IPEIO - PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA
Ano Lectivo 2015/16
2º Teste - 06 de Maio de 2016
Duração: 0h45

Resolução abreviada do 2º Teste

Versão A

1. V Considere-se a população X de onde é proveniente a amostra aleatória. Como $X \sim P(4\lambda)$ então sabe-se que $E[X] = 4\lambda$ e $V[X] = 4\lambda$.
O estimador $\hat{\lambda}$ será estimador centrado para λ se $E[\hat{\lambda}] = \lambda$. Como,

$$E[\hat{\lambda}] = E\left[\frac{\bar{X}}{4}\right] = \frac{E[\bar{X}]}{4} = \frac{E[X]}{4} = \frac{4\lambda}{4} = \lambda,$$

uma vez que é conhecido que $E[\bar{X}] = E[X]$ (ver Exemplo 5.11, pag. 39 do texto de apoio), pelo que o estimador $\hat{\lambda}$ é centrado.

B

$$EQM(\hat{\lambda}) = V[\hat{\lambda}] + b^2(\hat{\lambda}) = V[\hat{\lambda}] = V\left[\frac{\bar{X}}{4}\right] = \frac{V[\bar{X}]}{16} = \frac{V[X]}{16n} = \frac{4\lambda}{16n} = \frac{\lambda}{4n},$$

uma vez que $b^2(\hat{\lambda}) = 0$ por o estimador ser centrado e é conhecido que $V[\bar{X}] = \frac{V[X]}{n}$ (ver o Exemplo 5.11, pag. 39 do texto de apoio).

B Para a amostra considerada, teremos que $\bar{x} = \dfrac{7+3+3+5+6+5+2+5+4+2}{10} = 4.2$, logo obteremos como estimativa de λ, o valor

$$\hat{\lambda} = \frac{\bar{x}}{4} = \frac{4.2}{4} = 1.05.$$

2. A Represente-se por X a população.
Informação populacional: $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, $\mu \equiv E\left(X\right) = ?$, $\quad \sigma^2 \equiv V\left(X\right) = ?$
Informação amostral: $n = 24$, $\bar{x} = 49.48$, $s = 3.8964$

- Estatística pivot: $\quad T = \sqrt{24}\dfrac{\overline{X} - \mu}{S} \sim t_{23}$
- Determinação da constante $\underline{c}$ que garante que $P\left(-c < T < c\right) = 0.95$
$c = t_{23:0.05/2} = t_{23:0.025} = 2.069$
- $-2.069 < \sqrt{24}\dfrac{\overline{X} - \mu}{S} < 2.069 \Leftrightarrow \overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{24}}2.069 < \mu < \overline{X} + \dfrac{S}{\sqrt{24}}2.069$
- $IC_{95\%}\left(\mu\right) \equiv \left]\overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{24}}2.069, \overline{X} + \dfrac{S}{\sqrt{24}}2.069\right[$
- Estimativa por intervalo de 95% de confiança para μ
$IC_{95\%}\left(\mu\right) = \left]49.48 - \dfrac{3.8964}{\sqrt{24}}2.069, 49.48 + \dfrac{3.8964}{\sqrt{24}}2.069\right[=]47.8344; 51.1256[$

C A estatística de teste é:

$$T = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - 50}{S} \underset{\mu=50}{\sim} t_{23}.$$

A Região de rejeição é $R_{0.01} =]-\infty, t_{23,0.01}[$ com $t_{23,0.01} = 2.5$.

V

3. C $\hat{Y} = 8.2727 + 4.7164\, x$

A $\hat{Y}\left(30\right) = 8.2727 + 4.7164 \times 30 = 149.7647$

F $R^2 = 0.9788 \geq 0.8 \qquad$ A qualidade do ajustamento é "'razoável"'

V $H_0 : \beta_1 = 0 \;\; vs \;\; H_1 : \beta_1 \neq 0$

- Região de rejeição para $\alpha = 0.05$: $\quad t_{9:\,0.025} = 2.262$ e $R_{0.05} =]-\infty, -2.262[\cup]2.262, +\infty[$
- Valor observado da estatística de teste: $\quad t_{obs} = 20.389$, dado pelo *output* do R
- Decisão: $\quad t_{obs} \in R_{0.05}$ logo rejeitamos H_0 ao nível de significância de 5%.

Observação: Tomaríamos a mesma decisão utilizando o $valor-p$, pois $valor-p = 7.66 \times 10^{-9} < 0.05$.

4. $H_0 : \sigma = 1 \;\; vs \;\; H_1 : \sigma \neq 1$

Represente-se por X a população.
Informação populacional: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \equiv E\,(X) = ?$,
Informação amostral: $n = 30$, $s = 0.8$

A estatística de teste é:

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{1} \underset{\sigma=1}{\sim} \chi^2_{29}.$$

A Região de rejeição é $R_{0.05} = \left]0, \chi^2_{29:0.975}\right[\cup \left]\chi^2_{29:0.025}, +\infty\right[=]0, 16.047[\cup]45.722, +\infty[$.

O valor observado da estatística de teste é $x^2_{obs} = (30-1) \times 0.8^2 = 18.56$

Como $x^2_{obs} \notin R_{0.05}$ então não rejeitamos H_0 a 5% de significância.

Versão B

1. $\boxed{\texttt{V}}$ Considere-se a população X de onde é proveniente a amostra aleatória. Como $X \sim P(4\lambda)$ então sabe-se que $E[X] = 4\lambda$ e $V[X] = 4\lambda$.
O estimador $\hat{\lambda}$ será estimador centrado para λ se $E[\hat{\lambda}] = \lambda$. Como,

$$E[\hat{\lambda}] = E\left[\frac{\bar{X}}{4}\right] = \frac{E[\bar{X}]}{4} = \frac{E[X]}{4} = \frac{4\lambda}{4} = \lambda,$$

uma vez que é conhecido que $E[\bar{X}] = E[X]$ (ver Exemplo 5.11, pag. 39 do texto de apoio), pelo que o estimador $\hat{\lambda}$ é centrado.

$\boxed{\texttt{D}}$

$$EQM(\hat{\lambda}) = V[\hat{\lambda}] + b^2(\hat{\lambda}) = V[\hat{\lambda}] = V\left[\frac{\bar{X}}{4}\right] = \frac{V[\bar{X}]}{16} = \frac{V[X]}{16n} = \frac{4\lambda}{16n} = \frac{\lambda}{4n},$$

uma vez que $b^2(\hat{\lambda}) = 0$ por o estimador ser centrado e é conhecido que $V[\bar{X}] = \frac{V[X]}{n}$ (ver o Exemplo 5.11, pag. 39 do texto de apoio).

$\boxed{\texttt{A}}$ Para a amostra considerada, teremos que $\bar{x} = \dfrac{7+3+3+5+6+5+2+5+4+2}{10} = 4.2$, logo obteremos como estimativa de λ, o valor

$$\hat{\lambda} = \frac{\bar{x}}{4} = \frac{4.2}{4} = 1.05.$$

2. $\boxed{\texttt{C}}$ Represente-se por X a população.
Informação populacional: $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$, $\mu \equiv E\left(X\right) = ?$, $\quad \sigma^2 \equiv V\left(X\right) = ?$
Informação amostral: $n = 24$, $\bar{x} = 49.48$, $s = 3.8964$

- Estatística pivot: $\quad T = \sqrt{24}\dfrac{\overline{X} - \mu}{S} \sim t_{23}$
- Determinação da constante $\underline{c}$ que garante que $P\left(-c < T < c\right) = 0.95$
  $c = t_{23:0.05/2} = t_{23:0.025} = 2.069$
- $-2.069 < \sqrt{24}\dfrac{\overline{X} - \mu}{S} < 2.069 \Leftrightarrow \overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{24}}2.069 < \mu < \overline{X} + \dfrac{S}{\sqrt{24}}2.069$
- $IC_{95\%}\left(\mu\right) \equiv \left]\overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{24}}2.069, \overline{X} + \dfrac{S}{\sqrt{24}}2.069\right[$
- Estimativa por intervalo de 95% de confiança para μ
  $IC_{95\%}\left(\mu\right) = \left]49.48 - \dfrac{3.8964}{\sqrt{24}}2.069, 49.48 + \dfrac{3.8964}{\sqrt{24}}2.069\right[=]47.8344; 51.1256[$

$\boxed{\texttt{A}}$ A estatística de teste é:

$$T = \sqrt{n}\frac{\bar{X} - 50}{S} \underset{\mu=50}{\sim} t_{23}.$$

A Região de rejeição é $R_{0.01} =]-\infty, t_{23,0.01}[$ com $t_{23,0.01} = 2.5$.

$\boxed{\texttt{F}}$

3. $\boxed{\texttt{A}}$ $\hat{Y} = 8.2727 + 4.7164\,x$

$\boxed{\texttt{C}}$ $\hat{Y}\left(30\right) = 8.2727 + 4.7164 \times 30 = 149.7647$

$\boxed{\texttt{F}}$ $R^2 = 0.9788 \geq 0.8 \qquad$ A qualidade do ajustamento é "‘razoável"’

$\boxed{\texttt{F}}$ $H_0 : \beta_1 = 0 \; vs \; H_1 : \beta_1 \neq 0$

- Região de rejeição para $\alpha = 0.05$: $\quad t_{9:\,0.025} = 2.262$ e $R_{0.05} = \left]-\infty, -2.262\right[\cup \left]2.262, +\infty\right[$
- Valor observado da estatística de teste: $\quad t_{obs} = 20.389$, dado pelo *output* do R
- Decisão: $\quad t_{obs} \in R_{0.05}$ logo rejeitamos H_0 ao nível de significância de 5%.

Observação: Tomaríamos a mesma decisão utilizando o $valor-p$, pois $valor-p = 7.66 \times 10^{-9} < 0.05$.

4. $H_0 : \sigma = 1 \ vs \ H_1 : \sigma \neq 1$

Represente-se por X a população.
Informação populacional: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \equiv E(X) = ?$,
Informação amostral: $n = 30$, $s = 0.8$

A estatística de teste é:

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{1} \underset{\sigma=1}{\sim} \chi^2_{29}.$$

A Região de rejeição é $R_{0.05} = \left]0, \chi^2_{29:0.975}\right[\cup \left]\chi^2_{29:0.025}, +\infty\right[=]0, 16.047[\cup]45.722, +\infty[$.

O valor observado da estatística de teste é $x^2_{obs} = (30-1) \times 0.8^2 = 18.56$

Como $x^2_{obs} \notin R_{0.05}$ então não rejeitamos H_0 a 5% de significância.