ANÁLISE MATEMÁTICA II-C

João de Deus Marques e Joaquim Eurico Nogueira

5 de Setembro de 2022

MÉTODO DE AVALIAÇÃO

Em conformidade com o Regulamento de Avaliação de Conhecimentos (RAC) da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, aprovado a 07 de Fevereiro de 2017, a disciplina de Análise Matemática II-C tem o seguinte método de avaliação:

Frequência

Tratando-se de uma UC em repetição na sua edição fora do plano curricular, de acordo com o ponto seis do artigo sexto do RAC será atribuída frequência aos alunos de primeira inscrição que tenham faltado a, no máximo, $1/3$ do total das aulas teórico-práticas e práticas. Estão dispensados de frequência os alunos de segunda inscrição e seguinte ou que possuam um estatuto que dela os isente.

Avaliação contínua

A avaliação contínua da disciplina é efetuada através da realização de dois testes escritos (avaliação teórico e prática) a ter lugar em datas a anunciar com a duração de duas horas cada. A cada teste escrito será atribuída uma classificação (t_1, t_2). Relativamente a t_2 existe a exigência de nota mínima que será $7,5$.

A classificação final da Avaliação Contínua "AC" é calculada arredondando $(t_1 + t_2)/2$ às unidades, pelas convenções usuais.

O aluno é aprovado por avaliação contínua se tiver obtido frequência de acordo com as regras acima explicitadas, se $t_2 \geq 7,5$ e se $AC \geq 10$.

Exame

Os alunos reprovados por avaliação contínua a quem tenha sido atribuída frequência, ou dela tenham sido dispensados, poderão apresentar-se a exame.
O exame consiste numa prova escrita de duração nunca inferior a 3 horas sobre a totalidade dos conteúdos da disciplina.
Ao exame será atribuída uma classificação inteira entre 0 e 20 valores, estando o aluno aprovado à disciplina, com essa classificação, se esta for superior ou igual a 10 valores.

Defesa de Nota

Os alunos com uma classificação final superior ou igual a 18 valores deverão realizar uma prova de defesa de nota. A não realização desta prova conduz a uma classificação final de 17 valores na disciplina. A nota final de um aluno que realize a prova de defesa de nota nunca será inferior a 17 valores.

Melhoria de Classificação

Os alunos aprovados por avaliação contínua poderão requerer, mediante o cumprimento de todas as disposições impostas pela FCT-UNL, melhoria de classificação. Nesse caso, poderão efetuar o exame de recurso. A classificação final será o máximo entre as classificações obtidas em avaliação contínua e em exame.

Condições para a realização das provas escritas (testes e exame)

Poderão apresentar-se a cada um dos testes da Avaliação Contínua e ao Exame os alunos regularmente inscritos no CLIP. A inscrição deverá ser feita até pelo menos uma semana antes da realização da prova (teste ou exame). No dia da prova cada aluno deverá possuir um caderno de exame em branco que será entregue no início da prova ao docente que estiver a efectuar a vigilância. Durante a prova o aluno deverá ser portador de documento de identificação oficial com fotografia recente.
Em tudo o que o presente Regulamento seja omisso valem os Regulamentos Gerais da FCT-UNL.

Síntese do programa

1. Breve revisão sobre cónicas e quádricas
2. O espaço euclidiano n-dimensional
3. Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$
4. Funções reais de variáveis reais: limites e continuidade
5. Cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$
6. Cálculo integral em $\mathbb{R}^n$
7. Análise vectorial

Introdução

Considere-se o conjunto $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\}.$$

Aos elementos de $\mathbb{R}^n$ chamaremos vetores ou pontos conforme o contexto. Define-se soma de dois vetores de $\mathbb{R}^n$ e produto de um número real λ por um vetor de $\mathbb{R}^n$ da seguinte forma:

$$(x_1, ..., x_i, ..., x_n) + (y_1, ..., y_i, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_i + y_i, ..., x_n + y_n)$$

e

$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_i, ..., \lambda x_n).$$

O conjunto $\mathbb{R}^n$ com as operações definidas constitui um *espaço vetorial real*.

Os n vetores $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$,...,$e_n = (0, 0, ..., 1)$ são linearmente independentes e qualquer outro vetor de $\mathbb{R}^n$, $(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)$ exprime-se linearmente e de forma única a partir destes vetores da seguinte forma:

$$(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Os vetores $e_i, \; i = 1, 2, ..., n$ constituem, assim, uma base do espaço $\mathbb{R}^n$ pelo que este possui dimensão n. À base definida é usual chamar *base canónica* e ao espaço $\mathbb{R}^n$, *espaço cartesiano n-dimensional*.

O conceito de norma

Seja E um espaço vetorial real e $N(\cdot) : E \to \mathbb{R}$ uma aplicação com as seguintes propriedades:

1. $N(x) \geq 0 \;\wedge\; (N(x) = 0$ se e só se $x = 0)$,

O conceito de norma

Seja E um espaço vetorial real e $N(\cdot) : E \to \mathbb{R}$ uma aplicação com as seguintes propriedades:

1. $N(x) \geq 0 \ \wedge \ (N(x) = 0 \text{ se e só se } x = 0)$,
2. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$,

O conceito de norma

Seja E um espaço vetorial real e $N(\cdot) : E \to \mathbb{R}$ uma aplicação com as seguintes propriedades:

1. $N(x) \geq 0 \;\; \wedge \;\; (N(x) = 0 \text{ se e só se } x = 0),$
2. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x), \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E,$
3. $N(x + y) \leq N(x) + N(y), \;\; \forall x, y \in E,$ (desigualdade triangular).

O conceito de norma

Seja E um espaço vetorial real e $N(\cdot) : E \to \mathbb{R}$ uma aplicação com as seguintes propriedades:

1. $N(x) \geq 0 \ \wedge \ (N(x) = 0 \text{ se e só se } x = 0)$,
2. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$,
3. $N(x + y) \leq N(x) + N(y), \ \forall x, y \in E$, (desigualdade triangular).

À aplicação $N(\cdot)$ chama-se uma *norma* definida em E, e escreve-se usualmente $N(x) = ||x||$.

O conceito de norma

Seja E um espaço vetorial real e $N(\cdot) : E \to \mathbb{R}$ uma aplicação com as seguintes propriedades:

1. $N(x) \geq 0 \;\wedge\; (N(x) = 0 \text{ se e só se } x = 0)$,
2. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x), \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$,
3. $N(x + y) \leq N(x) + N(y), \;\; \forall x, y \in E$, (desigualdade triangular).

À aplicação $N(\cdot)$ chama-se uma *norma* definida em E, e escreve-se usualmente $N(x) = ||x||$.

A um espaço vetorial real onde está definida uma norma, chama-se *espaço normado*.

Exemplo

Dado $p \geq 1$, o espaço cartesiano n-dimensional é um espaço normado com a aplicação $||\cdot||_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por:

$$||(x_1, x_2, ..., x_n)||_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $p = 1$, obtém-se a norma

$$||(x_1, x_2, ..., x_n)||_1 := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right) = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|,$$

conhecida como a norma da soma. A prova de que esta aplicação é uma norma é trivial.

Exemplo (continuação)

Quando $p = 2$, obtém-se a norma

$$||(x_1, x_2, ..., x_n)||_2 := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2}.$$

Na prova de que $||\cdot||_2$ (ou mais geralmente $||\cdot||_p$, $p > 1$) é de facto uma norma, só a desigualdade triangular não é trivial e faz uso da desigualdade de Hölder que estabelece o seguinte resultado:

Exemplo (continuação)

Proposição (Desigualdade de *Hölder*)

Dados $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *e dois números reais* $p > 1$ *e* $q > 1$ *tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, *tem-se que:*

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

A norma $||(x_1, x_2, ..., x_n)||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2}$, *é conhecida como norma euclidiana e o espaço* $\mathbb{R}^n$ *munido desta norma recebe o nome de espaço euclidiano.*

O conceito de produto interno

Seja E um espaço vetorial real e considere-se uma aplicação $p : E \times E \to \mathbb{R}$ que a cada par $(x, y) \in E \times E$ faz corresponder o número real $p(x, y)$, com as seguintes propriedades:

1. $p(x, x) \geq 0 \;\wedge\; (p(x, x) = 0$ se e só se $x = 0)$,

O conceito de produto interno

Seja E um espaço vetorial real e considere-se uma aplicação $p : E \times E \to \mathbb{R}$ que a cada par $(x, y) \in E \times E$ faz corresponder o número real $p(x, y)$, com as seguintes propriedades:

1. $p(x, x) \geq 0 \ \wedge \ (p(x, x) = 0$ se e só se $x = 0)$,
2. $p(x, y) = p(y, x), \quad \forall x, y \in E$,

O conceito de produto interno

Seja E um espaço vetorial real e considere-se uma aplicação $p : E \times E \to \mathbb{R}$ que a cada par $(x, y) \in E \times E$ faz corresponder o número real $p(x, y)$, com as seguintes propriedades:

1. $p(x, x) \geq 0 \;\; \wedge \;\; (p(x, x) = 0$ se e só se $x = 0)$,
2. $p(x, y) = p(y, x), \quad \forall x, y \in E$,
3. $p(\lambda x, y) = \lambda p(x, y), \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E$,

O conceito de produto interno

Seja E um espaço vetorial real e considere-se uma aplicação $p : E \times E \to \mathbb{R}$ que a cada par $(x, y) \in E \times E$ faz corresponder o número real $p(x, y)$, com as seguintes propriedades:

1. $p(x, x) \geq 0 \;\wedge\; (p(x, x) = 0$ se e só se $x = 0)$,
2. $p(x, y) = p(y, x), \quad \forall x, y \in E$,
3. $p(\lambda x, y) = \lambda p(x, y), \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E$,
4. $p(x + y, z) = p(x, z) + p(y, z), \;\; \forall x, y, z \in E$.

O conceito de produto interno

Seja E um espaço vetorial real e considere-se uma aplicação $p : E \times E \to \mathbb{R}$ que a cada par $(x, y) \in E \times E$ faz corresponder o número real $p(x, y)$, com as seguintes propriedades:

1. $p(x, x) \geq 0 \ \wedge \ (p(x, x) = 0$ se e só se $x = 0)$,
2. $p(x, y) = p(y, x), \quad \forall x, y \in E$,
3. $p(\lambda x, y) = \lambda p(x, y), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E$,
4. $p(x + y, z) = p(x, z) + p(y, z), \ \forall x, y, z \in E$.

À aplicação $(\cdot|\cdot)$ chama-se um *produto interno* definido em E e é usual escrever $p(x, y) = x|y$.

A desigualdade de Cauchy-Schwarz

Num espaço vetorial real E onde esteja definido um produto interno $(\cdot|\cdot)$ é válida a seguinte desigualdade:

$$\Big| x|y \Big| \leq \sqrt{x|x} \cdot \sqrt{y|y}, \quad \forall x, y \in E,$$

conhecida por *desigualdade de Cauchy-Schwarz*.

Provemos esta desigualdade. Dados $x, y \in E$ considere-se a seguinte função real de variável real t,

$$f(t) := (x + ty)|(x + ty).$$

Tem-se que

$$0 \leq f(t) = (y|y)t^2 + 2(x|y)t + x|x,$$

pelo que

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2(x|y))^2 - 4(y|y)(x|x) \leq 0,$$

isto é

$$(x|y)^2 \leq (x|x) \cdot (y|y)$$

ou ainda

$$\left| x|y \right| \leq \sqrt{x|x} \cdot \sqrt{y|y},$$

como pretendíamos.

No espaço euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$, fica definido um produto interno, chamado produto interno canónico, por

$$x|y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \ \ x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

As propriedades que definem um produto interno são todas de verificação trivial.

Norma induzida por um produto interno

Se num espaço vectorial real E estiver definido um produto interno $(\cdot|\cdot)$ então a aplicação N de E em $\mathbb{R}$ definida por

$$N(x) := \sqrt{x|x},$$

é uma norma, e que se diz *induzida* pelo produto interno considerado.

As propriedades 1. 2. na definição de norma são de verificação trivial. Provemos a desigualdade triangular. Tem-se que

$$N^2(x+y) = (x+y)|(x+y) = x|x + 2(x|y) + y|y.$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se que

$$x|y \leq \sqrt{x|x} \cdot \sqrt{y|y},$$

pelo que

$$N^2(x+y) \leq x|x + 2\sqrt{x|x}\sqrt{y|y} + y|y$$

ou ainda

$$N^2(x+y) \leq (\sqrt{x|x} + \sqrt{y|y})^2 = (N(x) + N(y))^2,$$

ou equivalentemente

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

Exemplo

Considere-se no espaço $\mathbb{R}^n$ *a norma* $N(.)$ *induzida pelo produto interno canónico, isto é, com* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$,

$$N(x) = \sqrt{(x_1, x_2, ..., x_n)|(x_1, x_2, ..., x_n)} = \sqrt{\sum_{i=i}^{n} x_i^2}.$$

A norma $N(\cdot)$ *induzida pelo produto interno canónico é a norma euclidiana.*

Importa referir que nem toda a norma em $\mathbb{R}^n$ é induzida por um produto interno. É possível mostrar que tal acontece se e só se vale a *Identidade do paralelogramo*

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

E neste caso o produto interno p que induziu a norma tem por expressão

$$p(x,y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2).$$

Um exemplo de uma norma que não é induzida por um produto interno é a norma da soma.

Duas normas N_1 e N_2 sobre o mesmo espaço vetorial real E dizem-se equivalentes se existirem constantes reais positivas C_1 e C_2 (com $C_1 \leq C_2$) tais que:

$$C_1 N_2(x) \leq N_1(x) \leq C_2 N_2(x), \quad \forall x \in E.$$

Um importante resultado que iremos estabelecer, sem apresentar demonstração, é que no espaço $\mathbb{R}^n$ todas as normas são equivalentes.

O conceito de espaço métrico

Definição

Seja E um conjunto não vazio. Chama-se espaço métrico a um par (E, d) em que d é uma aplicação de $E \times E$ em $\mathbb{R}$ com as propriedades:

1. $d(x, y) \geq 0 \ \wedge \ (d(x, y) = 0$ se e só se $x = y)$,

Definição

Seja E um conjunto não vazio. Chama-se espaço métrico a um par (E, d) em que d é uma aplicação de $E \times E$ em $\mathbb{R}$ com as propriedades:

1. $d(x, y) \geq 0 \ \wedge \ (d(x, y) = 0$ se e só se $x = y)$,
2. $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in E$

O conceito de espaço métrico

Definição

Seja E um conjunto não vazio. Chama-se espaço métrico a um par (E, d) em que d é uma aplicação de $E \times E$ em $\mathbb{R}$ com as propriedades:

1. $d(x, y) \geq 0 \;\wedge\; (d(x, y) = 0$ se e só se $x = y)$,
2. $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in E$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in E$.

O conceito de espaço métrico

Definição

Seja E um conjunto não vazio. Chama-se espaço métrico a um par (E, d) em que d é uma aplicação de $E \times E$ em $\mathbb{R}$ com as propriedades:

1. $d(x, y) \geq 0 \;\; \wedge \;\; (d(x, y) = 0 \text{ se e só se } x = y)$,
2. $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in E$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \;\; \forall x, y, z \in E$.

À aplicação d é usual chamar *métrica* ou *distância* definida em $E \times E$.

Exemplo

No espaço $\mathbb{R}^n$ *a aplicação* d*, que a cada par* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *faz corresponder um número real, definida por*

$$d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=i}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

é uma métrica, usualmente designada por métrica euclidiana.

Exemplo

Seja E um conjunto não vazio. A aplicação d, que a cada par x, y de elementos de E faz corresponder um número real, definida por

$$d(x,y) := \begin{cases} 1, & se \;\; x \neq y \\ 0, & se \;\; x = y \end{cases},$$

é uma métrica, usualmente designada por métrica discreta.

Métrica induzida por uma norma

Se num espaço vectorial real E estiver definida uma norma $||.||$ então a aplicação d de $E \times E$ em $\mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) := ||x - y||,$$

é uma métrica, que se diz induzida pela norma considerada.

As propriedades que permitem afirmar que a aplicação d assim definida é uma métrica são todas de verificação trivial.

Exemplo

Considere-se no espaço $\mathbb{R}^n$ a métrica d induzida pela norma euclidiana, isto é, com $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$

$$d(x, y) = ||x - y|| = ||(x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n)|| = \sqrt{\sum_{i=i}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

A métrica d induzida pela norma euclidiana é a métrica euclidiana.

Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$

Definir uma topologia num determinado conjunto não vazio A, consiste em definir uma classe de subconjuntos de A, que notaremos por $\mathcal{A}$, ditos conjuntos abertos de A que verificam as seguintes condições:

1. $A \in \mathcal{A}$ e $\emptyset \in \mathcal{A}$,

Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$

Definir uma topologia num determinado conjunto não vazio A, consiste em definir uma classe de subconjuntos de A, que notaremos por $\mathcal{A}$, ditos conjuntos abertos de A que verificam as seguintes condições:

1. $A \in \mathcal{A}$ e $\emptyset \in \mathcal{A}$,
2. A união de um número arbitrário de elementos de $\mathcal{A}$ é um elemento de $\mathcal{A}$,

Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$

Definir uma topologia num determinado conjunto não vazio A, consiste em definir uma classe de subconjuntos de A, que notaremos por $\mathcal{A}$, ditos conjuntos abertos de A que verificam as seguintes condições:

1. $A \in \mathcal{A}$ e $\emptyset \in \mathcal{A}$,
2. A união de um número arbitrário de elementos de $\mathcal{A}$ é um elemento de $\mathcal{A}$,
3. A interseção de um número finito de elementos de $\mathcal{A}$ é um elemento de $\mathcal{A}$.

Existem diversas formas de definir uma topologia num conjunto. Uma delas é a partir de uma métrica que esteja definida nesse conjunto. É este o caminho que iremos seguir para definir os conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$.
Iremos utilizar a métrica induzida pela norma euclidiana. É importante referir que se considerassemos outra métrica induzida por qualquer outra norma em $\mathbb{R}^n$ iríamos obter exatamente a mesma família de conjuntos abertos e por conseguinte a mesma topologia. Este facto deve-se a que em $\mathbb{R}^n$ todas as normas são equivalentes.

Definição

Chama-se vizinhança (aberta) de raio $r > 0$ do ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ao conjunto

$$B(x_0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = ||x - x_0||_2 < r\}.$$

Este conjunto é também, por razões óbvias, usualmente designado por bola (aberta) centrada em x_0 e raio r.

Excepto se for dito algo em contrário, a norma que estaremos a considerar será a norma euclidiana pelo que passaremos a escrever apenas $||.||$ em vez de $||.||_2$.

Uma vizinhança de raio $r > 0$ do ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ é o conjunto

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} =]x_0 - r, x_0 + r[,$$

também usualmente representado por $\mathcal{V}_r(x_0)$.

Uma vizinhança de raio $r > 0$ do ponto $x_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ é o conjunto

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < r\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}, \end{aligned}$$

que é o círculo (aberto) centrado em (a, b) e de raio r.

Definição

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$

1. Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ diz-se um **ponto de acumulação** (ou limite) de A se para todo o $r > 0$

$$(B(x_0, r) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \varnothing.$$

Ao conjunto de todos os pontos de acumulação de A chama-se **conjunto derivado** de A e representa-se por A'.

2. Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ diz-se um **ponto interior** de A se existir $r > 0$ tal que

$$B(x_0, r) \subset A.$$

Ao conjunto de todos os pontos interiores de A chama-se **interior** de A e representa-se por $int\, A$.

Definição (continuação)

3. Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ diz-se um **ponto exterior** de A se existir $r > 0$ tal que

$$B(x_0, r) \cap A = \varnothing.$$

Ao conjunto de todos os pontos exteriores de A chama-se **exterior** de A e representa-se por $ext\,A$. Note-se que o exterior de A é o interior do complementar de A.

4. Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ diz-se um **ponto fronteiro** de A, se não for nem interior nem exterior, isto é qualquer vizinhança de x_0 tem pontos de A e do complementar de A. Ao conjunto de todos os pontos fronteiros de A chama-se **fronteira** de A e representa-se por $fr\,A$ ou ∂A.

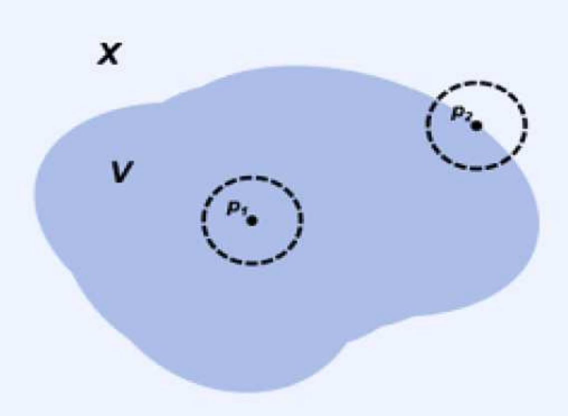


Figura: Ponto interior e fronteiro

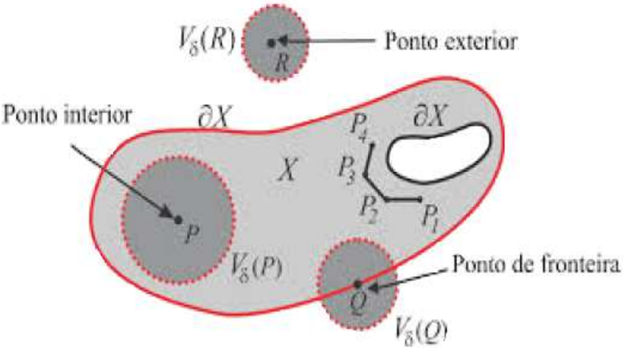


Figura: Ponto interior, fronteiro e exterior

Definição (continuação)

5. Um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ diz-se um **ponto aderente** a A se para todo o $r > 0$

$$B(x_0, r) \cap A \neq \varnothing.$$

Ao conjunto de todos os pontos aderentes de A chama-se **fecho** ou **aderência** de A e representa-se por $\overline{A}$. Tem-se que $\overline{A} = int\, A \cup fr\, A$.

Definição

Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}^n$

1. O conjunto A diz-se um **conjunto aberto** se $A = int\, A$.

2. O conjunto A diz-se um **conjunto fechado** se $A = \overline{A}$, ou equivalentemente se o complementar de A for um conjunto aberto.

3. O conjunto A diz-se um **conjunto limitado** se existir $r > 0$ tal que $A \subset B(0, r)$.

4. O conjunto A diz-se um **conjunto compacto** se for fechado e limitado.

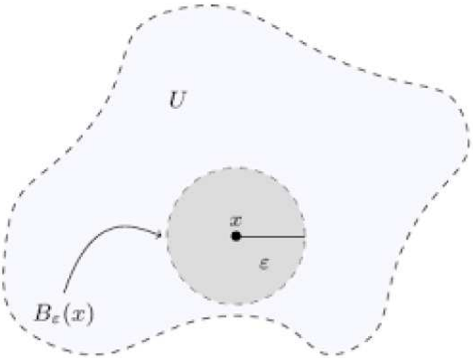


Figura: Conjunto aberto

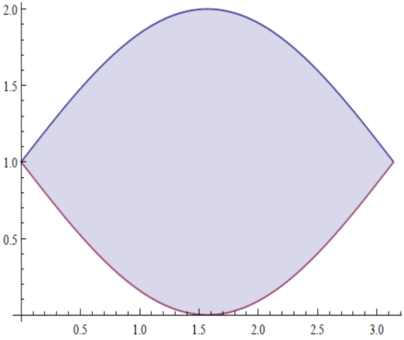


Figura: Conjunto fechado

Exemplo

Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < ||(x, y)|| \leq 1\} \cup \{(0, 2)\}$. *Tem-se que*

$$int\, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < ||(x, y)|| < 1\}$$

$$fr\, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)|| = 1\} \cup \{(0, 0), (0, 2)\},$$

$$\overline{A} = int\, A \cup fr\, A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)|| \leq 1\} \cup \{(0, 2)\}$$

e

$$A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)|| \leq 1\};$$

como $A \neq int\, A$ *o conjunto não é aberto, como* $A \neq \overline{A}$ *o conjunto não é fechado (logo não é compacto). O conjunto é limitado; tem-se por exemplo que* $A \subset B(0, 3)$.

Exemplo

Seja $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x,y)|| \geq 1\}$*. Tem-se que*

$$int\, B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x,y)|| > 1\}$$

$$fr\, B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x,y)|| = 1\} \quad e \quad \overline{B} = B' = B$$

pelo que o conjunto é fechado.
O conjunto é ilimitado, e portanto também não é compacto.

Exemplo

Seja $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x,y)|| < 1 \wedge x, y \in \mathbb{Q}\} \cup \{(3,2)\}$.
Tem-se

$$int\, C = \varnothing \quad , \quad fr\, C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x,y)|| \leq 1\} \cup \{(3,2)\}$$

$$\overline{C} = fr\, C \quad e \quad C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x,y)|| \leq 1\}.$$

Como $C \neq int\, C$ *o conjunto não é aberto.*

Como $C \neq \overline{C}$ *o conjunto não é fechado (logo não é compacto).*

O conjunto é limitado; tem-se por exemplo que $C \subset B(0,4)$.

Definição

Dois subconjuntos A e B (não vazios) de $\mathbb{R}^n$ dizem-se **separados** se

$$\overline{A} \cap B = \varnothing \ \wedge \ A \cap \overline{B} = \varnothing.$$

Um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ diz-se **desconexo** se for a união de dois conjuntos separados e **conexo** se isso não acontecer.

Um subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ diz-se um **domínio** se for aberto e conexo.

Exemplo

Os conjuntos

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)|| < 1\} \;\; e \; B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1\}$$

não são separados uma vez que $\overline{A} \cap B = \{(1, 0)\}$. *Já os conjuntos*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)|| \leq 1\} \;\; e \; D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1, 1\}$$

são separados. O conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)|| < 1\} \cup \{(0, 2)\}$$

é desconexo mas o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||(x, y)|| < 1\}$$

é um domínio pois é aberto e conexo.

Funções reais de variáveis reais

Dado um conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, se a cada ponto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ se fizer corresponder um e um só número real y, diz-se que está definida uma função real de n variáveis reais. Designando essa função por f escreve-se

$$\begin{array}{rcc} f : D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longrightarrow & y = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array}$$

Ao conjunto D chama-se domínio da função f, a $x_1, x_2, \dots, x_n$ variáveis independentes e a y variável dependente. Chama-se contradomínio da função $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ao conjunto dos valores que y toma quando x percorre o domínio da função.

Chama-se gráfico de f ao conjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$Graf(f) = \{(x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x = (x_1, \dots, x_n) \in D \wedge y = f(x)\}.$$

Exemplo

Considere-se a função real de duas variáveis reais definida por

$$f(x,y) = \sqrt{16 - 2x^2 - y^2}.$$

Não sendo dada qualquer informação sobre o seu domínio entende-se que a função terá por domínio o maior subconjunto de $\mathbb{R}^2$ *para o qual a função está definida. Neste caso designando o domínio de f por Df tem-se que*

$$Df = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16 - 2x^2 - y^2 \geq 0\}.$$

A condição

$$16 - 2x^2 - y^2 \geq 0,$$

Exemplo (continuação)

é equivalente a

$$\frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{4^2} \leq 1,$$

que, geometricamente, é a elipse que interseta os eixos coordenados nos pontos $(-2\sqrt{2}, 0), (2\sqrt{2}, 0), (0, -4)$ *e* $(0, 4)$ *e a região por ela limitada.*

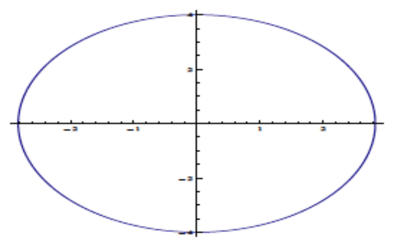


Figura: *Elipse*

Exemplo (continuação)

Designando o contradomínio de f por $D'f$, tem-se que $D'f = [0, 4]$, [justifique].
O gráfico de f é o conjunto

$$Graf(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in Df \wedge z = \sqrt{16 - 2x^2 - y^2}\}.$$

A equação $z = \sqrt{16 - 2x^2 - y^2}$ *é equivalente a*

$$z \geq 0 \quad \wedge \quad z^2 = 16 - 2x^2 - y^2$$

ou ainda

$$z \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{y^2}{4^2} + \frac{z^2}{4^2} = 1,$$

Exemplo (continuação)

que, graficamente, é o semielipsóide situado acima do plano xoy e que interseta os eixos coordenados nos pontos $(-2\sqrt{2}, 0, 0)$, $(2\sqrt{2}, 0, 0)$, $(0, -4, 0)$, $(0, 4, 0)$ *e* $(0, 0, 4)$.

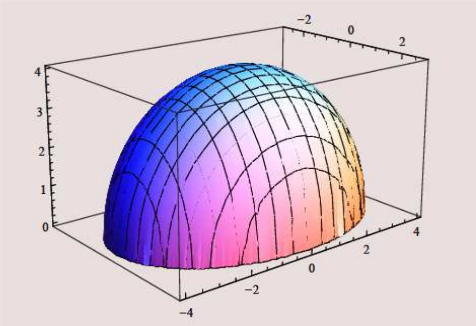


Figura: *Semielipsoide*

Curvas de nível

Uma forma de visualizar uma função de duas variáveis é, como foi visto, através do seu gráfico. No entanto, em geral, não é fácil esboçar tal gráfico. Neste sentido pode ser útil utilizar um método que fornece uma "aproximação" ao gráfico de determinada função, baseado na construção de mapas. Na construção do mapa de uma determinada região com relevo significativo é usual desenhar linhas que unem pontos que se encontram à mesma altura. O conjunto dessas curvas dá uma ideia da variação da altitude e sugere a forma do relevo. No sentido de aplicar esta técnica às funções de duas variáveis considere-se a seguinte definição.

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Chama-se *curva de nível* da função f a uma linha de equação

$$f(x, y) = c, \quad c \in f(D).$$

As curvas de nível obtêm-se intersectando o gráfico de f com o plano $z = c$, e em seguida projetando esta interseção no plano xoy.

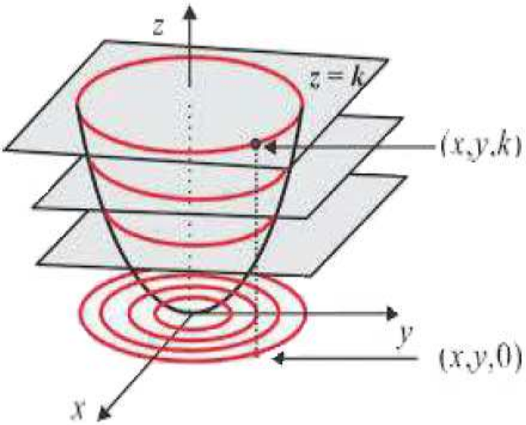


Figura: Curvas de nível

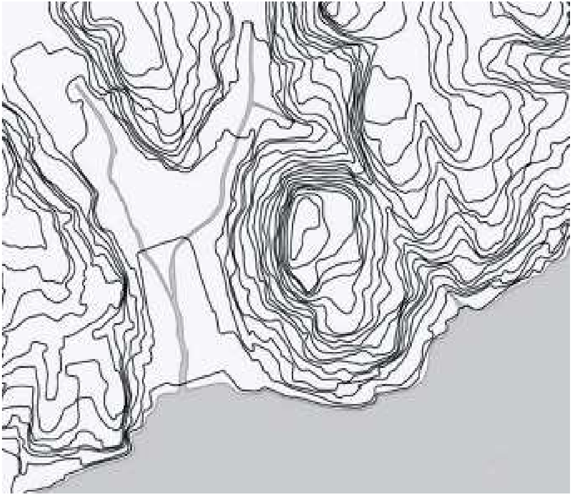


Figura: Curvas de nível

Definição (Limite segundo Cauchy)

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \overline{D}$. Diz-se que f tem por limite b quando x tende para a, e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

se

$$\forall \delta > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 : ((\forall x \in D \;\wedge\; ||x - a|| < \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - b| < \delta),$$

ou equivalentemente

$$\forall \delta > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 : ((\forall x \in D \;\cap\; B(a, \varepsilon)) \Rightarrow f(x) \in \mathcal{V}_\delta(b)).$$

Definição

Chama-se sucessão em $\mathbb{R}^n$ a toda a função f de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^n$.
Chamam-se termos da sucessão ao contradomínio de f e a $y_m = f(m)$ termo geral da sucessão. É usual representar a sucessão f por (y_m).

Definição

Diz-se que a sucessão (y_m) de elementos de $\mathbb{R}^n$ tem por limite (converge ou tende para) $y \in \mathbb{R}^n$ e escreve-se $\lim y_m = y$ ou $y_m \to y$, se a sucessão de números reais $a_m = ||y_m - y||$ convergir para zero, isto é

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \ \forall m \geq p \Rightarrow ||y_m - y|| < \delta.$$

Observe-se que uma sucessão de elementos de $\mathbb{R}^n$ é da forma $y_m = (y_m^1, y_m^2, ..., y_m^n)$ e dizer que y_m converge para $(y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ é equivalente a dizer que para cada $i = 1, 2, ..., n$ a sucessão real (y_m^i) converge para o número real y_i.

A definição de limite segundo Cauchy é equivalente à seguinte definição de limite.

Definição (Limite segundo Heine)

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $a \in \overline{D}$. Diz-se que f tem por limite b quando x tende para a, e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

se para toda a sucessão (y_m) de elementos em D convergente para a a sucessão $f(y_m)$ converge para b.

Proposição

1. *Uma função $f(x)$ não pode tender para dois limites diferentes quando $x \to x_0$.*
2. *Se $f(x)$ é constante e igual a c numa vizinhança de x_0, então $\lim_{x\to x_0} f(x) = c$.*

Proposição

Se $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ têm limites (finitos) quando $x \to x_0$ então;

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$,
2. $\lim_{x\to x_0}(f(x) \times g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \times \lim_{x\to x_0} g(x)$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$,

   (supondo que $g(x)$ não se anula em alguma vizinhança de x_0.)

Proposição

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $\varphi : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *com* $f(A) \subset B$. *Dado* $x_0 \in \overline{A}$ *suponhamos que* $f(x)$ *tem limite* t_0 *quando* x *tende para* x_0. *Suponhamos também que* $\varphi(t)$ *tem limite no ponto* t_0. *Nestas condições a função composta* $(\varphi \circ f)(x)$ *tem limite no ponto* x_0 *e tem-se que*

$$\lim_{x \to x_0} (\varphi \circ f)(x) = \lim_{t \to t_0} \varphi(t).$$

Exemplo

Suponhamos que sendo

$$g(x,y) = \frac{\sin((x-1)^2+y^2)}{(x-1)^2+y^2}$$

se pretende determinar

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} g(x,y).$$

Com

$$t = f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$$

e

$$\varphi(t) = \frac{\sin t}{t},$$

tem-se que

$$g(x,y) = (\varphi \circ f)(x,y).$$

Exemplo (continuação)

Como

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,0)} ((x-1)^2 + y^2) = 0,$$

o último teorema permite concluir que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} g(x,y) = \lim_{t\to 0} \varphi(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Proposição

Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $a \in \overline{D}$. *Suponhamos que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

e que $g(x)$ *é limitada numa vizinhança de* a. *Então*

$$\lim_{x \to a} (f(x) \times g(x)) = 0.$$

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$. Diz-se que f é contínua em x_0 se

$$\forall \delta > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 : (\forall x \in D \;\wedge\; ||x - x_0|| < \varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta,$$

isto é, existe o limite de $f(x)$ quando $x \to x_0$, e é igual a $f(x_0)$.

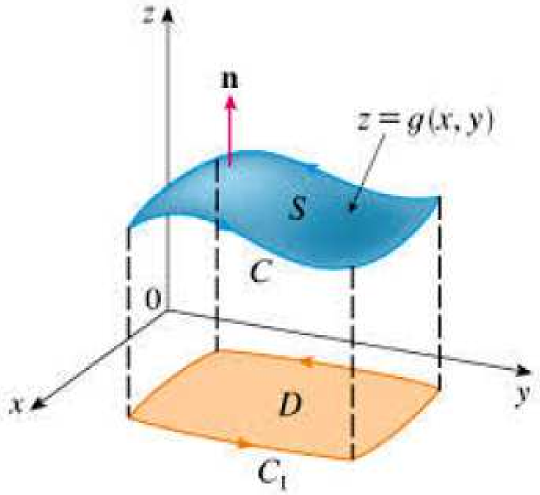


Figura: Gráfico de função real contínua de duas variáveis reais $g(x, y)$.

É importante observar que a existência de limite num ponto x_0 pertencente ao domínio da função f permite concluir a continuidade neste ponto. Com efeito, supondo que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c,$$

ter-se-á necessariamente que

$$|f(x_0) - c| < \delta, \quad \forall \delta > 0,$$

que é o mesmo que dizer que

$$f(x_0) = c.$$

Também é importante observar que a função é contínua nos pontos isolados do seu domínio.

Relativamente a funções contínuas num ponto têm-se, por exemplo, as seguintes propriedades:

Proposição

Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $x_0 \in D$. *Se* f *e* g *são contínuas em* x_0, *então as funções:*

$$|f|, \quad f+g, \quad f \times g \quad \text{e} \ \frac{f}{g}, \quad (g(x_0) \neq 0),$$

também são contínuas em x_0.

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $A \subset D$. Diz-se que f é contínua em A se for contínua em todos os pontos de A.

No cálculo do limite de uma função real de variável real num determinado ponto, podíamos aproximarmo-nos deste ponto por valores superiores ou por valores inferiores (limites laterais). O limite existia nesse ponto se e só se estes dois limites existissem e fossem iguais.

Em $\mathbb{R}^2$ (ou mais geralmente em $\mathbb{R}^n$) a situação não é tão simples uma vez que ao pretendermos calcular o limite num determinado ponto é possível aproximarmo-nos deste ponto de infinitas maneiras. Para que exista limite no ponto considerado este terá que ser independente da forma como dele nos aproximemos.

Exemplo

Considere-se a função real de duas variáveis reais definida por

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

A função tem como domínio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ *e tem limite em qualquer ponto do seu domínio. [justifique]*

O ponto $(0, 0)$ *apesar de não pertencer a* D *pertence ao seu fecho; como tal faz sentido estudar a existência de limite neste ponto.*

Suponhamos que nos aproximamos do ponto $(0, 0)$ *por pontos pertencentes ao eixo dos* xx*, isto é por pontos da forma* $(x, 0)$ *com* $x \neq 0$*. Escrevemos o limite nesta direção na forma*

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

Exemplo (continuação)

e tem-se obviamente que

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0.$$

Suponhamos agora que fazemos (x, y) *tender para* $(0, 0)$ *pelos pontos da reta* $y = x$*. O limite segundo esta direção é*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

o que permite concluir que a função não tem limite no ponto $(0, 0)$*.*

Limites iterados

No cálculo do limite de uma função real $f(x, y)$ de duas variáveis reais num ponto de acumulação (x_0, y_0) do seu domínio Df, é útil, em certos casos, começar por calcular os seguintes limites, ditos *limites iterados*

$$\lim_{y \to y_0} \big(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \big) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0} \big(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \big),$$

cujo significado passamos a explicar.
No limite

$$\lim_{y \to y_0} \big(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \big),$$

para cada $(a, b) \in Df, ((a, b) \neq (x_0, y_0))$ consideramos a reta horizontal $y = b$ e sobre esta reta fazemos x tender para x_0 (por pontos do domínio) em seguida sobre a reta vertical $x = x_0$, fazemos y tender para y_0 (por pontos do domínio).

O limite

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right)$$

tem uma interpretação análoga.

É óbvio que se existir limite no ponto (x_0, y_0) estes dois limites terão que existir e ser necessariamente iguais; no entanto, o facto destes dois limites existirem e serem iguais não permite concluir que exista o referido limite. Mas, *se os limites iterados existirem e forem distintos*, podemos concluir a não existência do limite em causa.

Observe-se que caso um dos limites iterados não exista *nada podemos concluir* acerca da existência do limite no ponto considerado.

Exemplo

Considere-se a função real real de duas variáveis reais definida por

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}.$$

O ponto $(0, 0)$ *não pertence ao domínio de* $f(x, y)$ *mas pertence ao seu fecho e como tal faz sentido estudar a existência de limite neste ponto. Calculemos os limites iterados no ponto* $(0, 0)$*. Tem-se que*

$$\lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{x - y}{x + y} \right) = -1,$$

e

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{x - y}{x + y} \right) = 1,$$

o que permite concluir que não existe limite no ponto $(0, 0)$*.*

Exemplo

Considere-se a função real de duas variáveis reais definida por

$$f(x, y) = x \sin\left(\frac{1}{y}\right).$$

O ponto $(0, 0)$ *pertence ao fecho do seu domínio e como tal faz sentido estudar a existência de limite neste ponto. Não existe*

$$\lim_{y \to 0} \sin\left(\frac{1}{y}\right),$$

e portanto também não existe o limite iterado

$$\lim_{x \to 0}\left(\lim_{y \to 0} f(x, y)\right).$$

Exemplo (continuação)

No entanto, como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0,$$

e a função $g(x,y) = \sin\left(\frac{1}{y}\right)$ *é limitada numa vizinhança do ponto* $(0,0)$, *podemos concluir que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0,$$

conforme a proposição anterior.

Limites relativos

Definição

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $A \subset D$. Suponhamos que $x_0 \in \overline{A}$. Diz-se que f tem limite a, quando x tende para x_0, segundo A ou que a é o limite relativo a A de f quando x tende para x_0, se o limite da restrição de f a A quando x tende para x_0 é a. Representa-se este limite por

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = a.$$

Se $A \cup \{x_0\}$ for uma reta, ao limite $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x)$, caso exista, chama-se *limite direcional* de f no ponto x_0.

Se existir

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a,$$

num ponto do fecho do seu domínio D, então qualquer que seja $A \subset D$ tal que x_0 ainda pertence ao fecho de A, existe

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = a.$$

A recíproca não é, obviamente, verdadeira.
Podem existir os limites relativos a alguns subconjuntos, e até ser eventualmente iguais e mesmo assim não existir o limite. No entanto basta que existam dois limites relativos distintos para concluirmos a não existência de limite.

Ainda relativamente aos limites relativos tem-se o seguinte importante resultado.

Proposição

Sejam $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $D_1, D_2, ..., D_m$, *m subconjuntos de* D, *e* $B(x_0, r)$ *uma bola centrada no ponto* x_0 *e de raio* r.
Suponhamos que $B(x_0, r) \subset D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_m$, *e que*

$$x_0 \in \overline{D_i} \quad e \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in D_i}} f(x) = c, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., m\},$$

então

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c.$$

Exemplo

Considere-se a função real de duas variáveis reais definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & se \quad x \geq 0 \\ 1 & se \quad x < 0. \end{cases}$$

Averigue-se sobre a existência de limite no ponto $(0,0)$*. Seja* $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$*. Tem-se que*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in D_1}} f(x,y) = 0.$$

Seja agora $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$*. Tem-se que*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\in D_2}} f(x,y) = 1.$$

Como tal não existe limite no ponto considerado.

Exemplo

Considere-se a função real de duas variáveis reais, de domínio $\mathbb{R}^2$, *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} 5x - y & se \quad x - y \leq 2 \\ \dfrac{x^2 - y^2 + 4x + 8}{x - y} & se \quad x - y > 2. \end{cases}$$

Estude-se a continuidade em todos os pontos do seu domínio.

Sejam

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \leq 2\}$$

e

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 2\}.$$

Tem-se que

$$\mathbb{R}^2 = D_1 \cup D_2.$$

Exemplo (continuação)

Sejam $(a, b) \in$ *int* D_1, *(*$a - b < 2$*) e* (a_n) *e* (b_n) *duas sucessões de números reais convergindo para a e b respetivamente (podendo ser* $a_n = a$ *e* $b_n = b, \ \forall n \in \mathbb{N}$*).*

Como int D_1 *é um conjunto aberto, existe* $\delta > 0$ *tal que, a partir de certa ordem,* $(a_n, b_n) \in B((a, b), \delta)$. *Então*

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) &= \lim_{(a_n,b_n)\to(a,b)} f(a_n, b_n) \\ &= \lim_{(a_n,b_n)\to(a,b)} (5a_n - b_n) = 5a - b, \end{aligned}$$

pelo que a função é contínua no conjunto int D_1.

Exemplo (continuação)

Analogamente, sejam agora $(a,b) \in \text{int}\, D_2 = D_2$, $(a-b>2)$ *e* (a_n) *e* (b_n) *duas sucessões de números reais convergindo para* a *e* b *respetivamente.*

Então

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(a_n,b_n)\to(a,b)} f(a_n,b_n)$$

$$= \lim_{(a_n,b_n)\to(a,b)} \frac{a_n^2 - b_n^2 + 4a_n + 8}{a_n - b_n}$$

$$= \frac{a^2 - b^2 + 4a + 8}{a-b},$$

pelo que a função é contínua no conjunto $\text{int}\, D_2$.

Exemplo (continuação)

Finalmente, seja $(a,b) \in fr\, D_1 = fr\, D_2$, $(a-b=2)$. *Tem-se que*

$$\forall\ \delta > 0, \quad D_1 \cap B((a,b),\delta) \neq \emptyset \quad e \quad D_2 \cap B((a,b),\delta) \neq \emptyset,$$

pelo que, nos pontos do conjunto considerado teremos que calcular os limites relativos a D_1 *e a* D_2. *Tem-se que*

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in D_1}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in D_1}} (5x-y) = 5a-b = 4a+2,$$

Exemplo (continuação)

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in D_2}} f(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(a,b)\\(x,y)\in D_2}} \frac{x^2 - y^2 + 4x + 8}{x - y} = 4a + 2.$$

Como $D_f = \mathbb{R}^2 = D_1 \cup D_2$, *e os limites relativos a* D_1 *e* D_2 *são iguais segue-se que a função também é contínua nestes pontos.*

Ao todo, mostrou-se que f *é contínua em todo o seu domínio* $(\mathbb{R}^2)$.

Exemplo

Considere-se agora a função real real de duas variáveis reais definida por

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

A função tem como domínio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e tem limite em qualquer ponto do seu domínio. [justifique]*

O ponto $(0,0)$ *também não pertence a* D *mas pertence ao seu fecho, como tal faz sentido estudar a existência de limite neste ponto.*

Calculemos os limites iterados no ponto $(0,0)$*. Tem-se que*

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0,$$

Exemplo (continuação)

e

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0;$$

mas a existência de limite no ponto $(0,0)$ *é inconclusiva. A única coisa que neste momento podemos dizer é que o limite caso exista só pode ser zero.*

Suponhamos que nos aproximamos do ponto $(0,0)$ *pelos pontos da família de semiretas* $y = mx,\ x > 0$ *e* $m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$*. O limite segundo cada uma desta direções é*

$$\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{\sqrt{x^2+m^2x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{mx^2}{x\sqrt{1+m^2}}=0.$$

Exemplo (continuação)

Poderíamos considerar outras formas de fazer (x, y) convergir para o ponto $(0, 0)$ mas seríamos sempre conduzidos ao mesmo valor do limite. Tal não nos permite concluir que é o limite é zero, mas podemos desde já afirmar que o limite caso exista será zero necessariamente.

Provemos por definição que de facto o limite de $f(x, y)$ é zero no ponto $(0, 0)$.

Dado $\delta > 0$, pretendemos determinar um valor $\varepsilon(\delta)$ tal que, se

$$(x, y) \in D \quad e \quad ||(x, y) - (0, 0)|| = \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

então

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \delta.$$

Exemplo (continuação)

Tendo em conta que

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \;\; e \;\; |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \textit{[justifique]}$$

tem-se que

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

pelo que, se $\varepsilon(\delta) = \delta$, *ter-se-á*

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \delta,$$

o que prova que o limite existe e é zero.

Exemplo

Considere-se agora a função real real de duas variáveis reais definida por

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2}.$$

A função tem como domínio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e o ponto* $(0,0)$ *pertence ao seu fecho. Averiguemos a existência de limite em* $(0,0)$.

Vejamos que apesar de o limite ao longo das retas $y = mx$ *e das parábolas* $y = mx^2$, $m \neq 0$ *ser zero não existe limite no ponto* $(0,0)$.

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{2x^6 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{2x^4 + m^2} = 0.$$

Exemplo (continuação)

$$\lim_{(x,mx^2)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^5}{2x^6 + m^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{2x^2 + m^2} = 0.$$

Calcule-se agora o limite ao longo da linha de equação $y = x^3$

$$\lim_{(x,x^3)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{3x^6} = \frac{1}{3}.$$

Consequentemente não existe limite no ponto $(0,0)$.

Exemplo

Considere-se a função real de três variáveis reais definida por

$$f(x,y,z) = \frac{z^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2}}.$$

A função tem como domínio $D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(1,-1,0)\}$ *e este ponto pertence ao seu fecho. Mostremos, utilizando a definição de limite que esta função tem limite zero no ponto* $(1,-1,0)$*.*
Pretende-se mostrar que, dado $\delta > 0$ *é possível determinar* $\varepsilon > 0$ *tal que, se tem*

$$||(x,y,z)-(1,-1,0)|| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x,y,z)-0| < \delta.$$

Tem-se que

Exemplo (continuação)

$$\left|\frac{z^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2}}\right| \leq \frac{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2}}$$

$$= \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2},$$

pelo que, se $\varepsilon(\delta)=\delta$, *ter-se-á*

$$\left|\frac{z^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+z^2}} - 0\right| < \delta,$$

o que prova que o limite existe e é zero.

Exemplo

Considere-se a função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *que a cada ponto* $x \in \mathbb{R}^n$, *faz corresponder a sua norma* $||x||$.

A função norma é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}^n$. *Este facto é uma consequência imediata da desigualdade*

$$\Big| \, ||x|| - ||x_0|| \, \Big| \leq ||x - x_0||, \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Coordenadas polares

No cálculo de limites de funções reais de duas variáveis reais é por vezes vantajoso utilizar o sistema de coordenadas denominado por *coordenadas polares* que passamos a definir.
Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definem-se coordenada polares (r, θ) do ponto (x, y) da seguinte forma:

$\theta \rightarrow$ ângulo que o semieixo positivo OX faz com a semireta que tem origem no ponto $(0, 0)$ e que passa por (x, y), contado no sentido direto e pertencente ao intervalo $[0, 2\pi[$;

$r \rightarrow$ distância do ponto (x, y) à origem.

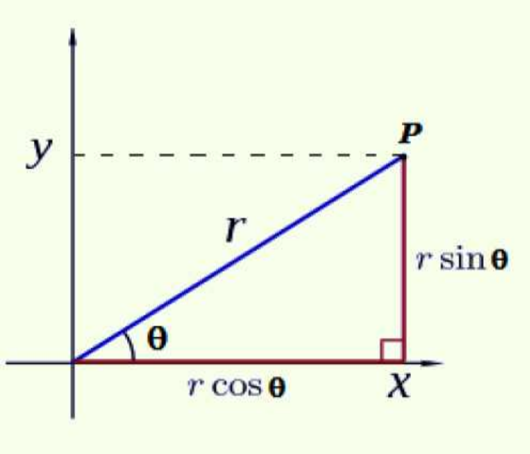


Figura: Coordenadas polares.

A relação entre as coordenadas cartesianas e polares é a seguinte:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad \theta = \begin{cases} arctg\,(y/x), & \text{se} \quad x > 0 \quad \text{e} \quad y \geq 0 \\ arctg\,(y/x) + \pi, & \text{se} \quad x < 0 \\ arctg\,(y/x) + 2\pi, & \text{se} \quad x > 0 \quad \text{e} \quad y < 0 \\ \pi/2, & \text{se} \quad x = 0 \quad \text{e} \quad y > 0 \\ (3/2)\pi, & \text{se} \quad x = 0 \quad \text{e} \quad y < 0. \end{cases}$$

Proposição

Seja f uma função real de duas variáveis reais de domínio D e seja $(x_0, y_0) \in \overline{D}$. Então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$$

se e só se

$$\lim_{r\to 0} f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) = a, \quad \forall\ \theta \in [0, 2\pi[.$$

Proposição

Seja f *uma função real de duas variáveis reais de domínio* D *e seja* $(x_0, y_0) \in \overline{D}$*. Suponhamos que* f *está definida em alguma bola centrada em* (x_0, y_0) *(exceto eventualmente no ponto* (x_0, y_0)*). Se*

$$|f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - a| \leq g(r), \quad \forall\ r,\ \theta$$

e

$$g(r) \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0$$

então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a.$$

Exemplo

Considere-se agora a função real real de duas variáveis reais definida por

$$f(x,y) = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}.$$

A função tem como domínio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *e o ponto* $(0,0)$ *pertence ao seu fecho. Mostremos, utilizando coordenadas polares, que o limite da função no ponto* $(0,0)$ *é zero. Tem-se que*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\theta + r^4\sin^4\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} r^2(\cos^4\theta + sin^4\theta),$$

Exemplo (continuação)

e como se tem

$$|r^2(\cos^4\theta + sin^4\theta)| \leq r^2, \quad \forall\ r,\theta \ \ e \ \ \lim_{r\to 0} r^2 = 0,$$

concluímos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0.$$

A utilização de coordenadas polares no cálculo de limites deve ser especialmente cuidadosa uma vez que a convergência deve ser *uniforme* relativamente a θ. O exemplo que se segue ilustra esta situação.

Exemplo

Considere-se a função real real de duas variáveis reais definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Pretende-se saber se a função em causa tem limite no ponto $(0,0)$*. Utilizando coordenadas polares tem-se que*

$$f(x,y) = \frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}.$$

Quando r *e* θ *se aproximam de zero (à direita) o numerador e o denominador aproximam-se de zero e o valor do limite é inconclusivo.*

Exemplo (continuação)

Voltemos às coordenadas cartesianas. Calculando o limite segundo a direção da reta $y = x$ vem que

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^4+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0.$$

Calculando agora o limite segundo a direção da parábola $y = x^2$ vem que

$$\lim_{(x,x^2)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2},$$

o que permite concluir que $f(x,y)$ não tem limite no ponto $(0,0)$.

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Suponhamos que D é tal que faz sentido tomar $||x||$ tão grande quanto se queira. Diz-se que

$$\lim_{||x|| \to +\infty} f(x) = b,$$

se

$$\forall \delta > 0 \;\; \exists L > 0 : ((\forall x \in D \;\wedge\; ||x|| > L) \Rightarrow |f(x) - b| < \delta).$$

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $a \in \overline{D}$. Diz-se que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

se

$$\forall L > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 : ((\forall x \in D \;\wedge\; ||x - a|| < \varepsilon) \Rightarrow |f(x)| > L).$$

Exemplo

Considere-se a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por*

$$f(x,y) = \frac{\sin x}{x^2+y^2+5},$$

e determine-se

$$\lim_{||(x,y)||\to+\infty} \frac{\sin x}{x^2+y^2+5}.$$

Comecemos por justificar que

$$\lim_{||(x,y)||\to+\infty} \frac{1}{x^2+y^2+5} = 0.$$

Exemplo

Dado $\delta > 0$, *escolhendo* $L = 1/\sqrt{\delta}$ *tem-se que, se*

$$||(x,y)|| = \sqrt{x^2 + y^2} > L$$

então

$$\left|\frac{1}{x^2 + y^2 + 5}\right| < \delta,$$

o que prova que

$$\lim_{||(x,y)|| \to +\infty} \frac{1}{x^2 + y^2 + 5} = 0.$$

O resultado é agora consequência do facto da função $\sin x$ *ser limitada.*

Exemplo

Considere-se a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por*

$$f(x,y) = \frac{1}{(x-1)^2 + (y+2)^2},$$

e mostremos que

$$\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{1}{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \infty.$$

Dado $L > 0$, *escolhendo* $\varepsilon = 1/\sqrt{L}$ *tem-se que, se*

$$||(x,y) - (1,-2)|| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} < \varepsilon$$

então

$$\frac{1}{(x-1)^2 + (y+2)^2} > L,$$

o que prova o resultado pretendido.

Derivadas parciais. Teorema de Schwarz

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $a = (a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$ um ponto interior de D. Se existir e for finito o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \cdots, a_i + h, \cdots, a_n) - f(a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n)}{h},$$

diz-se que este limite é a derivada parcial de f em ordem a x_i no ponto a e representa-se por uma destas formas

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_a, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad f'_{x_i}(a).$$

Sendo $(\vec{e_i})$ o i-ésimo vetor da base canónica o limite anterior pode ser escrito também na forma

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a + h\vec{e_i}) - f(a)}{h}.$$

Se para cada $a \in D$ existir $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ fica definida uma nova função em D que faz correspoder a cada ponto de D a derivada parcial de f em ordem a x_i nesse ponto, que se representa por $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ e à qual se chama *função derivada parcial em ordem a* x_i.

De forma análoga, se para cada $a \in D$, a função $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ possuir derivada parcial em ordem a x_j fica definida uma nova função em D. Esta nova função é designada derivada parcial de 2ª ordem de f, em relação às variáveis x_i e x_j respetivamente, e que se representa por uma qualquer das formas

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{(x,y)}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x,y), \quad f'_{x_i x_j}(x,y).$$

Continuando a proceder de forma análoga, se possível, definem-se derivadas de 3ª ordem e assim sucessivamente.

Supondo, por exemplo, que $f(x,y)$ é uma função real de duas variáveis reais, existem 2^1 derivadas parciais de 1ª ordem, 2^2 derivadas parciais de 2ª ordem e 2^3 derivadas parciais de 3ª ordem que são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \ \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}.$$

Se na função $f(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ fixarmos para $j \neq i$, $x_j = a_j$ obtemos uma função que só depende da variável x_i, isto é, tem-se que

$$f(a_1, a_2, \cdots, x_i, \cdots, a_n) = \varphi(x_i)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(a_i + h) - \varphi(a_i)}{h} = \varphi'(a_i),$$

o que permite concluir que as derivadas parciais quando existem se submetem às regras de derivação já conhecidas para as funções reais de uma variável real.

Suponhamos que $f(x,y)$ é uma função real nas variáveis reais x, y e que (x_0, y_0) é um ponto interior do domínio da função. A derivada parcial de $f(x,y)$ em ordem à variável x no ponto (x_0, y_0) tem a seguinte interpretação geométrica:

– O plano $y = y_0$ interseta o gráfico de $f(x,y)$ numa linha que é o gráfico da função $\varphi(x) = f(x, y_0)$. A derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ é o declive da reta tangente ao gráfico de $\varphi(x)$ no ponto (x_0, y_0).

Relativamente à derivada parcial de $f(x,y)$ em ordem à variável y no ponto (x_0, y_0) tem-se obviamente uma interpretação geométrica semelhante.

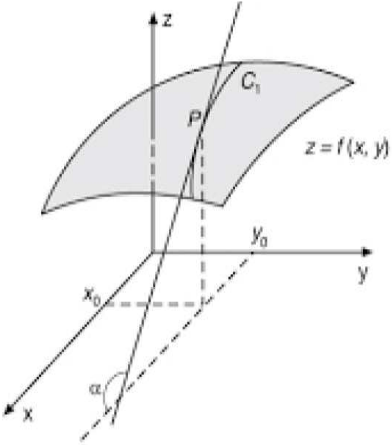


Figura: Interpretação geométrica da derivada parcial em ordem a x de uma função real de duas variáveis reais.

Exemplo

Considere-se a função $f(x,y) = xy + e^{x-y}$ *e determinem-se as derivadas parciais* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *por definição. Tem-se que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-h} - 1}{h} = -1.$$

Exemplo (continuação)

Calculem-se agora as mesmas derivadas parciais utizando as regras de derivação de funções reais de uma variável real.

No cálculo de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *derivamos* $f(x,y)$ *em ordem a* x *considerando* y *constante, e no cálculo de* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *derivamos* $f(x,y)$ *em ordem a* y *considerando* x *constante. Tem-se que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = (y + e^{x-y})_{(0,0)} = e^0 = 1,$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = (x - e^{x-y})_{(0,0)} = -e^0 = -1.$$

Exemplo

Determine-se a função derivada parcial em ordem a x *da função*

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^{2/3}.$$

Para $(x,y) \neq (0,0)$ *tem-se que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{3}(x^2+y^2)^{-1/3}2x = \frac{4x}{3(x^2+y^2)^{1/3}},$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^{4/3}-0}{h} = 0,$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x}{3(x^2+y^2)^{1/3}} & se \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & se \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Exemplo

Determine-se as funções derivada parcial de 1ª e de 2ª ordens da função

$$f(x,y) = 2x^2y^3 - e^{x^2+y^2}.$$

Utizando as regras usuais de derivação de funções reais de uma variável real, vem que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy^3 - 2xe^{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x^2y^2 - 2ye^{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4y^3 - 2e^{x^2+y^2} - 4x^2e^{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12x^2y - 2e^{x^2+y^2} - 4y^2e^{x^2+y^2},$$

Exemplo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 12xy^2 - 4xye^{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 12xy^2 - 4xye^{x^2+y^2}.$$

Observando as derivadas de 2ª ordem, verifica-se que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).$$

Será que, caso existam derivadas de 2ª ordem, esta igualdade se verifica sempre? A resposta é negativa, conforme ilustra o exemplo que se segue.

Exemplo

Considere-se a função real de duas variáveis reais

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Pretende-se com este exemplo mostrar que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Comecemos por calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$.

Exemplo (continuação)

O cálculo de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$, *supondo* $y \neq 0$, *não apresenta qualquer dificuldade pois pode ser calculada pelas regras usuais de derivação, vindo que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y.$$

Calcule-se agora $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *por definição. Tem-se que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Exemplo (continuação)

Mostrou-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \begin{cases} -y & se \quad y \neq 0 \\ 0 & se \quad y = 0. \end{cases}$$

De forma análoga, o cálculo de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0)$*, supondo* $x \neq 0$*, pode também ser efetuado pelas regras usuais de derivação, vindo que*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x.$$

Exemplo (continuação)

Calcule-se $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *por definição. Tem-se que*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

pelo que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \begin{cases} x & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Ao todo mostrou-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \begin{cases} -y & se \quad y \neq 0 \\ 0 & se \quad y = 0, \end{cases}$$

e que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \begin{cases} x & se \quad x \neq 0 \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

Calculem-se agora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Exemplo (continuação)

Tem-se que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h-0}{h} = -1,$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1,$$

o que permite concluir que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0),$$

como pretendido.

No último exemplo vimos uma função que possuía derivadas de 2ªordem no ponto $(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0),$$

(ditas cruzadas) diferentes.

O teorema seguinte, conhecido por teorema de Schwarz, dá condições suficientes que garantem que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

são iguais em determinado ponto.

Teorema (Teorema de Schwarz)

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* (x_0, y_0) *um ponto interior de* D. *Se as derivadas*

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \ \frac{\partial f}{\partial y} \ \text{ e } \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \ \text{ existem numa vizinhança de } (x_0, y_0)$$

e se

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \ \text{ é contínua em } (x_0, y_0),$$

então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \ \text{ também existe em } (x_0, y_0),$$

e tem-se que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Corolário

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$*, com* D *um conjunto aberto. Se*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad e \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{são contínuas em} \quad D,$$

então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in D.$$

Derivada segundo um vetor, derivada direcional

Definição

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\vec{u} \neq \vec{0}$. Chama-se derivada de f no ponto $x \in D$ segundo o vetor $\vec{u}$ ao limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + t\vec{u}) - f(x)}{t},$$

quando existe, e representa-se por $f'_{\vec{u}}(x)$, $(D_{\vec{u}} f)(x)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x)$.

Se

$$||\vec{u}|| = 1,$$

o comprimento do segmento de reta de extremos x e $x + t\vec{u}$ é $||x + t\vec{u} - x|| = |t|$ pelo que o quociente

$$\frac{f(x + t\vec{u}) - f(x)}{t}$$

pode ser interpretado como a "taxa média de variação" de f, por unidade de comprimento ao longo do referido segmento.

A

$$f'_{\vec{u}}(x) \quad \text{com} \quad ||\vec{u}|| = 1,$$

chama-se *derivada direcional* de f na direção (e sentido) de $\vec{u}$.

Se $\vec{u} = e_i$, i-ésimo vetor da base canónica, tem-se que

$$f'_{e_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Determine-se a derivada direcional de $f(x, y) = 4 - x^2 - \frac{1}{2}y^2$, no ponto $(1, 2)$, segundo o vetor $\vec{u} = \frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_2$. Tem-se que

$$f'_{\vec{u}}(1,2) = \lim_{t \to 0} \frac{f\left((1,2) + t\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) - f(1,2)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{(-1-\sqrt{3})t - \frac{5}{8}t^2}{t}$$

$$= -1 - \sqrt{3}.$$

No exemplo que se segue iremos mostrar que, dada uma função f e dois vetores, f pode ter derivada, num determinado ponto, segundo cada um dos vetores considerados mas não ter derivada, nesse ponto, segundo o vetor que se obtém por soma dos dois vetores anteriores.

Exemplo

Considere-se a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & se \quad xy = 0 \\ \sqrt{x^2+y^2} & se \quad xy \neq 0. \end{cases}$$

Tem-se que

$$f'_{e_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$

e

Exemplo (continuação)

$$f'_{e_2}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Vejamos que, no entanto, não existe $f'_{e_1+e_2}(0,0)$. *Com efeito*

$$\frac{f((0,0) + t(e_1 + e_2)) - f(0,0)}{t} = \frac{f(t,t)}{t} = \frac{\sqrt{2t^2}}{t} = \sqrt{2}\frac{|t|}{t},$$

e não existe o limite de $\sqrt{2}\frac{|t|}{t}$ *quando* $t \to 0$.

No próximo exemplo iremos mostrar que, uma função f pode ter derivada, num determinado ponto, segundo cada um de dois vetores considerados, ter derivada, nesse ponto, segundo o vetor que se obtém por soma dos dois vetores anteriores mas esta ser diferente da soma das derivadas anteriores.

Exemplo

Considere-se a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & se \quad xy = 0 \\ x+y & se \quad xy \neq 0. \end{cases}$$

Tem-se que

$$f'_{e_1}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$

e

Exemplo (continuação)

$$f'_{e_2}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0,$$

mas

$$f'_{e_1+e_2}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2t}{t} = 2,$$

e portanto

$$f'_{e_1+e_2}(0,0) \neq f'_{e_1}(0,0) + f'_{e_2}(0,0)$$

como pretendiamos provar.

No exemplo seguinte, veremos que uma função pode ter derivadas num ponto segundo qualquer vetor e ainda assim ser descontínua nesse ponto.

Exemplo

Considere-se a função

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & se \quad y = x^2 \wedge x \neq 0 \\ 0 & se \quad y \neq x^2 \vee x = 0. \end{cases}$$

Vejamos que $f(x,y)$ tem derivada segundo qualquer vetor no ponto $(0,0)$ mas que é descontínua neste ponto. Seja $\vec{u} = (h,k)$,

$$f'_{\vec{u}}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Mostremos que f não tem limite no ponto $(0,0)$.

Exemplo (continuação)

Calculando o limite segundo a direção da parábola $y = x^2$*, vem que*

$$\lim_{\substack{y=x^2\\x\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Calculando agora o limite ao longo do eixo dos yy*, isto é por pontos da forma* $(0,y)$ *(*$y \neq 0$*), vem que*

$$\lim_{\substack{x=0\\y\to 0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

pelo que não existe limite no ponto $(0,0)$ *e a função é descontínua neste ponto.*

O gradiente de uma função real de variáveis reais

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, e $a \in int\, D$. Suponhamos que as derivadas parciais de f no ponto a existem. Ao vetor

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)e_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)e_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)e_n,$$

chama-se *gradiente* de f no ponto a e representa-se por

$$grad\, f(a) \text{ ou } \nabla f(a).$$

Exemplo

Determine-se o gradiente de

$$f(x,y,z) = yz\log x + xy^2z^3$$

no ponto $(1,2,1)$. *Tem-se que*

$$\nabla f(1,2,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2,1)e_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,1)e_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,1)e_3$$

$$= (\frac{yz}{x} + y^2z^3)(1,2,1)e_1 + (z\log x + 2xyz^3)(1,2,1)e_2$$

$$+ (y\log x + 3xy^2z^2)(1,2,1)e_3$$

$$= 6e_1 + 4e_2 + 12e_3.$$

Funções diferenciáveis. Diferencial de uma função

Definição

Seja f uma função real, definida num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ e seja a um ponto pertencente a D. Diz-se que f é diferenciável no ponto a se existir uma aplicação linear $L_a : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$f(a+h) - f(a) = L_a(h) + ||h||\varepsilon(h),$$

com

$$\lim_{||h|| \to 0} \varepsilon(h) = 0,$$

para todo o $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $a + h \in D$. À aplicação linear L_a chama-se derivada de de f no ponto a e representa-se por $f'(a)$.

Diz-se que f é diferenciável em D se for diferenciável em todos os pontos de D.

Da definição anterior, podemos concluir que, se f é diferenciável no ponto a, a diferença

$$f(a+h) - f(a)$$

pode ser aproximada por uma função linear. O erro que se comete com esta aproximação $||h||\varepsilon(h)$ é de ordem inferior a $||h||$ quando $||h|| \longrightarrow 0$, isto é

$$\lim_{||h|| \to 0} \frac{||h||\varepsilon(h)}{||h||} = \lim_{||h|| \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Fixada a base canónica em $\mathbb{R}^n$, existe uma bijeção entre o conjunto das aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, e o conjunto das matrizes $1 \times n$.

Dada $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e sendo

$$C = [Le_1 \;\; Le_2 \;\; \dots \;\; Le_n] = [c_1 \;\; c_2 \;\; \dots \;\; c_n],$$

tem-se que, com $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n.$$

Assim, sendo f uma função real, definida num conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, f é diferenciável no ponto $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in int\, D$ se e só se existirem n números reais

$$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n,$$

tais que, com $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$ se

$$a + h = (a_1 + h_1, a_2 + h_2, ..., a_n + h_n) \in D,$$

se tenha

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, ..., a_n + h_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n) =$$
$$= \alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + ... + \alpha_n h_n + ||(h_1, h_2, ..., h_n)||\varepsilon(h_1, h_2, ..., h_n),$$

com

$$\lim_{||(h_1,h_2,...,h_n)||\to 0} \varepsilon(h_1, h_2, ..., h_n) = 0.$$

Mostremos que nas hipóteses consideradas (f diferenciável no ponto $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in int\, D$), f possui derivadas parciais no ponto a. Mais precisamente, mostremos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \alpha_1,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \alpha_2,\ ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = \alpha_n.$$

Com efeito, com $h = (h_1, 0, ..., 0)$, vem que

$$f(a_1 + h_1, a_2, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n) = \alpha_1 h_1 + |h_1|\varepsilon(h_1, 0, ..., 0),$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, ..., a_n) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(a_1 + h_1, a_2, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)}{h_1}$$

isto é

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, ..., a_n) = \lim_{h_1 \to 0}(\alpha_1 + \frac{|h_1|}{h_1}\varepsilon(h_1, 0, ..., 0)) = \alpha_1,$$

uma vez que

$$\lim_{|h_1| \to 0} \varepsilon(h_1, 0, ..., 0) = 0.$$

De forma análoga se mostra que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, ..., a_n) = \alpha_i, \quad i \in \{2, 3, ..., n\}.$$

A diferenciabilidade de f no ponto a, com $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$, admite assim a seguinte formulação

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n + ||h||\varepsilon(h),$$

com

$$\lim_{||h|| \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Resulta imediatamente do que foi visto que, se não existir alguma das derivadas parciais de f no ponto a, então f não é diferenciável no ponto a. No entanto, a existência de derivadas parciais da função f no ponto a não é suficiente para garantir a diferenciabilidade desta função no ponto considerado.

Exemplo

Mostremos que a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x, y) = |x| + |y|,$$

não é diferenciável no ponto $(0, 0)$, *provando que não existe derivada parcial em ordem a* x *neste ponto. Com efeito, tem-se que*

$$\frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Como o limite deste quociente quando h *tende para zero não existe, a função não é diferenciável no ponto* $(0, 0)$.
Também é verdade que não existe derivada parcial em ordem a y *no ponto* $(0, 0)$ *[verifique]. No entanto para justificar a não diferenciabilidade no ponto considerado basta mostrar que não existe pelo menos uma derivada parcial nesse ponto.*

Exemplo

Mostremos que a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|},$$

apesar de ter derivadas parciais no ponto $(0, 0)$ *não é diferenciável neste ponto. Tem-se que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \frac{0}{h} = 0.$$

De forma análoga se mostra que a derivada parcial em ordem a y *também é zero. Mostremos no entanto que a função não é diferenciável em* $(0, 0)$.

Exemplo (continuação)

A função f será diferenciável no ponto $(0,0)$ *se*

$$\lim_{||h||\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Neste caso, com $h = (h_1, h_2)$*, tem-se que*

$$\begin{aligned}\varepsilon(h) &= \frac{f(h_1, h_2) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \\ &= \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.\end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Mostremos que o limite do quociente

$$\frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}},$$

quando $||h|| \to 0$ *não é zero. Fazendo* $h_2 = h_1$ *vem que*

$$\frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{|h_1|}{\sqrt{2}|h_1|} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

pelo que, o limite a existir, (não existe! [prove]) teria que ser $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, *pelo que a função não é diferenciável no ponto* $(0, 0)$.

Exemplo

Estude-se quanto à diferenciabilidade no ponto $(0,0)$ *a função* $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

A função f *será diferenciável em* $(0,0)$ *se*

$$f((0,0)+(h,k)) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k + \|(h,k)\|\,\epsilon(h,k),$$

com

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon(h,k) = 0.$$

Exemplo (continuação)

Calculemos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. *Tem-se*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Exemplo (continuação)

Então f será diferenciável em $(0,0)$ se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk(h^2-k^2)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Provemos, por definição, que de facto este limite é zero, isto é,

$$\forall\delta > 0 \; \exists\,\varepsilon(\delta) > 0 \;:\; \|(h,k)-(0,0)\| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \left| \frac{hk(h^2-k^2)}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} - 0 \right| < \delta,$$

ou seja

Exemplo (continuação)

$$\forall \delta > 0 \; \exists \, \varepsilon(\delta) > 0 \; : \; \sqrt{h^2 + k^2} < \varepsilon \Rightarrow \frac{|hk||h^2 - k^2|}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} < \delta.$$

Tem-se

$$\begin{aligned}\frac{|hk||h^2 - k^2|}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} &\leq |h||k| \frac{(h^2 + k^2)}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &\leq \frac{\sqrt{h^2 + k^2}\sqrt{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \sqrt{h^2 + k^2} < \delta,\end{aligned}$$

escolhendo $\varepsilon = \delta$.

Consequentemente o limite é zero e portanto a função é diferenciável em $(0, 0)$.

Exemplo

Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} x\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Estudemos f *quanto à diferenciabilidade no ponto* $(0,0)$.
A função f *será diferenciável em* $(0,0)$ *se*

$$f((0,0)+(h,k)) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k + \|(h,k)\|\,\epsilon(h,k),$$

com

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \epsilon(h,k) = 0.$$

Exemplo (continuação)

Comecemos por calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\frac{h^2}{h^2}}{h} = 1,$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Então f *será diferenciável em* $(0,0)$ *se*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h}{\|(h,k)\|}\left(\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}-1\right) = 0,$$

ou seja, se

Exemplo (continuação)

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\Big(\frac{h^2-k^2}{h^2+k^2}-\frac{h^2+k^2}{h^2+k^2}\Big)$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-2k^2h}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Vejamos que este limite não existe. Fazendo $k=h$, vem que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0),h=k} \frac{-2k^2h}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h\to 0}\frac{-2h^3}{2h^2\sqrt{2h^2}}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{|h|\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Portanto f não é diferenciável em $(0,0)$.

Definição

Seja f uma função real, definida num conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$, a um ponto interior de D. Supondo que f é diferenciável no ponto a, com $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$, tem-se

$$f(a+h) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n + ||h||\varepsilon(h),$$

com $\lim_{||h|| \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

À soma

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n,$$

chama-se *diferencial* da função f no ponto a relativamente ao vetor $h = h_1 e_1 + h_2 e_2 + ... + h_n e_n$ e escreve-se

$$df(a)h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n.$$

Considere-se a função $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1.$$

O seu diferencial num qualquer ponto a e relativo ao vetor $h = h_1 e_1 + h_2 e_2 + ... + h_n e_n$ é

$$dg_1(a)h = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a)h_1 + \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(a)h_2 + ... + \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a)h_n = h_1.$$

Designando, como é usual, esta função apenas por x_1, $(x_1 = g_1(x_1, x_2, ..., x_n))$ escreve-se

$$dx_1(a)h = h_1 \quad \text{ou apenas} \quad (dx_1)h = h_1.$$

Genericamente, considerando para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ a função

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i,$$

tem-se

$$(dx_i)h = h_i.$$

Com estas notações, é usual escrever o diferencial de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenciável num ponto a interior ao seu domínio, na forma

$$df(a)h = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(dx_1)h + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(dx_2)h + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(dx_n)h,$$

ou apenas

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Exemplo

Considere-se a função

$$f(x) = \log(||x||) : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Em cada ponto onde f é diferenciável[a] *o seu diferencial é dado por*

$$df = \frac{\partial \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}}{\partial x_n} dx_n$$

$$= \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} dx_1 + \ldots + \frac{x_n}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} dx_n.$$

[a] f é diferenciável em todos os pontos do seu domínio.

Exemplo

Considere-se a função

$$A(x,y) = xy : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

A função $A(x,y)$ é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ [verifique], e para valores de $x > 0$ e $y > 0$ representa a área do retângulo de lados x e y. O diferencial de $A(x,y)$ é

$$dA = ydx + xdy.$$

Se os valores de dx e dy forem "pequenos"relativamente aos de x e y, o diferencial dA dará uma "boa aproximação"do acréscimo da área do retângulo quando os lados x e y são substituidos por $x + dx$ e $y + dy$, isto é, $A(x+dx, y+dy) - A(x,y) \approx ydx + xdy$.

Exemplo (continuação)

O erro correspondente a esta aproximação é $dx \cdot dy$, *que é de ordem inferior a* $||(dx, dy)||$ *quando* $||(dx, dy)|| \longrightarrow 0$.

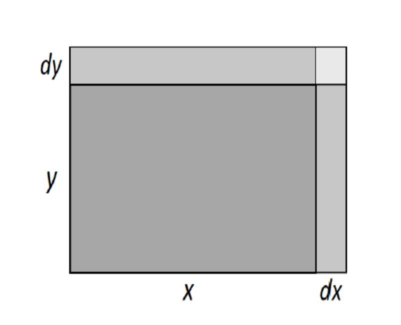


Figura: *Interpretação geométrica do diferencial da função*

$$A(x, y) = xy, \quad x > 0, \; y > 0.$$

Exemplo (continuação)

Suponhamos que $(x, y) = (5, 5)$, *e que* $(dx, dy) = (0.1, 0.05)$. *Tem-se que*

$$A(x + dx, y + dy) - A(x, y) = 5.1 \times 5.05 - 5 \times 5 = 0.755.$$

O valor do diferencial no ponto $(x, y) = (5, 5)$ *relativo ao acréscimo* $(dx, dy) = (0.1, 0.05)$ *é*

$$dA(5, 5)(0.1, 0.05) = \frac{\partial A}{\partial x}(5, 5)0.1 + \frac{\partial A}{\partial y}(5, 5)0.05 = 0.75.$$

O erro que se comete ao tomar

$$dA(5, 5)(0.1, 0.05) \quad \text{em vez de} \quad A(x + dx, y + dy) - A(x, y),$$

é 0.005 *por defeito.*

Continuando a supor que $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, é diferenciável num ponto a interior de D e sendo $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)(\neq \vec{0}) \in \mathbb{R}^n$, tem-se com $t \in \mathbb{R}$, que

$$f(a+t\vec{u})-f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)tu_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)tu_2+...+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)tu_n+||t\vec{u}||\varepsilon(t\vec{u})$$

$$= t\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)u_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n\right) + |t|\,||\vec{u}||\varepsilon(t\vec{u})$$

com $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t\vec{u}) = 0$.

Tem-se que

$$f'_{\vec{u}}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{t\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)u_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n\right) + |t|\,||\vec{u}||\varepsilon(t\vec{u})}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}\,||\vec{u}||\varepsilon(t\vec{u}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)u_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)u_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n$$

$$= \nabla f(a) \cdot \vec{u}.$$

O resultado que acabamos de mostrar, permite enunciar o seguinte resultado:

Teorema

Se $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *é diferenciável no ponto* $a \in \mathrm{int}\, D$, *dado* $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)(\neq \vec{0}) \in \mathbb{R}^n$, *existe* $f'_{\vec{u}}(a)$, *e tem-se que*

$$f'_{\vec{u}}(a) = \nabla f(a) \cdot \vec{u}.$$

A diferenciabilidade de f no ponto a pode ser expressa numa das formas

$$f(a+h) - f(a) = df(a)h + ||h||\,\varepsilon(h),$$

$$f(a+h) - f(a) = f'_h(a) + ||h||\,\varepsilon(h),$$

$$f(a+h) - f(a) = \nabla f(a) \cdot h + ||h||\,\varepsilon(h).$$

Suponhamos que f é função de duas ou três variáveis e que conhecemos todas as suas derivadas direcionais num determinado ponto. Assim sendo, ficamos a saber a taxa de variação de f em todas as direcões possíveis e por conseguinte em qual delas f cresce ou decresce mais rapidamente. Neste sentido considere-se o seguinte resultado.

Teorema

Suponhamos que $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $n = 2, 3$ *é diferenciável num ponto* $a \in int\, D$ *e que* $\nabla f(a) \neq \vec{0}$. *Então*

1. *A derivada direcional* $f'_{\vec{u}}(a)$ *é máxima quando* $\vec{u} = \dfrac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}$ *e* $f'_{\frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}}(a) = ||\nabla f(a)||$.
2. *A derivada direcional* $f'_{\vec{u}}(a)$ *é mínima quando* $\vec{u} = -\dfrac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}$ *e* $f'_{-\frac{\nabla f(a)}{||\nabla f(a)||}}(a) = -||\nabla f(a)||$.

Exemplo

A temperatura em graus Celsius na superfície de uma placa metálica é dada pela função

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2,$$

em que x *e* y *se medem em centímetros. Pretende-se determinar em que direção o aumento da temperatura é máximo a partir do ponto* $(2, -3)$*, bem como a taxa de crescimento.*

A direção em que o aumento da temperatura é máximo é a do gradiente no ponto $(2, -3)$*, ou seja a do vetor*

$$\nabla T(2, -3) = \frac{\partial f}{\partial x}(2, -3)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(2, -3)\vec{j} = -16\vec{i} + 6\vec{j}.$$

Exemplo (continuação)

A taxa de crescimento é

$$||\nabla T(2,-3)|| = \sqrt{16^2 + 6^2} \approx 17.09^\circ C \text{ *por centímetro.*}$$

Teorema

Suponhamos que $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *é diferenciável num ponto* $(x_0, y_0) \in int\, D$ *e que* $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$. *Então* $\nabla f(x_0, y_0)$ *é perpendicular em* (x_0, y_0) *à curva de nível de* f *que passa por este ponto.*

Exemplo

Determine-se uma equação da reta normal no ponto $P_0 = (3,4)$ *à curva de nível da função* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ *que passa pelo ponto indicado. A curva de nível que passa pelo ponto considerado é*

$$\sqrt{x^2+y^2} = 5$$

e

$$\nabla f(3,4) = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}.$$

Uma equação da reta pedida é

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4}.$$

Se uma função não for diferenciável num determinado ponto a, pode existir $f'_{\vec{u}}(a)$, mas ser diferente de $\nabla f(a).\vec{u}$, conforme se pode observar no exemplo que se segue.

Exemplo

Considere-se a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & se\ x \neq y \\ x+y & se\ x = y. \end{cases}$$

Tem-se que $\nabla f(0,0) = (0,0)$, *pelo que* $\nabla f(0,0) \cdot (1,1) = 0$. *Calculando* $f'_{\overrightarrow{(1,1)}}(0,0)$ *por definição vem que*

$$f'_{\overrightarrow{(1,1)}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2t}{t} = 2,$$

o que mostra que $f'_{\overrightarrow{(1,1)}}(0,0) \neq \nabla f(0,0) \cdot (1,1)$. *Podemos ainda concluir que* f *não é diferenciável no ponto* $(0,0)$.

A diferenciabilidade de f no ponto a implica a continuidade de f neste ponto. Com efeito, se f é diferenciável em a, tem-se que

$$f(a+h) - f(a) = df(a)h + ||h||\,\varepsilon(h),$$

pelo que

$$\lim_{||h||\to 0}(f(a+h) - f(a)) = \lim_{||h||\to 0}(df(a)h + ||h||\,\varepsilon(h)) = 0,$$

ou equivalentemente

$$\lim_{||h||\to 0} f(a+h) = f(a),$$

o que prova que f é contínua no ponto a.

Têm-se, por exemplo, as seguintes propriedades das funções diferenciáveis

Teorema

Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *duas funções diferenciáveis num ponto* $a \in int\, D$. *Então:*

1. $f + g$ *é diferenciável em* a *e* $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$,
2. $f \cdot g$ *é diferenciável em* a *e* $d(f \cdot g)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a)$,
3. *Se* $g(a) \neq 0$, f/g *é diferenciável em* a *e*

$$d(f/g)(a) = \frac{g(a)df(a) - f(a)dg(a)}{(g(a))^2}.$$

Definição

Seja D um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Dado $k \in \mathbb{N}$, representa-se por $C^k(D)$ o conjunto formado por todas as funções definidas em D cujas derivadas parciais de ordem k são contínuas em todos os pontos de D. Se $f \in C^k(D)$, diz-se que f é de classe C^k em D. Notaremos por $C^0(D)$ o conjunto formado por todas as funções contínuas definidas em D. Representa-se por $C^\infty(D)$ o conjunto formado por todas as funções de classe $C^k(D)$ para todo o $k \in \mathbb{N}$.

Teorema

Seja D um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $k \in \mathbb{N}$. Então tem-se que:

1. $C^\infty(D) \subset C^{k+1}(D) \subset C^k(D)$,
2. *Se $f \in C^1(D)$ então f é diferenciável em D*
3. *Se f é diferenciável em D então $f \in C^0(D)$.*

É sobejamente conhecido que uma função pode ser contínua num conjunto aberto sem ser diferenciável nesse conjunto.
Já foi visto anteriormente, por exemplo, que a função

$$f(x, y) = |x| + |y|,$$

não era diferenciável no ponto $(0, 0)$ e portanto não é diferenciável em qualquer conjunto aberto que contenha este ponto; no entanto esta função é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

Os exemplos que se seguem, têm por objectivo exemplificar que as outras inclusões do último teorema também são estritas.

Exemplo

Considere-se a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calculemos $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$. *Tem-se que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \cos\dfrac{1}{|h|}}{h} = 0.$$

Analogamente se mostra que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Exemplo (continuação)

A função f será diferenciável no ponto $(0,0)$ *se*

$$\lim_{||h||\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Neste caso, com $h = (h_1, h_2)$*, tem-se que*

$$\varepsilon(h) = \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$= \sqrt{h_1^2 + h_2^2}\cos\frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}.$$

Exemplo (continuação)

Utilizando coordenadas polares, vem que

$$|\varepsilon(r,\theta)| = |r\cos\frac{1}{r}| \leq r \longrightarrow 0, \quad \textit{quando} \quad r \to 0,$$

o que prova que f *é diferenciável no ponto* $(0,0)$.

Mostremos que a derivada parcial em ordem a x *não é contínua no ponto* $(0,0)$. *Tem-se que*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Utilizemos a definição de limite segundo Heine, para mostrar que a função derivada parcial em ordem a x *não tem limite no ponto* $(0,0)$ *e portanto não é contínua neste ponto. Considerem-se as sucessões*

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{2n\pi}, 0\right) \quad e \quad (x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{2n\pi + \pi/2}, 0\right),$$

convergentes para $(0,0)$. *Tem-se que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) \longrightarrow 0 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x'_n, y'_n) \longrightarrow 1,$$

pelo que não existe limite no ponto $(0,0)$ *e portanto* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *é descontínua em* $(0,0)$.

Exemplo

Considere-se a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3 \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Tem-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 3x^2 \cos \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{x^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \sin \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Quer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *quer* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *são funções contínuas em* $\mathbb{R}^2$*, pelo que* $f \in C^1(D)$ *em qualquer conjunto aberto* D *contido em* $\mathbb{R}^2$*.*
Vejamos que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *não tem derivada parcial em ordem a* x *no ponto* $(0,0)$ *o que prova que* f *não é de classe* C^2 *em qualquer conjunto aberto* D *contido em* $\mathbb{R}^2$*. Com efeito, não existe o limite do quociente*

$$\frac{3h^2\cos\dfrac{1}{|h|} + \dfrac{h^4}{h^2|h|}\sin\dfrac{1}{|h|}}{h},$$

quando $h \to 0$*, o que prova o pretendido.*

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, e suponhamos que f é diferenciável no ponto $(x_0, y_0) \in int\, D$. Chama-se *plano tangente* ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$, ao plano de equação

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

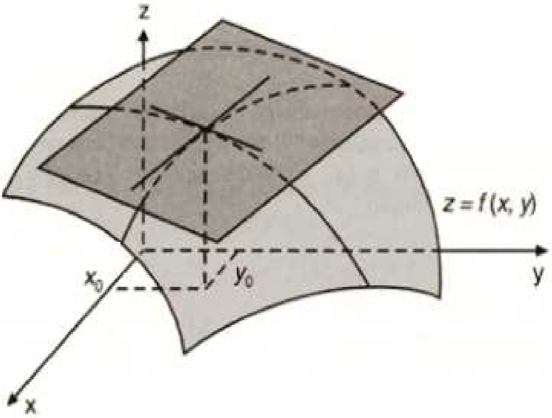


Figura: Plano tangente

Exemplo

A equação do plano tangente ao gráfico da função

$$f(x,y) = e^x \cos y$$

no ponto $(0, \pi/4, \sqrt{2}/2)$ *é*

$$z - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - \frac{\pi}{4}\right).$$

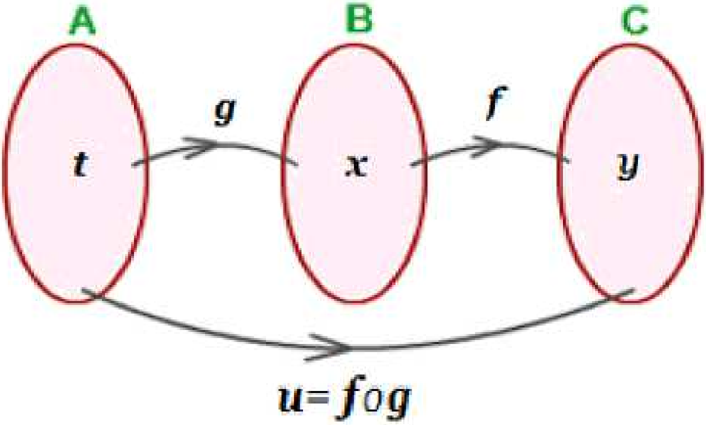
Derivação da função composta

Seja g uma função de domínio A e contradomínio B e f uma função de B em C e suponhamos que a função u resulta de compor f com g. Supondo A, B, C subconjuntos de $\mathbb{R}$, podemos designar as funções anteriores, por exemplo, por

$$g : t \longrightarrow x, \quad f : x \longrightarrow y,$$

e

$$u = f \circ g : t \longrightarrow y.$$


A
B
C
g
f
t
x
y
u=fog

Supondo g diferenciável em $t_0 \in A$ e f diferenciável em $g(t_0)$ tem-se, como se sabe, que

$$(u'(t))_{t_0} = (f \circ g)'(t)_{t_0} = f'(g(t_0)) \cdot g'(t_0)$$

ou

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{df}{dx}\right)_{g(t_0)} \cdot \left(\frac{dg}{dt}\right)_{t_0}$$

ou ainda, com $g(t_0) = x_0$, e de forma mais intuitiva

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0}.$$

Esta é a regra de derivação da função composta de funções reais de variável real. É esta regra que pretendemos generalizar para conjuntos A, B e C em espaços euclidianos de qualquer dimensão. Para já comecemos por considerar alguns casos mais simples desta regra.

Teorema (Derivada da função composta)

Suponhamos que a função u resulta de compor a função $z = f(x, y)$ com $x = \phi(t), y = \psi(t)$. Suponhamos ainda que ϕ e ψ são diferenciáveis em t_0 e que f é diferenciável em $(a, b) = (\phi(t_0), \psi(t_0))$. Nestas condições tem-se que

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)} \left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)} \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{t_0}$$

que se escreve, por vezes, na forma

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)} \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0},$$

ou ainda

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(a,b)} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(a,b)} \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0}.$$

Demonstração:

Tem-se que

$$u(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$$

e seja

$$(a, b) = (\varphi(t_0), \psi(t_0)).$$

Então

$$u(t_0 + h) - u(t_0) = f(\varphi(t_0 + h), \psi(t_0 + h)) - f(\varphi(t_0), \psi(t_0)).$$

Escrevendo

$$\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0) = \Delta\varphi \quad \text{e} \quad \psi(t_0 + h) - \psi(t_0) = \Delta\psi$$

vem

$$\varphi(t_0 + h) = a + \Delta\varphi \quad \text{e} \quad \psi(t_0 + h) = b + \Delta\psi$$

donde

$$u(t_0 + h) - u(t_0) = f(a + \Delta\varphi, b + \Delta\psi) - f(a, b).$$

Como, por hipótese, f é diferenciável em (a, b), tem-se

$$\begin{aligned}
&f(a+\Delta\varphi, b+\Delta\psi) - f(a, b)\\
=&\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta\psi + \epsilon(\Delta\varphi, \Delta\psi)\,\|(\Delta\varphi, \Delta\psi)\|
\end{aligned}$$

com $\lim_{(\Delta\varphi,\Delta\psi)\to(0,0)} \epsilon(\Delta\varphi, \Delta\psi) = 0$. Tendo em conta que

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi &= \varphi'(t_0)h + |h|\epsilon_1(h), \text{ com } \lim_{h\to 0}\epsilon_1(h) = 0,\\
\Delta\psi &= \psi'(t_0)h + |h|\epsilon_2(h), \text{ com } \lim_{h\to 0}\epsilon_2(h) = 0
\end{aligned}$$

vem que

$$\begin{aligned}
f(a+\Delta\varphi, b+\Delta\psi) - f(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(\varphi'(t_0)h + |h|\epsilon_1(h))\\
&+\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(\psi'(t_0)h + |h|\epsilon_2(h)) + \epsilon(\Delta\varphi, \Delta\psi)\,\|(\Delta\varphi, \Delta\psi)\|\,.
\end{aligned}$$

Então

$$
\begin{aligned}
u'(t_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(t_0+h)-u(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(\varphi'(t_0)h+|h|\epsilon_1(h))+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(\psi'(t_0)h+|h|\epsilon_2(h))}{h} \\
&+ \lim_{h\to 0} \frac{\epsilon(\Delta\varphi,\Delta\psi)\,\|(\Delta\varphi,\Delta\psi)\|}{h} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\varphi'(t_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\psi'(t_0) \\
&+ \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)|h|\epsilon_1(h)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)|h|\epsilon_2(h)+\epsilon(\Delta\varphi,\Delta\psi)\,\|(\Delta\varphi,\Delta\psi)\|}{h}.
\end{aligned}
$$

Mostremos que esta última parcela é nula. Sabe-se que

$$(\lim_{h\to 0}\Delta\varphi = 0 \ \wedge\ \lim_{h\to 0}\Delta\psi = 0) \Rightarrow \lim_{h\to 0}(\Delta\varphi,\Delta\psi) = 0$$

e consequentemente

$$\lim_{h\to 0} \epsilon(\Delta\varphi, \Delta\psi) = 0.$$

Recordemos que se tem

$$\Delta\varphi = h(\varphi'(t_0) + E_1(h)), \text{ com } \lim_{h\to 0} E_1(h) = \pm \lim_{h\to 0} \epsilon_1(h) = 0,$$
$$\Delta\psi = h(\psi'(t_0) + E_2(h)), \text{ com } \lim_{h\to 0} E_2(h) = \pm \lim_{h\to 0} \epsilon_2(h) = 0$$

donde vem que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)|h|\epsilon_1(h) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)|h|\epsilon_2(h) = 0.$$

Tem-se ainda

$$\begin{aligned} \|(\Delta\varphi, \Delta\psi)\| &= \sqrt{h^2(\varphi'(t_0) + E_1(h))^2 + h^2(\psi'(t_0) + E_2(h))^2} \\ &= |h|\sqrt{(\varphi'(t_0) + E_1(h))^2 + (\psi'(t_0) + E_2(h))^2} \end{aligned}$$

donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{\epsilon(\Delta\varphi, \Delta\psi)\, \|(\Delta\varphi, \Delta\psi)\|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \epsilon(\Delta\varphi, \Delta\psi) \frac{|h| \sqrt{(\varphi'(t_0) + E_1(h))^2 + (\psi'(t_0) + E_2(h))^2}}{h} = 0$$

e daqui se conclui que

$$u'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\varphi'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\psi'(t_0),$$

como pretendido.

Teorema

Suponhamos que u resulta de compor a função $z = f(x, y)$ com as funções $x = \varphi(s, t)$, $y = \psi(s, t)$, isto é, $z = f(\varphi(s, t), \psi(s, t))$; suponhamos também que φ, ψ são diferenciáveis no ponto (s_0, t_0) e que $z = f(x, y)$ é diferenciável no ponto $(x_0, y_0) = (\varphi(s_0, t_0), \psi(s_0, t_0))$.
Nestas condições tem-se que

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s_0, t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0, t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\partial \psi}{\partial s}(s_0, t_0)$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t}(s_0, t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s_0, t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{\partial \psi}{\partial t}(s_0, t_0).$$

Demonstração: O resultado obtém-se fixando $t = t_0$ (resp. $s = s_0$) nas funções φ e ψ e aplicando em seguida o último teorema.

É usual apresentar o resultado deste último teorema na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial s} & \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix}_{(s_0,t_0)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial s} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial s} & \dfrac{\partial \psi}{\partial t} \end{bmatrix}_{(s_0,t_0)}$$

e por vezes na forma mais intuitiva

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}_{(s_0,t_0)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} & \dfrac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}_{(s_0,t_0)} .$$

Exemplo

Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a função definida por*

$$u(s,t) = F(s^2 - t^2, t^2 - s^2).$$

Pretende-se mostrar que

$$t\frac{\partial u}{\partial s} + s\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Seja $x = s^2 - t^2$ *e* $y = t^2 - s^2$. *Tem-se*

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}(2s) + \frac{\partial u}{\partial y}(-2s)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}(-2t) + \frac{\partial u}{\partial y}(2t).$$

Exemplo (continuação)

Então

$$t\frac{\partial u}{\partial s}+s\frac{\partial u}{\partial t}=t\left(\frac{\partial u}{\partial x}(2s)+\frac{\partial u}{\partial y}(-2s)\right)+s\left(\frac{\partial u}{\partial x}(-2t)+\frac{\partial u}{\partial y}(2t)\right)$$
$$=2st\frac{\partial u}{\partial x}-2st\frac{\partial u}{\partial y}-2st\frac{\partial u}{\partial x}+2ts\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

o que prova o resultado pretendido.

Generalização de alguns resultados anteriores a funções definidas em $\mathbb{R}^n$ e com valores em $\mathbb{R}^m$.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função definida num subconjunto de D de $\mathbb{R}^n$ e com valores também num espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$; trata-se de uma função vectorial.
Os conceitos de limite e continuidade definem-se de forma análoga aos das funções reais de variável real.
Dado $a \in \overline{D}$, diz-se que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ se

$$\forall \delta > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 : ((\forall x \in D \;\wedge\; ||x - a|| < \varepsilon) \Rightarrow ||f(x) - b|| < \delta).$$

Dado $a \in D$, diz-se que $f(x)$ é contínua em a se

$$\forall \delta > 0 \;\; \exists \varepsilon > 0 : ((\forall x \in D \;\wedge\; ||x - a|| < \varepsilon) \Rightarrow ||f(x) - f(a)|| < \delta).$$

Fixada em $\mathbb{R}^n$ a base canónica $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, designem-se por $x_1, x_2, \ldots, x_n$ as coordenadas de um ponto genérico deste espaço na base considerada; analogamente fixada em $\mathbb{R}^m$ a base canónica $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_m\}$, designem-se por $y_1, y_2, \ldots, y_m$ as coordenadas de um ponto genérico deste espaço na base considerada.
A função

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

pode traduzir-se por $y = f(x)$, com $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ e, portanto,

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ y_m = f_m(x) = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Teorema

Seja $f=(f_1,...,f_m):D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$*,* $a\in\overline{D}$ *e* $b=(b_1,...,b_m)\in\mathbb{R}^m$*. Então*

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \quad \textit{se e só se} \quad \lim_{x\to a} f_i(x)=b_i, \quad i=1,2,...,m.$$

Sendo $f=(f_1,...,f_m):D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $a\in int\,D$ e $\vec{u}\in\mathbb{R}^n$ tal como nas funções reais de n variáveis também se define neste caso derivada de f no ponto a segundo o vetor $\vec{u}$, ao limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\vec{u})-f(a)}{t},$$

quando existe e representa-se por $f'_{\vec{u}}(a)$ $(D_{\vec{u}}f)(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial\vec{u}}(a)$ (observe-se que $f'_{\vec{u}}(a)$ se trata-se de um vetor de $\mathbb{R}^m$).

Na hipótese do limite anterior existir, este desdobra-se nas m igualdades (uma para cada componente de f)

$$(f_i)'_{\vec{u}}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f_i(a + t\vec{u}) - f_i(a)}{t}, \quad i = 1, 2, ..., m.$$

Supondo que que cada f_i é diferenciável no ponto a, dado $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ foi visto que

$$(f_i)'_{\vec{u}}(a) = (\nabla f_i)(a) \cdot \vec{u},$$

o que permite escrever

$$f'_{\vec{u}}(a) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}'_{\vec{u}} (a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial fm}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

A extensão do conceito de diferenciabilidade às funções vetoriais não apresenta qualquer dificuldade.
Sendo $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $a \in int\, D$, diz-se que f é diferenciável no ponto a se existir uma aplicação linear $L_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que para todo o h tal que $a + h \in D$, se tenha

$$f(a+h) - f(a) = L_a(h) + ||h||\varepsilon(h),$$

com $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$, ou equivalentemente, se existir uma matriz de elementos reais,

$$\tilde{L}_a = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

tal que

$$f(a+h)-f(a)=\tilde{L}_a h+||h||\varepsilon(h),$$

com $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ (observe-se que $f(a+h)$, $f(a)$, h e $\varepsilon(h)$ são matrizes coluna.)

Com $f=(f_1,...,f_m)$, $a=(a_1,...,a_n)$ e $h=(h_1,...,h_n)$ em termos de coordenadas, a última igualdade, escreve-se na forma

$$f_i(a_1+h_1,...,a_n+h_n)-f_i(a_1,...,a_n)=\alpha_{i1}h_1+...+\alpha_{in}h_n+||h||\varepsilon_i(h_1,...,h_n),$$

com $\lim_{h\to 0}\varepsilon_i(h)=0$ para todo o $i=1,2,...,m$, e a função f será diferenciável no ponto a se e só se cada uma das suas funções coordenadas f_i o for.

O que foi visto anteriormente para funções $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, permite concluir que

$$\tilde{L}_a = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial fm}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(a)} .$$

Ainda na hipótese de f ser diferenciável no ponto a, à aplicação linear L_a, chama-se derivada de f em a e representa-se, como é usual, por $f'(a)$.
À matriz $\tilde{L}_a$, correspondente à aplicação linear L_a, chama-se *matriz jacobiana* de f no ponto a e é usualmente representada por $J_{f(a)}$.

Fixadas que estão em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ as bases canónicas, existe uma bijeção entre as aplicações lineares de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ e as matrizes $m \times n$ de coeficientes reais. É então usual identificar $f'(a)$ com $J_{f(a)}$.
Sendo h um vetor arbitrário de $\mathbb{R}^n$, ao valor da aplicação linear $f'(a)$ em h, $f'(a)h$, ainda se chama diferencial de f no ponto a relativo ao vetor h, representa-se por $df(a)h$, e tendo em conta as igualdades

$$df(a)h = f'(a)h = f'_{\vec{h}}(a),$$

logo se vê que o diferencial de f em a relativo ao vetor h e a derivada de f em a segundo o vector h são iguais e correspondem ao valor derivada $f'(a)$ em h.

Quando $m = n$ a matriz jacobiana é quadrada podendo falar-se do seu determinante, que é designado por *Jacobiano* e se representa por

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_m)}.$$

No caso particular, estudado anteriormente, em que f é uma função real, a diferenciabilidade de f no ponto a escrita na forma

$$f(a+h) - f(a) = \nabla f(a) \cdot h + ||h||\varepsilon(h),$$

mostra que o gradiente de f em a não é mais do que a derivada de f neste ponto, ou seja

$$\nabla f(a) = f'(a).$$

Foi visto que era possível existirem as derivadas $D_{\vec{u_1}}(a)$ e $D_{\vec{u_2}}(a)$ sem que existisse $D_{\vec{u_1}+\vec{u_2}}(a)$, ou existindo, ter um valor diferente da soma das duas derivadas anteriores. Tal não pode suceder se f for diferenciável no ponto a. A igualdade

$$L_a(u) = D_{\vec{u}}f(a),$$

mostra que $D_{\vec{u}}f(a)$ é uma função linear em $\vec{u}$.

Função composta – caso geral

Suponhamos que u resulta de compor f com g em que

$$g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ e } f : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p.$$

Suponhamos que $g(A) \subset B$ e que g e f são diferenciáveis.

Tem-se

$$g=(g_1,g_2,\dots,g_m), f=(f_1,f_2,\dots,f_p)$$

e, sendo $x=(x_1,x_2,\dots,x_n), y=(y_1,y_2,\dots,y_m)$

$$\begin{cases} y_1=g_1(x)\\ y_2=g_2(x)\\ \dots\\ y_m=g_m(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1=f_1(y)\\ z_2=f_2(y)\\ \dots\\ z_p=f_p(y). \end{cases}$$

Sendo $u=(u_1,u_2,\dots,u_p)$ a função composta de f com g, vem que

$$\begin{cases} z_1=u_1(x)=f_1(g_1(x),g_2(x),\dots,g_m(x))\\ z_2=u_2(x)=f_2(g_1(x),g_2(x),\dots,g_m(x))\\ \dots\\ z_p=u_p(x)=f_p(g_1(x),g_2(x),\dots,g_m(x)) \end{cases}$$

e

$$u'(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial u_p}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_p}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial u_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(p\times n)}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_p}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_p}{\partial y_m} \end{bmatrix}_{(p\times m)} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(m\times n)} .$$

Ou na forma mais sugestiva

$$u'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & \frac{\partial z_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_1} & \frac{\partial z_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial z_p}{\partial x_1} & \frac{\partial z_p}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial z_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(p \times n)}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial y_1} & \frac{\partial z_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial z_2}{\partial y_1} & \frac{\partial z_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial z_2}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial z_p}{\partial y_1} & \frac{\partial z_p}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial z_p}{\partial y_m} \end{bmatrix}_{(p \times m)} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(m \times n)} .$$

Exemplo

Considerem-se as funções

$$\begin{array}{cccc} g & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (\rho,\theta) & \longrightarrow & (x,y,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y,z) & \longrightarrow & (u,v) = (x^2+y^2, z) \end{array}$$

Determine-se a matriz jacobiana de

$$h = f \circ g.$$

Tem-se que

Exemplo (continuação)

$$h'(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \rho} & \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} & \frac{\partial v}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho)} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\rho & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Considere-se a aplicação $f : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *que a cada terno* (ρ, θ, z) *faz corresponder* (x, y, z) *em que*

$$\begin{cases} x = f_1(\rho, \theta, z) = \rho\cos\theta \\ y = f_2(\rho, \theta, z) = \rho\sin\theta \\ z = f_3(\rho, \theta, z) = z. \end{cases}$$

O Jacobiano é dado por

$$\frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(\rho, \theta, z)} = det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\rho} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial\rho} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial\rho} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho.$$

Teorema (Teorema dos acréscimos finitos)

Seja f uma função definida e continuamente derivável num conjunto aberto e convexo $D \subset \mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0), (x_0 + h, y_0 + k) \in D$. Então existe $\theta \in]0, 1[$ tal que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k).$$

Demonstração: Seja (x, y) tal que

$$\begin{cases} x = g_1(t) = x_0 + ht, \\ y = g_2(t) = y_0 + kt, \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Considere-se a função

$$\varphi(t) = f(g_1(t), g_2(t)) = f(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

A função $\varphi(t)$ está nas condições do teorema de Lagrange no intervalo $[0,1]$, pelo que existe $\theta \in]0,1[$ tal que $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)$. O resultado é agora imediato tendo em conta que

$$\begin{aligned}\varphi'(\theta) =& \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\frac{dg_1}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\frac{dg_2}{dt}(t)\\ =& \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)k.\end{aligned}$$

O teorema anterior generaliza-se, sem qualquer dificuldade, ao caso em que f é uma função definida e continuamente derivável num conjunto aberto e convexo $D \subset \mathbb{R}^n$. Com $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$ tem-se que

$$\begin{aligned} & f(a_1 + h_1, \cdots, a_n + h_n) - f(a_1, \cdots, a_n) \\ & = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta h_1, \cdots, a_n + \theta h_n) + \cdots \\ & \quad + h_n \frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + \theta h_1, \cdots, a_n + \theta h_n), \quad 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

Diferenciais de ordem superior à primeira

Tal como foi visto, sendo f uma função real, definida num conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$, diferenciável no ponto $a \in int\, D$, chamou-se diferencial da função f no ponto a relativamente ao vetor $u = (h, k)$ à soma

$$df(a)u := \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k.$$

Mostrou-se também que

$$df(a)u = f'(a)u = f'_u(a) = \nabla f(a) \cdot u.$$

Considere-se a função

$$f'_u : (x, y) \longrightarrow f'_u(x, y).$$

Sendo $v = (s, r)$ um vetor não nulo, ao limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f'_u(a + tv) - f'_u(a)}{t}, \quad t \in \mathbb{R}, \; a \in int\, dom(f'_u),$$

caso exista, chama-se derivada de segunda ordem de f segundo os vetores u e v no ponto a e representa-se por $f''_{uv}(a)$.

Se f e f'_u são diferenciáveis no ponto a, tem-se que

$$f'_u(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a)k,$$

e

$$\begin{aligned}
f''_{uv}(a) &= \frac{\partial f'_u}{\partial x}(a)s + \frac{\partial f'_u}{\partial y}(a)r \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)(a)s + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k\right)(a)r \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)hs + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)ks + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)hr + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)kr.
\end{aligned}$$

Em particular quando $u = v$, tem-se que

$$f''_{u^2}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)k^2.$$

Exemplo

Sendo

$$f(x, y) = x^3 + xy$$

e $u = (h, k)$ *um vetor não nulo de* $\mathbb{R}^2$ *determine-se*

$$f''_{u^2}(-1, 2).$$

Tem-se que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 2) = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 2) = 0,$$

e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1, 2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1, 2) = 1$$

donde

$$f''_{u^2}(-1, 2) = -6h^2 + 2hk.$$

Chama-se *diferencial de segunda ordem de f no ponto a relativamente ao vetor u* à derivada dirigida de segunda ordem $f''_{u^2}(a)$ e escreve-se

$$d^2f(a)u^2 := f''_{u^2}(a).$$

Se f for de classe C^2 numa vizinhança do ponto a (que contenha $a+u$), a expressão

$$\begin{aligned} d^2f(a)u^2 &= f''_{u^2}(a) \\ &= h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{aligned}$$

pode ser escrita, simbolicamente, como o desenvolvimento do quadrado da soma

$$d^2f(a)u^2 = f''_{u^2}(a) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a).$$

De modo análogo ao feito para a derivada de segunda ordem podem definir-se derivadas de ordem n de f segundo um vetor não nulo u (f de classe C^n em alguma vizinhança de a que contenha $a+u$). Podendo escrever-se simbolicamente

$$d^n f(a)u^n := f_{u^n}^{(n)}(a) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a).$$

Exemplo

Considere-se a função de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = e^x + xy^4$$

e $u = (h,k)$ um vetor não nulo de $\mathbb{R}^2$. Determine-se

$$d^3 f(0,1)u^3.$$

Tem-se que

Exemplo (continuação)

$$d^3f(0,1)u^3 = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(0,1)$$

$$= h^3\frac{\partial^3 f(0,1)}{\partial x^3} + 3h^2k\frac{\partial^3 f(0,1)}{\partial x^2\partial y} + 3hk^2\frac{\partial^3 f(0,1)}{\partial x\partial y^2} + k^3\frac{\partial^3 f(0,1)}{\partial y^3}.$$

Tem-se que

$$\frac{\partial^3 f(0,1)}{\partial x^3} = (e^x)(0,1) = 1; \quad \frac{\partial^3 f(0,1)}{\partial x^2\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f(0,1)}{\partial x\partial y^2} = (12y^2)(0,1) = 12; \quad \frac{\partial^3 f(0,1)}{\partial y^3} = (24xy^2)(0,1) = 0,$$

donde

$$d^3f(0,1)u^3 = h^3 + 36hk^2.$$

Fórmula de Taylor

Teorema (Teorema de Taylor)

Sejam, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função definida e continuamente derivável até à ordem* $(n+1)$ *no conjunto aberto e convexo* D *e* $(x_0, y_0), (x_0 + h, y_0 + k) \in D$*. Então existe* $\theta \in]0, 1[$ *tal que*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(h, k) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0)(h, k)^2$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0)(h, k)^n + R_{n+1},$$

com

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f((x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)(h, k)^{n+1}$$

Observe-se que

$$d^m f(x_0, y_0)(h, k)^m = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0, y_0)$$

$$= h^m \frac{\partial^m f}{\partial x^m}(x_0, y_0) + \binom{m}{1} h^{m-1} k \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1}\partial y}(x_0, y_0) + \cdots + k^m \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(x_0, y_0)$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} h^{m-j} k^j \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-j}\partial y^j}(x_0, y_0), \quad m = 1, 2, \cdots, n.$$

Demonstração. Considere-se a função continuamente derivável até à ordem $n+1$

$$\varphi(t) = f(g_1(t), g_2(t)) = f(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

A fórmula de Mac-Laurin para funções reais de variável real aplicada a $\varphi(t)$, permite afirmar que existe $\theta \in]0,1[$ tal que

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta),$$

Tem-se que

$$\varphi(1) = f(x_0 + h, y_0 + k) \ \text{ e } \ \varphi(0) = f(x_0, y_0).$$

De

$$\varphi'(t) = h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + ht, y_0 + kt) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + ht, y_0 + kt),$$

vem que

$$\varphi'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k;$$

de

$$\begin{aligned}\varphi''(t) =& h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + ht, y_0 + kt) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + ht, y_0 + kt)\\ &+ k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + ht, y_0 + kt),\end{aligned}$$

vem que

$$\varphi''(0) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),$$

e, genericamente, tem-se

$$\varphi^{(n)}(t) = h^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0 + ht, y_0 + kt) + \binom{n}{1} h^{n-1} k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}(x_0 + ht, y_0 + kt)$$
$$+ \cdots + k^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x_0 + ht, y_0 + kt)$$
$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} h^{n-j} k^j \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(x_0 + ht, y_0 + kt),$$

pelo que

$$\varphi^{(n)}(0) = h^n \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0, y_0) + \binom{n}{1} h^{n-1} k \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}(x_0, y_0) + \cdots$$
$$+ k^n \frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x_0, y_0) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} h^{n-j} k^j \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(x_0, y_0).$$

Tem-se ainda que

$$\begin{aligned}\varphi^{(n+1)}(\theta) =&h^{n+1}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{n+1}}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)+\cdots\\ &+k^{n+1}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial y^{n+1}}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\\ &=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}h^{n-j}k^j\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(x_0+\theta h, y_0+\theta k).\end{aligned}$$

Estas expressões, substituídas em

$$\varphi(1)=\varphi(0)+\varphi'(0)+\frac{1}{2!}\varphi''(0)+\cdots+\frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta),$$

conduzem à fórmula pretendida.

Fazendo $x - x_0 = h$ e $y - y_0 = k$ em

$$
\begin{aligned}
f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\\
&+\frac{1}{2!}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\right] + \cdots\\
&+\frac{1}{n!}[h^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0, y_0) + \binom{n}{1} h^{n-1}k\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}(x_0, y_0) + \cdots\\
&+\binom{n}{n-1} hk^{n-1}\frac{\partial^n f}{\partial x \partial y^{n-1}}(x_0, y_0) + k^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x_0, y_0)] + R_{n+1},
\end{aligned}
$$

obtém-se a fórmula de Taylor na forma

$$
\begin{aligned}
f(x,y) =& f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\\
&+\frac{1}{2!}[(x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\\
&+(y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)] + \cdots + \frac{1}{n!}[(x-x_0)^n\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0,y_0)\\
&+\binom{n}{1}(x-x_0)^{n-1}(y-y_0)\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}(x_0,y_0) + \cdots\\
&+\binom{n}{n-1}(x-x_0)(y-y_0)^{n-1}\frac{\partial^n f}{\partial x\partial y^{n-1}}(x_0,y_0)\\
&+(y-y_0)^n\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x_0,y_0)] + R_{n+1},
\end{aligned}
$$

em que

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\Big[(x-x_0)^{n+1}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial x^{n+1}}(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0))$$
$$+\cdots+(y-y_0)^{n+1}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial y^{n+1}}(x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0))\Big],$$

que, de uma forma condensada, se escreve

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(x-x_0)^j(y-y_0)^{k-j}\frac{\partial f}{\partial x^j \partial y^{k-j}}(x_0,y_0) + R_{n+1}.$$

É possível mostrar que o resto R_{n+1} é um infinitésimo de ordem superior a $||(h,k)||^n$ isto é,

$$\lim_{||(h,k)||\to 0}\frac{R_{n+1}}{||(h,k)||^n} = 0.$$

Exemplo

Pretende-se desenvolver a função $f(x,y) = x^3y^2 + 5xy - 1$ *em potências de* x *e* $y-1$. *Consideremos* $(x_0, y_0) = (0,1)$ *e calculemos as derivadas:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 5, \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = 5,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,1) = 6, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,1) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(0,1) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,1) = 0,$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(0,1) = 12, \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,1) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0,1) = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3}(0,1) = 0,$$

$$\frac{\partial^5 f}{\partial x^3 \partial y^2}(0,1) = 12.$$

Exemplo (continuação)

Então

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = -1 + (x \cdot 5 + (y-1) \cdot 0) \\
&+\frac{1}{2!}[x^2 \cdot 0 + 2x(y-1) \cdot 5 + (y-1)^2 \cdot 0] \\
&+\frac{1}{3!}[x^3 \cdot 6 + 3x^2(y-1) \cdot 0 + 3x(y-1)^2 \cdot 0 + (y-1)^3 \cdot 0] \\
&+\frac{1}{4!}[x^4 \cdot 0 + 4x^2(y-1) \cdot 12 + 6x(y-1)^2 \cdot 0 \\
&+4x(y-1)^2 \cdot 0 + (y-1)^3 \cdot 0] + \frac{1}{5!}\binom{5}{3}x^3(y-1)^2 \cdot 12
\end{aligned}
$$

isto é,

$$f(x,y) = -1 + 5x + 5x(y-1) + x^3 + 2x^3(y-1) + x^3(y-1)^2.$$

Exemplo

Determine-se uma aproximação linear e quadrática do valor

$$\frac{(3.98-1)^2}{(5.97-3)^2}.$$

Considere-se a função

$$f(x,y)=\frac{(x-1)^2}{(y-3)^3}.$$

Com $(x_0, y_0) = (4, 6)$ *e* $(h, k) = (-0.02, -0, 03)$, *tem-se que* $(x_0 + h, y_0 + k) = (3.98, 5.97)$.

Exemplo

Para os valores de $(x_0, y_0) = (4, 6)$ *e* $(h, k) = (-0.02, -0, 03)$, *tem-se que*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(3.98, 5.97) = \frac{(3.98 - 1)^2}{(5.97 - 3)^2}.$$

A aproximação linear é

$$\begin{aligned} & f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ & = 1 + \frac{2}{3}(-0.02) - \frac{2}{3}(-0.03) = 1.00666. \end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

A aproximação quadrática é

$$f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) +$$
$$\frac{1}{2!}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\right)$$
$$= 1 + \frac{2}{3}(-0.02) - \frac{2}{3}(-0.03) + \frac{2}{9}(-0.02^2) - \frac{4}{9}(-0.02)(-0.03) +$$
$$\frac{2}{3}\frac{(-0.03)^2}{2} = 1.00674.$$

Note-se que o valor exato de $\frac{(3.98-1)^2}{(5.97-3)^2}$, *é*

$$\frac{(3.98-1)^2}{(5.97-3)^2} = 1.00675.$$

Funções implícitas

Neste parágrafo iremos tratar de um assunto, usualmente referido como *funções implícitas* e cujo resultado central é o importante, teorema das funções implícitas. Para termos uma ideia do assunto a tratar, iremos ver alguns exemplos. Comecemos por recordar o conceito de função definida implicitamente por uma equação. Na definição que se segue a função considerada é real e depende de duas variáveis reais mas pode, com as adaptações óbvias, ser reformulada para o caso da função ser real mas depender de mais do que de duas variáveis reais.

Definição

Seja $F : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Diz-se que a equação $F(x, y) = 0$ define implicitamente y como função de x numa vizinhança de $(x_0, y_0) \in U$ tal que $F(x_0, y_0) = 0$, se existirem dois intervalos $I =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ e $J =]y_0 - \beta, y_0 + \beta[$ (α e β números reais positivos), com $I \times J \subset U$ e uma função $\phi : I \longrightarrow J$, tais que

$$\forall (x, y) \in I \times J, \quad F(x, y) = 0 \ \text{ se e só se } \ y = \phi(x).$$

Também se diz que a função $y = \phi(x)$ é definida implicitamente por $F(x, y) = 0$ numa vizinhança de (x_0, y_0).

Exemplo

Considere-se a equação

$$f(x, y, z) = x + y^2 + z - 1 = 0.$$

É fácil verificar que a partir desta equação é possível definir uma função $\phi(x, y)$, *dada por*

$$z = \phi(x, y) = 1 - x - y^2,$$

tal que para cada (x, y) *corresponde um único valor de* $z = \phi(x, y)$ *tal que* $f(x, y, \phi(x, y)) = 0$.

Exemplo

Considere-se a função

$$g(x,y) = x^4 - y^2$$

e um ponto (x_0, y_0) *tal que* $g(x_0, y_0) = 0$.

Supondo que $x_0 \neq 0$ *existe um retângulo* $I \times J$ *centrado em* (x_0, y_0) *no qual a equação* $g(x,y) = 0$ *pode ser univocamente resolvida em ordem a* y. *Fica assim definida uma função* $y = f(x)$, *tal que para* $(x,y) \in I \times J$ *as condições*

$$g(x,y) = 0 \quad e \quad y = f(x),$$

são equivalentes. Ter-se-á

$$y = f(x) = x^2, \quad se \quad y_0 > 0 \quad e \quad y = f(x) = -x^2, \quad se \quad y_0 < 0.$$

Exemplo (continuação)

O que foi dito pode ser reformulado da seguinte forma. Se $x_0 \neq 0$, *existirão números positivos* α *e* β, *tais que, para cada*

$$x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,$$

corresponde um e um só valor de

$$y \in]y_0 - \beta, y_0 + \beta[,$$

tal que para este par (x, y) *se verifica a igualdade* $g(x, y) = 0$.

Exemplo (continuação)

Suponhamos agora que $x_0 = 0$ *(ter-se-á também que* $y_0 = 0$ *uma vez que* $g(x_0, y_0) = 0$*).*

Neste caso teremos que, quaisquer que sejam os números positivos α *e* β *haverá sempre valores de* x *no intervalo* $]-\alpha, \alpha[$ *para cada um dos quais a equação* $g(x, y) = 0$ *não determinará univocamente um valor de* y *no intervalo* $]-\beta, \beta[$.

Veremos posteriormente que este facto está relacionado com o anulamento da derivada parcial de g *em ordem a* y *no ponto* $(0, 0)$.

Vamos, em seguida, enunciar um teorema que nos dá condições suficientes para que uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$ defina implicitamente z como função de x e y em alguma vizinhança de um determinado ponto (x_0, y_0, z_0).

Teorema (da função implícita – Caso I)

Seja $F : D \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *D um conjunto aberto,* $F \in C^1(D)$ *e* $(x_0, y_0, z_0) \in D$. *Suponhamos que:*

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, *2.* $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Nestas condições tem-se que

1. Existem intervalos $I_1 =]x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1[$, $I_2 =]y_0 - \alpha_2, y_0 + \alpha_2[$ *e* $J =]z_0 - \beta, z_0 + \beta[$ *(*α_1, α_2 *e* β *números reais positivos), com* $I_1 \times I_2 \times J \subset U$ *e uma função* $\phi : I_1 \times I_2 \longrightarrow J$, *tais que*

$$\forall (x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times J, \quad F(x, y, z) = 0 \text{ se e só se } z = \phi(x, y).$$

Teorema (da função implícita – Caso I)

2. A função $\phi(x,y)$ é de classe C^1 em $I_1 \times I_2$ e tem-se que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)} \;;\; \frac{\partial \phi}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$$

Observe-se que, em geral, não é possível determinar a função $z = \phi(x,y)$ nem dizer qual a vizinhança onde está definida; no entanto é possível determinar as derivadas parciais desta função no ponto (x_0,y_0).

Exemplo

Mostre que a equação

$$x + y + z - \sin(xyz) = 0,$$

define numa vizinhança de $(0,0,0)$ *uma função* $z = \phi(x,y)$ *e calcule* $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(0,0)$ *e* $\dfrac{\partial \phi}{\partial y}(0,0)$.

Comecemos por verificar as condições do teorema. A função $f(x,y,z) = x + y + z - \sin(xyz)$ *é de classe* C^1 *em* $\mathbb{R}^3$.

Tem-se também que:

1. $f(0,0,0) = 0$,
2. $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = (1 - xy\cos(xyz))_{(0,0,0)} = 1 \neq 0$.

Exemplo (continuação)

Então, pelo teorema anterior, podemos afirmar que existem intervalos $I_1 =]-\alpha_1, \alpha_1[$, $I_2 =]-\alpha_2, \alpha_2[$ *e* $J =]-\beta, \beta[$ *(*α_1*,* α_2 *e* β *números reais positivos) e uma função* $\phi : I_1 \times I_2 \longrightarrow J$*, tal que se tem* $z = \phi(x, y)$*, para todo* $(x, y) \in I_1 \times I_2$*. Tendo em conta que*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = 1 \ e \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = 1,$$

tem-se

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)} = -1 \ e \ \frac{\partial \phi}{\partial y}(0,0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)} = -1.$$

Exemplo (continuação)

Alternativamente, derivando

$$x + y + \phi(x,y) - \sin(xy\,\phi(x,y)) = 0$$

em ordem a x *e a* y*, vem*

$$1 + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) - \left(y\,\phi(x,y) + xy\,\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)\right)\cos(xy\,\phi(x,y)) = 0$$
$$1 + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) - \left(x\,\phi(x,y) + xy\,\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)\right)\cos(xy\,\phi(x,y)) = 0.$$

Fazendo $(x,y) = (0,0)$ *e resolvendo o sistema obtido em ordem a* $\dfrac{\partial \phi}{\partial x}(0,0)$ *e a* $\dfrac{\partial \phi}{\partial y}(0,0)$ *vem, de novo, que*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(0,0) = -1.$$

Teorema (da função implícita – Caso II)

Seja $F = (F_1, F_2) : D \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, *D um conjunto aberto,* $F_1, F_2 \in C^1(D)$ *e* $(a_0, b_0) = (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) \in D$. *Suponhamos que:*

1. $F_1(a_0, b_0) = F_2(a_0, b_0) = 0$,
2. $\Delta = \dfrac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)}(a_0, b_0) \neq 0$.

Nestas condições tem-se que

1. *Existem intervalos abertos* I *de* $\mathbb{R}^3$ *centrado em* $a_0 = (x_0, y_0, z_0)$ *e* J *de* $\mathbb{R}^2$ *centrado em* $b_0 = (u_0, v_0)$, *com* $I \times J \subset D$ *e uma função*

$$\phi = (\phi_1, \phi_2) : I \longrightarrow J,$$

tais que

Teorema (da função implícita – Caso II)

$$\forall (x,y,z,u,v) \in I \times J, \quad F_1(x,y,z,u,v) = 0 \ \wedge \ F_2(x,y,z,u,v) = 0$$

se e só se

$$u = \phi_1(x,y,z) \ \wedge \ v = \phi_2(x,y,z).$$

2. As funções $\phi_1(x,y,z)$ *e* $\phi_2(x,y,z)$ *são de classe* C^1 *em* I *e*

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x}(a_0) = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}(a_0,b_0), \ \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(a_0) = -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,x)}(a_0,b_0).$$

Têm-se expressões análogas para $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial y}(a_0)$, $\dfrac{\partial \phi_2}{\partial y}(a_0)$ *e* $\dfrac{\partial \phi_1}{\partial z}(a_0)$, $\dfrac{\partial \phi_2}{\partial z}(a_0)$.

Exemplo

Mostre que o sistema

$$\begin{cases} u^v - x^2 = 0 \\ \log(uv) - 2y = 0 \end{cases}$$

define implicitamente u *e* v *como função de* x *e* y *numa vizinhança do ponto* $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 0, 1, 1)$. *Determine* $\dfrac{\partial u}{\partial y}(1,0)$ *e* $\dfrac{\partial v}{\partial y}(1,0)$.

Seja $F = (F_1, F_2) : D \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *onde*

$$F_1(x,y,u,v) = u^v - x^2 \quad e \quad F_2(x,y,u,v) = \log(uv) - 2y.$$

Exemplo (continuação)

As derivadas parciais de F_1 *e* F_2

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -2x, \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0, \frac{\partial F_1}{\partial u} = vu^{v-1}, \frac{\partial F_1}{\partial v} = u^v \log(u),$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0, \frac{\partial F_2}{\partial y} = -2, \frac{\partial F_2}{\partial u} = \frac{1}{u}, \frac{\partial F_2}{\partial v} = \frac{1}{v},$$

são contínuas no seu domínio, $\mathbb{R}^2 \times]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ *que é um conjunto aberto.*

Tem-se que, $F_1(1,0,1,1) = 0$ *e* $F_2(1,0,1,1) = 0$, *e*

$$\left.\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)}\right|_{(1,0,1,1)} = \left|\begin{matrix} vu^{v-1} & u^v \log(u) \\ \dfrac{1}{u} & \dfrac{1}{v} \end{matrix}\right|_{(1,0,1,1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Exemplo (continuação)

Pelo teorema anterior existem existem intervalos abertos I *de* $\mathbb{R}^2$ *centrado em* $a_0 = (1,0)$ *e* J *de* $\mathbb{R}^2$ *centrado em* $b_0 = (1,1)$ *e uma função*

$$\phi = (\phi_1, \phi_2) : I \longrightarrow J,$$

continuamente derivável em I, *tal que*

$$u = \phi_1(x,y) \ \ e \ \ v = \phi_2(x,y), \ \ \forall (x,y) \in I.$$

Tem-se ainda que

Exemplo (continuação)

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y}(1,0) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}}(1,0,1,1) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 0,$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y}(1,0) = -\frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}}(1,0,1,1) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = 2.$$

Exemplo (continuação)

Alternativamente, derivando cada uma das equações

$$\begin{cases} u^v - x^2 = 0 \\ \log(uv) - 2y = 0 \end{cases}$$

em ordem a y, vem que

$$\begin{cases} vu^{v-1}\dfrac{\partial u}{\partial y} + u^v \log u \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\frac{\partial u}{\partial y}}{u} + \dfrac{\frac{\partial v}{\partial y}}{v} = 2. \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Substituindo (x, y) *no ponto* $(1, 0)$ *vem que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y}(1,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(1,0) + \dfrac{\partial v}{\partial y}(1,0) = 2, \end{cases}$$

tal como já tinha sido obtido, quando foram utilizadas as expressões das derivadas, referidas no teorema.

Teorema (da função inversa)

Seja D um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, uma função de classe C^1 em D, definida pelas n condições $y_i = F_i(x_1, ..., x_n)$, com $i = 1, ..., n$.

Dado $a \in D$ suponhamos que $\det(F'(a)) = \dfrac{\partial(F_1, \cdots, F_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}(a) \neq 0.$

Nestas condições existem conjuntos abertos $A \subset D$ e $B \subset F(D)$ tais que:

1. $a \in A, F(a) \in B$;
2. $F_{/A}$ *(F restrita a A) é uma bijecção de A sobre B;*
3. *A função inversa de $F_{/A}$ é de classe C^1 em B;*
4. $(F^{-1})'(y) = (F'(x))^{-1}$, *onde* $x = F^{-1}(y), y \in B$.

Exemplo

Seja

$$\begin{aligned} F \ : D \subset \mathbb{R}^2 \quad &\to \quad \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\to (u,v), \end{aligned}$$

onde $u = F_1(x,y) = e^x \cos y$ *e* $v = F_2(x,y) = e^x \sin y$*. As derivadas parciais*

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = e^x \cos y, \frac{\partial F_2}{\partial x} = e^x \sin y, \frac{\partial F_1}{\partial y} = -e^x \sin y, \frac{\partial F_2}{\partial y} = e^x \cos y$$

são de classe C^1 *em* $\mathbb{R}^2$ *e dado* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*, tem-se que*

$$\det(F'(x_0,y_0)) = \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}(x_0,y_0) = \left|\begin{matrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{matrix}\right|_{(x_0,y_0)} = e^{2x_0} \neq 0.$$

Exemplo (continuação)

Pelo teorema da função inversa F é localmente injectiva em $\mathbb{R}^2$, isto é, dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, existem abertos A e B tais que $(x_0, y_0) \in A$, $F(x_0, y_0) \in B$ e F é uma bijecção de A sobre B de classe C^1, cuja inversa $(F^{-1})_{/B}$ ainda é de classe C^1 (isto é, é um difeomomorfismo de de classe C^1 de A sobre B). Designemos $(F^{-1})_{/B}$ por (ϕ_1, ϕ_2).

Dado $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{R}^2$, $F\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, tem-se que

$$F'\left(0, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix}_{\left(0, \frac{\pi}{4}\right)} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

Exemplo (continuação)

e

$$\det\left(F'\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=1\neq 0.$$

Pelo teorema da função inversa existem abertos A e B tais que $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\in A$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\in B$ e a função F é um difeomomorfismo de classe C^1 de A sobre B.

Calcule-se

$$(F^{-1})'\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial\phi_1}{\partial u} & \frac{\partial\phi_1}{\partial v}\\ \frac{\partial\phi_2}{\partial u} & \frac{\partial\phi_2}{\partial v}\end{bmatrix}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

Exemplo (continuação)

Tem-se que

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \phi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{bmatrix}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{-\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Observe-se que a função F, não é no entanto, globalmente invertível em $\mathbb{R}^2$ uma vez que não é injectiva em $\mathbb{R}^2$; tem-se por exemplo que, $F(0,0) = F(0,2\pi)$.

Extremos

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in int\, D$. Diz-se que $f(x_0)$ é um *mínimo local ou relativo* da função f, se existir $B(x_0, \delta)$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in B(x_0, \delta).$$

Ao ponto x_0 chama-se um *minimizante local* da função f.

Analogamente, diz-se que $f(x_0)$ é um *máximo local ou relativo* da função f, se existir $B(x_0, \delta)$ tal que

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in B(x_0, \delta).$$

Ao ponto x_0 chama-se um *maximizante local* da função f.

Diz-se que $f(x_0)$ é um *extremo local ou relativo* de f se for um mínimo local ou um máximo local.

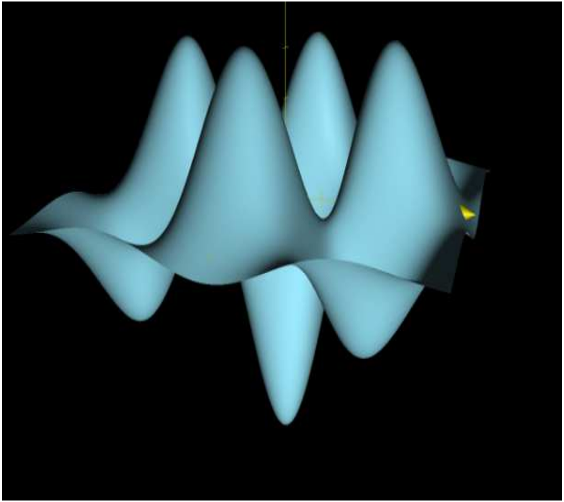


Figura: Extremos locais.

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$. Diz-se que $f(x_0)$ é um *mínimo absoluto* de f se

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in D.$$

Analogamente, diz-se que $f(x_0)$ é um *máximo absoluto* de f se

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in D.$$

Diz-se que $f(x_0)$ é um *extremo absoluto* de f se for um mínimo absoluto ou um máximo absoluto.

Observe-se que os extremos absolutos, quando existem, também são extremos locais.

O teorema seguinte fornece uma condição suficiente para que uma função real definida num subconjunto de $\mathbb{R}^n$, tenha nesse conjunto máximo e mínimo absolutos.

Teorema (Teorema de Weierstrass)

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e limitado (compacto) e $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então f tem em D um máximo e um mínimo.

Observe-se que o teorema de Weierstrass é apenas um teorema de existência e não fornece qualquer processo para a determinação dos extremos. O teorema também não permite concluir a unicidade de qualquer dos extremos.

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in int\, D$. O ponto a diz-se um ponto *crítico ou de estacionaridade* de f se:

1. Pelo menos uma das derivadas $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a), i \in \{1, \cdots, n\}$ não existir, ou
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \forall i \in \{1, \cdots, n\}$.

Teorema

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in int\, D$. Suponhamos que f tem um extremo local no ponto a e que existem todas as derivadas parciais de f no ponto a. Então a é ponto de estacionaridade de f.

Demonstração. Suponhamos que a é um extremo relativo de f. Dado $i \in \{1, \cdots, n\}$, a função real de variável real $\psi(t) = f(a + te_i)$, definida para valores de t suficientemente pequenos de forma a que $(a + te_i \in B(a, \delta))$, tem um extremo quando $t = 0$.
É um resultado conhecido das funções reais de variável real, que nestas condições, $\psi'(0) = 0$; mas

$$\psi'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{\psi(h) - \psi(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_i) - f(a)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),$$

pelo que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \quad i \in \{1, \cdots, n\}.$$

É importante observar que o facto de as derivadas se anularem (quando existem) no ponto a, é condição necessária, mas não suficiente, para a existência de um extremo local no ponto a.

Existem pontos de estacionaridade que não são extremos relativos, isto é, pode acontecer que f tenha derivadas parciais todas nulas num ponto a, mas em qualquer vizinhança de a exista, pelo menos um ponto x_1 tal que $f(x_1) < f(a)$ e exista um ponto x_2 tal que $f(x_2) > f(a)$. Estes pontos, quando existem, são designados por *pontos de sela*.

Exemplo

1. Seja $f(x, y) = x^2 - y^2$ *e determinemos os seus pontos críticos. Tendo em conta que*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0, 0) \Leftrightarrow (2x, -2y) = (0, 0)$$

conclui-se que $(0, 0)$ *é o único ponto crítico.*

Exemplo (continuação)

Considerando pontos da forma $(x,0)$, *com* $x \neq 0$, *tem-se que* $f(x,0) = x^2 > 0 = f(0,0)$; *mas quando se consideram pontos da forma* $(0,y)$, *com* $y \neq 0$ *vem que* $f(0,y) = -y^2 < 0 = f(0,0)$, *o que permite concluir que* $(0,0)$ *é ponto de sela.*

2. Seja $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ *e determinemos os seus pontos de estacionaridade. Tendo em conta que*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0,0) \Leftrightarrow (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x) = (0,0)$$

conclui-se que $y = x^3$ *e* $x = y^3$, *donde vem* $x^9 = x$, *isto é,* $x(x^8 - 1) = 0$. *Esta equação tem três soluções reais,* $x = 0, x = 1$, $x = -1$ *e os pontos de estacionaridade correspondentes são*

$$(0,0), (1,1), (-1,-1).$$

Exemplo (continuação)

3. Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$*. Admite apenas um ponto crítico,* $(0,0)$*, que é mínimo local (de facto é mesmo mínimo absoluto) uma vez que*

$$f(0,0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x,y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

De um modo geral, o problema da determinação de extremos de funções de várias variáveis pode ser extremamente complexo. Iremos, em seguida, apresentar um método que dá uma condição suficiente para a existência de extremos locais num dado ponto crítico.

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, D um conjunto aberto e $a \in D$. Supondo que $f \in C^2$ em alguma bola centrada em a , chama-se *matriz hessiana* de f no ponto a, à matriz quadrada $n \times n$ (simétrica)

$$H(f)(a) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{(a)} .$$

Ao determinante desta matriz chama-se o *hessiano* de f no ponto a e representa-se por $\det H(f)(a)$ (ou $|H(f)(a)|$).

Para se investigar a natureza dos pontos críticos é frequente a utilização de dois processos que envolvem a matriz hessiana.

1º Processo - *Classificação dos pontos críticos através dos valores próprios da matriz hessiana.*

1. Se todos os valores próprios de $H(f)(a)$ são positivos a função tem um mínimo local no ponto crítico a.
2. Se todos os valores próprios de $H(f)(a)$ são negativos a função tem um máximo local no ponto crítico a.
3. Se pelo menos dois valores próprios de $H(f)(a)$ têm sinais contrários (podendo ter, eventualmente, alguns valores próprios nulos) a função não admite extremo no ponto a e este é um ponto de sela.
4. Se pelo menos um dos valores próprios de $H(f)(a)$ é nulo e os restantes são todos do mesmo sinal, a natureza do ponto crítico é inconclusiva por este processo.

Os valores próprios da matriz H determinam-se, como se sabe, a partir da equação $|H - \lambda I| = 0$, onde I é a matriz identidade com a mesma ordem que H.

2º Processo - *Classificação dos pontos críticos através dos menores principais da matriz hessiana.*

Os menores principais da matriz hessiana, são os determinantes das submatrizes quadradas contendo a parte superior esquerda da diagonal principal da matriz hessiana como sua diagonal principal. Considerem-se os menores principais $\Delta_i,\ 1, ..., n$, da matriz hessiana no ponto crítico a:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a), \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}_{(a)},$$

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{bmatrix}_{(a)}, \ldots, \Delta_n = |H(f)(a)|.$$

1. Se os menores principais da matriz hessiana, no ponto crítico, forem todos positivos, a função f tem nesse ponto um mínimo local.
2. Se os menores principais (da matriz hessiana) de ordem ímpar forem negativos e os de ordem par forem positivos, a função f tem nesse ponto um máximo local.
3. Se se verificar uma das situações descritas no ponto 1. ou 2. até certa ordem, mas a partir daí todos os menores são nulos, o estudo da natureza do ponto crítico não é conclusivo através deste processo.
4. Nos restantes casos, a função não admite extremo no ponto crítico e este é um ponto de sela.

A classificação dos pontos críticos através dos menores principais da matriz hessiana para o caso das funções de duas variáveis reais torna-se bastante simples e está sintetizado no teorema seguinte.

Teorema

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in int\, D$, e suponhamos que f é continuamente derivável até à segunda ordem numa vizinhança de (a, b). Suponhamos que (a, b) é um ponto de estacionaridade de f e sejam

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(a,b)} .$$

$$\begin{cases} \Delta_2 > 0 & \begin{cases} \Delta_1 > 0, & f \text{ tem um mínimo local em } (a, b) \\ \Delta_1 < 0, & f \text{ tem um máximo local em } (a, b) \end{cases} \\ \Delta_2 < 0 & \quad f \text{ tem um ponto de sela em } (a, b). \end{cases}$$

Demonstração. Seja f continuamente derivável até a 2ª ordem numa vizinhança de (a, b). Pelo Teorema de Taylor existe $0 < \theta < 1$ tal que

$$
\begin{aligned}
f(a+h, b+k) - f(a,b) &= h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\
&\quad + \frac{1}{2!}\Big[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h, b+\theta k) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta h, b+\theta k) \\
&\quad + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h, b+\theta k)\Big]
\end{aligned}
$$

Como (a, b) é ponto de estacionaridade $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ pelo que

$$
\begin{aligned}
f(a+h, b+k) - f(a,b) &= \frac{1}{2}\Big(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h, b+\theta k) \\
&+ 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta h, b+\theta k) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h, b+\theta k)\Big)
\end{aligned}
$$

Como por hipótese f é de classe C^2 numa vizinhança de (a, b) o sinal de

$$h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h, b+\theta k)+2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta h, b+\theta k)+ k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h, b+\theta k)$$

é o mesmo de

$$h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$$

para valores de $||(h, k)||$ suficientemente pequenos. Por uma questão de simplicidade de escrita façamos

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \; s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), \; t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b).$$

Com a designação considerada, o sinal de $f(a+h, b+k) - f(a,b)$ é o sinal do trinómio

$$h^2 r + 2hks + k^2 t.$$

Vamos estudar o sinal deste trinómio considerando vários casos:

1. Se $r = t = 0$ e $s \neq 0$ o sinal de $f(a+h, b+k) - f(a,b)$ é o sinal de $2hks$ e portanto f não tem extremo no ponto (a,b).

2. Se $t \neq 0$ (para $r \neq 0$ o estudo é análogo) e supondo $h \neq 0$ vem que

$$h^2 r + 2hks + k^2 t = h^2 \left(r + 2s\frac{k}{h} + \left(\frac{k}{h}\right)^2 t \right).$$

Designando $\alpha = \dfrac{k}{h}$ o trinómio escreve-se na forma

$$h^2(r + 2s\alpha + \alpha^2 t)$$

e os seus zeros são

$$\alpha = \frac{-2s \pm \sqrt{4s^2 - 4rt}}{2t} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - rt}}{t}.$$

Se

$$h = 0 \quad \text{ou} \quad s^2 - rt < 0,$$

o trinómio tem o sinal de t, pelo que:

se $t > 0$, $f(a+h, b+k) - f(a, b) > 0$ e $f(a, b)$ é mínimo relativo;

se $t < 0$, $f(a+h, b+k) - f(a, b) < 0$ e $f(a, b)$ é máximo relativo.

Se

$$s^2 - rt > 0,$$

o trinómio tem duas raízes distintas e $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ não tem sinal constante qualquer que seja a vizinhança de (a, b) pelo que $f(a, b)$ não é extremo.

Se $s^2 - rt = 0$ o teorema é inconclusivo.

Exemplo

Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Trata-se de uma função de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ *e os extremos relativos, se existem, são pontos de estacionaridade. Calculemos os pontos de estacionaridade de* f*:*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (0,0) \Leftrightarrow (x^2+y^2-5, xy-2) = (0,0).$$

De $x^2+y^2=5$ *e* $y = \dfrac{2}{x}$ *conclui-se que os pontos de estacionaridade são*

$$(-2,-1),\ (2,1),\ (1,2),\ (-1,-2).$$

Exemplo (continuação)

Tem-se que

$$\Delta_1(x,y) = 6x \quad e \quad \Delta_2(x,y) = 36(x^2 - y^2),$$

e

1. $\Delta_2(2,1) = (36(x^2 - y^2))_{(2,1)} = 108 > 0$, *pelo que* f *tem extremo local em* $(2,1)$. *Como* $\Delta_1(2,1) = 12 > 0$, f *tem um mínimo local em* $(2,1)$ *cujo valor é* $f(2,1) = -28$.

2. $\Delta_2(-2,-1) = (36(x^2 - y^2))_{(-2,-1)} = 108 > 0$, *pelo que* f *tem extremo local em* $(2,1)$. *Como* $\Delta_1(-2,-1) = -12 < 0$, f *tem um máximo local em* $(-2,-1)$ *cujo valor é* $f(-2,-1) = 28$.

3. $\Delta_2(1,2) = \Delta_2(-1,-2) = (36(x^2 - y^2))_{(2,1)} = -108 < 0$, *pelo que, os pontos* $(1,2)$ *e* $(-1,-2)$ *não são extremos relativos da função* f.

Extremos condicionados. Método dos multiplicadores de Lagrange

Suponhamos que a função $P(x, y, z)$ definida em $\mathbb{R}^3$, representa a pressão atmosférica no ponto do espaço e que pretendemos determinar em que ponto de uma determinada superfície a pressão é máxima. Se a equação da superfície for dada explicitamente por uma equação da forma $z = g(x, y)$, bastará substituir em $P(x, y, z)$ a variável z por $g(x, y)$ e em seguida estudar os extremos da função resultante.

O exemplo que se segue ilustra esta situação.

Exemplo

Determine-se o ponto do plano de equação

$$2x + 3y - z = 1,$$

que está à menor distância da origem. Considere-se a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, *que representa o quadrado da distância do ponto* (x, y, z) *à origem (quando o quadrado da distância for mínimo a distância também o será). Impondo a condição do ponto pertencer ao plano obtém-se a função a minimizar*

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + (2x + 3y - 1)^2.$$

O único ponto de estacionaridade é o ponto $\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{14}\right)$ *e que corresponde de facto a um mínimo da função. O ponto pretendido é* $\left(\frac{1}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{1}{14}\right)$.

O problema do exemplo anterior foi resolvido de forma relativamente fácil uma vez que não houve qualquer dificuldade em escrever a equação do plano na forma $z = g(x, y)$. O problema poder-se-ia complicar muito se tal não tivesse sido possível.
O problema da determinação de extremos sujeitos a restrições é em geral muito complicado e não existe um método geral de o resolver. Existem alguns métodos que permitem resolver este problema quando se procuram extremos de funções com restrições a conjuntos com uma estrutura relativamente simples, por exemplo, uma superfície como sucedeu no exemplo anterior.
No que se segue iremos considerar um processo que permite em determinados casos resolver o problema e que é conhecido por *método dos multiplicadores de Lagrange*.

Teorema (Teorema dos multiplicadores de Lagrange)

Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g = (g_1, ..., g_m) : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m < n$ *funções de classe* C^1 *no conjunto aberto* A.
Sendo

$$B = \{x \in A : g(x) = 0\},$$

suponhamos que f *admite um extremo no ponto* $a \in B$ *e que*

$$\frac{\partial(g_1, \cdots, g_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_m)}(a) \neq 0.$$

Então, existem m *números reais,* $\lambda_1, ..., \lambda_m$ *tais que* a *é ponto crítico da função*

$$F(x, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + ... + \lambda_m g_m(x).$$

À função $F(x, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ *chama-se função de Lagrange e às constantes* $\lambda_1, ..., \lambda_m$ *multiplicadores de Lagrange.*

A resolução de um problema de extremos condicionados utilizando o teorema anterior, começa pela determinação dos pontos críticos da função de Lagrange $F(x, \lambda_1, ..., \lambda_m)$ através da resolução do sistema de $n + m$ equações

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0, & i = 1, ..., n \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = g_i = 0, & i = 1, ..., m. \end{cases}$$

Determinados estes pontos, através da análise do problema em causa deve justificar-se se os pontos determinados são ou não os extremos procurados.

Exemplo

Determinem-se os extremos da função

$$f(x, y) = x + y,$$

pertencentes à circunferência de equação

$$x^2 + y^2 = 1.$$

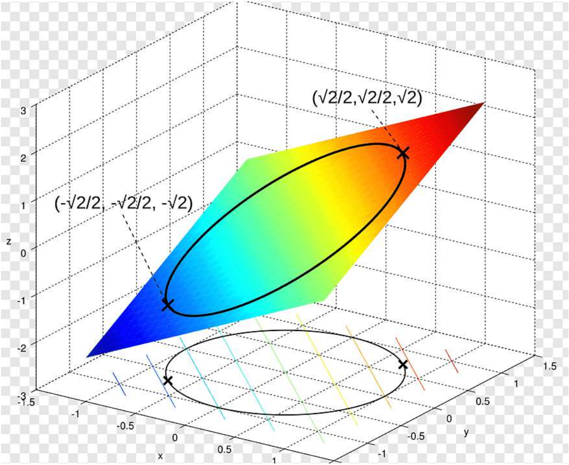


Figura: Método dos multiplicadores de Lagrange.

Exemplo (continuação)

Pretende-se determinar os extremos da função f com uma única restrição ($g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$).
A função de Lagrange para este problema é

$$F(x,y,\lambda) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

cujos pontos críticos se obtêm a partir do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

A resolução do sistema conduz aos pontos

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad e \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

que correspondem, respetivamente, ao máximo e mínimo pretendidos.

Exemplo

Determine-se a menor das distâncias dos pontos da parábola de equação $y = 4x^2$ aos pontos da reta de equação $y = x - 1$.
Trata-se de determinar o mínimo da função

$$d^2(x, y, u, v) = (x - u)^2 + (y - v)^2,$$

(função quadrado da distância de um ponto (x, y) do plano a um ponto (u, v) do plano), com as duas restrições

$$g_1(x, y) = y - 4x^2 = 0 \ \ e \ \ g_2(u, v) = u - v - 1 = 0.$$

A função de Lagrange do problema é

$$F(x, y, u, v, \lambda_1, \lambda_2) = (x-u)^2 + (y-v)^2 + \lambda_1(y-4x^2) + \lambda_2(u-v-1),$$

cujos pontos críticos se obtêm a partir do sistema

Exemplo (continuação)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2(x-u) - 8\lambda_1 x = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2(y-v) + \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} = -2(x-u) + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} = -2(y-v) - \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = y - 4x^2 = 0. \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = u - v - 1 = 0. \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Da segunda e quarta equações resulta que $\lambda_1 = \lambda_2$. *Usando em seguida a primeira e terceira equações seguida da primeira equação de ligação vem que,* $x = \dfrac{1}{8}$ *e* $y = \dfrac{1}{16}$. *Usando em seguida, por exemplo, as duas primeiras equações seguida da segunda equação de ligação vem que,* $u = \dfrac{19}{32}$ *e* $v = -\dfrac{13}{32}$.

A distância mínima entre a parábola e a reta consideradas é

$$d = \sqrt{\left(\frac{1}{8} - \frac{19}{32}\right)^2 + \left(\frac{1}{16} + \frac{13}{32}\right)^2} = \frac{15}{32}\sqrt{2}.$$

Tal como no caso dos extremos relativos, existe um resultado que permite decidir, em certos casos, se num problema de extremos condicionados um ponto obtido pelo método dos multiplicadores de Lagrange é extremo ou não e que tipo de extremos se trata. Apesar de existir um resultado geral que se aplica a funções de n variáveis sujeitas a m restrições ($m < n$), apenas iremos considerar o caso com uma restrição.

Suponhamo-nos nas hipóteses do teorema de multiplicadores de Lagrange (apenas com a restrição $g(x_1, ..., x_n)$) e que

$$F(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n) + \lambda g(x_1, ..., x_n),$$

é a função de Lagrange do problema.

Chama-se matriz Hessiana orlada da função F à matriz

$$\mathcal{H}(f) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Suponhamos que a partir do teorema dos multiplicadores de Lagrange determinamos o ponto $a = (x_1, ..., x_n)$ e o valor do multiplicador de Lagrange λ. Considere-se a seguinte sucessão de determinantes calculados em (a, λ)

$$\Delta_3 = \det \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}_{(a,\lambda)} \quad ,\ldots,$$

$$\Delta_{n+1} = \det \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dfrac{\partial g}{\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}_{(a,\lambda)}$$

1. Se os determinantes $\Delta_3, ..., \Delta_{n+1}$ são todos negativos, então a função f tem em a um mínimo local relativo à restrição considerada.
2. Se o primeiro determinante Δ_3 for positivo e os seguintes alternam o sinal, então a função f tem em a um máximo local relativo à restrição considerada.
3. Se os determinantes são todos diferentes de zero mas não verificam qualquer uma das duas condições anteriores, então a função f tem em $(a, f(a))$ um ponto de sela.
4. Se algum dos determinantes for nulo o método é inconclusivo.

Exemplo

Determine-se o triângulo de área máxima de entre todos os que têm perímetro $2p$. *Designando os lados do triângulo por* x, y *e* z *e sendo* $p = \frac{1}{2}(x+y+z)$ *metade do perímetro a área do triângulo é dada por*

$$A(x,y,z) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Maximizemos a função "quadrado" da área com a restrição

$$g(x,y,z) = 2p - (x+y+z).$$

A função de Lagrange do problema é

$$F(x,y,z,\lambda) = p(p-x)(p-y)(p-z) + \lambda(2p-(x+y+z)).$$

cujos pontos críticos se obtêm a partir do sistema

Exemplo (continuação)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial F}{\partial x} = -p(p-y)(p-z) - \lambda = 0 \\
\dfrac{\partial F}{\partial y} = -p(p-x)(p-z) - \lambda = 0 \\
\dfrac{\partial F}{\partial z} = -p(p-x)(p-y) - \lambda = 0 \\
\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 2p - (x+y+z) = 0.
\end{cases}
$$

A resolução do sistema conduz a $a = \left(\dfrac{2p}{3}, \dfrac{2p}{3}, \dfrac{2p}{3}\right)$ *e* $\lambda = -\dfrac{p^3}{9}$.

Exemplo (continuação)

Como $n+1=4$ *devemos calcular os determinantes* $\Delta_3(a,\lambda)$ *e* $\Delta_4(a,\lambda)$. *Tem-se que*

$$\Delta_3(a,\lambda) = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & p^2/3 \\ -1 & p^2/3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}p^2 > 0,$$

e

$$\Delta_4(a,\lambda) = \det \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & p^2/3 & p^2/3 \\ -1 & p^2/3 & 0 & p^2/3 \\ -1 & p^2/3 & p^2/3 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{p^4}{3} < 0.$$

O critério estabelecido permite concluir que de facto existe um triângulo de área máxima. Trata-se do triângulo equilátero de lados $x=y=z=\dfrac{2p}{3}$, *que tem por área* $A=\dfrac{p^2}{3\sqrt{3}}$.