Capítulo 1 - Introdução à teoria da probabilidade

Resolução de alguns exercícios

Consequências dos axiomas.

P2 Queremos demonstrar que $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

Observe-se primeiramente que sendo $A \subseteq B$, o conjunto B se pode escrever como

$$B = A \cup (\overline{A} \cap B)$$

onde os conjuntos A e $\overline{A} \cap B$ são disjuntos. Neste seguimento, vem pelo Axioma A3,

$$P(B) = P(A \cup (\overline{A} \cap B)) \underset{\mathtt{A3}}{=} P(A) + P(\overline{A} \cap B) \tag{1}$$

Nestas condições, e considerando ainda o Axioma A1 onde se refere que $P(A) \geq 0$ para qualquer acontecimento A, vem agora

$$P(\overline{A} \cap B) \geq 0. \tag{2}$$

De (2) e (1) vem então que

$$P(A) \underset{\mathtt{A1}}{\leq} P(A) + P(\overline{A} \cap B) \underset{\mathtt{A3}}{=} P(B)$$

donde $P(A) \leq P(B)$ **c.q.d.**

Consequências dos axiomas.

P4 Queremos demonstrar que $P(A) \in [0,1]$.

Pelo Axioma A1 temos $P(A) \geq 0$.

Dado que $A \subseteq \Omega$ podemos concluir $P(A) \leq P(\Omega) = 1$ **c.q.d.**

P6 Queremos demonstrar que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Observamos agora que $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)$ onde $A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, A \cap B$ são conjuntos disjuntos dois a dois, temos então pelo Axioma A3

$$P(A \cup B) = P((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)) \underset{A3}{=} P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) =$$

$$= P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B) + P(A \cap B) - P(A \cap B)$$

$$= \big(P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)\big) + \big(P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)\big) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

c.q.d.

Consequências dos axiomas.

P7 Queremos demonstrar que

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Ora, usando a propriedade associativa da união, a propriedade P6 e a propriedade comutativa da intersecção relativamente à união vem

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) \underset{\text{P6}}{=} P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) =$$

$$\underset{\text{P6}}{=} P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) =$$

$$\underset{\text{P6}}{=} P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - \big(P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)\big) =$$

$$\underset{\text{P6}}{=} P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Exercícios

Exe. 1º Teste-2016/17

Admita que A, B e C são acontecimentos de um espaço de acontecimentos $(\Omega, \mathcal{F})$ e que:

- $P(A) = 0.2,\ P(B) = 0.4,\ P(C) = 0.1,\ P(A \cap B) = 0.1$
- os acontecimentos A e C são independentes
- acontecimentos B e C são disjuntos

Selecione a opção correta.

a) $\boxed{\texttt{V}}$ $\boxed{\texttt{F}}$ $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 0.5$

b) $\boxed{\texttt{V}}$ $\boxed{\texttt{F}}$ $P(A - B) = 0.2$

c) $\boxed{\texttt{V}}$ $\boxed{\texttt{F}}$ $P(A \cup B \cup C) = 0.58$

Resolução:

a) $\boxed{\texttt{F}}$ $P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 0.9$

b) $\boxed{\texttt{F}}$ $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0.1$

c) $\boxed{\texttt{V}}$ Como $B \cap C = \emptyset$ também $A \cap B \cap C = \emptyset$, logo $P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0$. Se A e C são acontecimentos independentes então $P(A \cap C) = P(A) \times P(C) = 0.02$. Assim,
$P(A \cup B \cup C) =$
$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 0.58$

Exercícios

Exe 18 Considere os acontecimentos $A, B \in (\Omega, \mathcal{S}, P)$ tais que $P(A \cup B) = 0.8$ e $P(A - B) = 0.3$. Qual o valor da $P(B)$?

Resolução:

Repare-se que por

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ e } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

virá que

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A - B) = 0.8 - 0.3 = 0.5.$$

Exercícios

Exe. 1º Teste-2016/17

Para efeitos de controlo da poluição no rio Tejo, são recolhidas de forma periódica amostras de água em três localizações distintas L_1, L_2 e L_3. Em L_1 são recolhidas o dobro das amostras relativamente a qualquer uma das outras localizações (L_2, L_3). A percentagem de amostras com resultado positivo, para um certo tipo de poluente, é de 2% em L_1 e L_2 , enquanto que em L_3 é de 4%. Todas as amostras são guardadas e arquivadas num único lugar mas alguém eliminou todos os registos identificativos das amostras.

a) Escolhendo uma amostra ao acaso de entre todas as que estão arquivadas, qual a probabilidade desta ser positiva para o poluente?

[A] 0.05 [B] 0.025 [C] 0.011 [D] 0.015 [E] Nenhuma das anteriores

b) Se a amostra tiver resultado positivo, qual a probabilidade de ter sido recolhida em L_1?

[A] 0.20 [B] 0.30 [C] 0.40 [D] 0.60 [E] Nenhuma das anteriores

Resolução:

Considerem-se os acontecimentos: L_i- localização L_i, $i = 1, 2, 3$ e RP-Resultado positivo.

Informação:

- $$P(L_1) = 2P(L_2) = 2P(L_3) \Rightarrow P(L_2) = P(L_3)$$
  $$P(L_1) + P(L_2) + P(L_3) = 1 \Leftrightarrow 2P(L_2) + P(L_2) + P(L_2) = 1 \Leftrightarrow$$
  $$P(L_2) = 1/4$$
  $$P(L_1) = 1/2 \quad P(L_2) = 1/4 \quad P(L_3) = 1/4$$
- $P(RP|L_1) = 0.02 \quad P(RP|L_2) = 0.02 \quad P(RP|L_3) = 0.04$

a) $\boxed{\texttt{B}}$

$$P(RP) = P(RP \cap L_1) + P(RP \cap L_2) + P(RP \cap L_3) =$$
$$= P(RP|L_1)P(L_1) + P(RP|L_2)P(L_2) + P(RP|L_3)P(L_3) = 0.025$$

b) $\boxed{\texttt{C}}$

$$P(L_1|RP) = \frac{P(L_1 \cap RP)}{P(RP)} = \frac{P(RP|L_1)P(L_1)}{P(RP)} = \frac{0.01}{0.025} = 0.4$$