores.

Note que

$$(1, 4, -2, -3) \in F$$

se, só se, $(1, 4, -2, -3)$ *se pode escrever como combinação linear dos vectores*

$$(1, 4, 3, 6), (0, 0, 0, 2), (2, 8, 1, 3)$$

ou equivalentemente, se, e só se, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

têm a mesma característica.

2. Determinar se um vector pertence ao subespaço gerado por uma dada sequência de vectores.

Vimos no exemplo anterior que $\mathrm{r}(A) = 3$ *e, como*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3+(-2)l_1 \\ l_4+(-1)l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \longleftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_3+(-1)l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \longleftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (f.e.),$$

concluímos que $\mathrm{r}(C) = 3$ *e, portanto,*

$$(1, 4, -2, -3) \in F.$$

3. Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência de geradora.

3.a Uma base de F é constítuida pelas linhas não nulas de A', isto é, se

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \xrightarrow[(linhas)]{} \begin{bmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_s \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$ (f.e.), $(u'_1, \ldots, u'_s)$ é uma base de F.

Exemplo

Consideremos o subespaço de $\mathbb{R}^3$ $G = \langle (1, -1, 0), (0, 1, 4), (2, -1, 4) \rangle$ e determinemos uma base de G.
Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 + (-2) l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 + (-1) l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}.$$

3. Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência de geradora.

Logo,

$$G = \left\langle (1,-1,0),(0,1,4) \right\rangle .$$

Como a sequência

$$\big((1,-1,0),(0,1,4)\big)$$

é geradora de G *e é linearmente independente (note que os elementos da sequência são as linhas não nulas de uma matriz em forma de escada) então tal sequência é uma base de* G, *tendo-se* $\dim G = 2$.

3. Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência de geradora.

3. b As linhas não nulas de A' são uma base de F. Tendo em consideração as eventuais trocas efectuadas para obter A' a partir de A, determinamos facilmente uma subsequência de S que é uma base de F.

Exemplo

Se $G = \langle (1,2,-1),(2,4,-2),(1,5,2)\rangle$ então Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2+(-2)l_1 \\ l_3+(-1)l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}.$$

Analogamente ao exemplo anterior, uma base de G é $((1,2,-1),(0,3,3))$ mas também, tendo em atenção as trocas efectuadas, uma base de G é

$$((1,2,-1),(1,5,2)).$$

3. Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência de geradora.

Exemplo

Seja $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = y + 2z\}$ e $G = \langle (1,0,-1), (2,0,4), (0,3,1) \rangle$. Vimos anteriormente que $F + G = \langle (1,1,0), (2,0,1), (1,0,-1), (2,0,4), (0,3,1) \rangle$.
Para obter uma base de $F + G$ procedemos da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2+(-2)l_1 \\ l_3+(-1)l_1 \\ l_4+(-2)l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{l_3+(-2)l_2 \\ l_4+(-2)l_2 \\ l_5+3l_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_4+(-2)l_3 \\ l_5+(\frac{2}{3})l_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo, uma base de $F + G$ é $\big((1,1,0), (0,-1,-1), (0,0,3)\big)$ e também $\big((1,1,0), (2,0,1), (1,0,-1)\big)$.

4. Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência linearmente independente, sendo conhecida a dimensão do espaço.

4. Seja $S' = (u_1, \ldots, u_p)$ uma sequência linearmente independente de vectores de em subespaço F de $\mathbb{K}^n$ e seja s a dimensão de F. Seja $S' = (w_1, \ldots, w_s)$ uma base de F. Se $p < s$, obtemos uma base de F "acrescentando" $s - p$ vectores a S', com a restrição de tais vectores pertencerem a F e a nova sequência ser linearmente independente.

Ou seja, se

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_s \end{bmatrix} \xrightarrow[(linhas)]{} \begin{bmatrix} w'_1 \\ \vdots \\ w'_s \end{bmatrix} = W' \quad \text{(f.e.)}$$

e

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \xrightarrow[(linhas)]{} \begin{bmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_p \end{bmatrix} = U' \quad \text{(f.e.)}$$

então considerem-se as $s - p$ linhas de W', $(w'_{i1}, \ldots w'_{i_{s-p}})$ com pivôs em índice de coluna distintos dos da matriz U'. Nestas condições a sequência $(u'_1, \ldots, u'_p, w'_{i1}, \ldots w'_{i_{s-p}})$ é uma base de F .

Também é base de F a sequência $(u_1, \ldots, u_p, w'_{i1}, \ldots w'_{i_{s-p}})$.

4. Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência linearmente independente, sendo conhecida a dimensão do espaço.

Exemplo

Considere-se a sequência de vectores de $\mathbb{R}^4$

$$S = \Big((1,4,3,6),(0,0,0,2),(2,8,1,3)\Big).$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3+(-2)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \longleftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$

concluímos que S é linearmente independente.

4. Construir uma base de um espaço a partir de uma sequência linearmente independente, sendo conhecida a dimensão do espaço.

Se acrescentarmos à sequência S, por exemplo, o vector $(0, 1, 0, 0)$ *obtemos ainda uma sequência linearmente independente. Basta atender a que se tem*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(linhas)]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(linhas)]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (f.e.)$$

e $\mathrm{r}(B) = 4$.

Como a sequência $\big((1, 4, 3, 6), (0, 1, 0, 0), (0, 0, -5, 9), (0, 0, 0, 2)\big)$ *é linearmente independente e tem* $4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ *vectores é uma base de* $\mathbb{R}^4$. *É também base de F* $\big((1, 4, 3, 6), (0, 0, 0, 2), (2, 8, 1, 3), (0, 1, 0, 0)\big)$.

5. Verificar se duas sequências de vectores geram o mesmo espaço vectorial.

5.Sejam $(u_1, \ldots, u_p)$ e$(v_1, \ldots, v_q)$ sequências de vectores de $\mathbb{K}^n$. Se

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} \xrightarrow[(linhas)]{} U'' \quad \text{(f.e.r.)}$$

, e

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_q \end{bmatrix} \xrightarrow[(linhas)]{} V'' \quad \text{(f.e.r.)}$$

então $\langle u_1, \ldots, u_p \rangle = \langle v_1, \ldots, v_q \rangle$ se, e só se são iguais as linhas não nulas das marizes U'' e V''.

Exemplo

Determinemos se as sequências
$((1, -1, 0), (0, 1, 4), (2, -1, 4))$, $((1, 0, 4), (3, -2, 4))$ e $((1, -1, 0), (0, 1, 1))$
geram o mesmo subespaço de $\mathbb{R}^3$.
Atendendo a que

5. Verificar se duas sequências de vectores geram o mesmo espaço vectorial.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 - 2l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 - l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 + l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{(f.e.r.)},$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 - 3l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{-1}{2} l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \textit{(f.e.r.)}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 + l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{(f.e.r.)},$$

concluímos que

$$\langle (1,-1,0),(0,1,4),(2,-1,4) \rangle = \langle (1,0,4),(3,-2,4) \rangle \neq \langle (1,-1,0),(0,1,1) \rangle.$$

Vimos que os problemas enunciados no ínicio desta secção podem ser resolvidos utilizando matrizes, para $E = \mathbb{K}^n$. O que sucede se $E \neq \mathbb{K}^n$? Por exemplo, como resolver os problemas anteriores se

$$E = \mathbb{K}_r[x] \qquad \text{ou} \qquad E = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})?$$

Observação

- Para qualquer espaço vectorial E de dimensão n, se fixarmos em E uma base $\mathcal{B}$ então a "correspondência"

$$f : E \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$u \mapsto (\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

  que a cada vector $u \in E$ associa a sequência das coordenadas de u na base $\mathcal{B}$ (i.e. se $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ então $u = \beta_1 e_1 + \cdots + \beta_n e_n$) é uma aplicação bijectiva.
- A resolução de problemas envolvendo vectores de $E = \mathbb{K}_r[x]$ ou de $E = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ pode ser feita com vectores, respectivamente, de $\mathbb{K}^{r+1}$ ou de $\mathbb{K}^{mn}$ utilizando as sequências das coordenadas dos vectores em causa em relação a uma base fixa $\mathcal{B}$ de E.
- O mesmo raciocínio pode ser seguido para qualquer espaço vectorial E de dimensão finita e assim continuar a utilizar as matrizes para resolver os problemas.

Exemplo

Em $\mathbb{R}_3[x]$, consideremos a sequência

$$S = \left(x^3 + 4x^2 + 3x + 6,\ 2,\ 2x^3 + 8x^2 + x + 3\right).$$

Verifiquemos que S é linearmente independente e determinemos uma base de $\mathbb{R}_3[x]$ que tenha S como subsequência.
Considere-se em $\mathbb{R}_3[x]$ a base $\mathcal{B} = \left(x^3,\ x^2,\ x,\ 1\right)$. Em relação à base $\mathcal{B}$, a sequência das coordenadas de:

$$\begin{array}{ccc} x^3 + 4x^2 + 3x + 6 & \text{é} & (1,4,3,6), \\ 2 & \text{é} & (0,0,0,2), \\ 2x^3 + 8x^2 + x + 3 & \text{é} & (2,8,1,3). \end{array}$$

Como vimos num exemplo anterior a sequência

$$S' = \Big((1,4,3,6),(0,0,0,2),(2,8,1,3)\Big)$$

é linearmente independente

Exemplo

e o mesmo sucede à sequência

$$\Big((1,4,3,6),(0,0,0,2),(2,8,1,3),(0,1,0,0)\Big)\,.$$

O elemento de $\mathbb{R}_3[x]$ que na base $\mathcal{B}=\big(x^3,\ x^2,\ x,\ 1\big)$ tem a sequência de coordenadas

$$(0,1,0,0) \quad \text{é} \quad 0x^3+1x^2+0x+0=x^2.$$

Assim,

$$S=\big(x^3+4x^2+3x+6,\ 2,\ 2x^3+8x^2+x+3\big)$$

é linearmente independente e

$$\big(x^3+4x^2+3x+6,\ 2,\ 2x^3+8x^2+x+3,\ x^2\big)$$

é também linearmente independente. Como tem $4=\dim\mathbb{R}_3[x]$ vectores é uma base de $\mathbb{R}_3[x]$.

Exemplo

Seja E um espaço vectorial tal que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ é uma base de E. Verifiquemos que a sequência

$$S = (e_1 + e_2 + e_4,\ 2e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4)$$

é linearmente independente e "completemos" essa sequência de forma a obter uma base de E, isto é, determinemos uma base de E que tenha S como subsequência.

Em relação à base $\mathcal{B}$ a sequência das coordenadas de:

$$\begin{array}{ccc} e_1 + e_2 + e_4 & \text{é} & (1,1,0,1), \\ 2e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4 & \text{é} & (2,2,1,1). \end{array}$$

Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 + (-2)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$

com

$$\mathrm{r}(A) = 2$$

e, portanto, a sequência S é linearmente independente.

Exemplo

Dado que

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 + (-2)l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \longleftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(f.e.)}$$

e $\mathrm{r}(A') = 4$ podemos afirmar que

$$\big((1,1,0,1),(2,2,1,1),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\big)$$

é uma sequência linearmente independente.

Em relação à base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ a sequência de coordenadas de

$(0,1,0,0)$ é $0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4 = e_2$,

$(0,0,0,1)$ é $0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1e_4 = e_4$.

Logo, $(e_1 + e_2 + e_4,\ 2e_1 + 2e_2 + e_3 + e_4,\ e_2,\ e_4)$ é linearmente independente e como tem $4 = \dim E$ vectores é uma base de E.