Integrais duplos. Noção de integral duplo segundo Riemann

A noção de integral definido pode ser generalizada a funções de duas ou mais variáveis. Iremos introduzir o conceito de integral duplo, que generaliza o conceito de integral definido a funções de duas variáveis. O conceito de integral definido de uma função real de variável real teve como origem o cálculo de áreas de domínios limitados por curvas do plano. Uma das motivações na definição de integral duplo surge quando se pretende calcular volumes delimitados por superfícies.

Seja f uma função contínua e não negativa num retângulo R do plano XOY de lados paralelos aos eixos coordenados e considere-se a superfície de equação $z = f(x, y)$. Suponhamos que se pretende calcular o volume do domínio limitado superiormente pela superfície e inferiormente pelo retângulo R.

O procedimento para calcular o volume do domínio considerado é semelhante ao processo utilizado no cálculo de áreas. A aproximação ao volume será, neste caso, feita através da soma do volumes de paralelepípedos.

Comecemos por dividir o retângulo R em n retângulos, $A_1, A_2, ..., A_k$ de lados paralelos aos eixos coordenados. Designe-se a área de A_k por ΔA_k.

Em cada um dos novos retângulos escolha-se um ponto arbitrário; designe-se por (x_k^*, y_k^*) o ponto escolhido no retângulo A_k.

O volume do paralelepípedo cuja base é o retângulo A_k e de altura $f(x_k^*, y_k^*)$ é dado por

$$V_k = f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k.$$

Uma aproximação ao volume do domínio considerado será

$$\tilde{V} = V_1 + V_2 + ... + V_n.$$

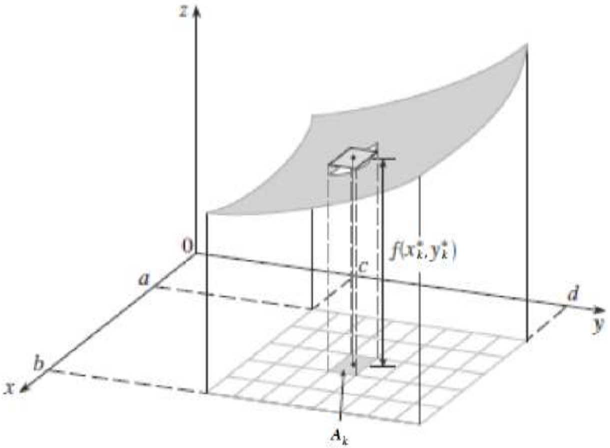

Figura: Integral duplo.

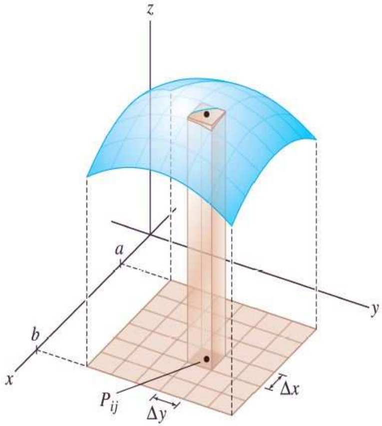

Figura: Cálculo de um volume.

Uma forma de melhorar a aproximação será dividir cada um dos retângulos em novos retângulos cada vez menores. Se os lados de cada um destes retângulos se aproximarem de zero, é plausível que o volume do domínio seja dado por

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k,$$

e que sugere a seguinte definição:

Definição (Volume limitado superiormente por uma superfície)

Seja $f(x,y)$ uma função contínua e não negativa definida num retângulo R do plano XOY, o volume V do domínio limitado inferiormente por R e superiormente pela superfície de equação $z = f(x,y)$ é definido por

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k.$$

Apesar de esta definição ser satisfatória para o presente objetivo há vários pormenores a ter em conta antes de podermos encarar esta definição como sendo rigorosa. Por exemplo, deveria provar-se que o limite efetivamente existe e que o seu valor não depende da escolha dos pontos $(x_1^*, y_1^*), \dots, (x_n^*, y_n^*)$. É possível mostrar que, de facto, isto acontece se a função f é contínua em R.

Na definição anterior foi assumido que f era não negativa em R. Se f for contínua em R, mas tomando valores positivos e negativos, o limite anterior já não representa um volume, mas sim uma diferença de volumes: o volume do domínio limitado superiormente pela porção de superfície situada acima do plano XOY e inferiormente pelo plano XOY, ao qual subtraimos o volume do domínio limitado superiormente pelo plano XOY e inferiormente pela porção de superfície situada abaixo do plano XOY.

Cada uma das somas da forma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k,$$

é designada por *soma de Riemann*. O limite das somas de Riemann representa-se por

$$\iint_R f(x, y)dA,$$

e designa-se por integral duplo de $f(x, y)$ em R, isto é,

$$\iint_R f(x, y)dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k.$$

Propriedades do integral duplo.

Os integrais duplos sendo definidos como limites possuem muitas das suas propriedades. A maior parte das propriedades conhecidas dos integrais simples estendem-se a integrais duplos e estabelecem-se de modo análogo. Vejamos algumas delas:

Suponhamos que $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são contínuas num retângulo R com as propriedades atrás referidas. Então:

1.
$$\iint_R (f+g)(x,y)dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA,$$

2.
$$\iint_R kf(x,y)dA = k\iint_R f(x,y)dA, \quad k \in \mathbb{R}.$$

3. Se $f(x,y) \leq g(x,y), \quad \forall (x,y) \in R$, então

$$\iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA;$$

em particular, se $f(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in R$, então

$$0 \leq \iint_R g(x,y)dA.$$

4. Se $f(x,y) = 1, \quad \forall (x,y) \in R$, então

$$\iint_R f(x,y)dA = \text{Área de } R.$$

5. Se $R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n$, em que $R_1, R_2, \cdots, R_n$ são n retângulos sem pontos interiores comuns, tomados dois a dois, então

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)dA &= \iint_{R_1} f(x,y)dA + \cdots + \iint_{R_n} f(x,y)dA \\ &= \sum_{i=1}^{n} \iint_{R_i} f(x,y)dA.\end{aligned}$$

6.

$$\Big|\iint_R f(x,y)dA\Big| \leq \iint_R |f(x,y)|dA.$$

Se $|f(x,y) \leq M, \ \forall (x,y) \in R$, então

$$\begin{aligned}\Big|\iint_R f(x,y)dA\Big| &\leq \iint_R |f(x,y)|dA \\ &\leq \iint_R MdA = M \cdot (\text{Área de } R).\end{aligned}$$

De forma análoga à utilizada no cálculo das derivadas parciais de uma função $f(x, y)$, em que considerávamos uma das variáveis constante e derivávamos a função em relação à outra, iremos considerar um processo de integração a que chamaremos *integração parcial*.

Os símbolos

$$\int_a^b f(x, y)d\,x \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x, y)d\,y,$$

denotam a integração parcial definida da função $f(x, y)$. Ao primeiro integral chama-se *integral parcial definido relativo à variável* x, e calcula-se considerando y constante e integrando em ordem a x. Ao segundo integral chama-se *integral parcial definido relativo à variável* y, e calcula-se considerando x constante e integrando em ordem a y.

Exemplo

$$\int_0^1 xy^2 dx = y^2 \int_0^1 x dx = y^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{y^2}{2},$$

$$\int_0^1 xy^2 dy = x \int_0^1 y^2 dx = x \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{x}{3}.$$

O integral parcial definido relativo à variável x de uma função $f(x, y)$ é uma função de y, que poderá em seguida ser integrado em relação à variável y.
Analogamente, o integral parcial definido relativo à variável y é uma função de x, que poderá em seguida ser integrado em relação à variável x.

A este processo de duas integrações parciais sucessivas chama-se *integração repetida (ou iterada)*. Relativamente a este processo introduzem-se as seguintes notações:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy,$$

e

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

A estes integrais chama-se *integrais repetidos (ou iterados)*.

Exemplo

Calculem-se os seguintes integrais repetidos:

$$\int_2^3 \int_0^1 (1 + 2x^2 y) dxdy,$$

e

$$\int_0^1 \int_2^3 (1 + 2x^2 y) dydx.$$

Tem-se que

$$\int_2^3 \int_0^1 (1 + 2x^2 y) dxdy = \int_2^3 \left(\int_0^1 (1 + 2x^2 y) dx \right) dy$$

$$= \int_2^3 \left[x + \frac{2}{3} x^3 y \right]_0^1 dy = \int_2^3 \left(1 + \frac{2}{3} y \right) dy = \left[y + \frac{1}{3} y^2 \right]_2^3 = \frac{8}{3}.$$

Exemplo (continuação)

$$\int_0^1 \int_2^3 (1+2x^2y)dydx = \int_0^1 \left(\int_2^3 (1+2x^2y)dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[y + x^2y^2\right]_2^3 dx = \int_0^1 \left(1+5x^2\right) dx = \left[x + \frac{5}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{8}{3}.$$

O teorema seguinte mostra que não foi por acaso que se obteve o mesmo valor para os dois integrais repetidos calculados.

Teorema (teorema de Fubini)

Seja R o retângulo definido por

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \ \wedge \ c \leq y \leq d\}.$$

Se $f(x,y)$ é contínua em R, então

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx.$$

Este importante teorema permite calcular um integral duplo num retângulo através do cálculo de dois integrais repetidos. Não será feita a demonstração deste teorema.

Supondo que $f(x, y)$ é contínua e não negativa no retângulo R o valor do integral

$$\iint_R f(x, y)dA$$

é, tal como foi visto, o volume do domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ limitado superiormente pela superfície de equação $z = f(x, y)$ e inferiormente pelo retângulo R.

Vale a pena nesta altura dar uma interpretação a cada um dos integrais repetidos que se efetuam aquando do cálculo do integral duplo.

Quando se supõe a variável y fixa e x a variar entre a e b, $f(x,y)$ é função apenas de x e o valor do integral

$$A(y) = \int_a^b f(x,y)dx,$$

representa a área plana da secção feita em D pelo plano $y =$ constante.

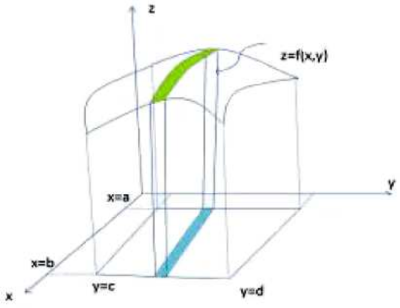

Figura: Secção num domínio tridimensional.

Tem-se uma interpretação análoga para o integral

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)dy.$$

Designando por $V(D)$ o volume do domínio D, o último teorema permite escrever

$$V(D) = \int_c^d A(y)dy = \int_a^b A(x)dx.$$

Exemplo

Determine-se o volume do domínio limitado superiormente pelo plano de equação $z = 6 - 2x - y$ *e inferiormente pelo retângulo* $R = [0,1] \times [0,2]$.

Designando o volume pretendido por $V(D)$, *tem-se que*

$$V(D) = \iint_R (6 - 2x - y)dydx = \int_0^1 \left(\int_0^2 (6 - 2x - y)dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left[6y - 2xy - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 dx = \int_0^1 (10 - 4x)dx = \left[10x - 2x^2 \right]_0^1 = 8.$$

Poder-se-ia ter optado por calcular o integral duplo pela ordem de integração inversa da efetuada.

Exemplo

Determine-se o volume do domínio limitado superiormente pelo parabolóide de equação $z = 4 - (x^2 + y^2)$ *e inferiormente pelo retângulo limitado pelas rectas de equações*

$$x = 0, x = 1, y = 0, y = \frac{3}{2}.$$

Designando o volume pretendido por $V(D)$*, tem-se que*

$$\iint_{[0,1]\times[0,3/2]} (4 - x^2 - y^2)dxdy,$$

Exemplo (continuação)

Tem-se

$$\begin{aligned}\iint_D (4-x^2-y^2)dxdy &= \int_0^1 \int_0^{3/2} (4-x^2-y^2)dydx \\ &= \int_0^1 \left[4y - x^2y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{3/2} dx \\ &= \int_0^1 \left(6 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{8}\right) dx \\ &= \left[6x - \frac{x^3}{2} - \frac{9}{8}x\right]_0^1 \\ &= 6 - \frac{1}{2} - \frac{9}{8} = \frac{35}{8}.\end{aligned}$$

Integrais em regiões não retângulares

No que se segue, mostraremos como calcular integrais duplos em regiões que não são retângulos. Tendo em conta que as regiões do plano podem ser extremamente complicadas de caracterizar, o cálculo de integrais duplos em regiões arbitrárias do plano está para além do âmbito desta disciplina.

Iremos considerar apenas o cálculo de integrais duplos em domínios que se possam decompor em uniões finitas de domínios de dois tipos, a saber:

Definição (conjuntos verticalmente, ou horizontalmente simples)

1. Um conjunto da forma

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \wedge a \leq x \leq b\}$$

com $\varphi_1(x)$ e $\varphi_2(x)$ duas funções reais contínuas em $[a,b]$, diz-se *verticalmente simples*.

2. Um conjunto da forma

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \wedge \alpha \leq y \leq \beta\}$$

com $\psi_1(y)$ e $\psi_2(y)$ duas funções reais contínuas em $[\alpha,\beta]$, diz-se *horizontalmente simples*.

3. Um conjunto diz-se *simples*, se for verticalmente simples ou horizontalmente simples.

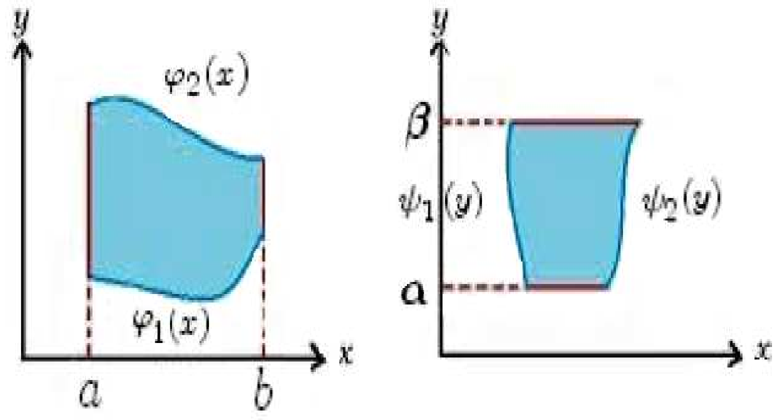

Figura: Conjuntos simples.

Definição (Conjuntos básicos)

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ limitado diz-se *básico* se for a união de um número finito de conjuntos simples sem pontos interiores comuns tomados dois a dois.

Seja D um conjunto básico e R um retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados tal que $D \subset R$. Sendo f uma função limitada definida em D, considere-se a função $\tilde{f}$ definida em R da seguinte forma

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se} \quad (x,y) \in D \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) \in R \setminus D. \end{cases}$$

Definição

Se $\tilde{f}$ for integrável em R define-se

$$\iint_D f(x,y)dA := \iint_R \tilde{f}(x,y)dA.$$

O teorema seguinte diz como calcular integrais duplos em domínios simples:

Teorema

1. *Se $f(x, y)$ é contínua num domínio A verticalmente simples, então:*

$$\iint_A f(x, y)dxdy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dydx.$$

2. *Se $f(x, y)$ é contínua num domínio B horizontalmente simples, então:*

$$\iint_B f(x, y)dxdy = \int_\alpha^\beta \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dxdy.$$

Exemplo

Calcule-se

$$\iint_A xy \; dx\, dy,$$

sendo A *o conjunto verticalmente simples definido por*

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt{x} \wedge 2 \leq x \leq 4\right\}.$$

Tem-se que

$$\iint_A xy \; dx\, dy = \int_2^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} xy \; dy \right) dx = \int_2^4 \left[x \frac{y^2}{2} \right]_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_2^4 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32} \right]_2^4 = \frac{11}{6}.$$

Exemplo

Calcule-se

$$\iint_A 12xy \; dx \, dy,$$

sendo A a região indicada na figura.

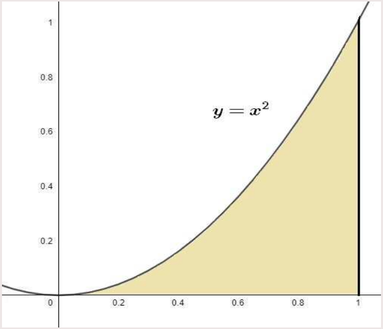

Figura: *Domínio A.*

Exemplo (continuação)

Tem-se que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x^2 \ \wedge\ 0 \leq x \leq 1\}$ *e portanto é verticalmente simples. Então pelo teorema anterior*

$$\iint_A 12xy\ dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} 12xy\,dy \right)\,dx = \int_0^1 6x^5 dx = 1.$$

Tem-se também que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y} \leq x \leq 1 \ \wedge\ 0 \leq y \leq 1\}$ *e portanto é horizontalmente simples. Uma vez mais, pelo teorema anterior*

$$\iint_A 12xy\ dy\,dx = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{1} 12xy\,dx \right)\,dy = \int_0^1 (3y^2 - 2y^3)dy = 1.$$

Inversão da ordem de integração no integral repetido.

Calcule-se o integral duplo

$$\iint_D x \, dxdy,$$

onde D é o domínio representado na figura.

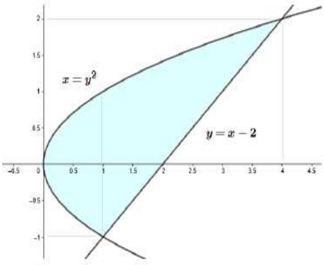

Figura: Domínio D.

Tem-se que $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq y+2 \wedge -1 \leq y \leq 2\}$ e portanto é horizontalmente simples. Então

$$\iint_D x\, dxdy = \int_{-1}^{2} \left(\int_{y^2}^{y+2} x \, dx \right) dy = \int_{-1}^{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{y^2}^{y+2} dy$$

$$= \int_{-1}^{2} \left(\frac{(y+2)^2}{2} - \frac{y^4}{2} \right) dy = \left[\frac{(y+2)^3}{6} - \frac{y^5}{10} \right]_1^2 = \frac{36}{5}.$$

Alternativamente, o integral duplo pode ser calculado notando que D é a união dos conjuntos verticalmente simples

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x} \wedge 0 \leq x \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x-2 \leq y \leq \sqrt{x} \wedge 1 \leq x \leq 4\}.$$

Tem-se que

$$\begin{aligned}\iint_{D=D_1\cup D_2} x\,dxdy &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} x\,dydx + \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} x\,dydx \\ &= \int_0^1 [xy]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx + \int_1^4 [xy]_{x-2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 2x\sqrt{x}\,dx + \int_1^4 (x\sqrt{x} - x(x-2))dx \\ &= \frac{36}{5}.\end{aligned}$$

O cálculo do último integral duplo foi feito por dois processos. No primeiro processo o integral foi convertido num integral repetido em que se considerou uma certa ordem de integração e no outro, foi convertido num integral repetido em que se considerou a ordem de integração inversa. Quando se efetua uma operação deste tipo num integral repetido diz-se que se inverteu a ordem de integração do integral repetido.

A ordem de integração pela qual se efetua o calculo de um integral duplo ou repetido pode ser determinante no cálculo do integral considerado como se verá no exemplo que se segue.

Exemplo

Sendo D o domínio representado na figura calcule-se o integral duplo

$$\iint_D e^{y^2}\, dxdy.$$

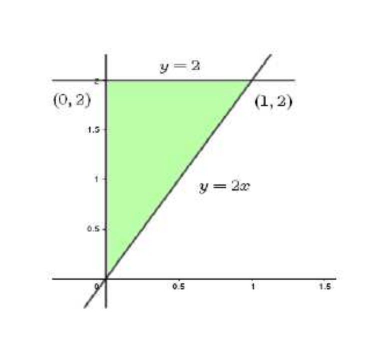

Figura: *Domínio D.*

Exemplo (continuação)

Tendo em conta que o domínio é verticalmente simples tem-se que

$$\iint_D e^{y^2}\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_{2x}^{2} e^{y^2}\, dy \right) dx.$$

Não é possível calcular este integral repetido uma vez que a função e^{y^2} não é elementarmente primitivável em ordem a y. Invertendo a ordem de integração vem que

$$\iint_D e^{y^2}\, dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{y/2} e^{y^2}\, dx \right) dy = \int_0^2 \left[xe^{y^2} \right]_0^{y/2} dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{y}{2} e^{y^2} \right) dy = \frac{1}{4}(e^4 - 1).$$

Cálculo de áreas planas e cálculo de volumes

Assim como o valor do integral duplo de uma função $f(x, y)$ contínua e não negativa definida num retângulo R do plano XOY, podia ser interpretado como o volume do domínio limitado inferiormente por R e superiormente pela superfície de equação $z = f(x, y)$, o integral duplo de uma função $f(x, y)$ contínua e não negativa definida num conjunto verticalmente (resp horizontalmente) simples D, pode ser interpretado como o volume do domínio limitado superiormente pela superfície de equação $z = f(x, y)$, inferiormente pelo plano xy e lateralmente pela superfície cilíndrica que tem por directriz a fronteira de D e cujas geratrizes são paralelas ao eixo dos zz.

A um domínio deste tipo é usual chamar *cilindróide*.

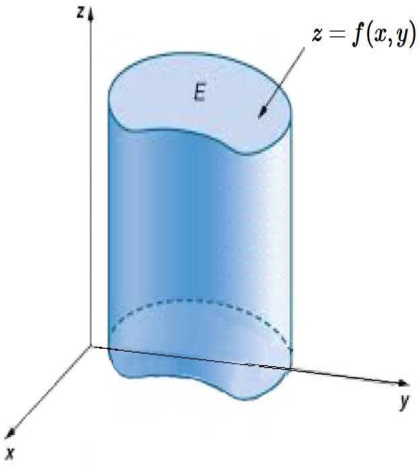

Figura: Cilindróide

Tal como sucedia nos integrais duplos com domínios de integração retângulares, em que, quando a função integranda era constante e igual a 1 o valor do integral duplo era numericamente igual à área do retângulo de integração, quando os domínios são verticalmente (respectivamente horizontalmente) simples o integral duplo da função constante igual a 1 é também numericamente igual à área do domínio de integração.

Exemplo

Determine-se o volume do cilindróide S, limitado superiormente pelo plano de equação $z = x$, inferiormente pelo domínio D do plano XOY, situado no primeiro quadrante, limitado pelas retas de equação $y = 0$ e $3x - 4y = 0$ e pela curva $y = \sqrt{25 - x^2}$.
O domínio D é o sector circular, situado no 1.º quadrante, da circunferência centrada na origem e raio 5 e compreendido entre as retas consideradas.

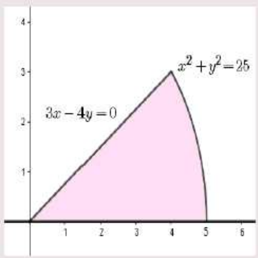

Figura: *Integral duplo.*

Exemplo (continuação)

Designando o volume pretendido por $V(S)$, e tendo em conta que D é horizontalmente simples, tem-se que

$$V(S) = \iint_D x \, dxdy = \int_0^3 \left(\int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} x dx \right) dy = 25.$$

Se tivéssemos optado por calcular o integral duplo escolhendo a outra ordem de integração teria sido necessário considerar o domínio D como a união de dois domínios verticalmente simples [verifique].

Exemplo

Calcule-se a área do círculo D *centrado em* $(0,0)$ *e de raio* R. *Tendo em conta que a circunferência centrada em* $(0,0)$ *e de raio* R *tem por equação* $x^2 + y^2 = R^2$,

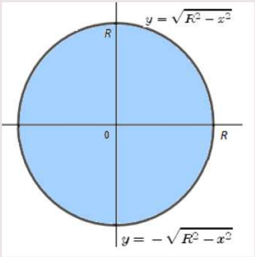

Figura: *Integral duplo.*

Exemplo (continuação)

a área de D é dada pelo integral:

$$A = \iint_D dxdy = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right) dx = \int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

Uma primitiva de $\sqrt{R^2 - x^2}$ *é dada por*

$$\int \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right);$$

então

Exemplo (continuação)

$$
\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - x^2}dx &= \left[x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \arcsin\left(\frac{x}{R}\right)\right]_{-R}^{R} \\
&= R^2 \arcsin 1 - R^2 \arcsin(-1) \\
&= R^2 \frac{\pi}{2} - R^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \pi R^2.
\end{aligned}
$$

Mudança de variáveis em integrais duplos

Seja

$$\begin{aligned} T = (\varphi, \psi) : D^* \subset \mathbb{R}^2 &\to D \subset \mathbb{R}^2 \\ (u, v) \quad &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

onde D^* e D são conjuntos básicos, T é uma bijecção de D^* sobre D e $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$, para $(x, y) \in D^*$. Suponhamos que φ e ψ são continuamente deriváveis em D e que o jacobiano J da transformação T não se anula em D^*. Nas condições consideradas, e sendo $f(x, y)$ uma função contínua em D, tem-se que

$$\iint_D f(x, y) dxdy = \iint_{D^*} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J| dudv.$$

Coordenadas polares.

No cálculo de integrais duplos é, em muitas situações, vantajoso utilizar as coordenadas polares já anteriormente definidas. Tem-se, como se sabe, que

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & \rho \geq 0 \\ y = \rho\sin\theta, & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

e

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho.$$

Calculemos a área do círculo, do último exemplo, efetuando a mudança de variáveis cartesianas para coordenadas polares. Tem-se que

$$A = \iint_D dxdy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \rho \, d\rho \right) d\theta = 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^R = \pi R^2.$$

A mudança de variáveis foi obviamente vantajosa permitindo não só reduzir como simplificar os cálculos na obtenção da área pretendida.

Exemplo

Calculemos a área da elipse de equação

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Usando a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x = x_0 + a\rho\cos\theta, & \rho \geq 0 \\ y = y_0 + b\rho\sin\theta, & 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

tem-se que

$$J = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho$$

e

$$A = \iint_D dxdy = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1 ab\rho\, d\rho\Big)d\theta = 2\pi\left[\frac{ab\rho^2}{2}\right]_0^1 = ab\pi.$$

Seja A um conjunto simples do plano XOY, D o domínio de $\mathbb{R}^3$ limitado superiormente e inferiormente pelas superfícies gráficos das funções contínuas $z = f_1(x, y)$ e $z = f_2(x, y)$, respetivamente, com $(x, y) \in A \in \mathbb{R}$. Suponhamos também que D é limitado lateralmente pela superfície cilíndrica que tem por directriz a fronteira de A, cujas geratrizes são paralelas ao eixo dos zz e que

$$0 \leq f_1(x, y) \leq f_2(x, y), \quad \forall (x, y) \in A.$$

Reconhece-se imediatamente que o volume de D é a diferença dos volumes dos cilindróides correspondentes às superfícies $z = f_1(x, y)$ e $z = f_2(x, y)$, isto é,

$$vol(D) = \iint_A (f_2(x, y) - f_1(x, y))dxdy.$$

Supondo A horizontalmente simples tem-se que

$$vol(D) = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} (f_2(x,y) - f_1(x,y)) dx \right) dy$$

Assim sendo, para cada $y \in [\alpha, \beta]$, a função

$$\mu(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} (f_2(x,y) - f_1(x,y)) dx = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} dz \right) dy$$

representa o valor da área da secção feita no domínio D, pelo plano paralelo ao plano XOZ de ordenada y constante. Vem finalmente que

$$vol(D) = \int_{\alpha}^{\beta} \mu(y) dy.$$

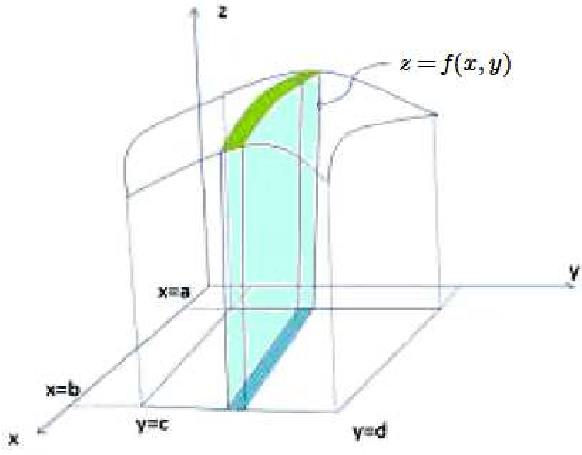

Figura: Secção num domínio tridimensional.

Exemplo

Calcule-se o volume do domínio limitado pelo elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c > 0.$$

O domínio é limitado inferiormente e superiormente, respetivamente, pelos gráficos das superfícies de equação

$$z = -c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}; \quad z = c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

Designando por $V(D)$ o volume pretendido, tem-se que

$$vol(D) = \iint_A 2c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dy.$$

Exemplo (continuação)

Utilizando a mudança de coordenadas definida por

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta, & 0 \le \rho \le 1 \\ y = b\rho\sin\theta, & 0 \le \theta < 2\pi, \end{cases}$$

tem-se que, $|J| = ab\rho$ *e*

$$\begin{aligned} V(D) &= \iint_A 2c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy \\ &= 2c\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}ab\rho\, d\rho\right)d\theta \\ &= 2abc(2\pi)\left(-\frac{1}{3}\right)\left[(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3}abc\pi. \end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Calculemos agora o mesmo volume começando por determinar a área da secção por um plano paralelo ao plano XOZ.
Para cada $y \in]-b, b[$. A secção feita em D é uma elipse de equação

$$\frac{x^2}{(\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2})^2}+\frac{z^2}{(\frac{c}{b}\sqrt{b^2-y^2})^2}=1.$$

Como a área da elipse de equação $\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$ *é* πAB *a área da secção considerada é*

$$\mu(y)=\pi\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\,\frac{c}{b}\sqrt{b^2-y^2}=\pi\frac{ac}{b^2}(b^2-y^2).$$

Então

$$vol(D)=\int_{-b}^{b}\pi\frac{ac}{b^2}(b^2-y^2)dy=\pi\frac{ac}{b^2}\left[b^2y-\frac{y^3}{3}\right]_{-b}^{b}=\frac{4}{3}abc\pi.$$

No caso em que se verificam as hipóteses anteriores, relativamente ao domínio D, excepto a positividade das funções $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$, tudo se passa de forma semelhante, pois podemos efectuar uma translação das superfícies, paralelamente ao eixo dos ZZ, e de grandeza igual a k, escolhida de forma a que se tenha

$$f_1(x,y) + k \geq 0 \text{ e } f_2(x,y) + k \geq 0.$$

Vem então que:

$$\begin{aligned} vol(D) &= \iint_A ((f_2(x,y) + k) - (f_1(x,y) + k))dxdy \\ &= \iint_A (f_2(x,y) - f_1(x,y))dxdy. \end{aligned}$$

Exemplo

Determine o volume do domínio D limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, lateralmente pela superfície cilindrica $x^2 + y^2 = a^2$ e inferiormente pelo plano $z = -2$. O volume é dado por

$$vol(D) = \iint_A (x^2 + y^2 + 2)dxdy,$$

onde A é a projecção no plano XOY do domínio D. Trata-se de um círculo centrado na origem do referencial e de raio a que, utilizando coordenadas polares, é descrito por

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & 0 \leq \rho \leq a \\ y = \rho\sin\theta, & 0 \leq \theta < 2\pi, \quad |J| = \rho. \end{cases}$$

$$vol(D) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a (\rho^2 + 2)\, \rho d\rho \right) d\theta = 2\pi \int_0^a (\rho^3 + 2\rho)\, d\rho = \pi \left(2a^2 + \frac{a^4}{2} \right).$$

Linhas em $\mathbb{R}^2$

Dada uma aplicação contínua

$$\begin{aligned} P : [a, b] &\to \mathbb{R}^2 \\ t \quad &\mapsto (x, y) = (\varphi(t), \psi(t)) \end{aligned}$$

chama-se *linha* ao contradominio de P (em $\mathbb{R}^2$).

Quando as equações que representam a linha são da forma

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} , \quad t \in [a, b]$$

diz-se que a equação da linha está dada na *forma paramétrica*; a t chamamos o *parâmetro* da linha.

Fixando em $\mathbb{R}^2$ um referencial cartesiano ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j})$ a equação da linha pode escrever-se na forma

$$P = O + \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j},$$

ou ainda, designando $P - O = \overrightarrow{OP}$, na forma

$$\overrightarrow{OP} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}.$$

Neste caso diz-se que a linha está representada por uma *equação vectorial* .

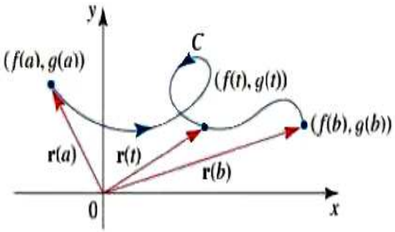

Figura: Linha no plano.

Exemplo

Em $\mathbb{R}^2$ *tem-se, por exemplo, as seguintes equações de linhas*

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2}, \quad 0 \le t \le 1, \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

As definições dadas para linhas em $\mathbb{R}^2$, valem, com as adaptações óbvias para linhas no espaço euclidiano tridimensional.

Exemplo

Têm-se, por exemplo, as seguintes equações de linhas em $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2, \quad t \in \mathbb{R} \; ; \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \quad t \in \mathbb{R}, \; ; \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = t \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t^2 \end{cases}$$

Voltando a considerar uma aplicação contínua $P : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ aos pontos (em $\mathbb{R}^2$) $P(a)$ e $P(b)$ chama-se *extremos* da linha.

Se $P(a) = P(b)$ a linha diz-se *fechada*.

Definição

Diz-se que a representação paramétrica

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad a \leq t \leq b \end{cases}$$

é regular se $\varphi'(t), \psi'(t)$ existem, são continuas e não se anulam simultaneamente em $[a, b]$.

Diz-se que a representação paramétrica é *seccionalmente regular*, ou *regular por secções*, em $[a, b]$, se é regular, excepto quando muito, num número finito de pontos de $[a, b]$, nos quais existem as derivadas laterais de $\varphi(t), \psi(t)$.

Exemplo

Estude-se a regularidade da representação paramétrica.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = \sin t & \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \\ y = \psi(t) = (t-\pi)^2, & \end{cases}$$

Tem-se

$$\varphi'(t) = \cos t, \quad \psi'(t) = 2(t-\pi),$$

que são funções obviamente contínuas.
Tem-se ainda que

$$\psi'(t) = 0 \quad \textit{se e só se} \quad t = \pi.$$

Mas $t = \pi$ *não é zero de* $\varphi'(t)$. *Segue-se que a representação paramétrica é regular.*

Noção de integral curvilíneo

Considere-se em $\mathbb{R}^2$ uma linha L definida parametricamente pelas equações

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad a \leq t \leq b \end{cases}$$

Seja

$$P(t) = (x, y) = (\varphi(t), \psi(t)),$$

um ponto genérico da linha e $f(x, y)$ uma função contínua definida num domínio que contém L. Dada a partição do intervalo $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

seja $P_i = P(t_i)$ e Q_i um ponto arbitrário do arco $\overline{P_i P_{i+1}}$.

Considere-se a soma $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(Q_i)(x_{i+1} - x_i)$, onde $x_i = \varphi(t_i)$. Se esta soma tender para um limite finito quando a norma da partição tender para 0, isto é, quando

$$\max_{1 \leq i \leq n} (t_{i+1} - t_i) \to 0,$$

a esse limite chama-se *integral curvilíneo* de $f(x, y)$ relativamente a x ao longo da linha L, quando esta é percorrida de $P(a)$ para $P(b)$ e representa-se por

$$\int_L f(x, y) dx.$$

De modo análogo se define o integral curvilíneo de $f(x, y)$ relativamente a y, o qual se representa por

$$\int_L f(x, y) dy.$$

Supondo que a seguinte representação paramétrica de L

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad a \leq t \leq b \end{cases}$$

é regular, considere-se a partição do intervalo $[a, b]$,

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

Seja $P_i = P(t_i), i = 1, \cdots, n$, seja $t_i' \in [t_i,\ t_{i+1}]$ e $Q_i = P(t_i')$ com $i = 0, \cdots, n-1$. A soma anterior pode escrever-se

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(Q_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(t_i'), \psi(t_i'))(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))$$

Pelo teorema do valor médio existe τ_i tal que

$$\frac{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \varphi'(\tau_i),$$

isto é,

$$\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\tau_i)(t_{i+1} - t_i)$$

e a soma anterior pode escrever-se como

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi(t_i'), \psi(t_i'))\varphi'(\tau_i)(t_{i+1} - t_i).$$

Passando ao limite vem

$$\int_L f(x, y)dx = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt.$$

Foi suposto que a linha estava a ser percorrida de $P(a)$ para $P(b)$ quando o valor do parâmetro t crescia. Se a linha for percorrida no outro sentido o valor do integral curvilíneo será o simétrico do obtido. De modo análogo é possível provar-se que

$$\int_L f(x,y)dy = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)dt.$$

Se $c \in [a,b]$ e L_1, L_2 são os arcos correspondentes à variação de t em $[a,c]$ e $[c,b]$, respectivamente, resulta imediatamente da definição de integral curvilíneo que

$$\int_L f(x,y)dx = \int_{L_1} f(x,y)dx + \int_{L_2} f(x,y)dx.$$

Assim, se L for constituída por um número finito de arcos regulares, o valor do integral curvilíneo pode obter-se somando o valor dos integrais calculados ao longo de cada um dos arcos.
Suponhamos que dada uma curva L e uma sua representação paramétrica regular ela é percorrida do ponto A para o ponto B no sentido crescente do valor do parâmetro. Se a mesma curva L relativamente a outra representação regular é percorrida do ponto B para o ponto A no sentido crescente do valor do novo parâmetro, notaremos esta nova parametrização por L^{-}. Tem-se que

$$\int_{L^{-}} = -\int_{L}.$$

Teorema (Independência da parametrização)

O valor do integral de linha ao longo de uma curva L não depende da parametrização de L no sentido em que duas quaisquer parametrizações de L com a mesma orientação conduzem ao mesmo valor do integral.

O conceito de integral curvilíneo, que acabámos de introduzir, estende-se sem qualquer dificuldade, com as adaptações óbvias, ao caso tridimensional.

Exemplo

Sendo L a curva representada na figura, determine o valor do integral curvilíneo

$$\int_{L^+} (-3xy^2)dx + (3x^2y + 1)dy.$$

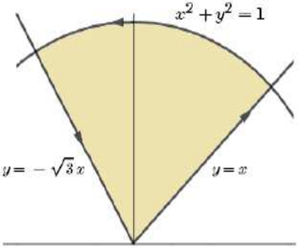

Figura: Curva L.

Exemplo (continuação)

A curva L pode ser parametrizada por $L_1 + L_2 + L_3$, em que

$$L_1 = \begin{cases} x = t, & 0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = t \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} x = \cos t, & \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{2\pi}{3} \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$L_3 = \begin{cases} x = t, & -\frac{1}{2} \leq t \leq 0 \\ y = -\sqrt{3}\, t \end{cases}$$

e tem-se

$$\int_{L^+} (-3xy^2)dx + (3x^2y + 1)dy = \int_{L_1} (-3xy^2)dx + (3x^2y + 1)dy$$
$$+ \int_{L_2} (-3xy^2)dx + (3x^2y + 1)dy + \int_{L_3} (-3xy^2)dx + (3x^2y + 1)dy$$

Exemplo (continuação)

$$= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (-3t^3 + 3t^3 + 1)dt$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} (3\cos t \sin^3 t + 3\cos^3 t \sin t + \cos t)dt$$

$$+ \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (-9t^3 + 9\,t^3 - \sqrt{3})dt$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \left[\frac{3\sin^4 t}{4} - \frac{3\cos^4 t}{4} + \sin t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \left[\frac{27}{64} - \frac{3}{64} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{16} + \frac{3}{16} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3}{8}.$$

Consideremos agora um domínio verticalmente simples

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \wedge a \leq x \leq b\}.$$

A área de D, $\acute{A}rea(D)$, pode, como se sabe, ser calculada pelo integral

$$\acute{A}rea(D) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Calcule-se o integral curvilíneo $\int_L ydx$, sendo L o contorno de D (linhas que constituem a fronteira de D) percorrido no sentido directo (contrário ao dos ponteiros do relógio).

Tem-se $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ e

$$\int_L ydx = \int_{L_1} ydx + \int_{L_2} ydx + \int_{L_3} ydx + \int_{L_4} ydx.$$

As curvas L_1, L_2, L_3, L_4 admitem as seguintes representações paramétricas:

$$L_1 = \begin{cases} x = t, & a \leq t \leq b, \\ y = f_1(t) \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} x = b, & f_1(b) \leq t \leq f_2(b), \\ y = t \end{cases}$$

$$L_3^- = \begin{cases} x = t, & a \leq t \leq b, \\ y = f_2(t), \end{cases} \qquad L_4^- = \begin{cases} x = a, & f_1(a) \leq t \leq f_2(a). \\ y = t \end{cases}$$

Então

$$\int_L ydx = \int_a^b f_1(t)dt + 0 - \int_a^b f_2(t)dt + 0$$
$$= \int_a^b (f_1(t) - f_2(t))dt = -Area(D).$$

Este resultado é ainda válido para um domínio que seja a união finita de conjuntos simples sem pontos interiores comuns quando tomados dois a dois.

De forma análoga se calcularmos o integral $\displaystyle\int_L xdy$ chegaríamos a

$$\int_L xdy = \acute{A}rea(D).$$

Os dois integrais de linha considerados permitem concluir que

$$\acute{A}rea(D) = \frac{1}{2}\int_L xdy - ydx.$$

Fórmula de Riemann-Green

Considere-se o domínio verticalmente simples

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \wedge a \leq x \leq b\}.$$

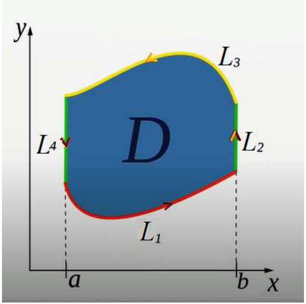

Figura: Domínio D.

Seja $\varphi(x, y)$ uma função contínua e continuamente derivável em ordem a y definida em D.

Calcule-se o integral duplo

$$\iint_D \frac{\partial \varphi}{\partial y} dxdy.$$

Tem-se que

$$\iint_D \frac{\partial \varphi}{\partial y} dxdy = \int_a^b \Big(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy\Big) dx = \int_a^b \left[\varphi(x, y)\right]_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx$$
$$= \int_a^b \varphi(x, f_2(x)) - \varphi(x, f_1(x)) dx$$

Seja $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$. As curvas L_1, L_2, L_3, L_4 admitem as seguintes representações paramétricas:

$$L_1 = \begin{cases} x = x, & a \leq x \leq b, \\ y = f_1(x) \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} x = b, & f_1(b) \leq y \leq f_2(b), \\ y = y \end{cases}$$

$$L_3^- = \begin{cases} x = x, & a \leq x \leq b, \\ y = f_2(x), \end{cases} \qquad L_4^- = \begin{cases} x = a, & f_1(a) \leq y \leq f_2(a). \\ y = y \end{cases}$$

Calcule-se

$$\int_{L^+} \varphi(x,y)dx.$$

Tem-se que

$$\int_{L^+} \varphi(x,y)dx = \int_{L_1} \varphi(x,y)dx + \int_{L_2} \varphi(x,y)dx + \int_{L_3} \varphi(x,y)dx + \int_{L_4} \varphi(x,y)dx.$$

Os integrais ao longo de L_2 e L_4 são nulos, pelo que

$$\begin{aligned}\int_{L^+} \varphi(x,y)dx &= -\int_a^b \varphi(x, f_2(x)) - \varphi(x, f_1(x))dx \\ &= -\iint_D \frac{\partial \varphi}{\partial y} dxdy.\end{aligned}$$

Este resultado estende-se ao caso de um domínio D que se possa decompor num número finito de domínios do tipo precedente.

Por um processo análogo pode estabelecer-se que se $\psi(x, y)$ for uma função contínua e continuamente derivavel em ordem a x em D, então

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial \psi}{\partial x} dxdy &= \int_a^b \varphi(x, f_2(x)) - \varphi(x, f_1(x)) dx \\ &= \int_{L^+} \psi(x, y) dy\end{aligned}$$

pelo que

$$\int_{L^+} \varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dxdy.$$

A esta igualdade chama-se *fórmula de Riemann-Green.*

Exemplo

Calcule-se o integral curvilíneo

$$\int_{L^+} (-3xy^2)dx + (3x^2y+1)dy,$$

considerado no exemplo anterior, através do cálculo de um integral duplo.

Exemplo (continuação)

A função $\varphi(x, y) = -3xy^2$ é contínua e continuamente derivavel em ordem a y, a função $\psi(x, y) = 3x^2y + 1$ é contínua e continuamente derivavel em ordem a x. Por aplicação da fórmula de Riemann-Green tem-se que:

$$\int_{L^+} (-3xy^2)dx + (3x^2y + 1)dy = \iint_D \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) dxdy$$
$$= 12 \iint_D xy\, dxdy.$$

Exemplo (continuação)

Fazendo a mudança de variáveis para coordenadas polares, tem-se

$$D = \begin{cases} x = \rho\cos\theta, & 0 \le \rho \le 1 \\ y = \rho\sin\theta, & \frac{\pi}{4} \le \theta < \frac{2\pi}{3}, \end{cases}$$

pelo que

$$\begin{aligned} 12\iint_D xy\, dxdy &= 12\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\int_0^1 \rho^3 \cos\theta\sin\theta\, d\rho\right) d\theta \\ &= 12\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \cos\theta\sin\theta\right)\, d\theta = 3\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \\ &= \frac{3}{2}\left(\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Integrais triplos. Definição, propriedades

Seja $f(x, y, z)$ uma função contínua num conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ fechado e limitado e seja P um paralelepípedo contido em D de faces paralelas aos planos coordenados. A definição de integral triplo de f em P é análoga à de integral duplo de uma função contínua num retângulo. Consideremos uma partição de P em n paralelepípedos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de faces paralelas aos planos coordenados, e designe-se por V_k o volume do paralelepípedo P_k. Em cada um dos novos paralelepípedos escolha-se um ponto arbitrário; designe-se por (x_k^*, y_k^*, z_k^*) o ponto escolhido no paralelepípedos P_k. Efetue-se o produto

$$f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)V_k$$

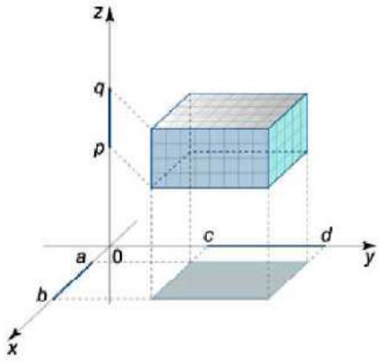

Figura: Partição de um domínio paralelepipédico.

e em seguida a soma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\, V_k .$$

A esta soma, tal como na definição de integral duplo num retângulo, chama-se soma de Riemann, relativa à partição considerada.
Repita-se este processo efetuando partições de forma a que o comprimento, a largura e a altura de cada um dos paralelepípedos se aproxime de zero e n tenda para infinito.

Ao limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) V_k$$

chama-se *integral triplo de f em P* e representa-se por

$$\iiint_P f(x, y, z) dxdydz.$$

É possível mostrar que a continuidade de $f(x, y, z)$ em D, é condição suficiente para a existência do limite anterior.

O integral triplo goza de propriedades semelhantes às do integral duplo. Vejamos algumas delas:

Suponhamos que $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ são contínuas num paralelepípedo P com as propriedades atrás referidas. Então:

1.
$$\iiint_P (f + g)(x, y, z)dv = \iiint_P f(x, y, z)dv + \iiint_P g(x, y, z)dv,$$

2.
$$\iiint_P kf(x, y, z)dv = k \iiint_P f(x, y, z)dv, \quad k \in \mathbb{R}.$$

3. Se $f(x,y,z) \leq g(x,y,z), \quad \forall (x,y,z) \in P$, então

$$\iiint_P f(x,y,z)dv \leq \iiint_P g(x,y,z)dv;$$

em particular, se $f(x,y,z) = 0, \quad \forall (x,y,z) \in P$, então

$$0 \leq \iiint_P g(x,y,z)dv.$$

4. Se $f(x,y,z) = 1, \quad \forall (x,y,z) \in P$, então

$$\iiint_P f(x,y,z)dv = \text{volume de } P.$$

5. Se $P = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$, em que $P_1, P_2, \cdots, P_n$ são n paralelepípedos sem pontos interiores comuns, tomados dois a dois, então

$$\iiint_P f(x,y,z)dv = \iiint_{P_1} f(x,y,z)dv + \cdots + \iiint_{P_n} f(x,y,z)dv$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \iiint_{P_i} f(x,y,z)dv.$$

6.

$$\Big| \iiint_P f(x,y,z)dv \Big| \leq \iiint_P |f(x,y,z)|dv.$$

Se $|f(x,y,z)| \leq M, \ \forall (x,y,z) \in P$, então

$$\Big| \iiint_P f(x,y,z)dv \Big| \leq \iiint_R |f(x,y,z)|dv$$
$$\leq \iiint_P M\,dv = M \cdot (\text{Volume}(P)).$$

O teorema que se segue indica a forma de calcular o integral triplo de uma função contínua num paralelepípedo.

Teorema (teorema de Fubini)

Seja P o paralelepípedo definido por

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b \ \wedge \ c \leq y \leq d \ \wedge \ e \leq z \leq f\}.$$

Se $f(x, y, z)$ é contínua em P, então

$$\begin{aligned}\iiint_P f(x, y, z)dv &= \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \ldots \\ &= \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z)dz\,dy\,dx.\end{aligned}$$

Este importante teorema permite calcular um integral triplo num paralelepípedo através do cálculo de três integrais repetidos. Não será feita a demonstração deste teorema.

Exemplo

Determine-se o integral triplo da função $f(x, y, z) = x + 2yz$ *no paralelepípedo* $P = [0, 1] \times [0, 2] \times [1, 2]$. *Tem-se que*

$$\iiint_P (x + yz)dv = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_1^2 (x + 2yz)dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left[xz + yz^2 \right]_1^2 dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^2 (x + 3y)dy \right) dx = \int_0^1 (2x + 6)dx = 7.$$

Poder-se-ia ter optado por calcular o integral por outras ordens de integração.

Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto limitado. Define-se o integral triplo em D de modo semelhante ao utilizado para o integral duplo. Consideremos $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Para definir o integral triplo de f no conjunto D, comecemos por definir a seguinte função $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{se} \quad (x,y,z) \in D \\ 0 & \text{se} \quad (x,y,z) \in P \setminus D. \end{cases}$$

onde P é um paralelepípedo que contém D.

Definição

Se $\tilde{f}$ for integrável em P define-se

$$\iiint_D f(x,y,z)dv := \iiint_P \tilde{f}(x,y,z)dv.$$

Cálculo de integrais triplos.

Tendo em conta que as regiões do espaço podem ser extremamente complicadas de caracterizar o cálculo de integrais triplos em regiões arbitrárias do espaço está para além do âmbito desta disciplina. Iremos considerar apenas o cálculo de integrais triplos em domínios que se possam decompor em uniões finitas de domínios de três tipos, a saber:

Definição

1. Seja A um conjunto simples do plano XOY, $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que $f_1(x,y) \leq f_2(x,y), \forall (x,y) \in A$. Chamamos *conjunto simples do tipo I* a um conjunto da forma
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A \wedge f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\}.$$

2. Seja B um conjunto simples do plano YOZ, $u_1, u_2 : B \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que $u_1(y,z) \leq u_2(y,z), \forall (y,z) \in B$. Chamamos *conjunto simples do tipo II* a um conjunto da forma
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in B \wedge u_1(y,z) \leq x \leq u_2(y,z)\}.$$

3. Seja C um conjunto simples do plano XOZ, $v_1, v_2 : C \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que $v_1(x,z) \leq v_2(x,z), \forall (x,z) \in C$. Chamamos *conjunto simples do tipo III* a um conjunto da forma
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in C \wedge v_1(x,z) \leq y \leq v_2(x,z)\}.$$

Definição (Conjuntos básicos)

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ limitado diz-se básico se for a união de um número finito de conjuntos simples dos tipos I,II ou III, sem pontos interiores comuns tomados dois a dois.

Supondo, por exemplo, que D é um conjunto simples do tipo I, que

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x) \leq y \leq g_2(x), a \leq x \leq b\},$$

e que $h(x, y, z)$ é uma função continua em D, tem-se que

$$\begin{aligned}\iiint_D h(x,y,z)dV &= \iint_A \Big(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} h(x,y,z)dz\Big) d\sigma \\ &= \int_a^b \Big(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \Big(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} h(x,y,z)dz\Big)dy\Big)dx.\end{aligned}$$

Suponhamos que $h(x, y, z) = 1$. Então

$$\iiint_D h(x, y, z)dV = \int_a^b \Big(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \Big(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} dz \Big) dy \Big) dx$$
$$= \int_a^b \mu(x)dx.$$

em que

$$\mu(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \Big(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} dz \Big) dy$$

é a área da secção feita em D pelo plano perpendicular ao eixo dos xx e com abcissa x.

Tal como sucede nos integrais triplos com domínios de integração paralelepipédicos, em que, quando a função integranda é constante e igual a um o valor do integral triplo é numericamente igual ao volume do paralelepípedo de integração, o integral triplo da função constante igual a um de um conjunto básico é também numericamente igual ao volume do domínio de integração.

O cálculo de integrais triplos em conjuntos básicos, efetua-se decompondo-os em conjuntos do tipo I, II e III e usam-se as propriedades aditivas do integral.

Exemplo

Sendo

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon 0\leq x\leq 1\wedge 0\leq y\leq 1-x^2\wedge 1-xy\leq z\leq 1+x+y\}$$

determine-se

$$\iiint_D dv.$$

O domínio D é um conjunto simples do tipo I, pelo que

$$\begin{aligned}\iiint_D dV &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x^2}\left(\int_{1-xy}^{1+x+y} dz\right) dy\right) dx\\ &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x^2}(x+y+xy)dy\right) dx\\ &= \int_0^1\left(x(1-x^2)+\frac{(1-x^2)^2}{2}(1+x)\right) dx = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Mudança de variáveis

Seja

$$\begin{aligned} T = (\varphi, \psi, \theta) : \; D^* \subset \mathbb{R}^3 &\to D \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) &\mapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

onde D^* e D são conjuntos básicos, T é uma bijecção de D^* sobre D e $x = \varphi(u, v, w), y = \psi(u, v, w), z = \theta(u, v, w)$, para $(x, y, z) \in D^*$. Suponhamos que φ, ψ e θ são continuamente deriváveis em D e que o jacobiano J da transformação T não se anula em D^*. Nas condições consideradas, e sendo $f(x, y, z)$ uma função contínua em D, tem-se que:

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz$$

$$= \iiint_{D^*} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \theta(u, v, w)) |J| dudvdw.$$

Coordenadas cilíndricas

No sistema de coordenadas cilíndricas, um ponto P é representado pelo tripleto

$$(\rho, \theta, z)$$

em que (ρ, θ) são as coordenadas polares da projeção do ponto P no plano xoy e z é a terceira coordenada cartesiana. A relação entre as coordenadas cilíndricas e cartesianas é:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

onde $\rho \geq 0, \;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi \;\;$ e $z \in \mathbb{R}$.

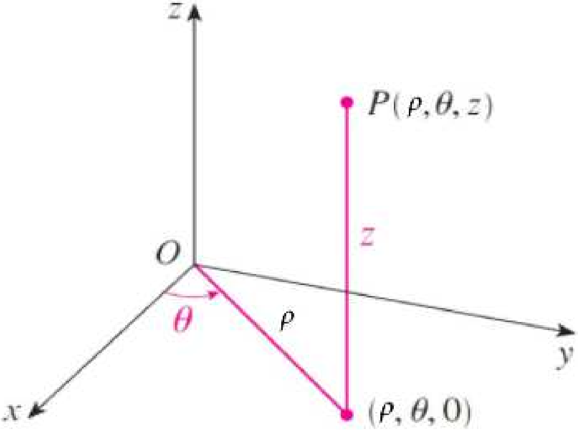

Figura: Coordenadas cilíndricas.

O jacobiano da transformação é

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

O elemento de volume é $\rho\, d\rho d\theta\, dz$.

Exemplo

Calcule-se o volume de um cone de altura h e raio r. A equação da superfície cónica que limita o domínio é

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{(h/r)^2},\ 0 \leq z \leq h.$$

Vamos fazer a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & 0 \leq \rho \leq r \\ y = \rho\sin\theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = z, & \dfrac{h\rho}{r} \leq z \leq h \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Tem-se que

$$\begin{aligned}
vol(D) = \iiint_D dxdydz &= \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{h\rho}{r}}^{h} \rho \, dz \right) d\theta \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^r \rho \left(h - \rho \frac{h}{r} \right) d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^2 h}{2} - \frac{\rho^3 h}{3r} \right]_0^r \\
&= 2\pi \left(\frac{r^2 h}{2} - \frac{r^2 h}{3} \right) = \pi \left(\frac{r^2 h}{3} \right).
\end{aligned}$$

Coordenadas esféricas

No sistema de coordenadas esféricas, um ponto P é representado pelo tripleto

$$(r, u, v)$$

em que r é a distância do ponto P à origem, u é o ângulo que o vetor $\overrightarrow{OP}$ faz com o eixo dos zz e o ângulo v tem o mesmo significado que o ângulo θ das coordenadas cilíndricas. A relação entre as coordenadas esféricas e cartesianas é:

$$\begin{cases} x = r \sin u \cos v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r \cos u \end{cases}$$

onde $r \geq 0$, $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

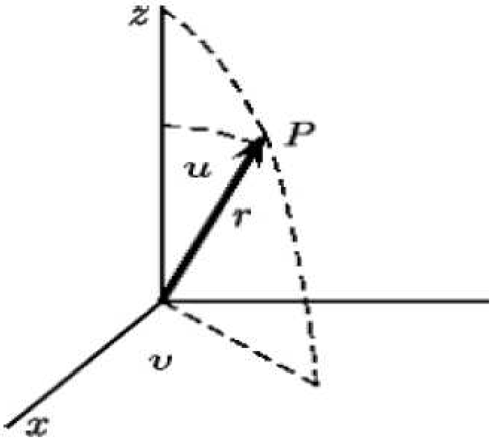

Figura: Coordenadas esféricas.

O jacobiano é dado por

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,u,v)} = \begin{vmatrix} \sin u \cos v & r\cos u \cos v & -r \sin u \sin v \\ \sin u \sin v & r \cos u \sin v & r \sin u \cos v \\ \cos u & -r \sin u & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin u.$$

O elemento de volume é $r^2 \sin u \, dr \, du \, dv$.

Exemplo

Calcule o volume da esfera de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2.$$

Vamos fazer a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = r \sin u \cos v, & 0 \leq r \leq a \\ y = r \sin u \sin v, & 0 \leq u \leq \pi \\ z = r \cos u, & 0 \leq v \leq 2\pi. \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Tem-se que

$$
\begin{aligned}
vol(D) = \iiint_D dxdydz = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{a} r^2 \sin u \, dr \right) du \right) dv \\
= 2\pi \left(\int_0^{\pi} \sin u \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a \right) du \\
= \frac{2\pi a^3}{3} [-\cos u]_0^{\pi} = \frac{4\pi a^3}{3}.
\end{aligned}
$$

Volumes de domínios limitados por superfícies de revolução

Suponhamos que se pretende determinar o volume do domínio limitado pelos planos $z = a, z = b$ $(a < b)$ e pela superfície gerada pela linha do plano XoZ, gráfico da função continua e positiva $x = f(z)$, $a \le z \le b$, quando esta linha efectua uma rotação de amplitude de 2π radianos em torno do eixo dos ZZ. Utilizando coordenadas cilíndricas, o domínio é descrito por

$$\begin{cases} x = \rho \cos u, & a \le z \le b \\ y = \rho \sin u, & 0 \le u \le 2\pi \\ z = z, & 0 \le \rho \le f(z) \end{cases}$$

e o volume é dado pelo integral triplo

$$
\begin{aligned}
vol(D) &= \iiint_D dxdydz = \int_a^b dz \int_0^{2\pi} dv \int_0^{f(z)} \rho \, d\rho \\
&= 2\pi \int_a^b \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{f(z)} dz = \pi \int_a^b \left[\rho^2\right]_0^{f(z)} dz \\
&= \pi \int_a^b [f(z)]^2 \; dz.
\end{aligned}
$$

Quando o domínio cujo volume se pretende calcular é limitado por uma superfície de revolução em torno do eixo dos XX ou do eixo dos YY tudo se passa de forma análoga.

Exemplo

Iremos calcular o volume do domínio limitado pelo elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$$

por vários processos.

(i) Como domínio de revolução. Trata-se de um domínio que se obtém pela rotação, de amplitude de 2π *radianos, da linha do plano* XOZ,

$$z = f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}, \ -2 \leq x \leq 2,$$

em torno do eixo dos XX.
Utilizando coordenadas cilíndricas o domínio é representado por:

Exemplo (continuação)

$$\begin{cases} x = x, & -2 \leq x \leq 2 \\ y = \rho \sin\theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = \rho\cos\theta, & 0 \leq \rho \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \end{cases}$$

e o seu volume é dado por

$$\int_{-2}^{2}\Big(\int_{0}^{2\pi}\Big(\int_{0}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \rho\, d\rho\Big) d\theta\Big) dx$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} \Big[\frac{\rho^2}{2}\Big]_{0}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx = \pi \int_{-2}^{2} \Big(1 - \frac{x^2}{4}\Big) dx$$

$$= \pi \Big[x - \frac{x^3}{12}\Big]_{-2}^{2} = \pi\Big(2 - \frac{8}{12} - (-2) + \frac{(-2)^3}{12}\Big)$$

$$= \pi\Big(4 - \frac{4}{3}\Big) = \frac{8\pi}{3}.$$

Exemplo (continuação)

(ii) Por mudança de coordenadas. O domínio pode ser descrito por:

$$\begin{cases} x = 2\rho \sin u \cos v, & 0 \leq \rho \leq 1 \\ y = \rho \sin u \sin v, & 0 \leq u \leq \pi \\ z = \rho \cos u, & 0 \leq v \leq 2\pi. \end{cases}$$

Esta mudança de variáveis, corresponde a uma das variantes das coordenadas esféricas, e é usualmente designada por coordenadas elípticas.

O volume é dado por

$$\int_0^{\pi} du \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 2\rho^2 \sin u \, d\rho = 2\pi \left[\frac{2\rho^3}{3}\right]_0^1 [-\cos u]_0^{\pi} = \frac{8\pi}{3}.$$

Exemplo (continuação)

(iii) Por áreas de secções planas.
Para cada x *no intervalo* $]2,2[$, *tem-se que*

$$y^2+z^2 = 1-\frac{x^2}{4} = \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^2$$

é a equação da circunferência com centro $(x,0,0)$ *e raio* $\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ *que tem por área*

$$A_0 = \pi\left(1-\frac{x^2}{4}\right).$$

O volume é dado por

$$\int_{-2}^{2}\pi\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx = \pi\left[x-\frac{x^3}{12}\right]_{-2}^{2} = \frac{8\pi}{3}.$$

Exemplo (continuação)

(iv) Usando coordenadas cartesianas. O volume é dado por

$$\int_{-2}^{2}\Big(\int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\Big(\int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}} dz\Big)dy\Big)dx$$

$$= 2\int_{-2}^{2}\Big(\int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\sqrt{(1-\frac{x^2}{4})-y^2}\,dy\Big)dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[\left(y\sqrt{(1-\frac{x^2}{4})-y^2}+(1-\frac{x^2}{4})\arcsin\frac{y}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\right)\right]_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}dx$$

$$= \pi\int_{-2}^{2}\Big(1-\frac{x^2}{4}\Big)dx = \frac{8\pi}{3}.$$

Exemplo

Determine o valor do integral

$$\iiint_D 2(y+1)dxdydz,$$

sendo D o domínio fechado limitado pelas superfícies que se obtêm por rotação de amplitude 2π radianos em torno do eixo dos YY das linhas do plano YZ:

$$z - 2y = 0 \quad \wedge \quad y - 2z = 0, \;\; \textit{com}\ 0 \leq z \leq \frac{1}{2}.$$

Exemplo (continuação)

O domínio em questão, utilizando coordenadas cilíndricas, é representado por

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & 0 \leq y \leq \frac{1}{4} \\ y = y, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = \rho\sin\theta, & 2y \leq \rho \leq \sqrt{y} \end{cases}$$

e o volume pode ser calculado a partir do seguinte integral triplo:

Exemplo (continuação)

$$\iiint_D 2(y+1)dxdydz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{1}{4}}\left(\int_{2y}^{\sqrt{y}} 2(y+1)\rho\, d\rho\right)dy\right)d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{1}{4}}(y+1)\left[\rho^2\right]_{2y}^{\sqrt{y}}dy = 2\pi\int_0^{\frac{1}{4}}(y+1)(y-4y^2)\,dy$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{1}{4}}(-4y^3+y-3y^2)\,dy$$

$$=2\pi\left[-y^4+\frac{y^2}{2}-y^3\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$=2\pi\left(-\frac{1}{256}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}\right)$$

$$=\pi\left(\frac{3}{128}\right).$$

Superfícies

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto fechado e

$$\begin{aligned} P : D \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto (x,y,z) = (\varphi(u,v), \psi(u,v), \theta(u,v)) \end{aligned}$$

uma função contínua. Chama-se *superfície* S ao contradomínio de P (em $\mathbb{R}^3$). Se as equações que definem a superfície S são da forma

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v), \quad (u,v) \in D \; . \\ z = \theta(u,v) \end{cases}$$

diz-se que a superfície está dada na *forma paramétrica*, e às equações consideradas chama-se *equações paramétricas* da superfície.

Fixado em $\mathbb{R}^3$ um referencial cartesiano ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ podem escrever-se equações vetoriais da superfície

$$P = O + \varphi(u, v)\vec{i} + \psi(u, v)\vec{j} + \theta(u, v)\vec{k}$$

ou, designando $P - O$ por $\vec{r}$,

$$\vec{r} = \varphi(u, v)\vec{i} + \psi(u, v)\vec{j} + \theta(u, v)\vec{k}.$$

Exemplo

O plano que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) *e tem a direcção dos vetores linearmente independentes*

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

admite as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) = x_0 + a_1 u + b_1 v \\ y = \psi(u, v) = y_0 + a_2 u + b_2 v, \quad u, v \in \mathbb{R} \, . \\ z = \theta(u, v) = z_0 + a_3 u + b_3 v \end{cases}$$

a que corresponde a equação vectorial

$$P = O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + u(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + v(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}),$$

com $u, v \in \mathbb{R}$.

Definição

Dada uma representação paramétrica

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \quad (u, v) \in D \; . \\ z = \theta(u, v) \end{cases}$$

de uma superfície diz-se que a representação paramétrica é *regular* se as funções φ, ψ, θ são continuamente derivaveis em D e os jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}$$

não se anulam simultaneamente em D, isto é,

$$\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 > 0, \forall (u, v) \in D.$$

Se estas condições não se verificarem em algum ponto de D, esse ponto diz-se *ponto singular* (relativamente à representação paramétrica considerada). Os pontos onde as condições atrás referidas se verificam dizem-se pontos *regulares* relativamente à representação paramétrica considerada. Uma superfície diz-se *regular* se admitir, pelo menos, uma repre- sentação paramétrica regular.

Seja S uma superfície e

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \quad (u, v) \in D \\ z = \theta(u, v) \end{cases} .$$

uma sua representação paramétrica. Suponhamos que o ponto

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0), \theta(u_0, v_0))$$

é um ponto regular.

Consideremos os vectores:

$$\vec{t}_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}\right)_{(u_0,v_0)} \quad \text{e} \quad \vec{t}_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}\right)_{(u_0,v_0)}.$$

Tem-se que

$$\vec{t}_1 \times \vec{t}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k}\right)_{(u_0,v_0)}$$

o que permite afirmar que $\vec{t}_1, \vec{t}_2$ são linearmente independentes, pelo que definem a orientação de um plano.

Ao plano que passa por P_0 e tem a orientação de $\vec{t_1}$ e $\vec{t_2}$ chama-se *plano tangente à superfície* em P_0. Uma equação vectorial deste plano é

$$T = O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + \alpha\vec{t_1} + \beta\vec{t_2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Escrevendo a equação da superfície na forma vetorial

$$\overrightarrow{OP} = \varphi(u,v)\vec{i} + \psi(u,v)\vec{j} + \theta(u,v)\vec{k}$$

tem-se que

$$\vec{t_1} = \frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial u}(u_0,v_0) \quad , \quad \vec{t_2} = \frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial v}(u_0,v_0)$$

e a equação anterior pode ser escrita na forma

$$T = O + \overrightarrow{OP}(u_0,v_0) + \alpha\frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial u}(u_0,v_0) + \beta\frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial v}(u_0,v_0), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

O plano considerado admite as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ y = y_0 + \alpha \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \, . \\ z = z_0 + \alpha \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{cases}$$

Chama-se *recta normal* a superfície em P_0 à recta que passa por P_0 e é perpendicular ao plano tangente à superfície nesse ponto.

Uma equação vetorial da recta normal será

$$N = O + x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j} + z_0 \vec{k} + \lambda(\vec{t_1} \times \vec{t_2}), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente

$$N = O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + \lambda\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k}\right)_{(u_0,v_0)}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$. Esta recta admite as seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0) \\ y = y_0 + \lambda\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.\ . \\ z = z_0 + \lambda\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0) \end{cases}$$

Suponhamos agora que uma superfície é representada por uma equação da forma

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

em que $f(x, y)$ é uma função continuamente derivável em D. Trata-se uma equação cartesiana da superfície A, que admite a seguinte representação paramétrica regular

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y, \\ z = f(x, y), \end{cases} \qquad (x, y) \in D \; .$$

A regularidade da representação paramétrica é consequência imediata de $f(x, y)$ ser, por hipótese, continuamente derivável e de se ter

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \forall (x, y) \in D.$$

Neste caso, dado $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tem-se que

$$\vec{t_1} = \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)k \quad \text{e} \quad \vec{t_2} = \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k.$$

O plano tangente à superfície em P_0 pode ser representado pelas seguintes equações:
equação vectorial:

$$T = O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + f(x_0, y_0)\vec{k} + \alpha \left(\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{k} \right) + \beta \left(\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{k} \right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \\ y = y_0 + \beta \\ z = f(x_0, y_0) + \alpha \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \beta \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

equação cartesiana:

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Tem-se que

$$\vec{t_1} \times \vec{t_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j} + \vec{k}$$

e as seguintes equações representam a recta normal em P_0:

equação vectorial:

$$N = O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + \alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j} - \vec{k}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ y = y_0 + \alpha\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 - \alpha \end{cases}$$

Se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ a recta normal admite a seguinte equação cartesiana:

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Consideremos agora uma equação da forma

$$F(x, y, z) = 0$$

e seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ tal que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Suponhamos ainda que $F(x, y, z)$ é continuamente derivavel numa vizinhança de P_0 e que, além disso, $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.
O teorema das funções implícitas permite-nos afirmar que a equação $F(x, y, z) = 0$ define implicitamente, numa vizinhança de (x_0, y_0), uma superfície regular de equação $z = f(x, y)$.

Determinemos equações do plano tangente e da recta normal a essa superfície no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Tem-se, pelo que foi visto anteriormente, que

$$
\begin{aligned}
T = & O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + \alpha\left(\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{k}\right) \\
& + \beta\left(\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{k}\right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Atendendo a que

$$
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}
$$

obtém-se a seguinte equação vectorial para o plano tangente

$$
\begin{aligned}
T = & O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + \alpha\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\vec{i} - \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\vec{k}\right) \\
& + \beta\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\vec{j} - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\vec{k}\right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

a que correspondem as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ y = y_0 + \beta \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0), \\ z = z_0 - \alpha \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) - \beta \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

e a equação cartesiana

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Têm-se também as seguintes equações para a recta normal em P_0:

equação vectorial:

$$\begin{aligned} N &= O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + \lambda\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\vec{j} - \vec{k}\Big) \\ &= O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} \\ &\quad + \lambda\Big(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\vec{k}\Big), \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \\ y = y_0 + \lambda\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + \lambda\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{cases}$$

Se $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, tem-se a equação cartesiana:

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Exemplo

Determinem-se equações vectoriais, paramétricas e cartesianas do plano tangente e da recta normal à superfície de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = u + v, & -1 \leq u \leq 1 \\ z = u^2 + 4v, & 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

no ponto $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, 2\right)$ *correspondente a* $\left(u = 0, v = \dfrac{1}{2}\right)$.

Tem-se

$$\begin{aligned} \vec{t_1} &= 2u\,\vec{i} + \vec{j} + 2u\,\vec{k} \\ \vec{t_2} &= -2v\,\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k} \end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

que, no ponto em questão, tomam a forma

$$\vec{t}_1 = \vec{j} \;\; e \;\; \vec{t}_2 = -\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}.$$

Uma equação vectorial do plano tangente é

$$T = O - \frac{1}{4}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + 2\vec{k} + \alpha\vec{j} + \beta(-\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} - \beta \\ y = \dfrac{1}{2} + \alpha + \beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 4\beta, \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

uma equação cartesiana é

$$4x + z - 1 = 0.$$

Como se tem

$$\vec{t}_1 \times \vec{t}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + \vec{k}.$$

uma equação vectorial da recta normal é

$$N = O - \frac{1}{4}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + 2\vec{k} + \lambda(4\vec{i} + \vec{k}), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

Exemplo (continuação)

equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} + 4\lambda \\ y = \dfrac{1}{2}, \\ z = 2 + \lambda, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

e uma equação cartesiana é dada por

$$\begin{cases} x - 4z + \dfrac{33}{4} = 0 \\ y = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Área de uma superfície

Considere-se uma superfície S, gráfico da função $z = f(x, y)$, com $(x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2$, onde A é um conjunto simples.
Consideremos uma partição do domínio A em domínios A_i, simples.
Sejam σ_i a área de cada domínio A_i e $Q_i = (\xi_i, \zeta_i) \in A_i$. Seja P_i o ponto de S que se projecta em Q_i, isto é,

$$P_i = (\xi_i, \zeta_i, z_i) = (\xi_i, \zeta_i, f(\xi_i, \zeta_i)).$$

Consideremos os planos tangentes à superfície S em cada ponto P_i e as porções desses planos que se projectam (paralelamente ao eixo dos zz) em cada um dos conjuntos A_i correspondentes. Seja τ_i a área da porção do plano tangente em P_i que se projecta no conjunto A_i.

O plano tangente a S, de equação $z = f(x, y)$ no ponto $P_i = (\xi_i, \zeta_i, z_i)$ tem, como se viu anteriormente, por equação

$$z - z_i = \frac{\partial f}{\partial x}(Q_i)(x - \xi_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(Q_i)(y - \zeta_i)$$

ou ainda

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(Q_i)(x - \xi_i) - \frac{\partial f}{\partial y}(Q_i)(y - \zeta_i) + z - z_i = 0.$$

Seja α_i o ângulo que esse plano faz com o plano xy (isto é, $z = 0$). Dados dois planos de equações

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ e } A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

fazendo entre si um ângulo α, tem-se que

$$\cos\alpha = \frac{|(A, B, C) \cdot (A', B', C)|}{\|(A, B, C)\| \ \|(A', B', C)\|},$$

pelo que o cosseno do ângulo entre os planos

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(Q_i)(x-\xi_i)-\frac{\partial f}{\partial y}(Q_i)(y-\zeta_i)+z-z_i \ =0 \text{ e } z=0$$

é

$$\cos\alpha_i=\frac{|(A,B,C)\cdot(A',B',C)|}{\|(A,B,C)\|\ \|(A',B',C)\|},$$

uma vez que

$$\sigma_i=\cos\alpha_i\,\tau_i.$$

Vem que

$$\tau_i=\sqrt{1+\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(Q_i)\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(Q_i)\Big)^2}\cdot\sigma_i.$$

Somando todas estas áreas

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(Q_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(Q_i)\right)^2} \cdot \sigma_i$$

e fazendo tender para zero a norma da partição do domínio A, obtém-se a área da superfície considerada, isto é,

$$area(S) = \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Exemplo

Calcule a área da superfície S de equação

$$z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4.$$

Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$. *A área pretendida é dada por*

$$area(S) = \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$$

$$= \iint_A \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dxdy.$$

Utilizando coordenadas polares para representar o domínio A vem que

$$A = \begin{cases} x = \rho\cos\theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad com |J| = \rho. \\ y = \rho\sin\theta, & 0 \leq \rho \leq 2, \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Vem que

$$\begin{aligned} area(S) &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\, d\rho d\theta \\ &= 2\pi\left[\frac{(1+4\rho^2)^{3/2}}{12}\right]_0^2 = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1). \end{aligned}$$

2. Calcule a área da parte da superfície do parabolóide $y^2+z^2=2x$ *limitada pelo plano* $x=\frac{3}{2}$*.*
Escrevendo o parabolóide na forma

$$x=\frac{1}{2}(y^2+z^2)$$

e projectando no plano yz*, uma resolução análoga à do exemplo anterior permite obter o valor* $\dfrac{14}{3}\pi$*.*

Exemplo (continuação)

Mas se se pretender que a região de projecção esteja no plano xy tem de se escrever o parabolóide na forma $z^2 = 2x - y^2$, *que dá origem a duas expressões*

$$z = \sqrt{2x - y^2} = f(x, y) \text{ e } z = -\sqrt{2x - y^2} = g(x, y).$$

Então

$$area(S) = \iint_{A_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy + \iint_{A_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Exemplo (continuação)

Como

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 \ \ e\ A_1=A_2$$

esta expressão simplifica-se para

$$area(S)=2\iint_{A_1}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}dxdy.$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{2x-y^2}},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{2x-y^2}}$$

e

$$A_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0\le x\le\frac{3}{2},-\sqrt{2x}\le y\le\sqrt{2x}\right\}$$

Exemplo (continuação)

vem que

$$\begin{aligned}
area(S) &= 2\int_0^{\frac{3}{2}}\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2x-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{2x-y^2}}\right)^2}dydx\\
&= 2\int_0^{\frac{3}{2}}\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}}\sqrt{1+\frac{1}{2x-y^2}+\frac{y^2}{2x-y^2}}dydx\\
&= \int_0^{\frac{3}{2}}\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}}\sqrt{\frac{2x+1}{2x-y^2}}dydx\\
&= 2\int_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{2x+1}\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}}\frac{1}{\sqrt{2x-y^2}}dydx.
\end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Uma primitiva da função $\dfrac{1}{\sqrt{2x-y^2}}$ *em ordem a y é dada por* $\arctan\left(\dfrac{y}{\sqrt{2x-y^2}}\right)$; *consequentemente*

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2x+1}\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \frac{1}{\sqrt{2x-y^2}}dydx\\
&= 2\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2x+1}\left[\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{2x-y^2}}\right)\right]_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}}dx\\
&= 2\int_0^{\frac{3}{2}} \pi\sqrt{2x+1}\,dx = \pi\left[\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\right]_0^{\frac{3}{2}}\\
&= 2\frac{\pi}{3}\left(\left(2\frac{3}{2}+1\right)^{3/2}-1\right) = \frac{14\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Suponhamos agora que a superfície S é definida pela representação paramétrica regular

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \quad (u, v) \in D \\ z = \theta(u, v) \end{cases}.$$

Suponhamos ainda que a aplicação $T = (\varphi, \psi)$ é invertível e que $J = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$ (prova-se que nestas condições J tem sinal constante); então T é invertível, isto é, existe $T^{-1} = (g, h)$ (com $u = g(x, y), v = h(x, y)$, $(x, y) \in A$) e assim

$$z = \theta(u, v) = \theta(g(x, y), h(x, y)) = f(x, y), (x, y) \in A.$$

Sabe-se que

$$area(S) = \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

Efectuemos neste integral duplo a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v). \end{cases}$$

Comecemos por determinar $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ nas variáveis u e v. Tem-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Para determinar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ derivem-se em ordem a x as equações

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v). \end{cases}$$

Tem-se que

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

donde vem que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial u} \end{cases}, \quad \text{com } J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

De forma análoga se mostra que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial u}. \end{cases}$$

Então:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Calculemos agora

$$1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

Tem-se

$$
\begin{aligned}
& 1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \\
= & 1+\frac{1}{J^2}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{J^2}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \\
= & 1+\frac{1}{J^2}\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right) \\
= & 1+\frac{1}{J^2}\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right. \\
& \left.+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right).
\end{aligned}
$$

Tendo em conta que

$$
J=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}
$$

e que

$$1 = \frac{1}{J^2}J^2 = \frac{1}{J^2}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right)$$

vem que

$$1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{1}{J^2}\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{J^2}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right.$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2$$

$$\left. + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right).$$

Sendo

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

a expressão anterior pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{J^2}(EG - F^2).$$

Então

$$\begin{aligned} area(S) &= \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \\ &= \iint_D \sqrt{\frac{1}{J^2}(EG - F^2)}\,|J|\,du\,dv = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv \end{aligned}$$

Exemplo

Considere-se a superfície S definida parametricamente por

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v, & 0 \leq u \leq 2 \\ z = u^2, & 0 \leq v \leq 2\pi \end{cases}$$

que representa a secção do parabolóide

$$z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4.$$

Tem-se que

$$E = \cos^2 v + \sin^2 v + (2u)^2 = 1 + 4u^2, G = u^2, F = 0.$$

Seja A o círculo centrado em $(0,0)$ e de raio 2.

Exemplo (continuação)

Tem-se que

$$\begin{aligned} area(S) &= \iint_A \sqrt{EG - F^2} dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 u\sqrt{1+4u^2}\, dudv \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{12}(1+4u^2)^{3/2} \right]_0^2 \\ &= \frac{2\pi}{12}(17^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1). \end{aligned}$$

Superfícies de revolução

Considere-se a superfície gerada pela linha do plano XOZ gráfico da função $z = \varphi(x),\ 0 \leq a \leq x \leq b$, quando efectua uma rotação de um ângulo α em torno do eixo OZ, no sentido directo.
Tomando como parâmetros u e v as coordenadas polares no plano XOY ($x = u$ no plano XOZ) a superfície admite as seguintes equações paramétricas

$$\begin{cases} x = u\cos v, & 0 \leq v \leq \alpha \\ y = u\sin v, & a \leq u \leq b \\ z = \varphi(u) \end{cases}$$

Calcule-se E, G e F:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 1 + (\varphi'(u))^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = u^2,$$

$$\text{e } F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Sendo $A = [a, b] \times [0, \alpha]$, a área da superfície é dada por

$$\begin{aligned} area(S) &= \iint_A \sqrt{EG - F^2} dudv \\ &= \int_0^\alpha \int_0^1 \sqrt{u^2(1 + (\varphi'(u))^2)}\, dudv \\ &= \int_0^\alpha \int_0^1 |u| \sqrt{1 + (\varphi'(u))^2}\, dudv. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que a linha geratriz da superfície de revolução é representada pela função não negativa $x = \psi(z)$, $a \leq z \leq b$, e que esta efectua uma rotação de um ângulo de amplitude α em torno do eixo dos zz, no sentido directo. Tomando para parâmetros $u = z$ e v o ângulo contado no plano xy a partir do semi-eixo positivo dos xx e no sentido directo, a superfície admite as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = \psi(u)\cos v, & 0 \leq v \leq \alpha \\ y = \psi(u)\sin v, & a \leq u \leq b \\ z = u \end{cases}$$

Os valores de E, F e G são:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 1 + (\psi'(u))^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = (\psi(u))^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Sendo $A = [a, b] \times [0, \alpha]$, a área da superfície é dada por

$$\begin{aligned} area(S) &= \iint_A \sqrt{EG - F^2}\, dudv \\ &= \int_0^\alpha \int_a^b \sqrt{(\psi(u))^2(1 + (\psi'(u))^2)}\, dudv \\ &= \int_0^\alpha \int_a^b |\psi(u)| \sqrt{1 + (\psi'(u))^2}\, dudv. \end{aligned}$$

Exemplo

Determine a área da superfície obtida quando a linha do plano yz,

$$z^2 + (y-1)^2 = 1, \quad 0 \le z \le 1, \quad 0 \le y \le 1$$

efectua uma rotação de 2π radianos em torno do eixo dos zz.

Processo 1. Podemos escrever a linha na forma

$$z = \sqrt{1-(u-1)^2} = \varphi(u), 0 \le z \le 1.$$

A superfície assim obtida admite as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = u\cos v, & 0 \le v \le 2\pi \\ y = u\sin v, & 0 \le u \le 1 \\ z = \varphi(u) = \sqrt{1-(u-1)^2} & \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Então

$$E = 1 + \left(\frac{1-u}{\sqrt{1-(u-1)^2}}\right)^2, G = u^2, F = 0$$

e

$$area(S) = \iint_A \sqrt{EG - F^2} dxdy = 2\pi \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-(u-1)^2}}\, du.$$

Fazendo a mudança de variável $u = t + 1$*, vem que:*

$$2\pi \int_{-1}^0 \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = 2\pi[-\sqrt{1-t^2}]_{-1}^0 + [\arcsin t]_{-1}^0 = \pi(\pi - 2).$$

Exemplo (continuação)

Processo 2. A superfície admite também a seguinte parametrização:

$$\begin{cases} x = (1 - \sqrt{1-u^2})\sin v, & 0 \le v \le 2\pi \\ y = (1 - \sqrt{1-u^2})\cos v, & 0 \le u \le 1 \\ z = u \end{cases}$$

Então

$$E = \frac{1}{1-u^2}, G = (1 - \sqrt{1-u^2})^2, F = 0$$

e

$$\begin{aligned} area(S) &= \iint_A \sqrt{EG - F^2}dxdy \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-\sqrt{1-u^2})^2}{1-u^2}}\, du \end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}}\, du \\
&= 2\pi[\arcsin u - u]_0^1 \\
&= 2\pi\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \\
&= \pi(\pi - 2).
\end{aligned}
$$

Gradiente.

Considere-se a função real $\varphi(x, y, z)$ definida e continuamente derivável num domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^3$, isto é, um *campo escalar.* Definiu-se *gradiente* da função φ ou gradiente do campo escalar φ num ponto $P \in D$ ao vector

$$\vec{v} = grad(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

O gradiente faz corresponder a cada ponto um vector, isto é, o gradiente pode ser interpretado como um operador que transforma um campo escalar num campo vectorial.

Exemplo

Se $\varphi(x,y,z) = xy - z^2$ *então*

$$grad(\varphi) = y\vec{i} + x\vec{j} - 2z\vec{k}.$$

No ponto $(1,1,1)$ *tem-se* $grad(\varphi)_{(1,1,1)} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

Vejamos, em seguida, algumas propriedades do gradiente:

1. Sejam $\varphi(x,y,z)$ e $\psi(x,y,z)$ dois campos escalares, definidos e continuamente deriváveis num domínio aberto D, então tem-se:

1. $grad(\varphi + \psi) = grad(\varphi) + grad(\psi)$,
2. $grad(a\,\varphi) = a\,grad(\varphi)$,
3. $grad(\varphi\psi) = grad(\varphi)\,\psi + \varphi\,grad(\psi)$,
4. $grad(\dfrac{\varphi}{\psi}) = \dfrac{grad(\varphi)\psi - \varphi grad(\psi)}{\psi^2}$.

Demonstração: Vejamos, por exemplo, (c):

$$
\begin{aligned}
grad(\varphi\psi) =& \frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi\psi)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi\psi)\vec{k} \\
=& \left(\frac{\partial}{\partial x}(\varphi)\psi + \varphi\frac{\partial}{\partial x}(\psi)\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}(\varphi)\psi + \varphi\frac{\partial}{\partial y}(\psi)\right)\vec{j} \\
+& \left(\frac{\partial}{\partial z}(\varphi)\psi + \varphi\frac{\partial}{\partial z}(\psi)\right)\vec{k} \\
=& \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}(\psi)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\psi)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\psi)\vec{k}\right) \\
+& \left(\frac{\partial}{\partial x}(\varphi)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi)\vec{j}\frac{\partial}{\partial z}(\varphi)\vec{k}\right)\psi \\
=& \varphi\, grad(\psi) + grad(\varphi)\psi.
\end{aligned}
$$

2. Os pontos para os quais se tem $\varphi(x, y, z) = C$, com C constante, definem o que se chama uma *superfície de nível* do campo escalar. Se esta superfície de nível tem plano tangente no ponto (a, b, c), as derivadas $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ nesse ponto são parâmetros directores da normal à superfície, e portanto $grad(\varphi)$, no ponto considerado, tem a direção da normal a superfície de nível que passa pelo ponto.
Recordemos que se tem

$$N = O + a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

3. Continuando a supor que $\varphi(x, y, z)$ é continuamente derivável num domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^3$, a derivada da função $\varphi(x, y, z)$ num ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$, segundo o vector $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ é, como se sabe, dada por

$$D_{\vec{u}}\varphi(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}_{P_0} u_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}_{P_0} u_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}_{P_0} u_3$$

que também se pode escrever na forma $grad(\varphi)_{P_0} \mid \vec{u}$.

Rotacional.

Considere-se o campo vectorial $\vec{v}$ definido num domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^3$, pela função vectorial $\vec{v} = v_1(x,y,z)\vec{i} + v_2(x,y,z)\vec{j} + v_3(x,y,z)\vec{k}$, que suporemos continuamente derivável nesse domínio. Chama-se rotacional de $\vec{v}$ num ponto $P \in D$ ao vector

$$(rot\ v)_P = \left(\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right)_P$$

O rotacional pode ser interpretado como um operador que transforma um campo vectorial num campo vectorial.

Se $rot\ \vec{v} = 0$ em todo o domínio, o campo diz-se irrotacional, e resulta imediatamente que uma condição necessária e suficiente para que o campo seja irrotacional é que se tenha

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Vejamos algumas propriedades do rotacional:

1. A definição do rotacional é independente do referencial considerado.
2. Se $grad(\varphi)$ é continuamente derivável num domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^3$ então

$$rot(grad(\varphi)) = 0$$

nesse domínio.

3. Veremos mais adiante que para certos domínios abertos de $\mathbb{R}^3$ o recíproco do teorema a que se refere a alínea anterior também é verdadeiro, isto é, se $rot\,\vec{v} = 0$, para qualquer $\vec{v}$ continuamente derivável nesse domínio, então $\vec{v}$ é o gradiente de um campo escalar.

4. Se $\vec{u}(x, y, z)$ e $\vec{v}(x, y, z)$ são dois campos vectoriais tais que $rot\,\vec{u}$ e $rot\,\vec{v}$ existem num conjunto aberto de $\mathbb{R}^3$, se φ define um campo escalar nesse domínio e existe $grad(\varphi)$ então:

1. $rot(\vec{u} + \vec{v}) = rot\,\vec{u} + rot\,\vec{v}$,
2. $rot(\varphi\vec{u}\,) = \varphi rot(\vec{u}\,) + grad(\varphi) \times \vec{u}$; em particular se $\varphi = k$ com k constante, vem que $rot(k\vec{u}\,) = k\,rot(\vec{u}\,)$, pelo que o rotacional é um operador linear.

Divergência.
Consideremos o campo vetorial definido num domínio aberto de $\mathbb{R}^3$ pela função vectorial

$$\vec{v} = v_1(x,y,z)\vec{i} + v_2(x,y,z)\vec{j} + v_3(x,y,z)\vec{k}$$

continuamente derivável nesse domínio.

Chama-se *divergência* de $\vec{v}$ num ponto $P \in D$ e escreve-se

$$(div\ \vec{v})_P = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)_P.$$

A divergência é um operador que transforma um campo vectorial num campo escalar.
Se $div\ \vec{v} = 0$ em todo o domínio, o campo diz-se *solenoidal*.

Vejamos algumas propriedades da divergência.

1. É possível provar que a definição de divergência é independente do referencial considerado.

2. Se $\vec{u}(x, y, z)$ e $\vec{v}(x, y, z)$ são dois campos vectoriais tais que existem *div u* e *div v* num conjunto aberto, se $\varphi(x, y, z)$ é um campo escalar e no domínio existe $grad(\varphi)$ então:

1. $div\,(\vec{u} + \vec{v}\,) = div\,\vec{u} + div\,\vec{v}$,
2. $div\,(\varphi\vec{v}\,) = \varphi\, div\,\vec{u} + grad(\varphi) \cdot \vec{u}$. Em particular se $\varphi = k$, com k constante, vem que $div(k\vec{u}) = k\, div(\vec{u}\,)$, pelo que a divergência é um operador linear.

Demonstração de (2.b): Tem-se que

$$
\begin{aligned}
div\,(\varphi\vec{v}) = &\ div\,(\varphi v_1\vec{i} + \varphi v_2\vec{j} + \varphi v_3\vec{k}) \\
&= \frac{\partial(\varphi v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi v_3)}{\partial z} \\
&= \varphi\frac{\partial(v_1)}{\partial x} + v_1\frac{\partial(\varphi)}{\partial x} + \varphi\frac{\partial(v_2)}{\partial y} + v_2\frac{\partial(\varphi)}{\partial y} + \varphi\frac{\partial(v_3)}{\partial z} + v_3\frac{\partial(\varphi)}{\partial z} \\
&= \varphi\Big(\frac{\partial(v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(v_3)}{\partial z}\Big) + v_1\frac{\partial(\varphi)}{\partial x} + v_2\frac{\partial(\varphi)}{\partial y} + v_3\frac{\partial(\varphi)}{\partial z} \\
&= \varphi\, div\,\vec{u} + grad(\varphi)\cdot\vec{u}
\end{aligned}
$$

3. Se v_1, v_2, v_3 são continuamente deriváveis até a segunda ordem em D, então $div(rot\,\vec{v}) = 0$.

Demonstração: Tem-se que

$$
\begin{aligned}
div(rot\,\vec{v}) =& div\left(\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right) \\
&= \frac{\partial\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)}{\partial z} \\
&= \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial y} = 0
\end{aligned}
$$

Esta propriedade dá-nos uma condição necessária para que um campo vectorial $\vec{u}$ seja o rotacional de outro campo vectorial $\vec{v}$: é necessário que $div\,\vec{u} = 0$ em todo o domínio.
Veremos mais adiante que em certos domínios esta condição também é suficiente.

O vector simbólico nabla ∇.

O vector nabla

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

tem as seguintes propriedades:

1. Aplicado a uma função escalar $\varphi(x, y, z)$ conduz ao gradiente, ou seja,

$$\nabla\varphi = grad(\varphi).$$

2. O seu produto interno com um campo vectorial $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ conduz à divergência

$$\nabla \cdot \vec{v} = div\ \vec{v}.$$

3. O seu produto externo com o vector $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ conduz ao rotacional de v, isto é,

$$\nabla \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = rot\, v.$$

Por exemplo, para dizer que $div(rot\,\vec{v}) = 0$, pode escrever-se

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{v} = 0.$$

Laplaciano.

Seja um campo escalar definido num aberto. Tem-se

$$\nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2},$$

caso existam as segundas derivadas. Ao operador $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ chama-se *laplaciano*.

Se num certo domínio D se tiver $\nabla^2 \varphi = 0$, diz-se que a função φ é harmónica nesse domínio.

Considere-se o campo vectorial $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$. Chama-se laplaciano de v, e escreve-se $\nabla^2 v$, ao vector

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \nabla^2 v_1 + \nabla^2 v_2 + \nabla^2 v_3.$$

À excepção do rotacional, as definições dadas em $\mathbb{R}^3$ estendem-se com toda a facilidade a $\mathbb{R}^n$.

Integrais curvilíneos. Campos conservativos

Considere-se em $\mathbb{R}^3$ uma linha L definida parametricamente por

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad a \leq t \leq b \\ z = \theta(t). \end{cases}$$

Seja $P(t) = (x, y, z) = (\varphi(t), \psi(t), \theta(t))$ um ponto genérico da linha e

$$\vec{u}(x, y, z) = u_1(x, y, z)\vec{i} + u_2(x, y, z)\vec{j} + u_3(x, y, z)\vec{k},$$

um campo vetorial contínuo definido num conjunto D contendo L. Consideremos uma partição de $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

Designemos por P_i a $P(t_i)$, tomemos em cada arco $\overline{P_iP_{i+1}}$ um ponto arbitrário Q_i e façamos a soma

$$S_n = \sum_{I=0}^{n-1} u(Q_i) \cdot (P_{i+1} - P_i),$$

onde $\cdot$ designa o produto interno.

Se esta soma tender para um limite finito quando a norma da partição tende para zero a esse limite chama-se *integral curvilíneo* ou *circulação da função vectorial* $\vec{u}$ ao longo da linha dada no sentido de $P(a)$ para $P(b)$, e representa-se por

$$\int_L \vec{u} dP$$

ou por

$$\int_L u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz.$$

Se a representação paramétrica da linha L for regular, prova-se que

$$\begin{aligned}\int_L \vec{u}(P)dP &= \int_a^b \vec{u}\frac{dP}{dt}dt \\ &= \int_a^b ((u_1\varphi'(t) + u_2\psi'(t) + u_3\theta'(t))dt.\end{aligned}$$

Caso a linha seja regular por secções, é possível mostrar que, o integral curvilíneo ao longo da linha pode obter-se somando os valores dos integrais correspondentes a cada um dos arcos regulares. Observe-se que a circulação de $\vec{u}$ no sentido de $P(a)$ para $P(b)$ é igual e de sinal contrário ao da circulação no outro sentido.

Exemplo

Calcule-se

$$\int_C \vec{F}\, dP,$$

onde

$$\vec{F}(x,y,z) = (3x-2y)\vec{i} + (y+2z)\vec{j} - x^2\vec{k}$$

e C é a linha definida por

$$\begin{cases} x = z^2, \\ z = y^2, \end{cases}$$

percorrida de (0,0,0) a (1,1,1).

Exemplo

Uma parametrização da linha é

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = t, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ z = t^2 \end{cases}$$

e tem-se que

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}\, dP &= \int_0^1 ((3t^4 - 2t)4t^3 + (t + 2t^2) - t^8 2t)dt \\ &= \int_0^1 (12t^7 - 8t^4 + t + 2t^2 - 2t^9)dt \\ &= \left[\frac{12}{8}t^8 - \frac{8}{5}t^5 + \frac{t^2}{2} + \frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{10}t^{10}\right]_0^1 = \frac{13}{15}. \end{aligned}$$

Seja $\vec{u}$ um campo vectorial definido e continuamente derivável num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$,

$$\vec{u}(x,y) = u_1(x,y)\vec{i} + \vec{u}_2(x,y)\vec{j}.$$

Suponhamos que existe uma função $\varphi(x,y)$ definida em D tal que $\vec{u} = grad\,\varphi$.
Nestas condições diz-se que $\vec{u}$ é *um campo conservativo* em D e a φ chama-se uma f*unção potencial* de $\vec{u}$.

Seja $\vec{u}$ um campo conservativo e φ uma sua função potencial.
Tem-se que $\vec{u} = grad\,\varphi$ isto é

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u_1 \text{ e } \frac{\partial\varphi}{\partial y} = u_2$$

que se escreve na forma diferencial

$$\partial\varphi = u_1 dx + u_2 dy.$$

Uma condição necessária para que o campo seja conservativo em D é que

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x}\,.$$

Com efeito, tem-se

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\,.$$

Sendo $\vec{u}$ continuamente derivável em D o teorema de Schwarz permite concluir que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

e portanto

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Suponhamos que o campo

$$\vec{u}(x,y) = u_1(x,y)\vec{i} + u_2(x,y)\vec{j}$$

continuamente derivável num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ é conservativo. Calculemos a sua circulação ao longo da linha regular L, contida em D, definida parametricamente por

$$\begin{cases} x = x(t), & a \leq t \leq b. \\ y = y(t) \end{cases}$$

Sejam $A = (x(a), y(a))$ e $B = (x(b), y(b))$ o início e o fim da linha. Seja φ uma função potencial de $\vec{u}$. Ao longo de L tem-se que

$$\varphi(x,y) = \varphi(x(t), y(t))$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_L \vec{u}\, dP =& \int_a^b ((u_1((x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + u_2((x(t), y(t))\frac{dy}{dt})dt \\
=& \int_a^b \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}((x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}((x(t), y(t))\frac{dy}{dt})dt\Big)dt \\
=& \int_a^b \frac{d\varphi}{dt}((x(t), y(t))dt \\
=& \varphi(x(b), y(b)) - \varphi(x(a), y(a)) \\
=& \varphi(B) - \varphi(A).
\end{aligned}
$$

Provámos que, se φ for uma função potencial de $\vec{u}$ e a linha for percorrida de A para B então

$$\int_L \vec{u}\, dP = \varphi(B) - \varphi(A),$$

isto é, num campo conservativo a circulação é independente do caminho, só depende dos extremos (este resultado ainda é válido se a linha for formada por um número finito de arcos regulares). Em particular se a linha for fechada

$$\int_L \vec{u}\, dP = 0.$$

Pode demonstrar-se que, reciprocamente, se o campo é tal que a circulação é independente do caminho então esse campo é conservativo.

Vamos agora mostrar que a condição

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

não é suficiente para garantir que um campo $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ seja conservativo.

Considere-se o campo

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j},$$

definido no conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 4\}$. Tem-se que:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Calculemos o integral ao longo da circunferência C centrada na origem e de raio 1, percorrida no sentido directo. Uma sua parametrização é

$$\begin{cases} x = \cos t, & 0 \le t \le 2\pi \\ y = \sin t. \end{cases}$$

Tem-se

$$\int_C u\, dP = \int_0^{2\pi} \Big(-\sin t(-\sin t) + \cos t(\cos t) \Big)\, dt = 2\pi.$$

Como o valor do integral é diferente de zero, o campo não é conservativo.

Teorema

Seja $\vec{u}(x,y) = u_1(x,y)\vec{i} + u_2(x,y)\vec{j}$ um campo vectorial continuamente derivável definido num conjunto aberto simplesmente conexo D. Uma condição necessária e suficiente para que $\vec{u}$ seja conservativo em D é que

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Demonstração. Já sabemos que a condição é necessária. Vejamos que também é suficiente.
Sejam (x_0, y_0) e (x, y) dois pontos de C e consideremos caminhos elementares ligando (x_0, y_0) a (x, y), isto é, caminhos formados por um número finito de segmentos de recta paralelos aos eixos coordenados e possuindo apenas pontos simples (excepto, possivelmente, os extremos) contidos em D.
É possível provar-se que existem sempre tais caminhos.

Vamos então mostrar que o integral curvilíneo

$$\int_L u_1 dx + u_2 dy$$

tem sempre o mesmo valor para quaisquer dois caminhos elementares unindo (x_0, y_0) a (x, y), desde que se verifique $\dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x}$.

Sejam L_1, L_2 dois desses caminhos, que podem coincidir ao longo de certos segmentos, com as partes não coincidentes a admitirem, no máximo, um número finito de intersecções. Tem-se assim um número finito de domínios interiores a D.
Seja D_1 um desses subdomínios. A circulação ao longo da sua fronteira no sentido positivo é igual a zero, pois pela fórmula de Riemann-Green

$$\int_{(\partial D_1)^+} u_1 dx + u_2 dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) d\sigma = 0.$$

Segue-se que o integral $\displaystyle\int_L u_1 dx + u_2 dy$ é independente do caminho elementar considerado. Fixando o ponto (x_0, y_0) o valor do integral é assim uma função de (x, y), que podemos designar $\varphi(x, y)$.

Escolhamos um caminho tal que o último segmento de recta seja paralelo ao eixo dos yy. Tem-se:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \varphi(x_0, y_0) + \int_{L_1} (u_1 dx + u_2 dy) + \int_{L_2} (u_1 dx + u_2 dy) \\ &= C + \int_{x_0}^{x} u_1(t, y_0) dt + \int_{y_0}^{y} u_2(x, t) dt.\end{aligned}$$

Tem-se que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = u_2(x, y)$ e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= u_1(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, t)dt = \; u_1(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, t)dt \\
&= u_1(x, y_0) + [u_1(x, y)]_{y_0}^{y} \\
&= u_1(x, y_0) + u_1(x, y) - u_1(x, y_0) = \; u_1(x, y),
\end{aligned}$$

isto é, $\nabla \varphi = \vec{u}$ e $\vec{u}$ é conservativo.
Tem-se então que φ é uma função potencial do campo conservativo $\vec{u}$. Se ψ for outra função potencial de $\vec{u}$ tem-se que

$$\partial \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = u_1 dx + u_2 dy$$

e portanto $\partial \varphi - \partial \psi = d(\varphi - \psi) = 0$. Isto prova que duas funções potenciais do mesmo campo conservativo diferem por uma constante.

Exemplo

Seja $\vec{u} = xy^2\vec{i} + (x^2y + y)\vec{j}$*, cujo domínio é* $D = \mathbb{R}^2$*, que é simplesmente conexo. Como se tem*

$$\frac{\partial(xy^2)}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial(x^2y + y)}{\partial x}$$

o campo vectorial $\vec{u}$ *é conservativo. Determinemos uma sua função potencial* $\varphi(x, y)$*. Tem-se que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = xy^2 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2y + y \end{cases},$$

Exemplo (continuação)

A partir da primeira equação, primitivando em ordem a x vem que

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y).$$

Derivando esta última função em ordem a y e igualando à segunda equação vem que

$$x^2y + g'(y) = x^2y + y$$

o que permite concluir que $g'(y) = y$. Uma função potencial do campo vectorial $\vec{u}$ é, por exemplo,

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(x^2y^2 + y^2).$$

Os resultados anteriores estendem-se para o caso de campos vectoriais em $\mathbb{R}^3$. Se

$$\vec{u}(x, y, z) = u_1(x, y, z)\vec{i} + u_2(x, y, z)\vec{j} + u_3(x, y, z)\vec{k}.$$

for um campo vectorial definido num domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^3$ e se existir $\varphi(x, y, z)$ tal que $\vec{u} = grad\, \varphi$ diz-se que $\vec{u}$ é conservativo e a circulação de $\vec{u}$, ao longo de qualquer linha L, contínua e seccionalmente regular contida em D só depende dos extremos da linha, isto é,

$$\int_L u\, dP = \varphi(B) - \varphi(A),$$

sendo A, B os extremos da linha percorrida de A para B.

Em particular se a linha for fechada a circulação é nula.

Reciprocamente se $\int_L \vec{u}\, dP$ for independente do caminho de integração então o campo vectorial deriva de uma função potencial $\varphi(x,y,z)$ que pode obter-se por

$$\varphi(x,y,z) =$$
$$\int_{x_0}^{x} u_1(t,y_0,z_0)dt + \int_{y_0}^{y} u_2(x,t,z_0)dt + \int_{x_0}^{x} u_3(x,y,t)dt,$$

sendo (x_0,y_0,z_0) um ponto do domínio de $\vec{u}$.

Uma condição necessária para que um campo $\vec{u}$ definido e continuamente derivável num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^3$ seja conservativo é que $rot\ \vec{u} = 0$ em D, o que é o mesmo que afirmar que

$$
\begin{aligned}
rot\ \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\vec{k} = 0
\end{aligned}
$$

donde

$$
\frac{\partial u_3}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial z}, \ \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial u_3}{\partial x}, \ \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad \forall (x, y, z) \in D.
$$

Essas condições passam a ser são suficientes se o domínio D para além de aberto também for simplesmente conexo, isto é, se

$$\vec{u}(x,y,z) = u_1(x,y,z)\vec{i} + u_2(x,y,z)\vec{j} + u_3(x,y,z)\vec{k}$$

estiver definido e for continuamente derivável num domínio aberto e simplesmente conexo D, $\vec{u}(x,y,z)$ é conservativo em D se e só se $rot\,\vec{u} = 0, \quad \forall (x,y,z) \in D$.

Uma expressão diferencial da forma

$$u_1(x,y,z)dx + u_2(x,y,z)dy + u_3(x,y,z)dz$$

diz-se uma *diferencial exacta* em $D \subset \mathbb{R}^3$ se existe $F(x,y,z)$ tal que

$$dF = u_1(x,y,z)dx + u_2(x,y,z)dy + u_3(x,y,z)dz$$

e F diz-se uma sua *primitiva*.

Tem-se que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = u_1,\ \frac{\partial F}{\partial y} = u_2,\ \frac{\partial F}{\partial z} = u_3.$$

O que foi dito anteriormente relativamente a campos conservativos permite dizer que condições devem obedecer u_1, u_2, u_3 para que $u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz$ seja uma diferencial exacta, e indica-nos ao mesmo tempo uma maneira de obter uma sua função primitiva.

Exemplo

Mostre que

$$2xz\,dx + \,z^2\,dy + \,(x^2 + 2yz)\,dz$$

é exacta e determine uma sua primitiva.
Comecemos por notar que o seu domínio é todo o $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto aberto e simplesmente conexo.
A expressão diferencial será exacta se e só se o campo

$$2xz\vec{i} + z^2\vec{j} + (x^2 + 2yz)\vec{k}$$

for conservativo, isto é, se rot $\vec{u} = 0$. Ora, com efeito,

$$rot\,(2xz\vec{i} + z^2\vec{j} + (x^2 + 2yz)\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz & z^2 & x^2 + 2yz \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Exemplo

nnnn
Calcule-se o volume do do domínio limitado pelo elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a, b, c > 0.$$

O domínio é limitado inferiormente e superiormente, respetivamente, pelos gráficos das superfícies de equação

$$z = -c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}; \quad z = c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

Designando por $V(D)$ o volume pretendido, tem-se que

$$vol(D) = \iint_A 2c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dy.$$

Exemplo (continuação)

Utilizando a mudança de coordenadas definida por

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\theta, & 0 \leq \rho \leq 1 \\ y = b\rho\sin\theta, & 0 \leq \theta < 2\pi, \end{cases}$$

tem-se que, $|J| = ab\rho$ *e* $V(D) =$

$$\begin{aligned}
\iint_A 2c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}dxdy &= 2c\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}ab\rho\,d\rho\right)d\theta \\
&= 2abc(2\pi)\left(-\frac{1}{3}\right)\left[(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= \frac{4}{3}abc\pi.
\end{aligned}$$

Calculemos agora o mesmo volume começando por determinar a área da secção por um plano paralelo ao plano XOZ.

Exemplo (continuação)

Para cada $y \in]-b, b[$. *A secção feita em* D *é uma elipse de equação*

$$\frac{x^2}{(\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2})^2}+\frac{z^2}{(\frac{c}{b}\sqrt{b^2-y^2})^2}=1.$$

Como a área da elipse de equação $\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$ *é* πAB *a área da secção considerada é*

$$\mu(y)=\pi\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\,\frac{c}{b}\sqrt{b^2-y^2}=\pi\frac{ac}{b^2}(b^2-y^2).$$

Então

$$\begin{aligned} vol(D)&=\int_{-b}^{b}\pi\frac{ac}{b^2}(b^2-y^2)dy=\pi\frac{ac}{b^2}\left[b^2y-\frac{y^3}{3}\right]_{-b}^{b}\\ &=\frac{4}{3}abc\pi. \end{aligned}$$

No caso em que se verificam as hipóteses anteriores, relativamente ao domínio D excepto a positividade das funções $f_1(x,y)$ e $f_2(x,y)$, tudo se passa de forma semelhante, pois podemos efectuar uma translação das superfícies, paralelamente ao eixo dos ZZ, e de grandeza igual a k, escolhido de forma a que se tenha $f_1(x,y)+k \geq 0$ e $f_2(x,y)+k \geq 0$. Vem então que:

$$\begin{aligned} vol(D) &= \iint_A ((f_2(x,y)+k) - (f_1(x,y)+k))dxdy \\ &= \iint_A (f_2(x,y) - f_1(x,y))dxdy. \end{aligned}$$

Exemplo

Determine o volume do domínio D limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$, lateralmente pela superfície cilindrica $x^2 + y^2 = a^2$ e inferiormente pelo plano $z = -2$. O volume é

$$vol(D) = \iint_A (x^2 + y^2 + 2)dxdy,$$

onde A é a projecção no plano XOY do domínio D.

Exemplo

Trata-se de um círculo centrado na origem do referencial e de raio a, que utilizando coordenadas polares é descrito por

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & 0 \le \rho \le a \\ y = \rho\sin\theta, & 0 \le \theta < 2\pi, \quad |J| = \rho. \end{cases}$$

$$vol(D) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a (\rho^2+2)\,\rho d\rho\right)d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^a (\rho^3 + 2\rho)\,d\rho = \pi\left(2a^2 + \frac{a^4}{2}\right).$$

Linhas em $\mathbb{R}^2$

Dada uma aplicação contínua

$$\begin{aligned} P : [a, b] &\to \mathbb{R}^2 \\ t \quad &\mapsto (x, y) = (\varphi(t), \psi(t)) \end{aligned}$$

chama-se *linha* ao contradomínio de P (em $\mathbb{R}^2$).
Quando as equações que representam a linha são da forma

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

diz-se que a equação da linha está dada na *forma paramétrica*; a t chamamos o *parâmetro* da linha.

Fixando em $\mathbb{R}^2$ um referencial cartesiano ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j})$ a equação da linha pode escrever-se na forma

$$P = O + \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j},$$

ou ainda, designando $P - O = \overrightarrow{OP}$, na forma

$$\overrightarrow{OP} = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j}.$$

Neste caso diz-se que a linha está representada por uma *equação vectorial* .

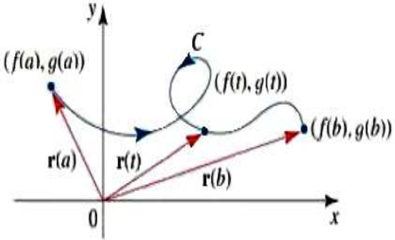

Figura: Linha no plano.

Exemplo

Em $\mathbb{R}^2$ tem-se, por exemplo, as seguintes equações de linhas

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2}, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

As definições dadas para linhas em $\mathbb{R}^2$, valem, com as adaptações óbvias para linhas no espaço euclidiano tridimensional.

Exemplo

Têm-se, por exemplo, as seguintes equações de linhas em $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2, \quad t \in \mathbb{R}\ ; \\ z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \quad t \in \mathbb{R},\ ; \\ z = t \end{cases} \quad \begin{cases} x = t \\ y = t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t^2 \end{cases}$$

Voltando a considerar uma aplicação contínua $P : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ aos pontos (em $\mathbb{R}^2$) $P(a)$ e $P(b)$ chama-se *extremos* da linha.

Se $P(a) = P(b)$ a linha diz-se *fechada*.

Definição

Diz-se que a representação paramétrica

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad a \leq t \leq b \end{cases}$$

é regular se $\varphi'(t), \psi'(t)$ existem, são continuas e não se anulam simultaneamente em $[a, b]$.

Diz-se que a representação paramétrica é *seccionalmente regular*, ou *regular por secções*, em $[a, b]$, se é regular, excepto quando muito, num número finito de pontos de $[a, b]$, nos quais existem as derivadas laterais de $\varphi(t), \psi(t)$.

Exemplo

Estude-se a regularidade da representação paramétrica.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) = \sin t & \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ y = \psi(t) = (t-\pi)^2, \end{cases}$$

Tem-se

$$\varphi'(t) = \cos t, \quad \psi'(t) = 2(t-\pi),$$

que são obviamente contínuas.
Tem-se ainda que

$$\psi'(t) = 0 \quad \textit{se e só se} \quad t = \pi.$$

Mas $t = \pi$ *não é zero de* $\varphi'(t)$. *Segue-se que a representação paramétrica é regular.*

Noção de integral curvilíneo

Considere-se em $\mathbb{R}^2$ uma linha L definida parametricamente pelas equações

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad a \leq t \leq b \end{cases}$$

Seja

$$P(t) = (x, y) = (\varphi(t), \psi(t)),$$

um ponto genérico da linha e $f(x, y)$ uma função contínua definida num domínio que contém L. Dada a partição do intervalo $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

seja $P_i = P(t_i)$ e Q_i um ponto arbitrário do arco $\overline{P_i P_{i+1}}$.

Considere-se a soma $S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(Q_i)(x_{i+1} - x_i)$, onde $x_i = \varphi(t_i)$. Se esta soma tender para um limite finito quando a norma da partição tender para 0, isto é, quando

$$\max_{1 \leq i \leq n} (t_{i+1} - t_i) \to 0,$$

a esse limite chama-se *integral curvilíneo* de $f(x, y)$ relativamente a x ao longo da linha L, quando esta é percorrida de $P(a)$ para $P(b)$ e representa-se por

$$\int_L f(x, y)dx.$$

De modo análogo se define o integral curvilíneo de $f(x, y)$ relativamente a y e representam-se por

$$\int_L f(x, y)dy,$$

respectivamente.

Supondo que a seguinte representação paramétrica de L

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \quad a \leq t \leq b \end{cases}$$

é regular, considere-se a partição do intervalo $[a, b]$,

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$

Seja $P_i = P(t_i), i = 1, \cdots, n$, seja $t_i' \in [t_i,\ t_{i+1}]$ e $Q_i = P(t_i')$ com $i = 0, \cdots, n-1$. A soma anterior pode escrever-se

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(Q_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi'(t_i), \psi'(t_i))(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))$$

Pelo teorema do valor médio existe τ_i tal que

$$\frac{\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \varphi'(\tau_i),$$

isto é,

$$\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\tau_i)(t_{i+1} - t_i)$$

e a soma anterior pode escrever-se como

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi'(t_i), \psi'(t_i))\varphi'(\tau_i)(t_{i+1} - t_i).$$

Passando ao limite vem

$$\int_L f(x, y)dx = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt.$$

Foi suposto que a linha estava a ser percorrida de $P(a)$ para $P(b)$ quando o valor do parâmetro t crescia. Se a linha for percorrida no outro sentido o valor do integral curvilíneo será o simétrico do obtido. De modo análogo é possível provar-se que

$$\int_L f(x,y)dy = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)dt.$$

Se $c \in [a,b]$ e L_1, L_2 são os arcos correspondentes à variação de t em $[a,c]$ e $[c,b]$, respectivamente, resulta imediatamente da definição de integral curvilíneo que

$$\int_L f(x,y)dx = \int_{L_1} f(x,y)dx + \int_{L_2} f(x,y)dx.$$

Assim, se L for constituída por um número finito de arcos regulares, o valor do integral curvilíneo pode obter-se somando o valor dos integrais calculados ao longo de cada um dos arcos.
Suponhamos que dada uma curva L e uma sua representação paramétrica regular ela é percorrida do ponto A para o ponto B no sentido crescente do valor do parâmetro. Se a mesma curva L relativamente a outra representação regular é percorrida do ponto B para o ponto A no sentido crescente do valor do novo parâmetro, notaremos esta nova parametrização por L^-. Tem-se que

$$\int_{L^-} = -\int_L .$$

Teorema (Independência da parametrização)

O valor do integral de linha ao longo de uma curva L não depende da parametrização de L no sentido em que duas quaisquer parametrizações de L com a mesma orientação conduzem ao mesmo valor do integral.

O conceito de integral curvilíneo que acabámos de introduzir estende-se sem qualquer dificuldade, com as adaptações óbvias, ao caso tridimensional.

Exemplo

Sendo L a curva representada na figura, determine o valor do integral curvilíneo

$$\int_{L^+} (-3xy^2)dx + (3x^2y + 1)dy.$$

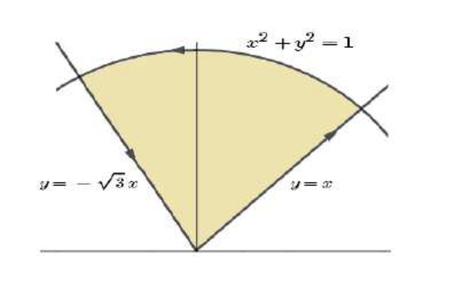

Figura: *Curva L.*

Exemplo (continuação)

A curva L pode ser parametrizada por $L_1 \vee L_2 \vee L_3$, *em que*

$$L_1 = \begin{cases} x = t, & 0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = t \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} x = \cos t, & \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{2\pi}{3} \\ y = \sin t \end{cases}$$

$$L_3 = \begin{cases} x = t, & -\frac{1}{2} \leq t \leq 0 \\ y = -\sqrt{3}\, t \end{cases}$$

e tem-se

$$\int_{L^+} (-3xy^2)dx + (3x^2y+1)dy = \int_{L_1} (-3xy^2)dx + (3x^2y+1)dy$$
$$+ \int_{L_2} (-3xy^2)dx + (3x^2y+1)dy + \int_{L_3} (-3xy^2)dx + (3x^2y+1)dy$$

Exemplo (continuação)

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (-3t^3 + 3t^3 + 1)dt \\
&+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} (3\cos t \sin^3 t + 3\cos^3 t \sin t + \cos t)dt \\
&+ \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (-9t^3 + 9\,t^3 - \sqrt{3})dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \left[\frac{3\sin^4 t}{4} - \frac{3\cos^4 t}{4} + \sin t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} + \left[\frac{27}{64} - \frac{3}{64} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{16} + \frac{3}{16} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right] - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{3}{8}.
\end{aligned}
$$

Calcule-se o integral curvilíneo $\int_L y dx$, sendo L o contorno de D (linhas que constituem a fronteira de D) percorrido no sentido directo (contrário ao dos ponteiros do relógio).

Tem-se $L = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4$ e

$$\int_L y dx = \int_{L_1} y dx + \int_{L_2} y dx + \int_{L_3} y dx + \int_{L_4} y dx.$$

As curvas L_1, L_2, L_3, L_4 admitem as seguintes representações paramétricas:

$$L_1 = \begin{cases} x = t, & a \leq t \leq b, \\ y = f_1(t) \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} x = b, & f_1(b) \leq t \leq f_2(b), \\ y = t \end{cases}$$

$$L_3^- = \begin{cases} x = t, & a \leq t \leq b, \\ y = f_2(t), \end{cases} \qquad L_4^- = \begin{cases} x = a, & f_1(a) \leq t \leq f_2(a). \\ y = t \end{cases}$$

Então

$$\int_L y dx = \int_a^b f_1(t)dt + 0 - \int_a^b f_2(t)dt + 0$$
$$= \int_a^b (f_1(t) - f_2(t))dt = -Area(D).$$

Este resultado é ainda válido para um domínio que seja a união finita de conjuntos simples sem pontos interiores comuns quando tomados dois a dois.

De forma análoga se calcularmos o integral $\int_L xdy$ chegaríamos a

$$\int_L xdy = \acute{A}rea(D).$$

Os dois integrais de linha considerados permitem concluir que

$$\acute{A}rea(D) = \frac{1}{2}\int_L xdy - ydx.$$

Fórmula de Riemann-Green

Considere-se o domínio verticalmente simples
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x) \leq y \leq f_2(x) \wedge a \leq x \leq b\}$.

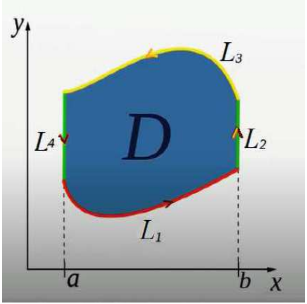

Figura: Domínio D.

Seja $\varphi(x, y)$ uma função contínua e continuamente derivável em ordem a y definida em D.
Calcule-se o integral duplo

$$\iint_D \frac{\partial \varphi}{\partial y} dxdy.$$

Tem-se que

$$\iint_D \frac{\partial \varphi}{\partial y} dxdy = \int_a^b \Big(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \Big) dx = \int_a^b \left[\varphi(x, y) \right]_{f_1(x)}^{f_2(x)} dx$$
$$= \int_a^b \varphi(x, f_2(x)) - \varphi(x, f_1(x)) dx$$

Seja $L = L_1 \vee L_2 \vee L_3 \vee L_4$. As curvas L_1, L_2, L_3, L_4 admitem as seguintes representações paramétricas:

$$L_1 = \begin{cases} x = x, & a \leq x \leq b, \\ y = f_1(x) \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} x = b, & f_1(b) \leq y \leq f_2(b), \\ y = y \end{cases}$$

$$L_3^- = \begin{cases} x = x, & a \leq x \leq b, \\ y = f_2(x), \end{cases} \qquad L_4^- = \begin{cases} x = a, & f_1(a) \leq y \leq f_2(a). \\ y = y \end{cases}$$

Calcule-se

$$\int_{L^+} \varphi(x,y)dx.$$

Tem-se que

$$\int_{L^+} \varphi(x,y)dx = \int_{L_1} \varphi(x,y)dx + \int_{L_2} \varphi(x,y)dx + \int_{L_3} \varphi(x,y)dx + \int_{L_4} \varphi(x,y)dx.$$

Os integrais ao longo de L_2 e L_4 são nulos, pelo que

$$\begin{aligned}\int_{L^+} \varphi(x,y)dx &= -\int_a^b \varphi(x, f_2(x)) - \varphi(x, f_1(x))dx \\ &= -\iint_D \frac{\partial \varphi}{\partial y} dxdy.\end{aligned}$$

Este resultado estende-se ao caso de um domínio D que se possa decompor num número finito de domínios do tipo precedente.

Por um processo análogo pode estabelecer-se que se $\psi(x, y)$ for uma função contínua e continuamente derivavel em ordem a x em D, então

$$\iint_D \frac{\partial \psi}{\partial x} dxdy = \int_a^b \varphi(x, f_2(x)) - \varphi(x, f_1(x)) dx$$
$$= \int_{L^+} \psi(x, y) dy$$

pelo que

$$\int_{L^+} \varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dxdy.$$

A esta igualdade chama-se *fórmula de Riemann-Green.*

Exemplo

Calcule-se o integral curvilíneo

$$\int_{L^+} (-3xy^2)dx + (3x^2y + 1)dy,$$

considerado no exemplo anterior, através do cálculo de um integral duplo.

Exemplo (continuação)

A função $\varphi(x,y) = -3xy^2$ *é contínua e continuamente derivavel em ordem a* y*, a função* $\psi(x,y) = 3x^2y + 1$ *é contínua e continuamente derivável em ordem a* x*. Por aplicação da fórmula de Riemann-Green tem-se que:*

$$\int_{L^+} (-3xy^2)dx + (3x^2y+1)dy = \iint_D \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= 12 \iint_D xy\, dxdy.$$

Exemplo (continuação)

Fazendo a mudança de variáveis para coordenadas polares, tem-se

$$D = \begin{cases} x = \rho\cos\theta, & 0 \le \rho \le 1 \\ y = \rho\sin\theta, & \frac{\pi}{4} \le \theta < \frac{2\pi}{3}, \end{cases}$$

pelo que

$$12\iint_D xy\,dxdy = 12\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\int_0^1 \rho^3\cos\theta\sin\theta\,d\rho\right)d\theta$$

$$=12\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1\cos\theta\sin\theta\right)\,d\theta = 3\left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}$$

$$=\frac{3}{2}\left(\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}.$$

Integrais triplos. Definição, propriedades

Seja $f(x, y, z)$ uma função contínua num conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ fechado e limitado e seja P um paralelepípedo contido em D de faces paralelas aos planos coordenados. A definição de integral triplo de f em P é análoga à de integral duplo de uma função contínua num retângulo. Consideremos uma partição de P em n paralelepípedos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ de faces paralelas aos planos coordenados, e designe-se por V_k o volume do paralelepípedo P_k. Em cada um dos novos paralelepípedos escolha-se um ponto arbitrário; designe-se por (x_k^*, y_k^*, z_k^*) o ponto escolhido no paralelepípedos P_k.

Efetue-se o produto

$$f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)V_k$$

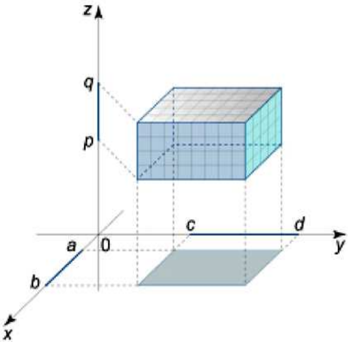

Figura: Partição de um domínio paralelepipédico.

e em seguida a soma $$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)V_k.$$

A esta soma, tal como na definição de integral duplo num retângulo, chama-se soma de Riemann, relativa à partição considerada.
Repita-se este processo efetuando partições de forma a que o comprimento, a largura e a altura de cada um dos paralelepípedos se aproxime de zero e n tenda para infinito.
Ao limite

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)V_k$$

chama-se integral triplo de f em P e representa-se por

$$\iiint_P f(x,y,z)dxdydz.$$

É possível mostrar que a continuidade de $f(x, y, z)$ em D, é condição suficiente para a existência do limite anterior.
O integral triplo goza de propriedades semelhantes às do integral duplo.
Vejamos algumas delas:

Suponhamos que $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ são contínuas num paralelepípedo P com as propriedades atrás referidas. Então
1.
$$\iiint_P (f+g)(x, y, z)dv = \iiint_P f(x, y, z)dv + \iiint_P g(x, y, z)dv,$$
2.
$$\iiint_P kf(x, y, z)dv = k\iiint_P f(x, y, z)dv, \quad k \in \mathbb{R}.$$

3. Se $f(x,y,z) \leq g(x,y,z), \quad \forall (x,y,z) \in P$, então

$$\iiint_P f(x,y,z)dv \leq \iiint_P g(x,y,z)dv;$$

em particular, se $f(x,y,z) = 0, \quad \forall (x,y,z) \in P$, então

$$0 \leq \iiint_P g(x,y,z)dv.$$

4. Se $f(x,y,z) = 1, \quad \forall (x,y,z) \in P$, então

$$\iiint_P f(x,y,z)dv = \text{volume de } P.$$

5. Se $P = P_1 \cup P_2 \cup \cdots \cup P_n$, em que $P_1, P_2, \cdots, P_n$ são n paralelepípedos sem pontos interiores comuns, tomados dois a dois, então

$$\iiint_P f(x,y,z)dv = \iiint_{P_1} f(x,y,z)dv + \cdots + \iiint_{P_n} f(x,y,z)dv$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \iiint_{P_i} f(x,y,z)dv.$$

6.
$$\left| \iiint_P f(x,y,z)dv \right| \leq \iiint_P |f(x,y,z)|dv.$$

Se $|f(x,y,z)| \leq M, \ \forall (x,y,z) \in P$, então

$$\left| \iiint_P f(x,y,z)dv \right| \leq \iiint_R |f(x,y,z)|dv$$
$$\leq \iiint_P M\, dv = M \cdot (\text{Volume}(P)).$$

O teorema que se segue indica a forma de calcular o integral triplo de uma função contínua num paralelepípedo.

Teorema (teorema de Fubini)

Seja P o paralelepípedo definido por

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b \;\wedge\; c \leq y \leq d \;\wedge\; e \leq z \leq f\}.$$

Se $f(x, y, z)$ é contínua em P, então

$$\begin{aligned}\iiint_P f(x, y, z) dv &= \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx\, dy\, dz = \ldots \\ &= \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dz\, dy\, dx.\end{aligned}$$

Este importante teorema permite calcular um integral triplo num paralelepípedo através do cálculo de três integrais repetidos. Não será feita a demonstração deste teorema.

Exemplo

Determine-se o integral triplo da função $f(x,y,z) = x + 2yz$ *no paralelepípedo* $P = [0,1] \times [0,2] \times [1,2]$.
Tem-se que

$$\iiint_P (x+yz)dv = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_1^2 (x+2yz)dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left[xz + yz^2 \right]_1^2 dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^2 (x+3y)dy \right) dx = \int_0^1 (2x+6)dx = 7.$$

Poder-se-ia ter optado por calcular o integral por outras ordens de integração.

Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto limitado. Define-se o integral triplo em D de modo semelhante ao utilizado para o integral duplo. Consideremos $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Para definir o integral triplo de f no conjunto D, comecemos por definir a seguinte função $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{se } \ (x,y,z) \in D \\ 0 & \text{se } \ (x,y,z) \in P \setminus D \end{cases} .$$

onde P é um paralelepípedo que contém D.

Definição

Se $\tilde{f}$ for integrável em P define-se

$$\iiint_D f(x,y,z)dv := \iiint_P \tilde{f}(x,y,z)dv.$$

Cálculo de integrais triplos.

Tendo em conta que as regiões do espaço podem ser extremamente complicadas de caracterizar o cálculo de integrais triplos em regiões arbitrárias do espaço está para além do âmbito desta disciplina. Iremos considerar apenas o cálculo de integrais triplos em domínios que se possam decompor em uniões finitas de domínios de três tipos, a saber:

Definição

1. Seja A um conjunto simples do plano XOY, $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que $f_1(x,y) \leq f_2(x,y), \forall (x,y) \in A$. Chamamos *conjunto simples do tipo I* a um conjunto da forma

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A \wedge f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\}.$$

2. Seja B um conjunto simples do plano YOZ, $u_1, u_2 : B \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que $u_1(y,z) \leq u_2(y,z), \forall (y,z) \in B$. Chamamos *conjunto simples do tipo II* a um conjunto da forma

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in B \wedge u_1(y,z) \leq x \leq u_2(y,z)\}.$$

3. Seja C um conjunto simples do plano XOZ, $v_1, v_2 : C \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que $v_1(x,z) \leq v_2(x,z), \forall (x,z) \in C$. Chamamos *conjunto simples do tipo III* a um conjunto da forma

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in C \wedge v_1(x,z) \leq y \leq v_2(x,z)\}.$$

Definição (Conjuntos básicos)

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^3$ limitado diz-se básico se for a união de um número finito de conjuntos simples dos tipos I,II ou III, sem pontos interiores comuns tomados dois a dois.

Supondo, por exemplo, que D é um conjunto simples do tipo I, que

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x) \leq y \leq g_2(x), a \leq x \leq b\},$$

e que $h(x, y, z)$ é uma função continua em D, tem-se que

$$\begin{aligned}\iiint_D h(x, y, z)dV &= \iint_A \Big(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} h(x, y, z)dz \Big) d\sigma \\ &= \int_a^b \Big(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \Big(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} h(x, y, z)dz \Big) dy \Big) dx.\end{aligned}$$

Suponhamos que $h(x,y,z)=1$. Então

$$\iiint_D h(x,y,z)dV = \int_a^b \Big(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \Big(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} dz \Big) dy \Big) dx$$
$$= \int_a^b \mu(x) dx.$$

em que

$$\mu(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \Big(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} dz \Big) dy$$

é a área da secção feita em D pelo plano perpendicular ao eixo dos xx e com abcissa x.

Tal como sucede nos integrais triplos com domínios de integração paralelepipédicos, em que, quando a função integranda é constante e igual a um o valor do integral triplo é numericamente igual ao volume do paralelepípedo de integração, o integral triplo da função constante igual a um de um conjunto básico é também numericamente igual ao volume do domínio de integração.
O cálculo de integrais triplos em conjuntos básicos, efetua-se decompondo-os em conjuntos do tipo I, II e III e usam-se as propriedades aditivas do integral.

Exemplo

Sendo

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon 0\le x\le 1\wedge 0\le y\le 1-x^2\wedge 1-xy\le z\le 1+x+y\}$$

determine-se

$$\iiint_D dv.$$

O domínio D é um conjunto simples do tipo I, pelo que

$$\begin{aligned}\iiint_D dV &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2}\left(\int_{1-xy}^{1+x+y} dz\right) dy\right) dx\\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2}(x+y+xy)dy\right) dx\\ &= \int_0^1 \left(x(1-x^2)+\frac{(1-x^2)^2}{2}(1+x)\right) dx = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Seja

$$T = (\varphi, \psi, \theta) : D^* \subset \mathbb{R}^3 \to D \subset \mathbb{R}^3$$
$$(u, v, w) \quad \mapsto (x, y, z)$$

onde D^* e D são conjuntos básicos, T é uma bijecção de D^* sobre D e $x = \varphi(u, v, w), y = \psi(u, v, w), z = \theta(u, v, w)$, para $(x, y, z) \in D^*$. Suponhamos que φ, ψ e θ são continuamente deriváveis em D e que o jacobiano J da transformação T não se anula em D^*. Nas condições consideradas e sendo $f(x, y, z)$ uma função contínua em D tem-se que

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdydz$$
$$= \iiint_{D^*} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \theta(u, v, w))|J| dudvdw.$$

Coordenadas cilíndricas

No sistema de coordenadas cilíndricas, um ponto P é representado pelo tripleto

$$(\rho, \theta, z)$$

em que (ρ, θ) são as coordenadas polares da projeção do ponto P no plano xoy e z é a terceira coordenada cartesiana. A relação entre as coordenadas cilíndricas e cartesianas é:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

onde $\rho \geq 0, \;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi \;\;$ e $z \in \mathbb{R}$.

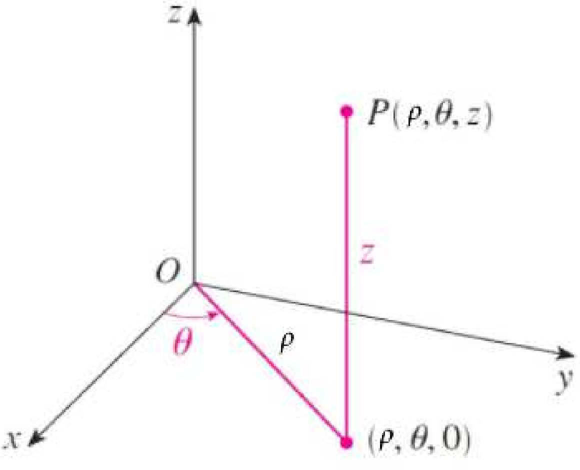

Figura: Coordenadas cilíndricas.

O jacobiano da transformação é

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

O elemento de volume é $\rho\, d\rho d\theta\, dz$.

Exemplo

Calcule-se o volume de um cone de altura h e raio r. A equação da superfície cónica que limita o domínio é

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{(h/r)^2},\ 0 \leq z \leq h.$$

Vamos fazer a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & 0 \leq \rho \leq r \\ y = \rho\sin\theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = z, & \dfrac{h\rho}{r} \leq z \leq h \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Tem-se que

$$
\begin{aligned}
vol(D) = \iiint_D dxdydz &= \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{h\rho}{r}}^{h} \rho \, dz \right) d\theta \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^r \rho \left(h - \rho \frac{h}{r} \right) d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^2 h}{2} - \frac{\rho^3 h}{3r} \right]_0^r \\
&= 2\pi \left(\frac{r^2 h}{2} - \frac{r^2 h}{3} \right) = \pi \left(\frac{r^2 h}{3} \right).
\end{aligned}
$$

Coordenadas esféricas

No sistema de coordenadas esféricas, um ponto P é representado pelo tripleto

$$(r, u, v)$$

em que r é a distância do ponto P à origem, u é o ângulo que o vetor $\overrightarrow{OP}$ faz com o eixo dos zz e o ângulo v tem o mesmo significado que o ângulo θ das coordenadas cilíndricas. A relação entre as coordenadas esféricas e cartesianas é:

$$\begin{cases} x = r \sin u \cos v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r \cos u \end{cases}$$

onde $r \geq 0$, $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

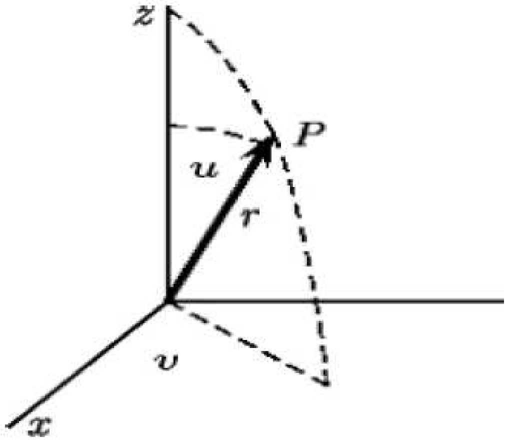

Figura: Coordenadas esféricas.

O jacobiano é dado por

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, u, v)} = \begin{vmatrix} \sin u \cos v & r \cos u \cos v & -r \sin u \sin v \\ \sin u \sin v & r \cos u \sin v & r \sin u \cos v \\ \cos u & -r \sin u & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin u.$$

O elemento de volume é $r^2 \sin u dr\, du\, dv$.

Exemplo

Calcule o volume da esfera de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2.$$

Vamos fazer a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x = r \sin u \cos v, & 0 \leq r \leq a \\ y = r \sin u \sin v, & 0 \leq u \leq \pi \\ z = r \cos u, & 0 \leq v \leq 2\pi. \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Tem-se que

$$
\begin{aligned}
vol(D) = \iiint_D dxdydz &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^{a} r^2 \sin u \, dr \right) du \right) dv \\
&= 2\pi \left(\int_0^{\pi} \sin u \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a \right) du \\
&= \frac{2\pi a^3}{3} [-\cos u]_0^{\pi} = \frac{4\pi a^3}{3}.
\end{aligned}
$$

Volumes de domínios limitados por superfícies de revolução

Suponhamos que se pretende determinar o volume do domínio limitado pelos planos $z = a, z = b$ $(a < b)$ e pela superfície gerada pela linha do plano xz, gráfico da função continua e positiva $x = f(z)$, $a \leq z \leq b$, quando esta linha efectua uma rotação de amplitude de 2π radianos em torno do eixo dos zz. Utilizando coordenadas cilíndricas, o domínio é descrito por

$$\begin{cases} x = \rho \cos u, & a \leq z \leq b \\ y = \rho \sin u, & 0 \leq u \leq 2\pi \\ z = z, & 0 \leq \rho \leq f(z) \end{cases}$$

e o volume é dado pelo integral triplo

$$
\begin{aligned}
vol(D) &= \iiint_D dxdydz = \int_a^b dz \int_0^{2\pi} dv \int_0^{f(z)} \rho \, d\rho \\
&= 2\pi \int_a^b \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{f(z)} dz = \pi \int_a^b \left[\rho^2\right]_0^{f(z)} dz \\
&= \pi \int_a^b \left[f(z)\right]^2 \, dz.
\end{aligned}
$$

Quando o domínio cujo volume se pretende calcular é limitado por uma superfície de revolução em torno do eixo dos xx ou do eixo dos yy tudo se passa de forma análoga.

Exemplo

Iremos calcular o volume do domínio limitado pelo elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$$

por vários processos.

(i) Como domínio de revolução. Trata-se de um domínio que se obtém pela rotação, de amplitude de 2π *radianos, da linha do plano* xz*,*

$$z = f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}, \ -2 \le x \le 2,$$

em torno do eixo dos xx*.*
Utilizando coordenadas cilíndricas o domínio é representado por:

Exemplo (continuação)

$$\begin{cases} x = x, & -2 \leq x \leq 2 \\ y = \rho \sin\theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = \rho\cos\theta, & 0 \leq \rho \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \end{cases}$$

e o seu volume é dado por

$$\int_{-2}^{2} \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \rho\, d\rho \Big) d\theta \Big) dx$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx = \pi \int_{-2}^{2} \Big(1 - \frac{x^2}{4} \Big) dx$$

$$= \pi \left[x - \frac{x^3}{12} \right]_{-2}^{2} = \pi \Big(2 - \frac{8}{12} - (-2) + \frac{(-2)^3}{12} \Big)$$

$$= \pi \Big(4 - \frac{4}{3} \Big) = \frac{8\pi}{3}.$$

Exemplo (continuação)

(ii) Por mudança de coordenadas. O domínio pode ser descrito por:

$$\begin{cases} x = 2\rho \sin u \cos v, & 0 \leq \rho \leq 1 \\ y = \rho \sin u \sin v, & 0 \leq u \leq \pi \\ z = \rho \cos u, & 0 \leq v \leq 2\pi. \end{cases}$$

Esta mudança de variáveis, corresponde a uma das variantes das coordenadas esféricas, e é usualmente designada por coordenadas elíticas.

O volume é dado por

$$\int_0^{\pi} du \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 2\rho^2 \sin u \, d\rho = 2\pi \left[\frac{2\rho^3}{3}\right]_0^1 [-\cos u]_0^{\pi}$$
$$= \frac{8\pi}{3}.$$

Exemplo (continuação)

(iii) Por áreas de secções planas.
Para cada x *no intervalo* $]2,2[$, *tem-se que*

$$y^2+z^2 = 1-\frac{x^2}{4} = \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^2$$

é a equação da circunferência com centro $(x,0,0)$ *e raio* $\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$ *que tem por área*

$$A_0 = \pi\left(1-\frac{x^2}{4}\right).$$

O volume é dado por

$$\int_{-2}^{2}\pi\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx = \pi\left[x-\frac{x^3}{12}\right]_{-2}^{2} = \frac{8\pi}{3}.$$

Exemplo (continuação)

(iv) Usando coordenadas cartesianas. O volume é dado por

$$\int_{-2}^{2}\Big(\int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\Big(\int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}-y^2}} dz\Big)dy\Big)dx$$

$$= 2\int_{-2}^{2}\Big(\int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \sqrt{(1-\frac{x^2}{4})-y^2}\,dy\Big)dx$$

$$= \int_{-2}^{2}\left[\left(y\sqrt{(1-\frac{x^2}{4})-y^2}+(1-\frac{x^2}{4})\arcsin\frac{y}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\right)\right]_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx$$

$$= \pi\int_{-2}^{2}\Big(1-\frac{x^2}{4}\Big)dx = \frac{8\pi}{3}.$$

Exemplo

Determine o valor do integral

$$\iiint_D 2(y+1)dxdydz,$$

sendo D o domínio fechado limitado pelas superfícies que se obtêm por rotação de amplitude 2π radianos em torno do eixo dos yy das linhas do plano yz:

$$z-2y=0 \quad \wedge \quad y-2z=0, \ \textit{com}\ 0 \leq z \leq \frac{1}{2}.$$

Exemplo (continuação)

O domínio em questão, utilizando coordenadas cilíndricas, é representado por

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & 0 \le y \le \frac{1}{4} \\ y = y, & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = \rho\sin\theta, & 2y \le \rho \le \sqrt{y} \end{cases}$$

e o volume pode ser calculado a partir do seguinte integral triplo:

Exemplo (continuação)

$$\iiint_D 2(y+1)dxdydz = \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{1}{4}}\Big(\int_{2y}^{\sqrt{y}} 2(y+1)\rho\, d\rho\Big)dy\Big)d\theta$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{1}{4}}(y+1)\big[\rho^2\big]_{2y}^{\sqrt{y}}dy = 2\pi\int_0^{\frac{1}{4}}(y+1)(y-4y^2)\,dy$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{1}{4}}(-4y^3+y-3y^2)\,dy$$

$$=2\pi\Big[-y^4+\frac{y^2}{2}-y^3\Big]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$=2\pi\Big(-\frac{1}{256}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}\Big)$$

$$=\pi\Big(\frac{3}{128}\Big).$$

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto fechado e

$$\begin{aligned} P : D \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v) &\mapsto (x,y,z) = (\varphi(u,v), \psi(u,v), \theta(u,v)) \end{aligned}$$

uma função contínua. Chama-se *superfície* S ao contradomínio de P (em $\mathbb{R}^3$). Se as equações que definem a superfície S são da forma

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v), \quad (u,v) \in D\ . \\ z = \theta(u,v) \end{cases}$$

diz-se que a superfície está dada na *forma paramétrica*, e às equações consideradas chama-se *equações paramétricas* da superfície.

Fixado em $\mathbb{R}^3$ um referencial cartesiano ortonormado $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ podem escrever-se equações vetoriais da superfície

$$P = O + \varphi(u,v)\vec{i} + \psi(u,v)\vec{j} + \theta(u,v)\vec{k}$$

ou, designando $P - O$ por $\vec{r}$,

$$\vec{r} = \varphi(u,v)\vec{i} + \psi(u,v)\vec{j} + \theta(u,v)\vec{k}.$$

Exemplo

O plano que passa pelo ponto (x_0, y_0, z_0) e tem a direcção dos vetores linearmente independentes $a = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $b = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ admite as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) = x_0 + a_1 u + b_1 v \\ y = \psi(u,v) = y_0 + a_2 u + b_2 v, \quad u, v \in \mathbb{R}\ . \\ z = \theta(u,v) = z_0 + a_3 u + b_3 v \end{cases}$$

a que corresponde a equação vectorial

$$P = O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + u(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + v(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}),\ u, v \in \mathbb{R}.$$

Definição

Dada uma representação paramétrica

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \quad (u, v) \in D \ . \\ z = \theta(u, v) \end{cases}$$

de uma superfície diz-se que a representação paramétrica é *regular* se as funções φ, ψ, θ são continuamente derivaveis em D e os jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}$$

não se anulam simultaneamente em D, isto é,

$$\left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 > 0, \forall (u, v) \in D.$$

Se estas condições não se verificarem em algum ponto de D, esse ponto diz-se *ponto singular* (relativamente a representação paramétrica considerada). Os pontos onde as condições atrás referidas se verificam dizem-se pontos *regulares* relativamente a representação paramétrica considerada.

Uma superfície diz-se *regular* se admitir, pelo menos, uma representação paramétrica regular.

Seja S uma superfície e

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \quad (u, v) \in D \\ z = \theta(u, v) \end{cases}.$$

uma sua representação paramétrica. Suponhamos que o ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0), \theta(u_0, v_0))$ é um ponto regular.

Consideremos os vectores:

$$\vec{t_1} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\vec{k}\right)_{(u_0,v_0)} \quad \text{e} \quad \vec{t_2} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\vec{k}\right)_{(u_0,v_0)}.$$

Tem-se que

$$\vec{t_1} \times \vec{t_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k}\right)_{(u_0,v_0)}$$

o que permite afirmar que $\vec{t_1}, \vec{t_2}$ são linearmente independentes, pelo que definem a orientação de um plano.

Ao plano que passa por P_0 e tem a orientação de $\vec{t_1}$ e $\vec{t_2}$ chama-se *plano tangente à superfície* em P_0. Uma equação vectorial deste plano é

$$T = O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + \alpha\vec{t_1} + \beta\vec{t_2}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Escrevendo a equação da superfície na forma vetorial

$$\overrightarrow{OP} = \varphi(u, v)\vec{i} + \psi(u, v)\vec{j} + \theta(u, v)\vec{k}$$

tem-se que

$$\vec{t_1} = \frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial u}(u_0, v_0) \quad , \quad \vec{t_2} = \frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial v}(u_0, v_0)$$

e a equação anterior pode ser escrita na forma

$$T = O + \overrightarrow{OP}(u_0, v_0) + \alpha\frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta\frac{\partial\overrightarrow{OP}}{\partial v}(u_0, v_0), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

O plano considerado admite as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \dfrac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta \dfrac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ y = y_0 + \alpha \dfrac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta \dfrac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \,. \\ z = z_0 + \alpha \dfrac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta \dfrac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{cases}$$

Chama-se *recta normal* a superfície em P_0 à recta que passa por P_0 e é perpendicular ao plano tangente à superfície nesse ponto.
Uma equação vetorial da recta normal será

$$N = O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + \lambda(\vec{t_1} \times \vec{t_2}), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

ou equivalentemente

$$N = O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + \lambda\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k}\right)_{(u_0,v_0)}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$. Esta recta admite as seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0) \\ y = y_0 + \lambda\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + \lambda\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0) \end{cases}$$

Suponhamos agora que uma superfície é representada por uma equação da forma

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

em que $f(x, y)$ é uma função continuamente derivável em D. Trata-se uma equação cartesiana da superfície A, que admite a seguinte representação paramétrica regular

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y, & \qquad (x, y) \in D \ . \\ z = f(x, y), \end{cases}$$

A regularidade da representação paramétrica é consequência imediata de $f(x, y)$ ser, por hipótese, continuamente derivável e de se ter

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \forall (x, y) \in D.$$

Neste caso, dado $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tem-se que

$$\vec{t_1} = \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)k \quad \text{e} \quad \vec{t_2} = \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k.$$

O plano tangente à superfície em P_0 pode ser representado pelas seguintes equações:
equação vectorial:

$$T = O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + f(x_0, y_0)\vec{k} + \alpha\left(\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{k}\right)$$
$$+ \beta\left(\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{k}\right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \\ y = y_0 + \beta \\ z = f(x_0, y_0) + \alpha\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \beta\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

equação cartesiana:

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Tem-se que

$$\vec{t}_1 \times \vec{t}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j} + \vec{k}$$

e as seguintes equações representam a recta normal em P_0:

equação vectorial:

$$N = O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + \alpha\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{j} - \vec{k}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ y = y_0 + \alpha\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 - \alpha \end{cases}$$

Se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ a recta normal admite a seguinte equação cartesiana:

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Consideremos agora uma equação da forma

$$F(x, y, z) = 0$$

e seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ tal que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Suponhamos ainda que $F(x, y, z)$ é continuamente derivavel numa vizinhança de P_0 e que, além disso, $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

O teorema das funções implícitas permite-nos afirmar que a equação $F(x, y, z) = 0$ define implicitamente, numa vizinhança de (x_0, y_0), uma superfície regular de equação $z = f(x, y)$.

Determinemos equações do plano tangente e da recta normal a essa superfície no ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Tem-se, pelo que foi visto anteriormente, que

$$T = O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + \alpha\left(\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\vec{k}\right)$$
$$+\beta\left(\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\vec{k}\right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Atendendo a que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

obtém-se a seguinte equação vectorial para o plano tangente

$$T = O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + \alpha\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\vec{i} - \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\vec{k}\right)$$
$$+\beta\left(\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\vec{j} - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\vec{k}\right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

a que correspondem as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ y = y_0 + \beta \dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0), \\ z = z_0 - \alpha \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) - \beta \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

e a equação cartesiana

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Têm-se também as seguintes equações para a recta normal em P_0:

equação vectorial:

$$\begin{aligned}
N &= O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + \lambda\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\vec{j} - \vec{k}\Big) \\
&= O + x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} \\
&\quad +\lambda\Big(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\vec{i} + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\vec{j} + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\vec{k}\Big), \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

equações paramétricas:

$$\begin{cases}
x = x_0 + \lambda\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) \\
y = y_0 + \lambda\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \\
z = z_0 + \lambda\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)
\end{cases}$$

Se $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, tem-se a equação cartesiana:

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Exemplo

Determinem-se equações vectoriais, paramétricas e cartesianas do plano tangente e da recta normal à superfície de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2 & \\ y = u + v, & -1 \leq u \leq 1 \\ z = u^2 + 4v, & 0 \leq v \leq 1 \end{cases}$$

no ponto $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2)$ *correspondente a* $(u = 0, v = \frac{1}{2})$.

Tem-se

$$\begin{aligned} \vec{t_1} &= 2u\,\vec{i} + \vec{j} + 2u\,\vec{k} \\ \vec{t_2} &= -2v\,\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k} \end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

que, no ponto em questão, tomam a forma

$$\vec{t}_1 = \vec{j} \ \text{ e } \ \vec{t}_2 = -\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}.$$

Uma equação vectorial do plano tangente é

$$T = O - \frac{1}{4}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + 2\vec{k} + \alpha\vec{j} + \beta(-\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4} - \beta \\ y = \frac{1}{2} + \alpha + \beta, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 4\beta, \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

uma equação cartesiana é

$$4x + z - 1 = 0.$$

Como se tem

$$\vec{t}_1 \times \vec{t}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + \vec{k}.$$

uma equação vectorial da recta normal é

$$N = O - \frac{1}{4}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} + 2\vec{k} + \lambda(4\vec{i} + \vec{k}), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

Exemplo (continuação)

equações paramétricas são

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} + 4\lambda \\ y = \dfrac{1}{2}, & \qquad \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 2 + \lambda, \end{cases}$$

e uma equação cartesiana é dada por

$$\begin{cases} x - 4z + \dfrac{33}{4} = 0 \\ y = \dfrac{1}{2}, & \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Área de uma superfície

Considere-se uma superfície S, gráfico da função $z = f(x, y)$, com $(x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2$, onde A é um conjunto simples.
Consideremos uma partição do domínio A em domínios A_i, simples.
Sejam σ_i a área de cada domínio A_i e $Q_i = (\xi_i, \zeta_i) \in A_i$. Seja P_i o ponto de S que se projecta em Q_i, isto é,

$$P_i = (\xi_i, \zeta_i, z_i) = (\xi_i, \zeta_i, f(\xi_i, \zeta_i)).$$

Consideremos os planos tangentes à superfície S em cada ponto P_i e as porções desses planos que se projectam (paralelamente ao eixo dos zz) em cada um dos conjuntos A_i correspondentes. Seja τ_i a área da porção do plano tangente em P_i que se projecta no conjunto A_i.

O plano tangente a S, de equação $z = f(x, y)$ no ponto $P_i = (\xi_i, \zeta_i, z_i)$ tem, como se viu anteriormente, por equação

$$z - z_i = \frac{\partial f}{\partial x}(Q_i)(x - \xi_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(Q_i)(y - \zeta_i)$$

ou ainda

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(Q_i)(x - \xi_i) - \frac{\partial f}{\partial y}(Q_i)(y - \zeta_i) + z - z_i = 0.$$

Seja α_i o ângulo que esse plano faz com o plano xy (isto é, $z = 0$). Dados dois planos de equações

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ e } A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

fazendo entre si um ângulo α, tem-se que

$$\cos\alpha = \frac{|(A, B, C) \cdot (A', B', C)|}{\|(A, B, C)\| \ \|(A', B', C)\|},$$

pelo que o cosseno do ângulo entre os planos

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(Q_i)(x-\xi_i) - \frac{\partial f}{\partial y}(Q_i)(y-\zeta_i) + z - z_i \;= 0 \text{ e } z = 0$$

é

$$\cos\alpha_i = \frac{|(A,B,C)\cdot(A',B',C)|}{\|(A,B,C)\|\;\|(A',B',C)\|},$$

uma vez que

$$\sigma_i = \cos\alpha_i\,\tau_i.$$

Vem que

$$\tau_i = \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(Q_i)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(Q_i)\right)^2}\cdot\sigma_i.$$

Somando todas estas áreas

$$\sum_{i=1}^{n} \tau_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(Q_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(Q_i)\right)^2} \cdot \sigma_i$$

e fazendo tender para zero a norma da partição do domínio A, obtém-se a área da superfície considerada, isto é,

$$area(S) = \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Exemplo

Calcule a área da superfície S de equação

$$z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4.$$

Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$*. A área pretendida é dada por*

$$area(S) = \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy$$
$$= \iint_A \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dxdy.$$

Utilizando coordenadas polares para representar o domínio A vem que

$$A = \begin{cases} x = \rho\cos\theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad com |J| = \rho. \\ y = \rho\sin\theta, & 0 \leq \rho \leq 2, \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Vem que

$$
\begin{aligned}
area(S) &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho d\theta \\
&= 2\pi\left[\frac{(1+4\rho^2)^{3/2}}{12}\right]_0^2 = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1).
\end{aligned}
$$

2. Calcule a área da parte da superfície do parabolóide $y^2+z^2=2x$ *limitada pelo plano* $x=\frac{3}{2}$.
Escrevendo o parabolóide na forma

$$
x = \frac{1}{2}(y^2+z^2)
$$

e projectando no plano yz, *uma resolução análoga à do exemplo anterior permite obter o valor* $\dfrac{14}{3}\pi$.

Exemplo (continuação)

Mas se se pretender que a região de projecção esteja no plano xy tem de se escrever o parabolóide na forma $z^2 = 2x - y^2$*, que dá origem a duas expressões*

$$z = \sqrt{2x - y^2} = f(x, y) \text{ e } z = -\sqrt{2x - y^2} = g(x, y).$$

Então

$$area(S) = \iint_{A_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy + \iint_{A_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Exemplo (continuação)

Como

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 \ \ e \ A_1 = A_2$$

esta expressão simplifica-se para

$$area(S) = 2 \iint_{A_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2x - y^2}}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{2x - y^2}}$$

e

$$A_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, -\sqrt{2x} \leq y \leq \sqrt{2x}\right\}$$

Exemplo (continuação)

vem que

$$
\begin{aligned}
area(S) &= 2\int_0^{\frac{3}{2}}\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2x-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{2x-y^2}}\right)^2}\,dydx \\
&= 2\int_0^{\frac{3}{2}}\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \sqrt{1+\frac{1}{2x-y^2}+\frac{y^2}{2x-y^2}}\,dydx \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}}\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \sqrt{\frac{2x+1}{2x-y^2}}\,dydx \\
&= 2\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2x+1}\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \frac{1}{\sqrt{2x-y^2}}\,dydx.
\end{aligned}
$$

Exemplo (continuação)

Uma primitiva da função $\dfrac{1}{\sqrt{2x-y^2}}$ *em ordem a* y *é dada por* $\arctan\left(\dfrac{y}{\sqrt{2x-y^2}}\right)$*; consequentemente*

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2x+1} \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} \frac{1}{\sqrt{2x-y^2}}\,dydx \\
&= 2\int_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{2x+1}\left[\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{2x-y^2}}\right)\right]_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} dx \\
&= 2\int_0^{\frac{3}{2}} \pi\sqrt{2x+1}\,dx = \pi\left[\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\right]_0^{\frac{3}{2}} \\
&= 2\frac{\pi}{3}\left(\left(2\frac{3}{2}+1\right)^{3/2}-1\right) = \frac{14\pi}{3}.
\end{aligned}
$$

Suponhamos agora que a superfície S é definida pela representação paramétrica regular

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \quad (u, v) \in D \ . \\ z = \theta(u, v) \end{cases}$$

Suponhamos ainda que a aplicação $T = (\varphi, \psi)$ é invertível e que $J = \dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0$ (prova-se que nestas condições J tem sinal constante); então T é invertível, isto é, existe $T^{-1} = (g, h)$ (com $u = g(x, y), v = h(x, y)$, $(x, y) \in A)$ e assim

$$z = \theta(u, v) = \theta(g(x, y), h(x, y)) = f(x, y), (x, y) \in A.$$

Sabe-se que

$$area(S) = \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy.$$

Efectuemos neste integral duplo a mudança de variáveis

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v). \end{cases}$$

Comecemos por determinar $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ nas variáveis u e v. Tem-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Para determinar $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ derivem-se em ordem a x as equações

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v). \end{cases}$$

Tem-se que

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \\ 0 = \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

donde vem que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial y}{\partial u} \end{cases}, \quad \text{com } J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

De forma análoga se mostra que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{1}{J}\dfrac{\partial x}{\partial u}. \end{cases}$$

Então:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{J}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Calculemos agora

$$1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

Tem-se

$$
\begin{aligned}
&1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\\
=&1+\frac{1}{J^2}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{J^2}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\\
=&1+\frac{1}{J^2}\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right)\\
=&1+\frac{1}{J^2}\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right.\\
&\left.+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2-2\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right).
\end{aligned}
$$

Tendo em conta que

$$J=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

e que

$$1 = \frac{1}{J^2}J^2 = \frac{1}{J^2}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right)$$

vem que

$$1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{1}{J^2}\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{J^2}\left(\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right.$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2$$

$$\left. + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right).$$

Sendo

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

a expressão anterior pode ser escrita na forma

$$\frac{1}{J^2}(EG - F^2).$$

Então

$$area(S) = \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

$$= \iint_D \sqrt{\frac{1}{J^2}(EG - F^2)}\,|J|\,du\,dv = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

Exemplo

Considere-se a superfície S definida parametricamente por

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v, & 0 \leq u \leq 2 \\ z = u^2, & 0 \leq v \leq 2\pi \end{cases}$$

que representa a secção do parabolóide

$$z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4.$$

Tem-se que

$$E = \cos^2 v + \sin^2 v + (2u)^2 = 1 + 4u^2, G = u^2, F = 0.$$

Seja A o círculo centrado em $(0,0)$ e de raio 2.

Exemplo (continuação)

Tem-se que

$$\begin{aligned} area(S) &= \iint_A \sqrt{EG - F^2}\,dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 u\sqrt{1+4u^2}\,dudv \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{12}(1+4u^2)^{3/2}\right]_0^2 \\ &= \frac{2\pi}{12}(17^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1). \end{aligned}$$

Superfícies de revolução

Considere-se a superfície gerada pela linha do plano XOZ gráfico da função $z = \varphi(x),\ 0 \leq a \leq x \leq b$, quando efectua uma rotação de um ângulo α em torno do eixo OZ, no sentido directo.
Tomando como parâmetros u e v as coordenadas polares no plano XOY ($x = u$ no plano XOZ) a superfície admite as seguintes equações paramétricas

$$\begin{cases} x = u\cos v, & 0 \leq v \leq \alpha \\ y = u\sin v, & a \leq u \leq b \\ z = \varphi(u) \end{cases}$$

Calcule-se E, G e F:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 1 + (\varphi'(u))^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = u^2,$$

$$\text{e } F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Sendo $A = [a, b] \times [0, \alpha]$, a área da superfície é dada por

$$\begin{aligned} area(S) &= \iint_A \sqrt{EG - F^2}dudv \\ &= \int_0^\alpha \int_0^1 \sqrt{u^2(1 + (\varphi'(u))^2)}\, dudv \\ &= \int_0^\alpha \int_0^1 |u|\sqrt{1 + (\varphi'(u))^2}\, dudv. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que a linha geratriz da superfície de revolução é representada pela função não negativa $x = \psi(z)$, $a \leq z \leq b$, e que esta efectua uma rotação de um ângulo de amplitude α em torno do eixo dos zz, no sentido directo. Tomando para parâmetros $u = z$ e v o ângulo contado no plano xy a partir do semi-eixo positivo dos xx e no sentido directo, a superfície admite as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = \psi(u)\cos v, & 0 \leq v \leq \alpha \\ y = \psi(u)\sin v, & a \leq u \leq b \\ z = u \end{cases}$$

Os valores de E, F e G são:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 1 + (\psi'(u))^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = (\psi(u))^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Sendo $A = [a, b] \times [0, \alpha]$, a área da superfície é dada por

$$
\begin{aligned}
area(S) &= \iint_A \sqrt{EG - F^2} dudv \\
&= \int_0^\alpha \int_a^b \sqrt{(\psi(u))^2(1 + (\psi'(u))^2)}\, dudv \\
&= \int_0^\alpha \int_a^b |\psi(u)| \sqrt{1 + (\psi'(u))^2}\, dudv.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Determine a área da superfície obtida quando a linha do plano yz,

$$z^2 + (y-1)^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

efectua uma rotação de 2π radianos em torno do eixo dos zz.

Processo 1. Podemos escrever a linha na forma

$$z = \sqrt{1-(u-1)^2} = \varphi(u), 0 \leq z \leq 1.$$

A superfície assim obtida admite as equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = u\cos v, & 0 \leq v \leq 2\pi \\ y = u\sin v, & 0 \leq u \leq 1 \\ z = \varphi(u) = \sqrt{1-(u-1)^2} & \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Então

$$E = 1 + \Big(\frac{1-u}{\sqrt{1-(u-1)^2}}\Big)^2, G = u^2, F = 0$$

e

$$area(S) = \iint_A \sqrt{EG - F^2}dxdy = 2\pi \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-(u-1)^2}}\,du.$$

Fazendo a mudança de variável $u = t + 1$, *vem que:*

$$2\pi \int_{-1}^0 \frac{t+1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = 2\pi[-\sqrt{1-t^2}]_{-1}^0 + [\arcsin t]_{-1}^0 = \pi(\pi - 2).$$

Exemplo (continuação)

Processo 2. A superfície admite também a seguinte parametrização:

$$\begin{cases} x = (1-\sqrt{1-u^2})\sin v, & 0 \le v \le 2\pi \\ y = (1-\sqrt{1-u^2})\cos v, & 0 \le u \le 1 \\ z = u \end{cases}$$

Então

$$E = \frac{1}{1-u^2}, G = (1-\sqrt{1-u^2})^2, F = 0$$

e

$$\begin{aligned} area(S) &= \iint_A \sqrt{EG - F^2}dxdy \\ &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-\sqrt{1-u^2})^2}{1-u^2}}\, du \end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

$$
\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^1 \frac{1-\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}}\, du \\
&= 2\pi[\arcsin u - u]_0^1 \\
&= 2\pi\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \\
&= \pi(\pi - 2).
\end{aligned}
$$

Gradiente.

Considere-se a função real $\varphi(x, y, z)$ definida e continuamente derivável num domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^3$, isto é, um *campo escalar.* Definiu-se *gradiente* da função φ ou gradiente do campo escalar φ num ponto $P \in D$ ao vector

$$\vec{v} = grad(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

O gradiente faz corresponder a cada ponto um vector, isto é, o gradiente pode ser interpretado como um operador que transforma um campo escalar num campo vectorial.

Exemplo

Se $\varphi(x, y, z) = xy - z^2$ *então*

$$grad(\varphi) = y\vec{i} + x\vec{j} - 2z\vec{k}.$$

No ponto $(1, 1, 1)$ *tem-se* $grad(\varphi)_{(1,1,1)} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$

Vejamos, em seguida, algumas propriedades do gradiente:

1. Sejam $\varphi(x, y, z)$ e $\psi(x, y, z)$ dois campos escalares, definidos e continuamente deriváveis num domínio aberto D, então tem-se:

1. $grad(\varphi + \psi) = grad(\varphi) + grad(\psi)$,
2. $grad(a\,\varphi) = a\,grad(\varphi)$,
3. $grad(\varphi\psi) = grad(\varphi)\,\psi + \varphi\,grad(\psi)$,
4. $grad(\frac{\varphi}{\psi}) = \dfrac{grad(\varphi)\psi - \varphi grad(\psi)}{\psi^2}$.

Demonstração: Vejamos, por exemplo, (c):

$$\begin{aligned}
grad(\varphi\psi) =& \frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi\psi)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi\psi)\vec{k} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}(\varphi)\psi + \varphi\frac{\partial}{\partial x}(\psi)\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y}(\varphi)\psi + \varphi\frac{\partial}{\partial y}(\psi)\right)\vec{j} \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial z}(\varphi)\psi + \varphi\frac{\partial}{\partial z}(\psi)\right)\vec{k} \\
&= \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}(\psi)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\psi)\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(\psi)\vec{k}\right) \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(\varphi)\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi)\vec{j}\frac{\partial}{\partial z}(\varphi)\vec{k}\right)\psi \\
&= \varphi\, grad(\psi) + grad(\varphi)\psi.
\end{aligned}$$

2. Os pontos para os quais se tem $\varphi(x, y, z) = C$, com C constante, definem o que se chama uma *superfície de nível* do campo escalar. Se esta superfície de nível tem plano tangente no ponto (a, b, c), as derivadas $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$ nesse ponto são parâmetros directores da normal à superfície, e portanto $grad(\varphi)$, no ponto considerado, tem a direção da normal a superfície de nível que passa pelo ponto.
Recordemos que se tem

$$N = O + a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

3. Continuando a supor que $\varphi(x, y, z)$ é continuamente derivável num domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^3$, a derivada da função $\varphi(x, y, z)$ num ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$, segundo o vector $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ é, como se sabe, dada por

$$D_{\vec{u}}\varphi(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}_{P_0} u_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}_{P_0} u_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}_{P_0} u_3$$

que também se pode escrever na forma $grad(\varphi)_{P_0} \mid \vec{u}$.

Rotacional.

Considere-se o campo vectorial $\vec{v}$ definido num domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^3$, pela função vectorial $\vec{v} = v_1(x, y, z)\vec{i} + v_2(x, y, z)\vec{j} + v_3(x, y, z)\vec{k}$, que suporemos continuamente derivável nesse domínio. Chama-se rotacional de $\vec{v}$ num ponto $P \in D$ ao vector

$$(rot\ v)_P = \left(\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \vec{k} \right)_P$$

O rotacional pode ser interpretado como um operador que transforma um campo vectorial num campo vectorial.

Se $rot\ \vec{v} = 0$ em todo o domínio, o campo diz-se irrotacional, e resulta imediatamente que uma condição necessária e suficiente para que o campo seja irrotacional é que se tenha

$$\frac{\partial v_3}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Vejamos algumas propriedades do rotacional:

1. A definição do rotacional é independente do referencial considerado.
2. Se $grad(\varphi)$ é continuamente derivável num domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^3$ então

$$rot(grad(\varphi)) = 0$$

nesse domínio.

3. Veremos mais adiante que para certos domínios abertos de $\mathbb{R}^3$ o recíproco do teorema a que se refere a alínea anterior também é verdadeiro, isto é, se $rot\,\vec{v} = 0$, para qualquer $\vec{v}$ continuamente derivável nesse domínio, então $\vec{v}$ é o gradiente de um campo escalar.

4. Se $\vec{u}(x, y, z)$ e $\vec{v}(x, y, z)$ são dois campos vectoriais tais que $rot\,\vec{u}$ e $rot\,\vec{v}$ existem num conjunto aberto de $\mathbb{R}^3$, se φ define um campo escalar nesse domínio e existe $grad(\varphi)$ então:

1. $rot(\vec{u} + \vec{v}) = rot\,\vec{u} + rot\,\vec{v}$,
2. $rot(\varphi\vec{u}) = \varphi rot(\vec{u}) + grad(\varphi) \times \vec{u}$; em particular se $\varphi = k$ com k constante, vem que $rot(k\vec{u}) = k\,rot(\vec{u})$, pelo que o rotacional é um operador linear.

Divergência.

Consideremos o campo vetorial definido num domínio aberto de $\mathbb{R}^3$ pela função vectorial

$$\vec{v} = v_1(x,y,z)\vec{i} + v_2(x,y,z)\vec{j} + v_3(x,y,z)\vec{k}$$

continuamente derivável nesse domínio.

Chama-se *divergência* de $\vec{v}$ num ponto $P \in D$ e escreve-se

$$(div\ \vec{v})_P = \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right)_P.$$

A divergência é um operador que transforma um campo vectorial num campo escalar.

Se $div\ \vec{v} = 0$ em todo o domínio, o campo diz-se *solenoidal*.

Vejamos algumas propriedades da divergência.

1. É possível provar que a definição de divergência é independente do referencial considerado.

2. Se $\vec{u}(x, y, z)$ e $\vec{v}(x, y, z)$ são dois campos vectoriais tais que existem *div u* e *div v* num conjunto aberto, se $\varphi(x, y, z)$ é um campo escalar e no domínio existe $grad(\varphi)$ então:

1. $div\,(\vec{u} + \vec{v}\,) = div\,\vec{u} + div\,\vec{v}$,
2. $div\,(\varphi\vec{v}\,) = \varphi\, div\,\vec{u} + grad(\varphi)\cdot\vec{u}$. Em particular se $\varphi = k$, com k constante, vem que $div(k\vec{u}) = k\, div(\vec{u}\,)$, pelo que a divergência é um operador linear.

Demonstração de (2.b): Tem-se que

$$
\begin{aligned}
div\,(\varphi\vec{v}) = {}& div\,(\varphi v_1\vec{i} + \varphi v_2\vec{j} + \varphi v_3\vec{k}) \\
&= \frac{\partial(\varphi v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\varphi v_3)}{\partial z} \\
&= \varphi\frac{\partial(v_1)}{\partial x} + v_1\frac{\partial(\varphi)}{\partial x} + \varphi\frac{\partial(v_2)}{\partial y} + v_2\frac{\partial(\varphi)}{\partial y} + \varphi\frac{\partial(v_3)}{\partial z} + v_3\frac{\partial(\varphi)}{\partial z} \\
&= \varphi\Big(\frac{\partial(v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(v_3)}{\partial z}\Big) + v_1\frac{\partial(\varphi)}{\partial x} + v_2\frac{\partial(\varphi)}{\partial y} + v_3\frac{\partial(\varphi)}{\partial z} \\
&= \varphi\, div\,\vec{u} + grad(\varphi)\cdot\vec{u}
\end{aligned}
$$

3. Se v_1, v_2, v_3 são continuamente deriváveis até a segunda ordem em D, então $div(rot\,\vec{v}) = 0$.

Demonstração: Tem-se que

$$
\begin{aligned}
div(rot\,\vec{v}) =& div\left(\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right)\\
&= \frac{\partial\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)}{\partial z}\\
&= \frac{\partial^2 v_3}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v_2}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 v_3}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 v_1}{\partial z\partial y}=0
\end{aligned}
$$

Esta propriedade dá-nos uma condição necessária para que um campo vectorial $\vec{u}$ seja o rotacional de outro campo vectorial $\vec{v}$: é necessário que $div\,\vec{u}=0$ em todo o domínio.
Veremos mais adiante que em certos domínios esta condição também é suficiente.

O vector simbólico nabla ∇.

O vector nabla

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

tem as seguintes propriedades:

1. Aplicado a uma função escalar $\varphi(x, y, z)$ conduz ao gradiente, ou seja,

$$\nabla\varphi = grad(\varphi).$$

2. O seu produto interno com um campo vectorial $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ conduz à divergência

$$\nabla \cdot \vec{v} = div\,\vec{v}.$$

3. O seu produto externo com o vector $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$ conduz ao rotacional de v, isto é,

$$\nabla \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = rot\, v.$$

Por exemplo, para dizer que $div(rot\,\vec{v}) = 0$, pode escrever-se

$$\nabla \cdot \nabla \times \vec{v} = 0.$$

Laplaciano.

Seja um campo escalar definido num aberto. Tem-se

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2},$$

caso existam as segundas derivadas. Ao operador $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ chama-se *laplaciano*.

Se num certo domínio D se tiver $\nabla^2\varphi = 0$, diz-se que a função φ é harmónica nesse domínio.

Considere-se o campo vectorial $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$. Chama-se laplaciano de v, e escreve-se $\nabla^2 v$, ao vector

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \nabla^2 v_1 + \nabla^2 v_2 + \nabla^2 v_3.$$

À excepção do rotacional, as definições dadas em $\mathbb{R}^3$ estendem-se com toda a facilidade a $\mathbb{R}^n$.

Considere-se em $\mathbb{R}^3$ uma linha L definida parametricamente por

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), & a \leq t \leq b \\ z = \theta(t). \end{cases}$$

Seja $P(t) = (x, y, z) = (\varphi(t), \psi(t), \theta(t))$ um ponto genérico da linha e

$$\vec{u}(x, y, z) = u_1(x, y, z)\vec{i} + u_2(x, y, z)\vec{j} + u_3(x, y, z)\vec{k},$$

um campo vetorial contínuo definido num conjunto D contendo L. Consideremos uma partição de $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

Designemos por P_i a $P(t_i)$, tomemos em cada arco $\overline{P_iP_{i+1}}$ um ponto arbitrário Q_i e façamos a soma

$$S_n = \sum_{I=0}^{n-1} u(Q_i) \cdot (P_{i+1} - P_i),$$

onde $\cdot$ designa o produto interno.
Se esta soma tender para um limite finito quando a norma da partição tende para zero a esse limite chama-se *integral curvilíneo* ou *circulação da função vectorial* $\vec{u}$ ao longo da linha dada no sentido de $P(a)$ para $P(b)$, e representa-se por

$$\int_L \vec{u} dP$$

ou por

$$\int_L u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz.$$

Se a representação paramétrica da linha L for regular, prova-se que

$$\int_L \vec{u}(P)dP = \int_a^b \vec{u}\frac{dP}{dt}dt$$
$$= \int_a^b ((u_1\varphi'(t) + u_2\psi'(t) + u_3\theta'(t))dt.$$

Caso a linha seja regular por secções, é possível mostrar que, o integral curvilíneo ao longo da linha pode obter-se somando os valores dos integrais correspondentes a cada um dos arcos regulares. Observe-se que a circulação de $\vec{u}$ no sentido de $P(a)$ para $P(b)$ é igual e de sinal contrário ao da circulação no outro sentido.

Exemplo

Calcule-se

$$\int_C \vec{F}\, dP,$$

onde

$$\vec{F}(x,y,z) = (3x-2y)\vec{i} + (y+2z)\vec{j} - x^2\vec{k}$$

e C é a linha definida por

$$\begin{cases} x = z^2, \\ z = y^2, \end{cases}$$

percorrida de (0,0,0) a (1,1,1).

Exemplo

Uma parametrização da linha é

$$\begin{cases} x = t^4 \\ y = t, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ z = t^2 \end{cases}$$

e tem-se que

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}\, dP &= \int_0^1 ((3t^4 - 2t)4t^3 + (t + 2t^2) - t^8 2t)dt \\ &= \int_0^1 (12t^7 - 8t^4 + t + 2t^2 - 2t^9)dt \\ &= \left[\frac{12}{8}t^8 - \frac{8}{5}t^5 + \frac{t^2}{2} + \frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{10}t^{10}\right]_0^1 = \frac{13}{15}. \end{aligned}$$

Seja $\vec{u}$ um campo vectorial definido e continuamente derivável num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$,

$$\vec{u}(x, y) = u_1(x, y)\vec{i} + \vec{u}_2(x, y)\vec{j}.$$

Suponhamos que existe uma função $\varphi(x, y)$ definida em D tal que $\vec{u} = grad\, \varphi$.
Nestas condições diz-se que $\vec{u}$ é *um campo conservativo* em D e a φ chama-se uma f*unção potencial* de $\vec{u}$.

Seja $\vec{u}$ um campo conservativo e φ uma sua função potencial.
Tem-se que $\vec{u} = grad\, \varphi$ isto é

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_1 \text{ e } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u_2$$

que se escreve na forma diferencial

$$\partial \varphi = u_1 dx + u_2 dy.$$

Uma condição necessária para que o campo seja conservativo em D é que

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x}\,.$$

Com efeito, tem-se

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\,.$$

Sendo $\vec{u}$ continuamente derivável em D o teorema de Schwarz permite concluir que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

e portanto

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Suponhamos que o campo

$$\vec{u}(x,y) = u_1(x,y)\vec{i} + u_2(x,y)\vec{j}$$

continuamente derivável num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ é conservativo. Calculemos a sua circulação ao longo da linha regular L, contida em D, definida parametricamente por

$$\begin{cases} x = x(t), & a \leq t \leq b. \\ y = y(t) \end{cases}$$

Sejam $A = (x(a), y(a))$ e $B = (x(b), y(b))$ o início e o fim da linha. Seja φ uma função potencial de $\vec{u}$. Ao longo de L tem-se que

$$\varphi(x,y) = \varphi(x(t), y(t))$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_L \vec{u}\, dP =& \int_a^b ((u_1((x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + u_2((x(t),y(t))\frac{dy}{dt})dt \\
=& \int_a^b \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}((x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}((x(t),y(t))\frac{dy}{dt})dt\Big)dt \\
=& \int_a^b \frac{d\varphi}{dt}((x(t),y(t))dt \\
=&\varphi(x(b),y(b)) - \varphi(x(a),y(a)) \\
=&\varphi(B) - \varphi(A).
\end{aligned}
$$

Provámos que, se φ for uma função potencial de $\vec{u}$ e a linha for percorrida de A para B então

$$\int_L \vec{u}\, dP = \varphi(B) - \varphi(A),$$

isto é, num campo conservativo a circulação é independente do caminho, só depende dos extremos (este resultado ainda é válido se a linha for formada por um número finito de arcos regulares). Em particular se a linha for fechada

$$\int_L \vec{u}\, dP = 0.$$

Pode demonstrar-se que, reciprocamente, se o campo é tal que a circulação é independente do caminho então esse campo é conservativo.

Vamos agora mostrar que a condição

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x}$$

não é suficiente para garantir que um campo $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ seja conservativo.

Considere-se o campo

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j},$$

definido no conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 4\}$. Tem-se que:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Calculemos o integral ao longo da circunferência C centrada na origem e de raio 1, percorrida no sentido directo. Uma sua parametrização é

$$\begin{cases} x = \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ y = \sin t. \end{cases}$$

Tem-se

$$\int_C u\, dP = \int_0^{2\pi} \Big(-\sin t(-\sin t) + \cos t(\cos t) \Big) dt = 2\pi.$$

Como o valor do integral é diferente de zero, o campo não é conservativo.

Teorema

Seja $\vec{u}(x,y) = u_1(x,y)\vec{i} + u_2(x,y)\vec{j}$ um campo vectorial continuamente derivável definido num conjunto aberto simplesmente conexo D. Uma condição necessária e suficiente para que $\vec{u}$ seja conservativo em D é que

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in D.$$

Demonstração. Já sabemos que a condição é necessária. Vejamos que também é suficiente.
Sejam (x_0, y_0) e (x,y) dois pontos de C e consideremos caminhos elementares ligando (x_0, y_0) a (x,y), isto é, caminhos formados por um número finito de segmentos de recta paralelos aos eixos coordenados e possuindo apenas pontos simples (excepto, possivelmente, os extremos) contidos em D.
É possível provar-se que existem sempre tais caminhos.

Vamos então mostrar que o integral curvilíneo

$$\int_L u_1 dx + u_2 dy$$

tem sempre o mesmo valor para quaisquer dois caminhos elementares unindo (x_0, y_0) a (x, y), desde que se verifique $\dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x}$.

Sejam L_1, L_2 dois desses caminhos, que podem coincidir ao longo de certos segmentos, com as partes não coincidentes a admitirem, no máximo, um número finito de intersecções. Tem-se assim um número finito de domínios interiores a D.
Seja D_1 um desses subdomínios. A circulação ao longo da sua fronteira no sentido positivo é igual a zero, pois pela fórmula de Riemann-Green

$$\int_{(\partial D_1)^+} u_1 dx + u_2 dy = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) d\sigma = 0.$$

Segue-se que o integral $\int_L u_1 dx + u_2 dy$ é independente do caminho elementar considerado. Fixando o ponto (x_0, y_0) o valor do integral é assim uma função de (x, y), que podemos designar $\varphi(x, y)$.

Escolhamos um caminho tal que o último segmento de recta seja paralelo ao eixo dos yy. Tem-se:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \varphi(x_0, y_0) + \int_{L_1} (u_1 dx + u_2 dy) + \int_{L_2} (u_1 dx + u_2 dy) \\ &= C + \int_{x_0}^{x} u_1(t, y_0) dt + \int_{y_0}^{y} u_2(x, t) dt.\end{aligned}$$

Tem-se que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = u_2(x, y)$ e

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= u_1(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, t)dt = \ u_1(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, t)dt \\ &= u_1(x, y_0) + [u_1(x, y)]_{y_0}^{y} \\ &= u_1(x, y_0) + u_1(x, y) - u_1(x, y_0) = \ u_1(x, y),\end{aligned}$$

isto é, $\nabla \varphi = \vec{u}$ e $\vec{u}$ é conservativo.
Tem-se então que φ é uma função potencial do campo conservativo $\vec{u}$. Se ψ for outra função potencial de $\vec{u}$ tem-se que

$$\partial \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = u_1 dx + u_2 dy$$

e portanto $\partial \varphi - \partial \psi = d(\varphi - \psi) = 0$. Isto prova que duas funções potenciais do mesmo campo conservativo diferem por uma constante.

Exemplo

Seja $\vec{u} = xy^2\vec{i} + (x^2y + y)\vec{j}$, *cujo domínio é* $D = \mathbb{R}^2$, *que é simplesmente conexo. Como se tem*

$$\frac{\partial(xy^2)}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial(x^2y + y)}{\partial x}$$

o campo vectorial $\vec{u}$ *é conservativo. Determinemos uma sua função potencial* $\varphi(x, y)$. *Tem-se que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = xy^2 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2y + y \end{cases},$$

Exemplo (continuação)

Apartir da primeira equação, primitivando em ordem a x vem que

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y).$$

Derivando esta última função em ordem a y e igualando à segunda equação vem que

$$x^2y + g'(y) = x^2y + y$$

o que permite concluir que $g'(y) = y$. Uma função potencial do campo vectorial $\vec{u}$ é, por exemplo,

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(x^2y^2 + y^2).$$

Os resultados anteriores estendem-se para o caso de campos vectoriais em $\mathbb{R}^3$. Se

$$\vec{u}(x,y,z) = u_1(x,y,z)\vec{i} + u_2(x,y,z)\vec{j} + u_3(x,y,z)\vec{k}.$$

for um campo vectorial definido num domínio aberto $D \subset \mathbb{R}^3$ e se existir $\varphi(x,y,z)$ tal que $\vec{u} = grad\,\varphi$ diz-se que $\vec{u}$ é conservativo e a circulação de $\vec{u}$, ao longo de qualquer linha L, contínua e seccionalmente regular contida em D só depende dos extremos da linha, isto é,

$$\int_L u\,dP = \varphi(B) - \varphi(A),$$

sendo A, B os extremos da linha percorrida de A para B.

Em particular se a linha for fechada a circulação é nula.

Reciprocamente se $\int_L \vec{u}\, dP$ for independente do caminho de integração então o campo vectorial deriva de uma função potencial $\varphi(x,y,z)$ que pode obter-se por

$$\varphi(x,y,z) =$$
$$\int_{x_0}^{x} u_1(t,y_0,z_0)dt + \int_{y_0}^{y} u_2(x,t,z_0)dt + \int_{x_0}^{x} u_3(x,y,t)dt,$$

sendo (x_0,y_0,z_0) um ponto do domínio de $\vec{u}$.

Uma condição necessária para que um campo $\vec{u}$ definido e continuamente derivável num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^3$ seja conservativo é que $rot\ \vec{u} = 0$ em D, o que é o mesmo que afirmar que

$$rot\ \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\vec{k} = 0$$

donde

$$\frac{\partial u_3}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial z},\ \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial u_3}{\partial x},\ \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial y}, \quad \forall (x, y, z) \in D.$$

Essas condições passam a ser são suficientes se o domínio D para além de aberto também for simplesmente conexo, isto é, se

$$\vec{u}(x,y,z) = u_1(x,y,z)\vec{i} + u_2(x,y,z)\vec{j} + u_3(x,y,z)\vec{k}$$

estiver definido e for continuamente derivável num domínio aberto e simplesmente conexo D, $\vec{u}(x,y,z)$ é conservativo em D se e só se $rot\ \vec{u} = 0, \quad \forall (x,y,z) \in D$.

Uma expressão diferencial da forma

$$u_1(x,y,z)dx + u_2(x,y,z)dy + u_3(x,y,z)dz$$

diz-se uma *diferencial exacta* em $D \subset \mathbb{R}^3$ se existe $F(x,y,z)$ tal que

$$dF = u_1(x,y,z)dx + u_2(x,y,z)dy + u_3(x,y,z)dz$$

e F diz-se uma sua *primitiva*.

Tem-se que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = u_1, \; \frac{\partial F}{\partial y} = u_2, \; \frac{\partial F}{\partial z} = u_3.$$

O que foi dito anteriormente relativamente a campos conservativos permite dizer que condições devem obedecer u_1, u_2, u_3 para que $u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz$ seja uma diferencial exacta, e indica-nos ao mesmo tempo uma maneira de obter uma sua função primitiva.

Exemplo

Mostre que

$$2xz\,dx + \; z^2\,dy + \; (x^2 + 2yz)\,dz$$

é exacta e determine uma sua primitiva.
Comecemos por notar que o seu domínio é todo o $\mathbb{R}^3$*, que é um conjunto aberto e simplesmente conexo.*
A expressão diferencial será exacta se e só se o campo

$$2xz\vec{i} + z^2\vec{j} + (x^2 + 2yz)\vec{k}$$

for conservativo, isto é, se rot $\vec{u} = 0$*. Ora, com efeito,*

$$rot\,(2xz\vec{i} + z^2\vec{j} + (x^2 + 2yz)\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xz & z^2 & x^2 + 2yz \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Exemplo

Calculemos uma sua primitiva, escolhendo $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. *Tem-se*

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= \int_0^x u_1(t,0,0)dt + \int_0^y u_2(x,t,0)dt + \int_0^z u_3(x,y,t)dt \\ &= 0 + 0 + \int_0^z (x^2 + 2yt)dt \\ &= [x^2 t + yt^2]_0^z \\ &= x^2 z + yz^2.\end{aligned}$$

Uma sua qualquer primitiva é da forma

$$F(x,y,z) = x^2 z + yz^2 + C, \;\; C \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

Utilizando o facto do campo

$$\vec{u}(x,y,z) = (2xe^{x^2+y^2+z})\vec{i} + (2ye^{x^2+y^2+z} + z)\vec{j} + (e^{x^2+y^2+z} + y - 2z)\vec{k}$$

ser conservativo determine uma sua função potencial, e ainda

$$\int_C u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz,$$

sendo C a linha definida parametricamente por

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi \\ z = t, \end{cases}$$

percorrida no sentido crescente do parâmetro t.

Exemplo (continuação)

Designando por $\varphi(x, y, z)$ *uma função potencial de* $\vec{u}$ *tem-se que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xe^{x^2+y^2+z} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z} + z \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = e^{x^2+y^2+z} + y - 2z. \end{cases}$$

Primitivando a 1ª equação em ordem a x*, vem que*

$$\varphi(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z} + g(y, z).$$

Derivando $\varphi(x, y, z)$ *em ordem a* y *e igualando à 2ª equação, obtém-se*

$$2ye^{x^2+y^2+z} + \frac{\partial g}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2+z} + z,$$

Exemplo (continuação)

o que permite concluir que $\dfrac{\partial g}{\partial y} = z$. *Primitivando esta função em ordrm a* y, *vem que*

$$g(y, z) = yz + h(z).$$

Então

$$\varphi(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z} + yz + h(z).$$

Derivando agora $\varphi(x, y, z)$ *em ordem a* z *e igualando à 3ª equação, vem que*

$$e^{x^2+y^2+z} + y + h'(z) = e^{x^2+y^2+z} + y - 2z,$$

pelo que $h'(z) = -2z$, *ou ainda* $h(z) = -z^2 + c$, *com* $c \in \mathbb{R}$.
Fazendo, por exemplo, $c = 0$ *obtém-se a função potencial*

$$\varphi(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z} + yz - z^2.$$

Exemplo (continuação)

A linha C tem início no ponto $A=(1,0,0)$ e termina no ponto $B=(-1,0,\pi)$, pelo que

$$\int_C u_1 dx + u_2 dy + u_3 dz = \varphi(B)-\varphi(A) = e^{1+\pi}-\pi^2-e.$$

Integrais de superfície. Fluxo.

Considere-se uma superfície regular de $\mathbb{R}^3$ e o plano tangente à superfície num ponto P. Consideremos nesse plano tangente uma circunferência orientada, de centro P. Se movendo continuamente sobre a superfície o ponto P, o plano tangente e a circunferência, obtivermos para cada ponto apenas um sentido de rotação dizemos que a superfície é orientável.

Um exemplo de superfície orientável é, por exemplo, uma superfície esférica. Uma superfície não orientável é, por exemplo, a banda de Möbius.

No que se vai seguir apenas consideraremos superfícies orientáveis; neste tipo de superfícies podem-se considerar duas faces.

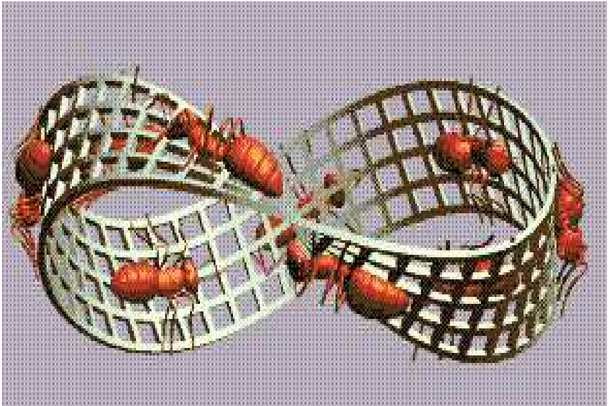

Figura: Faixa de Möbius.

Suponhamos associado a cada ponto P da superfície a circunferência orientada referida, e consideremos as seminormais orientadas em cada ponto da superfície. Para um observador colocado segundo uma das seminormais o sentido da orientação da circunferência é o retrógrado; para um observador colocado segundo a outra seminormal esse sentido é o directo. Estes dois sentidos definem as duas faces da superfície. No caso de uma superfície fechada podem então considerar-se uma face interior e outra exterior.

Consideremos um campo vectorial

$$\omega = \omega_1(x,y,z)\vec{i} + \omega_2(x,y,z)\vec{j} + \omega_3(x,y,z)\vec{k},$$

de domínio D e uma superfície regular S contida no domínio D, orientada, definida parametricamente por

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \quad (u, v) \in A \subset \mathbb{R}^2 , \\ z = \theta(u, v) \end{cases}$$

Sobre a superfície, $\vec{\omega}$ passa a ser uma função de u e v. Designemos por $\vec{n}$ o vector unitário dirigido segundo a seminormal orientada, num ponto genérico de uma das faces da superfície.

Chama-se *integral de superfície* da função vectorial $\vec{\omega}$ estendido à face considerada de S ao integral

$$\iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} ds = \iint_A (\vec{\omega}(u, v) \cdot \vec{n}(u, v)\sqrt{EG - F^2}\,) \, du \, dv,$$

onde

$$
\begin{aligned}
E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\
G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \\
F &= \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\frac{\partial z}{\partial v}
\end{aligned}
$$

sempre que o integral do segundo membro exista. Ao integral anterior também se chama fluxo do vector $\vec{\omega}$ através da face de S considerada, ou ainda fluxo de $\vec{\omega}$ através de S no sentido de $\vec{n}$.

O integral de superfície de $\vec{\omega}$ estendido à outra face é obviamente simétrico do dado pelo integral anterior.

Designemos por $P(u,v)$ um ponto genérico da superfície S dada pela representação paramétrica regular

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v), \quad (u,v) \in A \subset \mathbb{R}^2 \, . \\ z = \theta(u,v) \end{cases}$$

Sabe-se que os vectores $\dfrac{\partial P}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial P}{\partial v}$ são linearmente independentes e tangentes à superfície no ponto P pelo que o vector $\dfrac{\partial P}{\partial u} \times \dfrac{\partial P}{\partial v}$ dá a direcção da normal à superfície em P. E tem-se ainda que

$$\frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\vec{k}$$

Facilmente se verifica que

$$\left\|\frac{\partial P}{\partial u}\times\frac{\partial P}{\partial v}\right\| = \sqrt{\left(\frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right)^2}$$
$$=\sqrt{EG-F^2}.$$

Assim

$$\iint_S \vec{\omega}\cdot\vec{n}ds = \iint_A (\vec{\omega}(u,v)\cdot\vec{n}(u,v)\sqrt{EG-F^2})du\,dv$$
$$=\iint_A (\vec{\omega}(u,v)\cdot\vec{n}(u,v)\left\|\frac{\partial P}{\partial u}\times\frac{\partial P}{\partial v}\right\|)\,du\,dv.$$

Como se tem

$$\vec{n} = \pm \frac{\dfrac{\partial P}{\partial u} \times \dfrac{\partial P}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial P}{\partial u} \times \dfrac{\partial P}{\partial v} \right\|}$$

o integral anterior pode também ser escrito na forma

$$\begin{aligned}
&\iint_A \left(\vec{\omega}\,(u,v) \cdot \left(\pm \frac{\dfrac{\partial P}{\partial u} \times \dfrac{\partial P}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial P}{\partial u} \times \dfrac{\partial P}{\partial v} \right\|} \right) \left\| \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \right\| \, du\, dv \right. \\
&= \pm \iint_A \left(\vec{\omega}\,(u,v) \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \right) du\, dv \right. \\
&= \pm \iint_A \left(\vec{\omega}\,(u,v) \cdot \left(\frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(u,v)} \vec{i} + \frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(u,v)} \vec{j} + \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)} \vec{k} \right) du\, dv \right. \\
&= \pm \iint_A \left(\omega_1 \frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(u,v)} + \omega_2 \frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(u,v)} + \omega_3 \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)} \right) du\, dv,
\end{aligned}$$

com o sinal escolhido convenientemente. Sabe-se que sendo $\vec{n}$ unitário, e se forem $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ os seus cossenos directores, se tem

$$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k},$$

pelo que

$$\begin{aligned}
&\iint_S \vec{\omega}\cdot\vec{n}\,ds \\
&= \iint_S (\omega_1\cos\alpha + \omega_2\cos\beta + \omega_3\cos\gamma)\,ds \\
&= \iint_S \omega_1\cos\alpha\,ds + \iint_S \omega_2\cos\beta\,ds + \iint_S \omega_3\cos\gamma\,ds \\
&= \pm\iint_{A_1} \omega_1\,dydz \pm \iint_{A_2} \omega_2\,dxdz \pm \iint_{A_3} \omega_3\,dxdy
\end{aligned}$$

Se a superfície for formada por um número finito de partes regulares o fluxo através de uma das faces é igual à soma dos fluxos através de cada uma das partes regulares.

Exemplo

Considere o campo $\vec{\omega} = x\vec{i} + y\vec{k}$ *e determine o seu fluxo através da face exterior da superfície lateral do cilindro* $x^2 + y^2 = 1$, *compreendido entre os planos* $z = 0$ *e* $z = 1$.

A superfície cilíndrica admite a parametrização

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) = \cos u, & 0 \leq u \leq 2\pi \\ y = \psi(u, v) = \sin u, & 0 \leq v \leq 1 \\ z = \theta(u, v) = v. \end{cases}$$

Tem-se que

$$\vec{N} = \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(u, v)}\vec{i} + \frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(u, v)}\vec{j} + \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}\vec{k},$$

Exemplo (continuação)

com

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u & 0 \end{vmatrix} = 0, \ \frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u,$$

$$\frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin u & 0 \end{vmatrix} = \sin u;$$

então $\vec{N} = \dfrac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \dfrac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \dfrac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\vec{k} = \cos u\vec{i} + \sin u\vec{j}$

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{\omega}\cdot\vec{n}\,ds &= \pm \iint_A \Big(\cos u(\cos u) + 0 + \sin u \cdot 0\Big)\,du\,dv \\ &= \pm \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \cos^2\ u\,du\Big)\,dv = \pm\int_0^{2\pi} \cos^2\ u\,du \\ &= \pm\left[\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}\right]_0^{2\pi} = \pm\pi.\end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Fazendo, por exemplo, $u = \dfrac{\pi}{2}, v = 0$ *obtém-se o ponto* $(0, 1, 0)$ *e, nesse ponto,* $\vec{N} = \vec{j}$ *o que permite concluir que a normal determinada tem o sentido pretendido. Então*

$$\iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, ds = \pi.$$

Exemplo

Determine-se o fluxo do campo $\vec{\omega} = (xy + y^2)\vec{k}$ *através da face "exterior" do hemisfério* $z > 0$ *da superfície esférica*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Uma representação paramétrica da superfície é

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) = \sin u \cos v, & 0 \leq u \leq \pi/2 \\ y = \psi(u,v) = \sin u \sin v, & 0 \leq v \leq 2\pi \\ z = \theta(u,v) = \cos u, & \end{cases}$$

Tem-se que

$$\vec{N} = \frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\vec{k},$$

Exemplo

com

$$\frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos u \sin v & \sin u \cos v \\ -\sin u & 0 \end{vmatrix} = \sin^2 u \cos v,$$

$$\frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -\sin u & 0 \\ \cos u \cos v & -\sin u \sin v \end{vmatrix} = \sin^2 u \sin v,$$

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix} = \sin u \cos u;$$

vem que

$$\vec{N} = \sin^2 u \cos v \vec{i} + \sin^2 u \sin v \vec{j} + \sin u \cos u \vec{k}.$$

Exemplo

Em $(0,1,0)$, *correspondente a* $u = v = \dfrac{\pi}{2}$, *vem* $\vec{N} = \vec{j}$ *e portanto o vector normal tem o sentido da seminormal exterior, então:*

$$
\begin{aligned}
&\iint_S \vec{\omega}\cdot\vec{n}ds \\
&= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\pi/2}(\sin^2 u\cos v\sin v + (\sin u\sin v)^2)(\sin u\cos u)\,du\Big)\,dv \\
&= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\pi/2}(\sin^3 u\cos u\cos v\sin v + \sin^3 u\sin^2 v\cos u)\,du\Big)\,dv \\
&= \int_0^{2\pi}\Big[\frac{\sin^4 u}{4}\cos v\sin v + \frac{\sin^4 u}{4}\sin^2 v\Big]_0^{\pi/2} dv \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(\cos v\sin v + \sin^2 v)\,dv = \frac{1}{4}\Big[\frac{\sin^2 v}{2} + \frac{v}{2} + \frac{\sin 2v}{4}\Big]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Seja $\omega = \omega_1(x,y,z)\vec{i} + \omega_2(x,y,z)\vec{j} + \omega_3(x,y,z)\vec{k}$ um campo vetorial de domínio D e S uma superfície orientada contida em D. Suponhamos que a superfície é dada na forma cartesiana $z = f(x,y),\ (x,y) \in A$ com f continuamente derivável em A. Considerando a parametrização

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = x \\ \psi(x,y) = y, & \qquad (x,y) \in A \\ \theta(x,\ y) = f(x,y) \end{cases}$$

tem-se que

$$\vec{N} = -\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k},$$

e o fluxo do campo ω na face considerada de S é dado por

$$\iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} ds = \pm \iint_A (\omega_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial f}{\partial y} - \omega_3) dx\, dy.$$

Seja

$$\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k},$$

a seminormal unitária relativa à face considerada e suponhamos que

$$\vec{\omega} = w_3\vec{k}.$$

Neste caso particular, tem-se que

$$\iint_S \vec{\omega}\cdot\vec{n}ds = \iint_S \omega_3\cos\gamma\,ds = \pm\iint_A \omega_3\,dxdy.$$

Têm-se resultados análogos no caso em que a superfície é dada na forma cartesiana por equações da forma $x = h(y,z)$ ou $y = g(x,z)$.

Se a superfície S puder ser representada, simultaneamente, em qualquer das formas

$$x = h(y,z),\ \ y = g(x,z),\ \ z = f(x,y),$$

com h, g e f continuamente deriváveis em A_1, A_2 e A_3 respetivamente, os resultados anteriores permitem escrever

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{\omega}\cdot\vec{n}ds &= \iint_S (\,\omega_1\cos\alpha + \omega_2\cos\beta + \omega_3\cos\gamma)ds\\ &= \pm\iint_{A_1}\omega_1\,dy\,dz \pm \iint_{A_2}\omega_2\,dx\,dz \pm \iint_{A_3}\omega_3\,dx\,dy,\end{aligned}$$

o qual também se escreve, por vezes, na forma

$$\iint_S \omega_1\,dy\,dz + \omega_2\,dx\,dz + \omega_3\,dx\,dy.$$

Exemplo

Considere-se novamente o problema do exemplo anterior em que se calculou o fluxo do campo $\vec{\omega} = (xy + y^2)\vec{k}$ através da face "exterior"do hemisfério $z > 0$ da superfície esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Tendo em conta que $\vec{\omega}$ é da forma $\vec{\omega} = \omega_3 \vec{k}$ (e ω_3 não depende de z), este problema pode ser resolvido de forma mais expedita. Com efeito tem-se que

$$\iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} ds = \iint_S \omega_3 \cos\gamma \, ds = \iint_{A_3} (xy + y^2) \, dxdy,$$

onde A_3 é a projecção de S no plano xoy.

Exemplo

Utilizando coordenadas polares

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = \rho\sin\theta, & 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$

o integral anterior vem dado por

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (\rho\cos\theta\,\rho\sin\theta + (\rho\sin\theta)^2)\rho\, d\rho\right) d\theta \\ =& \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \rho^3(\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta)\, d\rho\right) d\theta \\ =& \int_0^{2\pi} (\cos\theta\sin\theta + \sin^2\theta)\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 d\theta = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exemplo

Determine-se o fluxo do campo $\vec{\omega} = x\vec{i}$ através da face "exterior" da porção da superfície cónica

$$x = \sqrt{y^2 + z^2},\ 0 \leq x \leq 1.$$

Designando por S a superfície considerada, tem-se que

$$\iint_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} ds = \iint_S \omega_1 \cos\alpha \, ds = -\iint_A \sqrt{y^2 + z^2} \, dydz,$$

(na face considerada $\cos\alpha < 0$) sendo A o círculo centrado na origem e de raio um do plano yoz (projecção de S no plano yoz). Utilizando coordenadas polares, tem-se que

$$-\iint_A \sqrt{y^2 + z^2} \, dydz = -\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \rho^2 d\rho \right) d\theta = -\frac{2}{3}\pi.$$

Teorema de Stokes.

A fórmula de Riemann-Green, estudada anteriormente, estabelece que se $\varphi(x,y)$ e $\psi(x,y)$ forem funções continuas, φ continuamente derivável em ordem a y, e ψ continuamente derivável em ordem a x, num domínio A limitado por uma linha L regular por secções, então

$$\iint_A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dxdy = \int_{L^+} \varphi\, dx + \psi\, dy.$$

Sendo $\vec{u} = \varphi(x,y)\vec{i} + \psi(x,y)\vec{j}$, calculemos o seu rotacional, tem-se que

$$rot\ \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \varphi & \psi & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Também se tem que

$$rot\,\vec{u}\cdot\vec{k}=\Big(\frac{\partial\psi}{\partial\,x}-\frac{\partial\varphi}{\partial\,y}\Big)\vec{k}\cdot\vec{k}=\frac{\partial\psi}{\partial\,x}-\frac{\partial\varphi}{\partial\,y}$$

pelo que a fórmula de Riemann-Green admite a seguinte formulação:

$$\iint_A rot\,\vec{u}\cdot\vec{k}\,dxdy=\int_{L^+}\vec{u}\,dP$$

A extensão desta fórmula a $\mathbb{R}^3$ é conhecida por *Teorema de Stokes.*

Teorema (de Stokes)

Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ *um conjunto simplesmente conexo, limitado por uma linha simples fechada* C*, seccionalmente regular e orientada no sentido positivo. Considere-se a superfície* S *regular, contradomínio da aplicação injectiva e continuamente derivável até à segunda ordem* $P : A \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ *definida pelas equações*

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \quad (u, v) \in A \\ z = \theta(u, v). \end{cases}$$

Seja L *a linha que limita a superfície* S*.*

Teorema (de Stokes)

Suponhamos que a superfície S está contida no domínio do campo vectorial continuamente derivável

$$\vec{\omega} = \omega_1(x,y,z)\vec{i} + \omega_2(x,y,z)\vec{j} + \omega_3(x,y,z)\vec{k}.$$

Nestas condições tem-se que

$$\iint_S rot\,\vec{\omega}\cdot\vec{n}\,ds = \int_L \vec{\omega}\,dP.$$

sendo o integral curvilíneo calculado no sentido determinado por C e tendo $\vec{n}$ um sentido tal que, em relação a ele, a linha L que limita a superfície é percorrida no sentido directo.

Demonstração: Tendo em conta o que foi visto nas secções anteriores a expressão

$$\iint_S rot\,\vec{\omega}\cdot\vec{n}\,ds = \int_L \vec{\omega}\,dP,$$

pode escrever-se com a forma

$$\begin{aligned}\iint_S \Big[\Big(\frac{\partial\omega_3}{\partial y}-\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\Big)\cos\alpha + \Big(\frac{\partial\omega_1}{\partial z}-\frac{\partial\omega_3}{\partial x}\Big)\cos\beta \\ +\Big(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}-\frac{\partial\omega_1}{\partial y}\Big)\cos\gamma\Big]\,ds \\ = \int_L \omega_1\,dx+\omega_2\,dy+\omega_3\,dz.\end{aligned}$$

O primeiro membro dessa expressão se pode também escrever-se na forma

$$\iint_S \Big[\Big(\frac{\partial\omega_1}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial\omega_1}{\partial y}\cos\gamma\Big) + \Big(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial\omega_2}{\partial z}\cos\alpha\Big) + \Big(\frac{\partial\omega_3}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial\omega_3}{\partial x}\cos\beta\Big)\Big]\, ds.$$

Vamos mostrar que se tem

$$\iint_S \Big(\frac{\partial\omega_1}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial\omega_1}{\partial y}\cos\gamma\Big) ds = \int_L \omega_1\, dx$$

(e, de forma análoga, também se prova que

$$\iint_S \Big(\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial\omega_2}{\partial z}\cos\alpha\Big) ds = \int_L \omega_2\, dy$$

$$\iint_S \Big(\frac{\partial\omega_3}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial\omega_3}{\partial x}\cos\beta\Big) ds = \int_L \omega_3\, dz).$$

Sendo a superfície regular, os jacobianos

$$J_1 = \frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(u,v)},\ J_2 = \frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(u,v)},\ J_3 = \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}$$

não se anulam simultaneamente. Seja $D = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}$. A condição anterior relativa aos jacobianos implica que $D > 0$. Tem-se também que

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \vec{n} = \pm\frac{\dfrac{\partial P}{\partial u} \times \dfrac{\partial P}{\partial u}}{\left\|\dfrac{\partial P}{\partial u} \times \dfrac{\partial P}{\partial u}\right\|} = \pm\left(\frac{J_1}{D}, \frac{J_2}{D}, \frac{J_3}{D}\right)$$

É possível mostrar-se que, nas condições consideradas, dever-se-á escolher o sinal positivo; pelo que

$$\cos\alpha = \frac{J_1}{D}, \cos\beta = \frac{J_2}{D}, \cos\gamma = \frac{J_3}{D}.$$

Sabe-se também que

$$ds = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \left\| \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial u} \right\| dudv = D\, dudv.$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} & \iint_S \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial z} \cos\beta - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \cos\gamma \right) ds \\ = & \iint_A \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial z} \cos\beta - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \cos\gamma \right) D\, dudv \\ = & \iint_A \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial z} J_2 - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} J_3 \right) dudv, \end{aligned}$$

onde a expressão $\frac{\partial \omega_1}{\partial z} J_2 - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} J_3$ está expressa nas variáveis u e v.

Tem-se agora que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_1}{\partial z} J_2 - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} J_3 = & \ \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(u, v)} - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \\
& = \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) \\
& = \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial \omega_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \\
& = \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} \\
& = \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\omega_1 \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\omega_1 \frac{\partial x}{\partial u} \right)
\end{aligned}$$

e consequentemente

$$
\begin{aligned}
&\iint_S \Big(\frac{\partial \omega_1}{\partial z} \cos\beta - \frac{\partial \omega_1}{\partial y} \cos\gamma \Big) ds \\
&= \iint_A \Big(\Big(\frac{\partial \omega_1}{\partial u} \Big) \frac{\partial x}{\partial v} - \Big(\frac{\partial \omega_1}{\partial v} \Big) \frac{\partial x}{\partial u} \Big) du dv \\
&= \iint_A \Big(\frac{\partial}{\partial u} \Big(\omega_1 \frac{\partial x}{\partial v} \Big) - \frac{\partial}{\partial v} \Big(\omega_1 \frac{\partial x}{\partial u} \Big) \Big) du dv \\
&= \int_L \omega_1 \frac{\partial x}{\partial u} du + \omega_1 \frac{\partial x}{\partial v} dv = \int_L \omega_1 dx,
\end{aligned}
$$

tendo-se aplicado a fórmula de Riemann-Green na penúltima igualdade.

Exemplo

Verifique o teorema de Stokes no caso em que

$$\vec{\omega} = (x+z)\vec{j} - 3xy^2\vec{k}$$

e S é a face "exterior" da parte da superfície cónica

$$z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}, 0 \leq z \leq 2.$$

Uma parametrização da superfície considerada é

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) = u\cos v, & 0 \leq v \leq 2\pi \\ y = \psi(u,v) = u\sin v, & 0 \leq \ u \leq 2 \\ z = \theta(u,v) = 2-u. & \end{cases}$$

Exemplo

Tem-se que

$$\frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \sin v & u\cos v \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = u\cos v,$$

$$\frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \cos v & -u\sin v \end{vmatrix} = u\sin v$$

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ \sin v & u\cos v, \end{vmatrix} = u,$$

pelo que

$$\vec{N} = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + u\,\vec{k}.$$

O sentido de $\vec{N}$ é o da seminormal exterior como pretendido.

Exemplo

Tem-se que

$$rot\,\vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x+z & -3xy^2 \end{vmatrix} = (-6xy-1)\vec{i} + 3y^2\vec{j} + \vec{k}.$$

Então

$$\iint_S rot\,\vec{\omega}\cdot\vec{n}ds$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 \Big((-6u^2\cos v\sin v - 1)\vec{i} + 3u^2\sin^2 v\,\vec{j} + \vec{k}\Big)\right.$$

$$\left. .\Big(u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + u\vec{k}\Big)du\right)dv$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2 (-6u^3\cos^2 v\sin v - u\cos v + 3u^3\sin^3 v + u)du\right)dv$$

Exemplo

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{3}{2} u^4 \cos^2 v \sin v - \frac{u^2}{2} \cos v + \frac{3}{4} u^4 \sin^3 v + \frac{u^2}{2} \right]_0^2$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(-24 \cos^2 v \sin v - 2 \cos v + 12 \sin^3 v + 2 \Big) dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(-24 \cos^2 v \sin v - 2 \cos v + 12 (\sin v - \sin v cos^2 v) + 2 \Big) dv$$

$$= \left[8 \cos^3 v - 2 \sin v + 12 (- \cos v + \frac{1}{3} \cos^3 v) + 2v \right]_0^{2\pi}$$

$$= 4\pi.$$

Exemplo

Consideremos agora a linha L de equação $x^2 + y^2 = 4$ *do plano* $z = 0$. *Esta linha pode ser representada parametricamente por:*

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \\ z = 0 \end{cases}$$

Então vem que

$$\int_L \vec{\omega} \cdot dL = \int_0^{2\pi} \left(\omega_1(t)\frac{dx}{dt} + \omega_2(t)\frac{dy}{dt} + \omega_3(t)\frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cos t \cdot 2\cos t \; dt = 4\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = 4\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{2\pi} = 4\pi.$$

Teorema de Ostrogradski ou da divergência.

Considere-se de novo a fórmula de Riemann-Green

$$\iint_A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) d\sigma = \int_{L^+} \varphi\, dx + \psi\, dy.$$

Se for $\vec{u} = \psi \vec{i} - \varphi \vec{j}$ pode escrever-se na forma

$$\iint_A div\, \vec{u}\, d\sigma = \int_{L^+} \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS$$

sendo $\vec{n}$ um vector unitário dirigido segundo a normal a L e orientado para fora, e dS, é o elemento do arco de linha.

Que se tem $div\, \vec{u} = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ é imediato; por outro lado, considerando uma parametrização de L,

$$
\begin{cases}
x = \alpha(t), & t_0 \leq t \leq t_1 \\
y = \beta(t), &
\end{cases}
$$

tem-se que

$$
dS = \sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2}\, dt \text{ e } \vec{n} = \frac{\beta'(t)\vec{i} - \alpha'(t)u\vec{j}}{\sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2}}.
$$

Então

$$
\begin{aligned}
\vec{u} \cdot \vec{n}\, dS =& (\psi\vec{i} - \varphi\vec{j}) \cdot (\psi\vec{i} - \varphi\vec{j}) dS \\
&= (\psi\vec{i} - \varphi\vec{j}) \cdot \frac{\beta'(t)\vec{i} - \alpha'(t)\vec{j}}{\sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2}} \sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2}\, dt \\
&= (\psi\vec{i} - \varphi\vec{j}) \cdot (\beta'(t)\vec{i} - \alpha'(t)\vec{j})\, dt \\
&= (\psi(\alpha(t), \beta(t))\beta'(t) dt + \varphi(\alpha(t), \beta(t))\alpha'(t) dt \\
&= \varphi(x, y) dx + \psi(x, y) dy.
\end{aligned}
$$

Teorema (Teorema da divergência)

Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ *um domínio fechado limitado por uma superfície* S*, que é cortada quando muito em dois pontos por qualquer linha paralela um dos eixos coordenados. Seja*

$$\vec{\omega} = \omega_1(x,y,z)\vec{i} + \omega_2(x,y,z)\vec{j} + \omega_3(x,y,z)\vec{k}$$

um campo vectorial continuamente derivável num aberto que contém D*. Então*

$$\iiint_D div\,\vec{\omega}\,dv = \iint_S \vec{\omega}\cdot\vec{n}\,dS$$

sendo o integral de superfície estendido à face exterior de S*.*

Demonstração: A igualdade

$$\iiint_D div\,\vec{\omega}\,dv = \iint_S \vec{\omega}\cdot\vec{n}\,d\sigma$$

também pode ser escrita

$$\iiint_D \Big(\frac{\partial\omega_1}{\partial x}+\frac{\partial\omega_2}{\partial y}+\frac{\partial\omega_3}{\partial z}\Big)dv = \iint_S (\omega_1\cos\alpha+\omega_2\cos\beta+\omega_3\cos\gamma)dS$$

Vejamos que

$$\iiint_D \frac{\partial\omega_3}{\partial z}dv = \iint_S \omega_3\cos\gamma\,dS.$$

Seja $\omega_3(x, y, z)$ uma primitiva em relação a z de $\dfrac{\partial \omega_3}{\partial z}$. Tem-se

$$\iiint_D \frac{\partial \omega_3}{\partial z} dv = \iint_A \Big[\omega_3(x, y, z)\Big]_{z_1=f_1(x,y)}^{z_2=f_2(x,y)} d\sigma$$
$$= \iint_A \omega_3(x, y, z_2) d\sigma - \iint_A \omega_3(x, y, z_1) d\sigma.$$

Tendo em conta que $d\sigma = cos\gamma\, dS_2$ no primeiro integral e $d\sigma = -cos\gamma dS_1$ no segundo, esta última expressão pode ser escrita na forma

$$\iint_{S_2} \omega_3(x, y, z) cos\gamma\, dS + \iint_{S_1} \omega_3(x, y, z) cos\gamma\, dS$$
$$= \iint_S \omega_3(x, y, z) cos\gamma\, dS.$$

De forma análoga, também se tem

$$\iiint_D \frac{\partial \omega_2}{\partial y} dv = \iint_S \omega_2 \cos\beta \, dS$$

$$\iiint_D \frac{\partial \omega_1}{\partial x} dv = \iint_S \omega_1 \cos\alpha \, dS.$$

Somando todos os integrais, obtém-se o resultado.

Exemplo

Determine o valor do fluxo do campo

$$\vec{\omega} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

na face exterior do domínio fechado D limitado superiormente pela superfície parabólica $z = 2 - (x^2 + y^2)$, *e inferiormente pelo plano* $z = 1$.

Exemplo (continuação)

Designemos por S_1 a superfície parabólica que limita D superiormente. A superfície S_1 admite a parametrização

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) = u\cos v, & 0 \le v \le 2\pi \\ y = \psi(u,v) = u\sin v, & 0 \le \ \ u \le 1 \\ z = \theta(u,v) = 2 - u^2. \end{cases}$$

Tem-se que

$$\vec{N}_1 = \frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\vec{k} = 2u^2\cos v\,\vec{i} + 2u^2\sin v\,\vec{j} + u\vec{k},$$

verifica-se que tem o sentido da seminormal exterior. Sendo assim

$$\iint_{S_1} \vec{\omega}\cdot\vec{n_1}\,dS_1$$

Exemplo (continuação)

$$\iint_{S_1} \vec{\omega} \cdot \vec{n_1} \, dS_1 =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 \Big(\big(u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + (2 - u^2) \, \vec{k}\big)$$

$$. \, (2u^2 \cos v \, \vec{i} + 2u^2 \sin v \, \vec{j} + u\vec{k}) \, du \Big) dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 \Big(2u^3 \cos^2 v \; + 2u^3 \sin^2 v + (2 - u^2) u \Big) \, du \Big) dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 \Big(u^3 + 2u \Big) \, du \Big) dv = 2\pi \left[\frac{u^4}{4} + u^2 \right]_0^1$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{4} + 1 \right) = \frac{5}{2}\pi.$$

Exemplo (continuação)

Designemos por S_2 a superfície que limita D inferiormente. A superfície S_2 admite a parametrização

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v) = u\cos v, & 0 \leq v \leq 2\pi \\ y = \psi(u,v) = u\sin v, & 0 \leq \ u \leq 1 \\ z = \theta(u,v) = 1. \end{cases}$$

Tem-se que

$$\vec{N_2} = \frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\vec{k} = u\vec{k},$$

que tem o sentido da seminormal interior.

Exemplo (continuação)

Sendo assim

$$
\begin{aligned}
\iint_{S_2} \vec{\omega} \cdot \vec{n_2}\, dS_2 &= -\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 \big((u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + \vec{k}) \cdot (u \vec{k}) \big)\, du \Big) dv \\
&= -\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^1 u\, du \Big) dv \\
&= -2\pi \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = -\pi
\end{aligned}
$$

e o fluxo total é

$$
\iint_{S_1} \vec{\omega} \cdot \vec{n_1} dS_1 + \iint_{S_2} \vec{\omega} \cdot \vec{n_2} dS_2 = \frac{3}{2}\pi.
$$

Determinemos agora o mesmo fluxo calculando um integral triplo.

Exemplo (continuação)

Utilizando coordenadas cilíndricas tem-se que

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = \rho\sin\theta, & 0 \leq \rho \leq 1, \qquad |J| = \rho \\ z = z, & 1 \leq z \leq 2 - \rho^2 \end{cases}$$

Tem-se que

$$Div\,(\vec{w}) = Div\,(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 3,$$

pelo que o fluxo pretendido, utilizando o teorema da divergência pode ser obtido pelo cálculo do integral triplo

Exemplo (continuação)

$$\begin{aligned}\iiint_D 3\,dv &= \int_0^{2\pi} 1 \left(\int_0^1 \left(\int_1^{2-\rho^2} 3\rho\,dz \right) d\rho \right) d\theta \\ &= 6\pi \int_0^1 \left(\int_1^{2-\rho^2} \rho\,dz \right) d\rho \\ &= 6\pi \int_0^1 \rho(2-\rho^2-1)\,d\rho = 6\pi \int_0^1 (\rho-\rho^3)\,d\rho \\ &= 6\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = 6\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$