SEGUNDO TESTE (24 de Junho de 2021) DURAÇÃO **2 h**

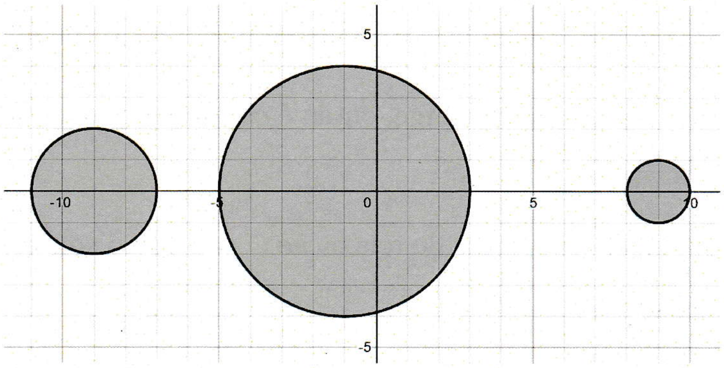
CÁLCULO NUMÉRICO

Número: ________ Curso: ________ Nome: ____

A primeira parte do teste é constituida por 5 questões de escolha múltipla. Nas questões 1 a 5 assinale com $\times$ a resposta correcta.
Cada resposta correcta vale 1.5 valor. Respostas em branco valem 0 valores. Se responder erradamente ou de forma ambígua ser-lhe-á atribuída uma cotação negativa correspondente a 0.3 valores.
Se a soma das cotações da escolha múltipla for negativa, será atribuído 0 valores à escolha múltipla.

Classificação
EM -
TOTAL-

1. Seja $G_{3\times 3}$ uma matriz de iteração dum método iterativo para resolução dum sistema de equações lineares. Os círculos de Gershgorin para essa matriz apresentam-se na seguinte figura:



Então o raio espectral de G pode assumir o valor...

☐ **a)** $\rho(G) = 12$

☒ **b)** $\rho(G) = 11$

☐ **d)** $\rho(G) = 6$

☐ **e)** $\rho(G) = -11$

2. Seja α a raiz única da equação não linear $f(x) = 0$ em $[1, 2]$, tal que $f \in C^2([1, 2])$ e $0 < f'(x) < x$, $\forall x \in [1, 2]$. Considere as funções $G_1(x) = x - \dfrac{f(x)}{x}$ e $G_2(x) = x + \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.
Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

☐ **a)** α é ponto fixo repulsor de $G_1(x)$ e ponto fixo atractor de $G_2(x)$.

☒ **b)** α é ponto fixo atractor de $G_1(x)$ e ponto fixo repulsor de $G_2(x)$.

☐ **c)** α não é ponto fixo de $G_1(x)$ nem de $G_2(x)$.

☐ **d)** α é ponto fixo repulsor de $G_1(x)$ e de $G_2(x)$.

3. Considere a função $f(x)$ continua, com um único zero $\alpha \in [0,1]$ e $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ a sucessão gerada pelo método da bisseção convergente para α. Sabe-se que x_2 é o ponto médio do intervalo $[0.5, x_1]$ e que $f(x_2)f(x_1) < 0$. Qual o valor da iterada x_3?

☐ **a)** 0.6225;

☐ **b)** 0.5625;

☒ **c)** 0.6875;

☐ **d)** 0.5875.

4. Sabe-se que $\rho(G_J) > 1$ e $||G_{GS}||_\infty = 0.9$, onde $\rho(G_J)$ e $||G_{GS}||_\infty$ são respectivamente o raio espectral da matriz de iteração G_J do método de Jacobi e a norma infinito da matriz de iteração G_{GS} do método de Gauss-Seidel. Qual das seguintes afirmações é sempre verdadeira?

☐ **a)** O método de Jacobi simples não converge, então é certo que o método de Jacobi com factor de relaxação $\omega = 0.3$ converge.

☐ **b)** O método de Gauss-Seidel com factor de relaxação $\omega = 2.5$ não converge, assim como o método de Gauss-Seidel simples.

☐ **c)** O método de Gauss-Seidel com factor de relaxação $\omega = 2.5$ converge mais rápido que o método de Gauss-Seidel simples.

☒ **d)** O método de Jacobi simples não converge, mas nada podemos concluir sobre a convergência do método de Jacobi com factor de relaxação $\omega = 0.3$.

5. Seja $y'(t) = f(t,y)$ e $y(a) = \alpha$ um problema de valor inicial, com $t \in [a,b]$ e f continua no seu domínio D_f. Considere a aproximação ω_{i+1} para $y(t_{i+1})$ dada pelo método de Taylor de ordem 2, com passo h entre os pontos da malha uniforme $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$, então tem-se:

☐ **a)** $|y(t_{i+1}) - \omega_{i+1}| \leq \frac{h^2}{2}M$, em que $|f''(t,y)| \leq M$, $\forall (t,y) \in D_f$.

☐ **b)** $|y(t_{i+1}) - \omega_{i+1}| \leq \frac{h^3}{6}M$, em que $|f'''(t,y)| \leq M$, $\forall (t,y) \in D_f$.

☐ **c)** $|y(t_{i+1}) - \omega_{i+1}| = \frac{h^3}{6}|f'''(\xi_i, y(\xi_i))|$, com $\xi_i \in]t_i, t_{i+1}[$.

☒ **d)** $|y(t_{i+1}) - \omega_{i+1}| \leq \frac{h^3}{6}M$, em que $|f''(t,y)| \leq M$, $\forall (t,y) \in D_f$.

A segunda parte do teste é constituida por 3 grupos de questões.
Cada resposta deverá estar convenientemente justificada.
Cotações: Questão 6: 5 valores; **Questão 7:** 4 valores; **Questão 8:** 3 valores.

6. Considere as sucessões $x_{n+1} = F(x_n)$, $y_{n+1} = G(y_n)$ e $z_{n+1} = H(z_n)$, com $x_0, y_0 \in I = [0.1, 1]$ $z_0 = 0.1$ e $n = 1, 2, ...$, onde $F(x) = e^{\frac{x-4}{2}}$, $G(x) = 4 + 2\ln(x)$ e $H(x) = x - \dfrac{2 + \ln(x) - \frac{x}{2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}$.
   (a) Prove que α é raiz da equação $2 + \ln(x) - \frac{x}{2} = 0$ se e só se α é ponto fixo de $F(x)$ e de $G(x)$
   (b) Que pode concluir quanto à convergência de x_{n+1} e y_{n+1} para α em I? Classifique α relativamente às funções $F(x)$ e $G(x)$. Justifique.
   (c) Verifique que z_n é convergente para $\alpha \in I$ e diga qual a ordem de convergencia mínima de z_n justificando.
   (d) Determine uma estimativa para o erro absoluto associado a z_1, considerando nos cálculos 6 casas decimais devidamente arredondadas.

7. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$S = \begin{cases} x_1 + ax_3 = 4 \\ 2x_1 + ax_2 = 3 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

com a uma constante real. Considere nos cálculos 6 casas decimais devidamente arredondadas.
   (a) Sem obter a matriz G_J para o método de Jacobi, verifique que, se $a = 5/2$, o método de Jacobi converge para a solução X^* do sistema S.
   (b) Utilizando o método de Jacobi determine $X^{(2)}$ considerando $X^{(0)} = [1\ \ 1\ \ 1]^T$.
   (c) Para obter um vector aproximação de X^* com pelo menos duas casas decimais significativas para cada componente, quantas iteradas k seria necessário obter?

8. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + t\cos(ty(t)), & t \in [0, 2] \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

   (a) Verifique que o problema é bem posto.
   (b) Determine um valor aproximado de $y(0.2)$ com 6 casas decimais devidamente arredondadas pelo método de Taylor de ordem 2 e $h = 0.1$.

Pergunta 1

→ círculos de Gershgorin da figura

$G_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z+8| \le 2\}$ $\sigma(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$

$G_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z+1| \le 4\}$

$G_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z-9| \le 1\}$

$|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3| \in G_1 \cup G_2 \cup G_3 = [-11, -7] \cup [-5, 3] \cup [8, 10]$

logo $\rho(G)$ o maior dos valores próprios em módulo
vai pertencer ao intervalo $[0,5] \cup [7,11]$

$\rho(G) = 11$ é o único que pertence a $[0,5] \cup [7,11]$

Pergunta 2

α raiz única de $f(x)=0$ em $[1,2]$ e $f \in C^2[1,2]$

$0 < f'(x) < x \,,\ \forall x \in [1,2]$

$G_1(x) = x - \frac{f(x)}{x}$ e $G_2(x) = x + \frac{f(x)}{f'(x)}$

$f(\alpha)=0 \Rightarrow G_1(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{\alpha} = \alpha$, pois $\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha$ é ponto fixo de $G_1(x)$

$f(\alpha)=0 \Rightarrow G_1(\alpha) = \alpha + \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$, pois $f'(\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha$ é ponto fixo de $G_2(x)$

$G_1'(x) = 1 - \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = 1 - \frac{f'(x)}{x} + \frac{f(x)}{x^2}$

$|G_1'(\alpha)| = 1 - \frac{f'(\alpha)}{\alpha} + \frac{f(\alpha)}{\alpha^2} \underset{f(\alpha)=0}{=} \left|1 - \frac{f'(\alpha)}{\alpha}\right| < 1$, pois $0 < f'(\alpha) < \alpha \Leftrightarrow$

$0 < \frac{f'(\alpha)}{\alpha} < 1 \Leftrightarrow$

$0 < 1 - \frac{f'(\alpha)}{\alpha} < 1$

logo α é ponto fixo atractor de $G_1(x)$

$G_2'(x) = 1 + \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = 1 + 1 - \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$

$= 2 - \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$

$|G_2'(\alpha)| = \left|2 - \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2}\right| \underset{f(\alpha)=0}{=} 2 > 1$ logo α é ponto fixo repulsar de $G_2(x)$

Pergunta 3

$f(x)$ contínua com zero $x \in [0, 1]$

$\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \to$ pelo método da bisseção

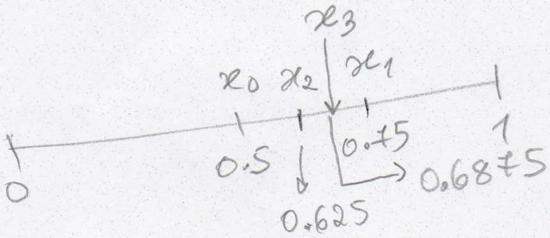
$x_2 \in [0.5, x_1]$ e $f(x_1) f(x_2) < 0$

$x_0 = \frac{0+1}{2} = 0.5$, se $x_2 \in [0.5, x_1] \Rightarrow x_1 \in [0.5, 1]$

$x_1 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75$ e $x_2 = \frac{0.5+0.75}{2} = 0.625$

Como $f(x_2) f(x_1) < 0 \Rightarrow x_3 \in [0.625, 0.75]$

$\Rightarrow x_3 = \frac{0.625+0.75}{2} = 0.6875$



Pergunta 6

$$\begin{cases} x_0 \in [0.1, 1] \\ x_{n+1} = F(x_n), \; n = 1,2,\dots \end{cases} \quad \begin{cases} y_0 \in [0.1, 1] \\ y_{n+1} = G(y_n) \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} z_0 = 0.1 \\ z_{n+1} = H(z_n) \end{cases}, \; n = 1,2,\dots$$

$$F(x) = e^{\frac{x-4}{2}}, \quad G(x) = 4 + 2\ln(x) \quad e \quad H(x) = x - \frac{2+\ln(x)-\frac{x}{2}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}$$

a) α é raiz de $2+\ln(x)-\frac{x}{2}=0 \iff \alpha$ é zero de $f(x) = 2+\ln(x)-\frac{x}{2}$

1.2

$\iff f(\alpha)=0 \iff 2+\ln(\alpha)-\frac{\alpha}{2}=0 \iff \ln(\alpha)=\frac{\alpha}{2}-2 \iff \alpha = e^{\frac{\alpha}{2}-2}$

0.6

$\iff e^{\frac{\alpha-4}{2}} = \alpha \iff F(\alpha)=\alpha \iff \alpha$ é ponto fixo de $F(x)$

$f(\alpha)=0 \iff 2+\ln(\alpha)-\frac{\alpha}{2}=0 \iff 2+\ln(\alpha)=\frac{\alpha}{2} \iff 4+2\ln(\alpha)=\alpha$

0.6

$\iff G(\alpha)=\alpha \iff \alpha$ é ponto fixo de $G(x)$

b) F e G são continuas e tem derivadas continuas em $[0.1, 1]$

1.2

$$|F'(x)| = \Big|\underbrace{\tfrac{1}{2}e^{\frac{x-4}{2}}}_{\text{função positiva e estritamente crescente em } [0.1,1], \text{ logo o máximo é atingido em } x=1}\Big| \leq \frac{1}{2}e^{\frac{1-4}{2}} = \frac{1}{2e^{3/2}} < 1, \; \forall x \in [0.1, 1]$$

Em particular para $\alpha \in [0.1, 1]$ tem-se $|F'(\alpha)| < 1$, logo α é ponto fixo atractor e x_n é convergente para α pois $x_0 \in [0.1, 1]$

0.6

$$|G'(x)| = \Big|\underbrace{\tfrac{2}{x}}_{\text{função positiva e estritamente decrescente em } [0.1,1], \text{ logo o mínimo é obtido para } x=1}\Big| > \frac{2}{1} = 2$$

em particular para $\alpha \in [0.1, 1]$, $|G'(\alpha)| > 2$

$|G'(\alpha)| > 1$

0.6

logo α é ponto fixo repulsor e y_n não é convergente.

c)

1.3

$$\begin{cases} z_0 = 0.1 \\ z_{n+1} = z_n - \dfrac{2+\ln(z_n)-z_n/2}{\frac{1}{z_n}-\frac{1}{2}} \end{cases} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

Método de Newton

$f(x) = 2+\ln(x)-\frac{x}{2}$ é continua em $[0.1, 1]$ pois $x=0 \notin [0.1, 1]$

$f(0.1) = 2+\ln(0.1)-\frac{0.1}{2} < 0$, $f(1) = 2+\ln(1)-\frac{1}{2} = 2-\frac{1}{2} > 0$

logo $f(0.1)f(1) < 0$.

$$\underbrace{f'(x) = \frac{1}{x}-\frac{1}{2}}_{\text{continua em } [0.1,1]} = 0 \iff \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \iff x = 2 \notin [0.1, 1]$$

logo $f'(x)$ não se anula em $[0.1, 1]$

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$ nunca se anula.

x^2 ← contínua em $[0.1, 1]$

$x_0 = 0.1$

$f(0.1) = 2 + \ln(0.1) - \dfrac{0.1}{2} < 0$, $f''(0.1) = -\dfrac{1}{(0.1)^2} < 0 \Rightarrow f(0.1) f''(0.1) > 0$

logo z_n converge para α em $[0.1, 1]$.

z_n dada pelo método de Newton e $z_{n+1} = H(z_n)$

$$H'(x) = \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right)' = 1 - \frac{f'^2(x) - f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$H'(\alpha) = \frac{\overset{=0}{f(\alpha)} f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^2} = 0 \Rightarrow$$ a 1ª derivada anula-se, logo a ordem de convergência de z_n só pode ser $p \neq 1$, portanto é no mínimo $p \geq 2$, ou seja é no mínimo quadrática.

d) $|\alpha - z_1| \leq \dfrac{M_2}{2 m_1} (z_1 - z_0)^2$ (*)

1.3

$$z_1 = z_0 - \frac{2 + \ln(z_0) - z_0/2}{\frac{1}{z_0} - \frac{1}{2}} = 0.1 - \frac{2 + \ln(0.1) - \frac{0.1}{2}}{\frac{1}{0.1} - \frac{1}{2}} = 0.137114$$

$$M_2 \geq |f''(x)| = \left| -\frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{x^2} \Rightarrow |f''(x)| \leq \frac{1}{(0.1)^2} = 100 = M_2, \forall x \in [0.1, 1]$$

↳ função estritamente decrescente em $[0.1, 1]$, logo máximo em $x = 0.1$

$|f'(x)| \geq m_1, \forall x \in [0.1, 1]$

$$|f'(x)| = \left| \underbrace{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}} \right| \geq \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = m_1$$

estritamente decrescente em $[0.1, 1]$, logo o mínimo é atingido em $x = 1$

(*) $|\alpha - z_1| \leq \dfrac{100}{2 \times 0.5} \times (0.137114 - 0.1)^2 \leq$ ~~0.137747~~ 0.137745

Pergunta 7

$$S = \begin{cases} x_1 + a x_3 = 4 \\ 2x_1 + a x_2 = 3 \\ a x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Folha n.º

a) 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 2 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad AX = B$$

$$a = 5/2 \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/2 \\ 2 & 5/2 & 0 \\ 5/2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A não tem matriz de diagonal estritamente dominante

$$A' = \begin{bmatrix} 5/2 & 1 & 1 \\ 2 & 5/2 & 0 \\ 1 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} |5/2| > |1|+|1| = 2 \\ |5/2| > |2| \\ |5/2| > |1| \end{array}$$

A' já tem matriz de diagonal estritamente dominante

$$B' = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad A'X = B' \Leftrightarrow AX = B$$

logo o método de Jacobi converge para X^* solução do sistema $A'X = B'$

b) 1.8

$$G_J = D'^{-1}(L' + U') = \begin{bmatrix} 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{4}{5} & 0 & 0 \\ -2/5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_J = D'^{-1}B' = \begin{bmatrix} 2/5 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 6/5 & 8/5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0.8 & 1.2 & 1.6 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{cases} X^0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ X^{(k)} = G_J X^{(k-1)} + B_J \end{cases}$$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -2/5 & -2/5 \\ -4/5 & 0 & 0 \\ -2/5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4/5 \\ 6/5 \\ 8/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 1.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4/5 \\ 6/5 \end{bmatrix}$$

21180

$$X^{(2)} = G_J X^{(1)} + H_J = \begin{bmatrix} 0.16 \\ 1.2 \\ 1.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/25 \\ 6/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}$$

c) $\|X^* - X^{(k)}\|_\infty < 0.5 \times 10^{-2}$ 2 casas decimais significativas

1.2 Erro à priori

$$\|X^* - X^{(k)}\|_\infty \leq \frac{\|G_J\|_\infty^k}{1 - \|G_J\|_\infty} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty < 0.5 \times 10^{-2} \quad (*)$$

$$\|G_J\|_\infty = \max\left(\frac{4}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$X_1 - X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ 1.2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -0.6 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$\|X_1 - X_0\|_\infty = \max(1, 0.6, 0.2) = 1$

$$(*) \iff \frac{0.8^k}{1-0.8} \times 1 \leq 0.5 \times 10^{-2}$$

$$0.8^k \leq 0.1 \times 10^{-2} = 10^{-3}$$

$$k \ln(0.8) \leq \ln(10^{-3})$$

$$k \geq \frac{\ln(10^{-3})}{\ln(0.8)} = 30.956\ldots$$

$$k_{min} = 31$$

Pergunta 8

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + t\cos(t\,y(t)) & t \in [0,2] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a) $f(t,y) = 1 + t\cos(ty)$

1

$D_f = \{(t,y): 0 \le t \le 2,\ y \in \mathbb{R}\}$

f é continua no seu dominio D_f

$$\left|\frac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| = \left|-t^2 \operatorname{sen}(ty)\right| = t^2 |\operatorname{sen}(ty)| \le 4 \times 1 = 4 = L$$

$0 \le |\operatorname{sen}(ty)| \le 1,\ \forall (t,y) \in D_f$

$t^2 \le 2^2 = 4$

Logo f satisfaz a condição de Lipchitz pelo que o problema de valor inicial é bem posto.

b) Metodo de taylor de ordem 2 para $y(0.2)$ e $h = 0.1$

2

$t_0 = 0$, $t_1 = t_0 + h = 0.1$, $t_2 = t_0 + 2h = 0.2$

$w_0 = 0$

$$y(0.1) \simeq w_1 = w_0 + h f(t_0,w_0) + \frac{h^2}{2} f'(t_0,w_0)$$

$$y(0.2) \simeq w_2 = w_1 + h f(t_1,w_1) + \frac{h^2}{2} f'(t_1,w_1)$$

$$f(t_0,w_0) = f(0,0) = 1 + 0 \times \cos(0) = 1$$

$$f'(t,y) = \frac{\partial}{\partial t} f(t,y) + \frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\, y'(t)$$

$$= \cos(ty) - ty\operatorname{sen}(ty) - t^2 \operatorname{sen}(ty)\left(1 + t\cos(ty)\right)$$

$$= \cos(ty) - t\operatorname{sen}(ty)\left(y + t + t^2\cos(ty)\right)$$

$$= \cos(ty) -$$

$$f'(0,0) = \cos(0) - 0 \times \operatorname{sen}(0) \times \cdots\cdots = 1$$

$$w_1 = 0 + 0.1 \times 1 + \frac{0.01}{2} \times 1 = 0.105$$

$$f(\underbrace{0.1}_{t_1}, \underbrace{0.105}_{w_1}) = 1 + 0.1\cos(\underbrace{0.1 \times 0.105}_{0.0105}) = 1.099994$$

$$f'(\underbrace{0.1}_{t_1},\underbrace{0.105}_{w_1}) = \cos(0.0105) - 0.1\sin(0.0105)(0.105+0.1+0.1^2\cos(0.0105))$$

$$= 0.999719$$

$$w_2 = 0.105 + 0.1\times 1.099994 + \frac{0.1^2}{2}\times 0.999719$$

$$= 0.219998$$

$$y(0.2) \simeq 0.219998$$