Exemplo

Considere a equação

$$y^2 - x^4 = 0.$$

Funções definidas implicitamente (1^a versão)

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Diz-se que a equação

$$f(x, y) = 0$$

define implicitamente y como função de x numa vizinhança de um ponto $(a, b) \in U$, tal que $f(a, b) = 0$, se existirem

- duas vizinhanças, V de a e W de b, tais que $V \times W \subset U$
- e uma função $\varphi : V \to W$ tal que
$$\forall (x, y) \in V \times W, \quad f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \varphi(x).$$

Neste caso diz-se que a função φ é definida implicitamente, na vizinhança de (a, b), pela equação $f(x, y) = 0$.

Teorema da função implícita (1^a versão)

Teorema

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ *um conjunto aberto,* $(a,b) \in U$ *e* $f : U \to \mathbb{R}$ *uma função tal que*

- $f(a,b) = 0$;
- $f \in C^1(U)$;
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

Então existem conjuntos abertos $V, W \subset \mathbb{R}$ *tais que* $a \in V, \quad b \in W, \quad V \times W \subset U$ *e uma função* $\varphi : V \to W$ *de classe* C^1 *tal que*
$\forall (x,y) \in V \times W, \quad f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \varphi(x)$. *Além disso,*

$$\varphi'(a) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}.$$

Exemplo

Exemplo

Mostre que a equação

$$y^2 - x^4 = 0$$

define implicitamente y *como função de* x *numa vizinhança do ponto* $(-1, 1)$ *e calcule* $\frac{dy}{dx}(-1)$.

Resolução:

Funções definidas implicitamente (2^a versão)

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Diz-se que a equação

$$f(x, y, z) = 0$$

define implicitamente a variável z como função das variáveis x e y numa vizinhança de um ponto $(a, b, c) \in U$, tal que $f(a, b, c) = 0$, se existirem

- duas vizinhanças, V de (a, b) e W de c, tais que $V \times W \subset U$
- e uma função $\varphi : V \to W$ tal que

  $\forall (x, y, z) \in V \times W, \quad f(x, y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \varphi(x, y).$

Neste caso diz-se que a função φ é definida implicitamente, na vizinhança de (a, b, c), pela equação $f(x, y, z) = 0$.

Teorema da função implícita (2ª versão)

Teorema

Seja $U \subset \mathbb{R}^3$ *um conjunto aberto,* $(a, b, c) \in U$ *e* $f : U \to \mathbb{R}$ *uma função tal que*

- $f(a, b, c) = 0$;
- $f \in C^1(U)$;
- $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$.

Então existem conjuntos abertos $V \subset \mathbb{R}^2$ *e* $W \subset \mathbb{R}$ *tais que*

$$(a, b) \in V, \quad c \in W, \quad V \times W \subset U$$

e uma função $\varphi : V \to W$ *de classe* C^1 *tal que*

$$\forall (x, y, z) \in V \times W, \quad f(x, y, z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \varphi(x, y).$$

Derivadas parciais da função implícita

Além disso

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)}.$$

Extremos relativos de funções de duas variáveis

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

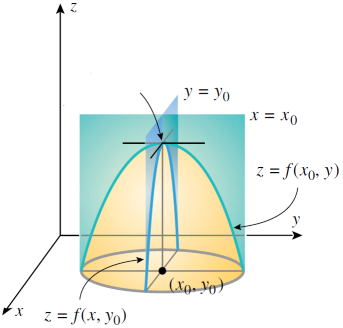
- Diz-se que f tem um mínimo relativo (= mínimo local) num ponto $(x_0, y_0) \in D$ se existir uma bola aberta $B(x_0, y_0)$ centrada em (x_0, y_0) tal que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in D \cap B(x_0, y_0).$$

- Diz-se que f tem um máximo relativo (= máximo local) num ponto $(x_0, y_0) \in D$ se existir uma bola aberta $B(x_0, y_0)$ centrada em (x_0, y_0) tal que

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in D \cap B(x_0, y_0).$$

Condição necessária de extremo relativo



Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ *e* $(x_0, y_0) \in \mathrm{int}(D)$*. Se* f *tiver um extremo relativo no ponto* (x_0, y_0) *e se as derivadas parciais de primeira ordem de* f *existirem nesse ponto, então*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

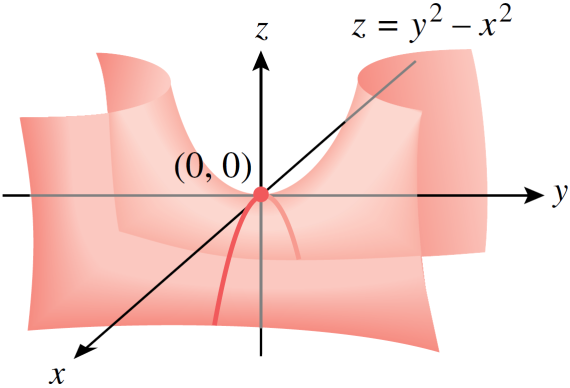
Pontos críticos

Um ponto (x_0, y_0) no domínio de f é denominado ponto crítico da função

- se
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Exemplo: o paraboloide hiperbólico

Exemplo



Determine os pontos críticos da função $z = y^2 - x^2$.

Resolução:

Pontos de sela

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in D$ um ponto crítico. Diz-se que (x_0, y_0) é um ponto de sela de f se para qualquer bola aberta $B(x_0, y_0)$ centrada em (x_0, y_0) existirem dois pontos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D \cap B(x_0, y_0)$$

tais que

$$f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0) < f(x_2, y_2).$$

Caso particular

Proposição

Seja

$$g(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

onde $A, B, C \in \mathbb{R}$.

1. *Se* $AC - B^2 > 0$
   - *(i)* *e* $A > 0$, *então* 0 *é mínimo de* $g(x,y)$;
   - *(ii)* *e* $A < 0$, *então* 0 *é máximo de* $g(x,y)$;
2. *Se* $AC - B^2 < 0$, *então* $g(x,y)$ *não tem máximo nem mínimo,* $(0,0)$ *é ponto de sela.*

Caso particular - Demonstração

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= A\big(x^2 + \frac{2B}{A}xy + \frac{C}{A}y^2\big)\\
&= A\big(x^2 + \frac{2B}{A}xy + \frac{B^2y^2}{A^2} + \frac{C}{A}y^2 - \frac{B^2y^2}{A^2}\big)\\
&= A\big(x + \frac{B}{A}y\big)^2 + \frac{1}{A}(AC - B^2)y^2.
\end{aligned}$$

$(0,0)$ é o único ponto critico de g e $g(0,0)=0$.

- No caso 1(i), $g(x,y) \geq 0$, portanto 0 mínimo de g,
- no caso 1(ii), $g(x,y) \leq 0$, então 0 é máximo de g.
- No caso 2, g toma valores positivos e negativos em qualquer bola aberta de centro $(0,0)$.

Matriz Hessiana

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{bmatrix}}_{\text{a matriz Hessiana de } f \text{ em } (a,b)}$$

A matriz Hessiana de f em (a, b) denota-se por $H_f(a, b)$.

Classificação de um ponto crítico

Teorema

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ *um conjunto aberto,* $f \in C^2(D)$ *e* (a, b) *um ponto crítico de* f*.*

- *Se* $\det H_f(a, b) < 0$*, então* (a, b) *é um ponto de sela de* f*.*
- *Se* $\det H_f(a, b) > 0$ *e* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$*, então* $f(a, b)$ *é um mínimo relativo de* f*.*
- *Se* $\det H_f(a, b) > 0$ *e* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$*, então* $f(a, b)$ *é um máximo relativo de* f*.*

Ideia da demonstração

Seja $h(r) = f(a + r\cos\theta, b + r\,\mathrm{sen}\,\theta)$

$$h\prime(r) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + r\cos\theta, b + r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(a + r\cos\theta, b + r\,\mathrm{sen}\,\theta)\mathrm{sen}\,\theta$$

$h\prime(0) = 0.$

$$h\prime\prime(r) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + r\cos\theta, b + r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a + r\cos\theta, b + r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + r\cos\theta, b + r\,\mathrm{sen}\,\theta))\mathrm{sen}^2\,\theta$$

$h\prime\prime(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a, b)\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)\mathrm{sen}^2\,\theta.$

Ideia da demonstração (continuação)

Se denotar

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b), \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b),$$

$h = \cos\theta$ e $k = \operatorname{sen}\theta$

$$h''(0) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2.$$

Anteriormente foi demonstrado o seguinte:

- Se $AC - B^2 = \det H_f(a,b) < 0$, então o sinal de $h''(0)$ não se mantem em qualquer bola centrada na origem. Portanto, (a,b) é um ponto de sela.
- Se $AC - B^2 = \det H_f(a,b) > 0$ e $A > 0$, então $h''(0) \geq 0$.

  Neste caso $\quad f(a+h, b+k) \geq f(a,b).$

- Se $AC - B^2 = \det H_f(a,b) > 0$ e $A < 0$, então $h''(0) \leq 0$.

  Neste caso $\quad f(a+h, b+k) \leq f(a,b).$

Exemplo

Exemplo

Determine os extremos relativos da função

$$f(x, y) = x^3 - 3xy - y^3$$

e indique a sua natureza.

Resolução: