# Programação linear inteira

*Programação linear inteira* define-se como o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & x \text{ inteiro.} \end{aligned}$$

Um problema de programação linear com a imposição de que as variáveis são inteiras.

# Motivação

1. Em certos problemas de PL soluções fracionarias não são desejáveis;

# Motivação

1. Em certos problemas de PL soluções fracionarias não são desejáveis;
2. arredondar $x = 3\,242\,567.3$ latas de feijão, não parece muito problemático;

# Motivação

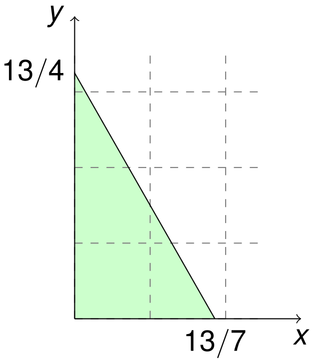
1. Em certos problemas de PL soluções fracionarias não são desejáveis;
2. arredondar $x = 3\,242\,567.3$ latas de feijão, não parece muito problemático;
3. mas, arredondar $x = 2.7$ aviões a afetar a uma dada rota, poderá ser desaconselhável.

# Exemplo

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 21x + 11y \\
\text{sujeito a} \quad & 7x + 4y \leq 13 \\
& x, y \geq 0 \\
& x, y \text{ inteiros.}
\end{aligned}
$$

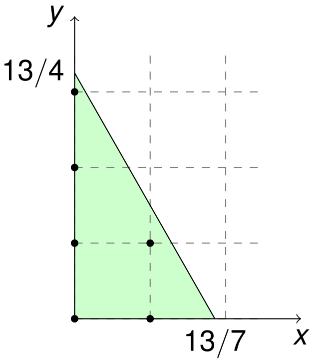
# Exemplo

$$\begin{aligned} \max \quad & 21x + 11y \\ \text{sujeito a} \quad & 7x + 4y \leq 13 \\ & x, y \geq 0 \\ & x, y \text{ inteiros.} \end{aligned}$$



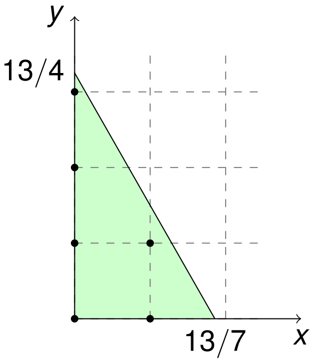
# Exemplo

$$\begin{aligned} \max \quad & 21x + 11y \\ \text{sujeito a} \quad & 7x + 4y \leq 13 \\ & x, y \geq 0 \\ & x, y \text{ inteiros.} \end{aligned}$$



# Exemplo

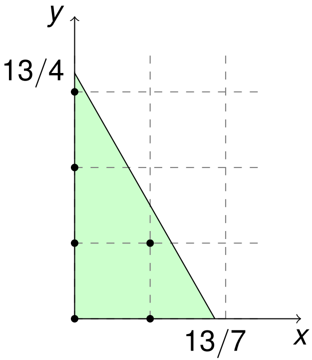
$$\begin{array}{rl} \max & 21x + 11y \\ \text{sujeito a} & 7x + 4y \leq 13 \\ & x, y \geq 0 \\ & x, y \text{ inteiros.} \end{array}$$




Solução ótima PLI: $x = 0, \; y = 3$

# Exemplo

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & 21x + 11y \\
\text{sujeito a} \quad & 7x + 4y \leq 13 \\
& x, y \geq 0 \\
& x, y \text{ inteiros.}
\end{aligned}
$$

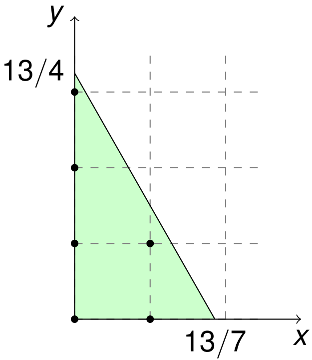



Solução ótima PLI: $x = 0, \ y = 3$

Solução ótima PL relaxado: $x = 13/7, \ y = 0$

# Exemplo

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & 21x + 11y \\ \text{sujeito a} \quad & 7x + 4y \leq 13 \\ & x, y \geq 0 \\ & x, y \text{ inteiros.} \end{aligned}$$




Solução ótima PLI: $x = 0, \; y = 3$

Solução ótima PL relaxado: $x = 13/7, \; y = 0$

Solução arredondada: $x = 2, y = 0$

# Problema de programação linear inteira

Consideremos o programa inteiro, PI

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s. a} \quad & Ax \leq b, \\ & x \geq 0, \ \text{e inteiro.} \end{aligned}$$

# Problema de programação linear inteira

Consideremos o programa inteiro, PI

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s. a} \quad & Ax \le b, \\ & x \ge 0, \ \text{e inteiro.} \end{aligned}$$

e a sua relaxação linear

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s. a} \quad & Ax \le b, \\ & x \ge 0, \ \cancel{\text{e inteiro.}} \end{aligned}$$

# Branch& Bound

## Introdução

- O método de Branch& Bound é baseado na ideia de inteligentemente enumerar todas as soluções de um problema de optimização.

# Branch& Bound

## Introdução

- O método de Branch& Bound é baseado na ideia de inteligentemente enumerar todas as soluções de um problema de optimização.
- A palavra “Branch” refere-se ao processo de dividir a região admissível, a palavra bound refere-se aos limites superiores que são utilizados para construir uma demonstração de otimalidade sem utilizar uma pesquisa exaustiva.

# Branch& Bound

- Resolvemos a relaxação linear de PLI, obtendo a solução $x^0$ (que em geral não é inteira).
- Suponhamos que a componente $x_i^0$ é não inteira;
- Dividimos (ramificar) o problema em dois subproblemas juntando duas restrições mutuamente exclusivas e exaustivas:

$$x_i \leq \lfloor x_i^0 \rfloor \text{ ou } x_i \geq \lceil x_i^0 \rceil$$

- Resolvemos a relaxação linear de cada um destes subproblemas.

# Branch& Bound

## Limites (Maximização)

- **Limite superior:** Se $x^0$ é uma solução ótima da relaxação linear de PLI , então $c^T x^0$ é um limite superior (LS) do problema inteiro.

# Branch& Bound

## Limites (Maximização)

- **Limite superior:** Se $x^0$ é uma solução ótima da relaxação linear de PLI , então $c^T x^0$ é um limite superior (LS) do problema inteiro.
- **limite inferior:** Sempre que se obtém uma solução inteira, $x^k$, em alguns dos subproblemas, $c^T x^k$ é um limite inferior (LI) para o problema inteiro original.

# Branch& Bound

## Limites (Maximização)

- **Limite superior:** Se $x^0$ é uma solução ótima da relaxação linear de PLI , então $c^T x^0$ é um limite superior (LS) do problema inteiro.
- **limite inferior:** Sempre que se obtém uma solução inteira, $x^k$, em alguns dos subproblemas, $c^T x^k$ é um limite inferior (LI) para o problema inteiro original.
- Os limites superiores podem ser atualizados pela fórmula,

$$LS = \max\{LS(P) : \text{para todo o problema, } P, \\ \text{que pode ainda ser ramificado}\}$$

# Branch& Bound

## Ramificação

A ramificação de um determinado subproblema (P) termina sempre que uma das seguintes situações ocorra:

- a solução obtida é inteira;

# Branch& Bound

## Ramificação

A ramificação de um determinado subproblema (P) termina sempre que uma das seguintes situações ocorra:

- a solução obtida é inteira;
- o problema é inadmissível;

# Branch& Bound

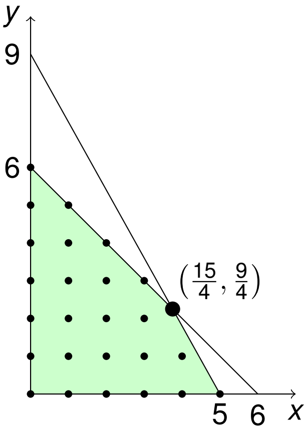
## Ramificação

A ramificação de um determinado subproblema (P) termina sempre que uma das seguintes situações ocorra:

- a solução obtida é inteira;
- o problema é inadmissível;
- uma solução ótima de (P), $x^k$, é tal que $c^T x^k \leq LI$ (Maximização);

# Exemplo

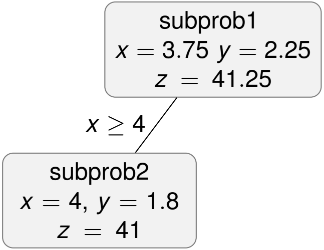
$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 8x + 5y \\
\text{sujeito a} \quad & x + y \leq 6 \\
& 9x + 5y \leq 45 \\
& x, y \geq 0 \\
& x, y \text{ inteiros.}
\end{aligned}$$



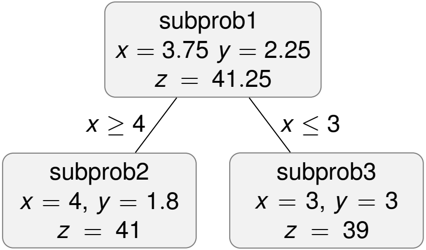
# Branch & Bound

subprob1
$x = 3.75$ $y = 2.25$
$z = 41.25$

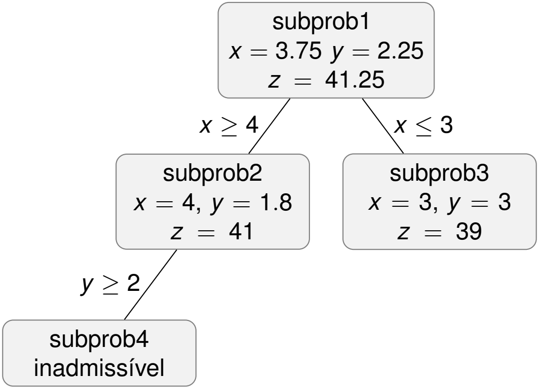
# Branch & Bound



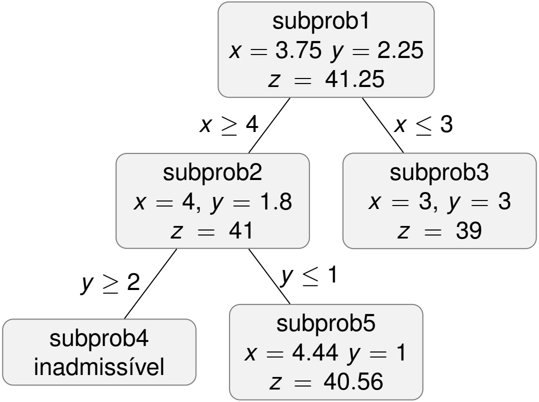
# Branch & Bound



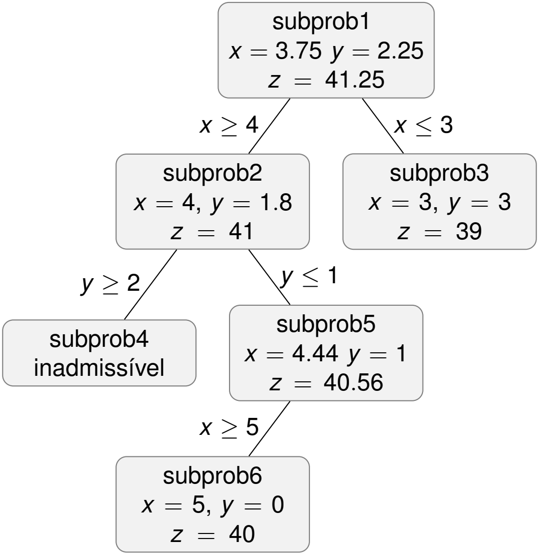
# Branch & Bound



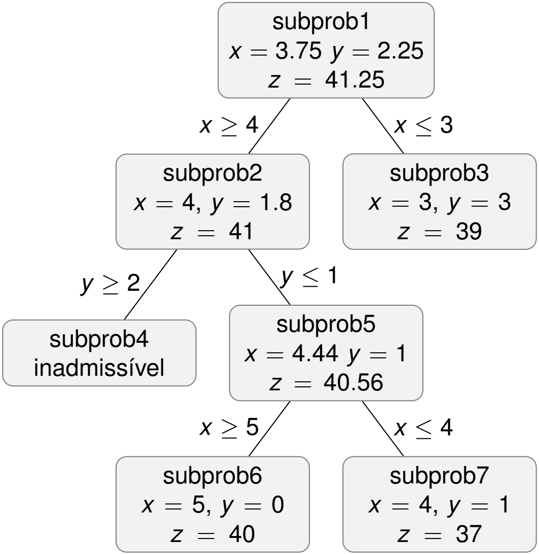
# Branch & Bound



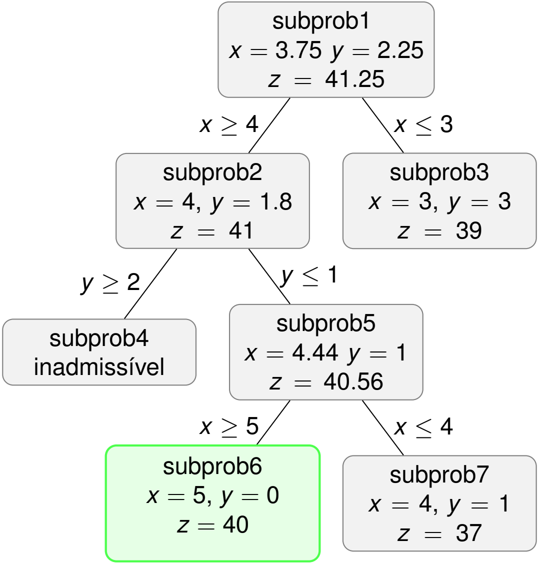
# Branch & Bound



# Branch & Bound



# Branch & Bound



## Limites (Minimização)

- **limite superior:** Sempre que se obtém uma solução inteira, $x^k$, em alguns dos subproblemas, $c^T x^k$ é um limite superior (LS) para o problema inteiro original.

## Limites (Minimização)

- **limite superior:** Sempre que se obtém uma solução inteira, $x^k$, em alguns dos subproblemas, $c^T x^k$ é um limite superior (LS) para o problema inteiro original.
- **Limite inferior:** Se $x^0$ é uma solução ótima da relaxação linear de PLI , então $c^T x^0$ é um limite inferior (LI) do problema inteiro.

## Limites (Minimização)

- **limite superior:** Sempre que se obtém uma solução inteira, $x^k$, em alguns dos subproblemas, $c^T x^k$ é um limite superior (LS) para o problema inteiro original.
- **Limite inferior:** Se $x^0$ é uma solução ótima da relaxação linear de PLI , então $c^T x^0$ é um limite inferior (LI) do problema inteiro.
- Os limites inferiores podem ser atualizados pela fórmula,

$$\begin{aligned} LI = \min\{LI(P) :\ & \text{para todo o subproblema, } P, \\ & \text{que pode ainda ser ramificado}\} \end{aligned}$$

## Ramificação

A ramificação de um determinado subproblema (P) termina sempre que uma das seguintes situações ocorra:

- a solução obtida é inteira;

### Ramificação

A ramificação de um determinado subproblema (P) termina sempre que uma das seguintes situações ocorra:

- a solução obtida é inteira;
- o problema é inadmissível;

### Ramificação

A ramificação de um determinado subproblema (P) termina sempre que uma das seguintes situações ocorra:

- a solução obtida é inteira;
- o problema é inadmissível;
- uma solução ótima de (P), $x^k$, é tal que $c^T x^k \geq LS$ (Minimização);

# Branch & Bound

Utilize o método *branch and bound* para resolver o seguinte problema

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & z = 5x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \\
\text{sujeito a} \quad & x_2 - 5x_3 + 2x_4 \geq -2 \\
& 5x_1 - x_2 + x_4 \geq 7 \\
& x_1 + x_2 + 6x_3 \geq 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

# Branch & Bound

Utilize o método *branch and bound* para resolver o seguinte problema

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & z = 5x + 2y \\
\text{sujeito a} \quad & 3x + y \leq 12 \\
& x + y \leq 5 \\
& x, y \geq 0 \\
& x, y \in \mathbb{Z}^n
\end{aligned}
$$

Utilize o método *branch and bound* para resolver o problema do saco mochila seguinte

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 \\ \text{sujeito a} \quad & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$