1 - Matrizes

1.1 - Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Indique quais são matrizes:

(a) Quadradas.

(b) Triangulares inferiores.

(c) Diagonais.

(d) Escalares.

1.2 - Indique a matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que:

(a) $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i = j \\ 1, & \text{se } i \neq j \end{cases}.$

(b) $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i > j \\ 0, & \text{se } i = j \\ -1, & \text{se } i < j \end{cases}.$

(c) $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i + j \text{ é par} \\ -1, & \text{se } i + j \text{ é ímpar} \end{cases}.$

1.3 - Considere as matrizes de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine:

(a) $A + B + C$.

(b) $2A + 2C + 2B$.

(c) $A - B$.

(d) $2A - 3(B + C)$.

1.4 - Dadas as matrizes de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

determine uma matriz $X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, tal que

$$X + A = 2(X - B).$$

1.5 - Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$.

Determine, se possível, AB e BA.

1.6 - Sejam

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}).$$

Calcule $(AB)_{23}$, $(BA)_{12}$, $(AB)_{22}$ e $(BA)_{22}$.

1.79 - Sejam $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tais que

$$a_{ij} = i - j \quad \text{e} \quad b_{ij} = 2i + j.$$

Justifique que $(AB)_{ij} = 6i - 3j + 2ij - 10$, com $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$.

1.7 - Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \ \text{e} \ D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine, se possível, cada um dos seguintes produtos:

(a) AB.

(b) BA.

(c) CD.

(d) DC.

1.8 - Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Verifique que:

(a) $AB \neq BA$.

(b) $AB = 0$ com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

(c) $BA = CA$ e $A \neq 0$ mas $B \neq C$.

1.10 - Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Justifique que:

(a) Se A tem a linha i nula então a matriz AB tem a linha i nula.

(b) Se B tem a coluna k nula então a matriz AB tem a coluna k nula.

(c) Se A tem as linhas i e j iguais, come e $i \neq j$, então a matriz AB tem as linhas i e j iguais.

(d) Se B tem as colunas k e l iguais, com $k \neq l$, então a matriz AB tem as colunas k e l iguais.

1.9 - Sejam $D, D' \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes diagonais. Mostre que DD' é uma matriz diagonal com $(DD')_{ii} = d_{ii}d'_{ii}$, $i = 1, \ldots, n$, e que $DD' = D'D$.

1.Extra - Sejam $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{K})$ matrizes de Toeplitz. Justifique que:

(a) $A + B$ é ainda uma matriz de Toeplitz.

(b) Dê exemplo de duas matrizes de Toeplitz de $\mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{K})$ cujo produto não é uma matriz de Toeplitz.

1.14 - Sem calcular $(A+B)^2$, $(A-B)^2$ e A^2-B^2, verifique que para as matrizes $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se tem:

(a) $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$.

(b) $(A-B)^2 \neq A^2-2AB+B^2$.

(c) $A^2-B^2 \neq (A-B)(A+B)$.

1.15 - Seja $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz diagonal. Determine D^k, com $k \in \mathbb{N}$.

1.19 - Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Atendendo ao Exercício 1.10, justifique que:

(a) Se A tem uma coluna nula então A não é invertível.

(b) Se A tem as colunas i e j iguais, com $i \neq j$, então A não é invertível.

1.20 - Indique:

(a) Uma condição necessária e suficiente para que uma matriz diagonal seja invertível.

(b) D^{-1}, sendo $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz diagonal invertível.

1.21 - Dê exemplo de matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tais que:

(a) A e B são invertíveis e $A+B$ não é invertível.

(b) $A+B$ é invertível e nem A nem B são invertíveis.

1.108 - Seja J_n a matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ com todas as entradas iguais a 1. Mostre que:

(a) $J_n^2 = nJ_n$.

(b) Se $n \geq 2$ então $I_n - J_n$ é invertível e $(I_n-J_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1}J_n$.

1.22 - Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que:

(a) $A^3 = I_n$.

(b) $A^2+2A = I_n$.

(c) $A^2+\alpha A+\beta I_n = 0$, com $\alpha \in \mathbb{K}$ e $\beta \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$.

Para cada uma das alíneas anteriores, mostre que A é invertível e indique a sua inversa.

1.26 - Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ invertível com $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine uma matriz B tal que $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e justifique que tal matriz é única.

(b) Determine uma matriz C tal que $AC = A + 2I_3$ e justifique que tal matriz é única.

1.34 - Indique quais das matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad F=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) são simétricas.

(b) são hemi–simétricas.

1.36 - Mostre que, para quaisquer $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$, se tem:

(a) Se A e B são simétricas então $A+B$ é simétrica.

(b) Se A e B são simétricas então AB é simétrica se, e só se, A e B comutam.

(c) Se A é simétrica então αA é simétrica.

(d) Se A é simétrica e invertível então o mesmo sucede a A^{-1}.

1.37 - Justifique as afirmações:

(a) A única matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ que é simultaneamente simétrica e hemi–simétrica é a matriz nula.

(b) Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é simétrica então o mesmo sucede a A^k, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

1.129 - (a) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Justifique que:

i. $A + A^{\mathsf{T}}$ é simétrica;

ii. $A - A^{\mathsf{T}}$ é hemi–simétrica.

(b) Mostre que qualquer matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ se pode escrever como soma de uma matriz simétrica com uma matriz hemi–simétrica.

(c) Justifique que se $A = B+C = B'+C'$, com B e B' simétricas e C e C' hemi–simétricas, então $B = B'$ e $C = C'$ (o que implica que a decomposição referida em (b) é única.) Sugestão Atenda a que, de acordo com a alínea (a) do Exercício 1.37, a única matriz simultaneamente simétrica e hemi–simétrica é a matriz nula.

(d) Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ determine a matriz simétrica B e a matriz hemi–simétrica C tais que $A = B + C$.

1.40 - Considere as matrizes

$$A = I_n,\ B = \begin{bmatrix} 0 & 2-3i \\ -2-3i & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & i & 2 \\ -i & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } E = \begin{bmatrix} 0 & i & 2 \\ -i & 0 & 1+2i \\ 2 & 1-2i & 1 \end{bmatrix}.$$

Indique quais são matrizes:

(a) Hermíticas.

(b) Hemi–hermíticas.

1.41 - Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Justifique que as matrizes A^*A e AA^* são hermíticas.

1.136 - Justifique as afirmações:

(a) A única matriz de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ simultaneamente hermítica e hemi–hermítica é a matriz nula.

(b) Qualquer que seja a matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, $A + A^*$ é hermítica e $A - A^*$ é hemi–hermítica.

(c) Se $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ é hermítica então iC e $-iC$ são hemi–hermíticas.

(d) Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ se pode escrever na forma $A = B + iC$ com B e C hermíticas, ou equivalentemente, na forma

$$A = B + C',$$

com B hermítica e C' hemi–hermítica.

(e) Cada uma das decomposições referidas em (d) é única.

Sugestão: Atenda a (a).

1.42 - Indique se cada uma das seguintes matrizes é uma matriz elementar e, em caso afirmativo, se é do tipo I, II ou III.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(e) I_n.

1.43 - Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{K})$. Determine as matrizes elementares que, multiplicadas à esquerda de A, efectuam em A cada uma das seguintes transformações:

(a) Troca das linhas 1 e 3.

(b) Multiplicação da linha 1 por 6.

(c) Adição, à linha 3, da linha 2 multiplicada por $\frac{1}{5}$.

1.44 - Sem efectuar multiplicações de matrizes, indique o resultado de:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.45 - Indique, se existir, uma matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ sob a forma de um produto de matrizes elementares que, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, verifique:

(a) $A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2a \\ c \end{bmatrix}$.

(b) $A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ c \\ -b \end{bmatrix}$.

1.140 - Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$. Considere que

$$A \xrightarrow[\alpha l_1]{} A_1 \xrightarrow[l_3+\beta l_2]{} A_2 \xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_4]{} A_3 \xrightarrow[\gamma c_3]{} A_4 \xrightarrow[c_2+\delta c_4]{} B.$$

Utilizando multiplicações por matrizes elementares, relacione

(a) A_2 com A.

(b) A_3 com A_1.

(c) B com A.

1.46 - Determine a inversa de cada uma das seguintes matrizes elementares:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.144 - Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Sem efectuar multiplicação de matrizes, calcule a matriz A.

(b) Justifique que A é invertível e indique A^{-1} como produto de matrizes elementares.

(c) Sem efectuar multiplicação de matrizes, calcule a matriz A^{-1}.

1.48 - Indique se estão em forma de escada cada uma das seguintes matrizes:

(a) I_n.

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.49 - Indique uma matriz em forma de escada e equivalente por linhas a cada uma das matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & -4 & 7 & 5 \\ -2 & -4 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

1.51 - Indique se estão em forma de escada reduzida cada uma das seguintes matrizes em forma de escada:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

1.52 - Indique a forma de escada reduzida de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 & 0 \\ 4 & 8 & -4 & 7 & 5 \\ -2 & -4 & 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Observação – Caso tenha resolvido o Exercício 1.49 já determinou uma matriz em forma de escada e equivalente por linhas a cada uma destas matrizes.

1.55 - Determine se são equivalentes por linhas as matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

1.56 - Mostre que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

são equivalentes por linhas e indique uma sequência de transformações elementares sobre linhas tal que:

(a) $A \xrightarrow[(linhas)]{} B$.

(b) $B \xrightarrow[(linhas)]{} A$.

1.57 - Considere as matrizes

$$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine a característica de A_i, com $i = 1, 2, 3, 4$.

1.58 - Discuta, segundo os valores de α e de β, a característica das matrizes de elementos reais

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{B}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -1 & \beta \\ 1 & 0 & \beta & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.59 - Calculando as características, justifique que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

não são equivalentes por linhas.

1.156 - Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere as matrizes

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & \beta & \beta \\ 1 & \alpha+\beta & \beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & \beta & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Discuta, em função de α e β, a característica das matrizes anteriores.

1.62 -

(a) Determine o conjunto dos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 7+\alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$$

é invertível.

(b) Determine o conjunto dos valores de α e o conjunto dos valores de β, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, para os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha+3 & 2 \\ 2 & 4 & \beta \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$$

é invertível.

1.65 - Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que A é invertível e determine A^{-1}.

(b) Exprima A^{-1} e A como produto de matrizes elementares.

1.171 - Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ tais que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^2 = I_3.$$

Determine $X \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ que verifica $AXB^{-1} = A^\top B + B$.

1.66 - Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}), \; B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R}),$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{C}) \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{R}).$$

Indique quais são invertíveis e, em caso afirmativo, determine a respectiva inversa.

2 - Sistemas de Equações Lineares

2.2 - Sejam
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$$
e (S) o sistema de equações lineares $AX = B$. Sem resolver o sistema, mostre que:

(a) $(-1, 1, 1, 3)$ é solução de (S).

(b) $(1, 0, 1, 0)$ não é solução de (S).

2.3 - Justifique que existe um sistema (S) de equações lineares, $AX = B$, com
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$$
e tal que $(1, 2, 3)$ é solução de (S). Indique as equações de um sistema nessas condições.

2.7 - Discuta cada um dos seguintes sistemas de equações lineares, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, sobre $\mathbb{R}$, e resolva-os nos casos em que são possíveis.
$$(S_1)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$
$$(S_3)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

2.8 - Com a informação dada no quadro seguidamente apresentado determine, caso seja possível, se cada um dos sistemas de equações lineares $AX = B$ é possível (determinado ou indeterminado) ou impossível e, para os sistemas indeterminados, indique o respectivo grau de indeterminação.

	Matriz A	r(A)	r([A | B])
(a)	3×3	3	3
(b)	3×3	2	3
(c)	3×3	1	1
(d)	5×7	3	3
(e)	5×7	2	3
(f)	6×2	2	2
(g)	4×4	0	0

2.9 - Indique um sistema de equações lineares com 3 incógnitas que seja possível indeterminado, com grau de indeterminação

(a) 1.

(b) 2.

O grau de indeterminação pode ser 3?

2.10 - Um sistema de equações lineares $AX = B$ tem uma matriz ampliada equivalente por linhas à matriz indicada. Determine o conjunto das soluções do sistema.

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

(b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$.

(c) $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

2.11 - Indique o conjunto $\mathcal{C}$ dos valores reais de k para os quais o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 3x - 3y = k \end{cases}$$

nas incógnitas x, y, sobre $\mathbb{R}$, é

(a) impossível.

(b) possível determinado.

(c) possível indeterminado.

2.15 - Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é invertível e utilize A^{-1} para resolver o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} -3x + 2y - z = \alpha \\ 2x - 2z = \beta \\ -x + y + z = \gamma \end{cases}, \quad \text{com } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

2.24 - Discuta cada um dos seguintes sistemas de equações lineares, nas incógnitas x_1, x_2, x_3, sobre $\mathbb{R}$, e resolva-os nos casos em que são possíveis.

$$(S_1) \begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_3 = -2 \\ -6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} -x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \qquad (S_4) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$(S_5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = -1 \end{cases} \qquad (S_6) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(S_7) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 - x_3 = -1 \end{cases}$$

2.26 - Mostre que:

(a) Existe um, e um só, polinómio $p(x)$ de grau 3 tal que

$$p(-1) = 0, \quad p(1) = 4, \quad p(2) = 3 \quad \text{e} \quad p(3) = 16.$$

(b) O polinómio referido em (a) é $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$.

2.35 - Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x - \alpha y + z = -1 \\ -x - y + (\alpha + 1)z = \beta - 2 \end{cases}.$$

(a) Discuta o sistema, em função de α e β.

(b) Para $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ indique o conjunto das soluções do sistema.

2.37 - Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$(S_{\alpha,\beta}) \qquad \begin{cases} x + \alpha y + \beta z = 1 \\ \alpha(\beta - 1)y = \alpha \\ x + \alpha y + z = \beta^2 \end{cases}.$$

(a) Discuta o sistema, em função de α e β.

(b) i. Justifique que $S_{2,2}$ tem uma e uma só solução.
   ii. Justifique que a matriz simples de $S_{2,2}$ é invertível.
   iii. Determine a solução de $S_{2,2}$, utilizando a inversa da matriz simples do sistema.

3 - Determinantes

3.1 - Calcule o determinante das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

3.2 - Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, com $a \neq 0$. Calcule o determinante de A pela Regra de Sarrus.

3.3 - Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Determine:

(a) $\widehat{a}_{11}$.

(b) $\widehat{a}_{32}$.

(c) $\widehat{a}_{23}$.

3.4 - Calcule, de duas formas diferentes, o determinante de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 2 \\ -i & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$.

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -6 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

3.38 - Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ -1 & a-1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & b-2 & 0 \\ 2 & 4 & 7b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Justifique que:

(a) $\widehat{a}_{43} = 0$.

(b) $\widehat{a}_{44}$ não depende de b.

(c) $\det A$ não depende de b.

3.5 - Seja

$$H = \begin{bmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & 0 & y & 0 & d \\ 0 & z & e & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R}).$$

Calcule $\det H$.

3.6 - Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, considere

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -3 & 2 \\ 0 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & -3 & 3-\lambda \end{bmatrix}.$$

Determine o conjunto dos valores de λ para os quais $\det A_\lambda = 0$.

3.10 - Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\det A = \gamma$.

Indique, em função de γ, o valor de cada um dos seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$.

(b) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$.

(c) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$.

(d) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$.

(e) $\begin{vmatrix} b & e & h \\ a & d & g \\ c & f & i \end{vmatrix}$.

3.46 - Os números 20604, 53227, 25755, 20927 e 78421 são divisíveis por 17. Justifique que o mesmo sucede ao determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

sem calcular o seu valor. Sugestão: Efectue transformações elementares sobre colunas, do tipo III, de forma a que c_5 seja transformada em

$$c_5 + 10c_4 + 10^2c_3 + 10^3c_2 + 10^4c_1.$$

3.56 - Calcule o determinante das matrizes de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$:

(a) $\begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ & & & \cdots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{bmatrix}.$

(b) $\begin{bmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{bmatrix}.$

3.16 - Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 \end{vmatrix} = 1 + a_1 + a_2 + a_3.$$

Sugestão: Adicione à coluna 1 as colunas 2 e 3.

3.15 - Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$B_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & k \\ 0 & k & -k & k \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Determine o conjunto dos valores de k para os quais se tem $\det B_k = 2$.

3.19 - Para cada $t \in \mathbb{R}$, seja

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -7 & t+3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Determine o conjunto dos valores de t para os quais A_t é invertível.

3.20 - Sejam $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $\det A = 2$, $\det B = -5$ e $\det C = 4$. Calcule $\det(AB^\top C)$, $\det(3B)$ e $\det\left(B^2C\right)$.

3.21 - Mostre que, para quaisquer $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, se tem:

(a) $\det(AB) = \det(BA)$.

(b) Se AB é invertível então o mesmo sucede a A e a B.

3.22 - Sejam $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 2}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que $\det(AB) \neq \det(BA)$.

(b) Comente a alínea anterior, atendendo à alínea (a) do Exercício 3.21.

3.74 - Seja $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível, com $\det A = r$. Justifique que as matrizes seguintes são invertíveis e indique, em função de r e de α, o respectivo determinante.

(a) $(\alpha A)^{-1}$.

(b) αA^{-1}.

(c) $\left(\alpha^{-1}A\right)^{-1}$.

(d) $\alpha^{-1}A^{-1}$.

3.72 - Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^2 = -A$. O que pode afirmar sobre $\det A$?

3.73 - Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz unitária (isto é, $AA^* = I_n$). Mostre que $\det A$ tem módulo 1.

3.42 - Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Mostre que:

(a) Se A é hermítica então $\det A$ é um número real.

(b) Se A é hemi–hermítica então $\det A$ é um número com parte real nula se n é ímpar e um número real se n é par.

3.23 - Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz idempotente (isto é, $A^2 = A$). Mostre que $\det A \in \{0, 1\}$.

3.25 - Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) Calcule $\det A$ e $\det B$.

(b) Determine se A e B são invertíveis e, em caso afirmativo, indique o determinante da respectiva inversa.

(c) Indique se são determinados os sistemas

i. $AX = 0$.

ii. $BX = 0$.

3.26 - Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Verifique que $\operatorname{adj} A = A$.

3.28 - Mostre que cada uma das matrizes seguintes é invertível e determine a sua inversa a partir da sua adjunta.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(b) $V_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, com $z \neq 0$ ou $w \neq 0$.

3.29 - Seja $M = \begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(a) Calcule $\operatorname{adj} M$.

(b) Utilizando determinantes, indique para que valores de m a matriz M é invertível.

(c) Nos casos em que M é invertível, determine M^{-1} a partir de $\operatorname{adj} M$.

3.31 - Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$, uma matriz invertível. Mostre que:

(a) $\operatorname{adj} A$ é invertível.

(b) $(\operatorname{adj} A)^{-1} = \frac{1}{|A|}A = \operatorname{adj}(A^{-1})$.

(c) $|\operatorname{adj} A| = |A|^{n-1}$.

(d) $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = |A|^{n-2}A$.

3.90 - Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, com $n \geq 2$, matrizes invertíveis. Mostre que:

(a) $\operatorname{adj}(AB) = (\operatorname{adj} B)(\operatorname{adj} A)$.

(b) $\operatorname{adj}\left(A^k\right) = (\operatorname{adj} A)^k$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

(c) $\operatorname{adj}\left(S^{-1}AS\right) = S^{-1}(\operatorname{adj} A)S$, para qualquer matriz invertível $S \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

3.32 - Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$$

e considere o sistema (S) de equações lineares $AX = B$.

(a) Calcule $\det A$ e justifique que o sistema (S) é um sistema de Cramer.

(b) Utilizando a Regra de Cramer, determine a solução do sistema (S).

3.33 - Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & -k & 1 \\ 0 & k & k \\ k & k & -k \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) Usando determinantes, indique para que valores de k a matriz A_k é invertível.

(b) Para $k = -1$ justifique que o sistema de equações lineares

$$AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é um sistema de Cramer e determine a sua solução.

3.95 - Considere o sistema, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$(S) \qquad \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y = 0 \\ -y - z = -1 \end{cases}.$$

Justifique que (S) é um sistema de Cramer e resolva-o, utilizando a Regra de Cramer.

4 - Espaços Vectoriais

4.1 - Reescreva a Definição de Espaco-Vectorial utilizando os símbolos $+$ e $\cdot$ para a adição e a multiplicação em $\mathbb{K}$, respectivamente, e os símbolos $\boxplus$ e $\boxdot$ para a adição em E e a multiplicação externa, respectivamente.

4.3 - Considere $\mathbb{R}^2$ com uma adição e uma multiplicação externa definidas, respectivamente, por

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$
$$\alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, 0),$$

para quaisquer $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ não é um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$.

4.5 - Considere o conjunto $\mathbb{R}^+$ com uma adição definida por

$$u \boxplus v = uv \qquad \text{(produto usual)}$$

e uma multiplicação externa definida por

$$\alpha \boxdot u = u^\alpha \qquad \text{(potência usual)},$$

para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^+$ e qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. Mostre que $(\mathbb{R}^+, \boxplus, \boxdot)$ é um espaço vectorial real.

4.6 - Indique 0_E nos seguintes casos:

(a) $E = \mathbb{R}^4$.

(b) $E = \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

(c) $E = \mathbb{R}_3[x]$.

4.7 - Indique o oposto, para a adição, de cada um dos elementos do espaço vectorial indicado:

(a) $(1, -2, 3, 0) \in \mathbb{R}^4$.

(b) $(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(d) $x^3 - 2x^2 + 3x \in \mathbb{R}_3[x]$.

4.8 - Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e sejam $u, v \in E$. Justifique que:

(a) Se $\alpha u = \alpha v$ e $\alpha \neq 0$ então $u = v$.

(b) Se $\alpha u = \beta u$ e $u \neq 0_E$ então $\alpha = \beta$.

4.13 - Determine quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço vectorial indicado.

(a) $F_1 = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : \ a \geq 0\}$ em $\mathbb{R}^2$.

(b) $F_2 = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, -1, 0)\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(c) $F_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \ 2a = b \ \wedge \ c = 0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(d) $F_4 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \ 2a = b\}$ em $\mathbb{R}^3$.

4.15 - Mostre que é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$:

(a) Com a diagonal principal nula.

(b) Triangulares superiores.

(c) Diagonais.

(d) Escalares.

(e) Simétricas.

(f) Hemi-simétricas.

4.Extra - Mostre que o conjunto da Matrizes de Toeplitz de ordem n é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

4.16 - Justifique que não é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ o conjunto das matrizes de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$:

(a) Com a diagonal principal não nula.

(b) Invertíveis.

(c) Não invertíveis.

4.98 - Determine se são subespaços de $\mathbb{R}^n$ os conjuntos:

(a) $F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \; x_1 \in \mathbb{Q}\}$.

(b) $G = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \; x_1 = x_n^2\}$, com $n \geq 2$.

(c) $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \; x_1 x_n = 0\}$, com $n \geq 2$.

4.100 - Em $\mathbb{R}^3$, considere a sequência

$$S = \Big((1,0,1),\, (0,1,1),\, (2,-1,1)\Big).$$

(a) Indique se $(1,-1,2)$ é combinação linear dos vectores de S.

(b) Justifique que $(1,-1,0)$ é combinação linear dos vectores de S.

(c) Mostre que é possível escrever, de duas formas diferentes, o vector $(1,-1,0)$ como combinação linear dos vectores de S.

(d) Determine o conjunto dos valores reais de k para os quais o vector $(3,-5,k)$ é combinação linear dos vectores de S.

4.20 - Mostre que os seguintes conjuntos são subespaços do espaço vectorial indicado:

(a) $F = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \; a - 2b = 0 \; \wedge \; b + c = 0\}$ em $\mathbb{R}^4$.

(b) $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \; a - 2b = 0 \; \wedge \; b + c = 0 \right\}$ em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $H = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : \; a - 2b = 0 \; \wedge \; b + c = 0\}$ em $\mathbb{R}_3[x]$.

4.22 - Seja $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Mostre que G é um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ indicando uma sequência geradora de G.

4.23 - Apresentando uma sequência geradora, justifique que os seguintes conjuntos são subespaços do espaço vectorial indicado.

(a) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \; a - c = 0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \; a + d = 0 \right\}$ em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $\{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : \; a - 2c + d = 0\}$ em $\mathbb{R}_3[x]$.

4.105 - Apresentando uma sequência geradora, justifique que os seguintes conjuntos são subespaços do espaço vectorial indicado.

(a) $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \; a + 2b - c = 0\}$ em $\mathbb{R}^4$.

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : \; b + f = 0 \; \wedge \; a = c \; \wedge \; e = 0 \right\}$ em $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

(c) $\{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] : \; a + d = 0 \; \wedge \; c = 2d\}$ em $\mathbb{R}_3[x]$.

4.24 - Sejam $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, v$ elementos de um espaço vectorial E tais que

$$v \in \langle u_1, \ldots, u_k, u_{k+1} \rangle \qquad \text{e} \qquad v \notin \langle u_1, \ldots, u_k \rangle .$$

Mostre que

$$u_{k+1} \in \langle u_1, \ldots, u_k, v \rangle .$$

Sugestão: Nas condições do enunciado e sendo v combinação linear dos vectores $u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}$, comece por justificar que o coeficiente de u_{k+1} é não nulo.

4.25 - Em $\mathbb{R}^3$, considere os vectores

$$u_1 = (1, 1, 2),\ u_2 = (0, 0, 1),\ u_3 = (-1, -1, -1),$$

$$v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (1, 1, 0),\ v_3 = (1, 0, 0).$$

Mostre que $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subsetneqq \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

4.110 - Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $u_1, u_2, u_3, u_4 \in E$. Justifique que:

(a) $\langle u_1, u_3, u_4 \rangle = \langle u_4, -2u_1, u_3 + u_4 \rangle$.

(b) $\langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle = \langle u_3 + 2u_1, 2u_2, u_4 - u_2, -u_1 \rangle$.

4.28 - Seja E um espaço vectorial e sejam $u_1, \ldots, u_r$, $v_1, \ldots, v_s$ vectores de E. Justifique que:

(a) Qualquer sequência de vectores que inclua o vector 0_E é linearmente dependente.

(b) Se $u_i = u_j$, com $i \neq j$ e $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, então os vectores $u_1, \ldots, u_r$ são linearmente dependentes.

(c) Se os vectores $u_1, \ldots, u_r$ são linearmente dependentes então os vectores $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ são linearmente dependentes.

(d) Se os vectores $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s$ são linearmente independentes então os vectores $u_1, \ldots, u_r$ são linearmente independentes.

4.30 - Mostre que:

(a) Em $\mathbb{R}^3$, a sequência $\big((1, 2, 3), (0, -1, 1), (0, 0, 2)\big)$ é linearmente independente.

(b) Em $\mathbb{R}^3$, a sequência $\big((1, 2, 3), (2, 4, 4), (0, 0, 2)\big)$ é linearmente dependente.

(c) Em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$ é linearmente independente.

(d) Em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$ é linearmente dependente.

4.31 - Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ e sejam $u_1, u_2, u_3 \in E$. Justifique as afirmações:

(a) $S = (u_1, u_2, u_3)$ é linearmente independente se, e só se,

$$S' = (u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3)$$

é linearmente independente.

(b) $S = (u_1, u_2, u_3)$ é linearmente independente se, e só se,

$$S'' = (u_1 - u_2, u_2 - u_3, u_1 + u_3)$$

é linearmente independente.

(c) A sequência

$$S''' = (u_1 - u_2, u_2 - u_3, u_1 - u_3)$$

é linearmente dependente.

4.33 - Em $\mathbb{R}^3$, considere o subespaço $F = \big\langle (2, 3, 3) \big\rangle$. Indique, para F, duas bases distintas.

4.35 - Seja $G=\left\{\begin{bmatrix} a & a+b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : a,b\in\mathbb{R}\right\}$ o subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ referido no Exercício 4.22. Determine uma base de G.

4.123 - Seja $F=\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x] :\ p(0)=0 \ \wedge\ p(1)=0\}$. Mostre que F é um subespaço de $\mathbb{R}_3[x]$ com dimensão 2.

4.41 - Em $\mathbb{R}^3$, considere o subespaço

$$F=\Big\langle(1,2,1),(2,-1,-3),(0,1,1)\Big\rangle .$$

(a) Verifique que $\big((1,2,1),(2,-1,-3),(0,1,1)\big)$ não é uma base de F.

(b) Determine uma base de F constituída por vectores da sequência indicada na alínea anterior.

4.44 - Em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, considere as bases

$$\mathcal{B}=\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

e

$$\mathcal{B}'=\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

(a) Determine a sequência das coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ em cada uma das bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

(b) Determine a sequência das coordenadas de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ em cada uma das bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

4.45 - Em $\mathbb{R}_3[x]$, considere as bases

$$\mathcal{B}=\left(x^3,\ x^3+x^2,\ x^3+x^2+x,\ x^3+x^2+x+1\right)$$

e

$$\mathcal{B}'=\left(x^3,\ x^2,\ x,\ 1\right).$$

(a) Determine a sequência das coordenadas do vector $4x^3+3x^2+2x+1$ em cada uma das bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

(b) Determine a sequência das coordenadas de $ax^3+bx^2+cx+d\in\mathbb{R}_3[x]$ em cada uma das bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

4.149 - **(a)** Justifique que $\mathcal{B}=\left(x^2+2x+1,\ x^2-1,\ x^2-2x+1\right)$ é uma base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) Considerando, em $\mathbb{R}_2[x]$, a base $\mathcal{B}'=\left(1,\ x,\ x^2\right)$ determine:

i. A sequência das coordenadas, na base $\mathcal{B}'$, de cada um dos vectores da base $\mathcal{B}$.

ii. A sequência das coordenadas, na base $\mathcal{B}$, de cada um dos vectores da base $\mathcal{B}'$.

4.48 - Sejam

$$F=\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 :\ a-c=0\ \wedge\ a-b+d=0\right\}$$

e

$$G=\Big\langle(1,1,0,1),(2,1,2,-1)\Big\rangle .$$

Determine uma base de $F\cap G$ e de $F+G$.

4.132 - Considere o conjunto F das matrizes de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ em que a primeira coluna é nula.

(a) Justifique que F é um subespaço de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

(b) Mostre que existe um subespaço G de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = F \oplus G.$$

4.52 - Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços

$$F = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \ a-b=0 \ \wedge \ a=b+d\right\},$$

$$G = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : \ b-c=0 \ \wedge \ d=0\right\}$$

e

$$H = \left\langle(1,0,0,3),(2,0,0,1)\right\rangle.$$

Determine uma base de

(a) F.

(b) G.

(c) $F+G$.

(d) $F+H$.

4.56 - Em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, considere os subespaços

$$F = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \ a,b \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{e} \quad G = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} : \ c,d \in \mathbb{R}\right\}.$$

(a) Mostre que $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

(b) Considerando $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ determine a projecção de A sobre F, segundo G, e a projecção de A sobre G, segundo F.

4.59 - Sejam F e G subespaços de um espaço vectorial E, com $\dim E = n$, $\dim F > \frac{n}{2}$ e $\dim G > \frac{n}{2}$. Mostre que $F \cap G \neq \{0_E\}$.

4.62 - Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços

$$F = \left\langle(1,0,1),\ (1,-1,2)\right\rangle \quad \text{e} \quad G = \left\langle(1,\alpha,3)\right\rangle.$$

(a) Determine o conjunto dos valores de α para os quais se tem

$$\dim(F+G) = 3.$$

(b) Conclua que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$ se, e só se, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

4.138 - Sejam F, G e H subespaços de um espaço vectorial E de dimensão finita tais que

$$F \cap G = F \cap H, \quad F+G = F+H \quad \text{e} \quad G \subseteq H.$$

Justifique que $G = H$.

4.65 - Em $\mathbb{R}^3$, considere a sequência de vectores

$$S_k = \Big((1,0,2),(-1,2,-3),(-1,4,k)\Big).$$

Determine o conjunto dos valores de k para os quais S_k é uma base de $\mathbb{R}^3$.

4.69 - Em $\mathbb{R}^4$, considere o subespaço $F = \big\langle (1,0,1,0),\ (-1,1,0,1),\ (1,1,2,1) \big\rangle$.

(a) Indique uma base de F.

(b) Verifique que $(1,2,3,2) \in F$.

(c) Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua os vectores da base de F indicada em (a).

4.71 - Em $\mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$, considere as sequências

$$S_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad \text{e} \quad S_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Determine se S_i, $i = 1,2$, é uma sequência linearmente dependente e, em caso afirmativo, indique um vector da sequência que seja combinação linear dos restantes.

4.151 - Indique, caso exista, um vector u tal que

(a) $S = \big((0,0,3),\ (-1,0,2),\ u\big)$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) $S = \big(3,\ -x^2+2,\ u\big)$ seja uma base de $\mathbb{R}_2[x]$.

4.64 - Em $\mathbb{R}^3$, considere as sequências

$$S_1 = \big((1,-1,1),(1,1,0)\big) \quad \text{e} \quad S_2 = \big((1,-1,1),(1,1,0),(2,0,1)\big).$$

Determine se S_i, $i = 1,2$, é uma sequência linearmente dependente e, em caso afirmativo, indique um vector da sequência que seja combinação linear dos restantes.

4.73 - Seja E um espaço vectorial e seja (e_1, e_2, e_3) uma base de E. Considere as sequências

$$S_1 = (e_1 - e_2 + e_3,\ e_1 + e_2) \quad \text{e} \quad \mathbf{S_2} = (e_1 - e_2 + e_3,\ e_1 + e_2,\ 2e_1 + e_3).$$

Determine se S_i, $i = 1,2$, é uma sequência linearmente dependente e, em caso afirmativo, indique um vector da sequência que seja combinação linear dos restantes.

4.74 - Indique a dimensão e uma base do subespaço

(a) $F = \big\langle 2x^3+2x^2-2x,\ x^3+2x^2-x-1,\ x^3+x+5,\ x^3+3,\ 2x^3+2x^2-x+2 \big\rangle$ de $\mathbb{R}_3[x]$.

(b) $G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

4.152 - Em $\mathbb{R}_2[x]$, considere o subespaço

$$F = \big\langle x^2+1,\ x+1,\ 2x^2-x+1 \big\rangle.$$

(a) Indique uma base de F.

(b) Determine uma base de $\mathbb{R}_2[x]$ que tenha como subsequência a base indicada em (a).

4.144 - (a) Em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, determine o conjunto dos valores de k para os quais as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 2k \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} k+1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são linearmente independentes.

(b) Para os valores de k determinados em (a), indique uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que inclua as matrizes A, B e C.

4.155 - Em $\mathbb{R}_4[x]$, considere o subespaço

$$F = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in \mathbb{R}_4[x] : \ -2a_0 + 2a_1 + a_4 = 0 \ \wedge \ -a_0 + a_1 + 5a_4 = 0\right\}.$$

(a) Determine uma base de F.

(b) Determine uma base de $\mathbb{R}_4[x]$ que inclua a base de F indicada em (a).

(c) Indique, caso exista, um subespaço G de $\mathbb{R}_4[x]$ tal que

$$\dim(F+G) = 4 \quad \text{e} \quad \dim(F \cap G) = 1.$$

4.156 - Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços

$$F = \Big\langle (0,1,0,1),\ (1,2,1,2),\ (1,1,1,1),\ (1,2,3,4) \Big\rangle$$

e

$$G_t = \Big\langle (1,1,0,1),\ (1,0,1,1),\ (t,2,-1,1) \Big\rangle.$$

(a) Mostre que existe um, e um só, valor de t para o qual $\dim G_t = 2$.

(b) Para o valor de t determinado em (a), determine uma base de $F + G_t$ e a dimensão de $F \cap G_t$.

5 - Aplicações Lineares

5.2 - Determine se é linear a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que, para qualquer $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, se tem

(a) $f(x,y,z) = (y,0)$.

(b) $f(x,y,z) = (x-1,y)$.

(c) $f(x,y,z) = (xy,0)$.

(d) $f(x,y,z) = (x,|z|)$.

5.3 - (a) Seja $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \overline{z},$$

para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Justifique que f não é uma aplicação linear se $\mathbb{C}$ é considerado espaço vectorial sobre $\mathbb{C}$.

(b) Seja $g : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ tal que

$$g(z) = \overline{z},$$

para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Justifique que g é uma aplicação linear se $\mathbb{C}$ é considerado espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$.

5.4 - Seja $g : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que

$$g(A) = A^\top,$$

para qualquer $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Justifique que g é uma aplicação linear.

5.5 - Considere a aplicação $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que

$$f(A) = \det A,$$

para qualquer $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Justifique que, para $n \geq 2$, f não é linear. O que sucede para $n = 1$?

5.6 - Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ uma aplicação linear. Justifique que:

(a) $f(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $f(2, 4, -2) = 2f(1, 2, -1)$.

(c) $f(-3, 1, 2) = f(-2, 0, 1) + f(-1, 1, 1)$.

5.7 - Determine se é linear cada uma das aplicações seguintes:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(a, b, c) = (2a, b + 1),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $g : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$g(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} c & b \\ a+b & 2 \end{bmatrix},$$

para qualquer $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$.

5.50 - De acordo com o Exercício 4.5, $\mathbb{R}^+$ com as operações $\boxplus$ e $\boxdot$ definidas por

$$a \boxplus b = ab,$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}^+$, e

$$\alpha \boxdot a = a^\alpha,$$

para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e qualquer $a \in \mathbb{R}^+$, constitui um espaço vectorial sobre $\mathbb{R}$. Justifique que são lineares as seguintes aplicações:

(a) $f : (\mathbb{R}, +, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}^+, \boxplus, \boxdot)$ tal que

$$f(x) = \mathrm{e}^{\,x},$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(b) $g : (\mathbb{R}^+, \boxplus, \boxdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, +, \cdot)$ tal que

$$g(x) = \log x,$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$.

5.10 - Determine o núcleo, uma base do núcleo e uma base da imagem de cada uma das aplicações lineares seguintes:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x, y, z) = (y, z),$$

para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $g : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$g\left(\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]\right) = (2a, c+d, 0),$$

para qualquer $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right] \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$h(a, b, c) = (a+b)x^2 + c,$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(d) $t : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$t(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \left[\begin{smallmatrix} a-c & 0 \\ 0 & b+d \end{smallmatrix}\right],$$

para qualquer $ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x]$.

5.62 - Sejam $f : E \longrightarrow E'$ e $g : E' \longrightarrow E''$ aplicações lineares. Mostre que

$$g \circ f = 0 \quad \text{se, e só se,} \quad \operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g.$$

5.63 - Sejam $f : E \longrightarrow E$ e $g : E \longrightarrow E$ aplicações lineares. Mostre que:

(a) $\operatorname{Im}(f+g) \subseteq \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.

(b) $\operatorname{Ker}(f+g) \supseteq \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g$.

(c) Se $f \circ g = g \circ f$ então $\operatorname{Im}(f \circ g) \subseteq \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g$.

(d) Se $f \circ g = g \circ f$ então $\operatorname{Ker}(f \circ g) \supseteq \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} g$.

5.63 - Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear. Mostre que:

(a) $\operatorname{Ker} f^k \subseteq \operatorname{Ker} f^{k+1}$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

(b) $\operatorname{Im} f^k \supseteq \operatorname{Im} f^{k+1}$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

5.14 - Indique se cada uma das aplicações lineares seguintes é injectiva, determinando o seu núcleo.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f(a, b, c) = (2a, b+c, b-c)$,
para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $g : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $g(ax^2 + bx + c) = \left[\begin{smallmatrix} 2a & b+c \\ 0 & a+b-c \end{smallmatrix}\right]$,
para qualquer $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$.

5.17 - Determine a nulidade de cada uma das aplicações lineares seguintes:

(a) $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^8$ com $\dim \operatorname{Im} f = 4$.

(b) $g : \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ com $\dim \operatorname{Im} g = 1$.

(c) $h : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ com h sobrejectiva.

(d) $t : \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ com t sobrejectiva.

5.18 - Justifique que não existe nenhuma aplicação linear $f : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cujo núcleo tenha dimensão inferior ou igual a 3.

5.19 - Seja $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear com nulidade $\mathrm{n}(f)$ e característica $\mathrm{r}(f)$. Indique todos os pares possíveis $(\mathrm{n}(f), \mathrm{r}(f))$.

5.21 - Seja $f : E \longrightarrow E'$ uma aplicação linear, com E e E' ambos de dimensão finita. Justifique que:

(a) Se $\dim E < \dim E'$ então f não é sobrejectiva (ou equivalentemente, se f é sobrejectiva então $\dim E \geq \dim E'$).

(b) Se $\dim E > \dim E'$ então f não é injectiva (ou equivalentemente, se f é injectiva então $\dim E \leq \dim E'$).

(c) Se f é bijectiva então $\dim E = \dim E'$.

5.22 - Utilizando a Proposição adequada, determine se é bijectiva cada uma das seguintes aplicações lineares.

(a) A aplicação da alínea (a) do Exercício 5.14, $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c) = (2a, b + c, b - c),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $g : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ tal que

$$g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a + d)x^3 + 2ax^2 + (b - c)x + (a + c),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

5.26 - Indique se existe alguma aplicação linear nas condições referidas e, em caso afirmativo, dê um exemplo.

(a) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Im} f = \langle\!\langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 2, 0) \rangle\!\rangle$ e $\dim \operatorname{Ker} f = 2$.

(b) $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{Ker} g = \langle\!\langle (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1) \rangle\!\rangle$ e $(1, 1, 1) \in \operatorname{Im} g$.

(c) $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Im} h = \langle\!\langle (1, 2, 0, -4), (2, 0, -1, -3) \rangle\!\rangle$.

5.32 - Indique três espaços vectoriais isomorfos a $\mathbb{R}^5$ e uma base para cada um desses espaços.

5.34 - Justifique que $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}_3[x]$ são isomorfos e indique um isomorfismo de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}_3[x]$.

5.36 - Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x, y, z) = (y, z),$$

para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e a aplicação linear $g : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a, c + d, 0),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(a) Determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ sendo

$$\mathcal{B} = \Big((1, 2, 3), (0, -2, 1), (0, 0, 3)\Big) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \Big((0, -2), (-1, 0)\Big).$$

(b) Determine $\mathcal{M}(g; \mathcal{B}'', \mathrm{b.c.}_{\mathbb{R}^3})$ sendo

$$\mathcal{B}'' = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

5.39 - Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, e seja $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculando a característica da matriz anterior, determine se f é sobrejectiva.

5.42 - Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$f(a,b,c) = (a+b, b+c),$$

para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Em $\mathbb{R}^3$, considere as bases

$$\mathcal{B}_1 = \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3}, \qquad \mathcal{B}_2 = \Big((0,1,0),(1,0,1),(1,0,0)\Big)$$

e, em $\mathbb{R}^2$, considere as bases

$$\mathcal{B}_1' = \text{b. c.}_{\mathbb{R}^2}, \qquad \mathcal{B}_2' = \Big((1,1),(1,0)\Big).$$

(a) Calcule $f(1,2,3)$.
(b) Determine $\mathcal{M}\left(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1'\right)$ e calcule $f(1,2,3)$ utilizando esta matriz.
(c) Determine $\mathcal{M}\left(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1'\right)$ e calcule $f(1,2,3)$ utilizando esta matriz.
(d) Determine $\mathcal{M}\left(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2'\right)$ e calcule $f(1,2,3)$ utilizando esta matriz.
(e) Determine $\mathcal{M}\left(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2'\right)$ e calcule $f(1,2,3)$ utilizando esta matriz.

5.43 - Em $\mathbb{R}^3$, considere as bases

$$\mathcal{B}_1 = \Big((1,-1,0),(-1,1,-1),(0,1,0)\Big), \quad \mathcal{B}_2 = \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3}$$

e

$$\mathcal{B}_3 = \Big((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\Big).$$

Determine a matriz de mudança de base de

(a) $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$.
(b) $\mathcal{B}_2$ para $\mathcal{B}_1$.
(c) $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_3$.

5.98 - Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[x]$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}\left(f;\text{b. c.}_{\mathbb{R}^3},\mathcal{B}'\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{com } \mathcal{B}' = \left(1,\, x^2+1,\, x\right).$$

Determine se $2x+1$ pertence à imagem de f.

5.103 - Seja E um espaço vectorial e seja $\mathcal{B} = (u,v,w)$ uma base de E. Considere a aplicação linear $f : E \longrightarrow E$ tal que

$$f(u) = u, \quad f(v) = u+v \quad \text{e} \quad f(w) = u+v+w.$$

(a) Determine $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$.
(b) Justifique que f é invertível e determine $\mathcal{M}(f^{-1};\mathcal{B},\mathcal{B})$.

5.46 - Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}\,(f;\ \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b. c.}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere as bases

$$\mathcal{B} = \Big((0,1,0),(1,0,1),(1,0,0)\Big) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \Big((1,1),(1,0)\Big)$$

de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Utilizando matrizes de mudança de base, determine:

(a) $\mathcal{M}\,(f;\ \mathcal{B}, \text{b. c.}_{\mathbb{R}^2})$.

(b) $\mathcal{M}\,(f;\ \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}')$.

(c) $\mathcal{M}\,(f;\ \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

5.107 - Seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ uma base de um espaço vectorial E e seja $f : E \longrightarrow E$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}\,(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ com } a \in \mathbb{K}.$$

Em E, considere a base

$$\mathcal{B}' = (e_1,\ e_1 + e_2,\ e_1 + e_2 + e_3,\ e_1 + e_2 + e_3 + e_4)\,.$$

Utilizando matrizes de mudança de base, determine:

(a) $\mathcal{M}\,(f; \mathcal{B}', \mathcal{B})$.

(b) $\mathcal{M}\,(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$.

5.110 - Seja E um espaço vectorial real e seja $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ uma base de E. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow E$ tal que

$$f(a,b,c,d,e) = (-b-c+d)u_1 + (2a+b+3c-3d)u_2 + (b+c-d)u_3,$$

para quaisquer $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

(a) Determine $\mathcal{M}(f; \text{b. c.}_{\mathbb{R}^5}, \mathcal{B}')$.

(b) Determine uma base de $\operatorname{Im} f$.

(c) Em $\mathbb{R}^5$, considere os vectores

$$v_1 = (2,2,0,2,2),\ \ v_2 = (-1,-1,1,0,1) \text{ e } v_3 = (0,0,0,0,1).$$

Mostre que (v_1, v_2, v_3) é uma base de $\operatorname{Ker} f$.

(d) Determine uma base de $\mathbb{R}^5$ que inclua os vectores v_1, v_2 e v_3.

(e) Sendo $\mathcal{B}$ a base obtida em (d), determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

6 - Valores e Vectores Próprios

6.1 - Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$f(a, b, c) = (a + b, b, 2c),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Considere os vectores $u_1 = (2, 0, 0)$, $u_2 = (0, 0, 7)$ e $u_3 = (0, 0, 0)$. Verifique se cada um dos vectores u_1, u_2, u_3 é um vector próprio de f e, em caso afirmativo, indique o valor próprio associado.

6.2 - Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ são vectores próprios de A e indique os valores próprios correspondentes.

(b) Questão análoga à de (a) para $\begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

6.3 - Seja α um valor próprio de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Justifique que $\overline{\alpha}$ é valor próprio de $\overline{A}$.

6.9 - Seja $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Mostre que:

(a) Se X é um vector próprio de U associado ao valor próprio α então

$$X^*U^*UX = \overline{\alpha}\alpha X^*X.$$

(b) Se U é unitária (isto é, $U^*U = I_n$) e α é valor próprio de U então $|\alpha| = 1$.

(c) Se U é unitária e se X e Y são vectores próprios de U associados a valores próprios distintos então $X^*Y = 0$.

6.19 - Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz invertível. Mostre que:

(a) Se α é valor próprio de A então $\alpha \neq 0$ e α^{-1} é valor próprio de A^{-1}.

(b) Se $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é vector próprio de A associado ao valor próprio α então X é vector próprio de A^{-1} associado ao valor próprio α^{-1}.

6.55 - Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$A^{k+1} = A^k, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{N}.$$

Justifique que todo o valor próprio de A pertence ao conjunto $\{0, 1\}$.

6.54 - Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^2 + 2A = I_n$. Justifique que todo o valor próprio de A pertence ao conjunto $\{-1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\}$.

6.7 - Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz idempotente (isto é, $A^2 = A$).

(a) Mostre que todo o valor próprio de A pertence ao conjunto $\{0, 1\}$.

(b) Indique uma matriz que tenha todos os valores próprios no conjunto $\{0, 1\}$ e que não seja idempotente.

6.12 - Determine os valores próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -i & 0 \\ i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

e as respectivas multiplicidades algébricas.

6.13 - Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Mostre que:

(a) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ então A não tem valores próprios.

(b) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ então A tem dois valores próprios distintos.

(c) As matrizes A e B têm o mesmo polinómio característico.

6.14 - Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(a) Determine os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades algébricas.

(b) Calcule o determinante de A.

6.23 - Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ k & 0 & k \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(a) Mostre que existe um, e um só, valor de k para o qual A admite o valor próprio 2.

(b) Para o valor de k determinado em (a), indique o subespaço próprio associado ao valor próprio 2.

6.22 - Considere as matrizes, apenas com o valor próprio α,

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

Mostre que em A_i se tem $\operatorname{mg}(\alpha) = i$, $i = 1, 2, 3$.

6.31 - Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que:

(a) A matriz A é diagonalizável se, e só se, αA é diagonalizável, para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$.

(b) A matriz A é diagonalizável se, e só se, $A^\top$ é diagonalizável.

(c) Se A é invertível então A é diagonalizável se, e só se, A^{-1} é diagonalizável.

6.35 - Considere as matrizes triangulares

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Sem efectuar cálculos, justifique que A e B são ambas diagonalizáveis e indique uma matriz diagonal D_A semelhante a A e uma matriz diagonal D_B semelhante a B.

6.36 - Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Calcule os valores próprios de A e, sem determinar os subespaços próprios de A, conclua que A é diagonalizável.

6.37 - Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) Calcule os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

(b) Determine uma base para cada um dos subespaços próprios de A.

(c) Mostre que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal D tais que

$$P^{-1}AP = D.$$

6.93 - Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Indique os valores próprios de A e as respectivas multiplicidades geométricas.

(b) Indique, se existir, uma matriz diagonal semelhante a A.

(c) Determine uma matriz A nas condições do enunciado.

6.41 - Seja f um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ e seja $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Sabendo que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

determine:

(a) Os valores próprios de f.

(b) Uma base $\mathcal{B}'$, de $\mathbb{R}^3$, constituída por vectores próprios de f.

(c) $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}', \mathcal{B}')$ sendo $\mathcal{B}'$ a base indicada em (b).

<u>Observação</u>: Compare os resultados com os obtidos no Exercício 6.37.

6.28 - Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$f(a, b, c) = (-b - c, -2a + b - c, 4a + 2b + 4c),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Determine os valores próprios e os subespaços próprios de f.

6.89 - Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(a) Determine os valores próprios de cada uma das matrizes e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

(b) i. Mostre que A é diagonalizável.
   ii. Indique se B é diagonalizável.

(c) Determine uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal e os elementos da diagonal principal de $P^{-1}AP$ estejam ordenados por ordem crescente.

6.95 - Em $\mathbb{R}^3$, considere o subespaço

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x + 2y + z = 0\right\}.$$

Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $(1, -1, 0)$ é vector próprio de f associado ao valor próprio 2 e

$$f(a, b, c) = (0, 0, 0),$$

para qualquer $(a, b, c) \in F$.

(a) Justifique que $\mathcal{B} = \big((1, -1, 0), (1, 1, -3), (1, 0, -1)\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de f.

(b) Mostre que 0 é valor próprio de f e que $\mathrm{mg}(0) = \mathrm{ma}(0)$.

(c) Determine $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathrm{b.\,c.}_{\mathbb{R}^3})$.

Soluções

1 - Matrizes

1.1 - (a) B, E, F, H, I
(b) B, E, F, H, I
(c) B, E, F, I
(d) E, F, I

1.2 - (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
(b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

1.3 - (a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$
(b) $\begin{bmatrix} 8 & 2 & 10 \\ -4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
(d) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -15 \\ 11 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

1.4 - $X = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

1.5 - $AB = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

1.6 - $(AB)_{23} = 7$, $(BA)_{12} = 7$,
$(AB)_{22} = 11$, $(BA)_{22} = 8$

1.7 - (a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$
(b) Não está definido
(c) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

1.15 - Se $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ então
$D^k = \operatorname{diag}\left({d_1}^k, \ldots, {d_n}^k\right)$

1.20 - (a) Elementos da diagonal principal não nulos
(b) Se $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ então
$D^{-1} = \operatorname{diag}\left({d_1}^{-1}, \ldots, {d_n}^{-1}\right)$

1.21 - (a) Por exemplo, para $n = 2$,
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
(b) Por exemplo, para $n = 2$,
$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.22 - (a) $A^{-1} = A^2$
(b) $A^{-1} = A + 2I_n$
(c) $A^{-1} = -\frac{1}{\beta}(A + \alpha I_n)$

1.26 - (a) $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 12 & 4 \\ 8 & 11 \end{bmatrix}$
(b) $C = I_3 + 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

1.34 - (a) A, C
(b) A, E

1.40 - (a) A, E
(b) B

1.42 - (a) Sim, do tipo III
(b) Sim, do tipo II
(c) Não
(d) Não
(e) Sim, do tipo II ou do tipo III

1.43 - (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
(b) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 1 \end{bmatrix}$

1.44 - (a) $\begin{bmatrix} e & f & g & h \\ a & b & c & d \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$
(b) $\begin{bmatrix} 5e & 5f & 5g & 5h \\ a & b & c & d \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} a & b & c & d+3c \\ e & f & g & h+3g \\ i & j & k & l+3k \end{bmatrix}$
(d) $\begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c-10b \\ d & e & f-5e \end{bmatrix}$

1.45 - (a) Por exemplo,
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(b) Por exemplo,
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1.46 - (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.48 - (a) Sim
(b) Não
(c) Sim
(d) Não

1.49 - (a) Por exemplo,
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
(b) Por exemplo,
$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
(c) Por exemplo,
$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.51 - (a) Sim

(b) Sim

(c) Não

(d) Sim

(e) Sim

1.52 - (a) $\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1&2&-1&0&3\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1&1&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{bmatrix}$

1.55 - (a) Não

(b) Sim

1.56 - (a) Por exemplo, $(\frac{1}{2}l_1, l_2+(-1)l_1, l_1+2l_2, 4l_2, l_2+(-1)l_1)$

(b) Por exemplo, $(l_2+l_1, \frac{1}{4}l_2, l_1+(-2)l_2, l_2+l_1, 2l_1)$

1.57 - $\mathrm{r}(A_1)=3$, $\mathrm{r}(A_2)=3$, $\mathrm{r}(A_3)=2$, $\mathrm{r}(A_4)=3$

1.58 - $\mathrm{r}(A_\alpha) = \begin{cases} 2, & \text{se } \alpha = 2 \\ 3, & \text{se } \alpha \neq 2 \end{cases}$

$\mathrm{r}(B_\alpha) = \begin{cases} 3, & \text{se } \alpha = 2 \\ 4, & \text{se } \alpha \neq 2 \end{cases}$

$\mathrm{r}(C_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 2, & \text{se } \alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0 \\ 3, & \text{se } \alpha \neq 0 \text{ e } \beta \neq 0 \end{cases}$

$\mathrm{r}(D_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 3, & \text{se } \beta = 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \\ 4, & \text{se } \beta \neq 0 \text{ e } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

1.59 - $\mathrm{r}\left(\left[\begin{smallmatrix} 1&2\\4&8 \end{smallmatrix}\right]\right) = 1$ e $\mathrm{r}\left(\left[\begin{smallmatrix} 0&1\\1&2 \end{smallmatrix}\right]\right) = 2$

1.62 - (a) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

(b) $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

1.65 - (a) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(b) Por exemplo,
$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1&1\\0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0\\0&\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0\\-2&1 \end{bmatrix}$
$A = \begin{bmatrix} 1&0\\2&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0\\0&2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&-1\\0&1 \end{bmatrix}$

1.66 - $B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3&1&2\\-2&1&2\\-2&1&-3 \end{bmatrix}$

$C^{-1} = \begin{bmatrix} -i & -1+i \\ 1 & -i \end{bmatrix}$

$D^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0&2&-4&-1\\1&1&-5&-1\\1&1&-3&0\\1&-1&1&0 \end{bmatrix}$

1.129 - (d) $B = \begin{bmatrix} 1&3&5\\3&5&7\\5&7&9 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0&-1&-2\\1&0&-1\\2&1&0 \end{bmatrix}$

1.140 - (a) $A_2 = \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&\beta&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix} A$

(b) $A_3 = \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&\beta&1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0 \end{bmatrix}$

(c) $B = E_2E_1AC_1C_2C_3$, com
$E_1 = \begin{bmatrix} \alpha&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&\beta&1 \end{bmatrix}$,
$C_1 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0 \end{bmatrix}$, $C_2 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\gamma&0\\0&0&0&1 \end{bmatrix}$,
$C_3 = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&\delta&0&1 \end{bmatrix}$

1.144 - (a) $\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&-6&1\\0&3&0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&2\\0&0&1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&0&\frac{1}{3}\\0&1&2 \end{bmatrix}$

1.156 - $\mathrm{r}\left(A_{\alpha,\beta}\right) = \begin{cases} 3, & \text{se } \alpha\beta \neq 1 \text{ e } \alpha \neq 0 \\ 2, & \text{caso contrário} \end{cases}$

$\mathrm{r}\left(B_{\alpha,\beta}\right) = \begin{cases} 3, & \text{se } \beta \neq 1 \\ 2, & \text{se } \beta = 1 \text{ e } \alpha \neq 1 \\ 1, & \text{se } \beta = 1 \text{ e } \alpha = 1 \end{cases}$

$\mathrm{r}\left(C_{\alpha,\beta}\right) = \begin{cases} 4, & \text{se } (\alpha \neq 0 \text{ ou } \beta \neq 0) \\ & \quad \text{e } \beta \neq -\alpha \\ 3, & \text{se } (\alpha \neq 0 \text{ ou } \beta \neq 0) \\ & \quad \text{e } \beta = -\alpha \\ 0, & \text{se } \alpha = \beta = 0 \end{cases}$

$\mathrm{r}\left(D_{\alpha,\beta}\right) = \begin{cases} 4, & \text{se } \alpha \neq 1 \text{ e } \beta \neq 3\alpha - 2 \\ 3, & \text{se } (\alpha = 1 \text{ e } \beta \neq 3\alpha - 2) \\ & \quad \text{ou } (\alpha \neq 1 \text{ e } \beta = 3\alpha - 2) \\ 2, & \text{se } \alpha = 1 \text{ e } \beta = 3\alpha - 2 \end{cases}$

1.171 - $X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4&5&1\\0&1&1\\-10&-8&2 \end{bmatrix}$

2 - Sistemas

Abreviaturas utilizadas:

S.P.D.– **S**istema **P**ossível **D**eterminado
S.I.– **S**istema **I**mpossível
S.P.I.– **S**istema **P**ossível **I**ndeterminado

g.i. – **g**rau de **i**ndeterminação

2.3 - Basta tomar a matriz $B = A\begin{bmatrix} 1\\2\\3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\\19\\5\\17 \end{bmatrix}$

resultando o sistema, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x - z = -2 \\ 2x + 4y + 3z = 19 \\ -x + 2z = 5 \\ 3x + 4y + 2z = 17 \end{cases}$$

2.7 - (S_1) S.P.D.

Conjunto das soluções de (S_1):
$\{(1, -1, 0)\}$

(S_2) S.P.I. com g.i. 1

Conjunto das soluções de (S_2):
$\left\{\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}\alpha, \frac{5}{7} - \frac{2}{7}\alpha, \alpha\right) : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

(S_3) S.I.

2.8 - (a) S.P.D.

(b) S.I.

(c) S.P.I. com g.i. 2

(d) S.P.I. com g.i. 4

(e) S.I.

(f) S.P.D.

(g) S.P.I. com g.i. 4

2.9 - (a) Por exemplo, $\begin{cases} x - 2z = 1 \\ y - z = -4 \end{cases}$

(b) Por exemplo, $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \end{cases}$

Sim, basta tomar o sistema
$0x + 0y + 0z = 0$

2.11 - (a) $\mathcal{C} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

(b) $\mathcal{C} = \emptyset$

(c) $\mathcal{C} = \{3\}$

2.15 - Conjunto das soluções:
$\left\{\left(-\frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{8}\beta + \frac{1}{2}\gamma, \frac{1}{2}\beta + \gamma, -\frac{1}{4}\alpha - \frac{1}{8}\beta + \frac{1}{2}\gamma\right)\right\}$
para cada $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

2.10 - (a) $\{(2, 3, 4)\}$

(b) $\emptyset$

(c) $\{(-1 - 5\alpha_2 - 2\alpha_5, \alpha_2, 2 - \alpha_5,$
$4 + 3\alpha_5, \alpha_5) : \alpha_2, \alpha_5 \in \mathbb{R}\}$

2.24 - (S_1) S.P.D.

Conjunto das soluções de (S_1):
$\left\{\left(\frac{3}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{4}{5}\right)\right\}$

(S_2) S.P.I. com g.i. 1

Conjunto das soluções de (S_2):
$\{(-1 + 2\alpha, -\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

(S_3) S.I.

(S_4) S.P.I. com g.i. 1

Conjunto das soluções de (S_4):
$\left\{\left(-\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\alpha, \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\alpha, \alpha\right) : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$

(S_5) S.P.I. com g.i. 1

Conjunto das soluções de (S_5):
$\{(1, 0, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

(S_6) S.I.

(S_7) S.P.I. com g.i. 1

Conjunto das soluções de (S_7):
$\{(1 - \alpha, -1 + 2\alpha, \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

2.35 - (a) Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$, S.P.D.
Se $\alpha = 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$, S.P.I. com g.i. 1
Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 1$, S.I.
Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, S.P.I. com g.i. 1

(b) Conjunto das soluções:
$\{(1 + \gamma, 0, \gamma) : \gamma \in \mathbb{R}\}$

2.37 - (a) Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 1$, S.P.D.
Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, S.P.I. com g.i. 2
Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 1$, S.P.I. com g.i. 1
Se $\alpha \neq 0$ e $\beta = 1$, S.I.

(b) (iii) $(5, 1, -3)$

3 - Determinantes

3.1 - (a) 1

(b) -3

(c) 0

3.2 - 2

3.3 - (a) 0

(b) -7

(c) -1

3.4 - (a) -1

(b) -4

(c) 3

3.5 - $-uvxyz$

3.6 - $\{0, 1, 3\}$

3.10 - (a) γ

(b) -12γ

(c) γ

(d) -3γ

(e) $-\gamma$

3.15 - $k \in \{-2, 1\}$

3.19 - $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$

3.20 - $|AB^\top C| = -40$
$|3B| = 3^n(-5)$
$|B^2C| = (-5)^2 \cdot 4$

3.25 - (a) $|A| = -32$
$|B| = 0$

(b) $|A^{-1}| = -\frac{1}{32}$

(c) (i) Sim
(ii) Não

3.28 - (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

(b) $V_\alpha^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{smallmatrix}\right] = V_{-\alpha}$

(c) $A^{-1} = \frac{1}{|z|^2+|w|^2} \left[\begin{smallmatrix} \overline{z} & -w \\ \overline{w} & z \end{smallmatrix}\right]$

3.29 - (a) $\operatorname{adj} M = \left[\begin{smallmatrix} m^2-1 & 1-m & 1-m \\ 1-m & m^2-1 & 1-m \\ 1-m & 1-m & m^2-1 \end{smallmatrix}\right]$

(b) $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$

(c) $M^{-1} =$
$\frac{1}{(m+2)(m-1)} \left[\begin{smallmatrix} m+1 & -1 & -1 \\ -1 & m+1 & -1 \\ -1 & -1 & m+1 \end{smallmatrix}\right]$

3.32 - (a) $|A| = -3$

(b) $(1, 2, 3)$

3.33 - (a) $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -3\}$

(b) $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

3.56 - (a) 0

(b) $x^n + (-1)^{n+1}y^n$

3.72 - $\det A \in \{0, 1\}$, se n é par
$\det A \in \{0, -1\}$, se n é ímpar

3.74 - (a) $(\alpha r)^{-1}$

(b) αr^{-1}

(c) αr^{-1}

(d) $(\alpha r)^{-1}$

3.95 - Solução de (S): $(0, 0, 1)$

4 - Espaços Vectoriais

4.6 - (a) $(0, 0, 0, 0)$

(b) $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$

(c) $0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

4.7 - (a) $(-1, 2, -3, 0)$

(b) $(0, 0, 0, 0)$

(c) $\left[\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{smallmatrix}\right]$

(d) $-x^3 + 2x^2 - 3x$

4.13 - (a) Não

(b) Não

(c) Sim

(d) Sim

4.22 - (a) Por exemplo, $G = \left\langle \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right] \right\rangle$

4.23 - (a) Por exemplo, $\big((1, 0, 1), (0, 1, 0)\big)$

(b) Por exemplo,
$\left(\left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\right)$

(c) Por exemplo,
$\big(x^2, 2x^3 + x, -x^3 + 1\big)$

4.33 - Por exemplo, $\big((2, 3, 3)\big)$ e $\big((-4, -6, -6)\big)$

4.35 - Por exemplo, $\left(\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\right)$

4.41 - (b) Por exemplo, $\big((1, 2, 1), (0, 1, 1)\big)$

4.44 - (a) $(1, 1, 1, 1)$, na base $\mathcal{B}$
$(4, 3, 2, 1)$, na base $\mathcal{B}'$

(b) $(a - b, b - c, c - d, d)$, na base $\mathcal{B}$
(a, b, c, d), na base $\mathcal{B}'$

4.45 - (a) $(1, 1, 1, 1)$, na base $\mathcal{B}$
$(4, 3, 2, 1)$, na base $\mathcal{B}'$

(b) $(a - b, b - c, c - d, d)$, na base $\mathcal{B}$
(a, b, c, d), na base $\mathcal{B}'$

4.48 - Para $F \cap G$ por exemplo, $\big((2, 1, 2, -1)\big)$
Para $F+G$ por exemplo, $\big((1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, -1,$

4.52 - (a) Por exemplo,
$\big((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\big)$

(b) Por exemplo,
$\big((1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\big)$

(c) Por exemplo,
$\big((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0)\big)$

(d) $\big((1,1,0,0),(0,0,1,0),(1,0,0,3),(2,0,0,1)\big)$

4.56 - (b) Projecção de A sobre F, segundo G: $\left[\begin{smallmatrix}4&5\\0&0\end{smallmatrix}\right]$
Projecção de A sobre G, segundo F: $\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&6\end{smallmatrix}\right]$

4.62 - (a) $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

4.64 - (a) S_1 é linearmente independente
S_2 é linearmente dependente

4.65 - $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$

4.69 - (a) Por exemplo, $\big((1,0,1,0),(0,1,1,1)\big)$

(c) Por exemplo, $\big((1,0,1,0),(0,1,1,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\big)$

4.71 - (a) S_1 é linearmente independente
S_2 é linearmente dependente

4.73 - (a) S_1 é linearmente independente
S_2 é linearmente dependente

4.74 - (a) $\dim F = 3$
Por exemplo, $\big(x^3+x^2-x,\ x^2-1,\ x+2\big)$

(b) $\dim G = 3$
Por exemplo, $\left(\left[\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}2&-3\\1&1\end{smallmatrix}\right]\right)$

4.98 - (a) Não

(b) Não

(c) Não

4.100 - (a) Não

(d) $\{-2\}$

4.105 - (a) Por exemplo, $\big((1,-2,0,0),(1,0,1,0),(0,0,0,1)\big)$

(b) Por exemplo, $\left(\left[\begin{smallmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0&0&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right]\right)$

(c) Por exemplo, $\big(-x^3+2x+1,\ x^2\big)$

4.126 - Por exemplo, $\big((1,1,-5)\big)$

4.144 - (a) $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{3},0\}$

(b) Por exemplo, $(A,B,C,\left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right])$

4.149 - (b) (i) Sequência de coordenadas de x^2+2x+1: $(1,2,1)$
Sequência de coordenadas de x^2-1: $(-1,0,1)$
Sequência de coordenadas de x^2-2x+1: $(1,-2,1)$

(ii) Sequência de coordenadas de 1: $(\frac{1}{4},-\frac{1}{2},\frac{1}{4})$
Sequência de coordenadas de x: $(\frac{1}{4},0,-\frac{1}{4})$
Sequência de coordenadas de x^2: $(\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4})$

4.151 - (a) Por exemplo, $(0,1,0)$

(b) Por exemplo, x

4.152 - (a) Por exemplo, $\big(x^2+1,\ x+1\big)$

(b) Por exemplo, $\big(x^2+1,\ x+1,\ 1\big)$

4.155 - (a) Por exemplo, $\big(1+x,\ x^2,\ x^3\big)$

(b) Por exemplo, $\big(1,\ 1+x,\ x^2,\ x^3,\ x^4\big)$

(c) Por exemplo, $G=\big\langle x^3,\ x^4\big\rangle$

4.156 - (a) $t=1$

(b) Por exemplo, $\big((1,2,1,2),(1,1,1,1),(1,2,3,4),(1,1,0,1)\big)$
$\dim(F\cap G_t)=1$

5 - Aplicações Lineares

5.2 - (a) Sim

(b) Não

(c) Não

(d) Não

5.5 - Para $n=1$ é linear

5.7 - (a) Não

(b) Não

5.10 - (a) $\operatorname{Ker} f=\{(a,0,0):\ a\in\mathbb{R}\}$
Por exemplo,
Base de $\operatorname{Ker} f$: $\big((1,0,0)\big)$
Base de $\operatorname{Im} f$: $\big((1,0),(0,1)\big)$

(b) $\operatorname{Ker} g=\left\{\left[\begin{smallmatrix}0&b\\-d&d\end{smallmatrix}\right]:\ b,d\in\mathbb{R}\right\}$
Por exemplo,

Base de $\operatorname{Ker} g$: $\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)$
Base de $\operatorname{Im} g$: $\big((2,0,0),(0,1,0)\big)$

(c) $\operatorname{Ker} h = \{(-b,b,0):\ b \in \mathbb{R}\}$
Por exemplo,
Base de $\operatorname{Ker} h$: $\big((-1,1,0)\big)$
Base de $\operatorname{Im} h$: $\left(x^2,\ 1\right)$

(d) $\operatorname{Ker} t =$
$\left\{ax^3 + bx^2 + ax - b:\ a,b \in \mathbb{R}\right\}$
Por exemplo,
Base de $\operatorname{Ker} t$: $\left(x^3 + x,\ x^2 - 1\right)$
Base de $\operatorname{Im} t$: $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

5.14 - (a) $\operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$
Injectiva

(b) $\operatorname{Ker} g = \left\{0x^2 + 0x + 0\right\}$
Injectiva

5.17 - (a) $\mathrm{n}(f) = 1$

(b) $\mathrm{n}(g) = 3$

(c) $\mathrm{n}(h) = 3$

(d) $\mathrm{n}(t) = 0$

5.19 - $(2,3),(3,2),(4,1),(5,0)$

5.22 - (a) Sim

(b) Sim

5.26 - (a) Não

(b) Sim, por exemplo,
$f(0,1,1,0) = (0,0,0)$,
$f(1,1,1,1) = (0,0,0)$,
$f(0,0,1,0) = (1,1,1)$,
$f(0,0,0,1) = (1,1,0)$

(c) Sim, por exemplo,
$f(1,0,0) = (1,2,0,-4)$,
$f(0,1,0) = (2,0,-1,-3)$,
$f(0,0,1) = (0,0,0,0)$

5.36 - (a) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5.39 - $\mathrm{r}(\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')) = 2 = \dim \operatorname{Im} f \neq \dim \mathbb{R}^3$
f não é sobrejectiva.

5.32 - Por exemplo,
$\mathcal{M}_{1\times 5}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{5\times 1}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_4[x]$

Base de $\mathcal{M}_{1\times 5}(\mathbb{R})$:
$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\right.$
$\left.\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

Base de $\mathcal{M}_{5\times 1}(\mathbb{R})$:
$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

Base de $\mathbb{R}_4[x]$:
$\left(x^4, x^3, x^2, x, 1\right)$

5.34 - Por exemplo, $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$, tal que
$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,
para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

5.42 - (a) $(3,5)$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.43 - (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

5.46 - (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.98 - Sim, $2x + 1 = f(1,0,1)$

5.103 - (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.107 - (a) $\begin{bmatrix} 1 & a+1 & a+1 & a+1 \\ 0 & 1 & a+1 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5.110 - (a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) Por exemplo, $(u_1 - u_3, u_2)$

(d) Por exemplo,
$\big((2,2,0,2,2),(-1,-1,1,0,1)$,
$(0,0,0,0,1),(0,1,0,0,0)$,
$(0,0,0,1,0)\big)$

(e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

6 - Valores e Vectores Próprios

6.1 - u_1 vector próprio associado ao valor próprio 1
u_2 vector próprio associado ao valor próprio 2
u_3 não é vector próprio

6.2 - (a) $\left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right]$ vector próprio associado ao valor próprio 1
$\left[\begin{smallmatrix}0\\2\end{smallmatrix}\right]$ vector próprio associado ao valor próprio 2

(b) $\left[\begin{smallmatrix}\alpha\\-\alpha\end{smallmatrix}\right]$ vector próprio associado ao valor próprio 1
$\left[\begin{smallmatrix}0\\\alpha\end{smallmatrix}\right]$ vector próprio associado ao valor próprio 2

6.7 - (b) Por exemplo, $\left[\begin{smallmatrix}0&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{smallmatrix}\right]$

6.12 - Valores próprios de A: 3 e 1
$\mathrm{ma}(3)=2$ e $\mathrm{ma}(1)=1$

6.14 - (a) Valores próprios de A: 3
$\mathrm{ma}(3)=1$

6.23 - (a) $k=\frac{2}{3}$

(b) $M_2=\left\{\left[\begin{smallmatrix}2c\\c\\c\end{smallmatrix}\right]:\ c\in\mathbb{R}\right\}$

6.28 - Valores próprios de f: 1 e 2
$E_1=\langle\!\langle(-1,-1,2)\rangle\!\rangle$
$E_2=\langle\!\langle(-1,2,0),(-1,0,2)\rangle\!\rangle$

6.35 - $D_A=\left[\begin{smallmatrix}-2&0\\0&2\end{smallmatrix}\right]$, $D_B=\left[\begin{smallmatrix}5&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]$

6.37 - (a) Valores próprios de A: -1 e 1
$\mathrm{ma}(-1)=2$ e $\mathrm{ma}(1)=1$

(b) Por exemplo,
Base de M_{-1}: $\left(\left[\begin{smallmatrix}1\\-2\\0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right]\right)$
Base de M_1: $\left(\left[\begin{smallmatrix}1\\-1\\1\end{smallmatrix}\right]\right)$

(c) Por exemplo, $P=\left[\begin{smallmatrix}1&0&1\\-2&0&-1\\0&1&1\end{smallmatrix}\right]$
e $D=\left[\begin{smallmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right]$

6.41- (a) Valores próprios de f: -1 e 1

(b) Por exemplo,
$\mathcal{B}=(e_1-2e_2,\ e_3,\ e_1-e_2+e_3)$

(c) $\mathcal{M}(f;\ \mathcal{B},\mathcal{B})=\left[\begin{smallmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right]$

6.89 - (a) Valores próprios de A: 1, 2 e 3
$\mathrm{ma}(1)=\mathrm{ma}(2)=\mathrm{ma}(3)=1$
Valores próprios de B: 1
$\mathrm{ma}(1)=3$

(b) (ii) Não

(c) $\left[\begin{smallmatrix}-1&-2&-1\\1&1&1\\0&2&2\end{smallmatrix}\right]$

6.93 - (a) Valores próprios de A: 0 e 2
$\mathrm{mg}(0)=1$ e $\mathrm{mg}(2)=2$

(b) $\left[\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{smallmatrix}\right]$

(c) $\left[\begin{smallmatrix}2&0&0\\4&0&0\\8&-4&2\end{smallmatrix}\right]$

6.95 - (c) $\left[\begin{smallmatrix}2&0&0\\-2&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]$