Ficha 3 - Sucessões e Limites I

Indicações de resolução e correcções

Exercício 1

Em cada uma das alíneas, indique um valor $p \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > p$, então

(a) $\left|\dfrac{1}{n^2}\right| < \dfrac{1}{100}$ (b) $\left|\dfrac{\cos(n)}{\sqrt{n+1}}\right| < \dfrac{1}{10^3}$ (c) $\left|e^{-n} + \dfrac{1}{n}\right| < 10^{-2}$.

Indicações:

Em (a), podemos tomar, por exemplo, $p = 10$ e em (b), $p = 10^6 - 1$;

(c) Observe que $|e^{-n}+\frac{1}{n}| < \frac{2}{n}$ e obtenha a majoração para o segundo membro (que é mais fácil de manipular do ponto de vista algébrico). Alternativamente, escolha p_1 tal que $n > p_1$ implique que $e^{-n} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$, p_2 tal que $n > p_2$ implique $\frac{1}{n} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$ e considere $p = \max\{p_1, p_2\}$.

Exercício 2

Sendo $\epsilon > 0$ determine um valor $p \in \mathbb{N}$, dependendo de ϵ, tal que, se $n > p$ então

(a) $|u_n| < \sqrt{\epsilon}$ em que $u_n = \frac{1}{n^2}$.

(b) $|v_n - 1| < \epsilon$ em que $v_n = \frac{n}{n+1}$.

(c) $|w_n - 2| < \dfrac{\epsilon}{3}$ em que $w_n = \frac{2n}{n-\frac{1}{2}}$

O que pode concluir quanto à convergência de u_n, v_n e w_n?

Sugestão: Na expressão de p como função de ϵ pode utilizar a função "parte inteira de x"

$$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

Note que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Indicações:

Em (a), pode tomar p a parte inteira de $\epsilon^{-\frac{1}{4}}$, isto é, $p = \lfloor \epsilon^{-\frac{1}{4}} \rfloor$ para valores de ϵ suficientemente pequenos (de modo a que p seja um número natural). As três sucessões u, v e w verificam a definição de convergência para os limites $0, 1$ e 2 respectivamente.

Exercício 3

Calcule o limite das seguintes expressões. Em cada caso, comece por escrever uma razão equivalente em que o numerador (ou o denominador) tendem para uma constante.

(a) $\dfrac{n^2 + n\sqrt{n}}{3n^2+3}$ (b) $\dfrac{n^3+n}{n^2+\ln(n)}$ (c) $\dfrac{n \cdot \sqrt[3]{8n+1}}{(n^{\frac{2}{3}}+1)^2}$ (d) $\dfrac{n\cos(n^2)}{n^2+1}$

(e) $\dfrac{2ne^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n^2+5}}$ (f) $\dfrac{5^n+4^n}{2\cdot 5^{n+1}+1}$ (g) $\dfrac{3^n+e^n}{3^n+\pi^n}$ (h) $\dfrac{n^2\cdot 9^n + n^3}{(n+2)^2\cdot 3^{2n+1}}$

Indicações:

(a) $\dfrac{1}{3}$; (b) $+\infty$; (c) 2 (divida numerador e denominador por $n^{\frac{4}{3}}$; (d) 0.

Exercício 4

Sejam $a, b \geq 0$. Mostre que

$$\lim \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$$

Exercício 5

Calcule o limite das seguintes expressões:

(a) $\sqrt{n+5} - \sqrt{2n-1}$ (b) $\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2-n+1}$ (c) $(1,1)^{n+1} - (1,05)^{2n-1}$

(d) $\sqrt{\ln(e^4 n+1)} - \sqrt{\ln(n+2)}$ (e) $n\ln(n+1) - n\ln(n)$

(f) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

Indicações:

(a) Utilize a técnica de multiplicar e dividir pela expressão conjugada

$$\sqrt{n+5} + \sqrt{2n-1}$$

e descubra, usando os métodos desenvolvidos no exercício 3, que o limite é $-\infty$;

(c) Escreva

$$(1,1) \cdot (1,1)^n - (1,05) \cdot [(1,05)^2]^n$$

e observe que $(1,05)^2 = 1 + 2 \cdot 0,5 + 0,5^2 > 1,1$. Conclua que o limite é $-\infty$.

(e) Modifique a expressão utilizando propriedades da função ln e obtenha um limite famoso.

(e) Recorde:$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Problema 6

Mostre que, para todo o $n \in \mathbb{N}$,

$$0 < \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \leq n^{-\frac{2}{3}}$$

e conclua sobre o limite de $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$.

Indicações:

Multiplique ambos os membros da inequação por $n^{\frac{2}{3}}$ para obter

$$n^{\frac{2}{3}} \leq (n+1)^{\frac{2}{3}}$$

Depois, utilize o lema das sucessões enquadradas.

Exercício 7

Determine os seguinte limites utilizando o Teorema das Sucessões Enquadradas:

(a) $\lim \left(\dfrac{n+1}{2n+5}\right)^n$ (b) $\dfrac{\cos(n)}{\ln(n)+1}$ (c) $\dfrac{\lfloor n\pi \rfloor}{2n}$ (d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2+k}{n^3+1}$

Indicações:

(a) Observe que

$$\frac{n+1}{2n+5} = \frac{\frac{1}{2}(2n+5) - \frac{5}{2} + 1}{2n+5} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2(2n+5)} \leq \frac{1}{2}$$

pelo que

$$0 \leq \left(\frac{n+1}{2n+5}\right)^n \leq \frac{1}{2^n}$$

(c) Temos $\dfrac{n\pi - 1}{2n} < \dfrac{\lfloor n\pi \rfloor}{2n} < \dfrac{\pi}{2}$;

(d) Temos $n \cdot \dfrac{n^2+1}{n^3+1} \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2+k}{n^3+1} \leq n \cdot \frac{n^2+n}{n^3+1}$. Conclua que o limite é 1.

Exercício 8

Utilize o limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{u_n}\right)^{u_n}=e^x$$

em que (u_n) é uma sucessão convergindo para $+\infty$, para calcular o limite das seguintes sucessões:

(a) $\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n}$ (b) $\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\sqrt{n}}$ (c) $\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)^{n^2+3}$

(d) $(n+1)(\ln(n+3)-\ln(n))$ (e) $\left(1+\frac{1}{2n+(-1)^n}\right)^n$

Indicações:

(a) e^6 (b) 1 (e) $\sqrt{e}$

observe que $\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{2n+(-1)^n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^n$

Problema 9 (Sucessões e topologia)

Seja $X \subset \mathbb{R}$. Prove que X é fechado se e só se verifica a seguinte propriedade:

Se (u_n) é uma sucessão cujos termos pertencem a X e tal que $\lim u_n = a \in \mathbb{R}$ então $a \in X$.

(Sugestão: Prova-se facilmente que X é fechado se e só se $Fr(X) \subset X$.)