Número: ________Curso:________Caderno:________Nome: ____

A primeira parte do exame é constituida por 5 questões de escolha múltipla.
Nas questões 1 a 5 assinale com "x" a resposta correcta.
Cada resposta correcta vale 1.0 valor. Respostas em branco valem 0 valores. Se responder erradamente ou de forma ambígua ser-lhe-á atribuída uma cotação negativa correspondente a 0.2 valores.
Se a soma das cotações da escolha múltipla for negativa, será atribuído 0 valores à escolha múltipla.

Classificação
EM -
TOTAL-

1. Considere o intervalo $[a,b]$, com $a = x_0 < x_1 < ... < x_{10} = b$ e uma função não linear, f, da qual se conhece a seguinte tabela:

x	x_0	x_1	...	x_{10}
$f(x)$	y_0	y_1	...	y_{10}

Pretende-se aproximar f por uma **função interpoladora** nos pontos da tabela de forma a que esta tenha poucas ou nenhumas oscilações junto das extremidades do intervalo [a,b]. Para o efeito deve utilizar-se:

☐ **a)** O polinómio de Lagrange interpolador de f nos pontos da tabela.

☐ **b)** O polinómio do grau 2 que aproxima a função tabelada segundo o método dos mínimos quadrados.

☐ **c)** O polinómio de Newton com diferenças divididas interpolador de f nos pontos da tabela.

☒ **d)** O spline cúbico natural, interpolador de f dos pontos da tabela.

2. Seja $f(x) \in C^2[1,3]$ uma função que verifica $f^{(n)}(x) = \frac{x^n}{3}$, $\forall x \in [1,3]$. Se pretendesse calcular um valor aproximado de $I = \int_1^3 f(x)dx$ utilizando a regra dos trapézios, qual o menor número de sub-intervalos de igual amplitude em que teria de dividir o intervalo [1, 3], por forma a garantir pelo menos 1 casa decimal significativa para do erro absoluto da aproximação?

☐ **a)** 6

☐ **b)**14

☒ **c)**7

☐ **d)**8

3. Considere a função $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ e $S(x)$ o spline cúbico natural interpolador de f nos pontos $0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 = 1$. Qual o valor da expressão $S(0) - S''(0) - 2S(1) + 2S''(1)$?

   ☐ **a)** 0
   ☐ **b)** $\frac{1}{e}$
   ☐ **c)** 1
   ☒ **d)** $-\frac{2}{e}$

4. Seja α a raiz única da equação não linear $f(x) = 0$ no intervalo $[a, b]$. Considere as sucessões definidas por recorrência $x_n = g_1(x_{n-1})$ e $y_n = g_2(y_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, ambas convergentes para α, com g_1 e g_2 duas funções definidas e continuas em $[a, b]$ tais que $g_1(\alpha) = \alpha$, e $g_2(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Além disso tem-se $0 \neq |g_1'(\alpha)| < 1$ e $g_2'(\alpha) = 0$. Considerando que $x_0 = y_0 \in [a, b]$, qual das opções seguintes é a correta?

   ☐ **a)** A sucessão x_n tem ordem de convergência $p > 1$.

   ☐ **b)** A sucessão x_n converge mais rapidamente que y_n.

   ☒ **c)** A sucessão y_n converge mais rapidamente que x_n.

   ☐ **d)** A sucessão y_n tem ordem de convergência $p = 1$.

5. Considere a matrix $A = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -a \\ 0 & -3 & a \end{bmatrix}$ do sistema de equações lineares $AX = B$ com $a \in \mathbb{R}$ e $X, B \in \mathbb{R}^3$. De forma a garantir a convergência do método de Gauss-Siedel para a solução de $AX = B$, qual dos seguintes valores pode ser assumido por a?

   ☐ **a)** a=4

   ☒ **b)** a=5.5

   ☐ **c)** a=-3

   ☐ **d)** a=8

A segunda parte do exame é constituida por 5 grupos de questões. Cada resposta deverá estar convenientemente justificada.
Cotações: Questão 6: 2 valores; **Questão 7:** 3 valores; **Questão 8:** 3 valores; **Questão 9:** 5 valores; **Questão 10:** 2 valores.

6. Seja f uma função da qual se conhece a seguinte tabela de valores:

x	-1	0	1
$f(x)$	10	3	7

   (a) Construa uma tabela de diferenças divididas e o correspondente polinómio de Newton interpolador de f na tabela dada. Determine um valor aproximado de $f(-0.5)$ (Não necessita apresentar o polinómio na forma simplificada).

   (b) Sabendo que $f^{(3)}(x) = 12$, determine um majorante do erro absoluto para a aproximação de $f(-0.5)$ obtida em a).

7. Considere a seguinte tabela relativa a uma função f

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-5	-6	k	22

com $k \in \mathbb{R}$ e $I = \displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)dx$.
Sabe-se que f é uma função do tipo $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ em que $a = 1$ e $b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

   (a) Determine uma aproximação de I usando a regra de Simpson simples.

   (b) Determine uma aproximação de I usando a regra de Simpson composta em função de k.

   (c) Usando as alineas anteriores determine k.

8. Considere a equação $1 - x - \sin(x) = 0$, a qual tem uma <u>única solução</u> α no intervalo [0.1,1].
   (a) Prove que α é ponto fixo de $\varphi(x) = 1 - \sin(x)$.
   (b) Prove que a sucessão $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, ...$ em que $x_0 = 0.5$ converge para α.
   (c) Determine x_2. Quantas casas decimais significativas pode garantir para x_2. Justifique.

9. Considere o sistema de equações lineares AX=B

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   Nota: Em todas as alíneas utilize 3 casas decimais convenientemente arredondadas.
   (a) Obtenha a matriz de iteração para o método de Jacobi e com base nessa matriz verifique a convergência da sucessão definida pelo mesmo método para a solução de $AX = B$.
   (b) Considerando como aproximação inicial $X^{(0)} = [1 \ \ 1 \ \ 1]^T$ obtenha $X^{(2)}$.
   (c) Sabendo que $X^{(9)} = [0.372 \ \ -0.270 \ \ -0.472]^T$ e $X^{(10)} = [0.365 \ \ -0.271 \ \ -0.478]^T$ são iteradas obtidas por aplicação do método de Jacobi com 3 casas decimais devidamente arredondadas, quantas casas decimais significativas pode garantir para $X^{(10)}$? Justifique.
   (d) Sabendo que a solução exacta do sistema é $X^* = [0.36 \ \ -0.28 \ \ -0.48]^T$, determine o erro relativo associado a cada compente de $X^{(10)}$.

10. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = -\dfrac{t}{y(t)}, & t \in [1, 2], \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

   (a) Mostre que as aproximações ω_i, dadas pelo método de Euler progressivo, com passo h para este problema são definidas por

$$\begin{cases} \omega_0 = 2 \\ \omega_{i+1} = \omega_i - \dfrac{h(1+hi)}{\omega_i}, \ i = 0, 1, ..., N-1, \end{cases}$$

   onde $h = 1/N$.
   (b) Determine um valor aproximado de $y(1.2)$ com 6 casas decimais devidamente arredondadas, pelo método de Euler progressivo com $h = 0.1$

Questão 2

$f(x) \in C^2[1,3]$ $\left|f^{(2)}(x)\right| = \left|\frac{x^2}{3}\right| = \left|\frac{3^2}{3}\right| = 3 \,,\ \forall x \in [1,3]$

$\hat{I}_T \simeq I = \int_1^3 f(x)\,dx$ Regra dos Trapézios

$h = \frac{b-a}{2} = \frac{2}{n}$

$\left|I - \hat{I}_T\right| = \left|-n \times \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^3}{12} f''(c)\right| ,\ c \in]1,3[$

Impor $\frac{\cancel{n}\ \frac{2^3}{n^{\cancel{3}2}}}{2} \times 3 \leq 0.5 \times 10^{-1} \leftarrow$ 1 a.e.d.s

$\Leftrightarrow \frac{24}{12n^2} \leq 0.5 \times 10^{-1}$

$\Leftrightarrow \frac{2}{n^2} \leq 0.5 \times 10^{-1}$

$\Leftrightarrow n^2 \geq \frac{1}{0.025}$

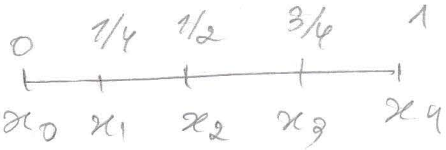
$\Leftrightarrow n \geq \sqrt{40} = 6.324\ldots$

$n_{min} = 7$

nº de subintervalos $= 7$

Questão 3

$f(x) = \frac{x}{e^x}$



S -spline natural interpolador de f

$\Rightarrow \quad S''(0) = 0 \quad \wedge \quad S''(1) = 0$

$S(0) = f(0) = \frac{0}{e^0} = 0$

$S(1) = f(1) = \frac{1}{e}$

$S(0) - S''(0) - 2S(1) + 2S''(1) = 0 - 0 - \frac{2}{e} + 2 \times 0 = -\frac{2}{e}$

Questão 5

$A = \begin{bmatrix} 9/2 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -a \\ 0 & -3 & a \end{bmatrix}$

A tem de ser de diagonal estritamente dominante para o método de Gauss-Seidel convergir, ou seja

$\begin{cases} \left|\frac{a}{2}\right| > |-2| + 0 \\ 7 > 0 + |-a| \\ |a| > 0 + |-3| \end{cases} \quad \begin{cases} |a| > 4 \\ |a| < 7 \\ |a| > 3 \end{cases} \quad \begin{cases} -\infty < a < -4 \quad \vee \quad 4 < a < +\infty \\ -7 < a < 7 \\ -\infty < a < -3 \quad \vee \quad 3 < a < +\infty \end{cases}$

Donde $a \in \,]-7, -4[\,\cup\,]4, 7[$

Opção correta $a = 5.5$

Questão 6 -2 valores

x	-1	0	1
$f(x)$	10	3	7

a) Tabela de diferenças divididas

1

x_i	$f(x_i)$	$f[\,,\,]$	$f[\,,\,,\,]$
-1	10		
		$f[-1,0]=-7$	
0	3		$f[-1,0,1] = \frac{11}{2}$
		$f[0,1]=4$	
1	7		

$$p_2(x) = f(x_0) + (x-x_0) f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1) f[x_0,x_1,x_2]$$

$$= 10 - 7(x+1) + \frac{11}{2} x(x+1)$$

$$f(-0.5) \cong p_2(0.5) = 5.125$$

b) $f^{(3)}(x) = 12, \forall x \in \mathbb{R}$

1

$$\theta \in]-1,1[$$

$$|f(x^*) - p_2(x^*)| = \left|(x^*-x_0)(x^*-x_1)(x^*-x_2)\frac{f^{(3)}(\theta)}{3!}\right| = |(x^*+1)(x^*-0)(x^*-1)| \times \frac{12}{6}$$

$$|f(-0.5) - p_2(-0.5)| = |(-0.5+1)\times(-0.5)\times(-0.5-1)| \times 2 = 0.75$$

Questão 7 - 3 valores

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-5	-6	k	22

, $k \in \mathbb{R}$

$I = \int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ f é polinómio de grau 4 do tipo $x^4+bx^3+cx^2+dx+e$, $b,c,d,e \in \mathbb{R}$

a) Regra de Simpson Simples

0.7 $h = \frac{b-a}{2} = \frac{3-(-1)}{2} = 2$

$\hat{I}_S = \frac{h}{3}(f(-1)+4f(1)+f(3)) = \frac{2}{3}(-2+4\times(-6)+22) = -\frac{8}{3}$

b) Regra de Simpson composta $\Rightarrow n=2 \Rightarrow h = \frac{b-a}{2n} = \frac{4}{4} = 1$

1 $\hat{I}_{S,2} = \frac{h}{3}(f(-1)+4f(0)+2f(1)+4f(2)+f(3)) =$

$= \frac{1}{3}(-2-20-12+4k+22) = \frac{4}{3}k-4$

c) f é polinómio de grau 4 com $a=1$ $\Rightarrow f^{(4)}(x) = 4! = 24$, $\forall x \in \mathbb{R}$

1.3 Erro regra de Simpson Simples: $I - \hat{I}_S = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c),\ c \in]-1,3[$

donde $I - \left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{2^5}{90}\times 24 \Leftrightarrow I = -\frac{768}{90} - \frac{8}{3} = -\frac{56}{5}$

Erro regra de Simpson Composta: $I - \hat{I}_{S,2} = -n\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c),\ c \in]-1,3[$

donde $-\frac{56}{5} - \left(\frac{4}{3}k-4\right) = -2\times\frac{1^5}{90}\times 24 = -\frac{48}{90}$

$\Leftrightarrow -\frac{4}{3}k = -\frac{48}{90} + \frac{56}{5} - 4 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}k = \frac{20}{3} \Leftrightarrow k = -5$

Questão 8 - 3 valores

$1 - x - \sin(x) = 0$ tem raiz única α em $I = [0.1, 1]$

a) α é raiz de $1 - x - \sin(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha - \sin(\alpha) = 0 \Leftrightarrow$

0.5

$\Leftrightarrow 1 - \sin(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \varphi(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \alpha$ é ponto fixo de $\varphi(x) = 1 - \sin(x)$

b) $\begin{cases} x_0 = 0.5 \\ x_n = \varphi(x_{n-1}), \ n = 1, 2, \dots \end{cases}$

1.4

Condições de convergência do método do ponto fixo

1) $\varphi(x)$ é contínua em I

2) $\varphi(x) \in I, \ \forall x \in I$?

$\varphi(1) = 1 - \sin(1) = 0.15852 \dots \in I$

$\varphi(0.1) = 1 - \sin(0.1) = 0.90 \dots \in I$

$\varphi'(x) = -\underbrace{\cos(x)}_{>0, \ \forall x \in I} < 0 \implies \varphi(x)$ é estritamente decrescente

Logo $0.1 < 0.15852 \dots = \varphi(1) \leq \varphi(x) \leq \varphi(0.1) = 0.90 \dots < 1$

$\implies \varphi(x) \in I, \ \forall x \in I$

3) $|\varphi'(x)| = |-\cos(x)| = \underbrace{\cos(x)}_{\text{decrescente em } I} \leq \cos(0.1) = 0.995 \dots < 0.996 = k < 1$

Logo x_n é convergente para α

c) $x_0 = 0.5$

1.1

$x_1 = \varphi(0.5) = 1 - \sin(0.5) = 0.520574$

$x_2 = \varphi(0.520574) = 0.502622$

Fórmula do erro à posteriori

$|\alpha - x_2| \leq \frac{k}{1-k} |x_2 - x_1| = \frac{0.996}{1 - 0.996} \times 0.017952 = 4.47 \dots < 0.5 \times 10^{1}$

Não tem casas decimais significativas

Questão 9 – 5 valores

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Método de Jacobi

a) 1.5

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \quad G_J = -D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.2 \\ -0.25 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$\|G_J\|_\infty = \max(0.5, 0.8, 0.75) = 0.8 < 1$ logo o método de Jacobi converge para a solução de $AX=B$

b) 1.4

$$H_J = D^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.4 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$

$X^{(1)} = G_J X^{(0)} + H_J$ com $X^{(0)} = [1 \quad 1 \quad 1]^T$

$X^{(1)} = [1 \quad 0.4 \quad 0]^T$

$X^{(2)} = G_J X^{(1)} + H_J$

$X^{(2)} = [0.7 \quad 0.2 \quad -0.3]^T$

c) 1.5

$X^{(10)} = [0.365 \quad -0.271 \quad -0.478]^T$

$X^{(9)} = [0.372 \quad -0.270 \quad -0.472]^T$

$X^{(10)} - X^{(9)} = [-0.007 \quad -0.001 \quad -0.006]^T$

$\|X^{(10)} - X^{(9)}\|_\infty = 0.007$

erro à posteriori

$$\|X^* - X^{(10)}\|_\infty \le \frac{\|G\|_\infty}{1-\|G\|_\infty} \|X^{(10)} - X^{(9)}\|_\infty = \frac{0.8}{1-0.8} \times 0.007$$

$= 0.028 < 0.5 \times 10^{-1}$

garante-se pelo menos 1 c.d.s.

d) $X^* = \begin{bmatrix} 0.36 & -0.28 & -0.48 \end{bmatrix}^T$

0.6

Erro relativo de cada componente de $X^{(10)}$: $r_{x^*} = \dfrac{|x^* - \tilde{x}|}{|x^*|}$

$$r_{x_1^*} = \frac{|0.36 - 0.365|}{0.36} \cong 0.014$$

$$r_{x_2^*} = \frac{|-0.28 - (-0.271)|}{|-0.28|} \cong 0.032$$

$$r_{x_3^*} = \frac{|-0.48 - (-0.478)|}{|-0.48|} \cong 0.0042$$

Questão 10 - 2 valores

$$\begin{cases} y'(t) = -\dfrac{t}{y(t)}, \quad t \in [1,2] \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

a) Método de Euler progressivo

1

$$\begin{cases} w_{i+1} = w_i + h\, f(t_i, w_i) = w_i - h\dfrac{t_i}{w_i} = w_i - \dfrac{h(1+hi)}{w_i}, \quad i = 0, \dots, N-1 \\ w_0 = 2 \end{cases}$$

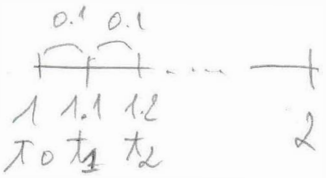
$$f(t, y) = -\frac{t}{y}$$

$$t_i = \underbrace{t_0}_{=1} + hi = 1 + hi$$

$$N = \frac{2-1}{h} = \frac{1}{h} \Leftrightarrow h = \frac{1}{N}$$

b) Aproximação para $y(1.2)$ com $h = 0.1$

1



$$y(1.2) \simeq w_2$$

Euler progressivo

$$w_1 = w_0 - \frac{0.1\,(1 + 0.1 \times 0)}{w_0} = 2 - \frac{0.1}{2} = 1.95$$

$$w_2 = w_1 - \frac{0.1\,(1 + 0.1 \times 1)}{w_1} = 1.95 - \frac{0.1 \times 1.1}{1.95} \simeq 1.89359$$

$$y(1.2) \simeq 1.89359$$