ANÁLISE MATEMÁTICA III C

1ªsemana de aulas

NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY

Cláudio Fernandes

caf@fct.unl.pt

Slides para acompanhamento das aulas TP1 e TP4

O material completo do Prof. João de Deus Marques encontra-se no CLIP, na página da UC

Equações Diferenciais

EDO
(Equações diferenciais ordinárias)

EDP
(Equações diferenciais parciais)

Testes

Setembro 2024

S	T	Q	Q	S	S	D
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30						

Outubro

S	T	Q	Q	S	S	D
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31			

Novembro

S	T	Q	Q	S	S	D
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	FCT	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	

Dezembro

S	T	Q	Q	S	S	D
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Janeiro 2025

S	T	Q	Q	S	S	D
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Fevereiro

S	T	Q	Q	S	S	D
					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28		

$NF=(T1+T2)/2$ com $T2 \geq 7,5$

1º Teste: ????????

2º Teste: ????????

$NF<9,5$ → Exame Recurso

$NF>=17,5$ → Defesa de Nota

Introdução

Uma **equação diferencial ordinária de primeira ordem** é uma equação que estabelece uma relação entre uma variável independente, uma função y dessa variável e a sua derivada y'. Designando por x a variável independente, é uma equação da forma

$$F\left(x, y(x), y'(x)\right) = 0, \tag{0.1}$$

onde F é uma função definida num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^3$.
Dado um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, diz-se que uma função $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em I é uma solução da equação diferencial (0.1) se:

1. $(x, \phi(x), \phi'(x)) \in D, \quad \forall x \in I$
2. $F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$

De uma forma geral, chama-se **ordem de uma equação diferencial** à ordem da derivada mais elevada presente na referida equação.

Exemplo

A equação diferencial

$$y' - \frac{1}{x}y = xe^x$$

é de primeira ordem e as funções

$$y(x) = cx + xe^x, \quad c \in \mathbb{R}$$

são soluções em $]0, \infty[$ *desta equação.*

Exemplo

A equação diferencial

$$y'' + 4y = 0$$

é de segunda ordem e as funções

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

são soluções em $\mathbb{R}$ *desta equação .* $\square$

Recordando....

Regras de Derivação

- Derivada da Soma

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

- Derivada do Produto

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

- Derivada do Quociente

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

$f(x)$	$f'(x)$
k'	0
x'	1
$(u(x)^{\alpha})'$	$\alpha(u(x))^{\alpha-1}u'(x)$
$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)'$	$\dfrac{u'(x)}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}$
$(\ln\lvert u(x)\rvert)'$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$(e^{u(x)})'$	$e^{u(x)}\,u'(x)$
$(a^{u(x)})'\ (a>0)$	$a^{u(x)}\,u'(x)\ln(a)$
$(\sin(u(x)))'$	$\cos(u(x))\,u'(x)$

$f(x)$	$f'(x)$
$(\cos(u(x)))'$	$-\sin(u(x))\,u'(x)$
$(\tan(u(x)))'$	$\dfrac{u'(x)}{\cos^2(u(x))}$
$(\mathrm{cotan}(u(x)))'$	$-\dfrac{u'(x)}{\sin^2(u(x))}$
$(\arcsin(u(x)))'$	$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$
$(\arccos(u(x)))'$	$-\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$
$(\arctan(u(x)))'$	$\dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$
$(\mathrm{arccotan}(u(x)))'$	$-\dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$

Recordando....

Regras de Primitivação

$f(x)$	$P\,f(x)$
$e^{u(x)}\,u'(x)$	$e^{u(x)} + C$
$a^x, \quad (a > 0)$	$\dfrac{a^x}{\log(a)} + C$
$a^{u(x)}\,u'(x), \quad (a > 0)$	$\dfrac{a^{u(x)}}{\log(a)} + C$
$\cos(x)$	$\operatorname{sen}(x) + C$
$\cos(u(x))\,u'(x)$	$\operatorname{sen}(u(x)) + C$
$\operatorname{sen}(x)$	$-\cos(x) + C$

$f(x)$	$P\,f(x)$
$\operatorname{sen}(u(x))\,u'(x)$	$-\cos(u(x)) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc\,sen}(x) + C$
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$	$\operatorname{arc\,sen}(u(x)) + C$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arc\,cos}(x) + C$
$-\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$	$\operatorname{arc\,cos}(u(x)) + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arc\,tg}(x) + C$

$f(x)$	$P\,f(x)$
$\dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$	$\operatorname{arc\,tg}(u(x)) + C$
$\sec^2(x)$	$\operatorname{tg}(x) + C$

De entre as equações de primeira ordem têm particular importância as equações escritas na *forma normal*, isto é, na forma

$$y'(x) = f(x, y(x)), \tag{0.2}$$

com f função real definida num conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^2$.
As equações de primeira ordem na forma normal admitem uma interpretação geométrica relativamente simples e que permite ter uma ideia aproximada dos gráficos das soluções destas equações. Com efeito, se a cada ponto (x, y) de A se associar a direção das retas de declive igual a $f(x, y)$, associação esta que será feita representando por um segmento de reta de início no ponto (x, y) e com a direção referida, será obtido aquilo a que usualmente se chama um *campo de direções* da equação (0.2).

O gráfico de uma solução da equação (0.2) é uma curva que em cada ponto (x, y) é tangente á reta que passa por esse ponto e tem a direção dada pelo campo de direções nesse ponto, isto é, a direção das rectas de declive igual a $f(x, y)$.

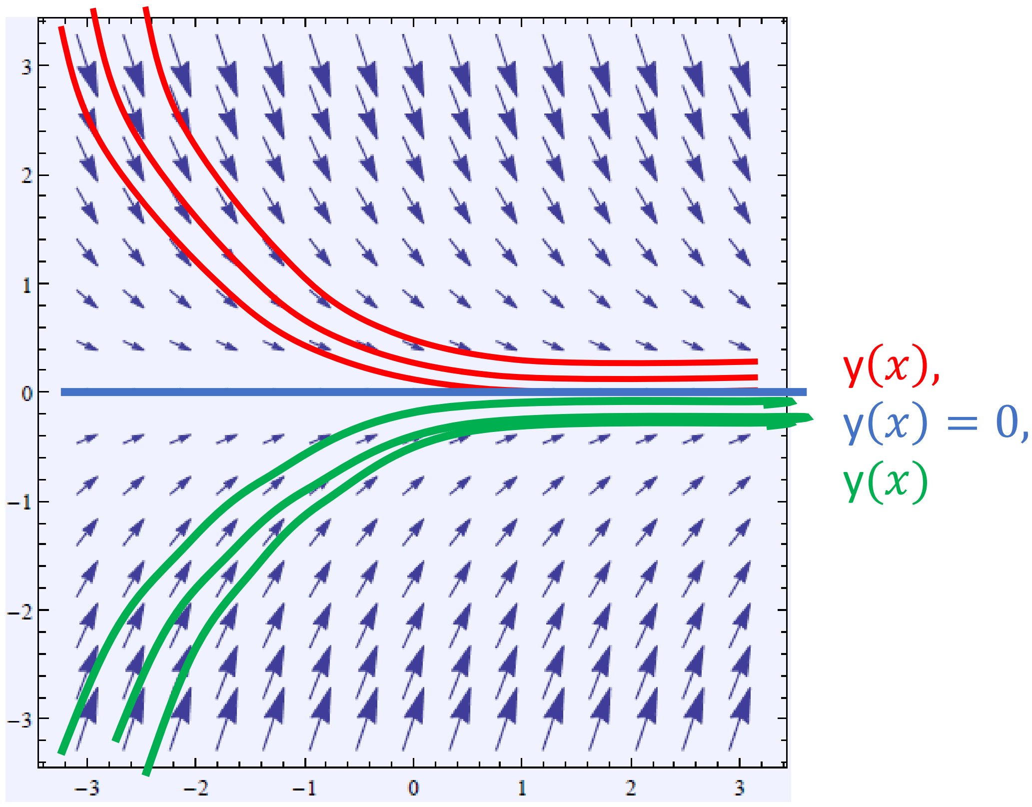


Figura: Campo de direções da equação $y' = -y$.

Equações Autónomas

Uma equação diferencial ordinária em que não aparece explicitamente a variável independente é chamada de *equação autónoma*. Se for y a função incógnita e x a variável independente, uma equação diferencial autónoma de primeira ordem é uma equação da forma $F(y, y') = 0$ ou na forma normal

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

Os zeros da função f são particularmente importantes e são chamados *pontos de equilíbrio* (pontos críticos ou estacionários) da equação autónoma. Se c for um ponto de equilíbrio, isto é, $f(c) = 0$ então a função constante $y(x) = c$ é solução da equação autónoma. Se c é ponto de equilíbrio da equação autónoma à solução constante $y(x) = c$ chama-se solução de equilíbrio (ou estacionária) da equação autónoma.

Exemplo

Considere-se a equação autónoma

$$\frac{dy}{dx} = y(a - by)$$

em que a *e* b *são constantes positivas. Os pontos de equilíbrio da equação (zeros da função* $f(y) = y(a - by)$*) são* $y = 0$ *e* $y = \frac{a}{b}$*. As soluções de equilíbrio são as funções constantes* $y(x) = 0$ *e* $y(x) = \frac{a}{b}$*. Colocando os pontos de equilíbrio numa reta vertical, dividimos esta reta em três intervalos:* $]-\infty, 0[$, $]0, \frac{a}{b}[$ *e* $]\frac{a}{b}, +\infty[$.

Exemplo

As setas na reta representada na figura indicam o sinal de $f(y) = y(a - by)$ *em cada um dos intervalos e portanto o tipo de crescimento das soluções não constantes. Este tipo de representação é usualmente designado por "retrato de fase unidimensional" e à reta vertical é usual chamar "reta de fase".*

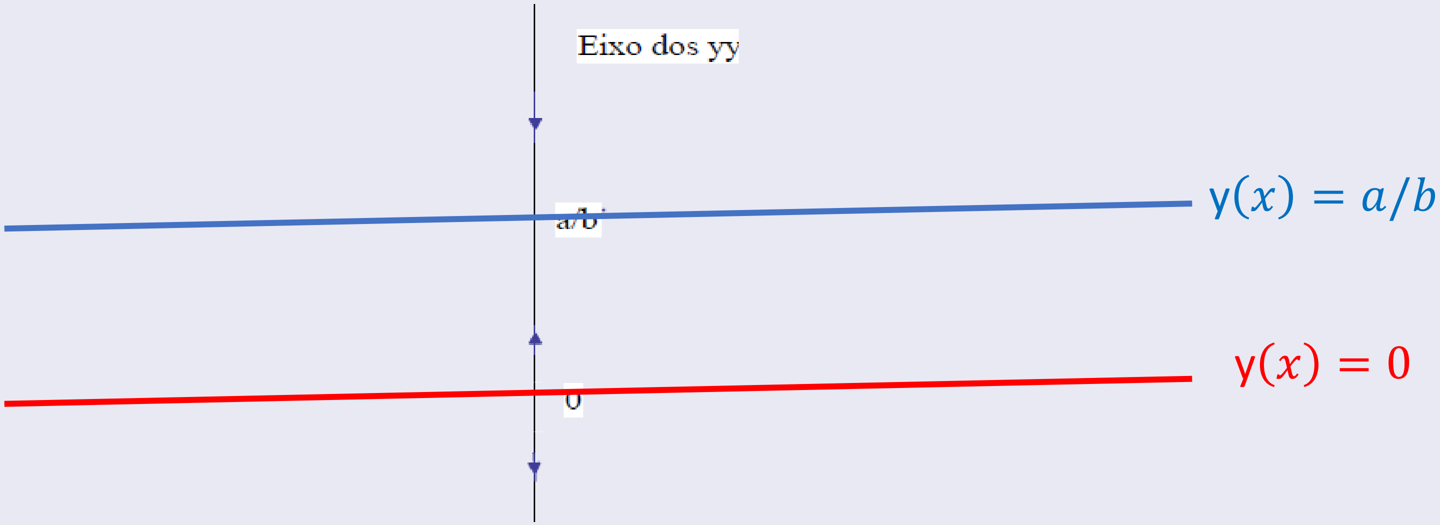


Figura: Reta de fase.

Vejamos que mesmo sem resolver a equação autónoma

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

é, em geral, possível tirar conclusões sobre as suas soluções. Como f não é explicitamente função de x iremos considerar que f está definida para todo o $x \in \mathbb{R}$. Admitiremos também que f como função de y é de classe C^1 em algum intervalo I.

Nas hipóteses de f ser de classe C^1 em algum retângulo $R \subset \mathbb{R}^2$, é possível provar que dado $(x_0, y_0) \in R$ o problema

$$y' = f(x, y), \ y(x_0) = y_0,$$

tem uma e uma só solução em algum intervalo da forma $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \alpha > 0$. Assim, na hipótese de f ser de classe C^1 em algum intervalo I, a equação autónoma possui uma e uma só solução passando por cada ponto $(x_0, y_0) \in R = \mathbb{R} \times I$.

Suponhamos que a equação autónoma possui dois pontos de equilíbrio c_1 e c_2 e que $c_1 < c_2$. Os gráficos das soluções de equilíbrio $y(x) = c_1$ e $y(x) = c_2$ dividem a região R em três subregiões R_1, R_2 e R_3 conforme indicado na figura.

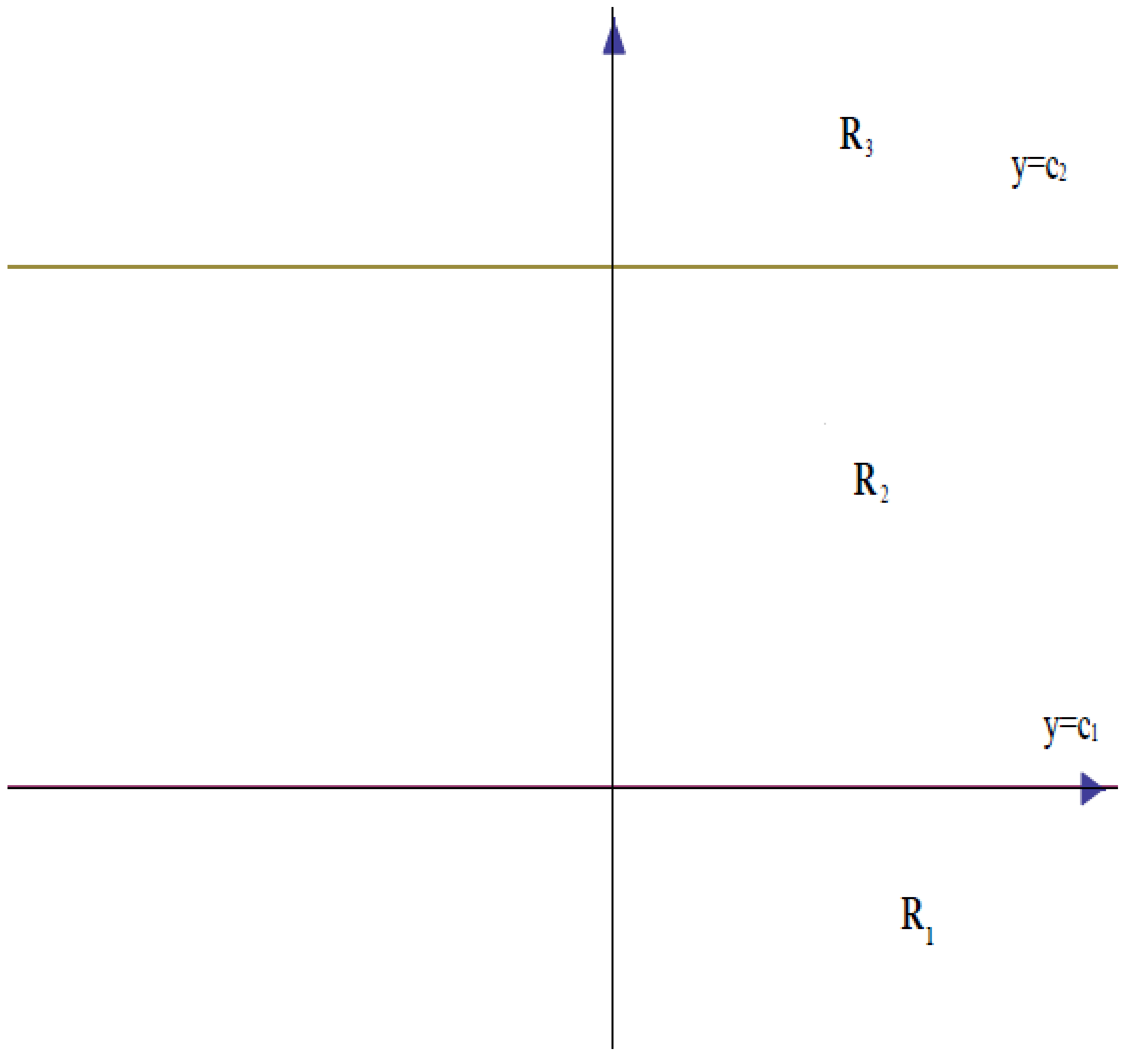


Figura: Soluções de equilíbrio $y(x) = c_1 < y(x) = c_2$.

1. Suponhamos que (x_0, y_0) pertence a uma das subregiões e que $y(x)$ é a solução cujo gráfico passa por este ponto. Então $y(x)$ permanece nesta subregião para todos os valores de x.

2. Tendo em conta a continuidade de f ter-se-á obrigatoriamente $f(y) < 0$ ou $f(y) > 0$ em cada uma das subregiões, consequentemente as soluções são monótonas (crescentes ou decrescentes) em cada uma das subregiões não podendo ter extremos relativos.

3. Se $y(x)$ for uma solução limitada superiormente (resp. inferiormente) pelo ponto crítico c_1 (resp. c_2), então o gráfico de $y(x)$ aproximar-se-à do gráfico da soluções de equilíbrio $y(x) = c_1$ (resp. $y(x) = c_2$) quando $x \longrightarrow +\infty$ ou quando $x \longrightarrow -\infty$. Se $y(x)$ for uma solução limitada pelos dois pontos de equilíbrio consecutivos c_1 e c_2 ($c_1 < y(x) < c_2$ para todo o x) então $y(x)$ aproximar-se-à dos gráficos das soluções de equilíbrio $y(x) = c_1$ e $y(x) = c_2$, de uma quando $x \longrightarrow +\infty$ e da outra quando $x \longrightarrow -\infty$.

Situação Geral (fim)

Exemplo

Voltemos a considerar a equação autónoma

$$\frac{dy}{dx} = y(a - by).$$

Aos três intervalos determinados na reta de fase pelos pontos de equilíbrio $y = 0$ *e* $y = \frac{a}{b}$ *correspodem três subregiões* R_1, R_2 *e* R_3 *do plano* xy *semelhantes às representadas na figura anterior. Foi também visto que* $y(x)$ *é decrescente em* R_1 *e* R_3 *e crescente em* R_2*. Seja* $y(x)$ *a solução que verifica a condição inicial* $y(0) = y_0$*.*

Exemplo

1. Se $y_0 < 0$, $y(x)$ *é decrescente e limitada superiormente. Tem-se que*

$$y(x) \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \;\; x \longrightarrow -\infty$$

(o gráfico da solução de equilíbrio $y = 0$ *é uma assíntota horizontal da solução). A solução não é limitada.*

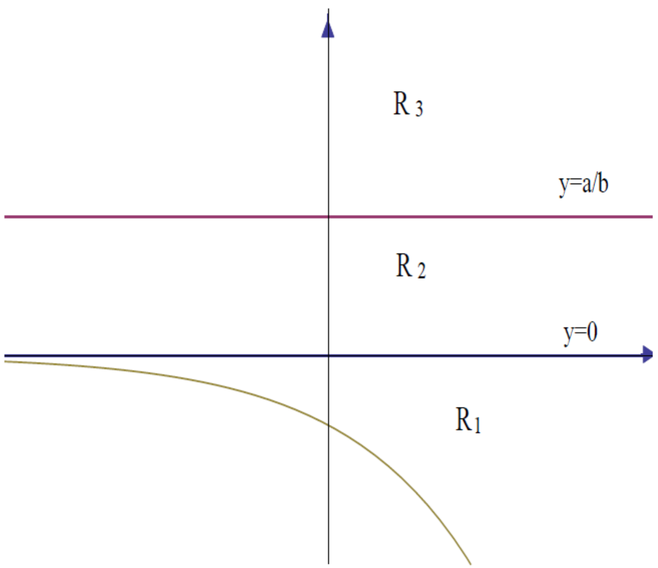


Figura: Retrato de fase.

Exemplo

2. Se $0 < y_0 < \frac{a}{b}$, $y(x)$ *é crescente e limitada. Tem-se que*

$$y(x) \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \;\; x \longrightarrow -\infty$$

e

$$y(x) \longrightarrow \frac{a}{b} \quad \textit{quando} \;\; x \longrightarrow +\infty$$

(o gráfico das soluções de equilíbrio $y = 0$ *e* $y = \frac{a}{b}$ *são duas assíntotas horizontais da solução).*

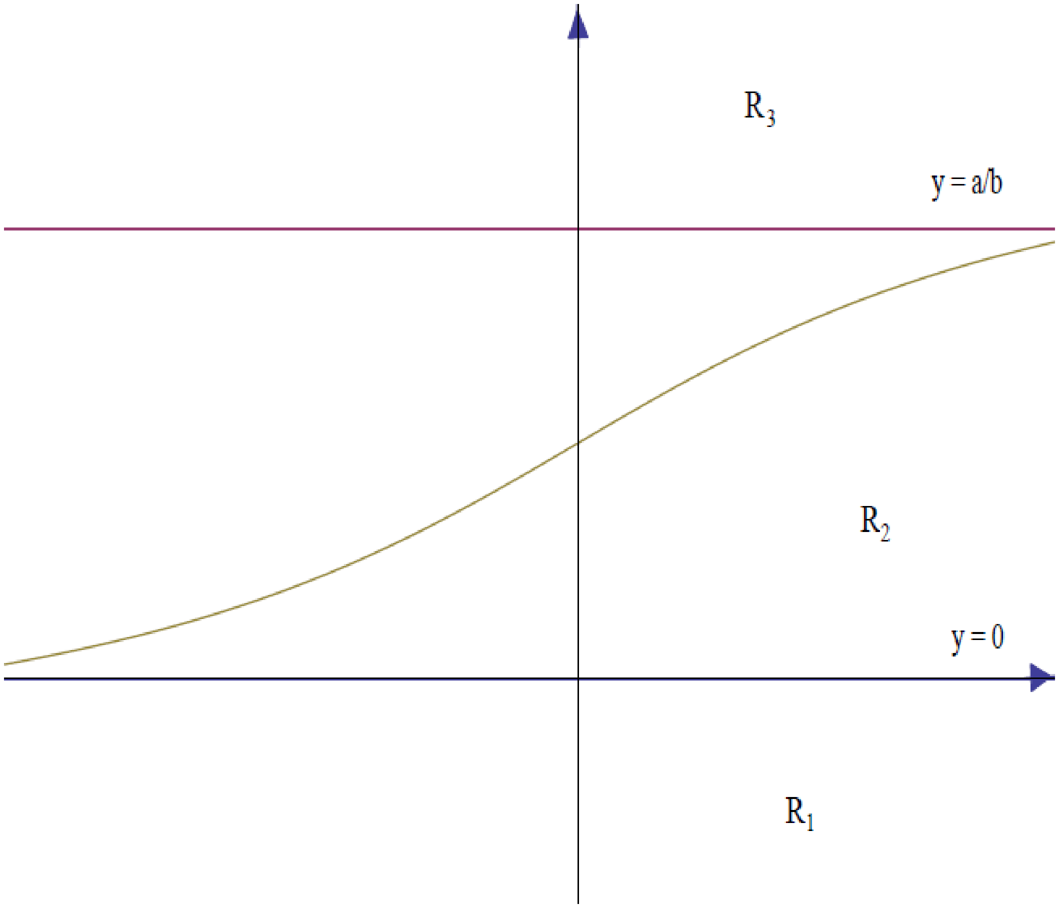


Figura: Retrato de fase.

Exemplo

3. Se $y_0 > \frac{a}{b}$, $y(x)$ *é decrescente e limitada inferiormente. Tem-se que*

$$y(x) \longrightarrow \frac{a}{b} \quad \text{quando} \quad x \longrightarrow +\infty$$

(o gráfico da solução de equilíbrio $y = \frac{a}{b}$ *é uma assíntota horizontal da solução). A solução não é limitada.*

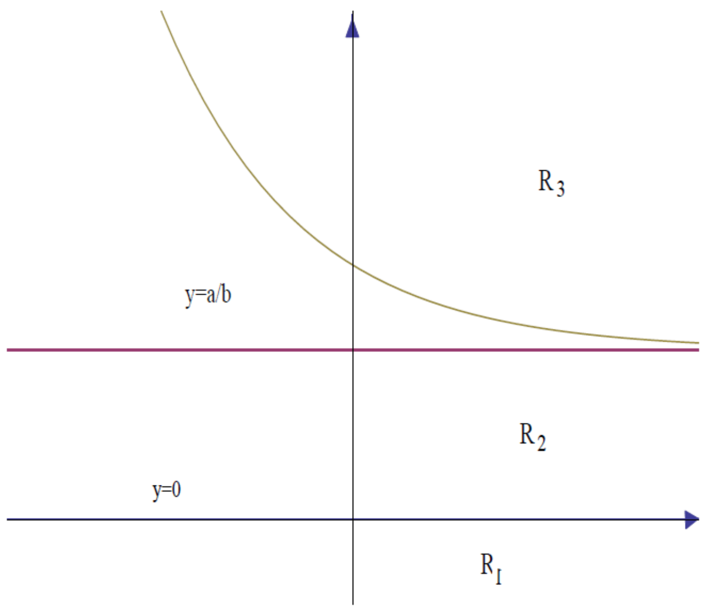


Figura: Retrato de fase.

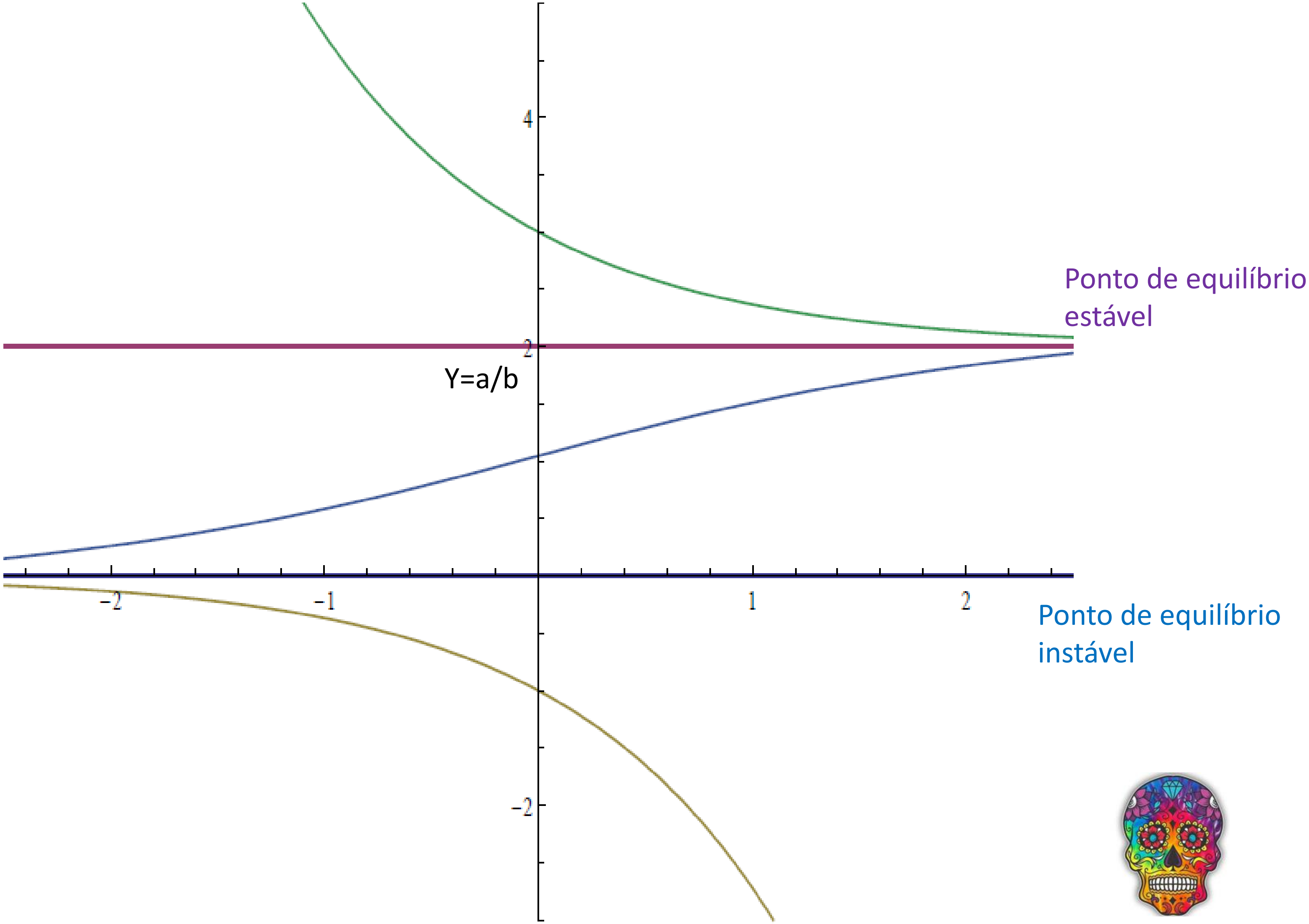


Figura: Retrato de fase.

Exemplo

A equação autónoma

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)^2$$

tem $y = 1$ *como único ponto de equilíbrio. Observando a reta de fase, verifica-se que qualquer solução* $y(x)$ *em qualquer um dos intervalos* $]-\infty, 1[, \,]1, +\infty[$ *é crescente.*

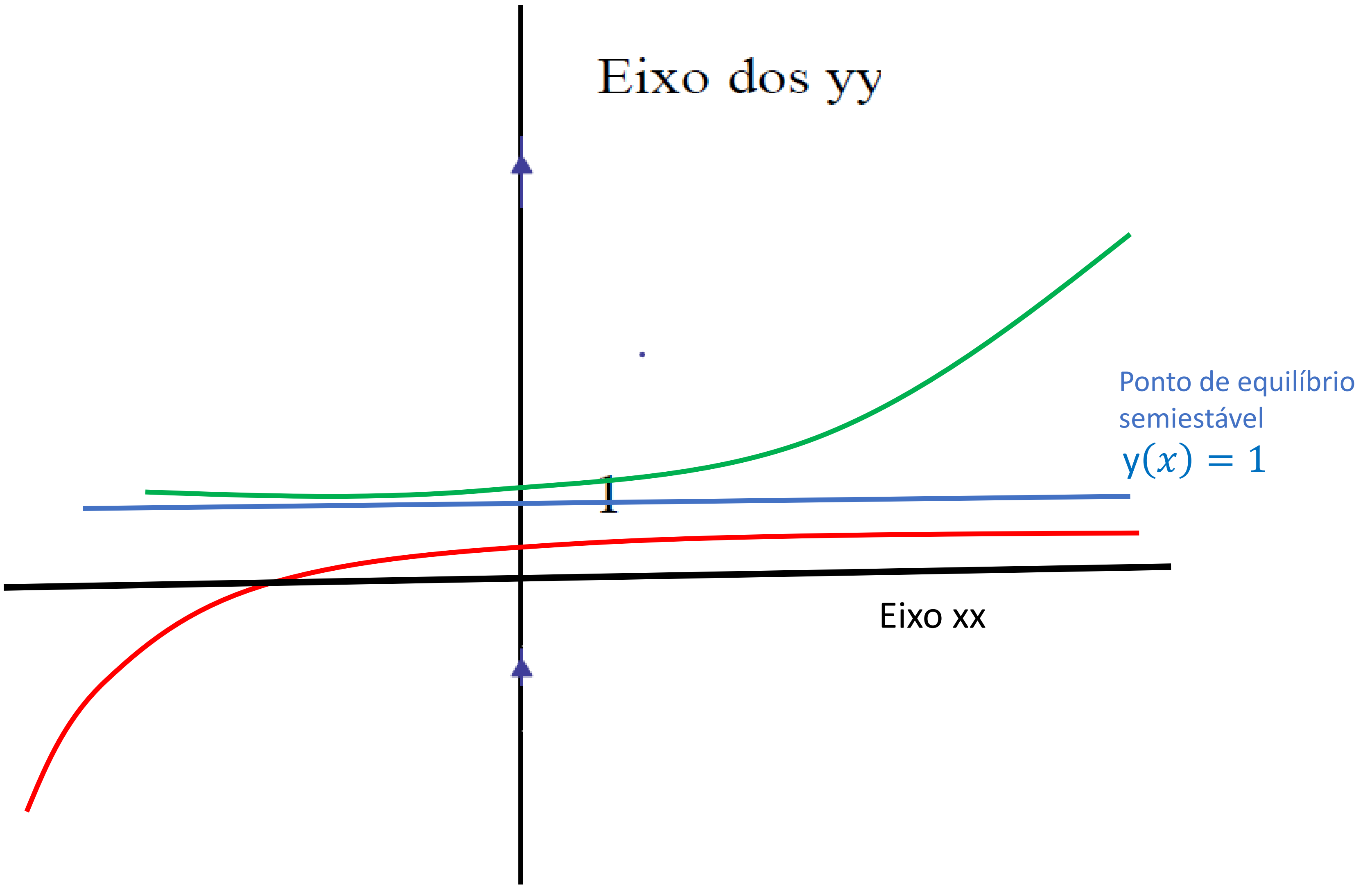


Figura: Retrato de fase.

Uma solução $y(x)$ com uma condição inicial $y(0) = y_0 < 1$ é crescente e limitada superiormente por 1 pelo que $y(x) \longrightarrow 1$ quand
$x \longrightarrow +\infty$.

Uma solução $y(x)$ com uma condição inicial $y(0) = y_0 > 1$ é crescente, limitada inferiormente por 1 e ilimitada superiormente.

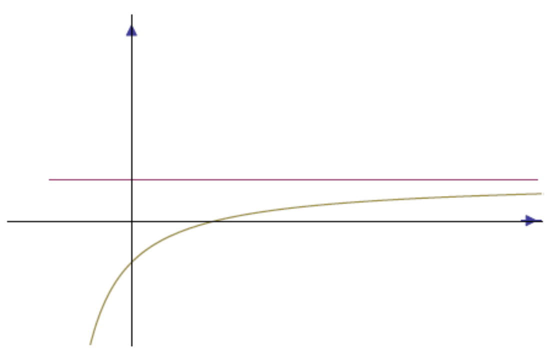


Figura: Solução com uma condição inicial $y(0) = y_0 < 1$

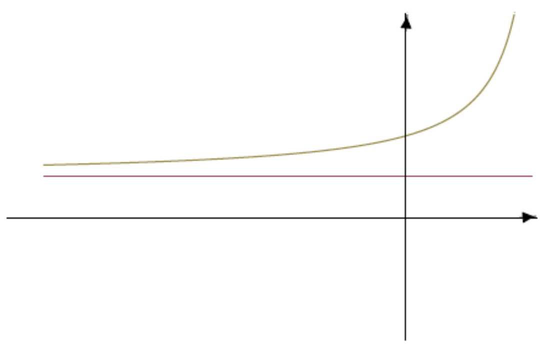


Figura: Solução com uma condição inicial $y(0) = y_0 > 1$

Classificação dos pontos de equilíbrio (Eq. Autónomas)

Suponhamos que $y(x)$ é uma solução não constante da equação autónoma

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

e que c é um seu ponto de equilíbrio. Na figura seguinte colocamos o ponto c em duas retas de fase. Na primeira reta de fase em que ambas as setas apontam para c, as soluções que passam por um ponto (x_0, y_0) suficientemente perto de c convergem para c quando $x \longrightarrow +\infty$. Por este motivo, neste caso, o ponto de equilíbrio c diz-se *assintoticamente estável* e é também usual dizer-se que o ponto c é um *atrator*. Na segunda reta de fase em que ambas as setas apontam no sentido oposto ao de c, todas as soluções passando por um ponto (x_0, y_0) afastam-se de c quando x cresce. Neste caso, o ponto de equilíbrio c diz-se *instável* ou *repulsor*.

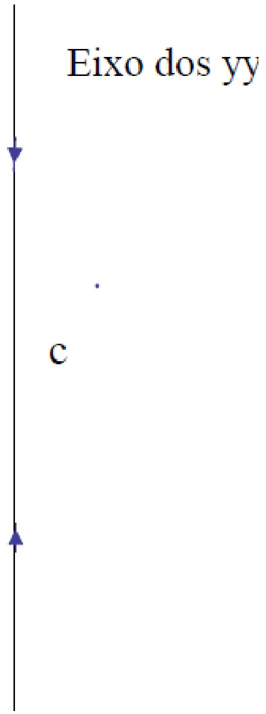


Figura: Ponto de equilíbrio *assintoticamente estável*

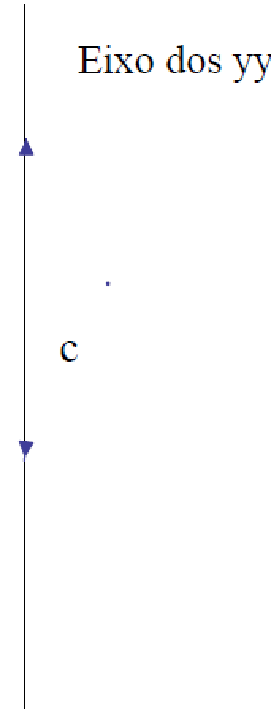


Figura: Ponto de equilíbrio *instável*

Na figura seguinte o ponto c não é nem atrator nem repulsor uma vez que exibe características de ambos. Isto é soluções que passam por um ponto (x_0, y_0) suficientemente perto de c são atraidas ou repelidas consoante y_0 é maior ou menor que c. Por esta razão o ponto c, neste caso, é dito *semiestável.*

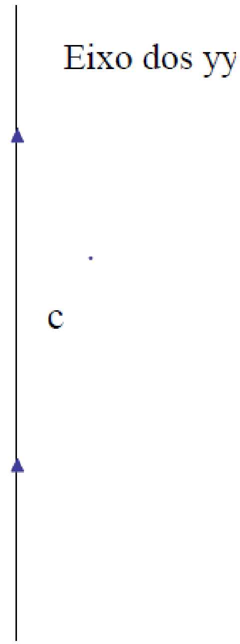


Figura: Ponto de equilíbrio *semiestável*

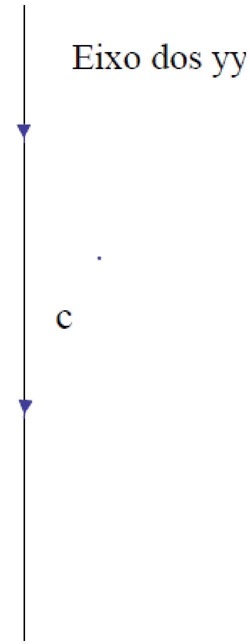


Figura: Ponto de equilíbrio *semiestável*

Na equação

$$\frac{dy}{dx} = y(a - by)$$

o ponto a/b é assintoticamente estável (atrator) e o ponto 0 é instável (repulsor).

Na equação

$$\frac{dy}{dx} = (y - 1)^2$$

o ponto 1 é semiestável.

O campo de direções de uma equação autónoma

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

tem a seguinte particularidade. Uma vez que o membro da direita da equação só depende da variável y, no campo de direções todos os segmentos orientados pertencentes à mesma reta horizontal deverão ser iguais uma vez que o declive das retas tangentes a cada uma das soluções que passa por cada um desses pontos não muda.

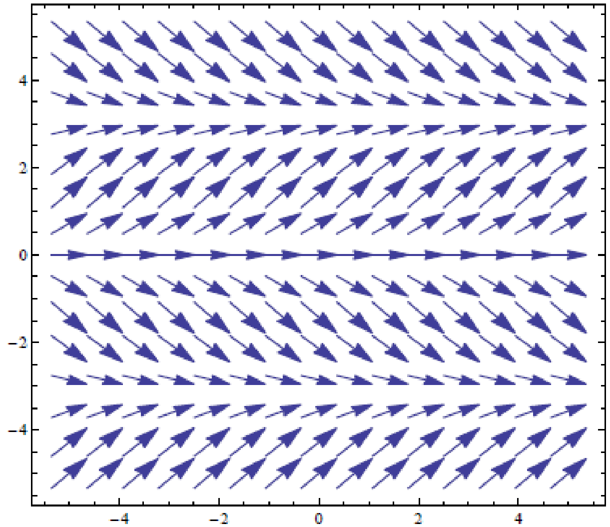


Figura: Campo de direções da equação $y' = \sin y$.

De uma forma geral, chama-se **ordem de uma equação diferencial** à ordem da derivada mais elevada presente na referida equação.

Exemplo

A equação diferencial

$$y' - \frac{1}{x}y = xe^x$$

é de primeira ordem e as funções

$$y(x) = cx + xe^x, \quad c \in \mathbb{R}$$

são soluções em $]0, \infty[$ *desta equação.*

Soluções implícitas e explícitas

Observe-se que no exemplo anterior as soluções são da forma

$$y = f(x),$$

neste caso diz-se que as soluções são *soluções explícitas* da equação.

Em muitos casos, obtém-se apenas uma expressão da forma

$$G(x, y) = 0,$$

que define implicitamente uma função $y(x)$ solução da equação.

Exemplo

A equação

$$y^3 - x^3 - 8 = 0$$

define uma solução implícita da equação diferencial

$$\boxed{y^2 y' = x^2}$$

em $\mathbb{R}$.

A função

$$y = \varphi(x) = \sqrt[3]{8 + x^3}$$

é uma solução explícita da mesma equação em $\mathbb{R}$.

A equação define uma solução implícita (escondida) da equação (verde)

Solução explícita da equação (verde)

Exemplo

A equação

$$xy + e^y = x + 1$$

A equação define uma solução implícita da equação (verde)

define uma solução implícita da equação diferencial

$$(x + e^y)y' + y = 1.$$

A solução considerada não pode ser escrita na forma explícita.

Famílias de soluções

Tal como sucede no cálculo da primitiva de uma função, em que aparece uma constante c de integração, quando se resolve uma EDO de primeira ordem, geralmente obtém-se como solução uma expressão da forma

$$G(x, y, c) = 0,$$

contendo uma constante (ou parâmetro) c, e que representa um conjunto de soluções a que se chamará **família de soluções a um parâmetro**.

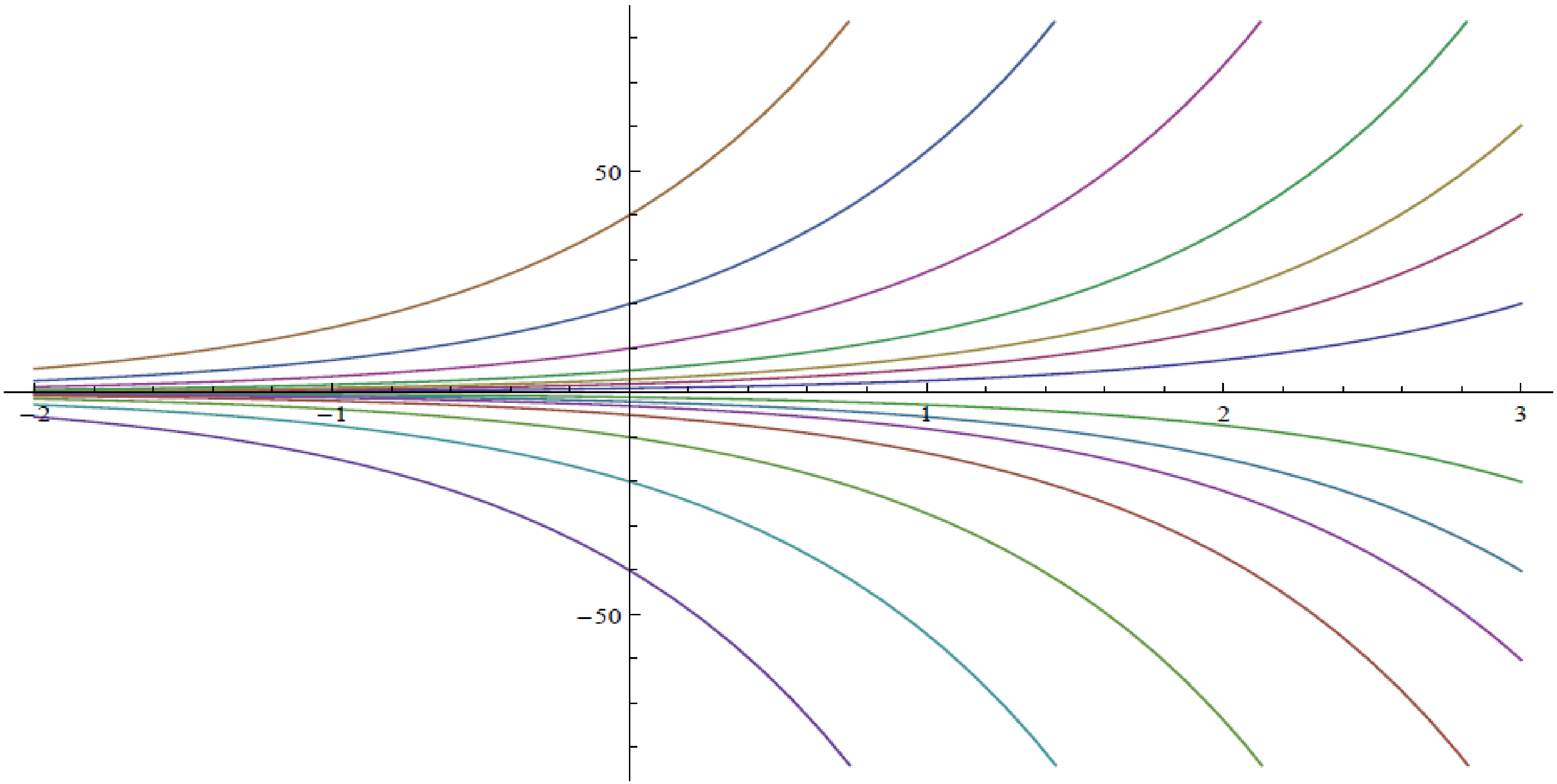


Figura: Família de soluções da equação $y' = y$.

A atribuição de valores à constante c permite obter soluções que não dependem de qualquer constante arbitrária, as quais serão designadas por **soluções particulares** Há equações que admitindo soluções da forma $G(x, y, c) = 0$ possuem também soluções que não podem ser obtidas a partir desta família, isto é, não é possível chegar a tais soluções qualquer que seja a escolha da constante. Tais soluções, quando existem, chamam-se **soluções singulares**.

Integral geral

Se toda a solução de uma EDO de primeira ordem

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

num dado intervalo I, puder ser obtida a partir de uma família a um parâmetros $G(x, y, c) = 0$, para uma escolha conveniente da constante c, dir-se-á que essa família é o **integral geral** ou **solução geral** da equação.

A Equação Linear de Primeira Ordem

Uma equação $y' = f(x, y)$ diz-se *linear* se puder ser escrita na forma

$$y' + p(x)y = q(x),$$

com $p(x)$ e $q(x)$ funções contínuas num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$.

Exemplo

A equação

$$y' + 2xy = x^3,$$

é linear em que $p(x) = 2x$ *e* $q(x) = x^3$ *são funções contínuas em* $\mathbb{R}$.

Vejamos como determinar a solução geral da equação linear.

Multiplicando a equação por

$$\varphi(x) = e^{\int p(x)dx}$$

obtém-se

$$e^{\int p(x)dx}y' + e^{\int p(x)dx}p(x)y = e^{\int p(x)dx}q(x),$$

ou seja

$$(e^{\int p(x)dx}y)' = e^{\int p(x)dx}q(x),$$

pelo que

$$e^{\int p(x)dx}y = \int e^{\int p(x)dx}q(x)dx + C.$$

Então o integral geral da equação linear é

$$y = \frac{C}{e^{\int p(x)dx}} + \frac{1}{e^{\int p(x)dx}} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx.$$

Voltando a designar $e^{\int p(x)dx}$ por $\varphi(x)$, o integral geral da equação assume a forma

$$\boxed{y = \frac{C}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int \varphi(x)\, q(x)dx.}$$

Acabou de demonstrar-se o resultado:

Teorema

A equação diferencial linear

$$y' + p(x)y = q(x),$$

com $p(x)$ *e* $q(x)$ *funções contínuas num intervalo aberto* $I \subseteq \mathbb{R}$, *tem como integral geral*

$$y = \frac{C}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int \varphi(x)\, q(x) dx,$$

Fixar!!!!!!

em que $\varphi(x) = e^{\int p(x)dx}$ *e* C *é uma constante real arbitrária.*

Se na equação linear a função $q(x)$ for identicamente nula, a equação toma a forma

$$\boxed{y' + p(x)y = 0} \tag{0.3}$$

e designa-se por **equação linear homogénea**.

A equação linear homogénea tem por integral geral

$$\boxed{y = Ce^{-\int p(x)dx} = \frac{C}{\varphi(x)},} \quad \varphi(x) = e^{\int p(x)dx}$$

em que C é uma constante real arbitrária.

Se na equação linear a função $q(x)$ não for identicamente nula é usual chamar-lhe **equação linear completa**. A equação que se obtém da equação linear completa quando se substitui $q(x)$ pela função identicamente nula designa-se por **equação homogénea associada**.

Exemplo

Considere-se a equação

$$y' + (1 - \frac{1}{x})y = 2x, \quad x > 0.$$

Como $\varphi(x) = e^{\int (1-\frac{1}{x})dx} = \dfrac{e^x}{x}$ *então*

$$y = Cxe^{-x} + xe^{-x} \int 2e^x dx = Cxe^{-x} + 2x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

A equação homogénea associada

$$y' + (1 - \frac{1}{x})y = 0, \quad x > 0.$$

tem por solução geral

$$y = Cxe^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

Exemplo

A equação

$$y' + 2xy = x,$$

é linear em que $p(x) = 2x$ *e* $q(x) = x$ *são funções contínuas em* $\mathbb{R}$.

O integral geral da equação linear em cima é:

$$y(x) = \frac{1}{2} + ce^{-x^2}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

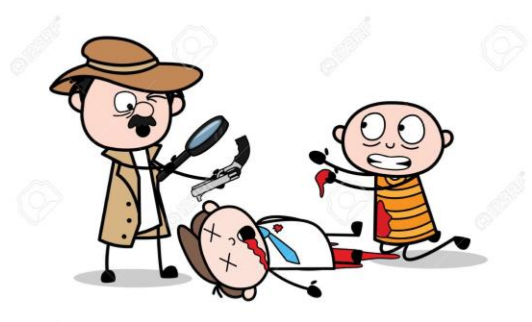
A solução particular que satisfaz $y(0) = 3$ é:

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}e^{-x^2}.$$

Exemplo

Na investigação de um homicídio, é, muitas vezes importante estimar o instante em que a morte ocorreu. A partir de observações experimentais, a lei de arrefecimento de Newton estabelece, com uma exatidão satisfatória, que a taxa de variação da temperatura $T(t)$ de um corpo em arrefecimento é proporcional à diferença entre a temperatura desse corpo e a temperatura constante T_a do meio ambiente, isto é:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a).$$



Exemplo (continuação)

Onde:

T: *temperatura, em graus Celsius, do corpo no instante* t

T_a: *temperatura constante, em graus Celsius, do meio ambiente*

t: *tempo, medido em horas*

k: *constante de proporcionalidade (positiva) que depende da constituição do corpo, sendo que o sinal negativo indica que a temperatura do corpo está a diminuir com o passar do tempo.*

Suponhamos que um cadáver é encontrado em condições suspeitas no instante $t_0 = 0$ *e que a temperatura do corpo é medida imediatamente pelo perito e o valor obtido é* $T = 30^oC$.

Exemplo (continuação)

Suponhamos que duas horas depois a temperatura é novamente medida e o valor encontrado é $T_1 = 23^oC$.
O crime parece ter ocorrido durante a madrugada e corpo foi encontrado pela manhã bem cedo, pelas 6 *horas e* 17 *minutos.*
A perícia então faz a suposição adicional de que a temperatura do meio ambiente entre a hora da morte e a hora em que o cadáver foi encontrado se manteve mais ou menos constante nos 20^oC. *A perícia sabe também que a temperatura normal de um ser humano vivo é de* 37^oC. *Vejamos como, com os dados considerados, a perícia pode determinar a hora em que ocorreu o crime.*

Exemplo (continuação)

Reescrevendo a equação

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a),$$

na forma

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_a,$$

constata-se que se trata de uma equação linear de primeira ordem cuja solução geral é

$$T(t) = \frac{C}{\varphi(t)} + \frac{1}{\varphi(t)} \int \varphi(t)\, kT_a dt,$$

com $\varphi(t) = e^{\int k dt} = e^{kt}$, *isto é*

$$T(t) = Ce^{-kt} + e^{-kt} \int e^{kt}\, kT_a dt = Ce^{-kt} + T_a,$$

Exemplo (continuação)

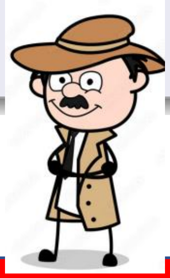
ou ainda, tendo em conta que $T_a = 20$

$$T(t) = Ce^{-kt} + 20.$$

A partir da condição $T(0) = 30$ *conclui-se que* $C = 10$ *e da condição* $T(2) = 23$ *que* $k \approx 0.6$ *que conduzem à solução*

$$T(t) = 10e^{-0.6t} + 20.$$

O tempo que decorreu decorreu entre o homicídio e o instante $t_0 = 0$ *é dado pelo valor de* t *solução da equação* $T(t) = 37$*, isto é,* $10e^{-0.6t} + 20 = 37$*, que conduz ao valor* $t = -0.9$ *horas que corresponde a* -54 *minutos. O que permite concluir que o homicídio decorreu por volta das* 5 *horas e* 23 *minutos.*



Método da Variação das Constantes

Foi visto anteriormente como determinar o integral geral da equação linear completa. Uma forma alternativa de determinar o integral geral da equação linear completa é conhecido como **método da variação das constantes arbitrárias**. Considere-se a equação linear completa

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{0.4}$$

Esta última equação tem como equação homogénea associada

$$y' + p(x)y = 0 \tag{0.5}$$

cujo integral geral é

$$y^* = Ce^{-\int p(x)dx} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos que a constante C que aparece neste último integral geral é uma função de x, $C(x)$, a determinar, de forma a que

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad \text{C(x)=?} \tag{0.6}$$

seja o integral geral da equação completa (0.4).
Assim sendo, tem-se que

$$(C(x)e^{-\int p(x)dx})' + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

ou, equivalentemente,

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Primitivando esta última função vem

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C, \text{ com } c \in \mathbb{R}.$$

Substituíndo a função $C(x)$ em (0.6), obtém-se

$$y = \frac{C}{e^{\int p(x)dx}} + \frac{1}{e^{\int p(x)dx}}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right),$$

que, tal como foi visto é o integral geral da equação linear completa.

Exemplo

A equação linear completa

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 1,$$

tem por equação homogénea associada

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 0,$$

cuja solução geral é

$$y^* = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int -\frac{2x}{x^2+1}dx} = C(x^2+1).$$

Exemplo (continuação)

Supondo que C é função de x, e que

$$y = C(x)(x^2+1)$$

é solução da equação completa, por substituição (na equação completa) obtém-se

$$C'(x) = \frac{1}{x^2+1},$$

pelo que

$$C(x) = \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

A equação linear completa tem por integral geral

$$y = (\arctan x + C)\,(x^2+1) = C(x^2+1) + (x^2+1)\arctan x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Considere-se novamente a equação linear completa

$$y' + p(x)y = q(x).$$

O seu integral geral

$$y = \overset{Y^*}{\underbrace{\frac{C}{e^{\int p(x)dx}}}_{\text{integral geral da equação homogénea}}} + \overset{Y_0}{\underbrace{\frac{1}{e^{\int p(x)dx}} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx}_{\text{solução particular da equação completa}}} .$$

é a soma do integral geral da equação homogénea com uma sua solução particular.
Reciprocamente se ao integral geral da equação homogénea somarmos uma solução particular da equação completa obtemos a solução geral da equação completa, uma vez que temos uma sua solução dependendo de uma constante arbitrária.