

# Análise Matemática I - 2021.1

Felipe B. Pinto 61387 - MIEQB

18 de junho de 2021

## Conteúdo

<b>I Background</b>	<b>3</b>	2.2 Exemplo 2 . . . . .	7
<b>II Topologia Elementar na Reta</b>		<b>IV Sucessões</b>	<b>8</b>
$\mathbb{R}$	<b>4</b>	1 Sucessão Monótona . . . . .	8
1 Vizinhança $V_\delta$ . . . . .	4	1.1 Decrescente . . . . .	8
2 Minorante . . . . .	4	1.2 Crescente . . . . .	8
3 Majorante . . . . .	4	2 Sucessão Limitada . . . . .	8
4 Infimo Inf . . . . .	4	3 Sucessão Convergente . . . . .	8
5 Supremo Sup . . . . .	4	3.1 Exemplo . . . . .	8
6 Mínimo Min . . . . .	4	4 Álgebra de Limites . . . . .	9
7 Máximo Max . . . . .	4	4.1 . . . . .	9
8 Interior Int . . . . .	4	4.2 . . . . .	9
9 Exterior Ext . . . . .	5	4.3 . . . . .	9
10 Ponto de Acumulação . . . . .	5	4.4 . . . . .	9
11 Fronteira Fr . . . . .	5	5 Lema geral das sucessões enqua-	
12 Limitado . . . . .	5	dradas . . . . .	9
13 Aberto . . . . .	5	5.1 Exemplo: $u_{(n)} = \sin(n)/n$ . . . . .	9
14 Fechado . . . . .	5	6 Subsucessões . . . . .	9
15 Feixe $\overline{X}$ . . . . .	5	6.1 Subsucessão Convergente . . . . .	9
<b>III Indução Matemática</b>	<b>6</b>	7 Sucessão de Cauchy . . . . .	9
1 Indução por Igualdade . . . . .	6	<b>V Limites</b>	<b>10</b>
1.1 Exemplo . . . . .	6	1 Lema geral das funções enquadadas	10
2 Indução por Desigualdade . . . . .	7	1.1 Exemplo: $u_{(n)} = \sin(n)/n$ . . . . .	10
2.1 Exemplo 1 . . . . .	7	<b>VI Continuidade em <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>11</b>

# Programa

## 1. Topologia elementar da recta real

### 1.1. Pontos:

- Vizinhança de um ponto
- Ponto Interior e Exterior
- Ponto Isolado
- Ponto Aderente
- Ponto de Acumulação

### 1.2. Conjuntos:

- Aberto e Fechado
- Limitado
- Compacto

## 2. Indução Matemática e Sucessões

### 2.1. Princípio de Indução Matemática

### 2.2.

- Noção de Convergência
- Limite de uma Sucessão
- Álgebra de Limites
- Subsuscessões
- Sublimites
- Teoremas Fundamentais
- Sucessões de Cauchy

## 3. Limites e Continuidade em $\mathbb{R}$

### 3.1. Limite de uma Função:

- Segundo Cauchy
- Segundo Heine
- Álgebra de Limites

### 3.2.

- Continuidade de uma função num ponto
- Prolongamento por Continuidade
- Teorema de Bolzano
- Teorema de Weierstrass
- Continuidade da função composta
- Continuidade da função inversa para a composição de funções

- Funções Inversas Clássicas

## 4. Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}$

### 4.1.

- Definição de diferenciabilidade num ponto
- Interpretação geométrica
- Derivada de uma função
- Composta da Função inversa
- Derivada da Função inversa
- Teorema de Rolle
- Teorema de Lagrange
- Derivada e Monotonia
- Teorema de Darboux
- Teorema de Cauchy
- Regra de L'Hospital-Cauchy

### 4.2. Teorema de Taylor e Aplicações

## 5. Cálculo Integral em $\mathbb{R}$

### 5.1. Primitivas:

- por Partes
- por Substituição
- de Funções Racionais
- de Funções Irracionais
- de Funções Transcendentes

### 5.2.

- Integral de Riemann
- Teorema do valor médio
- Teorema Fundamental do Cálculo Integral
- Regra de Barrow
- Integração por partes
- Integração por substituição
- Aplicação ao cálculo de áreas

### 5.3. Integrais Impróprios



## II | Topologia Elementar na Reta $\mathbb{R}$

### 1 Vizinhaça $V_\delta$

$$V_\delta(x) = (x - \delta, x + \delta) \quad \delta \in \mathbb{R}$$

Pontos:

### 2 Minorante

$$\begin{aligned} m \in \text{Minorante}(X) &\iff \\ &\iff m \in \mathbb{R} \wedge x \geq m \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

### 4 Infimo Inf

(i) Standalone

$$\begin{aligned} \text{Inf}(X) = i &\iff \\ &\iff i \in \mathbb{R} \wedge x \geq i \quad \forall x \in X \wedge \\ &\wedge \nexists y \in \mathbb{R} \setminus X : i < y < x \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

(ii) Usando Vizinhaça

$$\begin{aligned} \text{Inf}(X) = i &\iff \\ &\iff i \in \mathbb{R} \wedge x \geq i \quad \forall x \in X \wedge V_\delta(i) \cap X \neq \emptyset \end{aligned}$$

### 6 Minimo Min

(i) Standalone

$$\begin{aligned} \text{Min}(X) = m &\iff \\ &\iff m \in X \wedge m \leq y \quad \forall y \in m \end{aligned}$$

(ii) Usando Minorante

$$\begin{aligned} \text{Min}(X) = m &\iff \\ &\iff m \in X \wedge m \in \text{Minorante}(X) \end{aligned}$$

### 8 Interior Int

### 3 Majorante

$$\begin{aligned} m \in \text{Majorante}(X) &\iff \\ &\iff m \in \mathbb{R} \wedge x \leq m \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

### 5 Supremo Sup

(i) Standalone

$$\begin{aligned} \text{Sup}(X) = s &\iff \\ &\iff s \in \mathbb{R} \wedge x \leq s \quad \forall x \in X \wedge \\ &\wedge \nexists y \in \mathbb{R} \setminus X : x < y < s \end{aligned}$$

(ii) Usando Vizinhaça

$$\begin{aligned} \text{Sup}(X) = s &\iff \\ &\iff s \in \mathbb{R} \wedge x \leq s \quad \forall x \in X \wedge V_\delta(s) \cap X \neq \emptyset \end{aligned}$$

### 7 Maximo Max

(i) Standalone

$$\begin{aligned} \text{Max}(X) = m &\iff \\ &\iff m \in X \wedge m \geq y \quad \forall y \in m \end{aligned}$$

(ii) Usando Majorante

$$\begin{aligned} \text{Max}(X) = m &\iff \\ &\iff m \in X \wedge m \in \text{Majorante}(X) \end{aligned}$$

(i) Standalone

$$\begin{aligned} x \in \text{Int}(X) &\iff \\ &\iff \exists \delta > 0 : (x - \delta, x + \delta) \subseteq X \end{aligned}$$

**(ii) Usando Vizinhaça**

$$\begin{aligned} x \in \text{Int}(X) &\iff \\ &\iff V_\delta(x) \subseteq X \end{aligned}$$

## 9 Exterior Ext

## 10 Ponto de Acumulaçaõ

$$\begin{aligned} x \text{ é um ponto de acumulaçaõ de } X &\iff \\ &\iff V_\delta(x) \cap (X \setminus \{x\}) \neq \emptyset \end{aligned}$$

## 11 Fronteira Fr

$$\begin{aligned} f \in \text{Fr}(X) &\iff \\ &\iff V_\delta(f) \cap X \neq \emptyset \wedge V_\delta(f) \cap \mathbb{R} \setminus X \neq \emptyset \end{aligned}$$

## Conjuntos:

## 12 Limitado

$$\begin{aligned} X \text{ é um conjunto limitado} &\iff \\ &\iff \{m_1 \leq x \leq m_2 \mid \forall x \in X : m_1 \in \text{Minorante}(X), m_2 \in \text{Majorante}(X)\} \end{aligned}$$

## 13 Aberto

$$\begin{aligned} X \text{ é um conjunto aberto} &\iff \\ &\iff X = \text{Int}(X) \end{aligned}$$

## 15 Feixe $\overline{X}$

$$\overline{X} = \text{Int}(X) \cup \text{Fr}(X)$$

**(i) Standalone**

$$\begin{aligned} x \in \text{Ext}(X) &\iff \\ &\iff \exists \delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : (x - \delta, x + \delta) \cap X = \emptyset \end{aligned}$$

**(ii) Usando Vizinhaça**

$$\begin{aligned} x \in \text{Ext}(X) &\iff \\ &\iff V_\delta(x) \cap X = \emptyset \end{aligned}$$

## 14 Fechado

$$\begin{aligned} X \text{ é um conjunto fechado} &\iff \\ &\iff X = \text{Int}(X) \cup \text{Fr}(X) \end{aligned}$$

# III | Indução Matemática

## 1 Indução por Igualdade

- Prove que é valido para algum  $n$
- Prove que é valido para  $n + 1 \quad \forall n : \text{seja valido para n}$

Seja  $V = \{P_{(n)} \quad \forall n \in \text{Dominio}\}$

$P_{(x)} \in V; P_{(x+1)} \in V$

### 1.1 Exemplo

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

(i)  $n = 0$

$$\sum_{i=0}^0 \frac{1}{2^i} = 1 = 2 - \frac{1}{2^0} = 2 - 1 = 1$$

(ii)  $n = m + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m+1} \frac{1}{2^i} &= \sum_{i=0}^m \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{m+1}} = \\ &= 2 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} = 2 - \frac{1}{2^{m+1}} \end{aligned}$$

## 2 Indução por Desigualdade

- Prove que é valido para algum  $n$
- Prove que é valido para  $n + 1 \quad \forall n : \text{seja valido para } n$

### 2.1 Exemplo 1

$$n \leq 2^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(i) \quad n = 1$$

$$1 \leq 2^{1-1} = 1$$

$$(ii) \quad n = m + 1$$

$$\begin{aligned} m + 1 &\leq 2^{m-1} + 1 = \frac{2^m + 2}{2} \leq 2^{m+1-1} = 2^m \implies \\ \implies 2 &\leq 2^{m+1} - 2^m = 2^m(2 - 1) = 2^m \end{aligned}$$

### 2.2 Exemplo 2

$$n^2 \leq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 4$$

$$(i) \quad n = 4$$

$$4^2 \leq 2^4 = 4^2$$

$$(ii) \quad n = m + 1$$

$$\begin{aligned} (m + 1)^2 &= m^2 + 2m + 1 \leq \\ &\leq 2^m + 2m + 1 \leq 2 * 2^m = 2^{m+1} \implies \\ &\implies 2m + 1 \leq 2^m; \\ \begin{cases} m = 4 \implies 2 * 4 + 1 = 9 \leq 2^4 = 16 \\ m = n + 1 \implies 2 * (n + 1) + 1 = 2n + 1 + 2 \leq \\ \leq 2^n + 2 \leq 2 * 2^n = 2^{n+1} \implies 2 \leq 2^n \end{cases} \end{aligned}$$

## IV | Sucessões

$$u_{(n)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

### 1 Sucessão Monótona

#### 1.1 Decrescente

$$u_{(n)} \geq u_{(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

#### 1.2 Crescente

$$u_{(n)} \leq u_{(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### 2 Sucessão Limitada

$$u_{(n)} \text{ é limitada} \iff$$

$$\iff m_1 \leq u_{(n)} \leq m_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### 3 Sucessão Convergente

$$u_{(n)} \text{ converge para } l \in \mathbb{R} \iff$$

$$\iff \exists p \in \mathbb{N} : u_{(n)} \in V_\delta(l) \quad \forall n > p$$

**Nota:**

$$u_{(n)} \in V_\delta(l) \iff |u_{(n)} - l| < \delta \iff$$

$$\iff l - \delta < u_{(n)} < l + \delta$$

#### 3.1 Exemplo

$$u_{(n)} = 1/\sqrt{2n-1};$$

$$u_{(n)} > 0; \quad \delta = 1/10$$

$$\iff 0 < \frac{1}{\sqrt{2n-1}} < \frac{1}{10} \iff$$

$$\iff 0 < \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{100}; \quad 2n-1 > 100 \implies$$

$$\implies [101/2] < n$$



## 4 Algebra de Limites

### 4.1

$$\begin{aligned} u_{(n)} \text{ é convergente} &\iff \\ &\iff u_{(n)} \in V_\epsilon(l) \quad \forall \epsilon > 0 \iff \\ &\iff l - \epsilon < u_{(n)} < l + \epsilon \iff \\ &\iff \exists \{m_1, m_2\} \subset \mathbb{R} : m_1 < u_{(n)} < m_2 \\ &\quad \forall n \in \mathbb{N} \iff \\ &\iff u_{(n)} \text{ é limitada} \end{aligned}$$

### 4.2

$$\begin{aligned} u_{(n)} \text{ é monotona e limitada} &\iff \\ &\iff (u_{(n)} < u_{(n+1)} \vee u_{(n)} > u_{(n+1)}) \wedge \\ &\wedge \exists \{m_1, m_2\} \subset \mathbb{R} : m_1 < u_{(n)} < m_2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \\ &\implies \exists \text{Sup}(u_{(n)}) \in \mathbb{R} \setminus u_{(n)} \iff \\ &\iff u_{(n)} \text{ é convergente} \end{aligned}$$

## 5 Lema geral das sucessões en- quadradas

$$\begin{aligned} &\{u_{(n)}, v_{(n)}, w_{(n)}\} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \wedge \\ &\wedge v_{(n)} \leq u_{(n)} \leq w_{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \wedge \\ &\wedge \exists l \in \mathbb{R} : \{v_{(n)}, w_{(n)}\} \xrightarrow{\text{converge}} l \implies \\ &\implies u_{(n)} \xrightarrow{\text{converge}} l \end{aligned}$$

## 6 Subsuações

### 6.1 Subsuação Convergente

## 7 Sucessão de Cauchy

### 4.3

$$\begin{aligned} u_{(n)} \text{ e } v_{(n)} \text{ são convergentes} &\wedge \\ &\wedge u_{(n)} \leq v_{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \\ &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_{(n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_{(n)} \end{aligned}$$

### 4.4

$$\begin{aligned} u_{(n)} \text{ é limitada} \wedge v_{(n)} \rightarrow 0 &\implies \\ &\implies 0 \leq |u_{(n)} * v_{(n)}| = |u_{(n)}| * |v_{(n)}| \leq \\ &\leq M * 0 = 0 \quad \forall M \in \text{Majorante}(u_{(n)}) \implies \\ &\implies u_{(n)} * v_{(n)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

### 5.1 Exemplo: $u_{(n)} = \sin(n)/n$

$$\begin{aligned} \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}; \left\{ \frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right\} \rightarrow 0 &\implies \\ &\implies \frac{\sin(n)}{n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

# V | Limites

## 1 Lema geral das funções enquadradas

### 1.1 Exemplo: $u_{(n)} = \sin(n)/n$

$$\begin{aligned} \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}; \quad \left\{ \frac{-1}{n}, \frac{1}{n} \right\} \rightarrow 0 &\implies \\ \implies \frac{\sin(n)}{n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

