CN A – Teste 2020 Resolução

Felipe B. Pinto 71951 – EQB

17 de dezembro de 2024

Conteúdo

Questão 1

Seja $x \in \mathbb{R}$ e $\hat{x}$ uma aproximação de x com 5 algarismos significativos e $10^3 \leq |x| < 10^4$. Quantas casas decimais podemos garantir para $\hat{x}$?

Resposta

$k : |\varepsilon_x| \leq 0.5 * 10^{-k} = 0.5 * 10^{m+1-5}$;

$10^3 \leq |x| < 10^{m+1} = 10^4 \implies k = 1$

Questão 2

seja m_3 um polinómio de grau 3 que ajusta o conjunto de pontos $(x_i, y_i), i \in [0, 4]$ contidos no intervalo $[a, b]$, usando o método dos mínimos quadrados. Seja p_4 o polinómio de grau $\leq$ 4 interpolador de pontos $(x_i, y_i), i \in [0, 4]$ e S o spline cúbico interpolador dos mesmos pontos. Qual das seguintes afirmações não é verdadeira?

a) $\sum_{i=0}^{4} (m_{3\,(x_i)} - y_i)^2 > \sum_{i=0}^{4} (S_{(x_i)} - p_{4\,(x_i)})^2$

b) Existe pelomenos um $x_i, i \in [0, 4] : m_{3\,(x_i)} \neq p_{4\,(x_i)}$

c) $\sum_{i=0}^{4} (p_{4\,(x_i)} - S_{(x_i)})^2 = 0$

d) $S_{(x)} = p_{4\,(x)}, \quad \forall\, x \in [a, b]$

Questão 3

Seja $f_{(x)} = \int_{i=0}^{3} a_i\, x^i$ com $a_3 = 1$ e p_2 um polinómio interpolador de f nos nodos distintos $x_i \in \mathbb{R}, i = \{0, 1, 2\}$. A expressão para $f_{(x)}$ pode ser obtida por:

a) $f_{(x)} = p_{2\,(x)} + 6\,\prod_{i=0}^{2}(x - x_i), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

b) $f_{(x)} = p_{2\,(x)} + \frac{1}{6}\,\prod_{i=0}^{2}(x - x_i), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

c) $f_{(x)} = p_{2\,(x)} + x^3, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

d) $f_{(x)} = p_{2\,(x)} + \prod_{i=0}^{2}(x - x_i), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

Questão 4

Seja

$$\boldsymbol{I = \int_0^4 f_{(x)}\ \mathrm{d}x \qquad f_{(x)} \in C^4[0,4]}$$

$$\boldsymbol{f \text{ verifica } \left|f^{(n)}_{(x)}\right| \leq \frac{2^n}{n!},\ \forall\, x \in [0,4] \wedge n \in \mathbb{N}}$$

Se pretende determinar um valor aproximado de I, com pelomenos 4 casa decimais significativas, utilizando a regra de Simpson, qual o menor número de sub-intervalos de qual amplitude em que teria de dividir o intervalo $[0,4]$?

Resposta

$$\left|I - \hat{I}_S\right| = \left|-n\,\frac{h^5}{90}\,f^{(4)}_{(x)}\right| \leq \left|-n\,\frac{\left(\frac{b-a}{2\,n}\right)^5}{90}\,\frac{2^4}{4!}\right| = \left|\frac{-n(4-0)^5 * 2^4}{90 * 2^5\,n^5\,4!}\right| =$$

$$= \left|\frac{-4^4}{90 * 2\,n^4\,3!}\right| = \frac{4^4}{90 * 2\,n^4\,3!} \leq 0.5\,\mathrm{E}^{-}4 \implies$$

$$\implies n = \lceil 8.2978 \rceil = 9 \implies \text{ numero de subintervalos: } 2\,n = 18$$

Questão 5

Seja

$$I = \int_0^1 \frac{\log(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

Qual dos valores seguintes representa um valor aproximado para I, $\hat{I}$, com 5 casas décimais devidamente arredondadas, utilizando uma regra de integração numérica de aplicação simples que permita obter um grau de precisão de 3?

Questão 6

Considere a seguinte tabela de dados para a função f:

x_i	0	1	2	3
$f_{(x_i)}$	$f_{(0)}$	0	$f_{(2)}$	2

Sabe-se que

$$\boldsymbol{f_{[x_2,x_3]} = 3; \qquad f_{[x_1,x_2,x_3]} = 2; \qquad f_{[x_1,x_2,x_3,x_4]} = 2/3}$$

Q6 a.

Determine $f_{[x_0,x_1]}$; $f_{[x_1,x_2]}$; $f_{[x_0,x_1,x_2]}$; $f_{(0)}$; $f_{(2)}$.

Q6 b.

Determine o polinómio de Newton de grau ≤ 3 interpolador de f nos nodos $x_i, i = \{0, 1, 2, 3\}$.
(caso não tenha conseguido fazer a linha a) considere $f_{(0)} = -1/2$ e $f_{(2)} = 1/2$).

Q6 c.

Obtenha o polinómio de grau 1, $q_{1\,(x)}$, que ajusta o conjunto de pontos $(x_i, f_{(x_i)}), i = \{0,1,2,3\}$, utilizando a técnica dos mínimos quadrados e considerando $f_{(3)} = -1/2$ em véz de 2.

Q6 d.

Seja $p_{1\,(x)} = a + b\,x$, $\{a, b\} \in \mathbb{R}$. Prove usando a alínea anterior que $\sum_{i=0}^{3} \left(f_{(x_i)} - p_{1\,(x_i)}\right)^2$

Questão 7

Considere o seguinte spline cúbico interpolador duma função $f_{(x)}$ no intervalo $[0, 2]$:

$$\boldsymbol{S_{(x)} = \begin{cases} 1 + a\,x + 2\,x^2 - 2\,x^3, & 0 \leq x < 1 \\ 1 + b\,(x-1) - 4\,(x-1)^2 + 7\,(x-1)^3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}}$$

Q7 a.

Encontre a e b e escreva a expressão do spline.

Q7 b.

considere a tabela de valores para a função f

x_i	0	1	2
$f_{(x_i)}$	1	1	2
$f'_{(x_i)}$	0	4	11

Que tipo de spline é $S_{(x)}$? Completo ou natural? Justifique

Q7 c.

Obtenha uma aproximação para $f_{(0,5)}$. Quantas casa decimáis significativas se pode no minimo garantir para essa aproximação sabendo que $\left|f^{(3)}_{(x)}\right| \leq 0.1$?

Questão 8

Considere o integral

$$\boldsymbol{I} = \int_{-2}^{0} \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{x}}\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Q8 a.

Determine um valor aproximado $\hat{I}$ de I pela regra do ponto médio com 4 aplicações. Obtenha um majorante para o erro absoluto associado a essa aproximação. Nos cálculos ultilize 6 casas decimais convenientemente arredondadas.

Q8 b.

Determine um valor aproximado $\hat{I}$ de I pela regra do ponto médio com 2 aplicações. Obtenha um majorante para o erro absoluto associado a essa aproximação. Nos cálculos ultilize 6 casas decimais convenientemente arredondadas.