FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

2º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2019/2020
13 DE NOVEMBRO DE 2019

Duração: 2horas.

COTAÇÕES: Grupo I- $5 \times 8\% = 40\%$, Grupo II- 1. 12%, 2. 12%
3. 12%, Grupo III- 1. 12%, 2 a)3% b)6% c)3%.

Nome:

Nº de aluno: Nº de caderno:

PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES DO GRUPO I ASSINALE COM X O QUADRADO CORRESPONDENTE À ALTERNATIVA CORRECTA.

GRUPO I

1. Seja $u = g(t)$ com g uma função continuamente derivável até à segunda ordem e $t = 2xy + y^2$. Sabendo que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\frac{dg}{dt} + f(x,y)\frac{d^2 g}{dt^2}$$

então:

☐ $f(x,y) = 2(x+y)$ ☐ $f(x,y) = 4(x^2+y^2)$ ☐ $f(x,y) = 4(x^2-y^2)$
☐ $f(x,y) = 4(xy+y^2)$ ☐ $f(x,y) = 2(x-y)$ ☐ $f(x,y) = 4(xy+x^2)$

2. A equação

$$x^3 + y^3 + (x+1)e^z - 8xyz - 2 = 0,$$

define z como função de x e de y numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$. Então:

☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = -1,\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = 0$ ☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = -\frac{2}{5},\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = -\frac{3}{10}$

☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = 0,\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = -1$ ☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = -\frac{1}{5},\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = -\frac{3}{10}$

☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = 0,\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = 0$ ☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = -\frac{2}{5},\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = -\frac{3}{5}$

3. Seja D é uma bola centrada em $\left(\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$ e que não interseta os eixos coordenados, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida pela expressão

$$f(x,y) = \left(x + \cos\left(\frac{1}{y}\right), 1 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Então:

☐ $J_{f^{-1}}\left(\frac{2}{\pi}, 1\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{\pi^2} \\ \frac{4}{\pi^2} & \frac{16}{\pi^4} \end{bmatrix}$ ☐ $J_{f^{-1}}\left(\frac{2}{\pi}, 1\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{\pi^2} \\ -\frac{4}{\pi^2} & \frac{16}{\pi^4} \end{bmatrix}$

☐ $J_{f^{-1}}\left(\frac{2}{\pi}, 1\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{\pi^2} \\ -\frac{4}{\pi^2} & -\frac{16}{\pi^4} \end{bmatrix}$ ☐ $J_{f^{-1}}\left(\frac{2}{\pi}, 1\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{\pi^2} \\ \frac{4}{\pi^2} & -\frac{16}{\pi^4} \end{bmatrix}$

☐ $J_{f^{-1}}\left(\frac{2}{\pi}, 1\right) = \begin{bmatrix} \frac{16}{\pi^4} & \frac{4}{\pi^2} \\ \frac{4}{\pi^2} & 0 \end{bmatrix}$ ☐ $J_{f^{-1}}\left(\frac{2}{\pi}, 1\right) = \begin{bmatrix} -\frac{16}{\pi^4} & \frac{4}{\pi^2} \\ \frac{4}{\pi^2} & 0 \end{bmatrix}$

4. Considere a função

$$f(x,y) = 3xy - (x^3 + y^3).$$

A função tem como pontos de estacionaridade os pontos:

☐ $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,-1)$. No primeiro não tem extremo, no segundo tem um máximo relativo e no terceiro um mínimo relativo.

☐ $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,-1)$. No primeiro não tem extremo, no segundo tem um mínimo relativo e no terceiro um máximo relativo.

☐ $(0,0)$ e $(1,1)$. Em nenhum deles tem extremos relativos.

☐ $(0,0)$ e $(1,1)$. No primeiro não tem extremo e no segundo tem um mínimo relativo.

☐ $(0,0)$ e $(-1,-1)$. No primeiro não tem extremo e no segundo tem um máximo relativo.

☐ $(0,0)$ e $(1,1)$. No primeiro não tem extremo e no segundo tem um máximo relativo.

5. Considere a secção feita pelo plano $x + y + z = 2$ na superfície cónica $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Pretende-se determinar o ponto da secção considerada que se encontra à distância mínima do ponto $(0,0,0)$. A função de Lagrange para o problema considerado é:

☐ $F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 - z^2)$

☐ $F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + y^2 - z^2 + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 + z^2)$

☐ $F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + y^2 - z^2 + \lambda(x + y + z - 2) + \mu(x^2 + y^2 + z^2)$

☐ $F(x,y,z,\lambda,\mu) = x + y + z + \lambda(x^2 + y^2 - z^2) + \mu(x^2 + y^2 + z^2)$

☐ $F(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z - 2) + \mu(x^2 + y^2 - z^2)$

☐ $F(x,y,z,\lambda,\mu) = x + y + z - 2 + \lambda(x^2 + y^2 - z^2) + \mu(x^2 + y^2 + z^2)$

2º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2019/2020
13 DE NOVEMBRO DE 2019

COTAÇÕES: Grupo I- $5 \times 8\% = 40\%$, Grupo II- 1. 12%, 2. 12%
3. 12%, Grupo III- 1. 12%, 2 a)3% b)6% c)3%.

GRUPO II

1. Seja $h(x, y)$ uma função real continuamente derivável até à segunda ordem. Seja $z = h(x, y)$ com $x = s^2 - t^2$ e $y = 2st$. Utilizando a regra da derivada da função composta, mostre que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = 4x \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} - 2y \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial h}{\partial y}.$$

2. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} a^3 + ub - v = 0 \\ b^3 + va - u = 0 \end{cases},$$

define implicitamente numa vizinhança do ponto $P_0 = (u_0, v_0, a_0, b_0) = (0, 1, 1, -1)$ a e b como funções de u e de v e determine $\dfrac{\partial a}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial b}{\partial u}$ no ponto em que $u_0 = 0$ e $v_0 = 1$.

MUDE DE FOLHA

3. Seja a uma constante real. Considere a função

$$f(x, y) = \frac{a}{x} - \frac{1}{y} + xy, \quad x \neq 0,\ y \neq 0,\ a \neq 0.$$

Estude os extremos relativos de f. Considere os casos $a > 0$ e $a < 0$.

GRUPO III

1. Seja A um domínio fechado e limitado de $\mathbb{R}^2$ tal que

$$I = \iint_A y dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\sqrt{3}y}^{\sqrt{1-y^2}} y \, dx \right) dy.$$

Determine I. Exprima I, utilizando a ordem de integração inversa da apresentada (**não calcule este último integral**).

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Seja $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$ e $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$. Suponhamos que

$$\nabla f(a) = (0, 0), \text{ que } A \neq 0 \text{ e } AC - B^2 > 0.$$

Considere-se o desenvolvimento de Taylor de segunda ordem da função f numa vizinhança de (a, b)

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a, b) = & h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \frac{1}{2!}\Big[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h, b+\theta k) \\ & + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta h, b+\theta k) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h, b+\theta k)\Big], \ 0 < \theta < 1. \end{aligned}$$

a) Justifique que nas hipóteses consideradas, para uma escolha de (h, k) conveniente,

$$h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h, b+\theta k) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta h, b+\theta k) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h, b+\theta k)$$

e

$$h^2 A + 2hkB + k^2 C$$

têm o mesmo sinal.

b) Determine uma função $\varphi(A, B, h, k)$ não negativa tal que

$$h^2 A + 2hkB + k^2 C = \frac{\varphi(A, B, h, k) + k^2(AC - B^2)}{A}.$$

c) Utilizando apenas as alíneas anteriores, conclua a natureza do ponto crítico (a, b) em função do sinal de A.