Lista 7 -Integrais duplos e triplos

1. Calcule os seguintes integrais duplos

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x y\, dydx\,;$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{3y} y^2\, dxdy\,;$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} 2x\mathrm{e}^y\, dydx\,;$

   (d) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2 + y^2\, dydx\,;$

   (e) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^{4} xy^2\, dxdy\,;$

   (f) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \int_0^{\log(y)} \frac{x}{y}\, dxdy\,;$

   (g) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{y} \sin(y^2)\, dxdy\,;$

   (h) $\displaystyle\int_1^2 \int_{y^3}^{y} \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\, dxdy\,.$

2. Calcule os seguintes integrais duplos sobre as regiões planas R indicadas:

   (a) $\int\int_R (x^2+y^2)\, dxdy$, com $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \ \wedge\ 0 \leq y \leq 2\}$;

   (b) $\int\int_R xy\, dxdy$, com $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq \sqrt{y} \ \wedge\ 0 \leq y \leq 1\}$;

   (c) $\int\int_R x - x^2y\, dxdy$, com

   $$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \ \wedge\ -x \leq y \leq 1+x\}\,;$$

   (d) $\int\int_R e^{x+y}\, dxdy$, com $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$;

   (e) $\int\int_R (x^2-y^2)\, dxdy$, onde R é a região plana limitada pelas curvas de equações $y = \sin x$ e $y = 0$, com $x \in [0,\pi]$;

(f) $\int\int_R x^2y^2\, dxdy$, onde R é o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por $y \geq \dfrac{1}{x}$, $y \leq \dfrac{2}{x}$, $y \geq x$, e $y \leq 2x$;

(g) $\int\int_R y\, dxdy$, onde R é a região plana limitada pelas rectas de equações $y = \dfrac{1}{2}x$, $y = 2x$ e $y = -x + 3$.

3. Supondo que os seguintes integrais existem, determine a região plana R e troque a ordem de integração:

   (a) $\int\int_R f(x,y)\ dxdy = \displaystyle\int_0^3 \int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)\ dxdy$;

   (b) $\int\int_R f(x,y)\ dxdy = \displaystyle\int_1^e \int_0^{\log x} f(x,y)\ dydx$;

   (c) $\int\int_R f(x,y)\ dxdy = \displaystyle\int_0^\pi \int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)\ dydx$;

   (d) $\int\int_R f(x,y)\ dxdy = \displaystyle\int_1^2 \int_x^4 f(x,y)\ dydx$;

4. Considere o seguinte integral duplo:

$$\iint_R f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 x \sin\left(y^5\right)\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}x\ .$$

   a) Determine a região plana R e represente-a geometricamente.
   b) Troque a ordem de integração.
   c) Calcule o valor do integral.

5. Considere o seguinte integral duplo:

$$\iint_R f(x,y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 \mathrm{e}^{3x^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ .$$

   (a) Determine a região plana R e represente-a geometricamente.
   (b) Troque a ordem de integração.
   (c) Calcule o valor do integral.

6. Calcule os seguintes integrais duplos usando coordenadas polares:

(a) $\int\int_R xy\, dxdy$ onde

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0 \ \wedge \ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 25\}\,;$$

(b) $\int\int_R \mathrm{e}^{x^2+y^2}\ dxdy$ onde

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}\,;$$

(c) $\int\int_R xy\ dxdy$ onde R é a região definida por

$$x \geq 0, y \geq 0 \text{ e } x^2 + y^2 \leq a^2, \text{ com } a \in \mathbb{R}^+;$$

(d) $\int\int_R \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) dxdy$ na R região definida por $x^2 + y^2 \geq 1$, $x^2 + y^2 \leq 9$, $\sqrt{3}y \geq x$ e $y \leq \sqrt{3}x$;

(e) $\int\int_R \sqrt{1 - x^2 - (1-y)^2}\ dxdy$ onde R é a região dada por $y \geq 1$, $y - x \leq 1$ e $x^2 + y^2 \leq 2y$;

(f) $\int\int_R xy^2\ dxdy$ onde R é a região plana limitada pelo eixo das ordenadas, pela secção de elipse de equação $x^2+4y^2 = 4$ $(x, y \geq 0)$ e pela secção de circunferência $x^2 + y^2 = 4$, $(x \geq 0,\ y \leq 0)$.

7. Utilizando integrais duplos, calcule a área das seguintes regiões planas R:

(a) $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x \leq y \leq 6x - x^2\right\}$;

(b) $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin x \leq y \leq \cos x \ \wedge \ -\dfrac{3}{4}\pi \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}\right\}$;

(c) $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x \ \wedge \ x \leq y \leq \sqrt{3}x\right\}$;

(d) $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \ \wedge \ 4 \leq x^2 + y^2 \leq -4x\right\}$;

8. Determine o volume dos sólidos S indicados:

(a) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\right\}$;

(b) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq x^2 \ \wedge \ x \geq y^2 \ \wedge \ 0 \leq z \leq 3\right\}$;

(c) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 16 - \sqrt{x^2 + y^2} \ \wedge \ x^2 + y^2 \leq 4\right\}$;

(d) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 2 \ \wedge \ x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\right\}$;

9. Calcule a área das seguintes superfícies:

   (a) Porção do plano de equação $6x+3y+2z=12$ situada no primeiro octante;

   (b) Porção do parabolóide de equação $2z = x^2+y^2$, interior à superfície cilíndrica dada por $x^2+y^2=1$;

   (c) Porção da superfície cónica de equação $x^2-y^2=z^2$ situada no primeiro octante e limitada pelo plano de equação $y+z=a$ com $a \in \mathbb{R}^+$;

   (d) Porção da superfície de equação $x^2+z^2=r^2$ interior à superfície dada por $y^2+z^2=r^2$.

10. Calcule os seguintes integrais

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^2 \int_0^3 (x+2y+3z)\, dxdydz\,;$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{1+y}^{2y} \int_z^{y+z} y\, dxdzdy\,;$

   (c) $\displaystyle\int_2^3 \int_0^{3y} \int_1^{xy} (x+y+2z)\, dzdxdy\,;$

   (d) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} (y+2z)\mathrm{e}^x\, dzdydx\,;$

11. Calcule os seguintes integrais triplos sobre as regiões do espaço indicadas:

   (a) $\int\int\int_E y\cos(x+z)\ dxdydz$, onde E é a região limitada pela superfície cilíndrica de equação $y=\sqrt{x}$ e pelos planos de equação $y=0$, $z=0$ e $x+z=\dfrac{\pi}{2}$;

   (b) $\int\int\int_E yz\, dxdydz$ onde

   $$E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ 0\le z\le 1\ \wedge\ 0\le y\le 2z\ \wedge\ 0\le x\le z+2\}\,;$$

   (c) $\int\int\int_E \sqrt{x^2+y^2}\ dxdydz$, onde E é a região limitada pela folha superior da superfície cónica de equação $z^2=x^2+y^2$ e pelo plano de equação $z=1$;

(d) $\int\int\int_E \dfrac{1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}\ dxdydz$, onde

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \leq z \leq 2-x^2-y^2\right\}.$$

12. Efectuando as mudanças de variável convenientes, calcule os seguintes integrais:

    (a) $\int\int_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\ dxdy$ onde R é o triângulo definido pelas rectas de equações $x=0$, $y=0$ e $x+y=2$;

    (b) $\int\int_R (x-y)^2 \sin^2(x+y)\ dxdy$ onde R é o polígono de vértices $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$ e $(0,\pi)$.

13. Usando a transformação $x+y=u$ e $y=uv$, mostre que:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}}\ dxdy = \frac{1}{2}(e-1).$$

14. Designe por E o sólido em $\mathbb{R}^3$ limitado pelo paraboloide de equação $x^2+y^2=1-z$ e pela folha superior da superfície cónica $(z+1)^2 = x^2+y^2$.

    Calcule o volume do sólido E.

15. Utilizando integrais triplos, calcule o volume dos seguintes sólidos V:

    (a) $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 9 \ \wedge \ 1 \leq z \leq 9\right\}$;

    (b) V é o sólido definido por $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4 \wedge z^2 \leq 3(x^2+y^2) \wedge y \geq 0\right\}$;

    (c) V é o sólido formado por todos os pontos da esfera dada por $x^2+y^2+z^2 \leq 8$, exteriores à superfície cónica de equação $z^2 = x^2+y^2$;

    (d) $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2+y^2-1 \wedge x^2+y^2 \leq 4 \wedge y \geq x\right\}$.

16. Calcule a massa do sólido delimitado pela esfera $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ e pelo cone $z^2 \leq 3(x^2+y^2)$ se a densidade for $\delta(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

17. Calcule a massa do sólido situado no primeiro octante e limitado pelas superfícies dadas por $9x^2+z^2=y^2$ e $y=9$, sabendo que a densidade em cada um dos seus pontos é proporcional à distância desse ponto ao plano xOy.