

Cálculo Numérico A

Capítulo 2 – Interpolação e Aproximação Polinomial

Interpolação e polinómios de Lagrange

Diferenças divididas e polinómio interpolador de Newton

Interpolação por splines cúbicos

Aproximação pelo Método dos Mínimos Quadrados

Interpolação

Supondo que temos um conjunto discreto de $n + 1$ pontos,
 $\Omega = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, com **abscissas distintas entre si**, isto é, $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$, coloca-se a questão de saber se existirá algum polinómio $p(x)$, com o menor grau possível, satisfazendo um conjunto de condições designadas por **condições de interpolação**:

$$p(x_i) = y_i , \quad i = 0, 1, \dots, n .$$

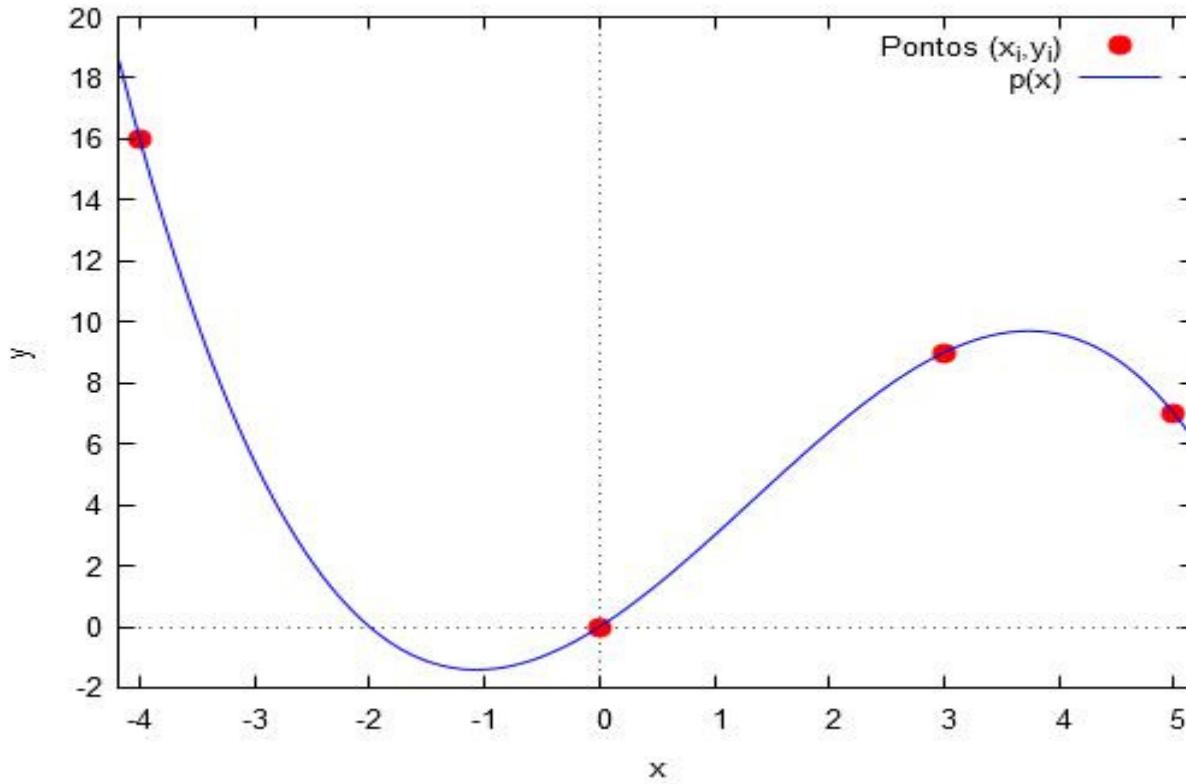


Figura 1 Gráfico de um conjunto de pontos Ω e do polinómio $p(x)$ que interpola esse conjunto.

Motivações para a utilização de polinómios

- As derivadas e as primitivas de polinómios são também polinómios ;
- São conhecidos vários resultados sobre os zeros de polinómios ;
- São conhecidos vários resultados sobre os máximos e mínimos de polinómios ;
- As somas/subtrações/produtos de polinómios são operações facilmente manipuláveis ;
- Dada um determinada função $g(x)$, contínua num intervalo $[a, b]$ e dado um valor $\varepsilon > 0$, existe sempre

uma função polinomial $p(x)$ tal que $|g(x) - p(x)| < \varepsilon$,
 $\forall x \in [a, b]$.

Qual será o grau de $p(x)$?

Uma vez que o número de pontos de Ω é $n + 1$, terá todo o sentido assumir que o grau de $p(x)$ é n (ou inferior a n) pois, neste caso a sua forma canónica é

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n ,$$

onde a_0, a_1, \dots, a_n são constantes reais e este polinómio que se pode representar por $p_n(x)$ é um polinómio com $n + 1$ coeficientes.

Desta forma, ao utilizar as condições de interpolação, teremos um sistema de $n + 1$ equações a $n + 1$ incógnitas:

$$S \equiv \begin{cases} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n = y_1 \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_nx_n^n = y_n \end{cases}$$

As funções (polinomiais) $1, x, x^2, \dots, x^n$ são designadas por **funções-base** e a_0, a_1, \dots, a_n são as incógnitas (parâmetros) a determinar.

O sistema de equações S pode representar-se na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \cdots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

ou seja $VA = Y$, sendo V uma matriz designada por [matriz de Vandermonde](#), A o vetor dos coeficientes a_i e Y o vetor das ordenadas y_i , $i = 0, 1, \dots, n$, dos pontos do conjunto Ω .

Prova-se que

$$|V| = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^n (x_i - x_j) = \prod_{i=1}^n (x_i - x_0) \times \prod_{i=2}^n (x_i - x_1) \times \dots$$

$\dots \times \prod_{i=n}^n (x_i - x_{n-1}) \neq 0$ (repare-se que $x_i \neq x_j$ se $i \neq j$) pelo que o sistema $VA = Y$ é possível e determinado, donde tem uma única solução, $A = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_n]^T$.

Sendo assim, é válido o seguinte

Teorema (Existência e unicidade do polinómio interpolador)

Dados $n + 1$ pontos de interpolação (com abcissas distintas)

$$\Omega = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\},$$

existe um e um só polinómio, de grau menor ou igual a n ,

tal que $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.

O número de condição* associado ao sistema de equações $VA = Y$ (número de condição da matriz V) é, em geral, bastante elevado, o que nos faz concluir que a sua resolução é um problema mal condicionado.

Sendo assim, pequenas perturbações no vetor V e/ou no vetor Y dão origem a grandes perturbações na solução do sistema.

Torna-se, deste modo, conveniente, utilizar soluções alternativas para o resolver e determinar assim a expressão do polinómio $p_n(x)$:

- Polinómio de Lagrange ;
- Polinómio de Newton (com diferenças divididas).

* Veremos como se define o número de condição de uma matriz quadrada A no *Capítulo 5 (Resolução de Sistemas de Equações Lineares)*.

Polinómios de Lagrange

Uma abordagem alternativa, para evitar o mau condicionamento da matriz V , consiste em considerar novamente um conjunto de

$n + 1$ pontos, $\Omega = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ e o objetivo é determinar a expressão analítica do polinómio $p_n(x)$ que interpola Ω , ou seja que satisfaz $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Repare-se que as igualdades anteriores são equivalentes a ter-se

$$\begin{cases} p_n(x_0) = y_0 = \mathbf{1} \cdot y_0 + \mathbf{0} \cdot y_1 + \cdots + \mathbf{0} \cdot y_n \\ p_n(x_1) = y_1 = \mathbf{0} \cdot y_0 + \mathbf{1} \cdot y_1 + \cdots + \mathbf{0} \cdot y_n \\ \vdots \\ p_n(x_n) = y_n = \mathbf{0} \cdot y_0 + \mathbf{0} \cdot y_1 + \cdots + \mathbf{1} \cdot y_n \end{cases}.$$

O sistema de equações anterior também se pode representar na forma matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

sendo um sistema bem condicionado uma vez que envolve uma matriz identidade de ordem $n + 1$.

Torna-se assim conveniente determinar um conjunto adequado de funções-base que nos conduza a um sistema deste tipo.

Antes de proceder à construção do polinómio $p_n(x)$ é conveniente estabelecer-se a seguinte

Definição

Funções de Lagrange

Designam-se por **funções de Lagrange** os polinómios de grau n definidos por:

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0) \times (x-x_1) \times \dots \times (x-x_{k-1}) \times (x-x_{k+1}) \times \dots \times (x-x_n)}{(x_k-x_0) \times (x_k-x_1) \times \dots \times (x_k-x_{k-1}) \times (x_k-x_{k+1}) \times \dots \times (x_k-x_n)},$$
$$k = 0, 1, \dots, n.$$

Repare-se que estes polinómios satisfazem a seguinte propriedade:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , i \neq j \\ 1 & , i = j \end{cases} ; \quad i, j = 0, 1, \dots, n .$$

As funções $L_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$, são **funções-base** pois tem-se

$$p_n(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + \cdots + L_n(x)y_n .$$

Notas

- $p_n(x)$ é um polinómio de grau menor ou igual a n ;
- $p_n(x_i) = L_{\textcolor{teal}{i}}(x_{\textcolor{teal}{i}})y_i = \mathbf{1} \times y_i = y_i$, $i = 0,1,\dots,n$.

Está assim provado que o polinómio $p_n(x)$, assim construído, interpola o conjunto de pontos $\Omega = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$.

Este polinómio é designado por **polinómio de Lagrange**.

Exemplo 1

Seja $f(x) = \frac{1}{x}$.

Determine a expressão analítica do polinómio de Lagrange, de grau ≤ 2 , $p_2(x)$, interpolador de f nos nodos $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 1$.

Resolução

Tem-se $y_0 = f(x_0) = f(0.2) = 5$, $y_1 = f(x_1) = f(0.5) = 2$ e $y_2 = f(x_2) = f(1) = 1$.

Sendo assim, a expressão analítica do polinómio é

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{(x - 0.5)(x - 1)}{(0.2 - 0.5)(0.2 - 1)} \left(\frac{1}{0.2} \right) + \frac{(x - 0.2)(x - 1)}{(0.5 - 0.2)(0.5 - 1)} \left(\frac{1}{0.5} \right) \\ &\quad + \frac{(x - 0.2)(x - 0.5)}{(1 - 0.2)(1 - 0.5)} \left(\frac{1}{1} \right) = 10x^2 - 17x + 8. \end{aligned}$$

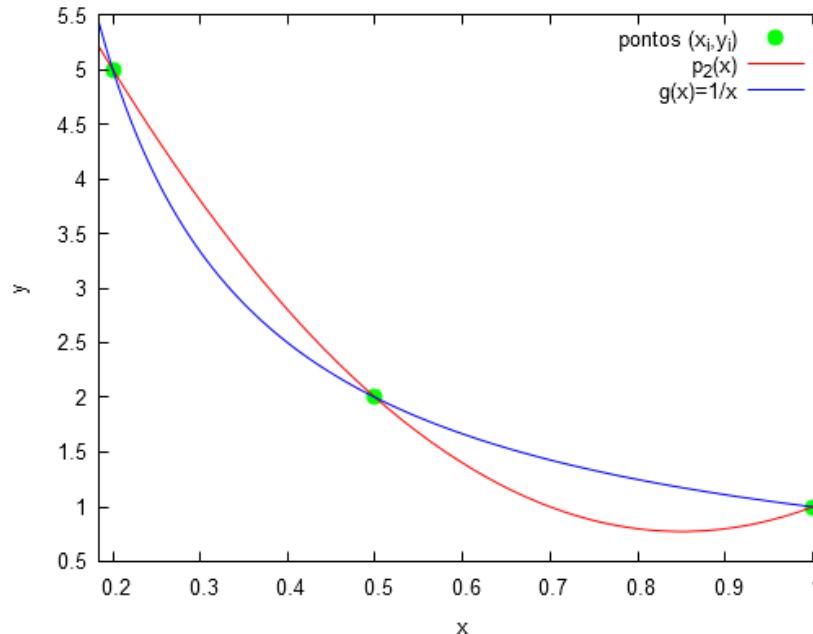


Figura 2 Gráfico do conjunto Ω , da função $f(x)$ e do polinómio $p_2(x)$

Erro de interpolação

Ao aproximar uma função $g(x)$ por um polinómio $p_n(x)$ é cometido um erro $E_n(x) = g(x) - p_n(x) = g(x) - \widehat{g(x)}$:

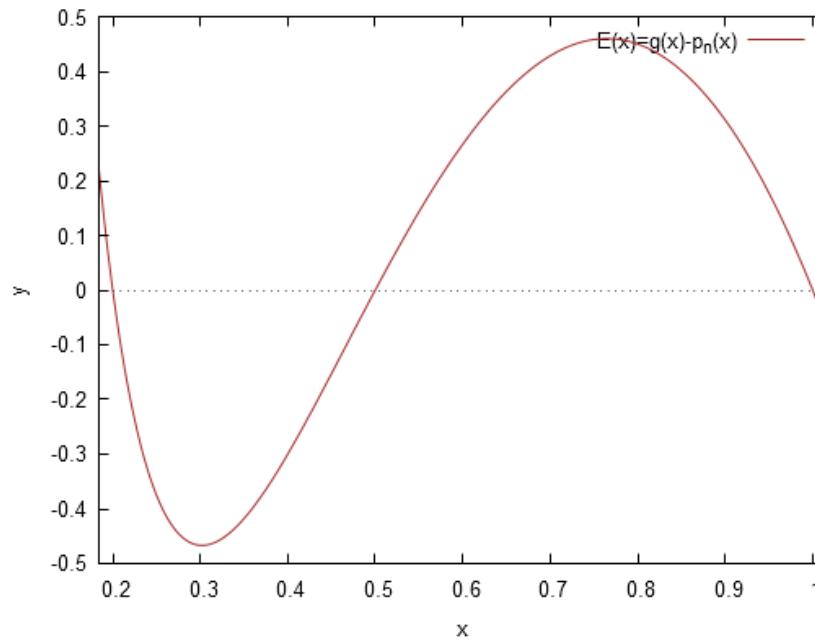


Figura 3 Gráfico da função erro $E_2(x) = g(x) - p_2(x)$ do exemplo 1.

É válido o seguinte

Teorema (Erro de interpolação)

Sejam $g \in C^{n+1}([a, b])$, $\Omega = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, com $\{x_k\}_{k=0,1,\dots,n}$ um conjunto de nodos distintos entre si e $y_k = g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Então, dado um valor $\tilde{x} \in [a, b]$ verifica-se a seguinte igualdade:

$$g(\tilde{x}) - p_n(\tilde{x}) = (\tilde{x} - x_0)(\tilde{x} - x_1) \dots (\tilde{x} - x_n) \frac{g^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}, \quad \gamma \in]a, b[$$

sendo p_n o polinómio interpolador da função g no conjunto Ω .

Demonstração

- No caso de $\tilde{x} = x_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, verifica-se

$\prod_{j=0}^n (\tilde{x} - x_j) = 0$, pois o fator $\tilde{x} - x_j$ anula-se quando $j = k$.

Assim o erro é 0 e a igualdade verifica-se, uma vez que

$$g(x_k) - p_n(x_k) = 0.$$

- Quando $\tilde{x} \neq x_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, considera-se a função auxiliar

$$\psi(x) = g(x) - p_n(x) - \frac{g(\tilde{x}) - p_n(\tilde{x})}{\Pi(\tilde{x})} \Pi(x),$$

com $\Pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \times \dots \times (x - x_n)$.

Sendo assim, $\psi(x_k) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n$, $\psi(\tilde{x}) = 0$,

onde se conclui que $\psi(x)$ tem, pelo menos, $n + 2$ zeros distintos em $[a, b]$.

Utilizando um dos corolários do teorema de Rolle pode afirmar-se que:

- ⇒ $\psi'(x)$ tem, pelo menos, $n + 1$ zeros distintos em $]a, b[$;
- ⇒ $\psi''(x)$ tem, pelo menos, n zeros distintos em $]a, b[$;
- ⋮
- ⇒ $\psi^{(n+1)}(x)$ tem, pelo menos, 1 zero em $]a, b[$.

Tem-se então

$\exists \gamma \in]a, b[$ tal que $\psi^{(n+1)}(\gamma) = 0$, isto é $\exists \gamma \in]a, b[$ tal que

$$g^{(n+1)}(\gamma) - \left(\frac{g(\tilde{x}) - p_n(\tilde{x})}{(\tilde{x} - x_0)(\tilde{x} - x_1) \times \dots \times (\tilde{x} - x_n)} \right) (n+1)! = 0 ,$$

onde finalmente se chega a

$$g(\tilde{x}) - p_n(\tilde{x}) = \frac{(\tilde{x} - x_0)(\tilde{x} - x_1) \times \dots \times (\tilde{x} - x_n)}{(n+1)!} g^{(n+1)}(\gamma) \blacksquare$$

Notas

- $\frac{d^{n+1} \Pi(x)}{dx^{n+1}} = (n + 1)! \text{ e } \frac{d^{n+1} p_n(x)}{dx^{n+1}} = 0;$
- Da aplicação deste teorema pode concluir-se

$$|g(\tilde{x}) - p_n(\tilde{x})| \leq \frac{|(\tilde{x} - x_0)(\tilde{x} - x_1) \times \dots \times (\tilde{x} - x_n)|}{(n+1)!} M_{n+1},$$

onde $M_{n+1} = \max |g^{(n+1)}(x)|$, $x \in [a, b]$;

- Supondo que os nodos estão igualmente espaçados, isto é, existe uma constante h tal que $x_k - x_{k-1} = h$, $k = 1, 2, \dots, n$, da aplicação deste teorema pode facilmente concluir-se que

$$|(\tilde{x} - x_0)(\tilde{x} - x_1) \times \dots \times (\tilde{x} - x_n)| \leq n! h^{n+1}.$$

Por conseguinte,

$$|g(\tilde{x}) - p_n(\tilde{x})| \leq \frac{M_{n+1}}{n+1} h^{n+1}.$$

Sendo $g^{(n+1)}(x)$ uma função limitada, $\forall n \in \mathbb{N}$,
pode afirmar-se que, para h pequeno, se tem, para
algum $A > 0$:

$$|g(\tilde{x}) - p_n(\tilde{x})| \leq \frac{A}{n+1} h^{n+1} \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty .$$

Exemplo 2

Utilizando a função $f(x)$ e os nodos do **exemplo 1**, determinar um valor aproximado de $f(0.4)$ e um majorante do erro absoluto cometido ao utilizar esta aproximação.

Resolução

Tem-se $p_2(x) = 10x^2 - 17x + 8$, pelo que $\widehat{f(0.4)} = p_2(0.4) = 2.8$.

Como $f^{(3)}(x) = -\frac{6}{x^4}$ e $|f^{(3)}(x)| = \frac{6}{x^4}$, $\forall x \in [0.2,1]$, então verifica-se

$$|f^{(3)}(x)| \leq \frac{6}{0.2^4} = 3750 = M_3 .$$

Sendo assim tem-se

$$|f(0.4) - p_2(0.4)| \leq \frac{|(0.4-0.2)(0.4-0.5)(0.4-1)|}{3!} M_3 = 7.5 .$$

Repare-se que $f(0.4) = \frac{1}{0.4} = 2.5$, pelo que o erro absoluto cometido é $|f(0.4) - p_2(0.4)| = |2.5 - 2.8| = 0.3$ e $0.3 \leq 7.5$.

Diferenças divididas

Sejam $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ um conjunto discreto de $n + 1$ pontos (nodos) distintos, contidos num intervalo $[a, b]$ e $g(x)$ uma função definida em $[a, b]$.

Definição (Por recorrência)

- ⇒ Diferença dividida de ordem 0 : $g[x_j] = g(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$.
- ⇒ Diferença dividida de ordem k :

$$g[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{g[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - g[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} , \quad k = 1, 2, \dots, n .$$

Nota

Uma diferença dividida de ordem k define-se com base em $k + 1$ nodos.

Exemplos (Diferenças divididas de ordens 1, 2 e 3)

- $g[x_2, x_3] = \frac{g[x_3] - g[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{g(x_3) - g(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ (Diferença dividida de ordem 1)
- $g[x_0, x_1, x_2] = \frac{g[x_1, x_2] - g[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$ (Diferença dividida de ordem 2)
- $g[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{g[x_2, x_3, x_4] - g[x_1, x_2, x_3]}{x_4 - x_1}$ (Diferença dividida de ordem 3)

Tabela de diferenças divididas

Uma forma simplificada de representar um conjunto de diferenças divididas, a partir de um conjunto de $n + 1$ nodos, é a que se segue (neste caso foram utilizados 4 nodos)

x_k	$y_k = g(x_k)$	$g[.,.]$	$g[.,.,.]$	$g[.,.,.,.]$
x_0	$g(x_0)$	$g[x_0, x_1]$		
x_1	$g(x_1)$		$g[x_0, x_1, x_2]$	
		$g[x_1, x_2]$		$g[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$g(x_2)$		$g[x_1, x_2, x_3]$	
		$g[x_2, x_3]$		
x_3	$g(x_3)$			

Polinómio interpolador de Newton

Vejamos como construir o polinómio $p_n(x)$ utilizando diferenças divididas.

Seja g uma função definida em $[a, b]$ e $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ um conjunto de $n + 1$ nodos distintos contido em $[a, b]$.

Considere-se um ponto genérico $x \in [a, b]$, tal que
 $\min(X) \leq x \leq \max(X)$ e $x \neq x_k$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Então

- $g[x, x_0] = g[x_0, x] = \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$, donde se pode concluir que

$$g(x) = g(x_0) + (x - x_0) g[x, x_0].$$

De forma análoga

- $g[x, x_0, x_1] = \frac{g[x_0, x_1] - g[x, x_0]}{x_1 - x} = \frac{g[x, x_0] - g[x_0, x_1]}{x - x_1}$, donde se pode concluir que

$$g[x, x_0] = g[x_0, x_1] + (x - x_1) g[x, x_0, x_1].$$

Sendo assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} g(x) &= g(x_0) + (x - x_0) (g[x_0, x_1] + (x - x_1) g[x, x_0, x_1]) = \\ &= g(x_0) + (x - x_0) g[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) g[x, x_0, x_1]. \end{aligned}$$

Podemos repetir este raciocínio para as diferenças divididas de ordens superiores até atingir uma diferença dividida de ordem n que envolva todos os $n+1$ nodos , ou seja

$$g(x_0) , g[x_0, x_1] , g[x_0, x_1, x_2] , \dots , g[x_0, x_1, \dots, x_n] .$$

Por fim obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} g(x) = & g(x_0) + (x - x_0) g[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) g[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ & \dots + (x - x_0)(x - x_1) \times \dots \times (x - x_{n-1}) g[x_0, x_1, \dots, x_n] + \\ & +(x - x_0)(x - x_1) \times \dots \times (x - x_n) g[x, x_0, x_1, \dots, x_n] . \end{aligned}$$

Repare-se que as parcelas assinaladas a azul representam um polinómio de grau $\leq n$, $p_n(x)$, sendo a última parcela, assinalada a vermelho, a correspondente ao resto designado por $R_n(x)$.

Nota

- Verificam-se as igualdades $R_n(x_k) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n$, donde se poder concluir que $p_n(x_k) = g(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Pelo teorema da existência e unicidade de um polinómio interpolador, de grau $\leq n$ da função g no conjunto de pontos $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, concluimos que $p_n(x)$ é o polinómio interpolador procurado.

Neste caso, as **funções-base** são as funções (polinomiais)

$$\varphi_0(x) = 1 ,$$

$$\varphi_1(x) = x - x_0 ,$$

$$\varphi_2(x) = (x - x_0)(x - x_1) ,$$

⋮

$$\varphi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \times \dots \times (x - x_{n-1}) ,$$

sendo as incógnitas a determinar as diferenças divididas

$$z_0 = g(x_0) ,$$

$$z_1 = g[x_0, x_1] ,$$

$$z_2 = g[x_0, x_1, x_2] ,$$

⋮

$$z_n = g[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n] .$$

Matricialmente, o sistema de equações a resolver é um sistema triangular inferior do tipo

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Este sistema de equações é de fácil resolução, utilizando, por exemplo, o método de Gauss, não acarretando por isso instabilidade na sua resolução.

Resumindo, é válida a seguinte

Definição

O **polinómio interpolador de Newton** de grau $\leq n$, interpolador de $g(x)$ nos nodos x_0, x_1, \dots, x_n é o polinómio definido pela expressão

$$p_n(x) = g(x_0) + (x - x_0) g[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)g[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \times \dots \times (x - x_{n-1})g[x_0, x_1, \dots, x_n].$$

Notas

- Quer o polinómio interpolador de Lagrange quer o polinómio interpolador de Newton com diferenças divididas representam o mesmo polinómio, tal como garantido pelo teorema da existência e unicidade do polinómio interpolador.
- Pelo mesmo teorema garante-se que

$$g[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{g^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}, \quad \gamma = \gamma(x).$$

Exemplo 3

Seja $f(x) = \frac{1}{x}$.

Determine a expressão analítica do polinómio de Newton, com diferenças divididas, de grau ≤ 2 , $p_2(x)$, interpolador de f nos nodos $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.5$ e $x_2 = 1$.

Resolução

Tem-se $y_0 = f(x_0) = f(0.2) = 5$, $y_1 = f(x_1) = f(0.5) = 2$ e $y_2 = f(x_2) = f(1) = 1$.

Construamos uma tabela de diferenças divididas relativa aos nodos dados

x	$f(x)$	$f[.,.]$	$f[.,.,.]$
0.2	5	-10	
0.5	2		10
1	1	-2	

Sendo assim, a expressão analítica do polinómio é

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= \textcolor{red}{f(x_0)} + \textcolor{green}{f[x_0, x_1]}(x - 0.2) + \textcolor{blue}{f[x_0, x_1, x_2]}(x - 0.2)(x - 0.5) = \\
&= \textcolor{red}{5} + \textcolor{green}{(-10)}(x - 0.2) + \textcolor{blue}{10}(x - 0.2)(x - 0.5) = \\
&= 5 - 10x + 2 + 10(x^2 - 0.7x + 0.1) = \\
&= 10x^2 - 17x + 8 ,
\end{aligned}$$

resultado idêntico ao obtido no exemplo 1, com o polinómio de Lagrange, tal como seria de esperar.

Nota final

A vantagem do polinómio de Newton relativamente ao polinómio de Lagrange reside no facto de que, se acrescentarmos um novo nodo, x_{n+1} , para construir um polinómio de grau $\leq n + 1$, $p_{n+1}(x)$, podemos utilizar os cálculos efetuados para a construção de $p_n(x)$.

Interpolação por splines cúbicos

Ao utilizar-se interpolação polinomial, tal como definido até agora, facilmente se constata que, à medida que aumenta o grau do polinómio interpolador, $p_n(x)$, aumenta também o carácter oscilatório do gráfico desse polinómio junto das extremidades do intervalo $[a, b]$.

Como exemplo, considere-se a função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, definida em $[-5,5]$ (designa-se esta função por função de Runge).

Se utilizarmos polinómios interpoladores de $f(x)$, de graus $n = 4$, $n = 8$, $n = 12$ e $n = 16$, obtemos os gráficos

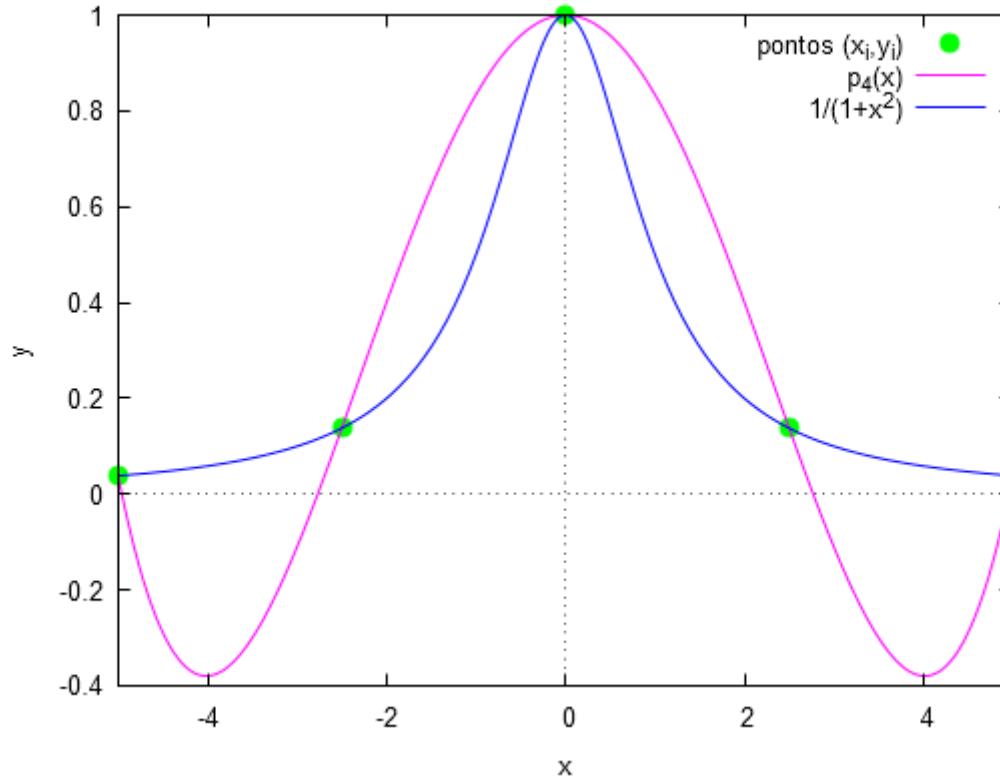


Gráfico 1 Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e do polinómio de grau 4, $p_4(x)$, interpolador de f nos nodos $x_k = -5 + \frac{10}{4}k$, $k = 0, 1, \dots, 4$.

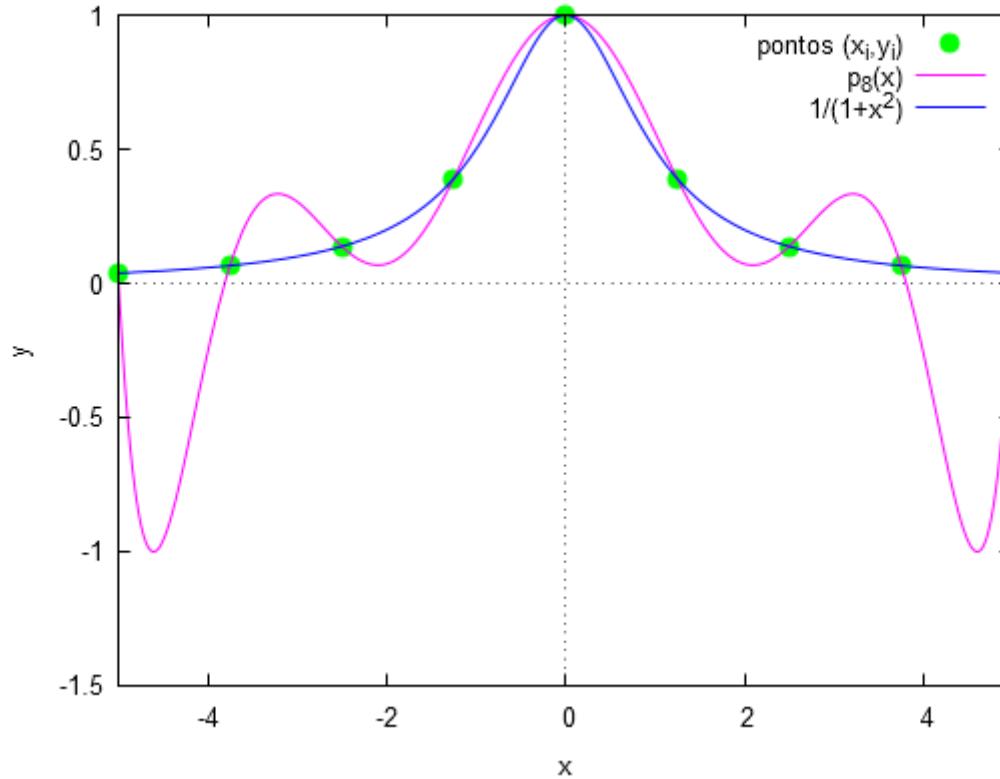


Gráfico 2 Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e do polinómio de grau 8, $p_8(x)$, interpolador de f nos nodos $x_k = -5 + \frac{10}{8}k$, $k = 0, 1, \dots, 8$.

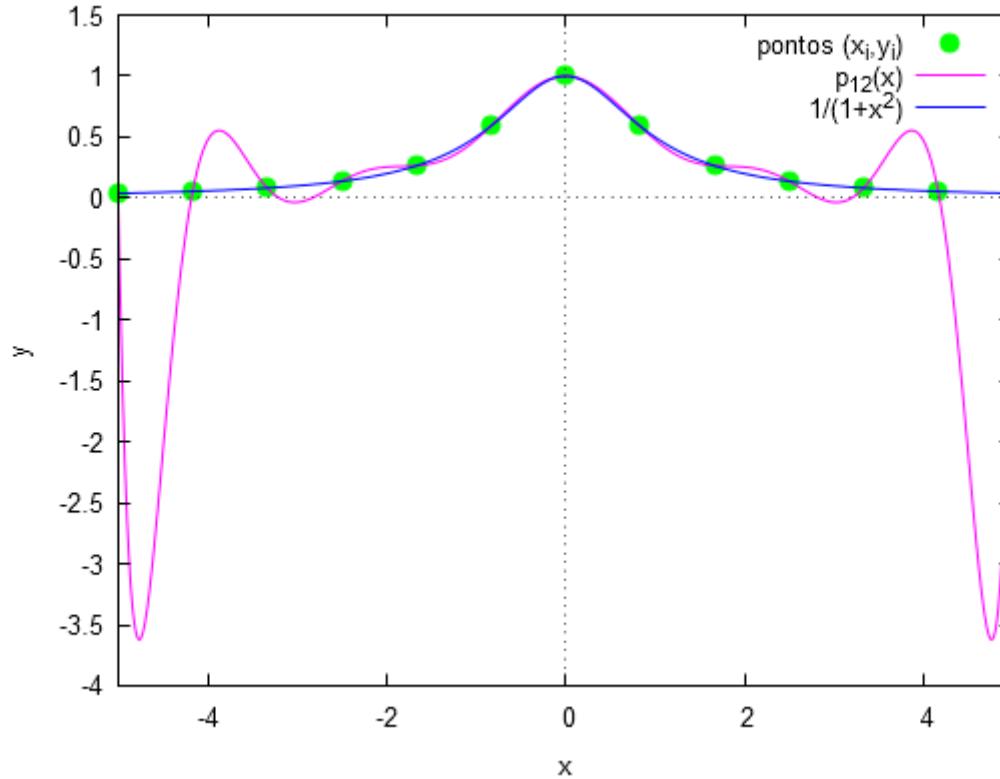


Gráfico 3 Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e do polinómio de grau 12, $p_{12}(x)$, interpolador de f nos nodos $x_k = -5 + \frac{10}{12}k$, $k = 0, 1, \dots, 12$.

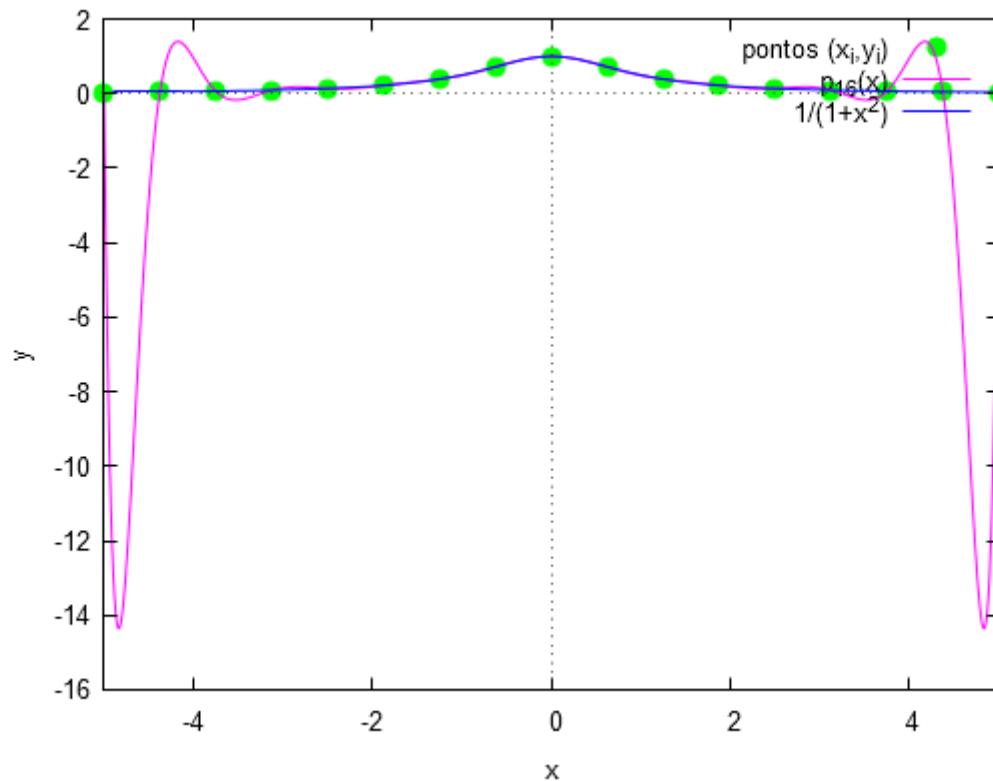


Gráfico 4 Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e do polinómio de grau 16, $p_{16}(x)$, interpolador de f nos nodos $x_k = -5 + \frac{10}{16}k$, $k = 0, 1, \dots, 16$.

Para evitar esta situação, podemos considerar um tipo de interpolação em que é utilizada uma sequência de polinómios, de grau pequeno, interpoladores da função f , em segmentos consecutivos do intervalo inicial $[a, b]$.

Este tipo de interpolação designa-se por interpolação por splines polinomiais.

No caso de cada um dos polinómios ser de grau menor ou igual a 3,
A interpolação designa-se por **interpolação por splines cúbicos** (polinomiais).

Seja $f(x)$ uma função definida em $[a, b]$.

Sejam $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n + 1$ nodos distintos.

Definição

Função spline cúbica interpoladora

Uma função spline cúbica interpoladora de $f(x)$ nos nodos distintos $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ é uma função definida por ramos

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & , \quad x_0 \leq x < x_1 \\ S_1(x) & , \quad x_1 \leq x < x_2 \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) & , \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

que satisfaz as seguintes condições:

- $S(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$; [1]
- $S_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, é um polinómio de grau ≤ 3 ; [2]
- $S(x)$, $S'(x)$ e $S''(x)$ são funções contínuas em $[x_0, x_n]$. [3]

Construção do spline cúbico

- Para que $S(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$
⇒ são necessárias $n + 1$ equações ;
- Para que $S(x)$, $S'(x)$ e $S''(x)$ sejam funções contínuas em $[x_0, x_n]$, basta impôr as condições

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_i^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} S(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_i^-} S'(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} S'(x) , \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 ; \\ \lim_{x \rightarrow x_i^-} S''(x) = \lim_{x \rightarrow x_i^+} S''(x) \end{cases}$$

⇒ surgem $3 \times (n - 1) = 3n - 3$ equações

Temos assim $n + 1 + 3n - 3 = \mathbf{4n - 2}$ equações a resolver.

- Por outro lado, cada ramo da função spline tem a forma:

$$S_i(x) = a_{0,i} + a_{1,i}x + a_{2,i}x^2 + a_{3,i}x^3, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

ou seja, temos $4(n - 1 + 1) = \mathbf{4n}$ incógnitas para determinar.

- ∴ As condições [1], [2] e [3] não determinam univocamente a função $S(x)$.

São necessárias 2 condições adicionais !

Hipóteses mais utilizadas

- Acrescentamos às condições já definidas as condições

$$S''(x_0) = \beta_0 \quad \text{e} \quad S''(x_n) = \beta_n , \quad \beta_0, \beta_n \in \mathbb{R} \quad [4]$$

⇒ quando $\beta_0 = \beta_n = 0$, o spline designa-se **spline cúbico natural**
ou, em alternativa ,

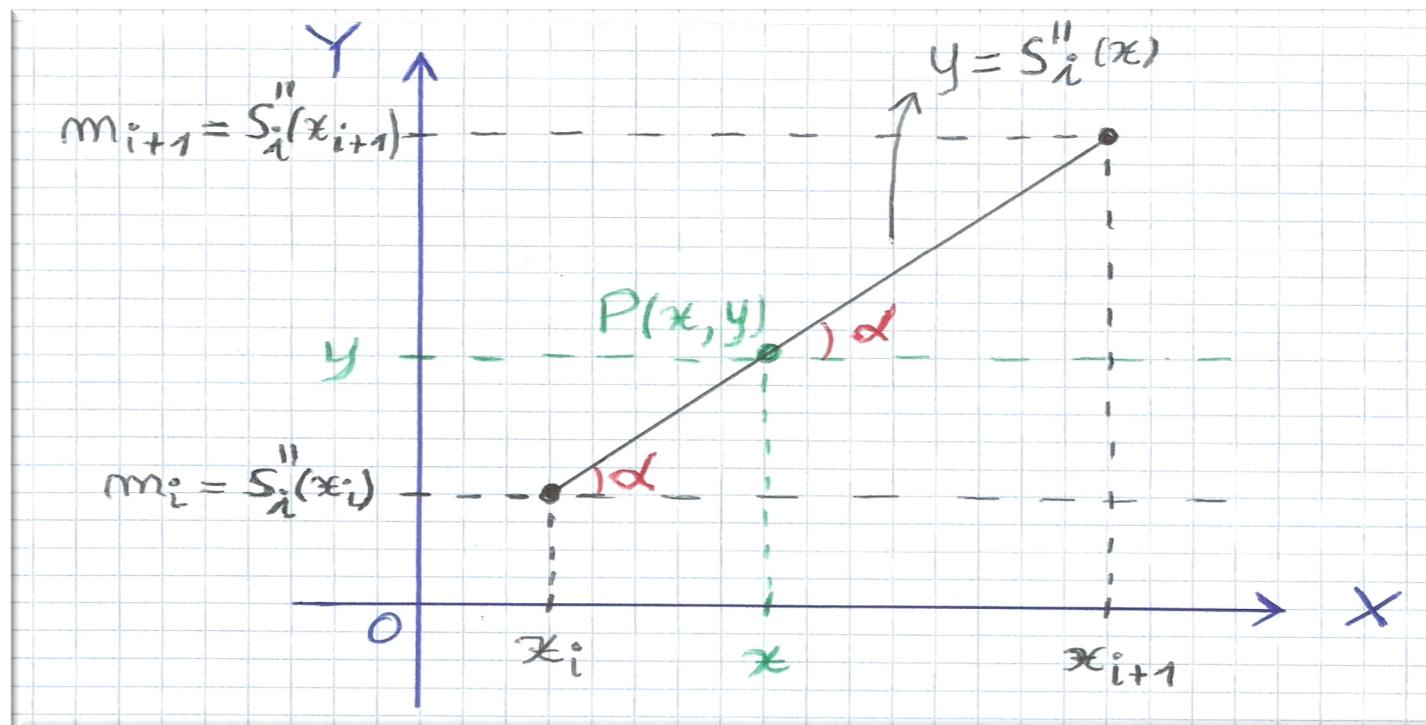
- Acrescentamos às condições já definidas as condições

$$S'(x_0) = S'_0(x_0) = f'(x_0) \quad \text{e} \quad S'(x_n) = S'_{n-1}(x_n) = f'(x_n) \quad [5]$$

⇒ o spline designa-se **spline cúbico completo**.

Denomine-se $m_i = S''(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Como cada função $S_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, é um polinómio de grau ≤ 3 , cada função $S''_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, é um polinómio de grau ≤ 1 , ou seja, o gráfico de $S''(x)$, no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ é um segmento de reta:



Da semelhança de triângulos da figura anterior, chegamos à conclusão que (para um ponto genérico do segmento de reta $y = S_i''(x)$) se tem

$$\begin{aligned} \frac{y-m_i}{x-x_i} &= \frac{m_{i+1}-y}{x_{i+1}-x} \iff \frac{S_i''(x)-m_i}{x-x_i} = \frac{m_{i+1}-S_i''(x)}{x_{i+1}-x} \iff \\ &\iff S_i''(x) = -\frac{x-x_{i+1}}{x_{i+1}-x_i} m_i + \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} m_{i+1} = \\ &= -\frac{x-x_{i+1}}{h_i} m_i + \frac{x-x_i}{h_i} m_{i+1} . \end{aligned} \quad [6]$$

Primitivando em ordem a x a expressão anterior, obtemos a expressão

$$S_i(x) = -\frac{(x-x_{i+1})^3}{6h_i}m_i + \frac{(x-x_i)^3}{6h_i}m_{i+1} + \frac{c_i}{h_i}(x_{i+1}-x) + \frac{d_i}{h_i}(x-x_i),$$

com $c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

- Determinação das constantes C_i e D_i

Para determinar as constantes C_i e D_i , basta atendermos às condições de interpolação

$$S_i(x_i) = f(x_i) = f_i \quad \text{e} \quad S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) = f_{i+1},$$
$$i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Assim sendo, chegamos à conclusão que

$$\begin{cases} S_i(x_i) = \frac{h_i^2}{6} m_i + C_i = f_i \\ S_i(x_{i+1}) = \frac{h_i^2}{6} m_{i+1} + D_i = f_{i+1} \end{cases}, \text{ donde finalmente}$$

$$\begin{cases} C_i = f_i - \frac{h_i^2}{6} m_i \\ D_i = f_{i+1} - \frac{h_i^2}{6} m_{i+1} \end{cases}, i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Desta forma, a expressão de cada uma das funções (ramos) do spline $S(x)$ é:

$$S_i(x) = -\frac{(x - x_{i+1})^3}{6h_i} \textcolor{red}{m}_i + \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} \textcolor{red}{m}_{i+1} + \left(f_i - \frac{h_i^2}{6} \textcolor{red}{m}_i \right) \frac{x_{i+1} - x}{h_i}$$

[I]

$$+ \left(f_{i+1} - \frac{h_i^2}{6} \textcolor{red}{m}_{i+1} \right) \frac{x - x_i}{h_i} , \quad i = 0, 1, \dots, n - 1 .$$

Temos assim que determinar $n + 1$ incógnitas $m_i = S''(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Note-se que, ao impor as condições de interpolação [1], obtemos automaticamente a garantia da continuidade de $S(x)$ nos pontos x_i , $i = 1, 2, \dots, n - 1$ e, por conseguinte, a continuidade de $S(x)$ em todo o intervalo $[x_0, x_n]$.

Por outro lado, de [6] concluímos que

$$\begin{cases} S_i''(x_{i+1}) = -\frac{x_{i+1}-x_{i+1}}{h_i}m_i + \frac{x_{i+1}-x_i}{h_i}m_{i+1} = 0(m_i) + 1(m_{i+1}) = m_{i+1} \\ S_{i+1}''(x_{i+1}) = -\frac{x_{i+2}-x_{i+1}}{h_{i+1}}m_{i+1} + \frac{x_{i+1}-x_{i+1}}{h_{i+1}}m_{i+2} = 1(m_{i+1}) + 0(m_{i+2}) = m_{i+1} \end{cases},$$

isto é $S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n - 2$, ou seja, garantimos a continuidade de $S''(x)$ nos pontos x_i ,

$i = 1, 2, \dots, n - 1$ e, por conseguinte, a continuidade de $S''(x)$ em todo o intervalo $[x_0, x_n]$.

Equações a estabelecer

- Para que $S'(x)$ seja contínua em $[x_0, x_n]$ é necessário que

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 . \quad [\text{II}]$$

Temos assim **$n - 1$** equações a resolver.

Derivando cada uma das funções **[I]**, obtemos

$$\begin{aligned}
S'_i(x) = & -\frac{(x - x_{i+1})^2}{2h_i} \color{red}{m_i} + \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} \color{red}{m_{i+1}} + \frac{\frac{h_i^2}{6} \color{red}{m_i} - f_i}{h_i} + \\
& + \frac{f_{i+1} - \frac{h_i^2}{6} \color{red}{m_{i+1}}}{h_i} , \quad i = 0, 1, \dots, n-1 .
\end{aligned}$$

Ao impor [II] temos as seguintes equações

$$h_{i-1}m_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)m_i + h_im_{i+1} = 6 \left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i} - \frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}} \right) ,$$

[IV]

$$i = 1, 2, \dots, n-1 .$$

- ∴ Temos um sistema de $n-1$ equações a $n+1$ incógnitas ,
Não é possível determinar univocamente a função $S(x)$.

É necessário impor **2** condições adicionais !

Assim, se pretendermos um spline $S(x)$ com condições que envolvam a sua 2ª derivada nos pontos extremos do intervalo $[x_0, x_n]$, impomos as equações (condições-extra)

$$m_0 = S''(x_0) = \beta_0 \quad \text{e} \quad m_n = S''(x_n) = \beta_n , \quad \beta_0, \beta_n \in \mathbb{R} . \quad [\mathbf{V}]$$

Em particular, se pretendemos que o spline seja **natural**

$$m_0 = \beta_0 = 0 \quad \text{e} \quad m_n = \beta_n = 0 . \quad [\mathbf{V}']$$

Se, em alternativa, pretendermos um spline $S(x)$ com condições que envolvam a sua 1ª derivada nos pontos extremos do intervalo $[x_0, x_n]$, impomos as equações (condições-extra)

$$\begin{cases} 2h_0 \textcolor{red}{m}_0 + h_0 \textcolor{red}{m}_1 = 6 \left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - \alpha_0 \right) & , \quad \alpha_0 \in \mathbb{R} \\ h_{n-1} \textcolor{red}{m}_{n-1} + 2h_{n-1} \textcolor{red}{m}_n = 6 \left(\alpha_n - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} \right) & , \quad \alpha_n \in \mathbb{R} \end{cases} . \quad [\text{VI}]$$

Em particular, se conhecermos $f'(x_0) = f'_0$ e $f'(x_n) = f'_n$ e pretendermos que o spline seja **completo**, as equações são

$$\begin{cases} 2h_0 m_0 + h_0 m_1 = 6 \left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - f'_0 \right) \\ h_{n-1} m_{n-1} + 2h_{n-1} m_n = 6 \left(f'_n - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} \right) \end{cases} \quad [\text{VI}']$$

Matricialmente, para o **spline cúbico completo**, podemos escrever o sistema na forma $AX = B$ (**n + 1** equações a **n + 1** incógnitas) com

$$A = \begin{bmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = 6 \begin{bmatrix} \frac{f_1 - f_0}{h_0} - f'_0 \\ \frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{f_1 - f_0}{h_0} \\ \ddots \\ \ddots \\ \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{h_{n-2}} \\ f'_n - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Também para o **spline cúbico natural**, sabendo que $m_0 = 0$ e $m_n = 0$, podemos escrever o sistema na forma $AX = B$ ($n - 1$ equações a $n - 1$ incógnitas) com

$$A = \begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{n-3} & 2(h_{n-3}+h_{n-2}) & h_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = 6 \begin{bmatrix} \frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{f_1 - f_0}{h_0} \\ \frac{f_3 - f_2}{h_2} - \frac{f_2 - f_1}{h_1} \\ \ddots \\ \ddots \\ \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{f_{n-2} - f_{n-3}}{h_{n-3}} \\ \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}.$$

As matrizes principais dos sistemas de equações que permitem determinar o spline cúbico completo e/ou o spline cúbico natural são de *diagonal estritamente dominante (por linhas)* (***) e, por conseguinte, são invertíveis, pelos que os sistemas de equações correspondentes são possíveis e determinados, isto é, têm uma única solução.

Sendo assim podemos afirmar que

(***) Uma matriz $A_{n \times n} = [a_{ij}]_{i,j=1,2,\dots,n}$ diz-se de **diagonal estritamente dominante** (por linhas) se $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Existe **um único spline cúbico completo**, interpolador de uma função $f(x)$ em $n + 1$ nodos distintos.

e também

Existe **um único spline cúbico natural**, interpolador de uma função $f(x)$ em $n + 1$ nodos distintos.

Exemplo

Considere-se a seguinte tabela da função $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no intervalo $[1.0, 2.2]$ (com os valores arredondados a 5 casas decimais) :

x	1.0	1.3	1.6	1.9	2.2
$g(x)$	1.00000	0.87706	0.79057	0.72548	0.67420

Determinar a expressão analítica do spline cúbico natural, $S(x)$, interpolador de $g(x)$ nos pontos tabelados.

Resolução

- Os nodos de interpolação são $x_0 = 1.0$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 1.6$,
 $x_3 = 1.9$ e $x_4 = 2.2$;
- $h_i = x_{i+1} - x_i = 0.3$, $i = 0, 1, 2, 3$;
- $m_0 = S''(x_0) = 0$ e $m_4 = S''(x_4) = 0$ (S é um spline natural) ;
- As incógnitas a determinar são $m_1 = S''(x_1)$, $m_2 = S''(x_2)$ e
 $m_3 = S''(x_3)$;

- O sistema de equações a resolver é:

$$\begin{bmatrix} 1.2 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1.2 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.72907 \\ 0.42791 \\ 0.27634 \end{bmatrix} ;$$

- A solução do sistema é :

$$\begin{cases} m_1 \approx 0.56552 \\ m_2 \approx 0.16815 \\ m_3 \approx 0.18824 \end{cases} .$$

- Finalmente tem-se :

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) \approx 0.31418x^3 - 0.94253x^2 + 0.50445x + 1.12391 & ; \quad 1.0 \leq x < 1.3 \\ S_1(x) \approx -0.22076x^3 + 1.14372x^2 - 2.20768x + 2.29916 & ; \quad 1.3 < x \leq 1.6 \\ S_2(x) \approx 0.01116x^3 + 0.03050x^2 - 0.42652x + 1.34921 & ; \quad 1.6 < x \leq 1.9 \\ S_3(x) \approx -0.10458x^3 + 0.69022x^2 - 1.67999x + 2.14308 & ; \quad 1.9 \leq x \leq 2.2 \end{cases} .$$

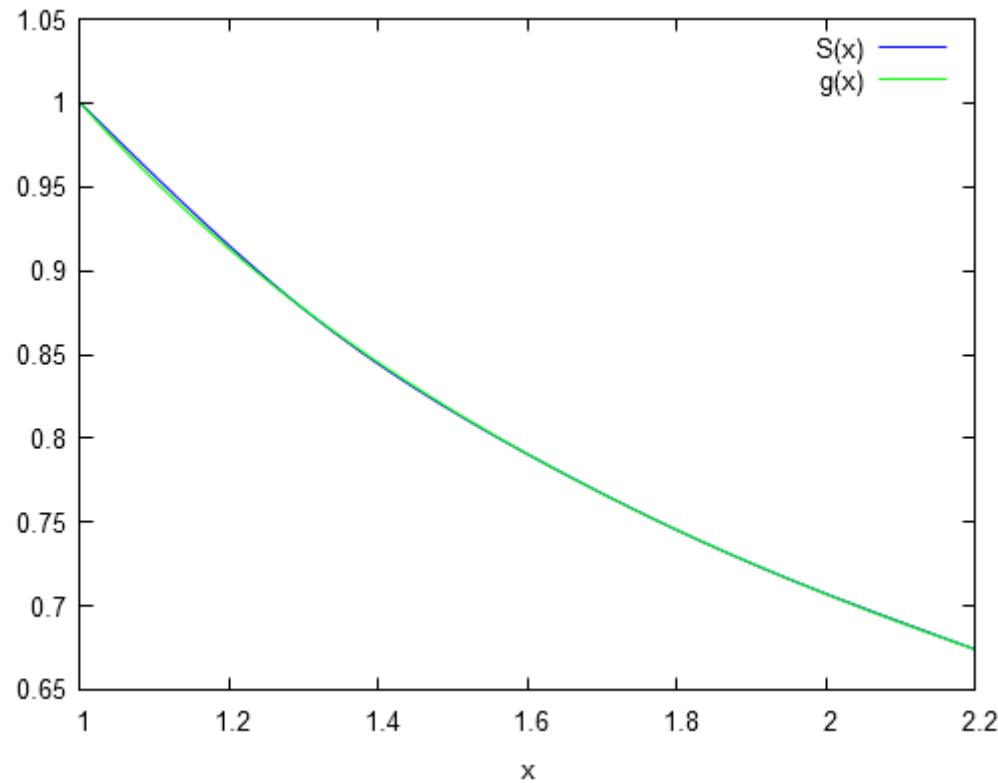


Gráfico 5 Gráficos das funções $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e $S(x)$.

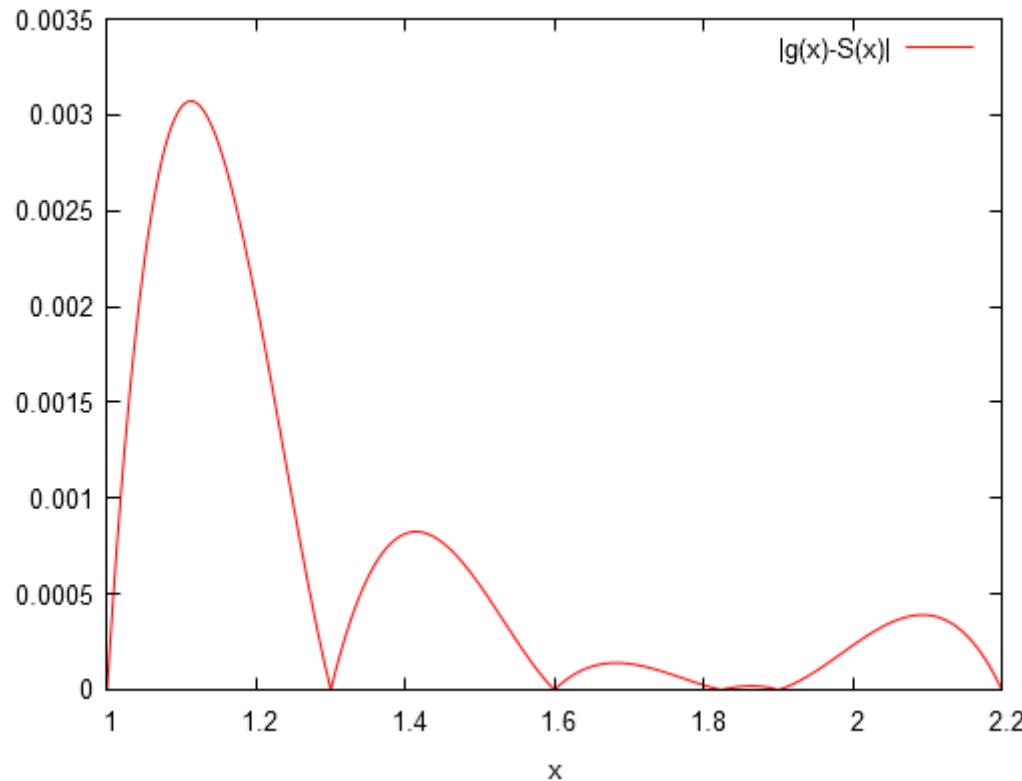


Gráfico 6 Gráfico da função erro absoluto $E = |g(x) - S(x)|$.

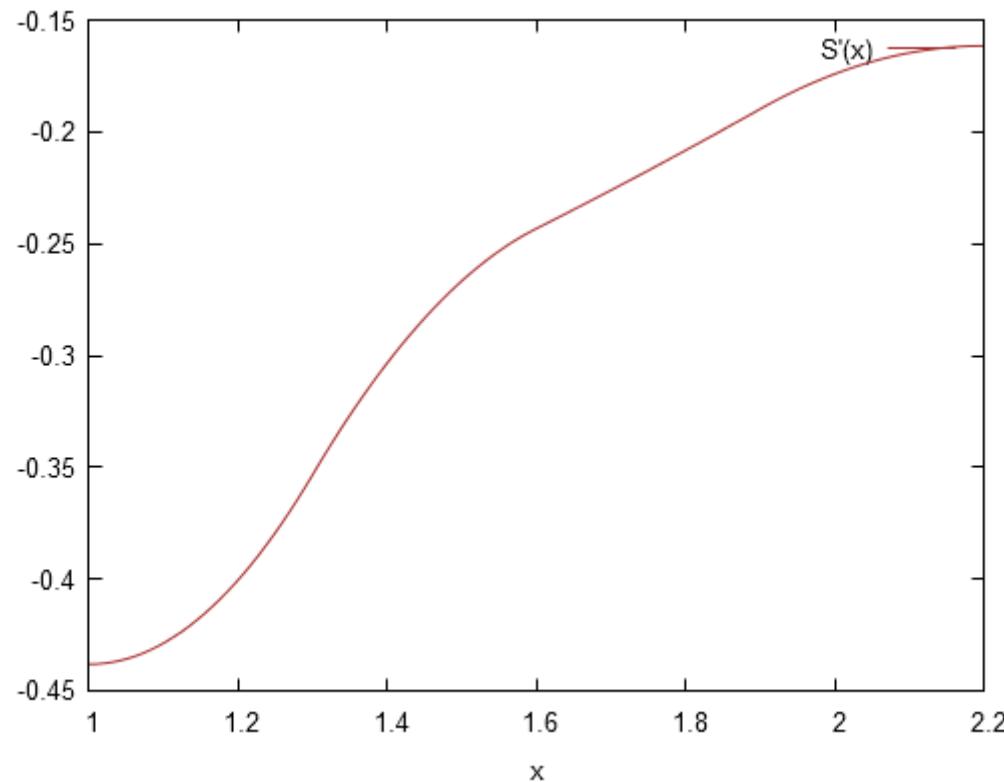


Gráfico 7 Gráfico da função $S'(x)$.

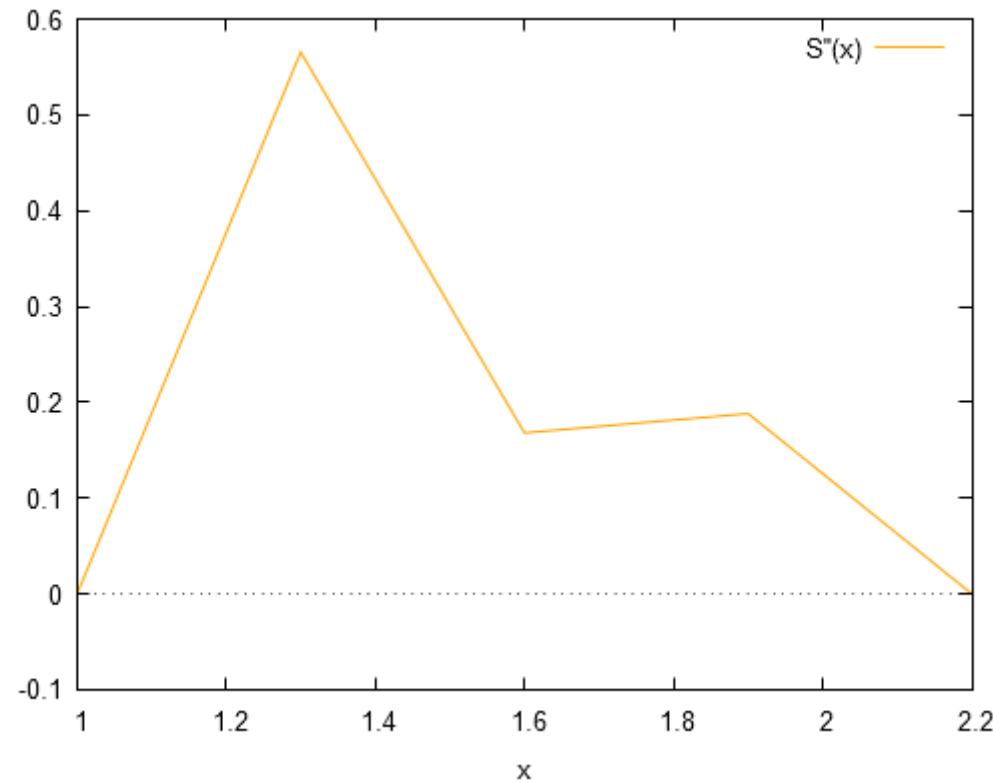


Gráfico 8 Gráfico da função $S''(x)$.

Aproximação pelo Método dos Mínimos Quadrados

Na interpolação polinomial, tal como abordada até agora, foi tratado o problema de interpolar um conjunto de $n + 1$ pontos,

$\Omega = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, com **abscissas distintas entre si**,
 $(x_i \neq x_j \text{ se } i \neq j)$.

Foram utilizados diferentes conjuntos de funções-base polinomiais $\varphi_i(x)$:

- $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_i(x) = x^i$, $i = 1, 2, \dots, n$;

- $\varphi_i(x) = L_i(x) = \frac{(x-x_0) \times (x-x_1) \times \dots \times (x-x_{i-1}) \times (x-x_{i+1}) \times \dots \times (x-x_n)}{(x_i-x_0) \times (x_i-x_1) \times \dots \times (x_i-x_{k-1}) \times (x_i-x_{k+1}) \times \dots \times (x_i-x_n)}$
 $(i = 1, 2, \dots, n)$ (polinómio interpolador de Lagrange) ;
- $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_i(x) = (x - x_0)(x - x_1) \times \dots \times (x - x_{i-1})$
 $(i = 1, 2, \dots, n)$ (polinómio interpolador de Newton) .

Considerou-se o grau do polinómio interpolador, m ,
 como o número de funções-base (ou o número de pontos a
 interpolar menos um) : $m = n$.

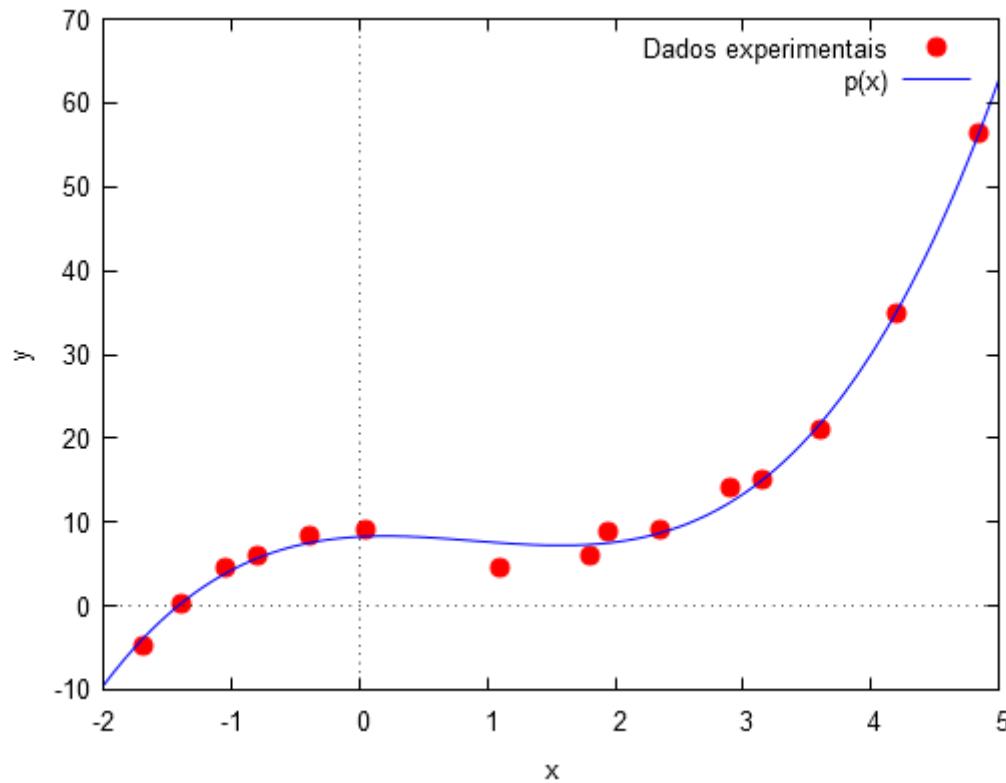


Gráfico 9 Gráfico de um conjunto de dados Ω e de um polinómio aproximador deste conjunto.

Nos casos em que se utiliza um número de funções-base (polinomiais) menos elevado, isto é $m < n$, não é utilizada interpolação polinomial, mas sim aproximação polinomial.

Em particular, se se pretender utilizar um polinómio de grau m com a forma

$$p_m(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_mx^m \quad (m < n)$$

para aproximar um conjunto de $n + 1$ pontos,

$$\Omega = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\},$$

é possível **minimizar** a soma dos quadrados das distâncias das ordenadas y_i aos valores a “estimar” $p_m(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, m$,

isto é, minimizar a quantidade

$$E_m = \sqrt{\sum_{i=0}^n (y_i - p_m(x_i))^2}.$$

Na prática é mais comum minimizar-se $(E_m)^2$, pelo que este método se designa por **método dos mínimos quadrados**.

Esta quantidade, $(E_m)^2$, designa-se **erro quadrático**.

Para esse efeito, com o objetivo de minimizar

$E_m^2 = F(c_0, c_1, \dots, c_m)$, são estabelecidas as condições de estacionariedade

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial F}{\partial c_0} & = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial c_1} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial c_m} & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} -2 \sum_{i=0}^n (y_i - p_m(x_i))(1) & = & 0 \\ -2 \sum_{i=0}^n (y_i - p_m(x_i))(x_i) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ -2 \sum_{i=0}^n (y_i - p_m(x_i))(x_i^m) & = & 0 \end{array} \right..$$

ou seja, em termos matriciais

$NC = B$, com

$$N = \begin{bmatrix} N_{00} & N_{01} & \dots & N_{0m} \\ N_{10} & N_{11} & \dots & N_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N_{m0} & N_{m1} & \dots & N_{mm} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n (1 \cdot 1) & \sum_{i=0}^n (1 \cdot x_i) & \dots & \sum_{i=0}^n (1 \cdot x_i^m) \\ \sum_{i=0}^n (x_i \cdot 1) & \sum_{i=0}^n (x_i^2) & \dots & \sum_{i=0}^n (x_i^{m+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^n (x_i^m \cdot 1) & \sum_{i=0}^n (x_i^{m+1}) & \dots & \sum_{i=0}^n (x_i^{2m}) \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n (1 \cdot y_i) \\ \sum_{i=0}^n (x_i y_i) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^n (x_i^m y_i) \end{bmatrix}.$$

Este sistema de equações, nas variáveis c_0, c_1, \dots, c_m , designa-se por **sistema de equações normais**.

O raciocínio exposto atrás facilmente se pode estender a um conjunto genérico de funções-base $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$.

Neste caso o sistema de equações normais tem a forma mais generalizada $M\bar{C} = \bar{B}$, com

$$M = \begin{bmatrix} M_{00} & M_{01} & \dots & M_{0m} \\ M_{10} & M_{11} & \dots & M_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{m0} & M_{m1} & \dots & M_{mm} \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{c}_0 \\ \bar{c}_1 \\ \vdots \\ \bar{c}_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_0 \\ \bar{B}_1 \\ \vdots \\ \bar{B}_m \end{bmatrix}.$$

Neste caso $M_{ij} = \sum_{k=0}^n (\varphi_i(x_k)\varphi_j(x_k))$ e $\bar{B}_j = \sum_{k=0}^n (y_k\varphi_j(x_k)),$
 $i, j = 0, 1, \dots, m.$

Nota

- Repare-se que, dada a natureza do problema, a solução do sistema de equações normais é a que minimiza o erro quadrático.

Exemplo de aplicação

Considere-se a seguinte tabela da função h

x	-2	0	3	4
$h(x)$	0	2	4	5

Determinar a expressão analítica dos polinómios de graus 1 e 2 que melhor aproximam a função tabelada, utilizando o método dos mínimos quadrados.

Resolução

- Polinómio de grau 1

A expressão analítica do polinómio tem a forma $p_1(x) = c_0 + c_1x$.

Neste caso as funções-base são $\varphi_0(x) = 1$ e $\varphi_1(x) = x$.

- Pontos: $x_0 = -2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 4$;
- Sistema de equações normais

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^3(1) & \sum_{k=0}^3(x_k) \\ \sum_{k=0}^3(x_k) & \sum_{k=0}^3(x_k)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^3(y_k) \\ \sum_{k=0}^3(x_ky_k) \end{bmatrix},$$

isto é

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 32 \end{bmatrix}, \text{ donde}$$

$$\begin{cases} c_0 = \frac{159}{91} \\ c_1 = \frac{73}{91} \end{cases} .$$

Sendo assim, $p_1(x) = \frac{73}{91}x + \frac{159}{91}$ e tem-se $(E_1)^2 \approx 0.110$.

- Polinómio de grau 2

A expressão analítica do polinómio tem a forma

$$p_2(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2.$$

Neste caso as funções-base são $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$ e
 $\varphi_2(x) = x^2$.

- Sistema de equações normais

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^3(1) & \sum_{k=0}^3(x_k) & \sum_{k=0}^3(x_k)^2 \\ \sum_{k=0}^3(x_k) & \sum_{k=0}^3(x_k)^2 & \sum_{k=0}^3(x_k)^3 \\ \sum_{k=0}^3(x_k)^2 & \sum_{k=0}^3(x_k)^3 & \sum_{k=0}^3(x_k)^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^3(y_k) \\ \sum_{k=0}^3(x_k y_k) \\ \sum_{k=0}^3(x_k^2 y_k) \end{bmatrix},$$

isto é

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 29 \\ 5 & 29 & 83 \\ 29 & 83 & 353 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 32 \\ 116 \end{bmatrix},$$

donde

$$\begin{cases} d_0 = \frac{221}{118} \\ d_1 = \frac{607}{708} \\ d_2 = -\frac{19}{708} \end{cases} .$$

Sendo assim, $p_2(x) = -\frac{19}{708}x^2 + \frac{607}{708}x + \frac{221}{118}$ e tem-se
 $(E_2)^2 \approx 0.076$.

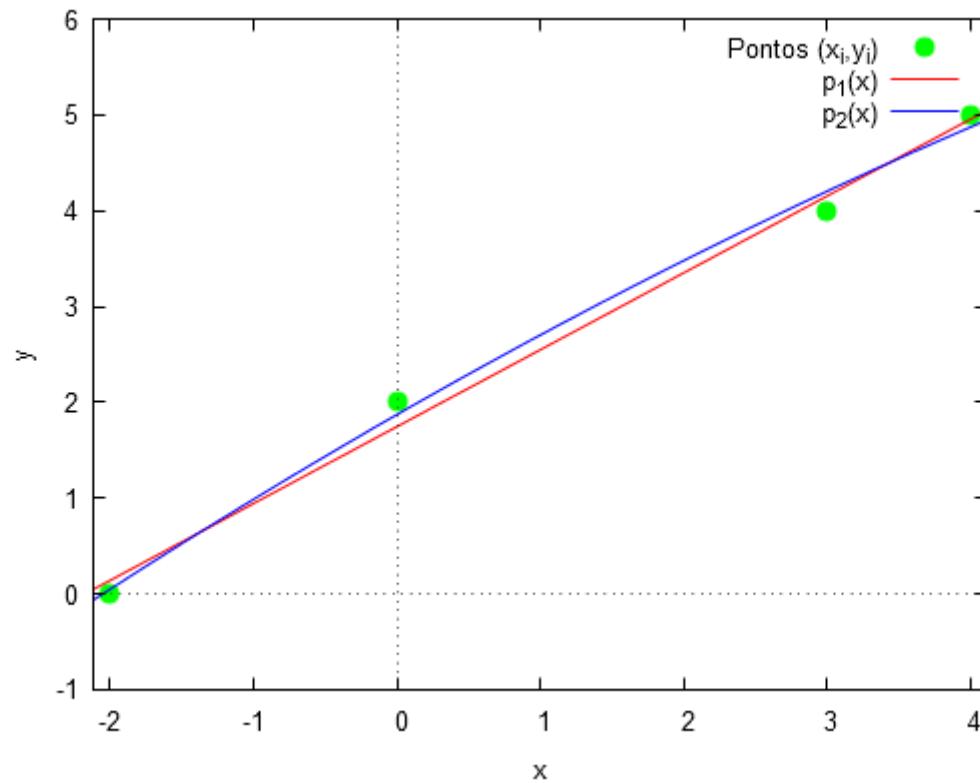


Gráfico 10 Gráfico do conjunto de dados e dos polinómios $p_1(x)$ e $p_2(x)$ do exemplo anterior.