Ficha 6 - Teoremas da Continuidade e Função Inversa.

Exercício 1

Utilize o Teorema de Bolzano (ou do Valor Intermediário) para demonstrar a existência de solução para as seguintes equações nos intervalos indicados:

(a) $x^2 = e^x - \dfrac{3}{2} \quad x \in]0, 1[$

(b) $e^x = \tan(x) \quad x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

(c) $\dfrac{x}{x+1} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\sin(x)}{x} \qquad x \in]0, +\infty[$

Indicações:

(a) Considere $h(x) = x_2 - e^x + \frac{3}{2}$, definida no intervalo $[0, 1]$. Verifique $h(0) \cdot h(1) < 0$ e confirme que são cumpridas as condições do Teorema de Bolzano.

(c) Considere

$$g(x) = \frac{x}{x+1} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\sin(x)}{x}, \qquad x \in]0, +\infty[$$

Verifique que $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -1$ e que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 1$

Exercício 2

(a) Mostre que todo o polinómio $\tilde{p}$ de grau ímpar definido em $\mathbb{R}$ tem uma raíz real.

(b) Mostre que todo o polinónimio $\hat{p}$ de grau par definido em $\mathbb{R}$ tem máximo ou tem mínimo.

(Sugestão: comece por analisar os limites em $-\infty$ e em $+\infty$.)

Indicações:

(a) Sem perde de generalidade, admita que $p(x)$ é um polinómio de grau ímpar com primeiro coeficiente positivo. Estude os limites em $-\infty$ e $+\infty$ para concluir que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $p(a) < 0$ e $p(b) > 0$. Aplique o Teorema de Bolzano no intervalo fechado de extremos a e b.

Exercício 3

(a) Existe alguma função f contínua em $\mathbb{R}$ cujo contradomínio seja o conjunto $\mathbb{R}\backslash\{0\}$?

(b) Existe alguma função contínua em $[0, 1]$ cujo contradomínio seja $[0, +\infty[$?

(c) Existe alguma função contínua em $\mathbb{R}$ cuja imagem de qualquer ponto racional é um ponto irracional?

(d) Existe alguma função definida em $\mathbb{R}$ que tenha máximo e mínimo em qualquer intervalo mas que não seja contínua em nenhum ponto?

Indicações:

(a) Não. A afirmação contradiz o Teorema de Bolzano.

(b) Não. A afirmação contradiz o Teorema de Weierstrass.

(c) Sim. $f(x) = \sqrt{2} + x$.

(d) Sim. $g(x) = 0$ se $x \in \mathbb{Q}$ e $g(x) = 1$ se $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Exercício 4

(a) Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua tal que, para um certo $x_0 \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x_0) > 0$ e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

Mostre que a função f tem máximo.

(b) Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \sin(x)e^{-x^2}$. Mostre que f tem máximo e mínimo.

Indicações:

(a) Comece por justificar a existência de $m, M \in \mathbb{R}$, com $m < x_0 < M$, tais que:

$$\sup_{]-\infty,m[} f < \frac{f(x_0)}{2} \quad \text{e} \quad \sup_{]M,+\infty[} f < \frac{f(x_0)}{2}$$

e justifique que a função atinge um máximo no intervalo $[m, M]$, sendo esse máximo absoluto.

(b) Aplique o resultado da alínea anterior.

Exercício 5

Seja $f : [a, b] \mapsto [a, b]$ uma função contínua.

(a) Mostre que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$. (Diz-se que x é um ponto fixo de $[a, b]$).

(b) Admita que, para um certo $\alpha \in]0, 1[$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y| \qquad \forall x, y \in [a, b] \,.$$

Mostre que o ponto fixo é único.

(c) Sabendo que

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq \sin(1)|x - y| \qquad \forall x, y \in [0, 1]$$

mostre que a equação

$$x = \cos(x)$$

possui uma e uma só solução x_0. Indique uma sucessão definida por recorrência que seja convergente para x_0.

Exercício 6

(a) Dê um exemplo de uma função bijectiva $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$ que não tenha pontos fixos.

(b) Dê um exemplo de uma função contínua $f : [0, 1[\mapsto [0, 1[$ que não tenha pontos fixos.

Indicações:

(a) Defina, por exemplo,

$$f(x) = 1 - x \quad \text{se} \quad x \in]0, 1] \backslash \left\{ \frac{1}{2} \right\} , \quad f(0) = \frac{1}{2} , \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \,.$$

(b) Defina, por exemplo, $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

Exercício 7

(a) Considere a função $h : [1, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \ln(\sqrt{x-1} + 1)$$

Justifique que h é uma função injectiva e determine o seu contradomínio I. Caracterize h^{-1} explicitando a sua fórmula.

(b) Mesmo exercício para a função $g : [-\sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}, 0] \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \sin(x^2 + 1)$$

Exercício 8

Considere a função $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^2 + 2^x$$

(a) Justifique que f é injectiva e que por isso admite inversa f^{-1} para a composição de funções.

(b) Indique o domínio e o contradomínio de f^{-1}.

(c) Justifique que a equação

$$f^{-1}(x) = 2 - x$$

admite uma única solução em $]1, 3[$.

Exercício 9

(a) Mostre que para todo o $x \in [-1, 1]$

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2} = \cos(\arcsin(x))$$

(b) Mostre que para todo o $x, y \in \mathbb{R}$

$$\tan(\arctan(x) + \arctan(y)) = \frac{x + y}{1 - xy}$$

(sugestão: recorde a fórmula trigonométrica $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$)

Problema 10

Seja $f : I \mapsto J$, com $I, J \subset \mathbb{R}$, uma função bijectiva. Mostre que

$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = f(x)$$

Será a implicação inversa verdadeira?

Indicações: Aplique f^{-1} a ambos os membros da igualdade $f(x) = x$ para concluir $f(x) = x = f^{-1}(x)$. Repare que se $f = f^{-1}$, ou seja f é igual à sua inversa para a composição de funções, podemos ter a conclusão sem que a hipótese seja verdadeira.