Ficha 2 - Método de indução.

(Indicações de resolução e correcções)

Exercício 1

Utilizando o princípio de indução, demonstre as seguintes igualdades para todo o $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \; = \; \frac{n}{n+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! \; = \; (n+1)! - 1$

(d) $(\cos(x) + i\sin(x))^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$

Indicações:

(a) Verifique a base de indução. Para demonstrar que a propriedade é indutiva temos que garantir que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \textit{(hipótese)} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \quad \textit{(tese)}$$

Observe que

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Na última igualdade utilizámos a hipótese de indução. Conclua a demonstração simplificando a expressão.

(d) Na demonstração da indutividade da proposição, terá que provar, usando a hipótese de indução, que

$$(\cos(x) + i\sin(x))^{n+1} = \cos((n+1)x) + i\sin((n+1)x)$$

Tenha em conta que, por hipótese

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n \cdot (\cos(x) + i\sin(x)) = (\cos(nx) + i\sin(nx)) \cdot (\cos(x) + i\sin(x))$$

Desenvolvendo o segundo membro, temos

$$(\cos(x)+i\sin(x))^{n+1} = (\cos(nx)\cos(x)-\sin(nx)\sin(x))+i(\cos(nx)\sin(x)+\sin(nx)\cos(x))$$

Recorde agora fórmulas importantes para as medidas trigonométricas da soma de dois ângulos e conclua a demonstração.

Exercício 2

Utilizando o princípio de indução, mostre que, para todo o $n \in \mathbb{N}$:

(a) $9^n - 3$ é múltiplo de 6;

(b) $6^n - 1$ é múltiplo de 5;

(c) $3n^2 + 3n$ é múltiplo de 6.

Indicações:

(a) Mostrar que um número é múltiplo de 6 consiste em mostrar que se pode escrevê-lo na forma $6m$, em que m é um natural. Verifique a base de indução. Para provar a indutividade da propriedade, repare que, se assumirmos que $9^n - 3 = 6m$, então $9^n = 6m + 3$ pelo

$$9^{n+1} - 3 = 9 \cdot 9^n - 3 = 9 \cdot (6m + 3) - 3 = 9 \cdot 6m + 24 = 6(9m + 4)$$

sendo o último membro um múltiplo de 6. Conclua a demonstração.

Exercício 3

Utilizando o princípio de indução mostre que, se $I_1, ..., I_n$ forem intervalos abertos tais que

$$I_1 \cap \cdots \cap I_n \neq \emptyset$$

então $A = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ é um intervalo aberto.

Exercício 4

Demonstre as seguintes desigualdades para todo o $n \in \mathbb{N}$:

(a) $(1 + k)^n \geq 1 + nk \qquad$ para $k > -1$ fixado.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \; < \; (n + 1)^3$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k + 1} \; < \; 1 - \frac{1}{2^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \; \leq \; 2 - \frac{1}{n}$

Indicações:

(a) A desigualdade, no caso $n = 1$, é trivial pois trata-se de uma igualdade. Admitindo a desigualdade verdadeira para n, escrevemos

$$(1+k)^{n+1} = (1+k)^n \cdot (1+k) \geq (1+nk) \cdot (1+k)$$

Repare que, na dedução da última desigualdade, é decisiva a condição $k > -1$ pois garante que $(1+k) > 0$. Finalmente, observe que

$$(1+nk) \cdot (1+k) = 1 + (n+1)k + nk^2 > 1 + (n+1)k$$

pois $n \in \mathbb{N}$ e $k^2 \geq 0$.

(b) Para mostrar que a propriedade é indutiva, escreva, utilizando a hipótese de indução

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 < (n+1)^3 + (n+1)^2$$

A verificação que

$$(n+1)^3 + (n+1)^2 < (n+2)^3$$

é um exercício simples:podemos desenvolver a expressão ou ter em conta que $(n+2)^3 = ((n+1)+1)^3$.

(d) Para $n = 1$ verifica-se uma igualdade entre os dois membros. Mostremos a indutividade da desigualdade. Temos

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Utilizando a hipótese de indução, obtemos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)}^2 \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

A desigualdade

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

equivale a

$$\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

sendo por isso verdadeira. Logo a propriedade é verdadeira para $n = 1$ e é indutiva, sendo pois verdadeira para todo o natural n.

Exercício 5

Considere a sucessão definida por recorrência:

$$u_1 = -1\,, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - 2u_n}\,, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Mostre que $u_n = \frac{1}{1-2n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Indicações:

Para mostrar que a propriedade é indutiva, bastará escrever, usando a hipótese, que

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 - 2u_n} = \frac{(1-2n)^{-1}}{1 - 2(1-2n)^{-1}}$$

e confirmar que, após simplificação do último membro, obtemos $u_{n+1} = \frac{1}{1-2(n+1)}$.

Problema 6

Considere a sucessão

$$e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Pretende-se demonstrar que (e_n) é uma sucessão limitada e monótona.

(a) Começe por verificar que, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e $k = 0, 1, ..., n$, tem-se

$$C_k^n \cdot \frac{1}{n^k} \le \frac{1}{k!}$$

(recorde: $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$)

(b) Mostre por indução que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \ \le \ 3 - \frac{1}{n}$$

(c) Utilizando a fórmula do binómio de Newton, deduza $e_n \le 3$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(d) Utilizando o Exercício 4-(a) mostre que

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} > 1$$

e conclua que a sucessão (e_n) é crescente.[1]

Indicações:

(a) Recorde que $C_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ pelo que

$$C_k^n \cdot \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{n^k}$$

[1] Posteriormente, no estudo das sucessões reais, verificaremos que uma sucessão monótona e limitada tende necessariamente para um número real que é designado por limite da sucessão. Neste caso, o limite da sucessão (e_n) considerada é o célebre número de Neper.

e justifique que a última parcela do segundo membro é inferior a 1 por tratar-se de um produto com k parcelas positivas inferiores a 1.

(d) Comece por verificar que a desigualdade que se pretende demonstrar pode ser escrita

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n > 1$$

ou

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > 1$$

Tendo em conta o exercício 4-(a), pode-se afirmar

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3}$$

e confirme que o último membro é igual $1+(n+1)^{-3}$.