

AM 3C – Equações Diferenciais Ordinárias

Felipe B. Pinto 61387 – MIEQB

24 de outubro de 2024

Conteúdo

Questão 1 Verifique que cada uma das funções indicadas é solução da equação diferencial considerada.

2

Questão 2 Mostre que a equação $2x^2y - y^2 + 1 = 0$ define implicitamente uma solução da equação diferencial

$$(x^2 - y) \frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

Determine explicitamente a solução que verifica a condição $y(0) = 1$. . .

5

Questão 3 Determine os valores de k para os quais:

Questão 4

Questão 6 Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem: . . .

11

Questão 7 Determine a solução geral da equação

$$\frac{dz}{dx} + (x - x^{-1})z = 0, \quad x > 0$$

e utilizando o método da variação das constantes arbitrárias determine a solução geral de

$$\frac{dz}{dx} + (x - x^{-1})z = -x^2$$

Questão 14 Determine o integral geral de cada uma das seguintes equações diferenciais lineares de coeficientes constantes:

18

Questão 15 Determine a solução geral da equação diferencial linear homogênea de coeficientes constantes

$$D^2y - 4 Dy + 5y = 0$$

Utilizando uma das substituições $x = e^t$ ou $y = x^{-1} \int z dx$ determine a solução geral da equação

$$D^2y - 4 Dy + 5y = \frac{e^{2x}}{\sin x}$$

22

Questão 16 Utilizando uma das substituições $x = e^t$ ou $y = x^{-1} \int z dx$ determine a solução da equação geral

$$2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 7x \frac{dy}{dx} + 3x = 0$$

com $x > 0$. Determine ainda a solução geral da equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{7}{2x} \frac{dy}{dx} + \frac{3}{2x^2} y = 0.5x^{-3/2}$$

14

23

Questão 1 Verifique que cada uma das funções indicadas é solução da equação diferencial considerada.

Q1 a.

$$y(x) = e^{2x} \cos(3x), y - 4y' + 13y = 0$$

Resposta

$$0 = y - 4y' + 13y = (e^{2x} \cos(3x)) - 4(e^{2x} \cos(3x))' + 13y = (e^{2x}(-\sin(3x)3) + 2e^{2x} \cos(3x))$$

Q1 b.

$$y(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + c_1 e^{-x^2}, \quad \frac{dy}{dx} + 2x y = 1$$

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt = b'(x) f(b(x)) - a'(x) f(a(x))$$

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{dy}{dx} + 2x y = \frac{d \left(e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + c_1 e^{-x^2} \right)}{dx} + 2x \left(e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + c_1 e^{-x^2} \right) = \left((e^{-x^2} (-2x)) \int_0^x e^{t^2} dt \right. \\ &\quad \left. + e^{-x^2} (e^{-x^2}) + 2x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + 2x c_1 e^{-x^2} \right) = \dots \end{aligned}$$

Questão 2 Mostre que a equação $2x^2y - y^2 + 1 = 0$ define implicitamente uma solução da equação diferencial

$$(x^2 - y) \frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

Determine explicitamente a solução que verifica a condição $y(0) = 1$.

Resposta

Questão 3 Determine os valores de k para os quais:

Q3 a. $y(x) = \exp(kx)$ é solução da equação

$$y - y' + 6y = 0$$

Q3 b. $y(x) = x^k$ é solução da equação

$$x y'' + 2y' = 0.$$

Resposta

$$\begin{aligned} 0 &= x y'' + 2y' = x(x^k)'' + 2(x^k)' = x(k(k-1)x^{(k-2)}) + 2(kx^{(k-1)}) = x^{k-1}k(k+1) \\ \implies k &= -1 \vee k = 0 \end{aligned}$$

Questão 4

Q4 a.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y$$

Resposta

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y = y(y - 3) = 0$$

	...	0	...	3	...
y	-	0	+	+	+
$y - 3$	-	-	-	0	+
$y(y - 3)$	+	0	-	0	+

Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem e Equações Redutíveis a Lineares de Primeira Ordem

Q5 b. Determine a solução geral da equação diferencial linear homogénea de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + 2x y = 0$$

Resposta

$$\frac{dy}{dx} + 2x y = 0 \implies$$

$$\implies y = \gamma(x)^{-1} C + \gamma(x)^{-1} \int \exp a(x) * b(x) \, dx = \left(\int \exp(2x) \right)^{-1} C + \gamma(x)^{-1} \int \exp a(x) * 0$$

Questão 6 Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem:

Q6 a.

$$\frac{dy}{dx} - y \tan x = \cos x, \quad x \in]-\pi/2, \pi/2[$$

Q6 b.

$$y^2 \, dx - (2xy + 3) \, dy = 0$$

considere x como função incógnita e y variável independente

Resposta

$$y^2 \, dx - (2xy + 3) \, dy = 0 \implies$$

x como função de y

$$\implies y^2 \frac{dx}{dy} - (2xy + 3) = 0 \implies \frac{dx}{dy} = 2xy^{-1} + 3y^{-2} \implies$$

\implies

Questão 7 Determine a solução geral da equação

$$\frac{dz}{dx} + (x - x^{-1}) z = 0, \quad x > 0$$

e utilizando o método da variação das constantes arbitrárias determine a solução geral de

$$\frac{dz}{dx} + (x - x^{-1}) z = -x^2$$

Resposta

$$\frac{dz}{dx} + (x - x^{-1}) z = 0, \quad x > 0 \implies$$

$$\implies z = c \gamma^{-1}(x) = c \exp - \int (x - x^{-1}) dx = \dots = c \exp -x^2/2$$

Variação das constantes arbitrárias

$$\frac{dz}{dx} + (x - x^{-1}) z = -x^2 \implies z(x) = c(x) x \exp -x^2/2;$$

$$z'(x) = c'(x) x \exp -x^2/2 + c(x) (\exp(-x^2/2) - x^2 \exp(-x^2/2))$$

Q8 b. Utilizando a substituição definida por $y = e^{4x}$, determine a solução geral da equação:

$$x \frac{d^2y}{dx^2} - (4x + 1) \frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

$$(xD - (4x + 1)D^2 + 4)y = Py = 0 \implies$$

$$\implies y = e^{4x} \int z \implies$$

$\implies ;$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{4x}) \int z + \frac{d}{dx} \left(\int z \right) = 4x e^{4x} \int z + z e^{4x};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(4x e^{4x} \int z + z e^{4x} \right) = \dots$$

$$\implies x e^{4x} \left(16 \int z + 8z \frac{dz}{dx} \right) - (4x + 1) e^{4x} \left(4 \int z + z \right) + 4 e^{4x} \int z = 0 \implies$$

$\implies \dots \implies$

$$\implies \frac{dz}{dx} + (4 - 1/x)z = 0 \implies$$

$$\implies \dots z = \frac{C}{\exp(\int (4 - 1/x))} = \dots = C x e^{-4x} \implies$$

$$\implies y = e^{4x} \int C x e^{-4x} = C e^{4x} \left(-\frac{x e^{-4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{16} + k \right) = \dots =$$

$$= -\frac{c}{4}(x + 1/4) + c k e^{4x} = c_1(x + 1/4) + c_2 e^{4x} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Q9 c.

Resposta

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{2\sqrt{x}} = -\frac{z^3}{2} \implies z^{-3} \frac{dz}{dx} + \frac{z^{-1}}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

Q10 b.

$$y' + x y^2 - (2 x^2 + 1) y + x^3 + x - 1 = 0$$

Resposta

$$\begin{aligned} y' + x y^2 - (2 x^2 + 1) y + x^3 + x - 1 &= 0 \implies \\ \implies y' + y \left(-(2 x^2 + 1) \right) &= \left(-x^3 - x + 1 \right) + y^2 (-x) \end{aligned}$$

Questão 14 Determine o integral geral de cada uma das seguintes equações diferenciais lineares de coeficientes constantes:

Q14 a.

$$D^3 (D + 1)^2 ((D - 5)^2 + 16) y = 0, \quad \left(\text{em que } D = \frac{d}{dx} \right)$$

Resposta

$$D^3 (D + 1)^2 ((D - 5)^2 + 16) y = 0 \implies$$

$$\implies \text{Raizes: } \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 5 \pm 4i & 1 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x} + c_5 e^{-5x} \cos 4x + c_6 e^{-5x} \sin 4x$$

Q14 b.

$$(D^4 - 1) y = x^3 - x + 2, \quad \left(\text{em que } D = \frac{d}{dx} \right)$$

Resposta

$$\begin{aligned} y &= y_0 + y_1 = \\ &= (c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x) + (x^3 - x + 2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 \text{ é solução de } (D^4 - 1) y = 0 &\implies \\ \implies (\alpha^4 - 1) &= (\alpha^2 + 1)(\alpha^2 - 1) \implies \end{aligned}$$

$$\implies \text{Raizes: } \left\{ \begin{array}{ccc} \text{Raizes} & & \text{Multiplicidade} \\ 1 & & 1 \\ -1 & & 1 \\ \pm i & & 1 \end{array} \right.$$

$$\implies y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x;$$

y_1 é x^p vezes um polinomio de mesmo grau que $x^3 - x + 2$

p é a multiplicidade da raiz $\alpha = 0 \implies \implies$

$$y_1 = x^p (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) \implies$$

$$\implies (D^4 + 1) y_1 = 0 + y_1 = y_1 = x^3 - x + 2$$

Q14 c.

$$y'' + y = \cos x$$

Resposta

$$y'' + y = (D^2 + 1)y = \cos x \implies$$

$$\implies y = y_0 + y_1 = (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \left(\frac{x}{2} \sin x \right);$$

$$\alpha^2 + 1 = 0 \implies$$

$$\begin{array}{lll} \implies & \text{Raízes} & \pm 1 \\ & \text{Multiplicidade} & 1 \end{array}$$

$$\implies y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y_1 = x^p (r e^{ax} \cos(bx) + s e^{ax} \sin(bx)) = x(r \cos x + s \sin x) \implies$$

$$\implies \frac{dy_1}{dx} = r \cos x + s \sin x = x(-r \sin x + s \cos x) \implies$$

$$\implies \frac{d^2y_1}{dx^2} = \dots \implies$$

$$\implies (D^2 + 1)y_1 = -2r \sin x + 2s \cos x = \cos x \implies s = 1/2 \wedge r = 0 \implies$$

$$\implies y_1 = \frac{x}{2} \sin x$$

Questão 15 Determine a sol geral da equação diferencial linear homogénea de coeficientes constantes

$$D^2y - 4 Dy + 5 y = 0$$

Utilizando uma das substituições $x = e^t$ ou $y = x^{-1} \int z \, dx$ determine a solução geral da equação

$$D^2y - 4 Dy + 5 y = \frac{e^{2x}}{\sin x}$$

Questão 16 Utilizando uma das substituições $x = e^t$ ou $y = x^{-1} \int z \, dx$ determine a solução da equação geral

$$2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 7x \frac{dy}{dx} + 3x = 0$$

com $x > 0$. Determine ainda a solução geral da equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{7}{2x} \frac{dy}{dx} + \frac{3}{2x^2} y = 0.5 x^{-3/2}$$

Resposta

16

Vamos usar a substituição $x = e^t$

$2x^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) + 7x \left(\frac{dy}{dx} \right) + 3y = 0$

não tem coeficientes constantes

Evolução de Euler $y = y(t)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt}$ $t = \log x$
 $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x} \frac{d}{dt} (x^{t-1}) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{dx}{dt} - 1 \right)$

$$\begin{aligned} D &= \frac{d}{dt} \\ \frac{d^n y}{dt^n} &= \frac{1}{t^n} \left[D(D-1) \cdots (D-(n-1)) \right] y \\ \Rightarrow 2x^2 \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + 7x \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) + 3y &= 0 \\ 2 \frac{d^2y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 3y &= 0 \quad \text{equação a coeficientes constantes} \\ 2q^2 + 5q + 3 &= 0 \quad q = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4}}{4} = -\frac{3}{2}, -1 \\ H(t) &= C_1 e^{-\frac{3}{2}t} + C_2 e^{-t} \\ e^{-t} &= (e^t)^{-\frac{3}{2}} = t^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$x = e^t$

$2 \frac{d^2y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 3y = t^{-\frac{3}{2}}$

Solução particular $y_p = b t^{-\frac{1}{2}}$ at $a = \frac{1}{2}$

$y_1 = b t^{-\frac{1}{2}}$
 $y_2 = b \frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}}$
 $y_3 = b \frac{1}{2} t^{-\frac{5}{2}}$

$b = 1$ é multiplicado de a como raiz da equação característica

$2b \frac{1}{4} t^{-\frac{1}{2}} + b \frac{5}{2} t^{-\frac{3}{2}} + b t^{-\frac{5}{2}} = t^{-\frac{3}{2}}$

Solução geral $H(t) = C_1 e^{-\frac{3}{2}t} + C_2 e^{-t} + t^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{7}{2x} \frac{dy}{dx} + \frac{3}{2x^2} y = \frac{1}{x^{-\frac{3}{2}}}$$

sol. geral: $C_1 e^{-\frac{3}{2}t} + C_2 e^{-t} + \frac{x}{6}$

Q28 b.

Resposta

Resolução

$$(xy^2 + x^2y^2 + 3)dx + x^2ydy = 0 \quad [28b]$$

Sabendo que admite um fator integrante que só depende de x .

$\varphi(u) :$

$$\boxed{\varphi(u)(x^2y^2 + x^2y^2 + 3)dx + \varphi'(u)x^2ydy = 0}$$

$\varphi'(u)$ é fator integrante

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi(u) (xy^2 + x^2y^2 + 3) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi(u) x^2y \right]$$

$$\varphi(u)(2xy + 2x^2y) = \varphi'(u)x^2y + \varphi(u)2x^2y$$

$$\varphi(u)2x^2y = \varphi'(u)2x^2y$$

$$\left(\frac{1}{\varphi(u)} x^2y \right)_x = \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} \quad \int z dx = \int \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} dx$$

$$2x = \log |\varphi(u)| + C \quad [28b]$$

$$e^{2x} = k |\varphi(u)|$$

$$\boxed{\varphi(u) = e^{2x}} \text{ é um fator integrante}$$

$$e^{2x} (xy^2 + x^2y^2 + 3)dx + e^{2x} x^2ydy = 0$$

$$\frac{df}{dy} = x^2ye^{2x} = f(x,y) = \int x^2ye^{2x} dy + g(x)$$

$$= x^2ye^{2x} + g(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x^2y^2e^{2x}}{2} + g(x) \right) = \boxed{x^2ye^{2x} + x^2y^2e^{2x} + g'(x)}$$

$$g'(x) = 3e^{2x}$$

$$g(x) = \int 3e^{2x} dx = \frac{3e^{2x}}{2} + C$$

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2}e^{2x} + \frac{3e^{2x}}{2} + C$$

$px = e^{2x}$ é um fator integrante

Q31 c.

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + x + \frac{dy}{dt} + 2y = t \\ -\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 3x - \frac{dy}{dt^2} = -3t - 1 \end{cases}$$

Resposta

a) Solvendo pelo método de Cramer:

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 28b \\ D^2 + 1 & D+2 & \\ -D^3 + 3D^2 - D + 3 & -D^2 & \end{array} \right|$$

$$31a) \quad \left| \begin{array}{cc|c} \frac{d^2x}{dt^2} + x & \frac{dy}{dt} + 2y = t \\ -\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 3x & -3t - 1 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} (D^2 + 1)x + (D + 2)y = t \\ (-D^3 + 3D^2 - D + 3)x - D^2y = -3t - 1 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} D^2 + 1 & D+2 & t \\ -D^3 + 3D^2 - D + 3 & -D^2 & 3t - 1 \end{array} \right| \xrightarrow{(D-3)}$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} D^2 + 1 & D+2 & t \\ 0 & -D-6 & 0 \end{array} \right| \xrightarrow{-D^3 + 3D^2 - D + 3} \left| \begin{array}{cc|c} D^2 + 1 & D+2 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \xrightarrow{-D+3}$$

$$(D-3)t = 1-3t$$

$$(D-6)y = 0$$

$$(D+6)y = 0 \text{ sd geral } y = C_1 e^{-6t}$$

$$a = -6$$

$$(D^2 + 1)x = t - (D+2)y = t + 4C_1 e^{-6t}$$

$$(D^2 + 1)x = t + 4C_1 e^{-6t}$$

$$\text{sol de } (D^2 + 1)x = 0 \text{ e' } x = C_2 \cos t + C_3 \sin t$$

$$x_1(t) \text{ sd particular de } (D^2 + 1)x = t$$

$$\therefore x_1(t) = t$$

$$x_2(t) \text{ sd particular para } (D^2 + 1)x = 4C_1 e^{-6t}$$

$$\therefore x_2(t) = \frac{4}{37} C_1 e^{-6t}$$

$$\text{sol gen } x(t) = x_1(t) + x_2(t) + t + \frac{4}{37} C_1 e^{-6t}$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} D^2 + 1 & D+2 & 28b \\ -D^3 + 3D^2 - D + 3 & -D^2 & \\ \dots & \dots & \end{array} \right|$$

grau 3

há 3 de constante arbitrárias na solução geral do sistema!

$$\left[\begin{array}{cc|c} D^2 + 1 & D+2 & T \\ -D^3 + 3D^2 - D + 3 & -D^2 & 3t - 1 \end{array} \right] \xrightarrow{} \left[\begin{array}{cc|c} D^2 + 1 & D+2 & T \\ 0 & -D-6 & 0 \end{array} \right]$$