IPEIO – EXERCÍCIOS - 2023

1 – Numa quinta de criação de animais pretende-se determinar a quantidade diária de milho, trigo e alfafa que cada animal deve receber de modo a serem satisfeitas certas exigências nutricionais. Na tabela seguinte são indicadas as quantidades de nutrientes presentes em cada quilograma de milho, trigo e alfalfa.

Nutrientes:	Kg de milho	Kg de trigo	Kg de alfalfa
Hidratos de carbono(g)	90	20	40
Proteínas (g)	30	80	60
Vitaminas (mg)	10	20	60
Custo por kg (u.m.)	42	36	30

As quantidades diárias que cada animal necessita de hidratos de carbono, proteínas e vitaminas são pelo menos de 200 gramas, 180 gramas e 150 miligramas, respetivamente.

a) Sabendo que se pretende minimizar os custos da alimentação de cada animal, formule este problema como um modelo de Programação Linear.

b) Indique uma solução admissível para o problema e o respetivo custo.

c) Resolva o problema recorrendo ao solver do Microsoft Excel. Com base na solução ótima determinada, indique a quantidade de hidratos de carbono, proteínas e vitaminas que cada animal recebe.

2 – Uma indústria do ramo alimentar pode produzir 4 variedades distintas (A, B, C e D) de cereais de pequeno-almoço num determinado dia. Para o fabrico dos cereais são utilizados, entre outras matérias-primas, trigo, aveia e açúcar.

A fábrica dispõe de 1500kg de trigo, 600 kg de aveia e 1000 kg de açúcar para a produção dos cereais nesse dia. As restantes matérias-primas necessárias existem em grandes quantidades e por isso não limitam a produção.

A tabela contém as quantidades necessárias de cada matéria-prima necessárias para fabricar 1kg de cada tipo de cereal assim como o lucro que lhe está associado

Com as matérias-primas existentes, como deve ser feita a produção de cereais de pequeno almoço de forma a maximizar o lucro? Formule este problema em Programação Linear e resolva-o recorrendo ao solver do Microsoft Excel. O trigo, aveia e açúcar são totalmente gastos no fabrico dos cereais?

	Quantidade (em kg) de matéria-prima por tipo de cereal				
	A	**B**	**C**	**D**	**Disponibilidade (kg)**
trigo	0.4	0.35	0.45	0.3	1500
aveia	0.1	0.2	0.3	0.15	600
açúcar	0.16	0.2	0.15	0.25	1000
Lucro/kg (€)	8	4	6	7	

3 – Uma empresa agrícola possui três terrenos onde pode fazer plantações. Na tabela seguinte apresenta-se a área de cada terreno disponível para as plantações e a quantidade de água disponível para regar que pode ser utilizada.

Terreno	Área disponível (ha)	Água disponível (m^3/dia)
1	500	1600
2	600	1800
3	300	1000

A empresa pretende plantar melão, batata-doce e tomate podendo cada um destes produtos ser plantado em mais do que um terreno. Na tabela seguinte indica-se para cada tipo de plantação: a área total máxima que pode ser plantada, o consumo diário de água por cada hectare de plantação e o correspondente lucro.

Tipo de plantação	Área máxima (ha)	Consumo diário de água (m^3/ha)	Lucro por ha (unidades monetárias)
melão	700	5	7
batata-doce	500	4	5
tomate	350	6	6

Sabendo que a empresa pretende saber que área deve plantar de cada tipo de plantação em cada terreno de modo a maximizar o lucro total, formule este problema como um modelo de Programação Linear.

4 - Uma empresa possui duas fábricas produtoras de dois tipos de farinha. A empresa deve garantir que a cada um dos seus três clientes chegam semanalmente pelo menos as quantidades de farinha (em toneladas) indicadas na tabela seguinte:

Tipo de Farinha	Clientes		
	1	2	3
A	75	70	80
B	60	85	90

A tabela seguinte contém a quantidade de farinha (em toneladas) produzida semanalmente em cada fábrica.

Tipo de Farinha	Fábrica 1	Fábrica 2
A	150	120
B	160	130

A fábrica 1 não dispõe de espaço de armazenamento pelo que toda a farinha que produz deve ser distribuída pelos clientes. A farinha produzida na fábrica 2 e que não é enviada para os clientes fica armazenada no armazém da fábrica.

Os custos de transportar (em unidades monetárias) uma tonelada de farinha entre cada fábrica e cada cliente encontram-se registados na tabela seguinte:

Fábrica	Clientes		
	1	2	3
1	20	30	60
2	30	40	50

Sabendo que se pretende determinar o plano mais económico de abastecimento dos clientes, formule o problema em Programação Linear.

5 - Uma empresa produtora de automóveis está a planear uma campanha publicitária para a promoção de um novo modelo híbrido. A firma está disposta a gastar até 10 000 unidades monetárias (u.m.) em publicidade. A divulgação poderá ser feita através de 2 canais de televisão (TV1 e TV2) e de 2 estações de rádio (Antena1 e Antena2). O custo, em unidades monetárias, de uma hora de publicidade em cada canal de TV e em cada estação de rádio depende do período horário a que é transmitido e encontra-se registado na tabela seguinte.

	Canal de televisão		Canal de rádio	
Período horário	TV1	TV2	Antena1	Antena2
9 – 14 h	10	20	1	2
14 – 19 h	15	22	3	4

De acordo com um estudo previamente realizado, o número de novos clientes captados por cada hora de publicidade encontra-se registado na seguinte tabela:

	Canal de televisão		Canal de rádio	
Período horário	TV1	TV2	Antena1	Antena2
9 – 14 h	100	200	10	22
14 – 19 h	125	250	15	18

É ainda necessário assegurar que:

- O montante total gasto em publicidade nos 2 canais de TV no período das 9 – 14 horas não pode ser superior a 25% de todo o montante gasto em publicidade na TV.
- O tempo total de publicidade na estação de rádio Antena2 deve ser o dobro do tempo total de publicidade na estação de rádio Antena1.

Sabendo que a empresa pretende planear a sua campanha publicitária de modo a maximizar o número total de novos clientes captados, formule este problema como um modelo de Programação Linear.

6 – Uma fábrica que produz adubo tem que satisfazer as procuras registadas na tabela seguinte:

Mês	janeiro	fevereiro	março
Procura (toneladas)	70	80	100

A fábrica pode produzir em janeiro, fevereiro e março até 80, 100 e 90 toneladas de adubo respetivamente.

No início de janeiro existem 15 toneladas de adubo em stock que podem ser usadas para satisfazer a procura. Se após a satisfação da procura em janeiro e fevereiro sobrar adubo, este será armazenado para poder ser usado nos meses seguintes. No final de março não deve ficar qualquer adubo em stock.
Os custos de produção por tonelada em janeiro, fevereiro e março são de 10, 15 e 12 unidades monetárias respetivamente. No final de janeiro e fevereiro é necessário pagar o aluguer do armazém que é de 2 unidades monetárias por cada tonelada de adubo que fique em stock para o mês seguinte.
Sabendo que se pretende determinar o plano de produção de adubo para os meses de janeiro, fevereiro e março que minimiza os custos totais, formule o problema como um modelo de Programação Linear.

7 - Numa fábrica são produzidas peças do tipo 1 e peças do tipo 2. Para produzir uma peça de qualquer dos tipos podem ser usadas duas máquinas. Na tabela seguinte é indicado o tempo (em minutos) que é necessário para fabricar uma peça de cada tipo em função da máquina que é usada. Por exemplo, para fabricar uma peça do tipo 1 na Máquina 1 são necessários 20 minutos e para fabricar uma peça de tipo 1 na Máquina 2 são necessários 40 minutos. As Máquinas 1 e 2 podem trabalhar 8 horas e 9 horas respetivamente. Todas as peças do tipo 1 produzidas são vendidas ao preço unitário de 10€. As peças do tipo 2 produzidas são vendidas a 4€ cada uma.

Tipo de peça	Máquina 1	Máquina 2
1	20	40
2	10	20

Sabendo que a empresa pretende maximizar o lucro resultante da venda das peças, formule este problema como um modelo de Programação Linear.

8 - Uma empresa produz componentes de tipo A, B e C. Cada componente deve ser obrigatoriamente processada em duas máquinas e sabe-se que cada máquina não trabalha mais do que 40 horas.
A tabela seguinte contém para cada componente: o lucro resultante da sua venda e o número de horas que deve ser processada em cada uma das máquinas.

	Componentes		
	A	B	C
Lucro	10	50	100
nº de horas na máquina1	1	2	3
nº de horas na máquina2	2	1	1

Por exemplo, o fabrico de uma componente B requer 2 horas na máquina 1 e 1 hora na máquina 2 sendo o seu preço de venda de 50.

Para fabricar uma componente B é necessário gastar uma componente A enquanto que, para fabricar uma componente C é necessário gastar uma componente B. Deste modo, as componentes A e B gastas no fabrico de outras componentes não podem ser vendidas.

Sabe-se que a empresa pretende maximizar o lucro resultante da venda das peças.

Formule este problema como um modelo de Programação Linear que pode incluir variáveis inteiras e/ou binárias.

9 - Uma empresa de mobiliário produz mesas utilizando dois tipos de madeira: faia e cerejeira. As mesas podem ser retangulares ou redondas. As mesas redondas podem ter tampo de vidro ou de madeira.

No quadro seguinte estão registados os lucros (em unidades monetárias) associados ao fabrico de cada um dos tipos de mesas.

Madeira	Mesa retangular	Mesa-redonda	
		Tampo vidro	Tampo madeira
cerejeira	200	160	180
faia	180	130	150

Sabe-se que:

- uma mesa retangular consome 3,5 m^2 de madeira;
- uma mesa-redonda com tampo de madeira consome 3 m^2 de madeira;
- uma mesa-redonda com tampo de vidro consome 1 m^2 de madeira e 2 m^2 de vidro;
- estão disponíveis para o fabrico das mesas 300 m^2 de cerejeira, 350 m^2 de faia e 200m^2 de vidro;
- pelo menos 25 % do número total de mesas fabricadas deve ter tampo de vidro
- cada m^2 de vidro não utilizado no fabrico das mesas é vendido originando um lucro de 70 u.m.

Formule este problema utilizando um modelo de Programação Linear, sabendo que se pretende determinar o plano de produção de mesas com o objetivo de maximizar o lucro.

10 - Uma empresa de automóveis possui 3 fábricas onde vai produzir dois novos modelos de automóvel.

A tabela seguinte indica o número de automóveis de cada modelo que cada fábrica produz.

Fábricas	Nº automóveis produzidos – Modelo 1	Nº automóveis produzidos – Modelo 2
1	1235	826
2	1328	432
3	1562	300

As fábricas vão abastecer 7 clientes. O número de automóveis que cada cliente precisa de cada modelo é apresentado na tabela seguinte:

	Clientes						
	1	2	3	4	5	6	7
Modelo 1	330	90	300	190	180	400	250
Modelo 2	85	110	50	75	62	30	65

O envio de um automóvel entre cada fábrica e cada cliente tem o custo, em unidades monetárias (u.m.) que se indica na seguinte tabela:

	Clientes						
	1	2	3	4	5	6	7
1	5	7	2	3	4	5	6
2	4	8	4	7	2	2	1
3	6	5	5	4	6	3	9

Sabendo que se pretende determinar o modo mais económico de abastecer os clientes a partir das fábricas, formule este problema como um modelo de Programação Linear.

11 - Numa fábrica é necessário distribuir 5 operários (O1,…,O5) por 5 tarefas (T1,…,T5). Cada operário realiza uma só tarefa e cada tarefa deve ser realizada por um único operário.

Na tabela seguinte apresenta-se o desempenho de cada operário (medido numa escala de 0-100, onde 0 significa o pior desempenho e 100 significa o melhor desempenho) ao executar qualquer uma das tarefas.

Pretende-se determinar como vão ser distribuídas as tarefas pelos operários de modo a ser maximizado o desempenho global. Formule este problema como um modelo de Programação Linear.

	T1	**T2**	**T3**	**T4**	**T5**
O1	**78**	**88**	**65**	**72**	**70**
O2	**90**	**95**	**93**	**94**	**88**
O3	**71**	**93**	**89**	**86**	**78**
O4	**82**	**80**	**77**	**78**	**84**
O5	**73**	**78**	**76**	**75**	**75**

12 - Num clube de natação, os quatro melhores nadadores são o Manuel, o Pedro, o Miguel e o João. Vai decorrer em breve um campeonato onde cada um dos nadadores referidos vai participar apenas numa prova. Na tabela seguinte encontra-se registado o tempo (em unidades de tempo) que cada um dos nadadores demora a completar cada uma das provas:

	bruços	costas	mariposa	crawl
Manuel	62	61	61	56
Pedro	61	59	63	58
Miguel	58	57	59	56
João	59	58	61	57

a) Sabendo que se pretende atribuir uma e uma só prova a cada um dos nadadores e um nadador a cada prova de modo que o tempo total das 4 provas seja minimizado, formule este problema como um modelo de Programação Linear.

b) Admita que nem o João nem o Miguel podem realizar a prova de mariposa. Que alterações devem ser introduzidas no modelo apresentado em a) de modo a contemplar esta situação?

13 - O João decidiu distribuir por alguns dos seus 10 melhores amigos bilhetes para o EURO2020. O João vai distribuir 3 bilhetes para o jogo Itália-Bélgica, 2 bilhetes para o jogo Suíça-Espanha e um bilhete para a final.

A satisfação de cada amigo depende do bilhete que receber. Na tabela seguinte o João registou essa satisfação.

	Amigo									
Jogo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Itália-Bélgica	10	12	11	10	12	12	11	13	14	10
Suíça-Espanha	9	11	11	11	12	12	11	10	13	11
Final do EURO2020	10	11	12	12	13	12	10	12	14	10

O João também já decidiu que:

- cada amigo pode receber, no máximo, um bilhete;
- após a distribuição dos bilhetes, a satisfação total do amigo 4 não deve ser inferior à satisfação total do amigo 7;
- se o amigo 2 receber um bilhete para o Suíça-Espanha então o amigo 9 deve receber um bilhete para a final

Sabendo que se pretende maximizar a satisfação total dos amigos do João, formule o problema em Programação Linear, podendo recorrer à utilização de variáveis inteiras e/ou binárias.

14 - Uma firma dispõe de 7 matérias-primas distintas que podem ser transformadas em 3 máquinas. As máquinas são diferentes umas das outras e por isso requerem tempos de laboração distintos para transformar uma mesma matéria-prima. Uma matéria-prima origina produtos finais distintos quando é processada por máquinas diferentes. Assim, no total podem ser obtidos 21 produtos finais. Cada matéria-prima tem que ser processada por uma e uma só máquina, mas uma máquina pode processar várias matérias-primas. Na tabela seguinte está registado o lucro (em unidades monetárias), resultante da venda de cada um dos 21 possíveis produtos finais:

	Matérias-primas:						
Máquina	1	2	3	4	5	6	7
1	20	48	19	24	18	37	29
2	60	37	28	15	56	22	45
3	40	10	37	20	57	10	29

A tabela seguinte indica o tempo (em unidades de tempo (u.t.)) que cada máquina necessita para transformar cada uma das matérias-primas:

	Matérias-primas:						
Máquina	1	2	3	4	5	6	7
1	10	18	9	14	8	17	9
2	6	3	2	15	6	12	15
3	4	10	7	20	7	11	19

Os tempos máximos de laboração (em u.t.) para cada uma das máquinas 1, 2 e 3 é respetivamente 45, 25 e 36 u.t..

Sabendo que se pretende maximizar o lucro resultante da venda dos produtos finais, formule este problema em Programação Linear.

15 - A LearnWell, uma cooperativa de ensino tem duas escolas (A e B) situadas em duas cidades diferentes. O diretor da cooperativa está a planear uma viagem de final de ano letivo a um parque temático destinada aos alunos de ambas as escolas. A escola A fica a uma distância de 100 quilómetros do parque temático enquanto a escola B dista 120 quilómetros do respetivo parque. A escola A vai enviar 500 alunos ao parque temático e a escola B vai enviar 600 alunos. Para o transporte dos alunos a LearnWell vai alugar autocarros a uma empresa de transportes que possui uma frota de autocarros, composta por veículos pequenos e grandes e com as características que se indicam na tabela seguinte.

Tipo de autocarro	Nº de autocarros disponíveis	Nº máximo de passageiros	Custo (u.m./km)
Pequeno	50	22	12
Grande	33	53	20

Por exemplo, considerando ambas as escolas, pode-se alugar um máximo de 50 autocarros de tipo pequeno, cada um destes autocarros pode transportar até 22 passageiros e por cada quilómetro que percorre são cobradas 12 unidades monetárias (u.m.).

Os autocarros partem de cada uma das escolas transportando os alunos diretamente para o parque temático, ficam estacionados enquanto os alunos estão no parque e depois trazem os alunos de volta às escolas.

Sabe-se que é necessário pagar um custo de 2 u.m. por cada lugar que fique desocupado num autocarro alugado.

Sabendo que se pretende determinar o número e o tipo de autocarros que devem ser alugados por cada escola de modo a minimizar os custos totais desta viagem, formule o problema anterior como um modelo de Programação Linear.

16 – Recorrendo ao Método Gráfico resolva os seguintes problemas de Programação Linear:

a) $\max F = 2x + 3y$

$$\text{s.a:}\quad \begin{aligned} 2x - y &\leq 6 \\ x + y &\leq 7 \\ 2x + 5y &\geq 10 \\ x + 2y &\leq 12 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

b) $\min G = x - 4y$

$$\text{s.a:}\quad \begin{aligned} 2x - y &\leq 6 \\ x + y &\leq 7 \\ 2x + 5y &\geq 10 \\ x + 2y &\leq 12 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

c) $\max H = 2x - 2y$

$$\text{s.a:}\quad \begin{aligned} 2x - y &\leq 6 \\ x + y &\leq 7 \\ 2x + 5y &\geq 10 \\ x + 2y &\leq 12 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

17 - Considere a região admissível S de um problema de Programação Linear definida por

$$\begin{aligned} x + y &\leq 7 \\ x + y &\geq 2 \\ -x + y &\leq 2 \\ 3x - 2y &\leq 6 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Resolva graficamente os seguintes problemas:

a) Max $z_1 = x + 2y$

s.a $(x,y) \in S$

b) Max $z_2 = x + y$

s.a $(x,y) \in S$

c) Min $z_3 = x + 2y$

s.a $(x,y) \in S$

d) Max $z_4 = -x + y$

s.a $(x,y) \in S$

e) Min $z_5 = x$

s.a $(x,y) \in S$

f) Min $z_6 = -9x - 8y$

s.a $(x,y) \in S$

18 **-** Considere a região admissível T de um problema de Programação Linear definida por

$$\begin{aligned} -2x + 2y &\leq 6 \\ x + y &\geq 7 \\ x \geq 0,\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Resolva graficamente os seguintes problemas:

a) Min $g_1 = x + 2y$

s.a $(x,y) \in T$

b) Max $g_2 = 3x + y$

s.a $(x,y) \in T$

c) Max $g_3 = -x + y$

s.a $(x,y) \in T$

19 - Considere o seguinte problema (P) de Programação Linear:

$$(P) \quad \text{Max} \quad F = 4x + 2y$$

$$\begin{aligned} \text{s a} \quad 2x - y &\geq -1 \\ 2x + y &\leq 10 \\ -x + 4y &\leq 7 \\ x,\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Recorrendo ao Método Gráfico, resolva o problema (P).

b) Admita que o termo independente da terceira restrição passou a ser θ ($\theta \geq 0$). Resolva o problema nesta situação.

c) Admita que a função objetivo passou a ser Max $G = \theta x + 2y$, com $\theta \geq 0$. Resolva o problema nesta situação.

d) Admita que ao problema (P) foi adicionada a restrição: “x e y devem ser inteiros”. Resolva o problema recorrendo ao Método Gráfico.

e) Admita que ao problema (P) foi adicionada a restrição: “y deve se inteiro”. Resolva o problema recorrendo ao Método Gráfico.

20 – Considere as seguintes restrições

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\
x_1 - x_2 &\leq 4 \\
x_2 &\leq 2 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

a) Represente a região admissível graficamente.

b) Determine os vértices da região admissível e para cada vértice determine as variáveis básicas e não básicas.

c) Admita que é feito um movimento do vértice $(x_1, x_2)=(4,0)$ para o vértice $(x_1, x_2)=(14/3, 2/3)$. Indique qual a variável que passou a básica e qual a variável que deixou de ser básica neste movimento.

21 – Resolva os seguintes problemas de Programação Linear recorrendo ao Método do Simplex:

a) $\max F = 3x + y$

s. a:

$$
\begin{aligned}
x + 2y &\leq 12 \\
x - y &\leq 7 \\
x, y &\geq 0
\end{aligned}
$$

b) $\max \quad F = 4x + y + 2z$

s. a:

$$
\begin{aligned}
2x + y - 2z &\leq 20 \\
3x + 6y &\leq 12 \\
x, y, z &\geq 0
\end{aligned}
$$

c) $\min \quad W = -x - y$

s. a:

$$
\begin{aligned}
x + y &\leq 4 \\
-x + y &\leq 1 \\
x, y &\geq 0
\end{aligned}
$$

d) min $T = 2x + 3y$

s. a:

$$\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & \leq & 16 \\ x & + & 3y & \geq & 20 \\ x & + & y & = & 10 \\ x, & & y & \geq & 0 \end{array}$$

e) max $F = 3x + y$

s. a:

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & \leq & 1 \\ & & y & \geq & 2 \\ x, & & y & \geq & 0 \end{array}$$

f) max $Z = -x + y$

s. a:

$$\begin{array}{rcrcl} -x & + & y & \leq & 3 \\ x & + & y & \geq & 7 \\ x, & & y & \geq & 0 \end{array}$$

g) max $F = 2x + 3y + 4z$

s. a:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & 4z & \leq & 60 \\ x & + & 2y & + & z & \leq & 30 \\ x, & & y, & & z & \geq & 0 \end{array}$$

22 - Resolva os seguintes problemas de Programação Linear Inteira pelo algoritmo *Branch and Bound* estudado. Resolva cada subproblema utilizando o Método Gráfico. Apresente as árvores de pesquisa correspondente à sua resolução.

a) max $G = 1/2\, x_1 + 3/2\, x_2$

s. a

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_2 \leq 5/2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 7$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

b) max $G = 4x_1 + 3x_2$

s. a

$$4x_1 + 9x_2 \leq 26$$

$$8x_1 + 5x_2 \leq 20$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

c) min $G = 2x_1 + x_2$

s. a

$$5x_1 + 6x_2 \geq 20$$

$$-5x_1 + 6x_2 \leq 10$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \text{ e inteiros}$$

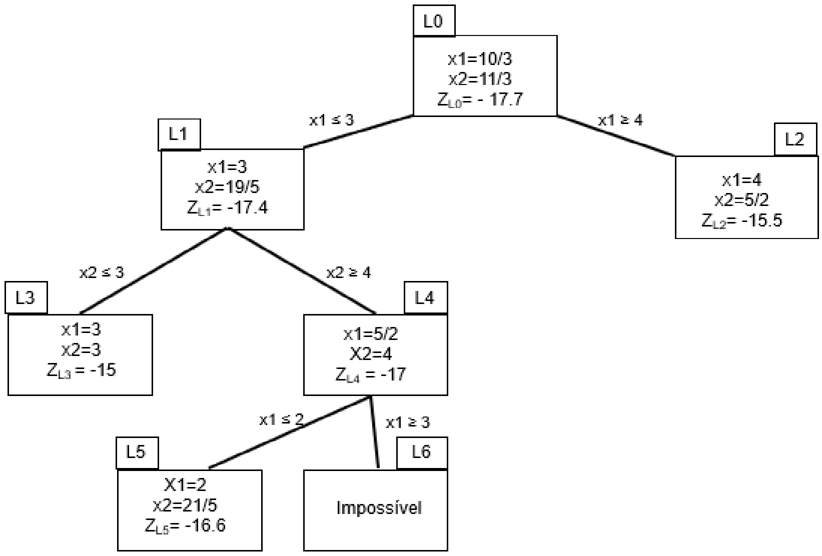
23 - Resolva o seguinte problema pelo algoritmo *Branch and Bound* estudado. Resolva cada subproblema utilizando o solver do Microsoft Excel. Apresente as árvores de pesquisa correspondente à sua resolução.

$$
\begin{aligned}
\max G = {} & 7x_1 + 9x_2 + 6x_3 \\
\text{s. a} \quad & -x_1 + 3x_2 + x_3 \le 11 \\
& 7x_1 + x_2 + 2x_3 \le 32 \\
& x_3 \le 9.5 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \qquad x_1, x_2 \text{ inteiros}
\end{aligned}
$$

24 – Considere o seguinte problema de Programação Linear Inteira

$$
\begin{aligned}
\underline{???} \quad & -2x_1 - 3x_2 \\
\text{s.a} \quad & 5x_1 + 2x_2 \le 25 \\
& 2x_1 + 5x_2 \le 25 \\
& x_1 + x_2 \le 7 \\
& x_1, x_2 \ge 0 \text{ e inteiros}
\end{aligned}
$$

Começou a resolver-se o problema através do algoritmo *Branch & Bound* estudado apresentando-se em seguida a árvore de pesquisa já obtida.



a) Indique, justificando, se o problema que se está a resolver é de tipo máximo ou de tipo mínimo.

b) Com base na informação disponibilizada consegue identificar o valor ótimo para este problema? Em caso afirmativo indique qual é esse valor e a correspondente solução ótima.

   Em caso negativo, indique o melhor limite inferior e o melhor limite superior para o valor ótimo deste problema. Com vista à determinação do valor ótimo indique como se deveria prosseguir com o Algoritmo *Branch & Bound*.

25 – Trace as redes correspondentes a cada um dos seguintes projetos. Determine o Caminho Crítico e a respetiva duração.

a)

Atividades	Precedências Imediatas	Duração (meses)
A	---	3
B	---	6
C	---	5
D	C	7
E	B	4
F	A	8

b)

Atividades	Precedências Imediatas	Duração (meses)
A	---	3
B	---	6
C	---	5
D	C	7
E	B	4
F	A, C	8

c)

Atividades	Precedências Imediatas	Duração (meses)
A	---	12
B	A	8
C	---	10
D	C	12
E	C	14
F	B, D	8
G	B, D	14
H	E, F	6

26 – Considere um projeto cujas características se indicam na tabela seguinte:

Atividades	Predecessores imediatos	Duração (semanas)	Nº funcionários necessários por semana
A	---	6	3
B	A	4	4
C	---	8	4
D	C	6	2
E	B, D	10	3
F	D	8	1

a) Construa a rede que representa o projeto.

b) Indique o caminho crítico e a sua duração.

c) Se a duração da atividade D passasse a ser de 7 semanas, haveria alteração na duração do projeto?

d) Se a atividade B demorasse o dobro do tempo que alteração sofria a data de conclusão do projeto?

e) Mostre que é possível realizar este projeto no tempo previsto sem necessitar de mais do que 7 funcionários.

f) Escreva um modelo de Programação Linear que possa ser usado para determinar a duração mínima do projeto.

27 – Considere os projetos cujas características se indicam a seguir:

Projeto1

Atividades	Predecessoras imediatas	Duração (dias)
A	---	10
B	---	12
C	A	5
D	A	8
E	B,C	7
F	B,C	17
G	D,E	9

Projeto 2

Atividades	Predecessoras imediatas	Duração (dias)
A	---	10
B	---	12
C	A	5
D	A	8
E	B,C	7
F	B	17
G	D,E	9

a) Trace a rede correspondente a cada um dos projetos.

b) Determine a duração de cada um dos projetos e indique as atividades críticas.

c) Para cada projeto determine qual a atividade com maior folga total.

d) Considere o projeto 2. Apresente uma formulação em Programação Linear que possa ser utilizada para determinar a duração do caminho crítico.

e) Considere o projeto 2. Admita que é possível reduzir a duração das atividades de acordo com a informação apresentada na tabela seguinte:

Atividades	A	B	C	D	E	F	G
Redução máxima possível (dias)	3	5	2	1	4	10	2
Custo por cada dia de redução (u.m.)	8	3	4	6	7	4	10

Pretende-se reduzir a duração do projeto para um valor não superior a 25 dias da forma mais económica. Apresente uma formulação em Programação Linear que possa ser utilizada para resolver este problema. Utilize o Solver do Excel para determinar uma solução ótima e o valor ótimo do problema formulado.

28 – O projeto de construção de uma nova piscina é composto por 9 atividades cujas características se apresentam na tabela seguinte:

Atividades	Precedências imediatas	Duração otimista (dias)	Duração mais provável (dias)	Duração pessimista (dias)
A	---	3	5	6
B	---	2	4	6
C	A, B	5	6	7
D	A, B	7	9	10
E	B	2	4	6
F	C	1	2	3
G	D	5	8	10
H	D, F	6	8	10
I	E, G, H	3	4	5

a) Trace a rede que representa o projeto.
b) Para cada atividade determine a duração média e a respetiva variância.
c) Determine o caminho crítico médio e a duração média do projeto.
d) Recorrendo à técnica PERT, determine a probabilidade da duração do projeto não ser superior a 25 dias.
e) Recorrendo à técnica PERT, determine a probabilidade da duração do projeto exceder 27 dias.

29 – Considere o projeto composto com as características apresentadas na tabela seguinte. As durações das atividades são aleatórias e o desvio padrão da duração de cada atividade é 10% do valor da sua duração média.

Atividades	Precedências imediatas	Duração média (dias)
A	---	10
B	A, E	4
C	---	8
D	A	8
E	---	9
F	B	6
G	A, C	7
H	G	10
I	D	8

a) Trace a rede representativa deste projeto.
b) Determine o caminho crítico médio.

c) Recorrendo à Técnica PERT determine a probabilidade da duração do projeto não exceder 25 dias.

d) Recorrendo à Técnica PERT determine a probabilidade da duração do projeto exceder 28 dias.

e) Recorrendo à Técnica PERT determine a duração do projeto que não é excedida com 95% de probabilidade

30 – Um investidor pode investir nos investimentos A, B ou C. O lucro associado a cada um destes investimentos depende da evolução da economia no próximo ano que é representada pelos estados da natureza $\theta 1$, $\theta 2$ e $\theta 3$. Na tabela seguinte apresenta-se o lucro, em unidades monetárias (u.m.), associado a cada investimento em função dos estados da natureza.

Lucros (u.m.)	$\theta 1$	$\theta 2$	$\theta 3$
Investimento A	2	13	10
Investimento B	12	5	8
Investimento C	7	6	9

a) Utilizando os critérios estudados, qual a decisão que se recomenda?

b) Admita que $P(\theta 1)=P(\theta 2)=0.25$. Nesta situação que decisão recomenda?

31 - Admita que lhe propõem participar no jogo seguinte mediante o pagamento de uma inscrição de 80€.

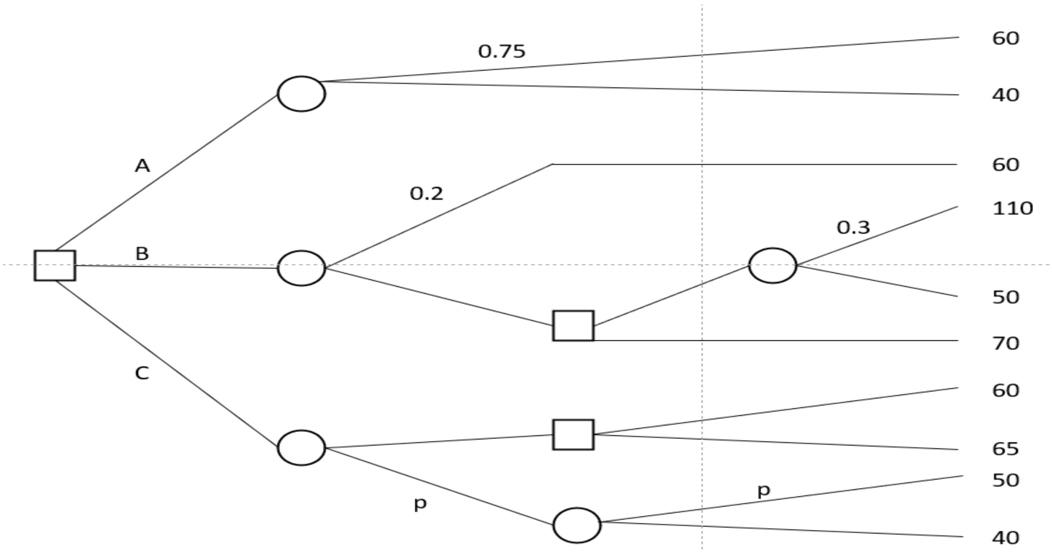
Neste jogo deve começar por escolher responder a uma pergunta de História ou a uma pergunta sobre Desporto.

Caso responda a uma pergunta de História acredita-se que a sua resposta estará correta com uma probabilidade de 60%. Caso responda incorretamente o jogo termina sem direito a prémio. Caso responda corretamente deve decidir entre receber um prémio de 200€ e terminar o jogo ou nada receber e responder a uma pergunta de Geografia. Acredita-se que com 40% de probabilidade consiga responder acertadamente e nesta situação recebe 300€ terminando o jogo em seguida. Caso responda de forma incorreta, recebe um prémio de 50€ e o jogo termina.

Caso responda a uma pergunta de Desporto acredita-se que a sua resposta estará correta com 80% de probabilidade. Caso opte por terminar já o jogo recebe um prémio de 100€. Pode também optar por voltar a jogar e neste caso deve responder a uma pergunta sobre Literatura. Caso acerte na resposta, o que se acredita possa ocorrer com probabilidade de 50%, recebe um prémio de 400€ e o jogo termina mas, caso não acerte na resposta, o jogo termina sem qualquer prémio. Caso a sua resposta seja incorreta à pergunta sobre Desporto o jogo termina sem direito a prémio.

Aceitaria participar neste jogo? Em caso afirmativo optaria na primeira fase por uma pergunta de História ou uma pergunta de Desporto?

32 - Considere a seguinte árvore de decisão onde os valores associados aos nós terminais representam custos em unidades monetárias (u.m.) A constante p representa uma probabilidade. Qual a decisão que recomenda nesta situação?



Valores da função de distribuição Normal reduzida

$$\Phi(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\Phi(z)$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995	0.99995	0.999995
$2[1-\Phi(z)]$	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001	0.0001	0.00001