Revisões de geometria (cont.)

Objetivos

- Introduzir os conceitos de:
  - Dimensão e base
  - Sistemas de coordenadas (espaços vetoriais) e referenciais (espaços afins)
  - Mudanças de base e de referenciais

Independência linear

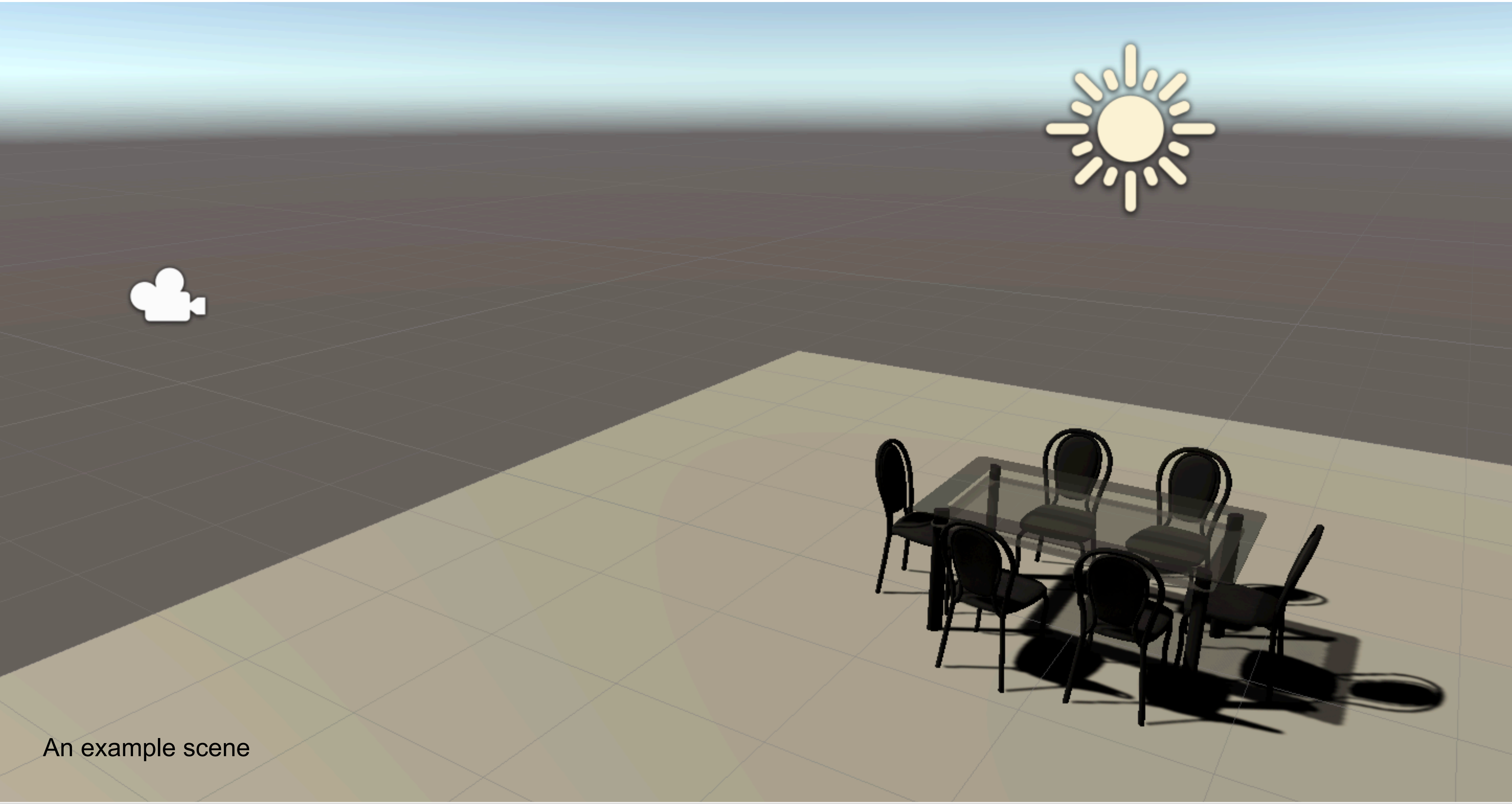
- Um conjunto de vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ é linearmente independente se $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n = 0$, se e só se $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$
- Se um conjunto de vetores é linearmente independente, qualquer dos vetores do conjunto não se consegue expressar como uma combinação linear dos restantes
- Se um conjunto de vetores é linearmente dependente, pelo menos um dos vetores pode ser expresso como uma combinação linear dos restantes.

Dimensão

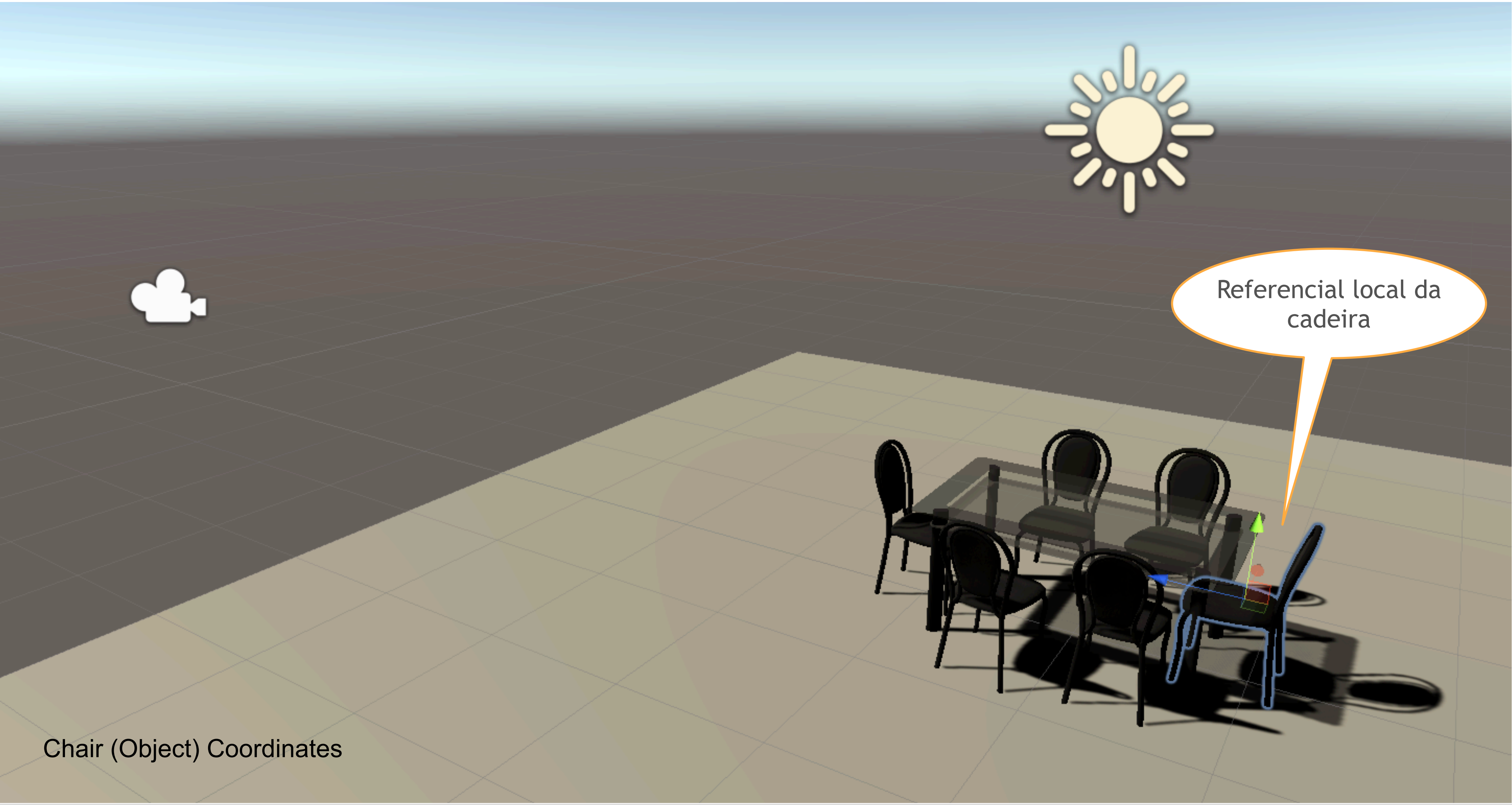
- Num espaço vetorial, o número máximo de vetores linearmente independentes é fixo e é designado de **dimensão** do espaço
- Num espaço *n*-dimensional, qualquer conjunto de *n* vetores linearmente independentes formam uma **base** desse espaço
- Dada uma base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, qualquer vetor $\mathbf{v}$ pode ser escrito na forma $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$, onde o conjunto de valores $\{\alpha_i\}$ é único

Representação

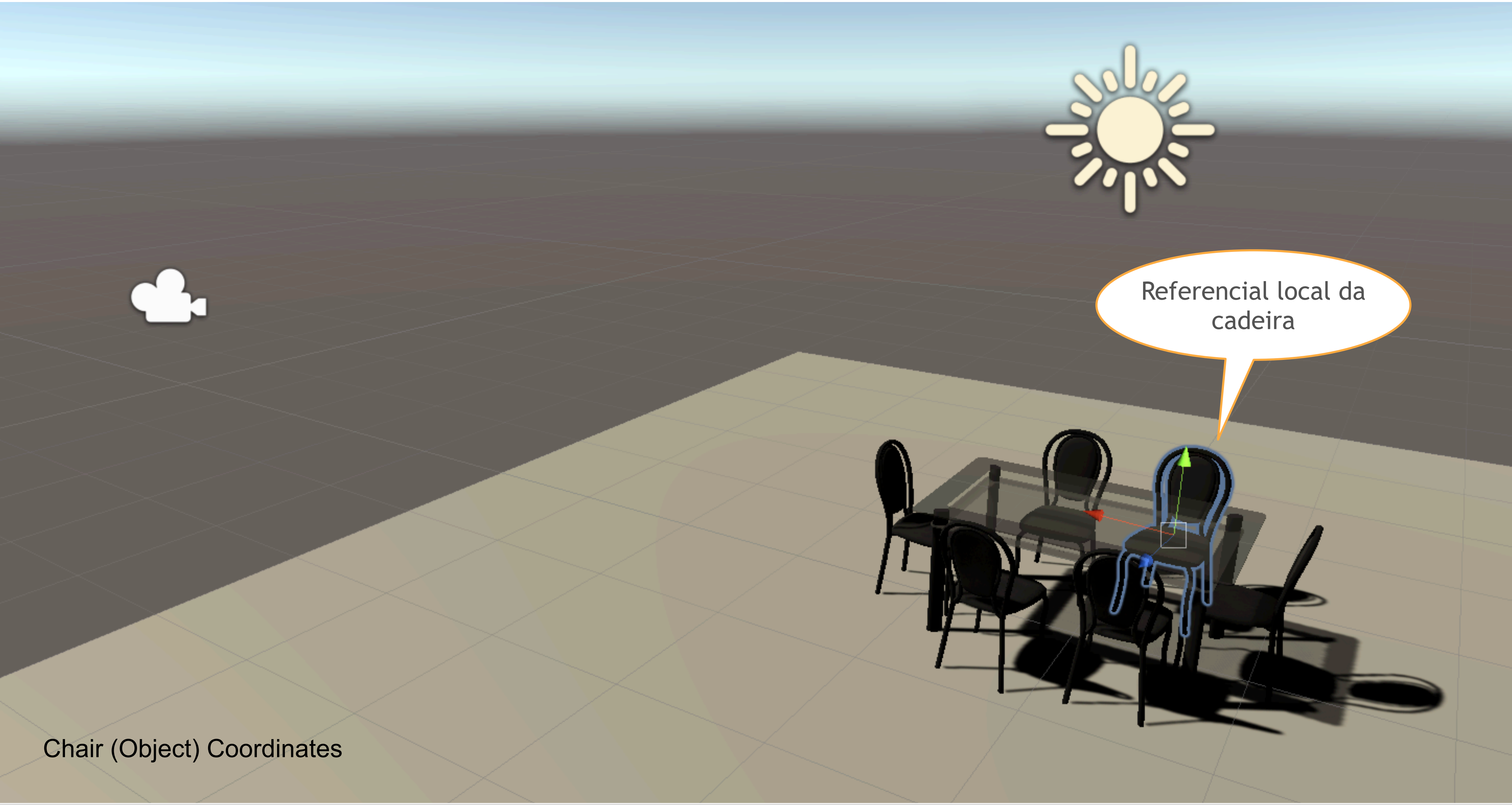
- Para podermos relacionar pontos e objetos no nosso mundo físico necessitamos de referenciais.
- Uma pergunta tão simples como onde fica um determinado ponto fica sem resposta se usarmos apenas bases em vez de referenciais
- Em Computação Gráfica falamos muitas vezes de referenciais distintos:
  - do Modelo ou Objecto
  - do Mundo
  - da Câmara

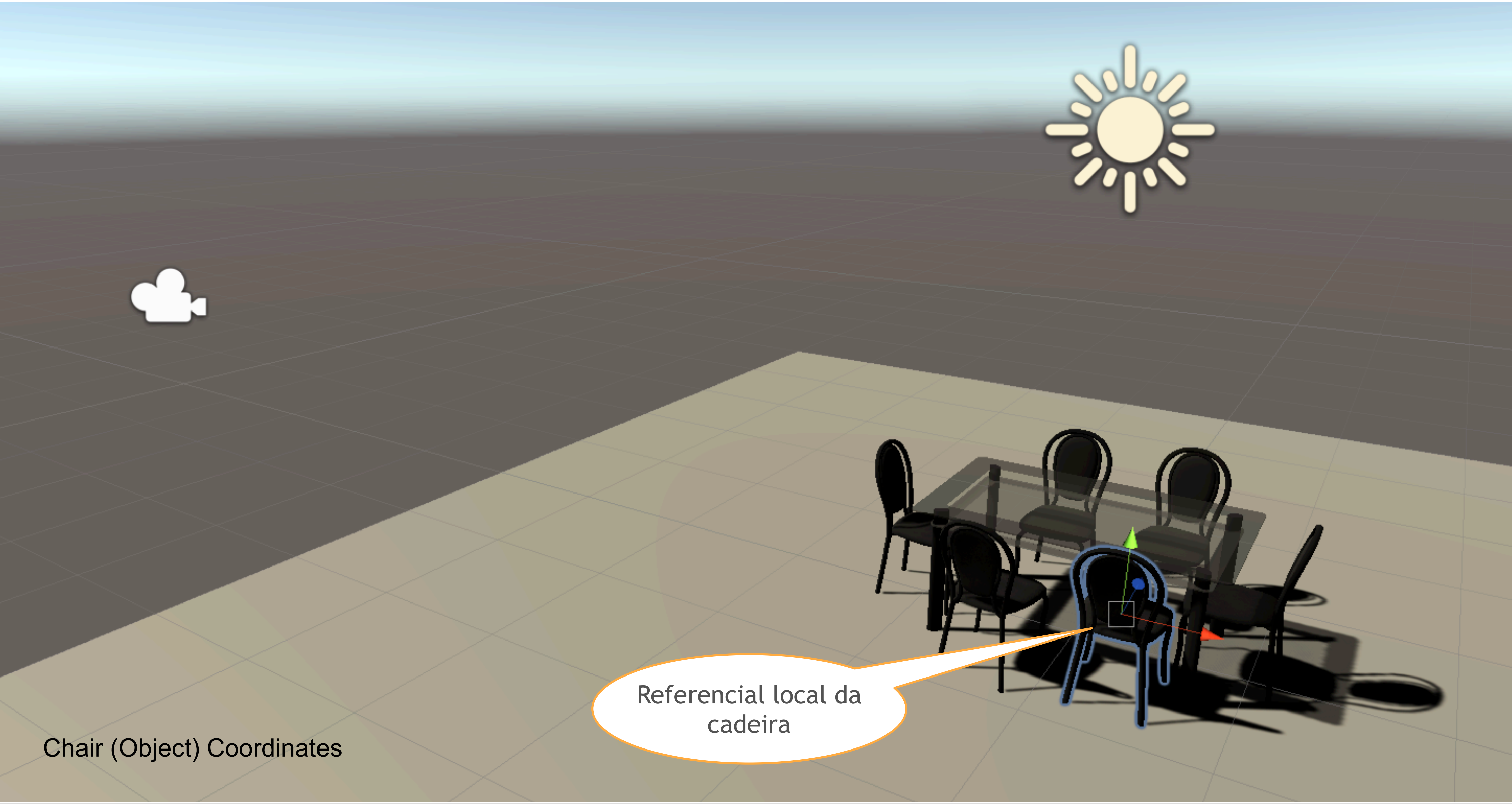


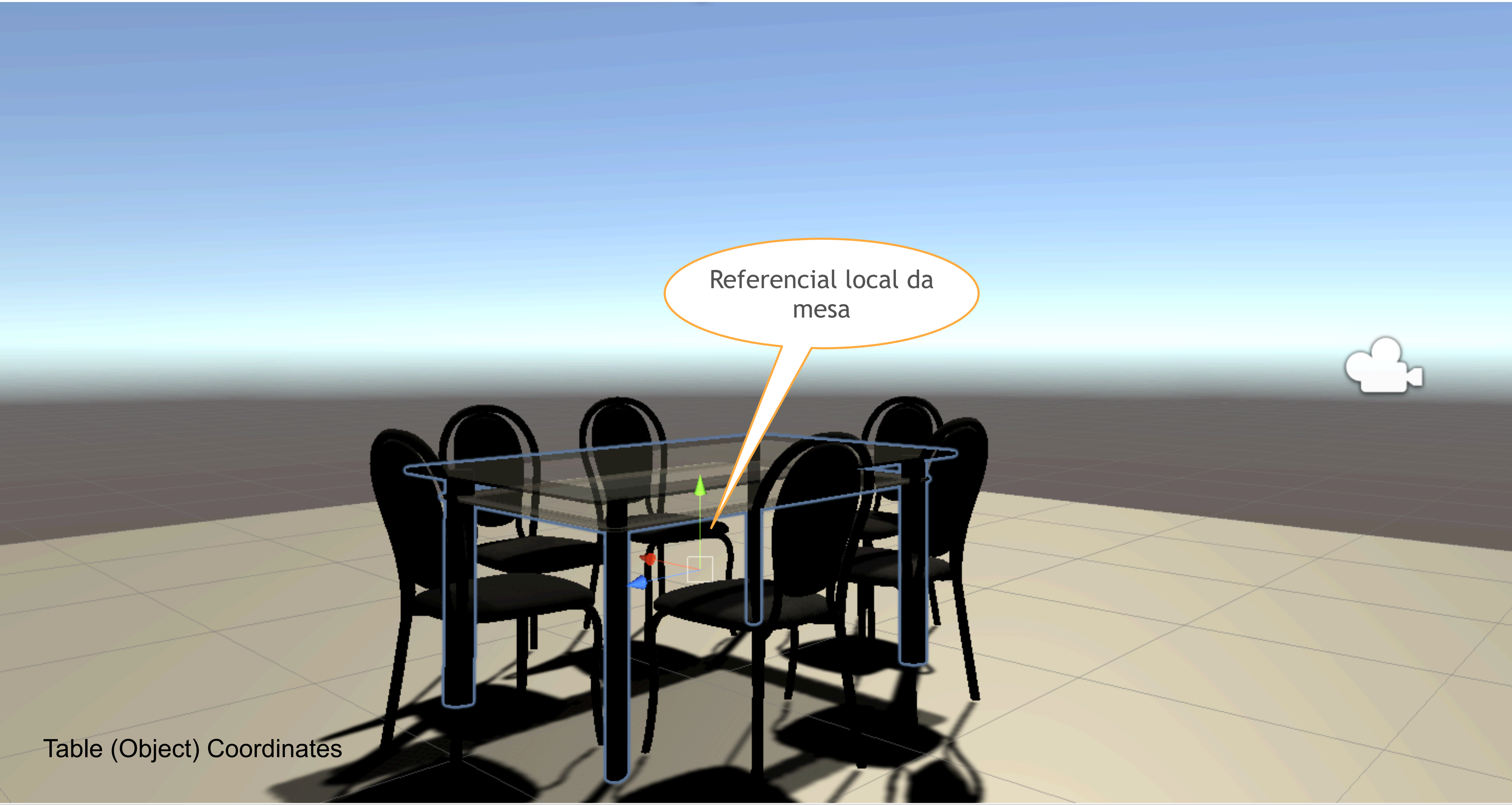
An example scene

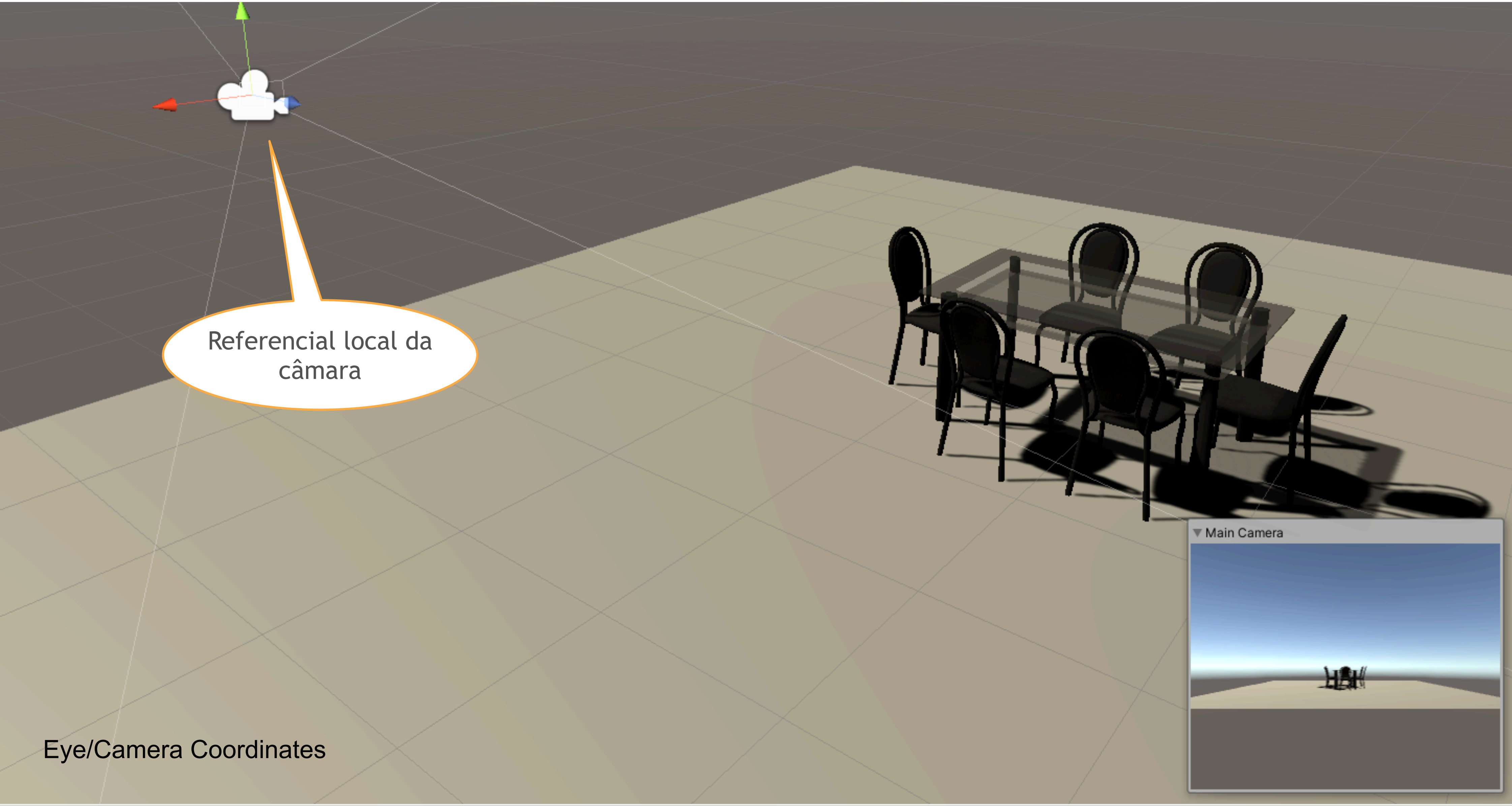


Chair (Object) Coordinates

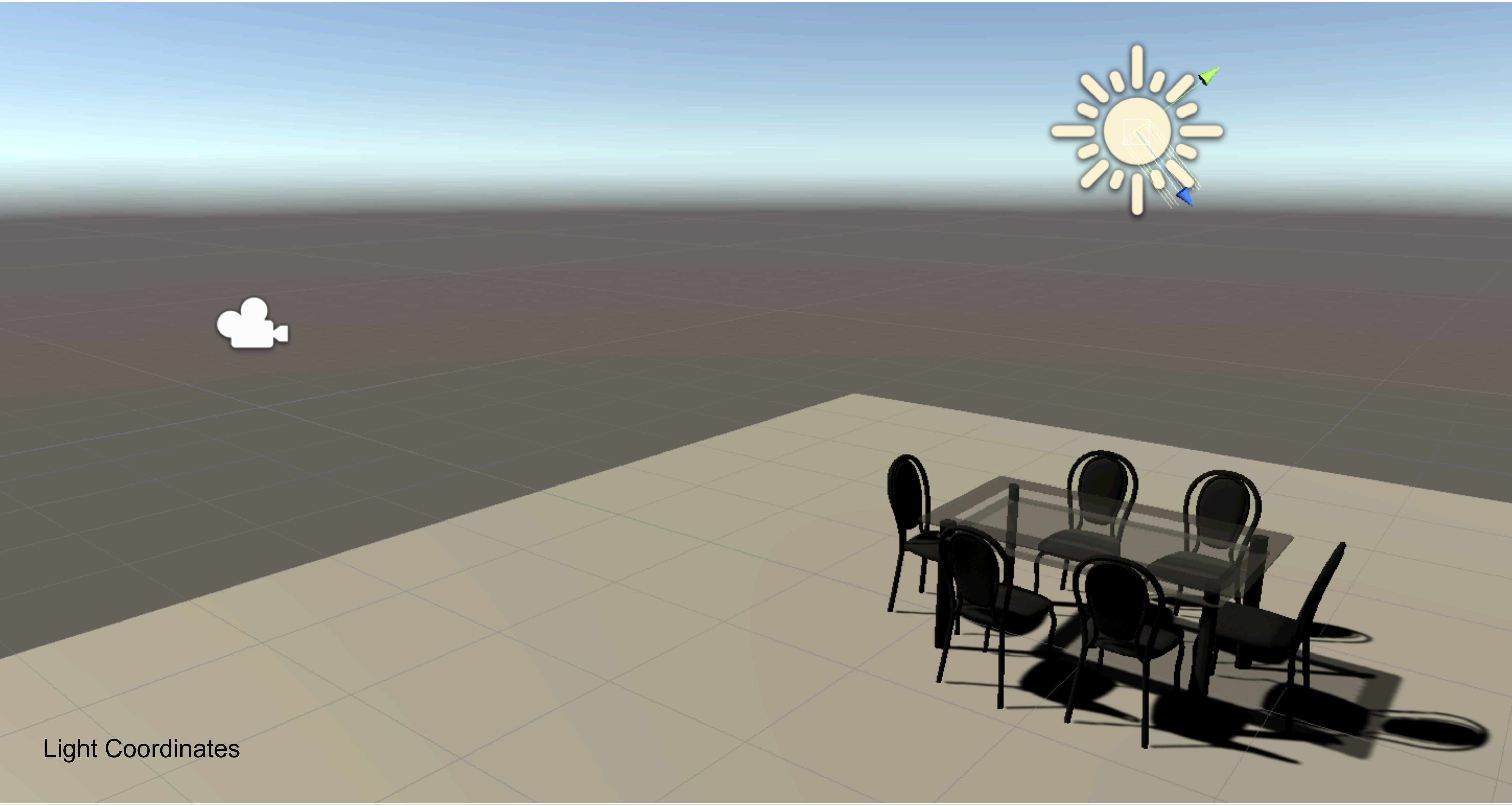

Referencial local da
cadeira
Chair (Object) Coordinates

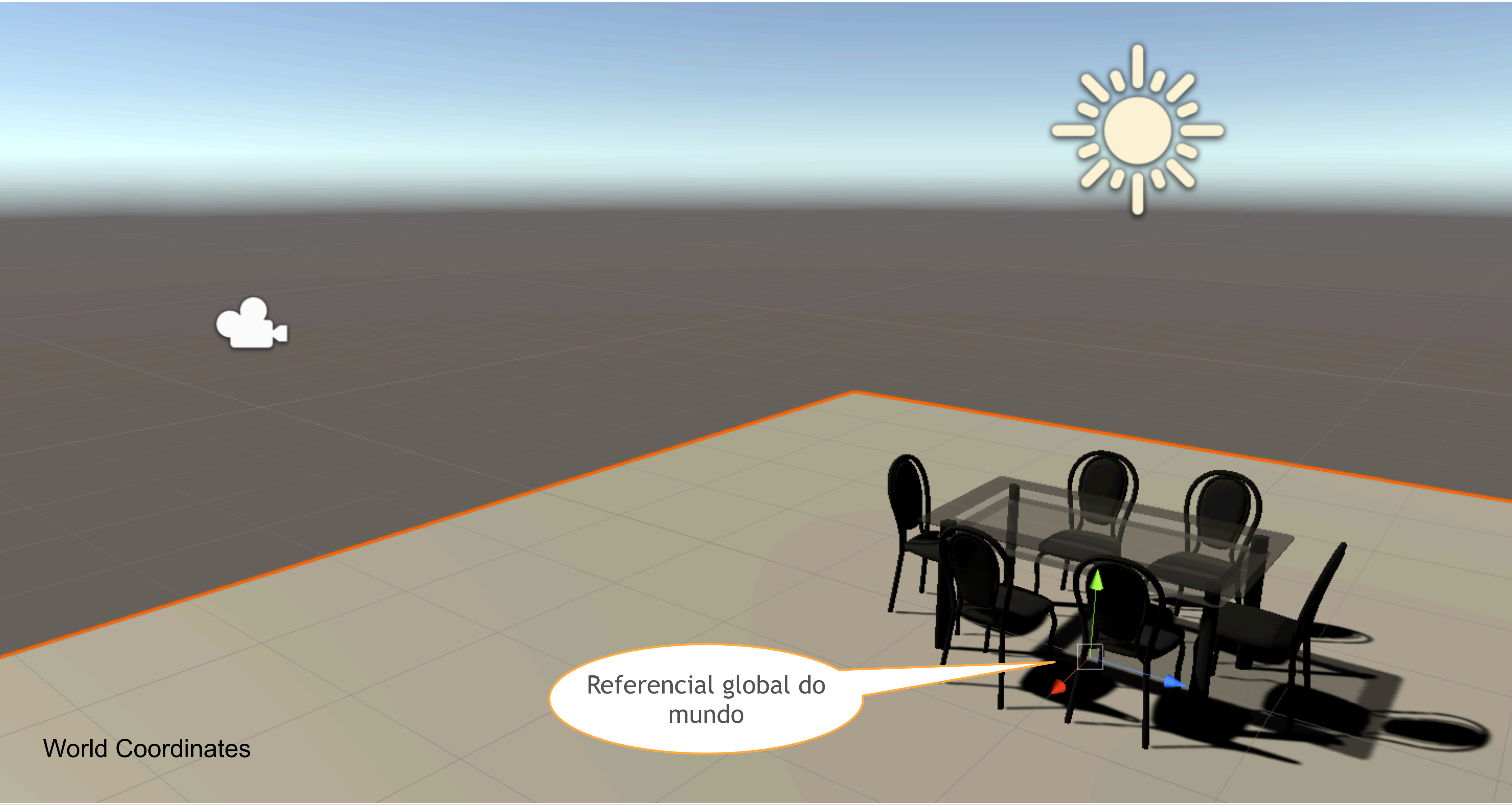

Referencial local da cadeira
Chair (Object) Coordinates


Referencial local da mesa
Table (Object) Coordinates



Eye/Camera Coordinates


Light Coordinates


Referencial global do mundo
World Coordinates

Sistemas de coordenadas

- Dada uma base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$
- Um vetor $\mathbf{v}$ é escrito na forma $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$
- O conjunto de escalares $\mathbf{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ é a representação do vetor $\mathbf{v}$ em relação à base dada
- A representação pode ser escrita com um vetor linha $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$

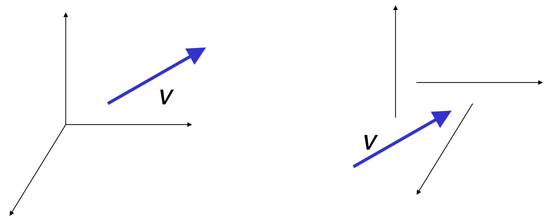
  ou como um vetor coluna $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$
- Iremos adoptar a convenção de usar vetores coluna, ou seja, $\mathbf{a} = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]^T$

Exemplo

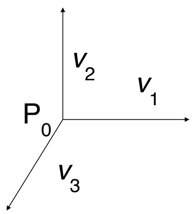
- Seja o vetor $\mathbf{v} = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - 4\mathbf{v}_3$
- A sua representação, em relação à base é $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}^T$
- A representação é dependente da base!
- Em WebGL iremos especificar objetos em relação a uma base específica de cada objecto, mas depois teremos necessidade de passar para uma base comum a toda a cena (ou mundo) e, mais tarde, para uma base associada à câmara (ou ao olho)

Referenciais

- Qual é a opção correta?



- Ambas estão corretas porque os vetores não têm uma localização fixa.
- Uma base é insuficiente para representar pontos, mas se acrescentarmos um ponto - a origem - à base, ficaremos com um **referencial**, passando a trabalhar num espaço afim.



Representação de referenciais

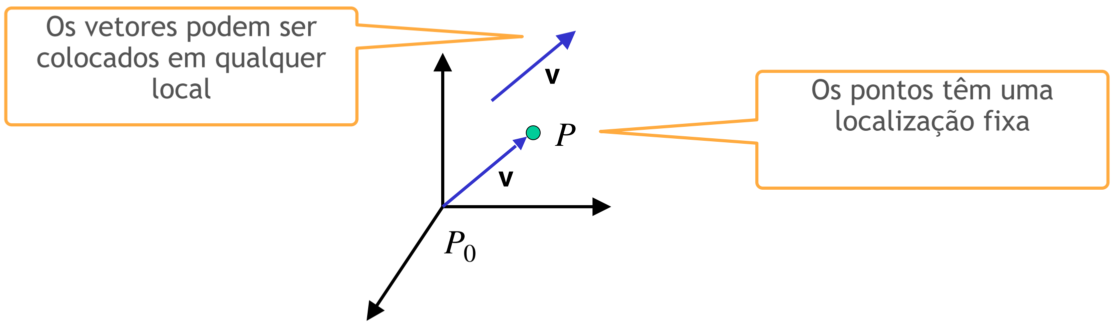
- Um referencial em 3D é determinado pelo tuplo $(P_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$
- Neste referencial:
    - Cada vetor pode ser escrito na forma $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$
    - Cada ponto pode ser escrito na forma $P = P_0 + \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \beta_3 \mathbf{v}_3$

(Não) Confundindo pontos com vetores

- Se considerarmos o ponto $P = P_0 + \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$
- E o vetor $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \alpha_3 \mathbf{v}_3$
- As suas representações são idênticas:

  $\mathbf{p} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^T, \mathbf{v} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^T$

  o que pode criar confusão e não conseguirmos distinguir um ponto de um vetor



Representação única de pontos e de vetores

- Dado um referencial $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, P_0)$, com origem no ponto P_0 e base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, se definirmos as operações:

  $0 \cdot P = \mathbf{0},\ 1 \cdot P = P$ Multiplicação de um escalar por um ponto

  então podemos escrever qualquer vetor $\mathbf{v}$ e ponto P usando uma representação única (distinta) e inconfundível:

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + 0 \cdot P_0 = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & P_0\end{bmatrix}^T$$

$$P = \beta_1\mathbf{v}_1 + \beta_2\mathbf{v}_2 + \beta_3\mathbf{v}_3 + 1 \cdot P_0 = \begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & P_0\end{bmatrix}^T$$

- $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0\end{bmatrix}^T$ e $\mathbf{p} = \begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 1\end{bmatrix}^T$ são as coordenadas homogéneas do vetor $\mathbf{v}$ e do ponto P, respetivamente

Coordenadas homogéneas em computação gráfica

- As coordenadas homogéneas são fundamentais em todos os sistemas gráficos
- Todas as transformações geométricas elementares (rotação, translação e mudança de escala) podem ser implementadas com o produto de matrizes de 4x4, aplicadas a pontos ou vetores representados em coordenadas homogéneas
- O pipeline gráfico implementado no hardware trabalha com representações 4D (coordenadas homogéneas de pontos 3D).
- A representação de pontos em coordenadas homogéneas não é única. Um ponto 3D com coordenadas (x, y, z) tem infinitas representações em coordenadas homogéneas, todas da forma $[x \,.\, w, y \,.\, w, z \,.\, w, w]^T$, com $w \neq 0$.

Mudança de sistemas de coordenadas (base)

- Considerem-se duas representações $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, dum mesmo vetor $\mathbf{v}$, em relação a duas bases diferentes:

$$\mathbf{a} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^T \text{ e } \mathbf{b} = \left[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3\right]^T$$

- Onde:

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]\,[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]^T = \mathbf{a}^T\,[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]^T$$

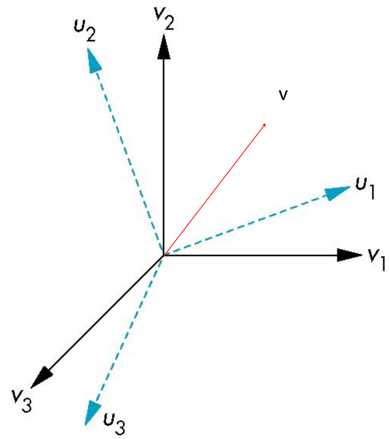
$$\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 + \beta_3\mathbf{u}_3 = \left[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3\right]\,[\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3]^T = \mathbf{b}^T\,[\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3]^T$$

$$\boxed{\mathbf{a}^T\,[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]^T = \mathbf{b}^T\,[\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3]^T}$$

Representação duma base em relação a outra

- Cada um dos vetores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, de uma das bases, pode escrever-se como uma combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ da outra base:

$$\mathbf{u}_1 = \gamma_{11}\mathbf{v}_1 + \gamma_{12}\mathbf{v}_2 + \gamma_{13}\mathbf{v}_3$$
$$\mathbf{u}_2 = \gamma_{21}\mathbf{v}_1 + \gamma_{22}\mathbf{v}_2 + \gamma_{23}\mathbf{v}_3$$
$$\mathbf{u}_3 = \gamma_{31}\mathbf{v}_1 + \gamma_{32}\mathbf{v}_2 + \gamma_{33}\mathbf{v}_3$$



Representação duma base em relação a outra

- Os coeficientes $\{\gamma_{ij}\}$ definem uma matriz $\mathbf{M}$, de 3x3:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

- E podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$$

Mudança de base (sistemas de coordenadas)

- Substituindo

$$[\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3]^T = \mathbf{M}\,[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]^T$$

- na igualdade

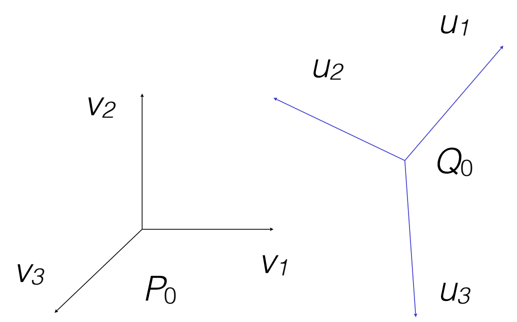
$$\mathbf{a}^T\,[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]^T = \mathbf{b}^T\,[\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3]^T$$

obtém-se:

$$\mathbf{a}^T\,[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]^T = \mathbf{b}^T\mathbf{M}\,[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]^T$$
$$\mathbf{a}^T = \mathbf{b}^T\mathbf{M}$$
$$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{a} = \mathbf{M}^T\mathbf{b} \\ [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3]^T = \mathbf{M}^T\left[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3\right]^T\end{array}}$$

Mudança de referencial

- O mesmo processo pode ser aplicado em coordenadas homogéneas às representações, quer de pontos, quer dos vetores
- Considerandoo dois referenciais:
  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, P_0)$ e $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, Q_0)$



- Qualquer ponto ou vetor pode ser representado em qualquer dos referenciais
- Pode representar-se $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, Q_0)$ em relação a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, P_0)$, por exemplo.

Representação dum referencial em relação a outro

- Estendendo o que foi feito para a mudança de base:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \gamma_{11}\mathbf{v}_1 + \gamma_{12}\mathbf{v}_2 + \gamma_{13}\mathbf{v}_3 \\
\mathbf{u}_2 &= \gamma_{21}\mathbf{v}_1 + \gamma_{22}\mathbf{v}_2 + \gamma_{23}\mathbf{v}_3 \\
\mathbf{u}_3 &= \gamma_{31}\mathbf{v}_1 + \gamma_{32}\mathbf{v}_2 + \gamma_{33}\mathbf{v}_3 \\
Q_0 &= \gamma_{41}\mathbf{v}_1 + \gamma_{42}\mathbf{v}_2 + \gamma_{43}\mathbf{v}_3 + P_0
\end{aligned}
$$

- Introduzimos a matriz $\mathbf{M}$, de 4x4, escrevendo:

$$
\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & 0 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ P_0 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ P_0 \end{bmatrix}
$$

Usando as representações

- Um ponto ou vetor tem uma única representação em cada um dos referenciais:

$$\mathbf{a} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4]^T$$

$$\mathbf{b} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4]^T$$

- Onde $\alpha_4 = \beta_4 = 1$ para os pontos e $\alpha_4 = \beta_4 = 0$ para os vetores, podendo mudar-se a representação entre referenciais usando:

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^T\mathbf{b}$$

- A matriz $\mathbf{M}^T$ é uma matriz de 4x4 que define uma transformação afim (transformação linear seguida duma translação) em coordenadas homogéneas

Transformações afins

- Todas as transformações lineares equivalem a uma mudança de referencial
- Todas as transformações afins preservam as linhas
- Uma transformação afim apenas possui 12 graus de liberdade (porque os 4 elementos mais à direita na matriz da transformação são constantes fixas)
- As transformações afins são um subconjunto de todas as transformações 4x4 lineares possíveis.

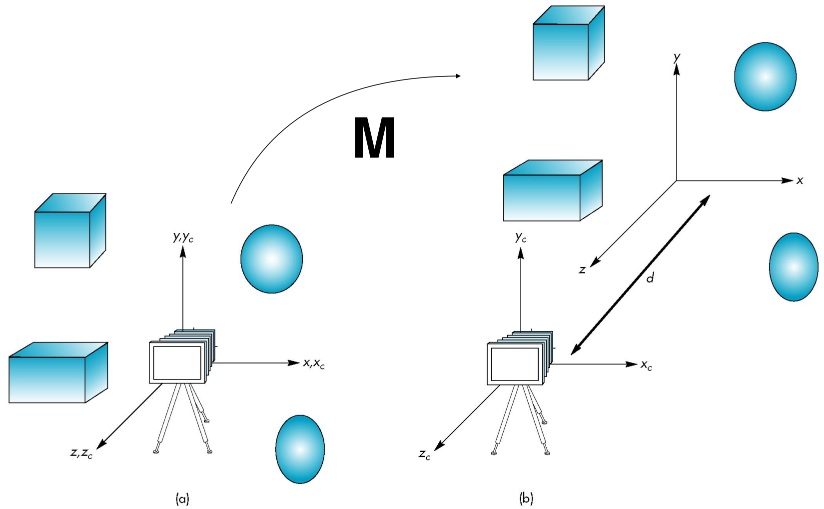
Exemplo de mudança de referencial (Mundo, Câmara e Recorte)

- Quando se usa a representação de pontos e vetores, trabalha-se com tuplos ou arrays de números reais
- Uma mudança de referencial é representada por uma matriz de 4x4
- Em WebGL, o referencial em que se especificam os objetos duma cena é o referencial do mundo, sendo as suas coordenadas designadas por World Coordinates (WC)
- À saída do vertex shader, o sistema de coordenadas é um sistema normalizado (de dimensões pré-definidas) denominado de *clip coordinates*, ou coordenadas de recorte (um cubo de lado 2, centrado na origem)
- Se nenhuma transformação for efetuada pelo *vertex shader*, os referenciais em que se especificam os objetos e as coordenadas de recorte coincidem (estão sobrepostos)
- Numa fase intermédia do processamento, ao *vertex shader* poderá convir que as coordenadas estejam no referencial da câmara ou do olho (Câmera/Eye Coordinates).

Deslocamento da câmara

- Se os vértices dos objetos estiverem em ambos os lados do eixo Z, então a câmara terá que ser deslocada em z para se conseguirem ver os objetos na totalidade…

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Se estamos a deslocar a câmara positivamente no eixo Z, porquê o valor -d na matriz M?