

AM 3C – Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

Felipe B. Pinto 71951 – EQB

9 de novembro de 2024

Conteúdo

1	EDO de Primeira Ordem	2	5	Equação de Bernoulli e a equação de Riccati	14
	Exemplo 1	2		Exemplo 10 Eq de Bernoulli . . .	15
	Exemplo 2	2		Exemplo 11 Eq Bernoulli	16
	Exemplo 3 Campo de direções da equação	2		Exemplo 12 Eq Ricatti	17
2	Equação autonoma	3	6	Operador de Derivação	18
	Exemplo 4 Pontos de equilíbrio .	4	7	Equação Diferencial Linear de ordem n	19
	Exemplo 5 Equilíbrio semiestável	5	8	Abaixando a ordem de uma EDO	21
	Exemplo 6	6		Exemplo 13 Baixamento de grau de uma Eq lin homogenea . . .	22
3	Equação Linear de Primeira Ordem	8	9	Wronskiano: check dependencia linear	23
	Exemplo 7	10	10	Método de variação das constantes abitrárias para equação linear de ordem n	24
	Exemplo 8	11		Exemplo 14 Metodo das var const arb	25
4	Método de Variação das constantes	12			
	Exemplo 9	13			

1 EDO de Primeira Ordem

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

F é definida num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^3$. Dado um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, Diz-se que uma função $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em I é uma solução da equação diferencial acima se:

1. $(x, \phi(x), \phi'(x)) \in D, \quad \forall x \in I$
2. $F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0, \quad \forall x \in I$

Ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais elevada referida na equação

Exemplo 1

A equação

$$y' - \frac{y}{x} = x e^x$$

é de primeira ordem e as funções

$$y(x) = c x + x e^x \quad c \in \mathbb{R}$$

são soluções em $]0, \infty[$ desta equação.

Exemplo 2

A equação

$$y'' + 4y = 0$$

é de segunda ordem e as funções

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x, \\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

São soluções em \mathbb{R} desta equação

Forma normal

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

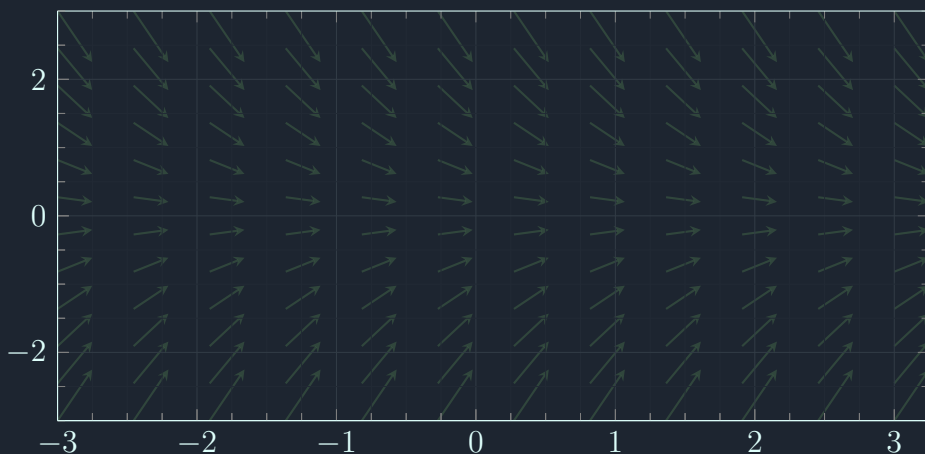
Com f definida no conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^2$. As equações de primeira ordem na forma normal admitem uma interpretação geométrica relativamente simples e que **permite ter uma ideia aproximada dos gráficos das soluções** destas equações.

Campo de direções da equação

Com uma equação diferencial de primeira ordem na forma normal definida no conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^2$, se a cada ponto (x, y) de A se associar a direção das retas de declive igual a $f(x, y)$, se obtém aquilo a que usualmente se chama de campo de direções da equação.

Exemplo 3 Campo de direções da equação

$$y' = -y$$



2 Equação autónoma

Uma EDO em que não aparece explicitamente a variável independente. Se for y a função incógnita e x a variável independente, uma equação diferencial autónoma de primeira ordem é uma equação da forma $F(y, y') = 0$ ou na forma normal:

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

Pontos de equilíbrio (críticos ou estacionários) são os zeros da função

$$f(c) = 0 \implies y(x) = c \text{ é solução de } f(x) = \frac{dy}{dx}$$

$y(x) = c$ chama-se solução de equilíbrio (ou estacionária)

Classificação dos pontos de equilíbrio (Eq autónomas)

Prestando atenção nos limites:

$$f(c) = 0$$

$$x \rightarrow +\infty \implies y(x) \rightarrow c \implies c \text{ é um ponto de eq estável}$$

$$x \rightarrow -\infty \implies y(x) \rightarrow c \implies c \text{ é um ponto de eq instável}$$

$$x \rightarrow -\infty \wedge x \rightarrow +\infty \implies y(x) \rightarrow c \implies c \text{ é um ponto de eq semiestável}$$

Exemplo 4 Pontos de equilíbrio

Considere-se a equação autónoma

$$\frac{dy}{dx} = y(a - by); a, b \in \mathbb{R}^+$$

Pontos de equilíbrio:

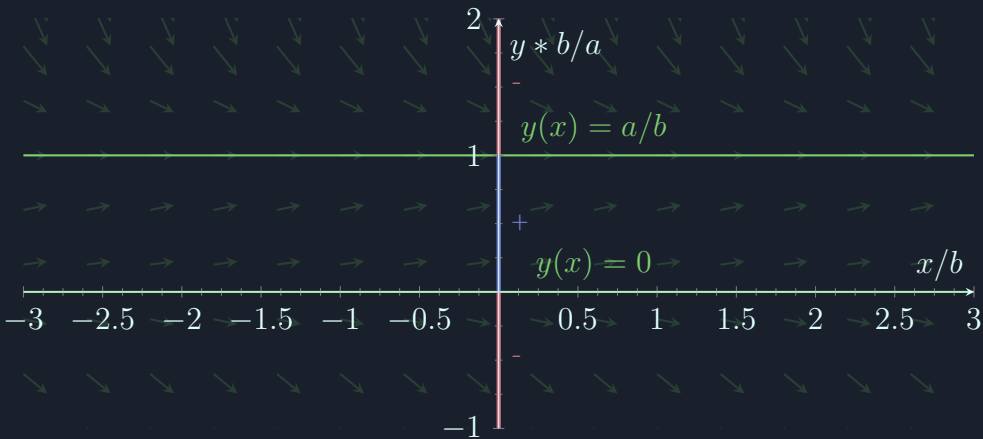
$$c = y : y(a - by) = 0 \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{a}{b} \end{cases}$$

$$\therefore y(x) = 0 \vee y(x) = a/b$$

Podemos prever o comportamento da equalção pela seguinte tabela

<i>y</i>	<i>sign</i>		
	<i>y</i>	<i>a - by</i>	<i>y(a - by)</i>
<i>y</i> < 0	−	+	−
0 < <i>y</i> < <i>a/b</i>	+	+	+
<i>a/b</i> < <i>y</i>	+	−	−

Se desenharmos um grafico das soluções de equilíbrio



Podemos ver que as tres regiões divididas pelos dois pontos de equilíbrio tem um comportamento: R_1 Decrescente, R_2 Crescente e R_3 Decrescente

Seja $y(x) = 0$ a solução que verifica a condição inicial $y(0) = y_0$:

$$y_0 < 0 \qquad \begin{cases} x \rightarrow -\infty \implies y(x) \rightarrow 0 \\ x \rightarrow +\infty \implies y(x) \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$0 < y_0 < a/b \qquad \begin{cases} x \rightarrow -\infty \implies y(x) \rightarrow 0 \\ x \rightarrow +\infty \implies y(x) \rightarrow a/b \end{cases}$$

$$a/b < y_0 \qquad \begin{cases} x \rightarrow -\infty \implies y(x) \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow +\infty \implies y(x) \rightarrow a/b \end{cases}$$

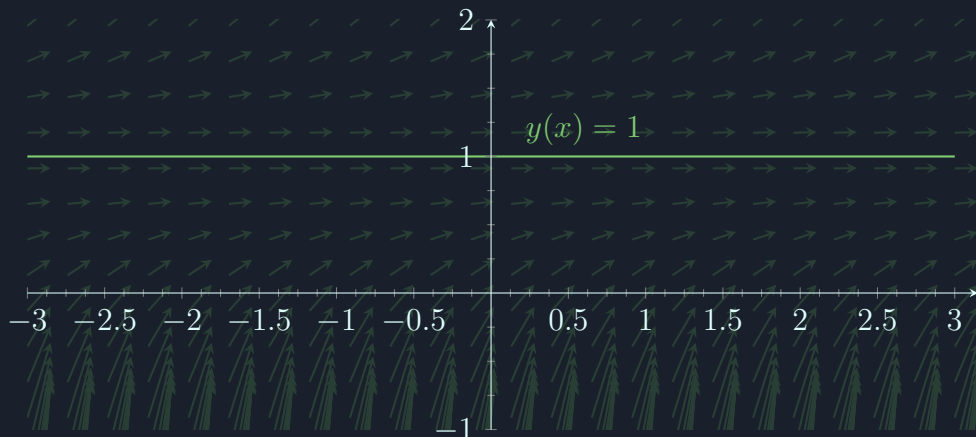
Podemos dizer que $y(x) = 0$ é um ponto de equilíbrio instável e que $y(x) = a/b$ é um ponto de equilíbrio estável

Exemplo 5 Equilíbrio semiestável

A equação autônoma

$$\frac{dy}{dx} = (y - 1)^2$$

tem $y = 1$ como único ponto de equilíbrio. Observando a reta fase, verifica-se que qualquer solução $y(x)$ em qualquer um dos intervalos $]-\infty, 1[$ e $]1, +\infty[$ é crescente



Podemos caracterizar esse ponto como **ponto de equilíbrio semiestável**

Soluções implícitas e explícitas

Soluções explícitas

$$y = f(x)$$

y isolado

Soluções implícitas

$$G(x, y) = 0$$

Define implicitamente uma função $y(x)$ solução da equação.

Exemplo 6

Da equação

$$y^2 y' = x^2$$

Podemos tirar a solução de duas formas

Da forma implícita

$$y^3 - x^3 - 8 = 0$$

Da forma explícita

$$y = \varphi(x) = \sqrt[3]{8 + x^3}$$

Famílias de Soluções

$$G(x, y, z) = 0$$

Tal como sucede no cálculo da primitiva de uma função, em que aparece uma constante c de integração, **quando se resolve uma EDO de primeira ordem, geralmente obtém-se com solução uma expressão contendo uma constante (ou parâmetro) c , e que representa um conjunto de soluções** a que se chamará família de soluções a um parâmetro.

Soluções particulares são obtidas quando atribuímos valores ao parametro da familia de soluções

Soluções singulares nem sempre existem mas existem, não podem ser obtidas atribuindo um valor a constante c

Integral Geral Uma família de soluções que define todas as soluções de uma EDO para um intervalo I

3 Equação Linear de Primeira Ordem

$$y' = f(x, y) \iff y' + p(x)y = q(x)$$

Com $p(x)$ e $q(x)$ funções contínuas num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$

Exemplo

$$y' + 2xy = x^3 \quad \begin{cases} p(x) = 2x \\ q(x) = x^3 \end{cases}$$

Equação linear homogénea

Equação linear em que $q(x) = 0$, quando em uma equação linear completa ($q(x) \neq 0 \wedge p(x) \neq 0$) substituirmos $q(x)$ por 0, obtemos a equação linear homogénea associada.

Solução geral de equações lineares de primeira ordem

$$y' + p(x) y = q(x) \implies y = \frac{c}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int \varphi(x) q(x) dx$$
$$\varphi(x) = \exp \int p(x) dx$$

$$y = \frac{c}{\varphi(x)} : q(x) = 0 \text{ (eq Homogênea)}$$

Demonstração

$$\begin{aligned} y' + p(x) y &= q(x) \implies (y' + p(x) y) \varphi(x) = \\ &= y' \exp \left(\int p(x) dx \right) + p(x) y \exp \left(\int p(x) dx \right) = \left(y \exp \int p(x) dx \right)' = \\ &= q(x) \varphi(x) = q(x) \exp \int p(x) dx \implies \\ &\implies y \exp \int p(x) dx = c + \int q(x) \exp \left(\int p(x) dx \right) dx \implies \\ &\implies y = \frac{c}{\exp \int p(x) dx} + \frac{1}{\exp \int p(x) dx} \int q(x) \exp \left(\int p(x) dx \right) dx = \\ &= \frac{c}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int q(x) \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Exemplo 7

Considere a equação

$$y' + (1 - 1/x) y = 2x, \quad x < 0$$

Encontre a solução para a equação acima e a equação homogênea associada

Resposta

$$\begin{aligned} y &= \frac{c_0}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int (2x) \varphi(x) \, dx = \\ &= c_0 \frac{x}{c_3 e^x} + \frac{c_3 x}{e^x} \int (2x) \frac{e^x}{c_3 x} \, dx = \\ &= \frac{c_0}{c_3} \frac{x}{e^x} + \frac{x}{e^x} 2 \int e^x \, dx = \\ &= \frac{c_0}{c_3} \frac{x}{e^x} + \frac{2x}{e^x} (c_4 + e^x) = c \frac{x}{e^x} + 2x; \\ c &= \frac{c_0}{c_3} + 2c_4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \exp \left(\int (1 - 1/x) \, dx \right) = \exp (c_1 + x - (c_2 + \ln x)) = \\ &= c_3 \frac{\exp x}{x} = c_3 \frac{e^x}{x}; \\ c_3 &= \exp (c_1 - c_2) \end{aligned}$$

Equação homogênea

$$y' + (1 - 1/x) y = 0 \implies y = \frac{c_0}{\varphi(x)} = c_0 \frac{x}{c_3 e^x} = c_5 \frac{x}{e^x}; c_5 = c_0/c_3$$

Exemplo 8

Na investigação de um homicídio, é, muitas vezes importante estimar o instante em que a morte ocorreu. A partir de observações experimentais, a lei de arrefecimento de Newton estabelece, com uma exatidão satisfatória, que a taxa de variação da temperatura $T(t)$ de um corpo em arrefecimento é proporcional à diferença entre a temperatura desse corpo e a temperatura constante T_a do meio ambiente, isto é:

$$\frac{dT}{dt} = -k (T - T_a)$$

Suponhamos que duas horas depois a temperatura é novamente medida e o valor encontrado é $T_1 = 23^\circ\text{C}$. O crime parece ter ocorrido durante a madrugada e corpo foi encontrado pela manhã bem cedo, pelas 6 horas e 17 minutos. A perícia então faz a suposição adicional de que a temperatura do meio ambiente entre a hora da morte e a hora em que o cadáver foi encontrado se manteve mais ou menos constante nos 20°C . A perícia sabe também que a temperatura normal de um ser humano vivo é de 37°C . Vejamos como, com os dados considerados, a perícia pode determinar a hora em que ocorreu o crime.

Resposta

$$t : T(t) = 37 \implies$$

$$\implies T(t) = c e^{-k t} + 20 =$$

$$\cong 10 e^{-0.602 * t} + 20 = 37 \implies$$

$$\implies t \cong -\frac{1}{0.602} \ln(17/10) \cong -0.881 \text{ h} \cong -52.888 \text{ min};$$

$$T(0) = c e^{-k * 0} + 20 = 30 \implies c = 30 - 20 = 10;$$

$$T(2) = c e^{-k * 2} + 20 = 10 e^{-k * 2} + 20 = 23 \implies$$

$$\implies k = -0.5 \ln(3/10) \cong 0.602;$$

$$\frac{dT}{dt} = -k (T - 20) \implies T' + k t = k 20 \implies$$

$$\implies y = \frac{c_0}{\varphi(t)} + \frac{1}{\varphi(t)} \int k 20 \varphi(t) dt =$$

$$= \frac{c_0}{c_2 e^{k t}} + \frac{1}{c_2 e^{k t}} \int k 20 c_2 e^{k t} dt = \frac{c_0}{c_2} e^{-k t} + \frac{1}{c_2} e^{-k t} \frac{k 20 c_2}{k} \int e^{k t} d(k t) =$$

$$= \frac{c_0}{c_2} e^{-k t} + 20 c_3 e^{-k t} + 20 e^{-k t} e^{k t} =$$

$$= c e^{-k t} + 20;$$

$$c = \frac{c_0}{c_2} + 20 c_3;$$

$$\varphi(t) = \exp \left(\int (k) dt \right) = \exp (k t + c_1) = e^{k t} c_2;$$

$$c_2 = e^{c_1}$$

4 Método de Variação das constantes

$$y = \frac{c_0(x)}{\varphi(x)} : \left(\frac{c_0(x)}{\varphi(x)} \right) + p(x) \left(\frac{c_0(x)}{\varphi(x)} \right) = q(x)$$

$$y_h' + p(x) y_h = q(x) \iff y_h = \frac{c_0}{\varphi x} \implies y = \frac{c_0(x)}{\varphi x}$$

Podemos resolver a equação homogênea associada y_h substituir $c_0 \rightarrow c_0(x)$ e aplicar $y = c_0(x)/\varphi(x)$ na equação linear original, dessa forma podemos obter $c_0(x)$ e por sequencia $y = c_0(x)/\varphi x$

Método usando solução particular

$$y = \frac{c_0}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int q(x) \varphi(x) dx = y_h + y_i$$

- y_h é a solução da equação homogênea associada
- y_i é uma solução particular

Mesmo y_i aparecer como uma solução particular em que $c_0 = 1$, por estarmos trabalhando com uma solução arbitrária, isso não impede de ser qualquer solução particular, da no mesmo ao final das contas

Exemplo 9

$$y' - \frac{2x}{x^2 + 1} y = 1$$

Encontre a solução geral usando o método de variação das constantes

Resposta

$$y : y' - \frac{2x}{x^2 + 1} y = 1 \implies$$

$$\begin{aligned} \implies y &= c_0(x) (x^2 + 1) = \\ &= (\arctan(x) + c_2) (x^2 + 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' - \frac{2x}{x^2 + 1} y &= (c_0(x) (x^2 + 1))' - \frac{2x}{x^2 + 1} (c_0(x) (x^2 + 1)) = \\ &= c'_0(x) (x^2 + 1) + c_0(x) 2x - 2x c_0(x) = c'_0(x) (x^2 + 1) = 1 \implies \\ \implies c'_0(x) &= \frac{1}{x^2 + 1} \implies c_0(x) = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x + c_1; \end{aligned}$$

$$y' + \frac{2x}{x^2 + 1} y = 0 \implies y = \frac{c_0}{\varphi(x)} = c_0 (x^2 + 1);$$

$$\varphi(x) = \exp \left(\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx \right) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

5 Equação de Bernoulli e a equação de Riccati

São equações não lineares que, após mudanças de variáveis apropriadas, se transformam em equações lineares:

5.1 Eq de Bernoulli

$$y' + a(x) y = b(x) y^k;$$
$$z = y^{1-k} \implies z' + (1 - k) a(x) z = (1 - k) b(x)$$

Quando encontramos uma EDO que possa ser escrita na forma acima, podemos realizar a substituição de $z = y^{1-k}$ transformando a EDO em uma equação linear, assim podemos encontrar a solução geral para z que pode ser substituída para encontrar a solução de y que é a equação original.

5.2 Eq de Riccati

$$y' + a(x) y = b(x) + c(x) y^2;$$
$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)} \implies z' + (2 c(x) y_1 - a(x)) z = -c(x)$$

Exemplo 10 Eq de Bernoulli

Considere o problema de valores iniciais (PVI)

$$y' - x y = x y^3, \qquad y(0) = 1$$

$$y : y' + -x y = x y^3;$$

$$y = z^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{c_{z,0} e^{-x^2} - 1}} = \frac{1}{\sqrt{2 e^{-x^2} - 1}};$$

$$\begin{aligned} c_{z,0} : y(0) &= (z(0))^{-1/2} = (c_{z,0} e^{-0^2} - 1)^{-1/2} = (c_{z,0} - 1)^{-1/2} = 1 \implies \\ &\implies c_{z,0} = 2; \end{aligned}$$

$$z = y^{1-3} = y^{-2} \implies$$

$$\implies z' + 2 x z = -2 x$$

$$z = \frac{c_{z,0}}{\varphi_z(x)} + \frac{1}{\varphi_z(x)} \int -2 \varphi_z(x) \, dx =$$

$$= \frac{c_{z,0}}{e^{x^2}} + \frac{-2}{e^{x^2}} \int e^{x^2} \, dx = c_{z,0} e^{-x^2} - 1;$$

$$\varphi_z(x) = \exp \left(\int (2 x) \, dx \right) = e^{x^2}$$

Exemplo 11 Eeq Bernoulli

Suponhamos que numa comunidade constituída por N indivíduos

- $y(t)$ representa o número de infectados pelo vírus da gripe A
- $x(t) = N - y(t)$ representa a população não infectada.

Considere-se que o vírus se propaga pelo contacto entre infectados e não infectados e que a propagação é proporcional ao número de contactos entre estes dois grupos. Suponhamos também que os elementos dos dois grupos se relacionam livremente entre si de modo que o número de contactos entre infectados e não infectados é proporcional ao produto de $x(t)$ por $y(t)$ isto é

$$k x(t) = k (N - y(t)) y(t)$$

em que k é a constante de proporcionalidade. se y_0 é o numero inicial de infectados, o número de infectados $y(t)$ no instante t é a solução PVI

$$y' = k (N - y) y; \quad k > 0; \quad y(0) = y_0$$

Incompleta:

$$y : y' = k (N - y) y \implies y' - N k y = -k y^2;$$

$$y = z^{-1} = \left(c e^{-N k t} + \frac{1}{N t} \right)^{-1} = \dots = \frac{N y_0}{(N - y_0) e^{-N k t} + y_0};$$

$$c : y(0)^{-1} = (z(0)) = c e^{-N k * 0} + \frac{1}{N * 0} = y_0^{-1};$$

$$z = y^{1-2} = 1/y \implies$$

$$\implies z' + N k z = k z = \frac{c_0}{\varphi(t)} + \frac{1}{\varphi(t)} \int k \varphi(t) dt =$$

$$= \frac{c_0}{c_2 e^{N k t}} + \frac{1}{c_2 e^{N k t}} \int k c_2 e^{N k t} dt = e^{-N k t} \frac{c_0}{c_2} + e^{-N k t} \frac{k c_2}{c_2} \frac{e^{N k t}}{N k t} = c e^{-N k t} + \frac{1}{N t};$$

$c = c_0/c_2;$

$$\varphi(t) = \exp \left(\int N k dt \right) = \exp (N k t + c_1) = c_2 e^{N k t};$$

$$c_2 = e^{c_1}$$

Exemplo 12 Eeq Ricatti

Determine a solução do PVI

$$y' - y = -2x + \frac{1}{2x^2} y^2, \quad y(1) = -2, \quad x > 0$$

Sabendo que a equação admite a solução $y = 2x$

Resposta

$$y' + (-1)y = (-2x) + \frac{1}{2x^2} y^2;$$

$$y(x) = y_1(x) + z^{-1} = -2 + z^{-1} = -2 + \left(\frac{c - e^x}{2x^2 e^x}\right)^{-1} = -2 + \frac{2x^2 e^x}{c - e^x};$$

$$z : z' + \left(2 \frac{1}{2x^2} (-2) - (-1)\right) z z' + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) z = -\frac{1}{2x^2}$$

$$z = \dots = \frac{c - e^x}{2x^2 e^x}$$

6 Operador de Derivação

$$D_x^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

$$D_x^k : C^n(I) \rightarrow C^{n-k}(I)$$

$$D_x^k : y \rightarrow y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$$

7 Equação Diferencial Linear de ordem n

$$\sum_{i=0}^n a_i D_x^i(y) = \left(\sum_{i=0}^n a_i D_x^i \right) y = P y = f(x)$$

- a_n é o Coeficiente líder
- Forma normal é quando esta escrita de forma que $a_n = 1$

Example

$$D_x^3(y) + x^2 D_x^2(y) - 5x D_x(y) + y = x \cos(x)$$

está escrita na forma normal

Operador P

$$P = D_x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i D_x^i$$

Linearidade

Dadas duas funções $y_1, y_2 \in C^n(I)$ e α, β números reais

$$P(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha P y_1 + \beta P y_2$$

Espaço Solução da equação

$$\text{nuc}(P) : A = \{y \in C^n(I) : P y = 0\}$$

O conjunto A é núcleo do operador P , sendo portanto um subespaço de $C^n(I)$. Este subespaço é designado por espaço solução da equação

Teorema: Solução que satisfaz $P y = 0$

$$y = \varphi(x) : D_x^i \varphi(x_0) = \alpha_i \\ x_0 \in I \wedge \alpha_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$$

Dado um x_0 no intervalo aberto I e constantes reais arbitrárias α , existe uma e só uma função que satisfaz $P y = 0$

Finidade da dimensão de $\text{nuc}(P)$

$$\dim(\text{nuc}(P)) = n \iff P = D_x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i D_x^i$$

Seja o espaço solução da equação $P y = 0$ ($\text{nuc}(P)$) um subespaço do espaço linear $C^n(I)$, Não limitado a ter dimensão infinita, a dimensão do núcleo de P deve ser n (limitado).

Solução trivial

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i \iff \\ \iff \sum_{i=0}^n \alpha_i y_i(x) = 0 : \{y\} \text{ é linearmente independente}$$

Sistema fundamental de soluções de $P y = 0$

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$$

- $\{y_i \forall i\}$ é um sistema fundamental de soluções de $P y = 0$
- $c_i \forall i$ são constantes arbitrárias que constituem a sua solução (ou integral) geral

Quaisquer n soluções linearmente independentes de $P y = 0$ que constituem uma base de $\text{nuc}(P)$

8 Abaixando a ordem de uma EDO

$$z(x) : y = \varphi(x) \int (z) \, dx;$$
$$P y = 0$$

- $\varphi(x)$ é uma solução particular da equação linear homogênea de ordem n
($P y = 0$)

Exemplo 13 Baixamento de grau de uma Eq lin homogenea

Determine a solução geral da equação

$$P y = 0; \quad P = (D_x^2 + \frac{1}{x^2} D_x - \frac{1}{x^2}); \quad x > 0$$

Sabendo que $\varphi(x) = x$ é uma solução.

Resposta

$$P y = \left(D_x^2 + \frac{1}{x} D_x - \frac{1}{x^2} \right) y = 0;$$

$$y = \varphi(x) \int z(x) \, dx = x \int \frac{c}{x^3} \, dx = x c \left(c_1 + \frac{x^{-2}}{-2} \right) = x c_2 + \frac{c_3}{x};$$

$$z = \frac{c}{x^3};$$

$$c \in \mathbb{R};$$

$$\begin{aligned} P y &= \left(D_x^2 + \frac{1}{x} D_x - \frac{1}{x^2} \right) \left(x \int z(x) \, dx \right) = \\ &= (2z + x z') + \frac{1}{x} \left(\int z(x) \, dx + x z \right) - \frac{1}{x^2} \left(x \int z(x) \, dx \right) = \\ &= 3z + x z' = 0; \end{aligned}$$

$$D_x y = D_x \left(\varphi(x) \int z(x) \, dx \right) = D_x \left(x \int z(x) \, dx \right) = \int z(x) \, dx + x z;$$

$$D_x^2 y = D_x^2 \left(\varphi(x) \int z(x) \, dx \right) = z + z + x z' = 2z + x z'$$

9 Wronskiano: check dependencia linear

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) = \det(w); \quad w \in \mathcal{M}_{n,m} : w_{i,j} = D_x^j f_i$$

$$W(f_1, f_2, \dots, f_n)(x) \begin{cases} = 0 & \text{Linear dependent} \\ \neq 0 & \text{Linear independent} \end{cases}$$

10 Método de variação das constantes arbitrárias para equação linear de ordem n

$$y : \begin{pmatrix} a_1(x) \\ +a_1(x) D_x \\ +a_2(x) D_x^2 \\ +a_3(x) D_x^3 \end{pmatrix} y = f(x)$$

$$y = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + c_3(x) y_3(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c'_1(x) D_x^0 y_1(x) + c'_2(x) D_x^0 y_2(x) + c'_3(x) D_x^0 y_3(x) = 0 \\ c'_1(x) D_x y_1(x) + c'_2(x) D_x y_2(x) + c'_3(x) D_x y_3(x) = 0 \\ c'_1(x) D_x^2 y_1(x) + c'_2(x) D_x^2 y_2(x) + c'_3(x) D_x^2 y_3(x) = \frac{f(x)}{a_3(x)} \end{array} \right\}$$

Exemplo 14 Metodo das var const arb

$$y'' + 9y = 1/\cos(3x)$$

Resposta

$$y : \begin{pmatrix} 9 \\ +0 \text{ } D_x \\ +1 \text{ } D_x^2 \end{pmatrix} y = \frac{1}{\cos(3x)}$$

$$y = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) = c_1(x) \cos(3x) + c_2(x) \sin(3x);$$

$$c_1(x) = \int c'_1(x) \, dx;$$

$$c_2(x) = \int c'_2(x) \, dx$$

$$c'_1(x) = \frac{1}{W(\cos(3x), \sin(3x))} \begin{vmatrix} 0 & D_x^0 \sin(3x) \\ \frac{1}{\cos(3x)} & D_x \sin(3x) \end{vmatrix}$$

$$c'_2(x) = \frac{1}{W(\cos(3x), \sin(3x))} \begin{vmatrix} D_x^0 \cos(3x) & 0 \\ D_x \cos(3x) & \frac{1}{\cos(3x)} \end{vmatrix}$$

$$W(\cos(3x), \sin(3x)) = \det \begin{bmatrix} D_x^0 \cos(3x) & D_x^0 \sin(3x) \\ D_x \cos(3x) & D_x \sin(3x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} c'_1(x) D_x^0 y_1(x) + c'_2(x) D_x^0 y_2(x) = 0 \\ c'_1(x) D_x y_1(x) + c'_2(x) D_x y_2(x) = \frac{1}{\cos(3x)} \end{array} \right\} = \\ & = \left\{ \begin{array}{l} c'_1(x) D_x^0 \cos(3x) + c'_2(x) D_x^0 \sin(3x) = 0 \\ c'_1(x) D_x \cos(3x) + c'_2(x) D_x \sin(3x) = \frac{1}{\cos(3x)} \end{array} \right\} = \\ & = \left\{ \begin{array}{l} c'_1(x) D_x^0 \cos(3x) + c'_2(x) D_x^0 \sin(3x) = 0 \\ c'_1(x) D_x \cos(3x) + c'_2(x) D_x \sin(3x) = \frac{1}{\cos(3x)} \end{array} \right\}; \end{aligned}$$

$$D \cos(3x) = D \cos(3x);$$

$$D \sin(3x) = D \sin(3x)$$