Resolução do 1º teste de Análise Matemática II-C

Grupo I

1. A elipse centrada em $(-1,2)$, com um dos vértices em $(-4,2)$ e um dos focos em $(-1+\sqrt{5},2)$ tem por equação

☐ $4x^2+9y^2+8x-36y+39=0$
☒ $4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$
☐ $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$
☐ $\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y+2)^2}{2}=1$
☐ $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$
☐ $\frac{(x+1)^2}{3}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$

Resposta: Tendo em conta que $(-1,2)$ é o centro da elipse a sua equação canónica é $\frac{(x+1)^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{b^2}=1$. Sabe-se que $a^2=c^2+b^2$ onde c é a distância do centro aos focos. Neste caso $c=\sqrt{5}$ donde $c^2=5$. Tendo em conta que $(-4,2)$ é um foco vem que $a=3$. Deduz-se então que $9=a^2=c^2+b^2=5+b^2$ e portanto $b=2$.
A equação canónica da elipse é então $\frac{(x+1)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$ que também se pode escrever $4(x+1)^2+9(y-2)^2=36 \Leftrightarrow 4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$.

2. Uma das seguintes funções não é uma norma. Indique qual

☐ $g_1(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}+|z|$
☐ $g_2(x,y,z)=|x|+2|y|+3|z|$
☐ $g_3(x,y,z)=|x+z|+|y-z|+|x|$
☒ $g_4(x,y,z)=|x-y-z|$
☐ $g_5(x,y,z)=\max\{|y|,|z|\}+|x|$
☐ $g_6(x,y,z)=2|x-z|+4|y|+7|z|$

Resposta: Basta notar que, por exemplo, tomando $(x,y,z)=(2,1,1)$ se tem $g_4(2,1,1)=0$. Portanto $g_4(x,y,z)$ não pode ser norma pois uma norma definida em $\mathbb{R}^3$ apenas se anula em $(0,0,0)$.

3. A equação $x^3+y^3+(x+1)e^z-8xyz-2=0$ define z como função de x e de y numa vizinhança do ponto $(x_0,y_0,z_0)=(1,-1,0)$. Então:

☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1)=0, \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1)=0$
☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1)=-\frac{2}{5}, \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1)=-\frac{3}{5}$
☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1)=-1, \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1)=0$
☒ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1)=-\frac{2}{5}, \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1)=-\frac{3}{10}$
☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1)=0, \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1)=-1$
☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1)=-\frac{1}{5}, \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1)=-\frac{3}{10}$

Resposta: Seja $f(x,y)=x^3+y^3+(x+1)e^z-8xyz-2$. Tem-se que:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,-1,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,0)}=-\frac{(3x^2+e^z-8yz)_{(1,-1,0)}}{((x+1)e^z-8xy)_{(1,-1,0)}}=-\frac{2}{5}$$

e

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,-1) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1,0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,0)} = -\frac{(3y^2-8xz)_{(1,-1,0)}}{((x+1)e^z-8xy)_{(1,-1,0)}} = -\frac{3}{10}.$$

Alternativamente poderiamos ter derivado a equação em ordem a x e em seguida em ordem a y, tendo em conta que z é função de x e y. $\square$

4. Considere a função $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (2x+3y, x^3-y^3)$, invertível numa vizinhança do ponto $(1,1)$. Então:

- ☐ $J_{f^{-1}}(5,0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{15} \end{bmatrix}$
- ☐ $J_{f^{-1}}(5,0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$
- ☐ $J_{f^{-1}}(5,0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$
- ☐ $J_{f^{-1}}(5,0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$
- ☐ $J_{f^{-1}}(5,0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{15} \end{bmatrix}$
- ☒ $J_{f^{-1}}(5,0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{15} \end{bmatrix}$

Resposta: Comecemos por notar que $f(1,1) = (5,0)$. Tem-se que:

$$J_{f^{-1}}(5,0) = J_{f^{-1}}f(1,1) = \Big(J_f(1,1)\Big)^{-1}$$

e portanto (designando $u = 2x+3y, v = x^3-y^3$)

$$J_{f^{-1}}(5,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1}_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3x^2 & -3y^2 \end{bmatrix}^{-1}_{(1,1)} \qquad \square$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{15} \end{bmatrix}.$$

Grupo II

1. Considere a função real f de duas variáveis reais, definida por

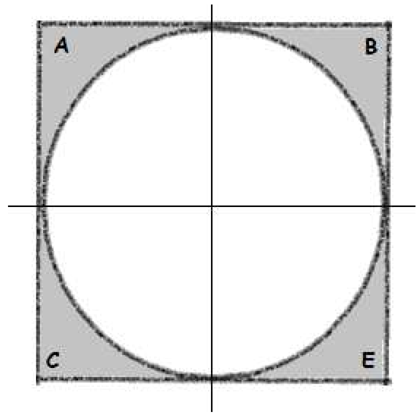
$$f(x,y) = \frac{\log(1-y^2)+\log(1-x^2)}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$$

(a) Indique o seu domínio D e esboce-o. Indique o interior de D. Diga, justificando, se D é um conjunto aberto. O conjunto D é conexo? Justifique.

Resposta: (a) Tem-se

$$\begin{aligned}\text{Dom } f &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-1>0 \wedge 1-y^2>0 \wedge 1-x^2>0\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1 \wedge (-1<y<1) \wedge (-1<x<1)\}\end{aligned}$$

e o gráfico é o seguinte:



Tem-se que $Int(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1 \wedge (-1<y<1) \wedge (-1<x<1)\}$; tendo em conta que $D = Int(D)$ o conjunto D é aberto.

O conjunto não é conexo. Sejam $F = A \cup B$ e $T = C \cup E$. Tem-se que $D = F \cup T$ e $\overline{F} \cap T = F \cap \overline{T} = \emptyset$. $\square$

2. Considere a função real g, de duas variáveis reais, definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3+2xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Mostre que dado um número real positivo δ existe um número real positivo ϵ, tal que se $(x,y) \neq (0,0)$ e $\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$, então $|g(x,y)| < \delta$.

b) Determine, por definição, as derivadas $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$. Calcule a derivada direccional de g no ponto $(0,0)$ segundo o vector $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Diga, justificando, se g é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Resposta: (a) Para mostrar que

$$\forall\, \delta > 0\, \exists\, \epsilon < 0 : (x,y) \neq (0,0) \wedge \sqrt{x^2+y^2} < \epsilon \Rightarrow\ |\, g(x,y) - 0\,| < \delta$$

basta verificar que

$$\left|\frac{3x^3+2xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|3x^3|+|2xy^2|}{x^2+y^2} = \frac{3x^2|x|+2y^2|x|}{x^2+y^2}$$
$$= |x|\frac{3x^2+2y^2}{x^2+y^2} \leq |x|\frac{3x^2+3y^2}{x^2+y^2} \leq 3|x| \leq 3\sqrt{x^2+y^2} < 3\epsilon.$$

Basta agora considerar $\epsilon = \frac{\delta}{3}$. Conclui-se então, por definição, que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^3+2xy^2}{x^2+y^2} = 0$.

(b) Tem-se

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(h,0)-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3h^3+2h\cdot 0^2}{h^2+0^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h^3}{h^3} = 3$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(0,h)-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3\cdot 0^3+2\cdot 0\cdot h^2}{0^2+h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3} = 0$$

Tem-se

$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}g(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{g\left(\frac{h}{\sqrt{2}},\frac{h}{\sqrt{2}}\right)-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{3\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^3+2\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\frac{3h^3}{2\sqrt{2}}+\frac{2h^3}{2\sqrt{2}}}{\frac{h^2}{2}+\frac{h^2}{2}}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\frac{5h^3}{2\sqrt{2}}}{h^2}}{h} = \frac{5}{2\sqrt{2}}.$$

Se g fosse diferenciável no ponto $(0,0)$ ter-se-ia que

$$D_{\vec{u}}g(0,0) = \vec{u}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right).$$

Mas, por um lado, $D_{\vec{u}}g(0,0) = \dfrac{5}{2\sqrt{2}}$; por outro vem que

$$\vec{u}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot(3,0) = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Como

$$D_{\vec{u}}g(0,0) \neq \vec{u}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$$

conclui-se que g não é diferenciável em $(0,0)$. $\square$

Grupo III

1. Seja $z = f(u)$, com f uma função continuamente derivável ate à segunda ordem e $u = x^2 - 2xy$. Determine as constantes α e $\beta \in \mathbb{R}$ de forma a que:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \alpha u f'(u) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f'(u) + (2x - 2y)^{\beta} f''(u).$$

Resposta: Tem-se que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)(2x - 2y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)(-2x).$$

Então

$$\begin{aligned} x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} &= xf'(u)(2x - 2y) + yf'(u)(-2x) \\ &= f'(u)(2x^2 - 2yx - 2xy) = f'(u)(2x^2 - 4yx) \\ &= 2f'(u)(x^2 - 2yx) = 2uf'(u). \end{aligned}$$

Portanto $\alpha = 2$. Tem-se ainda que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(f'(u)(2x - 2y)) \\ &= 2f'(u) + f''(u)\frac{\partial u}{\partial x}(2x - 2y) = 2f'(u) + f''(u)(2x - 2y)(2x - 2y) \\ &= 2f'(u) + (2x - 2y)^2 f''(u). \end{aligned}$$

Portanto $\beta = 2$. $\square$

2. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} x^3 + 2y^2 - xu + yv^2 = 0 \\ e^{xy} - uv = 0 \end{cases}$$

define implicitamente u e v como funções de x e de y, numa vizinhança do ponto $P_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 0, 1, 1)$ e determine $\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0)$ e $\frac{\partial v}{\partial x}(1, 0)$.

Resposta: Consideremos as funções $f_1(a, b, u, v) = x^3 + 2y^2 - xu + yv^2$ e $f_2(a, b, u, v) = e^{xy} - uv$, que são funções definidas em $\mathbb{R}^4$.

$i)$ No ponto $P_0 = (1, 0, 1, 1)$ tem-se que $f_1(1, 0, 1, 1) = 1^3 + 2 \cdot 0^3 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1^2 = 0$ e $f_2(1, 0, 1, 1) = e^{1 \cdot 0} - 1 \cdot 1 = 0$.

$ii)$ As funções f_1, f_2 são continuamente deriváveis em $\mathbb{R}^4$ pois f_1 é função polinomial nas variáveis x, y, u, v e f_2 é soma da composição de uma função polinomial com uma exponencial, com uma função polinomial.

$iii)$ O Jacobiano $\left|\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{array}\right|_{(1,0,1,1)} = \left|\begin{array}{cc} -x & 2yv \\ -v & -u \end{array}\right|_{(1,0,1,1)} = \left|\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{array}\right| = 1 \neq 0.$

Nestas condições existe uma vizinhança do ponto P_0 na qual o sistema dado define implicitamente duas funções

$$u = \phi_1(x, y) \text{ e } v = \phi_2(x, y)$$

que, substituídas nas equações do sistema dado, as convertem em identidades e que, para $x = x_0 = 1$ e $y = y_0 = 0$ tomam os valores $u = u_0 = 1, v = v_0 = 1$.

Para calcular as derivadas pretendidas consideremos as equações anteriores, onde assumimos que u e v são função de x, y. Derivando ambas as equações em ordem a x tem-se que

$$\begin{cases} 3x^2 - u - x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ ye^{xy} - \frac{\partial u}{\partial x}v - u\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

que, substituindo no ponto $P_0 = \ (x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 0, 1, 1)$, conduz ao sistema

$$\begin{cases} 3 - 1 - \frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) = 0 \\ -\frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) - \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) = 0, \end{cases}$$

cuja solução é

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0, 1) = 2 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) = \ -2. \end{cases} \qquad \square$$

Grupo IV

Seja $f(x, y, z)$ uma função real definida num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^3$ e diferenciável no ponto a pertencente a D. Seja $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ um vector não-nulo. Mostre que:

$$f'_{\vec{u}}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(a)u_3.$$

Resposta: Tendo em conta que $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a e que $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ é um vector não-nulo, tem-se, com $t \in \mathbb{R}$, que

$$\begin{aligned} f(a + t\vec{u}) - f(a) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a)tu_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)tu_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(a)tu_3 + \|t\vec{u}\|\epsilon(t\vec{u}) \\ &= t(\frac{\partial f}{\partial x}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(a)u_3) + |t|\|\vec{u}\|\epsilon(t\vec{u}), \end{aligned}$$

com $\lim\limits_{t \to 0} \epsilon(t\vec{u}) = 0$. Vem então que

$$\begin{aligned}
f'_{\vec{u}}(a) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\vec{u})-f(a)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t(\frac{\partial f}{\partial x}(a)u_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a)u_2+\frac{\partial f}{\partial z}(a)u_3)+|t|\|\vec{u}\|\epsilon(t\vec{u})}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{|t|}{t}\|\vec{u}\|\epsilon(t\vec{u})+\frac{\partial f}{\partial x}(a)u_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a)u_2+\frac{\partial f}{\partial z}(a)u_3\right).
\end{aligned}$$

Tendo em conta que $\lim\limits_{t\to 0}\frac{|t|}{t}\|\vec{u}\|\epsilon(t\vec{u}) = \|\vec{u}\|\lim\limits_{t\to 0}\frac{|t|}{t}\epsilon(t\vec{u}) = \pm\|\vec{u}\|\lim\limits_{t\to 0}\epsilon(t\vec{u}) = 0$ obtém-se o resultado pretendido $\square$