Cálculo Numérico A

Capítulo 5 – Resolução de Sistemas de Equações Lineares

Introdução

Métodos diretos: método de Gauss com escolha parcial de pivot

Normas vetoriais e normas matriciais

Condicionamento de um sistema

Métodos iterativos: caso geral

Métodos de Jacobi, de Gauss-Seidel

Introdução

Seja $AX = B$ um sistema de equações, possível e determinado, com a forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{B}$$

onde

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é a matriz dos coeficientes;

$B \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ é o vetor dos termos independentes;

$X \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ é o vetor das incógnitas.

- Os **métodos diretos**, como a regra de Cramer e o método de Gauss, já anteriormente estudados em Álgebra Linear e Geometria Analítica, permitem resolver este tipo de sistemas de equações e obter a solução exata, desde que essas operações sejam feitas sem erros.

- Contudo, pelo facto de muitas vezes depararmos com sistemas de equações onde o número de equações é elevado, estes métodos podem tornar-se instáveis computacionalmente e conduzir a soluções que nada têm a ver com a realidade.

- Em alternativa, neste capítulo serão estudados métodos para determinar a solução aproximada de sistemas de equações do tipo $AX = B$ designados **métodos iterativos**.

Mas antes vamos relembrar o **método de Gauss**, que consiste em, partindo dum sistema

$$AX = B$$

efetuar operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada

$$[A|B]$$

de modo a obter

$$[A'|B']$$

onde *A'* é uma matriz triangular superior.

A solução do sistema equivalente

$$A'X = B'$$

é obtida por substituição ascendente regressiva, calculando-se $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$.

Partindo então do sistema

$$\left[A^{(1)}\middle|B^{(1)}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Para que os elementos abaixo da diagonal principal da primeira coluna sejam zero, realizam-se operações elementares que vão originando sistemas equivalentes.

Em primeiro lugar se $a_{11} = 0$, trocam-se as linhas por forma a que $a_{11} \neq 0$. A $a_{11} \neq 0$ chama-se pivot.

Depois…

obtém-se o multiplicador $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ e faz-se $-\frac{a_{21}}{a_{11}}L_1 + L_2 \to L_2$

…

obtém-se o multiplicador $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ e faz-se $-\frac{a_{n1}}{a_{11}}L_1 + L_n \to L_n$

por forma a obter a matriz equivalente

$$\left[A^{(2)}\middle|B^{(2)}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

De seguida define-se o novo pivot $a_{22}^{(2)}$ se este for diferente de zero, senão troca-se novamente as linhas e…

obtém-se o multiplicador $-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$ e faz-se $-\frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}L_2 + L_3 \to L_3$

…

obtém-se o multiplicador $-\frac{a_{n2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$ e faz-se $-\frac{a_{n1}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}L_2 + L_n \to L_n$

Ao fim de repetidos n − 1 passos (supondo que os pivots são sempre não nulos) obtém-se o sistema de matriz triangular superior

$$\left[A^{(n)}\middle|B^{(n)}\right] = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \cdots & a_{1n}^{(n)} & | & b_1^{(n)} \\ 0 & a_{22}^{(n)} & \cdots & a_{2n}^{(n)} & | & b_2^{(n)} \\ & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n)} & | & b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

A solução do sistema anterior é dada por substituição ascendente regressiva, fazendo:

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \\ \cdots \\ x_1 = \dfrac{b_1^{(n)} - \sum a_{1k}^{(n)} x_k}{a_{11}^{(n)}} \end{cases}$$

Note-se que se não for possível encontrar um pivot não nulo, isso significa que o sistema não tem solução única.

As operações realizadas não são livres de erros que podem originar grandes variações na solução do sistema.

Veja-se o seguinte exemplo:

Exemplo 1

Considere-se o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 57 \\ 11 & 23 & -1 \\ 23 & -27 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 \\ 33 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cuja solução é $x = y = z = 1$.

Resolvendo o sistema pelo método de Gauss, mas introduzindo deliberadamente alguns erros de aproximação nos cálculos intermédios, vem:

$$\left[A^{(1)}\middle|B^{(1)}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}3 & 7 & 57 & 67\\ 11 & 23 & -1 & 33\\ 23 & -27 & 5 & 1\end{array}\right]$$

1. Para a 1ª coluna o pivot é $a_{11}=3\neq 0$, logo têm-se os multiplicadores $-\frac{a_{21}}{a_{11}}=-\frac{11}{3}\approx -3.7$ e $-\frac{a_{31}}{a_{11}}=-\frac{23}{3}\approx -7.7$ considerando um arredondamento com apenas uma casa decimal.

Fazendo agora $-3.7L_1+L_2\rightarrow L_2$ e $-7.7L_1+L_3\rightarrow L_3$ obtém-se

$$\left[A^{(2)}\middle|B^{(2)}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}3 & 7 & 57 & 67\\ 0 & -3 & -210 & -220\\ 0 & -81 & -440 & -520\end{array}\right]$$

Nota: Os valores a vermelho são valores aproximados resultantes dos erros de arredondamento introduzidos.

2. Para a 2ª coluna o pivot é $a_{22} \approx -3 \neq 0$, logo vem o multiplicador $-\frac{a_{32}}{a_{22}} = -\frac{-81}{-3} \approx -27$. Fazendo $-27L_2 + L_3 \to L_3$ obtém-se a matriz triangular superior

$$\left[A^{(3)} \middle| B^{(3)}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & 57 & 67 \\ 0 & -3 & -210 & -220 \\ 0 & 0 & 5300 & 5400 \end{array}\right]$$

Donde por substituição regressiva a solução do sistema vem

$$z \approx 1;\ y \approx 3.3;\ x \approx -4.3$$

Solução muito diferente da solução real devido a acumulação de erros de arredondamento, sendo de esperar uma diminuição da instabilidade quando se aumentar a exatidão nos cálculos intermédios com o aumentando do número de casas decimais.

A propagação dos erros de arredondamento é mais elevada quando os pivots são muito pequenos, ou seja, quando os multiplicadores são muito elevados. Prova-se que a escolha adequada dos elementos pivot permite diminuir a acumulação de erros de arredondamento dos cálculos intermédios.

Método de Gauss com escolha parcial de pivot

A escolha parcial de pivot consiste em, no início do passo *k*, do método de Gauss, selecionar como pivot um elemento tal que:

$$\left|a_{pk}^{(k)}\right| \leq \max_{k \leq i \leq n} \left|a_{ik}^{(k)}\right|$$

Ou seja, em cada coluna deve ser escolhido para pivot, o elemento de maior valor absoluto dessa coluna de forma que os multiplicadores venham o mais pequenos possível em módulo.

Exemplo 2

Voltando ao sistema do exemplo 1

$$\left[A^{(1)}\middle|B^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 57|67 \\ 11 & 23 & -1|33 \\ 23 & -27 & 5|\ 1 \end{bmatrix}$$

1. O pivot a escolher na 1ª coluna será $|23| \geq |11| \geq |3|$.

Neste caso dado que o pivot escolhido está na 3ª linha, não se justifica trocar as linhas, pois podemos manter a 3ª linha e fazer as operações na 1ª e 2ª linhas.

Assim, obtém-se os multiplicadores $-\frac{a_{11}}{a_{31}} = -\frac{3}{23} \approx -0.13$ e $-\frac{a_{21}}{a_{31}} = -\frac{11}{23} \approx -0.48$ e faz-se

$$-0.13L_3 + L_1 \rightarrow L_1 \text{ e } -0.48L_3 + L_2 \rightarrow L_2$$

Obtendo-se

$$[A^{(2)}|B^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 56|67 \\ 0 & 36 & -3|33 \\ 23 & -27 & 5|\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Agora o pivot a escolher na 2ª coluna será $|36| \geq |11|$, logo tem-se o multiplicador $\frac{a_{12}}{a_{22}} = -\frac{11}{36} \approx -0.31$ e fazendo $-0.31L_2 + L_1 \rightarrow L_1$ obtém-se a matriz triangular inferior

$$[A^{(3)}|B^{(3)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 57|57 \\ 0 & 36 & -3|33 \\ 23 & -27 & 5|\ 1 \end{bmatrix}.$$

Donde, por substituição descendente regressiva a solução do sistema vem

$$x = 1;\ y = 1;\ z = 1$$

A solução é a correta mesmo com erros de arredondamento equivalentes introduzidos nos cálculos intermédios, ou seja, houve uma melhoria da instabilidade do método de Gauss, pois a propagação expansiva dos erros de arredondamento foi travada.

Relembremos agora a seguinte:

Definição 1

Uma matriz $A_{n\times n} = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1,2,\ldots,n}$ diz-se de **diagonal estritamente dominante** (por linhas) se $|a_{ii}| > \sum_{j=1\,,j\neq i}^{n}\left|a_{ij}\right|\ ,\ i = 1,2,\ldots,n\,.$

Teorema 1

Se a matriz A do sistema $AX = B$ é de **diagonal estritamente dominante** (por linhas) então o método de eliminação de Gauss pode ser concretizado sem troca de linhas.

Normas vetoriais e normas matriciais

Definição 2

A norma (**norma vetorial**) de um vetor $X \in \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $||.|| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ que verifica as seguintes propriedades:

1. $\forall \; X \in \mathbb{R}^n , \; ||X|| \geq 0$ e $||X|| = 0 \Leftrightarrow X = \mathbf{0}$
2. $\forall \propto \in \mathbb{R} , \; \forall X \in \mathbb{R}^n , \; || \propto X|| = | \propto |. ||X||$
3. $\forall \; X, Y \in \mathbb{R}^n , \; ||X + Y|| \leq ||X|| + ||Y||$

Exemplos de normas vetoriais

Considere-se o vetor genérico $X = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T \in \mathbb{R}^n$.

Então

- $||X||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$;
- $||X||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$;
- $||X||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (norma euclideana).

Exemplo 3

Seja $X = [-5 \quad 1 \quad -3 \quad 2]^T$.

Então

- $||X||_1 = |-5| + |1| + |-3| + |2| = 11$;
- $||X||_\infty = max\{|-5|, |1|, |-3|, |2|\} = 5$;
- $||X||_2 = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{39}$ (norma euclideana).

Definição 3 (convergência em $\mathbb{R}^n$)

Considere-se uma sucessão de vetores

$$\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})} = \left[x_1{}^{(k)} \quad x_1{}^{(k)} \quad \dots \quad x_n{}^{(k)}\right]^T \in \mathbb{R}^n \quad , \quad k \in \mathbb{N} \; ,$$

e um vetor fixo $\boldsymbol{v} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]^T \in \mathbb{R}^n$.

A sucessão $\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})}$ converge para $\boldsymbol{v}$ se

$$\lim_{k \to +\infty} ||\boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})} - \boldsymbol{v}|| = 0 \, .$$

Repare-se que

$$\lim_{k \to +\infty} \boldsymbol{x}^{(\boldsymbol{k})} = \boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{k \to +\infty} x_i{}^{(k)} = v_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \, .$$

Definição 4

A norma (**norma matricial**) de uma matriz $M \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é uma aplicação $||.|| : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ que verifica as seguintes propriedades:

1. $\forall\ M \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ ||M|| \geq 0$ e $||M|| = 0 \Leftrightarrow M = \mathbf{0}$;
2. $\forall \propto \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ M \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\ ,\ || \propto M|| = | \propto | \cdot ||M||$;
3. $\forall\ M, N \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\ ,\ ||M + N|| \leq ||M|| + ||N||$;
4. $\forall\ M, N \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\ ,\ ||MN|| \leq ||M|| \cdot ||N||$.

Definição 5 (Normas matriciais induzidas por normas vetoriais)

Seja $||.|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ uma norma vetorial.

Defina-se a seguinte aplicação:

$$||M||_I = \sup_{X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{||MX||}{||X||} = \max_{||X||=1} ||MX|| \,.$$

- Esta aplicação é uma norma matricial e designa-se por **norma matricial induzida** pela (ou subordinada à) **norma vetorial** $||.||$;
- Propriedade importante destas normas (condição de compatibilidade):

$$||MX|| \leq ||M||_I \times ||X|| \quad , \quad \forall \; M \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad , \quad \forall \; X \in \mathbb{R}^n$$

Exemplos de normas matriciais induzidas por normas vetoriais

Considere-se uma matriz genérica $M = \left[m_{ij}\right]_{i,j=1,2,\dots,n} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Então

- $||M||_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |m_{ij}|$ (máximo das somas dos módulos dos elementos por colunas) ;
- $||M||_\infty = \max\limits_{1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}} \sum_{j=1}^{n} |m_{ij}|$ (máximo das somas dos módulos dos elementos por linhas) ;

Observação: As normas matriciais $||.||_1$ e $||.||_\infty$ são normas induzidas, respetivamente, pelas normas vetoriais $||.||_1$ e $||.||_\infty$.

Exemplo 4

Sendo $M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, tem-se:

- $||M||_1 = max\{3,4,12\} = 12$;
- $||M||_\infty = max\{6,7,6\} = 7$;

Condicionamento de um sistema

Seja $AX = B$ um sistema de equações, possível e determinado.

Definição 6

Designamos por **número de condição** da matriz A, relativamente a uma norma $||.||$, a quantidade:

$$k(A) = ||A||\,.\,||A^{-1}|| \ .$$

Ao resolver o sistema de equações anterior, poderemos estar na presença de instabilidade numérica, resultante do mau condicionamento do problema que essa resolução acarreta.

Assumindo que nos seria dada uma aproximação $\hat{B}$ do vetor exato B , teríamos uma solução aproximada, $\hat{X}$,do sistema perturbado $A\hat{X} = \hat{B}$.

As normas vetoriais anteriormente estudadas, sugerem-nos a possibilidade de estabelecer definições de erros vetoriais, semelhantes às que foram estabelecidas no Capítulo 1, para erros escalares.

Definições 7 e 8

Considere-se uma determinada norma vetorial $||.||$.

Definam-se as seguintes quantidades

- $||\varepsilon_X|| = ||X - \hat{X}||$ (erro absoluto associado ao vetor aproximado $\hat{X}$);
- $||r_X|| = \frac{||X-\hat{X}||}{||X||} = \frac{||\varepsilon_X||}{||X||}$ (erro relativo associado ao vetor aproximado $\hat{X}$).

Teorema 2

Seja $AX = B$ um sistema de equações, possível e determinado e $A\hat{X} = \hat{B}$ o correspondente sistema perturbado.

Então verifica-se a seguinte desigualdade, válida para normas matriciais induzidas por normas vetoriais:

$$\frac{||r_X||}{||r_B||} \leq k(A) \, .$$

Demonstração

- Tem-se

$$A(X-\hat{X}) = B-\hat{B} \;\Leftrightarrow\; A\varepsilon_X = \varepsilon_B \;\Leftrightarrow\; \varepsilon_X = A^{-1}\varepsilon_B\,.$$

Assim,

$$\frac{||r_X||}{||r_B||} = \frac{\dfrac{||\varepsilon_X||}{||X||}}{\dfrac{||\varepsilon_B||}{||B||}} = \frac{||\varepsilon_X||}{||X||}\times\frac{||B||}{||\varepsilon_B||} = \frac{||A^{-1}\varepsilon_B||}{||X||}\times\frac{||AX||}{||\varepsilon_B||} \leq$$

$$\leq \frac{||A^{-1}||\,.||\varepsilon_B||}{||X||}\times\frac{||A||\,.||X||}{||\varepsilon_B||} = ||A^{-1}||\,.\,||A|| = k(A) \quad \blacksquare$$

Conclusão

Do teorema anterior surge naturalmente a seguinte conclusão:

$$k(A) = ||A^{-1}||.\,||A|| \;\geq\; ||A^{-1}A|| = ||I|| = \;1\;\;,$$

sendo esta desigualdade verdadeira para qualquer uma das 2 normas matriciais anteriormente citadas e I a matriz identidade.

Uma vez que a matriz I não amplia nem diminui o efeito do erro relativo associado ao vetor $\hat{B}$ no erro relativo associado ao vetor $\hat{X}$ (aliás nenhuma outra matriz diminui esse efeito), conclui-se que quanto maior for $k(A)$, maiores serão os desvios verificados nas componentes do vetor $\hat{X}$ que resultam dos desvios cometidos nas componentes do vetor $\hat{B}$.

Assim, um sistema de equações do tipo $AX = B$ é mal condicionado se, e só se, $k(A)$ for muito grande, isto é, muito maior que *1*.

Exemplo 5

Considere o sistema de equações $AX = B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 13 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 \\ 20 \end{bmatrix}$ e o sistema de equações "perturbado" $A\hat{X} = \hat{B} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 13 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25.9 \\ 20.1 \end{bmatrix}$, cujas soluções são, respetivamente $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\hat{X} = \begin{bmatrix} -2.3 \\ 2.7 \end{bmatrix}$.

Demonstre, utilizando as normas vetoriais e matriciais $||.||_1$ e $||.||_\infty$, que o sistema inicial é mal condicionado.

Resolução

Tem-se

- Para as normas $||.||_1$:

$$||\varepsilon_X||_1 = ||X - \hat{X}||_1 = \; ||[x - \hat{x} \quad y - \hat{y}]^T||_1 = \; ||[2.3 \quad -0.7]^T||_1 =$$
$$= \; 3.0$$

e

$$||r_X||_1 = \frac{||\varepsilon_X||_1}{||X||_1} = \; \frac{3.0}{2} = \; 1.5 \, .$$

Por outro lado,

$$||\varepsilon_B||_1 = ||B - \hat{B}||_1 = \; ||[0.1 \quad -0.1]^T||_1 = \; 0.2$$

e

$$||r_B||_1 = \frac{||\varepsilon_B||_1}{||B||_1} = \; \frac{0.2}{46} = \frac{1}{230} \, .$$

Assim, $\frac{||r_x||_1}{||r_B||_1} = \frac{1.5}{\frac{1}{230}} = 345 \gg 1$, pelo que se conclui imediatamente que o sistema inicial é mal condicionado.

Nota: Repare-se que $345 \leq k_1(A) = ||A^{-1}||_1 \times ||A||_1 =$

$$= \left\| \begin{bmatrix} 10 & -13 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \right\|_1 \times \left\| \begin{bmatrix} 4 & 13 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \right\|_1 = 17 \times 23 = 391,$$

como era de esperar.

- Para as normas $||.||_\infty$:

$$||\varepsilon_X||_\infty = ||X - \hat{X}||_\infty = \ ||[x - \hat{x} \quad y - \hat{y}]^T||_\infty = \ ||[2.3 \quad -0.7]^T||_\infty =$$
$$= \ 2.3$$

e

$$||r_X||_\infty = \frac{||\varepsilon_X||_\infty}{||X||_\infty} = \ \frac{2.3}{2} = \ 1.15 \ .$$

Por outro lado,

$$||\varepsilon_B||_\infty = ||B - \hat{B}||_\infty = \ ||[0.1 \quad -0.1]^T||_\infty = \ 0.1$$

e

$$||r_B||_\infty = \frac{||\varepsilon_B||_\infty}{||B||_\infty} = \ \frac{0.1}{26} = \frac{1}{260}.$$

Assim, $\frac{||r_x||_\infty}{||r_B||_\infty} = \frac{1.15}{\frac{1}{260}} = 299 \gg 1$, pelo que se conclui, mais uma vez que o sistema inicial é mal condicionado.

Nota: Repare-se que $299 \leq k_\infty(A) = ||A^{-1}||_\infty \times ||A||_\infty =$

$$= \left\| \begin{bmatrix} 10 & -13 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \right\|_\infty \times \left\| \begin{bmatrix} 4 & 13 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 23 \times 17 = 391,$$

como mais uma vez era de esperar.

Métodos iterativos: caso geral

A resolução direta de um sistema de equações, possível e determinado, do tipo $AX = B$, pode envolver um número muito elevado de equações e consequente efeito indesejado na obtenção do vetor solução X^*, por acumulação de erros de arredondamento no algoritmo computacional utilizado.

Outro efeito indesejado pode surgir pelo simples facto de pequenas variações nos valores das componentes do vetor B (as quais estão associadas a um erro relativo pequeno) poderem originar grandes variações nos valores das componentes do vetor solução X^* (as quais estão associadas a um erro relativo grande).

Para ultrapassar estes obstáculos, podemos utilizar um método de aproximações sucessivas do vetor solução X^* , designado por

método iterativo geral que consiste em obter sucessivos vetores $X^{(j)}$,

j = 0, 1, … , que se pretende serem elementos de uma sucessão convergente para X^*.

A ideia base consiste em transformar o sistema de equações $AX = B$ num sistema de equações **equivalente** do tipo $X = GX + H$, onde G é designada por **matriz de iteração**.

Tem-se $G \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e $H \in \mathbb{R}^n$.

Os vetores são então obtidos recursivamente, a partir da forma

$$\begin{cases} X^{(0)} \\ X^{(j+1)} = GX^{(j)} + H \ , \ j = 0,1,\ldots \end{cases} .$$

A sucessão de vetores $X^{(j)}$, atrás definida, é convergente se, para qualquer vetor inicial $X^{(0)}$, convergir para X^{*}.

Assim sendo o limite desta sucessão, caso seja convergente, é a solução do sistema de equações $X = GX + H$ e, por conseguinte, também a solução do sistema de equações $AX = B$.

É válido o teorema que se segue.

Teorema 3 (Condição suficiente de convergência do método iterativo geral)

Seja $||.||$ uma norma matricial, induzida por uma norma vectorial, para a qual se tem $||G|| < 1$.

Então, o método iterativo,

$$X^{(j+1)} = GX^{(j)} + H \ , \ j = 0, 1, \dots \ ,$$

converge para um vector X^* e tem-se

- $||X^* - X^{(j)}|| \leq \frac{||G||^j}{1-||G||} \, ||X^{(1)} - X^{(0)}||$ **(fórmula do erro *a priori*)** ;
- $||X^* - X^{(j)}|| \leq \frac{||G||}{1-||G||} \, ||X^{(j)} - X^{(j-1)}||$ **(fórmula do erro *a posteriori*** .

Notas

- Um método convergente relativamente a uma determinada norma vectorial é também convergente relativamente a qualquer outra norma vectorial;

Na prática, para a obtenção da matriz G , é usual partir do sistema de equações inicial $AX = B$ e escolher uma decomposição da matriz A da forma $A = N - P$, sendo N e P matrizes com a mesma ordem que A , tendo a matriz N a particularidade de ser invertível (regular).

A justificação para este procedimento é a seguinte:

$$\boldsymbol{AX = B} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (N - P)X = B \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad NX - PX = B \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad NX = PX + B \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{N^{-1}N}_{I_n} X = N^{-1}(PX + B) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = N^{-1}PX + N^{-1}B \, .$$

A partir da igualdade

$$X = \underbrace{N^{-1}P}_{G} X + \underbrace{N^{-1}B}_{H} \quad ,$$

Constrói-se a sucessão de vetores:

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ X^{(j)} = GX^{(j-1)} + H \quad , \quad j = 1, 2, \ldots \end{cases} .$$

Exemplo 6

Considere o sistema de equações $AX = B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & -4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 10.0 \\ -1.3 \\ -14.5 \end{bmatrix}.$$

Verifique que, com $N = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$, o método iterativo geral converge

para $X^* = [0.9 \quad -1.1 \quad 2.2]^T$, solução do sistema acima indicado.

Partindo da iterada inicial $X^{(0)} = [1 \quad -1 \quad 2]^T$, determine $X^{(10)}$.

Resolução

- Tem-se $A = N - P \quad \Leftrightarrow \quad P = N - A \quad \Leftrightarrow$

$$P = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Então $G = N^{-1}P = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e

$$H = N^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10.0 \\ -1.3 \\ -14.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.0 \\ -0.65 \\ 1.8125 \end{bmatrix}.$$

Então, apesar de se verificar $||G||_\infty = 1.375$, tem-se $||G||_1 = 0.95$, pelo que, sendo $||G||_1 < 1$, se confirma a convergência da sucessão

$$\begin{cases} X^{(0)} = [1 \quad -1 \quad 2]^T \\ X^{(j)} = GX^{(j-1)} + H \quad , \quad j = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

para X^*.

Tem-se, finalmente,

$$\begin{cases} X^{(0)} = [1 \quad -1 \quad 2]^T \\ X^{(1)} = [1 \quad -1.15 \quad 2.1875]^T \\ X^{(2)} = [0.895 \quad -1.15 \quad 2.16875]^T \\ \qquad \vdots \\ X^{(10)} = [0.901057 \quad -1.10080515625 \quad 2.1970778515625]^T \end{cases}.$$

Métodos de Jacobi, de Gauss-Seidel e de Relaxação

Os métodos de **Jacobi** e de **Gauss-Seidel** são exemplos de casos particulares do método iterativo geral.

Considerando novamente um sistema de equações do tipo $AX = B$, ambos se baseiam na decomposição específica da matriz $A = [a_{ij}]_{i,j=1,\ldots,n}$ $(a_{ii} \neq 0\ ,\ i = 1, \ldots, n)$ do tipo

$$A = D + L + U\ ,$$

onde as matrizes D (de **d**iagonal matrix), L (de strictly **l**ower triangular matrix), e U (de strictly **u**pper triangular matrix), são definidas como se segue:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Método de Jacobi

No método de **Jacobi**, temos

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{AX = B} \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \Big(\underbrace{D}_{N} + \underbrace{L + U}_{-P}\Big) X = B \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & DX + (L+U)X = B \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & DX = -(L+U)X + B \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & \underbrace{D^{-1}D}_{I_n} X = D^{-1}[-(L+U)X + B] \quad \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow \quad & X = -D^{-1}(L+U)X + D^{-1}B \,.
\end{aligned}
$$

A partir da igualdade

$$X = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{G_J} X + \underbrace{D^{-1}B}_{H_J} \ ,$$

construímos a

Sucessão de iteradas (Método de Jacobi)

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ X^{(k)} = G_J X^{(k-1)} + H_J \ , \ k = 1,2,\ldots \end{cases} .$$

É também possível obter as componentes do vector

$X^{(k)} = \left[x_1^{(k)} \quad x_2^{(k)} \quad \cdots \quad x_n^{(k)}\right]^T$ de uma forma explícita

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^{(k)} = \dfrac{b_1 - \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}}{a_{11}} \\ \qquad\vdots \\ x_i^{(k)} = \dfrac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} \\ \qquad\vdots \\ x_n^{(k)} = \dfrac{b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_j^{(k-1)}}{a_{nn}} \end{array}\right. , \quad k = 1,2, \ldots \;,$$

sendo de salientar que todas as componentes deste vector dependem, única e exclusivamente, de componentes do vector $X^{(k-1)}$.

Exemplo 7

Considere o sistema de equações $AX = B$, sendo $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$,

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 13.1 \\ -1.3 \\ 6.8 \end{bmatrix}$.

Verifique que a sucessão, gerada pelo método de Jacobi, converge para um vector X^* $(X^* = [0.9 \quad -1.1 \quad 2.2]^T)$, solução do sistema acima indicado.

Partindo da iterada inicial $X^{(0)} = [1 \quad -1 \quad 2]^T$, determine $X^{(10)}$ e obtenha um majorante (com 5 casas decimais, devidamente arredondadas), tão pequeno quanto possível, para $||X^* - X^{(10)}||_\infty$.

Resolução

- Tem-se

$$D=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}\quad,\quad L=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\-1&3&0\end{bmatrix}\quad \text{e}\quad U=\begin{bmatrix}0&-1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Então

$$G_J=-D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{5}&-\frac{3}{5}&0\end{bmatrix}$$

e

$$H_J = D^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{131}{60} \\ -\frac{13}{20} \\ \frac{34}{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.18(3) \\ -0.65 \\ 1.36 \end{bmatrix}.$$

Como $||G_J||_\infty = 0.8 < 1$, conclui-se que a sucessão definida por

$$X^{(k)} = G_J X^{(k-1)} + H_J \quad , \quad k = 1,2, \dots \quad ,$$

converge para X^*, $\forall \, X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

Tem-se, finalmente,

$$\begin{cases} X^{(0)} = [1 \quad -1 \quad 2]^T \\ X^{(1)} = [1.01(6) \quad -1.15 \quad 2.16]^T \\ X^{(2)} = [0.911(6) \quad -1.158(3) \quad 2.25(3)]^T \\ \vdots \\ X^{(9)} = [0.898266521\ldots \quad -1.098800513\ldots \quad 2.200133283\ldots]^T \\ X^{(10)} = [0.900133272\ldots \quad -1.099133260\ldots \quad 2.198933612\ldots]^T \end{cases}.$$

Como

$$\Delta X^{(9)} = X^{(10)} - X^{(9)} =$$

$$= [0.001866751\ldots \quad -0.000332747\ldots \quad -0.001199671\ldots]^T,$$

tem-se

$||\Delta X^{(9)}||_\infty = 0.001866751\ldots$, pelo que, segundo a fórmula do erro *à posteriori* , se tem

$$||X^* - X^{(10)}||_\infty \leq \frac{||G_J||_\infty}{1-||G_J||_\infty}\, ||\Delta X^{(9)}||_\infty =$$

$$= \frac{0.8}{1-0.8} \times 0.001866751\ldots \leq 0.007467004\ldots < 0.00747 .$$

Conclui-se, desta forma, que todas as coordenadas de $X^{(10)}$ distam das correspondentes coordenadas de X^* de uma quantidade inferior a 0.00747.

Método de Gauss-Seidel

No método de **Gauss-Seidel** , temos

$$\boldsymbol{AX = B} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \Big(\underbrace{D + L}_{N} + \underbrace{U}_{-P}\Big)X = B \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (D + L)X + UX = B \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (D + L)X = -UX + B \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{(D + L)^{-1}(D + L)}_{I_n}X = (D + L)^{-1}[-UX + B] \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = -(D + L)^{-1}UX + (D + L)^{-1}B\,.$$

A partir da igualdade

$$X = \underbrace{-(D+L)^{-1}U}_{G_{GS}} X + \underbrace{(D+L)^{-1}B}_{H_{GS}} \;,$$

construímos a

Sucessão de iteradas (Método de Gauss-Seidel)

$$\begin{cases} X^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ X^{(k)} = G_{GS}X^{(k-1)} + H_{GS} \;, \quad k = 1,2,\dots \end{cases}$$

Tal como no método de Jacobi, é também possível obter as componentes do vector $X^{(k)} = \left[x_1^{(k)} \quad x_2^{(k)} \quad \cdots \quad x_n^{(k)}\right]^T$ de uma forma explícita.

Assim, tem-se

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} \quad , \quad k = 1,2,\ldots \ , \ i = 1,2,\ldots, n \ ,$$

sendo de salientar que as componentes deste vector dependem não só de componentes do vector $X^{(k-1)}$, mas também de componentes do próprio vector $X^{(k)}$ que está a ser construído.

Exemplo 8

Considere novamente o sistema de equações $AX = B$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \text{ , } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 13.1 \\ -1.3 \\ 6.8 \end{bmatrix}.$$

Verifique que a sucessão, gerada pelo método de Gauss-Seidel, converge para um vector X^* $(X^* = [0.9 \quad -1.1 \quad 2.2]^T)$, solução do sistema acima indicado. Partindo da iterada inicial $X^{(0)} = [1 \quad -1 \quad 2]^T$, determine $X^{(10)}$ e obtenha um majorante (com 5 casas decimais, devidamente arredondadas), tão pequeno quanto possível, para $||X^* - X^{(10)}||_\infty$.

Resolução

- Tem-se

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então

$$G_{GS} = -(D+L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

e

$$H_{GS} = (D+L)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{131}{60} \\ -\frac{209}{120} \\ \frac{341}{120} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.18(3) \\ -1.741(6) \\ 2.841(6) \end{bmatrix}.$$

Como $||G_{GS}||_\infty = \frac{2}{3} < 1$, conclui-se que a sucessão definida por

$$X^{(k)} = G_{GS}X^{(k-1)} + H_{GS} \quad , \quad k = 1,2,\ldots \quad ,$$

converge para X^*, $\forall\, X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$.

Tem-se, finalmente,

$$\begin{cases} X^{(0)} = [1 \quad -1 \quad 2]^T \\ X^{(1)} = [1.01(6) \quad -1.158(3) \quad 2.258(3)]^T \\ X^{(2)} = [0.86(1) \quad -1.080(5) \quad 2.180(5)]^T \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ X^{(9)} = [0.900017781\ldots \quad -1.100008890\ldots \quad 2.200008890\ldots]^T \\ X^{(10)} = [0.899994072\ldots \quad -1.099997036\ldots \quad 2.198933612\ldots]^T \end{cases}.$$

Como

$$\Delta X^{(9)} = X^{(10)} - X^{(9)} =$$

$$= [-0.000023709\ldots \quad 0.000018545\ldots \quad 0.000018545\ldots]^T,$$

então

$||\Delta X^{(9)}||_\infty = 0.000023709\ldots$, pelo que, segundo a fórmula do erro *à posteriori* , se tem

$$||X^* - X^{(10)}||_\infty \leq \frac{||G_{GS}||_\infty}{1-||G_{GS}||_\infty}\ ||\Delta X^{(9)}||_\infty =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} \times 0.000023709\ldots \leq 0.000047418\ldots < 0.00005 .$$

Conclui-se, desta forma, que todas as coordenadas de $X^{(10)}$ distam das correspondentes coordenadas de X^* de uma quantidade inferior a 0.00005.

Demonstra-se que, se uma matriz A for de diagonal estritamente dominante, então tem-se

$$\begin{cases} ||G_J||_\infty < 1 \\ ||G_{GS}||_\infty < 1 \end{cases},$$

onde G_J e G_{GS} representam, respetivamente, as matrizes de iteração associadas aos métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel.

Estes resultados dão origem aos seguintes teoremas

Teorema 4 (Condição suficiente de convergência para o método de Jacobi)

Considere-se o sistema de equações $AX = B$.

Se a matriz A for de diagonal estritamente dominante, então a sucessão gerada pelo método de **Jacobi** converge para a solução X^* deste sistema.

Teorema 5 (Condição suficiente de convergência para o método de Gauss-Seidel)

Considere-se o sistema de equações $AX = B$.

Se a matriz A for de diagonal estritamente dominante, então a sucessão gerada pelo método de **Gauss-Seidel** converge para a solução X^* deste sistema.