

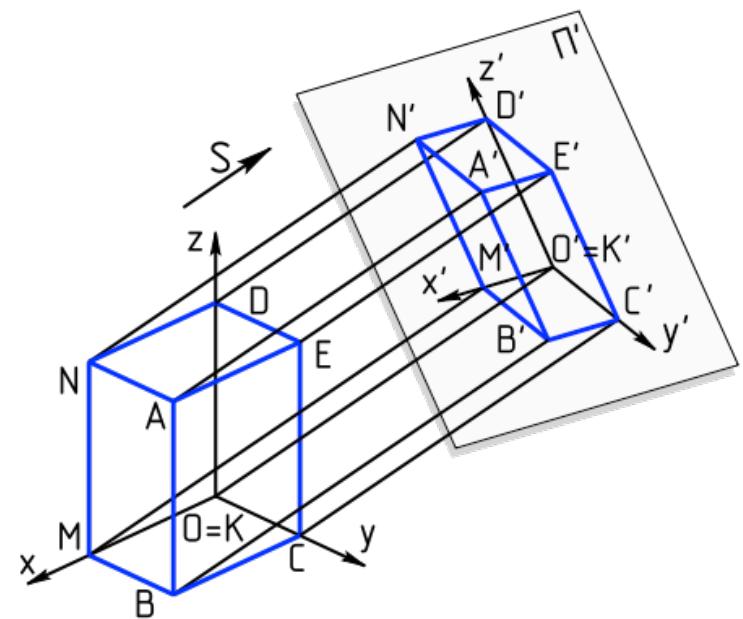
Projeções Geométricas Planas

Objetivos

- Compreender os diferentes tipos de projeções;
- Entender as diferenças em termos de efeitos provocados por cada projeção;
- Deduzir a matriz para uma determinada projeção.

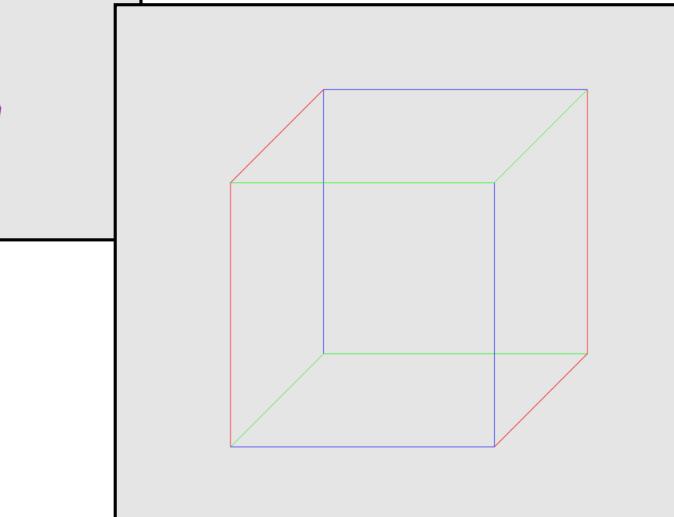
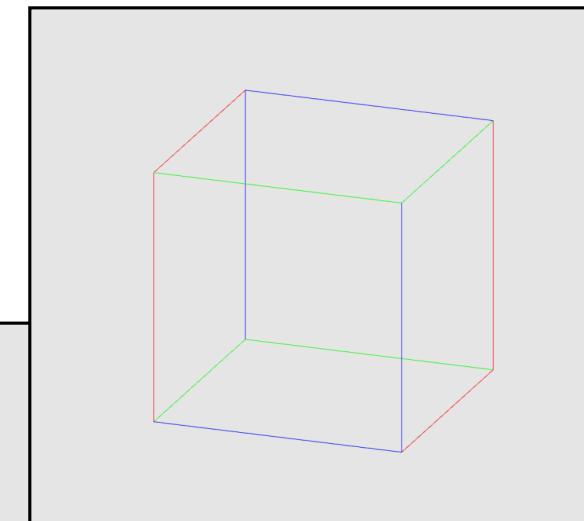
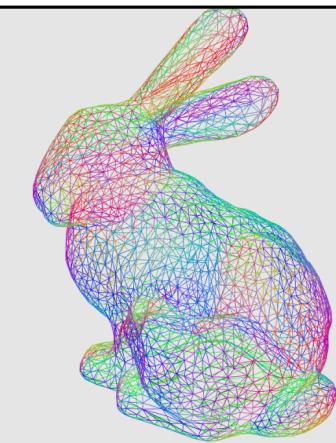
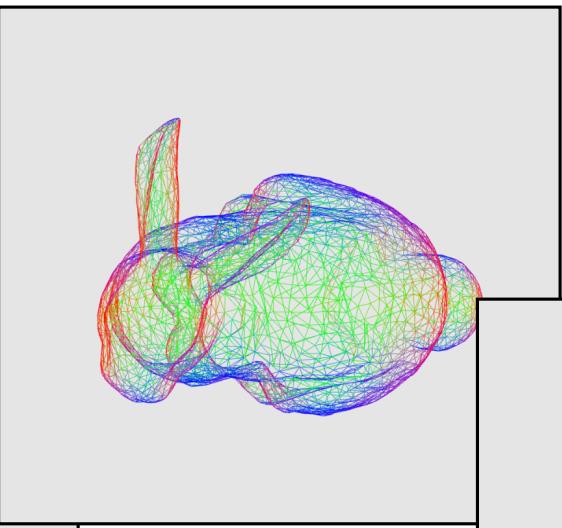
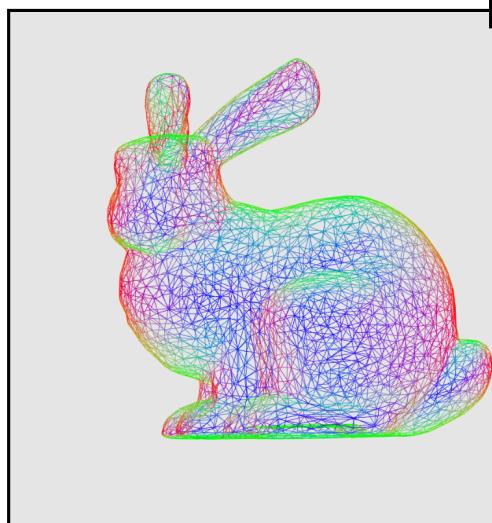
Projeção Geométrica Plana

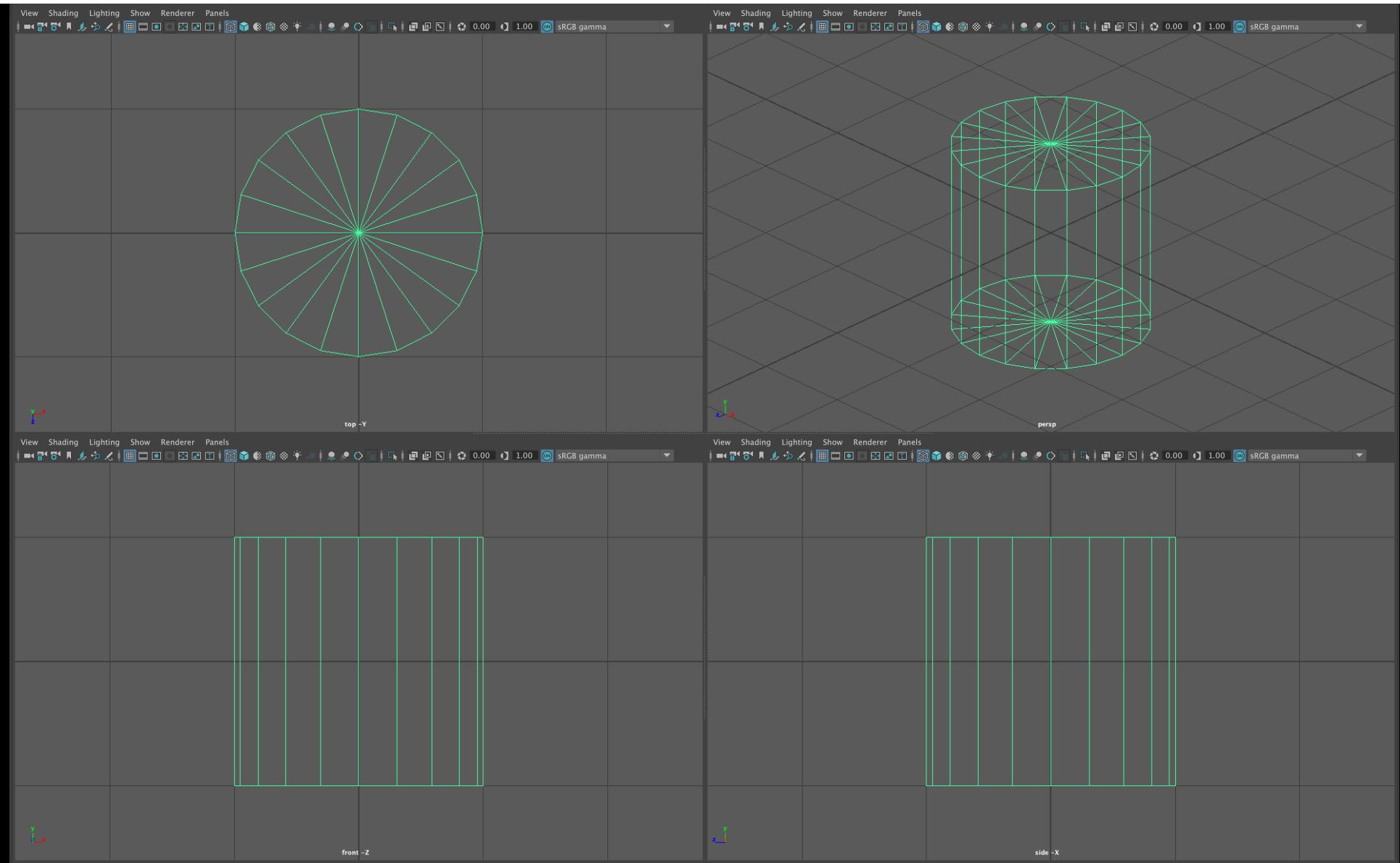
- A superfície de projeção é um plano
- As projetantes são linhas retas
- A (imagem da) projeção de um ponto é a interseção da projetante com o plano

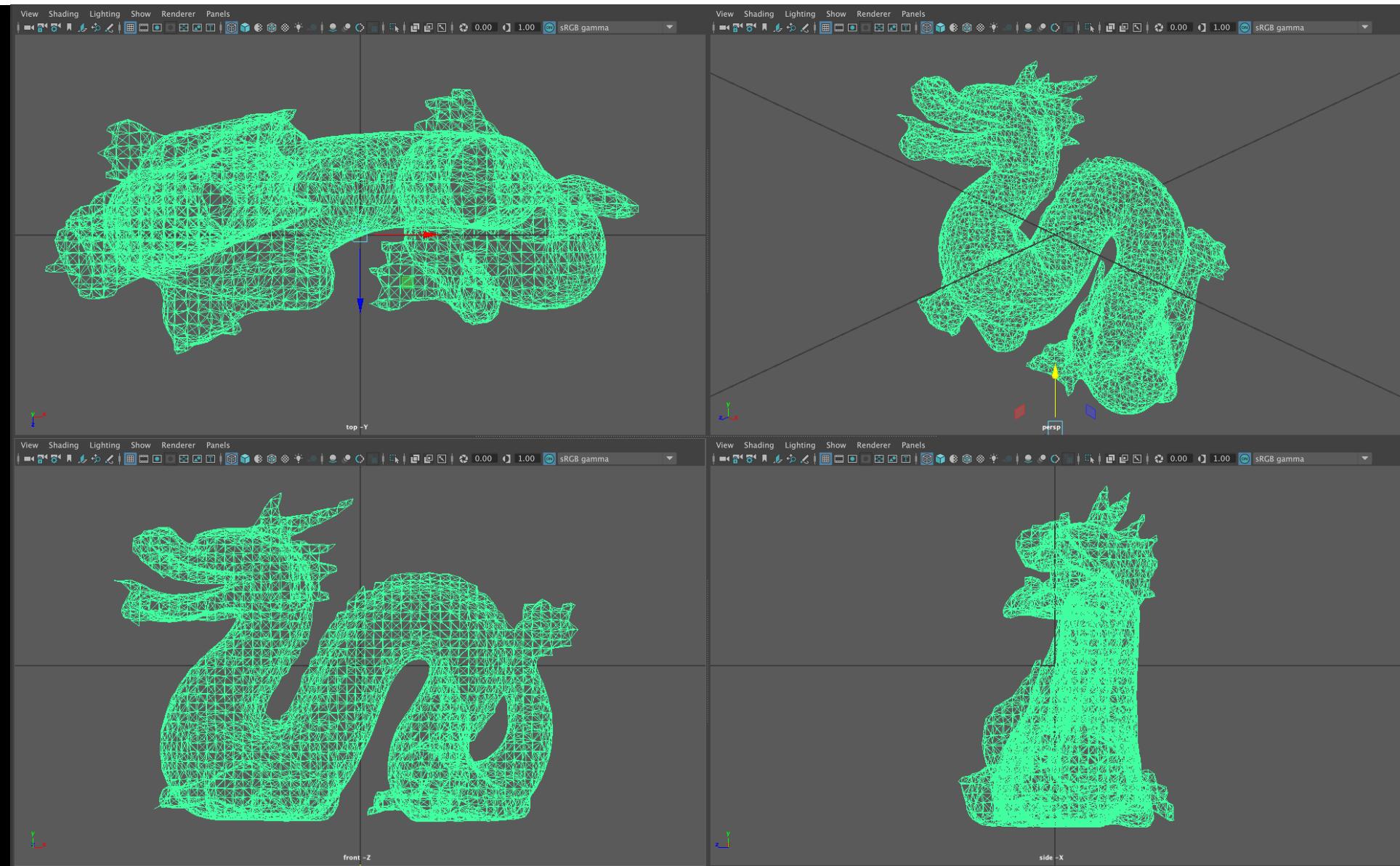


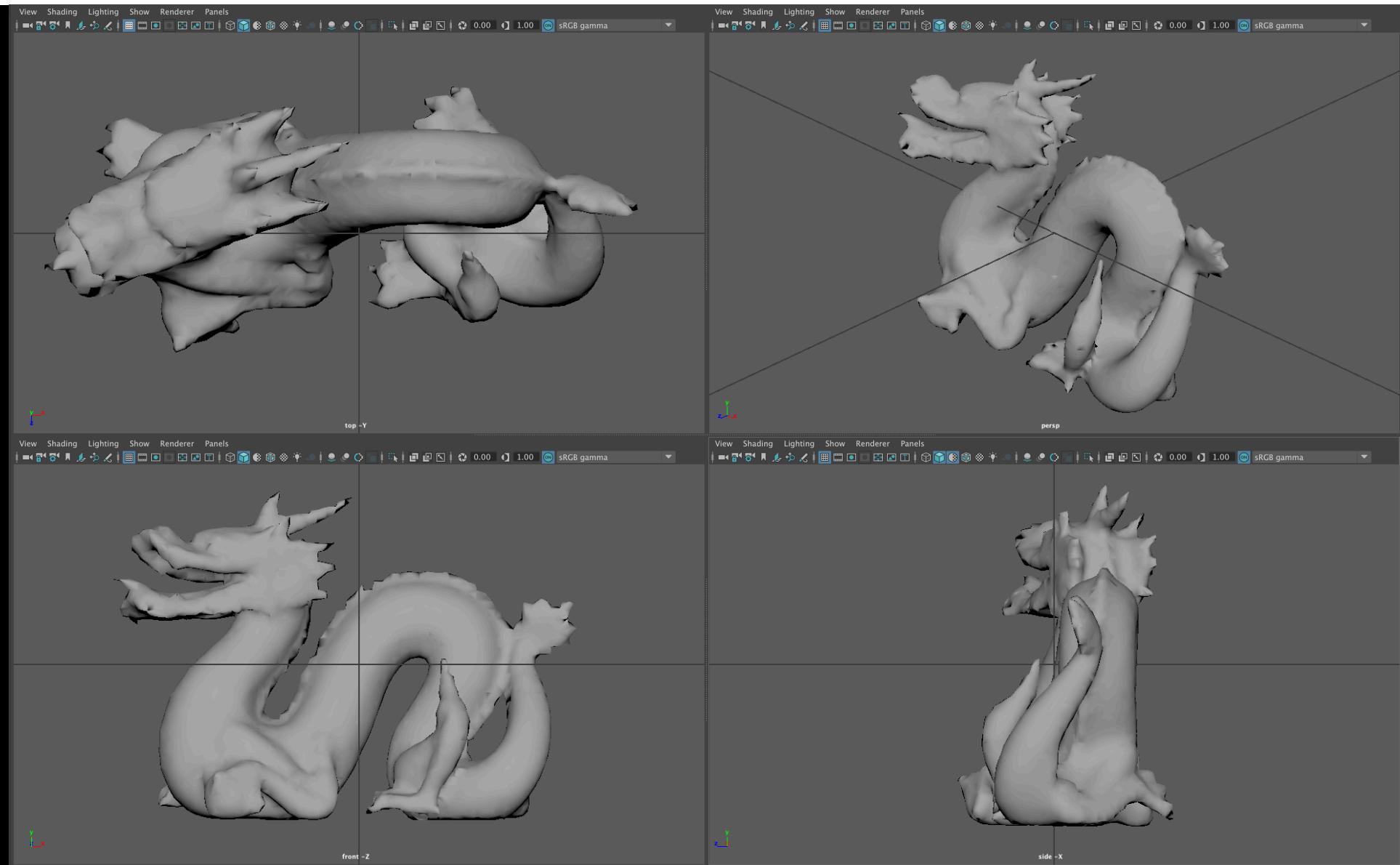
http://en.wikipedia.org/wiki/3d_projection

Exemplos

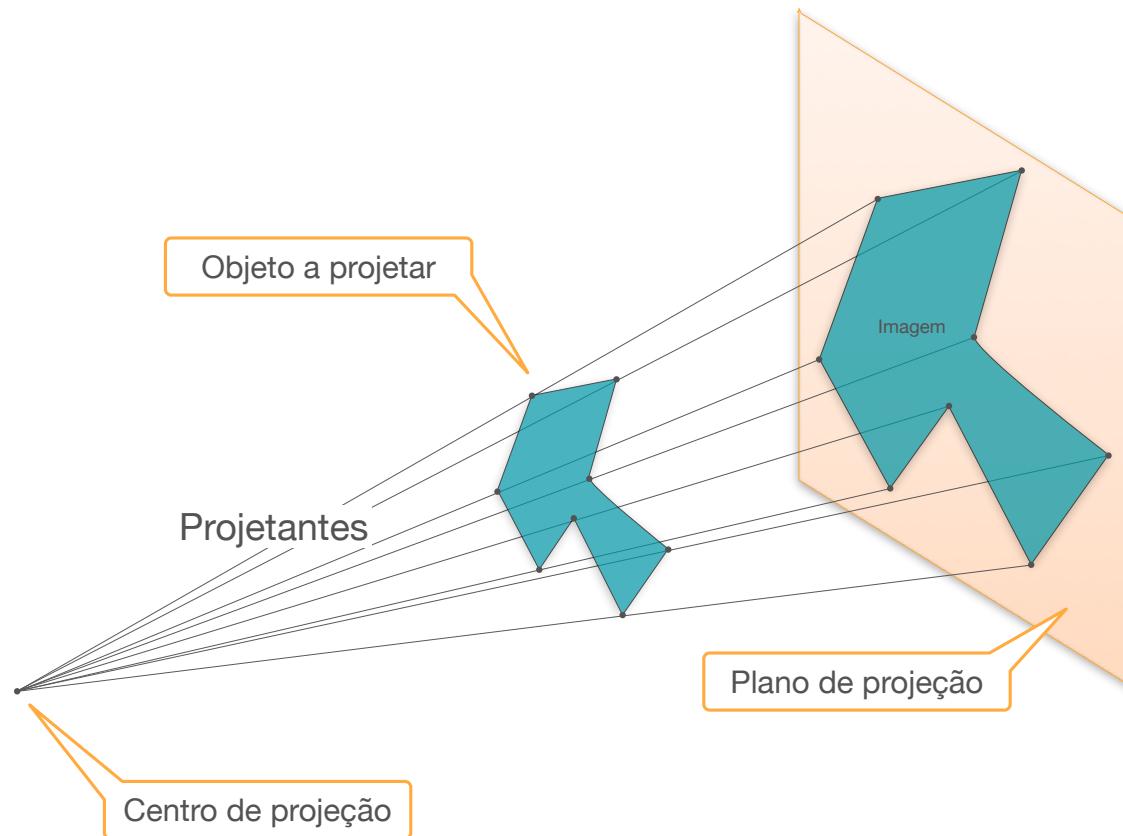




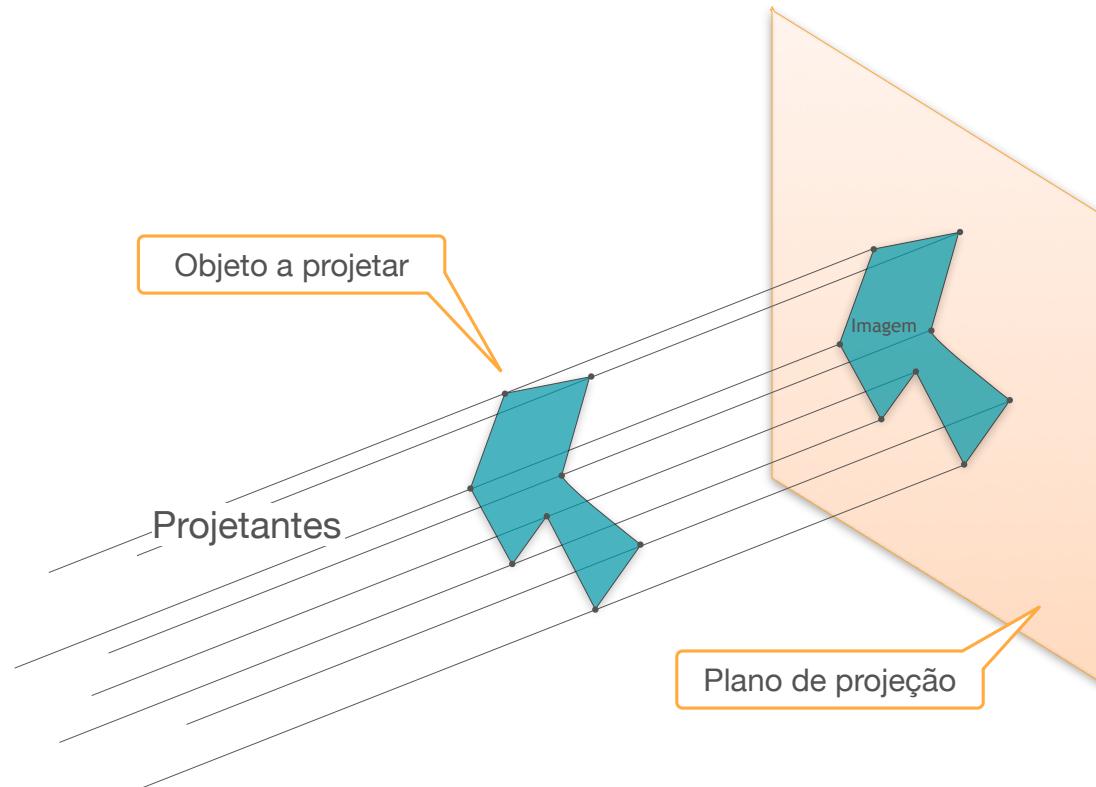




Projeção Perspetiva

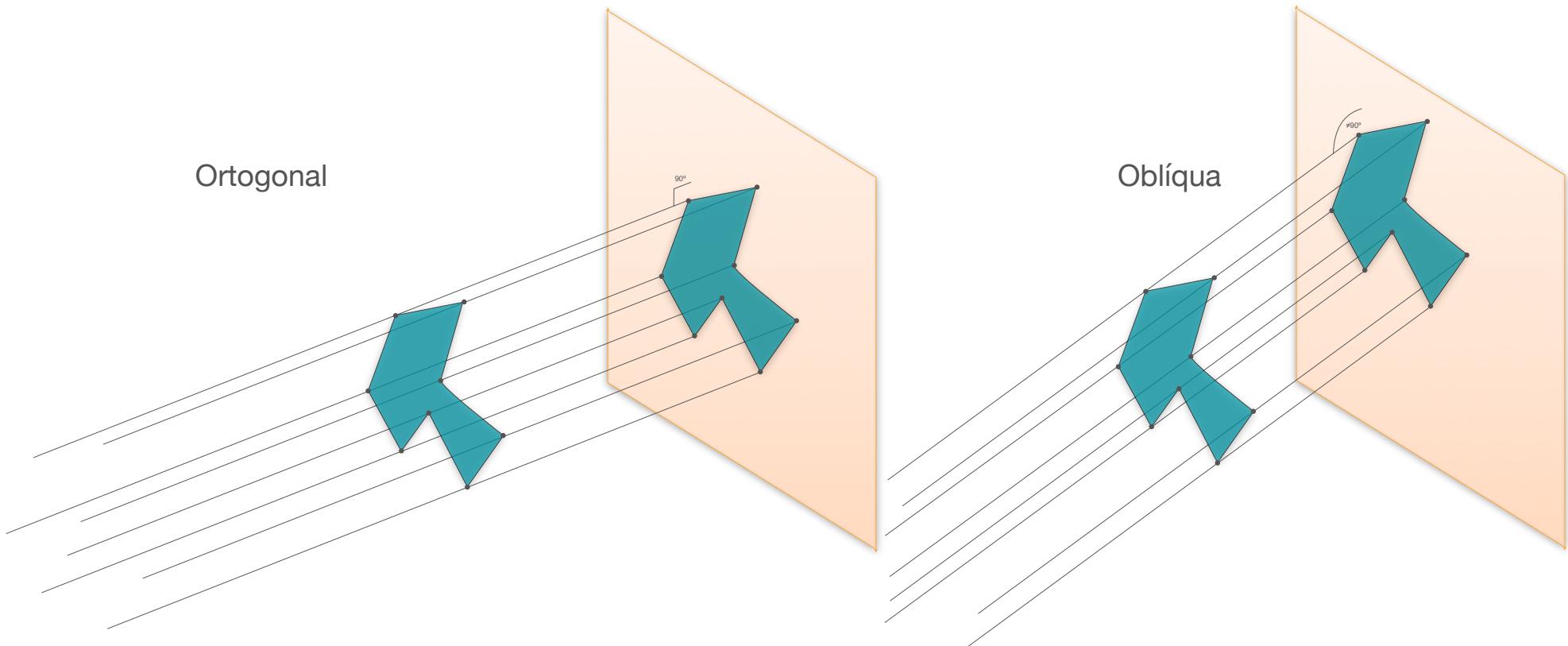


Projeção Paralela



Projeção Paralela

A projeção paralela é um caso particular da projeção perspetiva (centro de projeção no infinito)



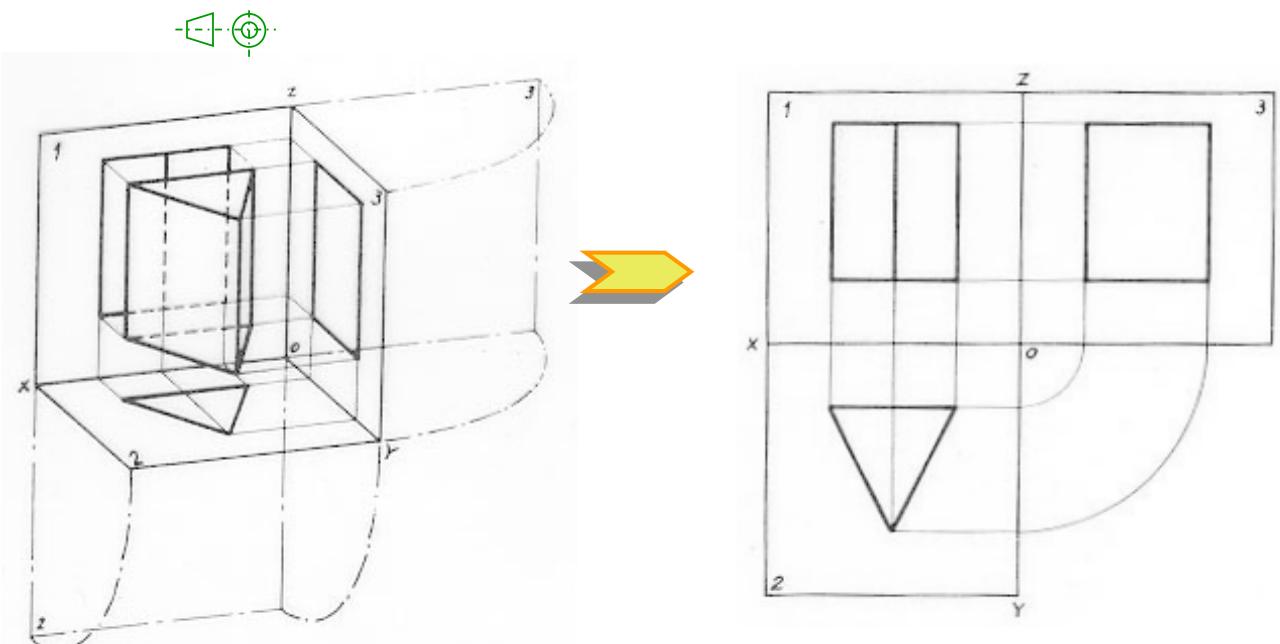
Classificação de projeções no desenho técnico

Central ou cónica (perspetiva)				
Paralela	Oblíqua	Simples	Axonométrica	Isométrica
				Dimétrica
Paralela	Ortogonal	Dupla	Cotada	Trimétrica
				Método Europeu, do 1º Diedro ou Método E
Paralela	Ortogonal	Múltipla	Método Americano, do 3º Diedro ou Método A	Método Americano, do 3º Diedro ou Método A

Projeções Ortogonais Múltiplas

PROJEÇÕES ORTOGONIAIS MÚLTIPLAS

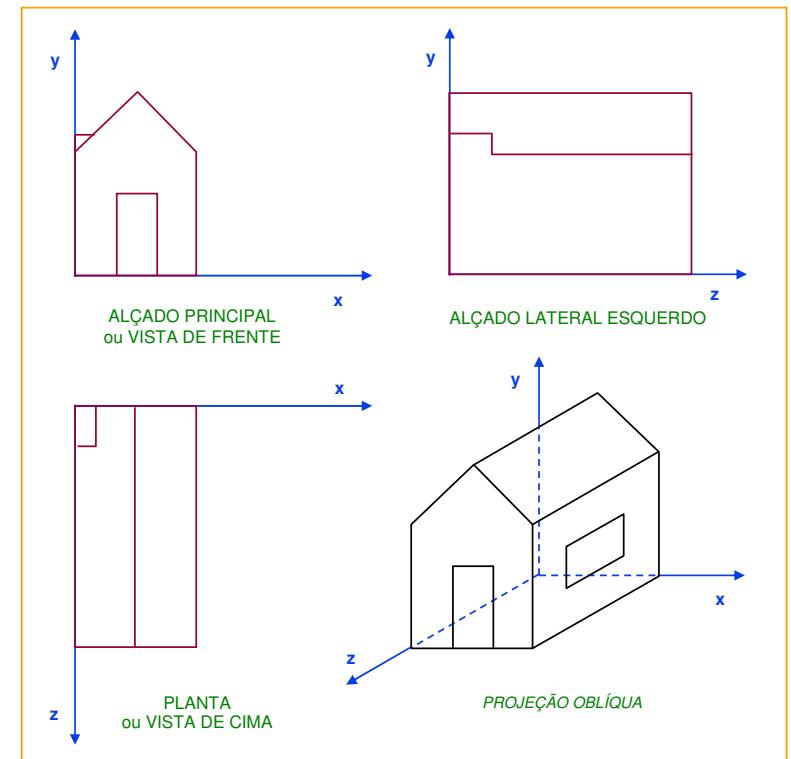
(Método Europeu)



M.Próspero

Projeções Ortogonais Múltiplas

- As diferenças entre os métodos A e E baseiam-se nas relações entre:
 - (1) Observador
 - (2) Objeto
 - (3) Plano de projeção
 - Método A: (3) entre (1) e (2)
 - Método E: (2) entre (1) e (3)
- É usual usar-se o quadrante livre para se representar o objeto usando outro tipo de projeção (neste exemplo, uma projeção oblíqua)

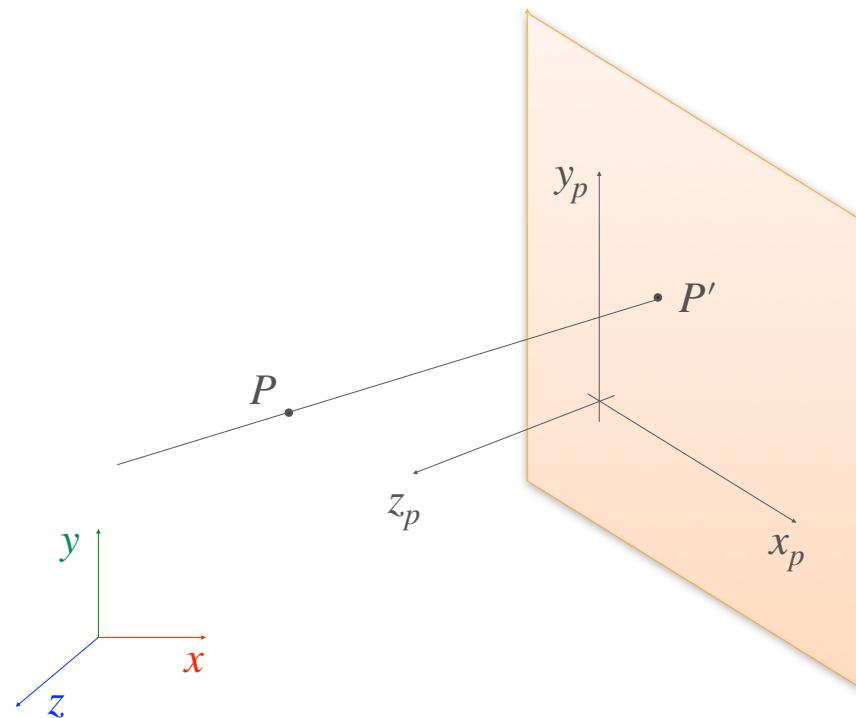


Matemática das Projeções Geométricas Planas

- Dado um ponto P , em 3D
- Queremos usar uma matriz de projeção M_{proj} para projetar e obtermos assim a imagem P'
- Considerando os pontos representados como vetores coluna, em coordenadas homogéneas:

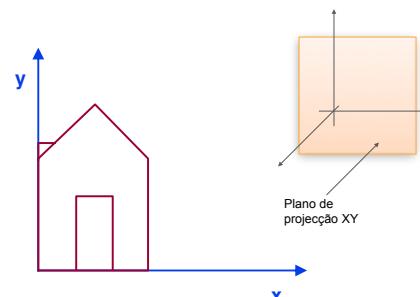
$$P' = M_{proj} \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ w_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = M_{proj} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

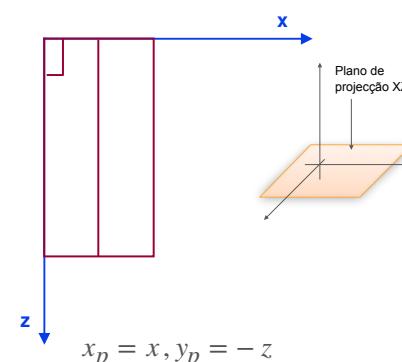


Matemática da Projeção Ortogonal

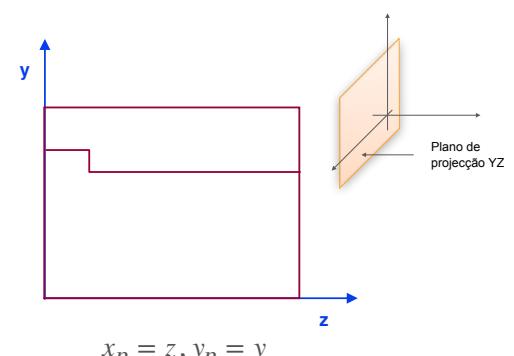
$$M_{AP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$M_{PLANTA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



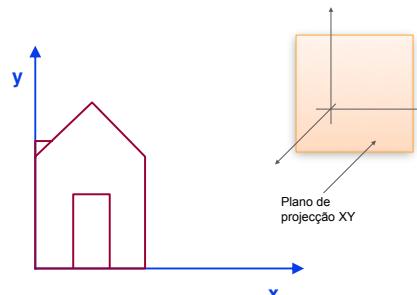
$$M_{ALE} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- + Mostra as dimensões exatas das faces paralelas ao plano de projeção
- Pode ser difícil avaliar a forma tridimensional do objeto

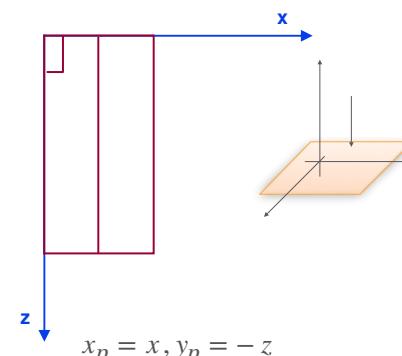
Matemática da Projeção Ortogonal

$$M_{AP} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



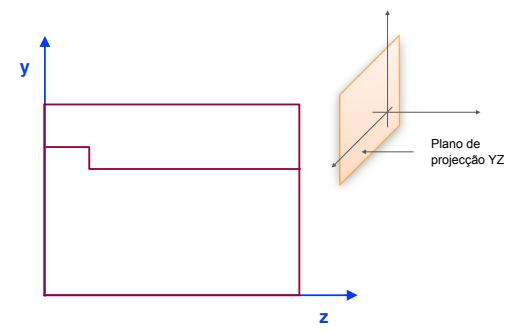
$$x_p = x, y_p = y$$

$$M_{PLANTA} = M_{AP} \cdot R_x(90)$$



$$x_p = x, y_p = -z$$

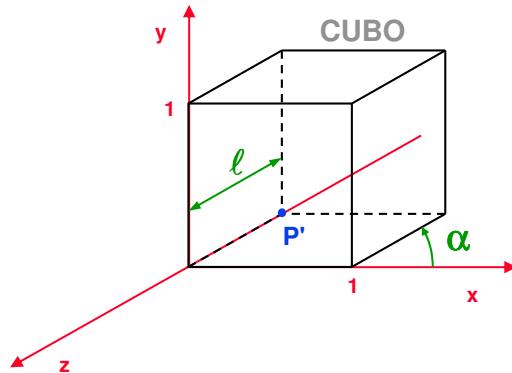
$$M_{ALE} = M_{AP} \cdot R_y(90)$$



$$x_p = z, y_p = y$$

Em alternativa à dedução matemática direta de cada uma das matrizes de projeção, podemos usar a interpretação geométrica com base em rotações.

Projeção oblíqua



$$P(0,0, -1) \rightarrow P'(l \cos(\alpha), l \sin(\alpha), 0)$$

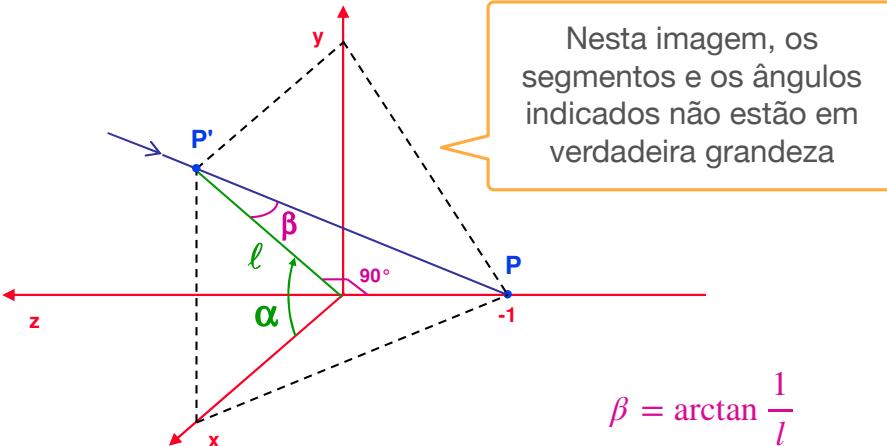
$$DOP = P - P' = \begin{bmatrix} -l \cos(\alpha) \\ -l \sin(\alpha) \\ -1 \end{bmatrix}$$

Direção de projeção

ℓ - fator de redução ou encurtamento

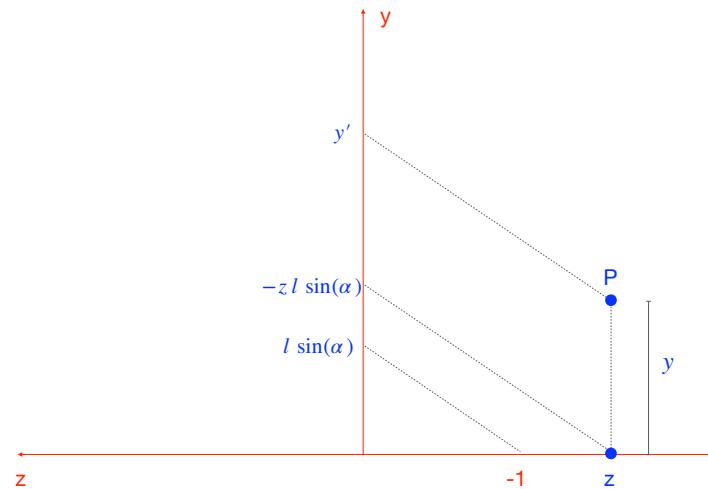
α - ângulo de fuga

(Valores medidos no espaço da imagem)



$$\beta = \arctan \frac{1}{l}$$

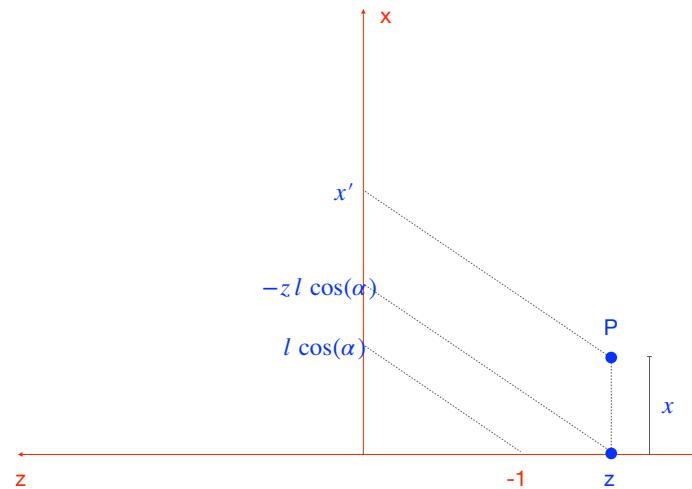
Projeção oblíqua



$$P(0,0,-1) \rightarrow P'(l \cos(\alpha), l \sin(\alpha), 0)$$

$$P(0,0,z) \rightarrow P'(-z l \cos(\alpha), -z l \sin(\alpha), 0)$$

$$P(x,y,z) \rightarrow P'(x - z l \cos(\alpha), y - z l \sin(\alpha), 0)$$



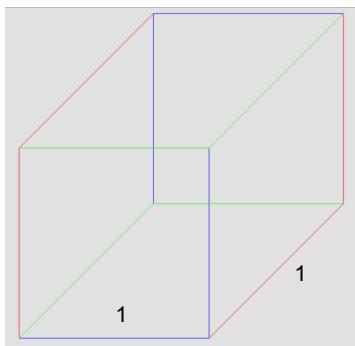
$$M_{OBL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -l \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & -l \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção oblíqua

- As projeções oblíquas são determinadas/caracterizadas:
 - Pelo ângulo β que as projetantes fazem com o plano de projeção ($z = 0$)
 - O encurtamento l é função de β ()
 - Pela orientação das projetantes, independentemente do ângulo com o plano de projeção.
 - Embora a amplitude de α possa ser qualquer, habitualmente usam-se valores de 45° ou 30°

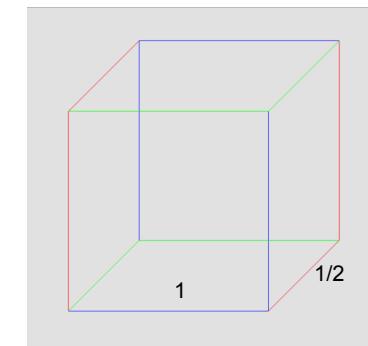
Projeção cavaleira

$$l = 1 \Leftrightarrow \beta = 45^\circ$$



Projeção gabinete

$$l = 0.5 \Leftrightarrow \beta = 63.4^\circ$$

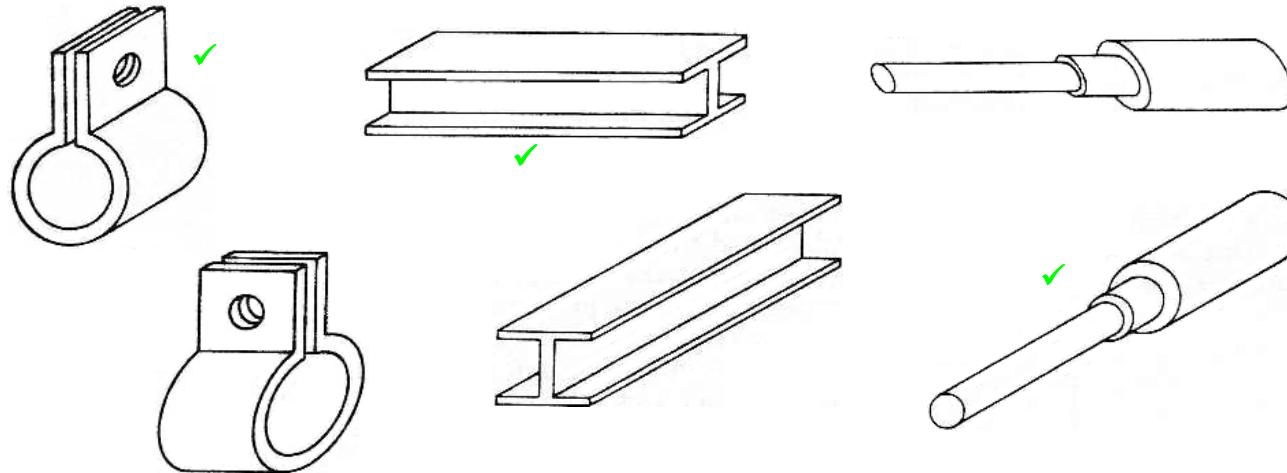


Na prática não se usam valores de $l > 1$; neste exemplo $\alpha = 45^\circ$

A projeção ortogonal obtém-se para $l = 0 \Leftrightarrow \beta = 90^\circ$

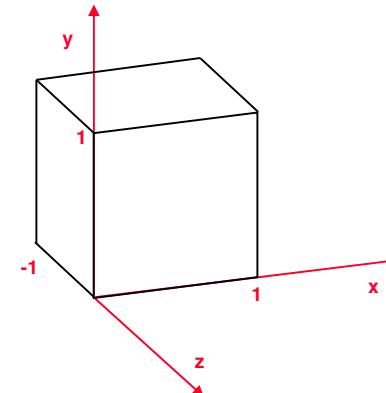
Regras da projeção oblíqua

- R1) O plano de projeção deverá ser paralelo às faces mais regulares do objeto ou às que contêm formas curvas
- R2) O plano de projeção deverá ser paralelo à face de maior comprimento do objeto.
- R3) A regra R1 tem preferência sobre R2.

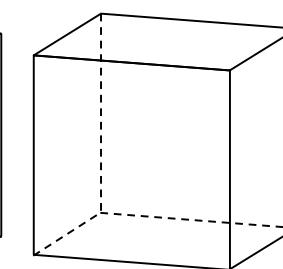
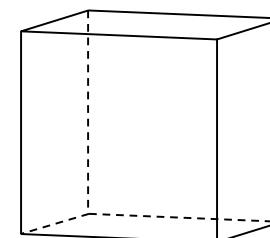
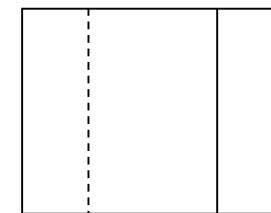
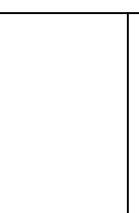
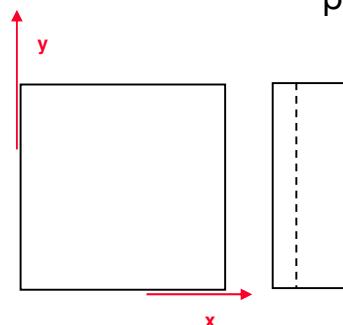


Projeção axonométrica

Objeto e o seu sistema de coordenadas:



Ação sobre o objeto, visualizando-se o alçado principal:

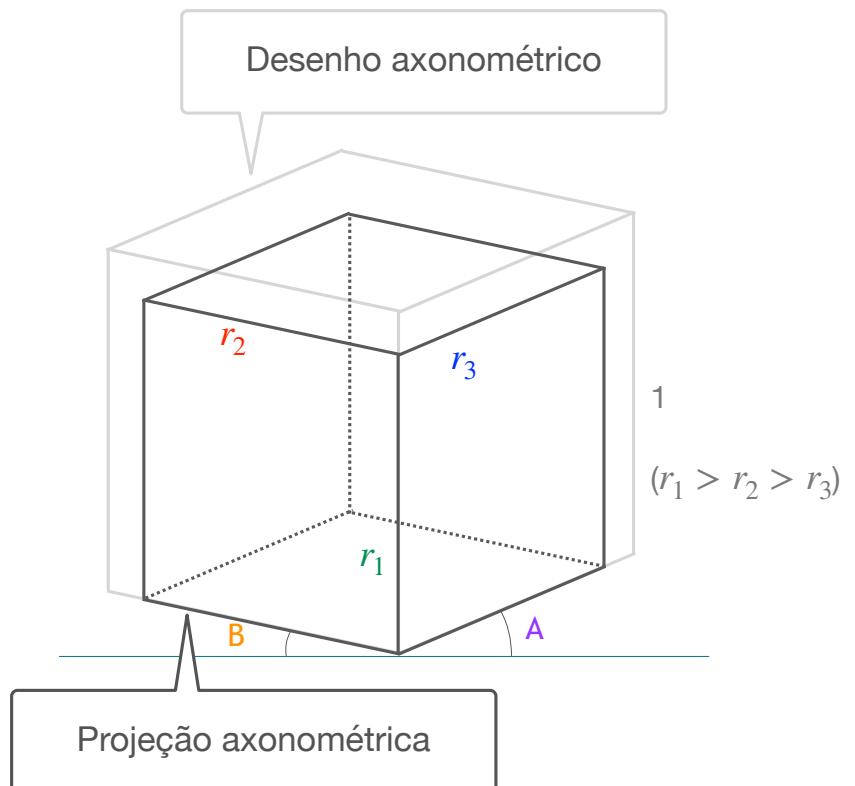


Tratamento matemático, para o caso geral:

$$M_{AX} = M_{AP} \cdot R_x(\gamma) \cdot R_y(\theta)$$

Projeção axonométrica vs. desenho axonométrico

- Como resultado da projeção axonométrica podemos observar:
 - Fatores de escala (r_1 , r_2 e r_3) ao longo dos 3 eixos principais do objeto
 - Dois ângulos (A e B) formados pelas direções projetadas de dois dos eixos do objeto e a direção horizontal da projeção
- A diferença da **projeção axonométrica** para o **desenho axonométrico** é que neste a figura é ampliada uniformemente de modo a que o maior dos factores de escala (r_1, r_2, r_3) seja convertido em 1.



Relações matemáticas

- Os parâmetros da projeção (θ e γ) estão relacionados com os valores observados na imagem (r_1 , r_2 , r_3 , A e B), da seguinte forma:

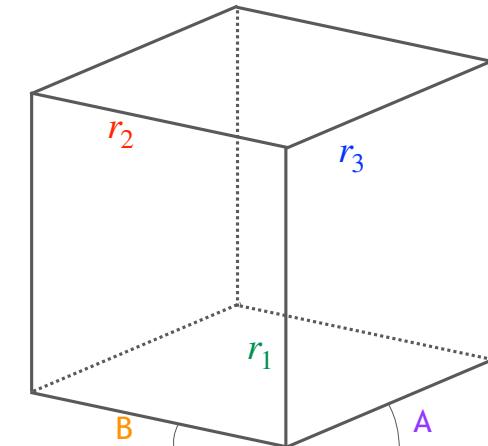
$$\theta = \arctan \sqrt{\tan A / \tan B} - \pi/2$$

$$\gamma = \arcsin \sqrt{\tan A \tan B}$$

$$r_1 = \cos \gamma$$

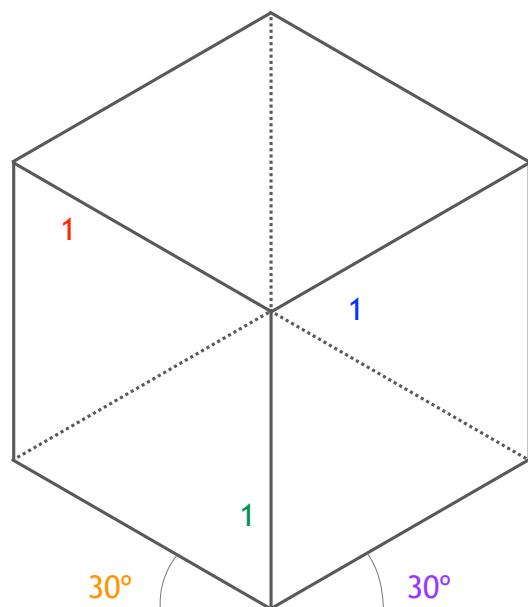
$$r_2 = \cos \theta / \cos B$$

$$r_3 = -\sin \theta / \cos A$$

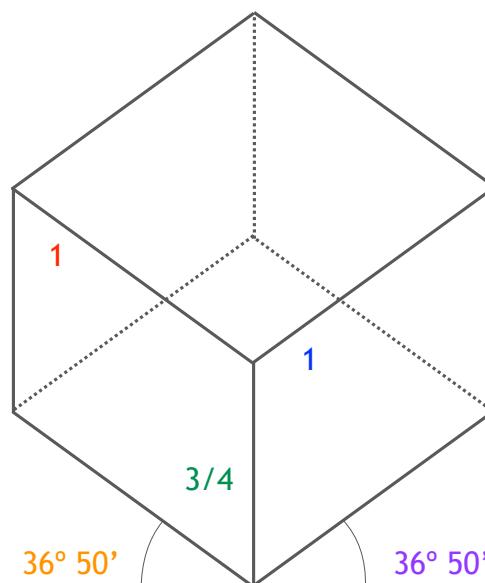


- Exemplos de aplicação:
 - A = B = 30°
 $r_1 = r_2 = r_3 \approx 0.81650$
 - A = 36°50', B = 16°20'
 $r_1 = r_2 \approx 0.88346, r_3 \approx 0.66257$
 - A = 54°16', B = 23°16'
 $r_1 \approx 0.63432, r_2 \approx 0.95128, r_3 \approx 0.83229$

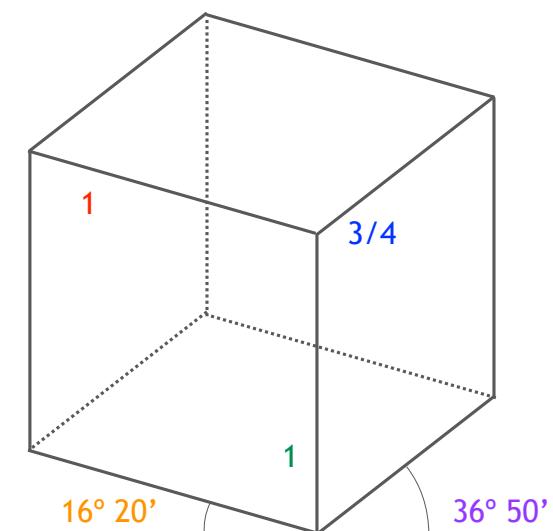
Desenho axonométrico



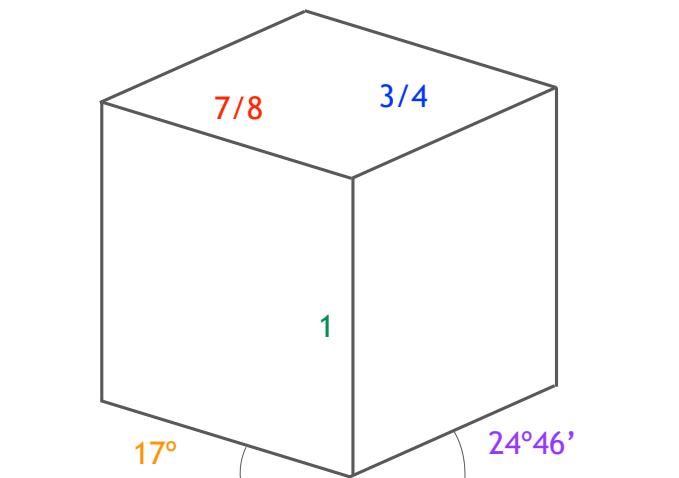
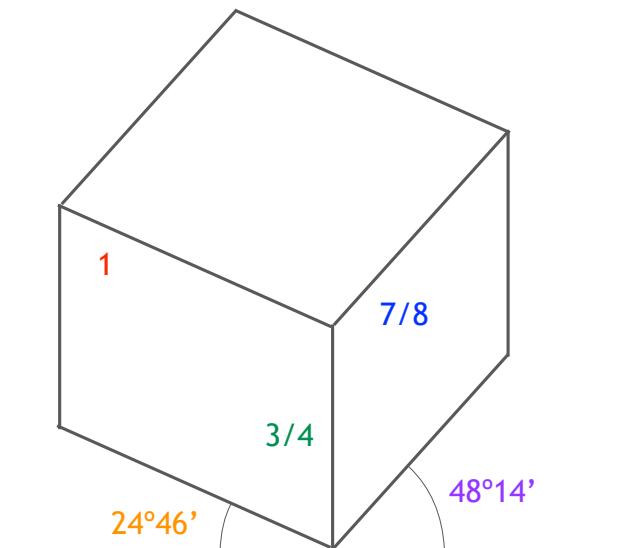
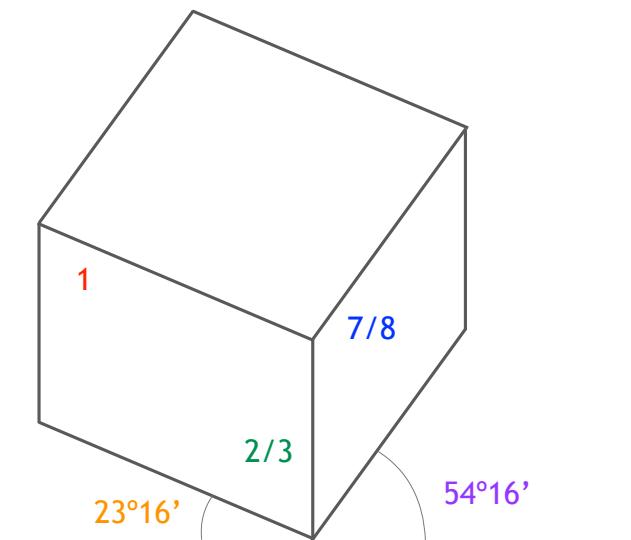
Isometria



Dimetrias



Desenho axonométrico



Trimetrias

Projeção axonométrica

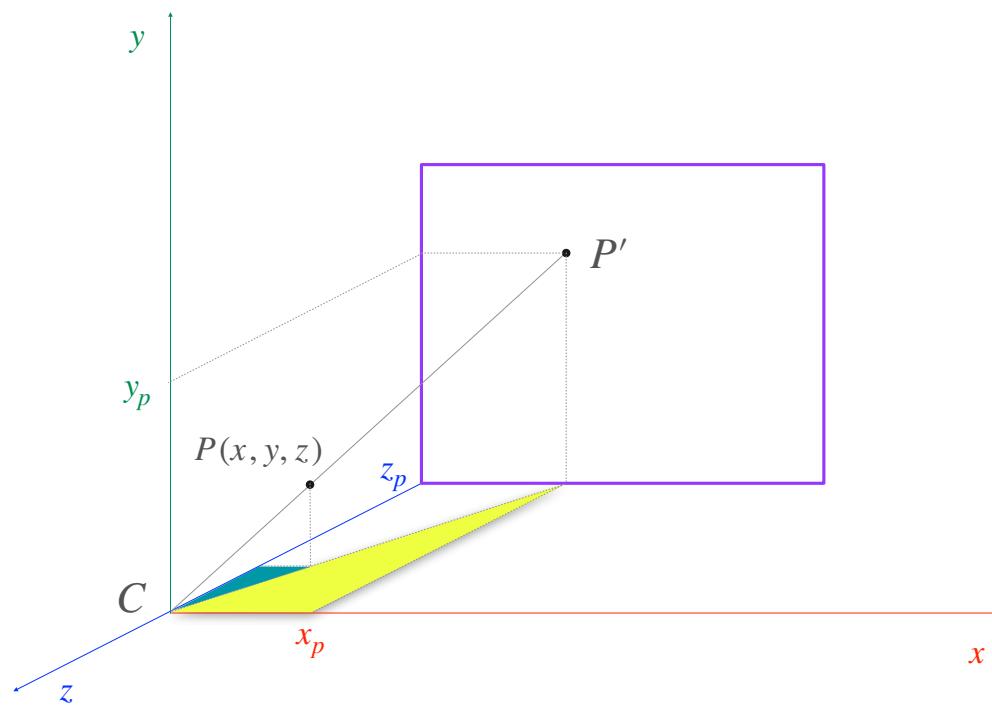
- Uma projeção axonométrica é **completamente determinada**/caracterizada por um dos seguintes conjuntos de valores:
 - Pelos ângulos que os eixos coordenados locais ao objeto fazem com o plano de projeção
 - Pelos três fatores de escala
 - Pelos ângulos entre os eixos coordenados depois de projetados (A e B)
- Propriedades da axonometria*:
 - O paralelismo de linhas é preservado
 - Os ângulos não são preservados
 - Os comprimentos são medidos usando-se fatores de escala correspondentes às 3 direções axiais.

* origem do nome axonometria - medida segundo os eixos.

Projeção perspetiva

- Até agora vimos várias projeções, mas todas elas paralelas.
- A projeção perspetiva destaca-se das projeções paralelas por não manter o paralelismo das linhas.
- Vamos ver 2 casos onde a projeção é efetuada ou no plano $z=0$, ou num plano a ele paralelo. Em ambos os casos o centro de projeção está situado ao longo do eixo Z.

Projeção perspetiva: plano em $z = d \neq 0$, centro na origem



$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z}$$

$$\frac{y_p}{d} = \frac{y}{z}$$

$$z_p = d$$

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = M_{per} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

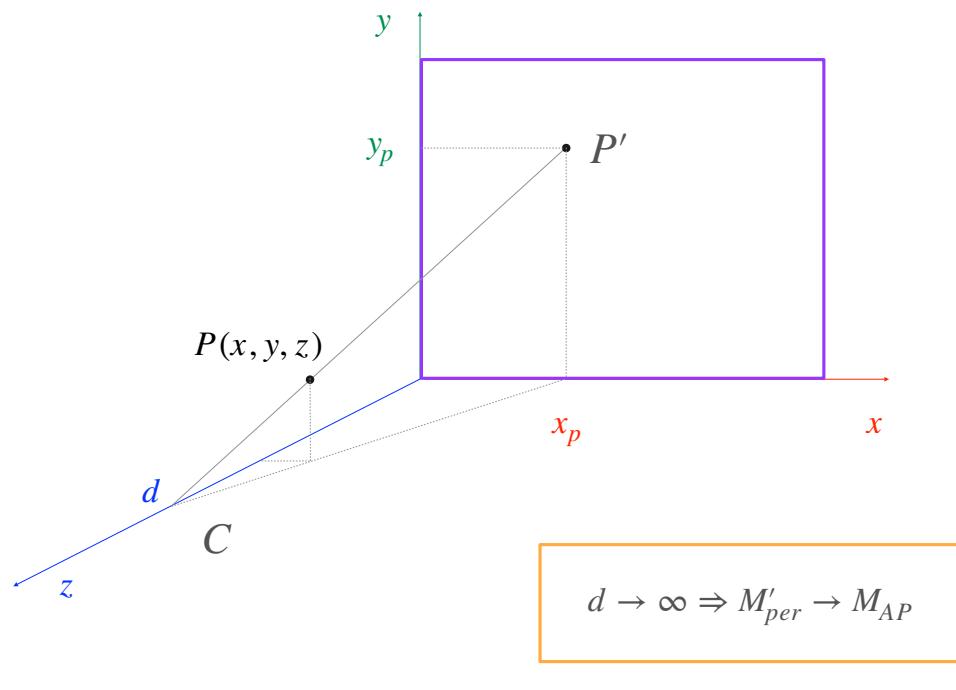
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ z/d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

P'

M_{per}

P

Projeção perspetiva: plano em $z = 0$, centro em $(0,0,d)$



$$\begin{aligned}
 \frac{x_p}{d} &= \frac{x}{d-z} \Leftrightarrow x_p = \frac{x}{1-z/d} \\
 \frac{y_p}{d} &= \frac{y}{d-z} \Leftrightarrow y_p = \frac{y}{1-z/d} \\
 z_p &= 0 \Leftrightarrow z_p = \frac{0}{1-z/d}
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} = M'_{per} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1-z/d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

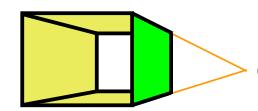
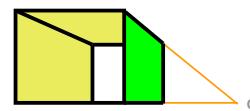
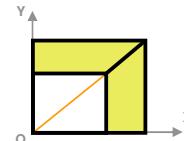
P' M'_{per} P

Projeção perspetiva: pontos de fuga

Implicações do paralelismo das direções principais do objeto com as direções axiais

1 ponto de fuga

Duas famílias de arestas paralelas a XY



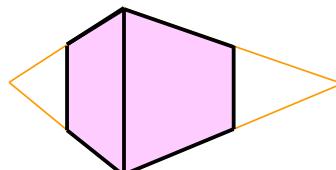
Modelo: Paralelepípedo alinhado com XYZ...
(caixa sem tampa nem fundo)

deslocado para a esquerda...

e também para baixo.

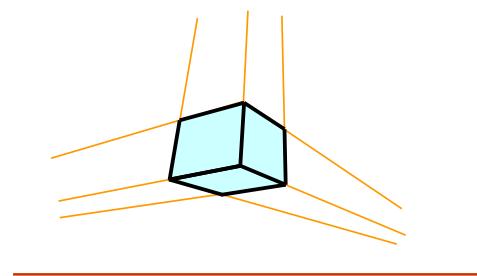
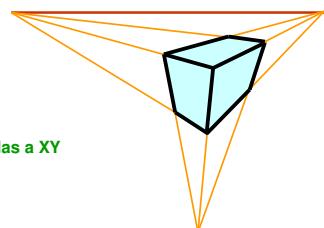
2 pontos de fuga

Uma família de arestas paralelas a XY



3 pontos de fuga

Nenhuma família de arestas paralelas a XY



M.Próspero

