ANÁLISE MATEMÁTICA III C

11ª semana de aulas

NOVA SCHOOL OF
SCIENCE & TECHNOLOGY

Cláudio Fernandes

caf@fct.unl.pt

Slides para acompanhamento das aulas TP1 e TP4

O material completo do Prof. João de Deus Marques encontra-se no CLIP, na página da UC

Séries de Funções

Convergência pontual e uniforme de séries de funções

Definição

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções, $f_n(x) : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Chama-se *série de funções* à sucessão de funções (S_n) definida por

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x),\ \forall x \in X$$

(sucessão das somas parciais).

Também se representa a série por $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Sucessão das somas parciais

Série de funções

Definição (Convergência Pontual da série)

Diz-se que a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge no ponto $a \in B$ se a série numérica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ for convergente.

Se a série for convergente em todos os pontos de $D \subset B$, fica definida uma função $f(x) : D \subset B \to \mathbb{R}$, que a cada ponto $x \in D$, faz corresponder a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

À função $f(x)$ chama-se *função soma* da série e diz-se que a série *converge pontualmente* para f em D.

Definição (Convergência Uniforme da série)

Considere-se a sucessão de funções (f_n) definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e suponhamos que existe o limite pontual em D da série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Designando por f a função limite pontual, diz-se que a série de funções *converge uniformemente* para f em D se a sucessão das somas parciais (S_n) convergir uniformemente para f em D, isto é

$$\forall \delta > 0\ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow (\forall x \in D, |f(x) - S_n(x)| < \delta),$$

ou, equivalentemente,

$$\forall \delta > 0\ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow \sup_{x \in D} (|f(x) - S_n(x)|) < \delta,$$

isto é, se

$$\lim_{n \to \infty} (\sup_{x \in D} |f(x) - S_n(x)|) = 0.$$

Exemplo

Consideremos a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{1+x^2}\Big)^n.$$

Se $x = 0$, *a série converge para zero.*

Se $x \neq 0$, *a série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{1+x^2}\Big)^n$ *é, para cada* x, *uma série geométrica de razão* $r = \dfrac{1}{1+x^2} < 1$, *logo convergente, e cuja soma é:*

$$x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{1+x^2}\Big)^n = \frac{x^2}{1+x^2} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}}\right) = 1.$$

Exemplo (Continuação)

Pelo que, a série tem por soma, isto é, converge pontualmente para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ x = 0 \\ 1, & se\ x \neq 0. \end{cases}$$

Teorema

Se as funções $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ são contínuas em D e a série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente para $f(x)$ em D, então $f(x)$ é contínua em D.

Exemplo

Já provámos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ converge pontualmente para a função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0. \end{cases}$$

As funções $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, são contínuas, mas como $f(x)$ é descontínua, pode concluir-se que a convergência não é uniforme.

Teorema (Weierstrass)

Se existir uma série numérica convergente, de termos positivos, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *tal que, para todo o* $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| \leq a_n, \ \forall x \in D,$$

então a série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$ *é uniformemente convergente em* D.

Exemplo

Considere-se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

Tendo em conta que

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

e que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente, o teorema de Weierstrasse permite concluir que série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ *é uniformemente convergente em* $\mathbb{R}$.

Séries de potências

Definição

Seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Chama-se série de potências em $x - x_0$ a uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

onde $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de números reais.

Observação: Fazendo $u = x - x_0$, a série pode ser escrita na forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_n u^n + \cdots$$

Teorema

Considere-se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *e seja*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Raio de convergência da série

1. *Se* $R \in \mathbb{R}^+$ *a série converge absolutamente para cada* $x \in]-R, R[$ *e diverge para cada* $x \in]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$.
2. *Se* $R = +\infty$ *a série de potências converge absolutamente* $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. *Se* $R = 0$ *a série só converge se* $x = 0$

.

Definição

Ao valor de R do teorema anterior chama-se *raio de convergência* da série e ao intervalo $]-R,R[$ chama-se *intervalo de convergência* da série.

Corolário

Considere-se a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *e suponhamos que existe*

$$\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R \in \overline{\mathbb{R}_0^+}.$$

Então R é o raio de convergência da série de potências considerada.

Exemplo

Considere-se a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$. *Tem-se que*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}} = \frac{1}{\lim \frac{1}{n}} = +\infty,$$

pelo que o raio de convergência desta série de potências é $+\infty$*, o que significa que a série é absolutamente convergente em* $\mathbb{R}$.

Exemplo

A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ *só converge para* $x = 0$*, pois*

$$\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0.$$

Exemplo

Considere-se a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n x^n.$$

Tem-se que

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(3 + (-1)^n)^n}{(3 + (-1)^{n+1})^{n+1}} = \begin{cases} 2^{n-1} & \text{, se } n \text{ par} \\ \dfrac{1}{2^{n+2}} & \text{, se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

pelo que não existe o $\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Exemplo (Continuação)

Alternativamente, o raio de convergência pode ser calculado através do seguinte limite

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|(3+(-1)^n)^n|}} = \frac{1}{\overline{\lim}\,(3+(-1)^n)} = \frac{1}{4};$$

o que permite concluir que o raio de convergência da série de potências é $\frac{1}{4}$ *e portanto a série converge absolutamente no intervalo* $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$ *e diverge no intervalo* $]-\infty,-\frac{1}{4}[\cup]\frac{1}{4},+\infty[$.

Exemplo

Considere-se a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(x+1)^n.$$

Fazendo a mudança de variável $u = x + 1$ *obtém-se a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} u^n$. *Tem-se que*

$$\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left| \frac{\frac{(-1)^n}{2^n}}{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}} \right| = \lim \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = 2$$

Exemplo (Continuação)

(ou, alternativamente,

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right|}} = \frac{1}{\lim\frac{1}{2}} = 2)$$

pelo que a série converge absolutamente se $|u| = |x+1| < 2$, *isto é, se* $x \in]-3, 1[$, *e diverge se* $|u| = |x+1| > 2$, *ou seja, se*

$$x \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[.$$

Estudemos a convergência nos pontos $x = -3$ *e* $x = 1$.

Se $x = -3$ *tem-se que*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1,$$

Exemplo (Continuação)

e portanto a série diverge neste ponto; se $x = 1$ *tem-se que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n,$$

pelo que, a série também diverge em $x = 1$.

ao todo mostrámos que, a série converge absolutamente em $]-3,1[$ *e diverge em* $]-\infty,-3] \cup [1,+\infty[$.

Teorema

Suponhamos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tem raio de convergência* $R > 0$ *e seja* $0 < \rho < R$. *Então a série converge uniformemente em* $[-\rho, \rho]$.

Teorema

Toda a série de potências de raio de convergência $R > 0$ *é derivável termo a termo no seu intervalo de convergência, e tem-se que*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \forall x \in]-R, R[.$$

Série de Taylor e série de MacLaurin

Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^n em I. Dado $x_0 \in I$ a fórmula de Taylor de f, de ordem n, com resto de Lagrange em torno do ponto $x = x_0$ é dada, como se sabe, por

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots \\ &+ f^{(n-1)}(x_0)\frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x), \end{aligned}$$

onde $R_n(x) = f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))\dfrac{(x - x_0)^n}{n!}$, com $0 < \theta < 1$.

Suponhamos que $f \in C^\infty(I)$. Chama-se *série de Taylor de f em torno do ponto $x = x_0$* à série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Quando $x_0 = 0$ a série de Taylor de f designa-se por *série de MacLaurin* e escreve-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Exemplo

Determine-se a série de MacLaurin da função $f(x) = \cos x$. *Tem-se*

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), n \in \mathbb{N}$$

o que permite concluir que

$$f^{(2n+1)}(0) = 0 \text{ e } f^{(2n)}(0) = (-1)^n.$$

Então a série de MacLaurin de $\cos x$ *é*

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}.$$

Exemplo (Continuação)

Fazendo na série anterior $y = x^2$, obtém-se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{(2n)!}.$$

Como se tem que

$$\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left| \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} \right| = \lim \left| \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \right| = +\infty,$$

a série em potências de y converge em $\mathbb{R}_0^+$ $(y \geq 0)$, pelo que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

converge em $\mathbb{R}$.

Uma questão fundamental no desenvolvimento em série de Taylor de uma função, realizado em torno ponto de um ponto x_0, é saber em que condições o desenvolvimento obtido, no seu intervalo de convergência, converge para a função em causa.

Na realidade, o facto de existirem as derivadas $f^{(k)}(x_0)$ para todos os valores de $k \in \mathbb{N}$, embora permita escrever a série de Taylor de f em torno do ponto x_0, não garante que, em alguma vizinhança deste ponto a série convirja ou que em caso de convergência convirja para a função em causa.
Neste sentido considere-se o exemplo seguinte:

Exemplo

Considere-se a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , se\ x \neq 0 \\ 0 & , se\ x = 0. \end{cases}$$

Relativamente à função considerada tem-se que $f(0) = 0$ *e* $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, *e portanto a sua série de MacLaurin é a série identicamente nula que converge, como é óbvio, para a função identicamente nula em* $\mathbb{R}$.
Portanto, apesar da série de MacLaurin de f *convergir em* $\mathbb{R}$, f *não é a soma da sua série de MacLaurin, exceptuando no ponto* $x_0 = 0$.

A questão pertinente e que se coloca neste momento é a seguinte: que condições devem ser impostas a uma função f para que numa vizinhança de um ponto x_0 em que a série de Taylor de f convirja, a série obtida convirja para a função f.

Sendo I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^n em I, dado $x_0 \in I$ considere-se a fórmula de Taylor de f, de ordem n, com resto de Lagrange em torno do ponto $x = x_0$. Sendo $S_n(x)$ a soma dos n primeiros termos da fórmula de Taylor considerada tem-se que

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x),$$

donde:

Teorema

Uma condição necessária e suficiente para que uma função indefinidamente diferenciável $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja a soma da sua série de Taylor numa vizinhança $V \subset I$, de um ponto x_0, é que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in V.$$

O teorema que se segue fornece condições suficientes para que uma função seja a soma da sua série de Taylor.

Teorema

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ em I e suponhamos que existem constantes $M, k > 0$ tais que, numa vizinhança $V \subset I$ de um ponto x_0, se tem para todo o $n \in \mathbb{N}$

$$|f^{(n)}(x)| \leq Mk^n, \quad \forall x \in V.$$

Nestas condições f é a soma da sua série de Taylor em V.

Exemplo

A função $f(x) = \cos x$ *tem por série de MacLaurin a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

cujo resto é

$$R_n(x) = f^{(n)}(\theta x)\frac{x^n}{n!} = \cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!}.$$

Tem-se que

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!}.$$

Exemplo (Continuação)

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *é convergente em* $\mathbb{R}$. *Com efeito*

$$\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim(n+1) = +\infty,$$

o que permite concluir que $\dfrac{x^n}{n!} \to 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, *ou equivalentemente* $\dfrac{|x|^n}{n!} \to 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *e portanto*

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

Seja $f(x) = e^x$. *Tem-se que* $f^{(n)}(x) = e^x, \forall n \in \mathbb{N}$ *e portanto* $f^{(n)}(0) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, *pelo que a sua série de MacLaurin é*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Tem-se que

$$R_n(x) = \left| e^{\theta x} \frac{x^n}{n!} \right| = e^{\theta x} \frac{|x|^n}{n!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!}$$

$(\theta x \leq |\theta x| = \theta |x| \leq |x|)$. *Mostremos que* $R_n(x)$ *converge para zero provando a convergência da série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!}$.

Exemplo (Continuação)

Pelo critério de d'Alembert tem-se que

$$\lim \left| \frac{e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!}} \right| = \lim \frac{|x|}{(n+1)} = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

e portanto a série converge absolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$.
Ao todo provou-se que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

De forma semelhante ao que foi visto nos exemplos anteriores pode mostrar-se que:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \forall x \in]-1,1[,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Teorema

Suponhamos que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *converge numa vizinhança* V *de* x_0, *isto é, define uma função* f *em* V. *Então a série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *é a série de Taylor de* f *em torno de* x_0 *em* V.

Em particular, o desenvolvimento em série de potências de $x-x_0$ *válido numa certa vizinhança de* x_0 *é único.*

Exemplo

A função $g(x) = \dfrac{1}{5-4x}$ *pode ser escrita na forma*

$$\frac{1}{5-4x} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{5}x}.$$

Como se tem

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \ \ x \in]-1, 1[,$$

vem que

$$\frac{1}{5-4x} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}x\right)^n, \ \ \left|\frac{4}{5}x\right| < 1$$

ou equivalentemente

$$\frac{1}{5-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{5^{n+1}} x^n, \ \ \ x \in]-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}[.$$

Exemplo

Seja

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x - 5}.$$

Tendo em conta que $x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1)$ *tem-se que*

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{(x-5)(x+1)} &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+1}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5-x} - \frac{1}{1+x}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5(1-\frac{x}{5})} - \frac{1}{1-(-x))}\right) \\
&= -\frac{1}{30} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{5}} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-(-x)} \\
&= -\frac{1}{30} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n - \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n
\end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Para determinação do domínio de convergência da série obtida, deve ter-se em conta que

$$\left|\frac{x}{5}\right| < 1 \wedge |-x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 5 \wedge |x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1.$$

Então

$$f(x) = \frac{1}{(x-5)(x+1)} = -\frac{1}{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5^{n+1}} + (-1)^n \right) x^n, \ -1 < x < 1.$$

Exemplo

Considere-se a função

$$f(x) = xe^x.$$

Como

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$$

vem que

$$xe^x = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \cdots, x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo (Continuação)

Pretende-se agora obter o valor de $f^{(5)}(0)$. *Tendo em conta que o desenvolvimento em série de potencias é único, vem que*

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 = \frac{x^5}{4!}$$

donde

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{1}{4!}$$

e portanto

$$f^{(5)}(0) = \frac{5!}{4!} = 5.$$

Solução por desenvolvimento em série

Considere-se a equação linear homogénea de segunda ordem

$$y'' + (x-2)^2 y' + 2(x-2)y = 0, \tag{0.1}$$

com as condições iniciais $y(2) = 3,\ y'(2) = 0.$

Suponhamos que a equação admite uma solução da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-2)^n = c_0 + c_1(x-2) + c_2(x-2)^2 + \ldots + c_n(x-2)^n + \ldots$$

em alguma vizinhança do ponto $x = 2$.

Considerando que a série converge na referida vizinhança, pode ser derivada termo a termo e a série que se obtém ainda converge na mesma vizinhança. Assim

$$y'(x) = c_1 + 2c_2(x-2) + \ldots + nc_n(x-2)^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-2)^{n-1};$$

da mesma forma

$$y''(x) = 2c_2 + \ldots + n(n-1)c_n(x-2)^{n-2} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-2)^{n-2}.$$

Os coeficientes c_0 e c_1 são determinados a partir das condições $y(2) = 3$ e $y'(2) = 0$, obtendo-se $c_0 = 3$ e $c_1 = 0$.
Substituindo as séries correspondentes a y' e y'' na equação (0.1) tem-se que

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-2)^{n-2} + (x-2)^2 \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-2)^{n-1} +$$

$$2(x-2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-2)^n = 0.$$

Nesta equação, colocando todos os termos em $(x-2)$ em potências de $n+1$, vem

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+3)(n+2)c_{n+3}(x-2)^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-2)^{n+1}+$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}2c_n(x-2)^{n+1}=0.$$

Acertando finalmente os índices de soma chega-se à equação

$$2c_2+(6c_3+2c_0)(x-2)+\sum_{n=1}^{\infty}((n+3)(n+2)c_{n+3}+(n+2)c_n)(x-2)^{n+1}=0,$$

que permite obter a relação de recorrência a que os coeficientes $c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots$ devem obedecer, que é

$$\begin{cases} 2c_2 = 0 \\ 6c_3+2c_0=0 \\ (n+3)(n+2)c_{n+3}+(n+2)c_n=0, \;\; n=1,2,\ldots \quad . \end{cases}$$

A partir dos valores de c_0 e c_1 já determinados vem que

$$\begin{cases} c_0 = 3,\ \ c_1 = 0,\ \ c_2 = 0,\ \ c_3 = -1 \\ c_{n+3} = -\dfrac{c_n}{n+3} = 0,\ \ n = 1, 2, \ldots\ . \end{cases}$$

Tendo em conta que $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$ usando a recorrência deduzida obtém-se

$$c_{3n+1} = c_{3n+2} = 0,\ \ n = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

Finalmente, de $c_0 = 3$ vem

$$c_0 = 3,\ c_3 = -1,\ c_6 = \frac{1}{6} = \frac{1}{3^1 2!},\ c_9 = -\frac{1}{3^2 3!}, \ldots, c_{3n} = \frac{(-1)^n}{3^{n-1} n!}, \ldots$$

Usando a relação de recorrência provemos que a expressão induzida para os coeficientes c_{3n} está correta.

Para $n = 0$ a igualdade é trivialmente verdadeira pois

$$c_{3n} = c_0 = 3 = \frac{(-1)^0}{3^{0-1}0!}.$$

Assumindo que a expressão é verdadeira para algum n, isto é $c_{3n} = \dfrac{(-1)^n}{3^{n-1}n!}$ mostremos que $c_{3n+3} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n(n+1)!}$. Ora,

$$c_{3n+3} = -\frac{c_{3n}}{3n+3} = \frac{(-1)}{3^{n-1}n!} \cdot \frac{(-1)^n}{3(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{3^n(n+1)!};$$

a primeira igualdade, nesta última expressão, é justificada pela relação de recorrência e a segunda pela hipótese de indução. As expressões dos coeficientes c_{3n+1} e c_{3n+2} são de verificação trivial.

Obtém-se assim a solução

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n}(x-2)^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n+1}(x-2)^{3n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n+2}(x-2)^{3n+2} \\
&\boxed{= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1} n!}(x-2)^{3n}} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{(x-2)^3}{3}\right)^n}{n!} = 3e^{-\dfrac{(x-2)^3}{3}}.
\end{aligned}
$$

É fácil verificar que a função determinada é de facto solução em $\mathbb{R}$ do PVI considerado.

Em geral fica nesta forma

Obs. Por acaso aqui conseguimos, sabendo a série de potências da exponencial, perceber que temos uma exponencial no final