Área de uma superfície

Área da parte do gráfico de uma função $z = f(x,y)$ que está por cima da região plana D

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \wedge z = f(x,y)\}$$

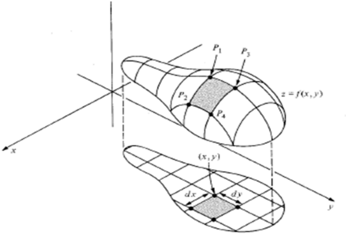
$$P_1 = (x, y, f(x,y)),$$

$$P_2 = (x + dx, y, f(x + dx, y)) \approx (x + dx, y, f(x,y) + f_x(x,y)\,dx),$$

$$P_3 = (x, y + dy, f(x, y + dy)) \approx (x, y + dy, f(x,y) + f_y(x,y)\,dy),$$

$$P_4 = (x + dx, y + dy, f(x + dx, y + dy))$$

$$\approx (x + dx, y + dy, f(x,y) + f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy).$$



Área de uma superfície

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \left(dx, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx\right)$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \left(0, dy, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy\right)$$

$$\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2} dx\, dy$$

$$\text{Área}(S) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)^2} dx\, dy.$$

Exemplo

Exemplo

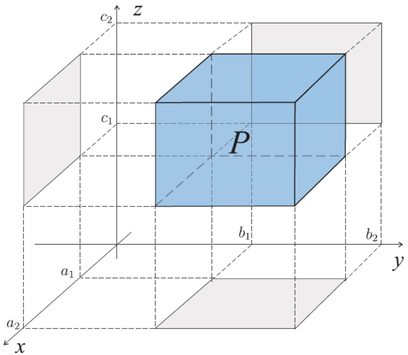
Determinar a área da parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *que está por cima da região plana* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0\}$.

Resolução: $z = f(x, y)$, $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

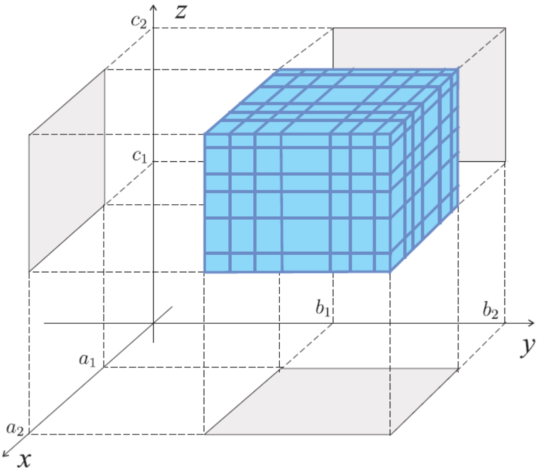
$$\text{Área} = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dxdy = \int_0^1 \int_0^\pi r(1 - r^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta\, dr = \pi.$$

Um paralelepípedo

$$\begin{aligned} P &= [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2] \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a_1 \le x \le a_2 \wedge b_1 \le y \le b_2 \wedge c_1 \le z \le c_2\}. \end{aligned}$$



Uma partição de um paralelepípedo



Partição de P

Dados $n+2$ pontos

$$a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = a_2,$$

$m+2$ pontos

$$b_1 = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m < y_{m+1} = b_2$$

e $l+2$ pontos

$$c_1 = z_0 < z_1 < \cdots < z_{l-1} < z_l < z_{l+1} = c_2,$$

ao conjunto dos $(n+1)(m+1)(l+1)$ paralelepípedos da forma

$$P_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}],$$

chama-se partição de P.

Somas de Darboux

Seja $f : P \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $\mathcal{P}$ uma partição de P. Chama-se soma inferior de Darboux de f, relativa à partição $\mathcal{P}$ a

$$s_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{l} Vol(P_{ijk}) \inf_{(x,y,z)\in P_{ijk}} f(x, y, z).$$

Chama-se soma superior de Darboux de f, relativa à partição $\mathcal{P}$ a

$$S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{l} Vol(P_{ijk}) \sup_{(x,y,z)\in P_{ijk}} f(x, y, z).$$

Aqui

$$Vol(P_{ijk}) = \underbrace{(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k)}_{\text{é o volume de } P_{ijk}}.$$

Integrais triplos de Darboux

Seja

$$f : R \to \mathbb{R}$$

uma função limitada.

- Ao ínfimo do conjunto das somas superiores de f chama-se integral triplo superior de Darboux de f em P e representa-se por

$$\overline{\iiint_P} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

- Ao supremo do conjunto das somas inferiores de f chama-se integral triplo inferior de Darboux de f em P e representa-se por

$$\underline{\iiint_P} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Integral triplo em P

Se

$$\overline{\iiint_P} f(x,y)\,dx\,dy\,dz = \underline{\iiint_P} f(x,y)\,dx\,dy\,dz$$

diz-se que f é integrável à Riemann em P; ao valor comum chama-se integral triplo de Riemann de f em P e representa-se

$$\iiint_P f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Outra notação do integral triplo:

$$\iiint_P f(x,y,z)\,dV$$

onde $dV = dx\,dy\,dz$ é o “volume infinitesimal”.

Teorema de Fubini

Teorema. *Se*

$$P = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$$

for um paralelepípedo e $f : P \to \mathbb{R}$ *for uma função contínua, então* f *é integrável e*

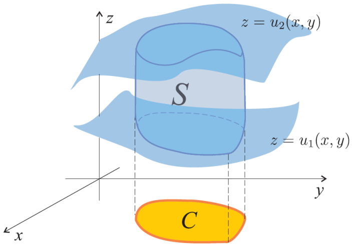
$$\begin{aligned}\iiint_P f(x,y,z)\,dV &= \int_{a_1}^{a_2}\int_{b_1}^{b_2}\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx \\ &= \int_{b_1}^{b_2}\int_{a_1}^{a_2}\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy \\ &= \dots\end{aligned}$$

(6 integrais iterados).

Sólido simples em xy

Sejam $C \subset \mathbb{R}^2$ uma região verticalmente ou horizontalmente simples e $u_1, u_2 : C \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas tais que $u_1(x, y) \leq u_2(x, y)$ para $(x, y) \in C$. Seja

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in C \wedge u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}.$$



Chamamos um sólido desse tipo de sólido simples em xy.

Teorema de Fubini

Teorema. *Seja S um sólido simples em xy com superfície superior*

$$z = u_2(x, y)$$

e superfície inferior

$$z = u_1(x, y)$$

e seja C a projeção de S no plano xy. Se $f : S \to \mathbb{R}$ for contínua, então

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_C \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right] dx\, dy.$$

Aditividade do integral triplo

Teorema. *Sejam* $S \subset \mathbb{R}^3$ *e*

$$S = S_1 \cup S_2, \quad \mathrm{int}(S_1) \cap \mathrm{int}(S_2) = \emptyset.$$

Se f *for integrável em* S_1 *e em* S_2*, então* f *é integrável em* S *e*

$$\iiint_S f(x,y,z)\,dV = \iiint_{S_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint_{S_2} f(x,y,z)\,dV.$$

Linearidade do integral triplo

Teorema. *Sejam* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e*

$$f, g : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

duas funções integráveis em S. *Então a função*

$$\alpha f + \beta g$$

é integrável em S *e*

$$\iiint_S [\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)] dV$$
$$= \alpha \iiint_S f(x,y,z)\, dV + \beta \iiint_S g(x,y,z)\, dV.$$

Volume

O volume de um sólido S é dado por

$$V(S) = \iiint\limits_{S} 1\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_{S} 1\, dV.$$

Mudança de variáveis em integrais triplos

Teorema

Sejam $S, R \subset \mathbb{R}^3$, $f : R \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e* $T : S \to R$ *uma função vetorial tal que* $T(S) = R$ *e*

(i) T *é de classe* C^1,

(ii) T *é injetiva no interior de* S,

(iii) *o jacobiano de* T *não se anula em* $\operatorname{int}(S)$, *isto é* $detJT(u, v, w) \neq 0 \quad se \quad (u, v, w) \in \operatorname{int}(S)$.

Então

$$\iiint\limits_R f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_S f(T(u, v, w)) \times |detJT(u, v, w)|\, du\, dv\, dw.$$

Fórmula de mudança de variáveis para coordenadas cilíndricas

$T(r, \theta, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

$$\det JT(r, \theta, z) = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r.$$

Portanto

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{S^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\, dr\, d\theta\, dz$$

onde S^* é o sólido S escrito em coordenadas cilíndricas.

Exemplo

Condidere o sólido S *em* $\mathbb{R}^3$ *definido por*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 2 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}.$$

Faça um esboço geométrico de S *e determine o seu volume.*

Resolução:

Exemplo

Determinar

$$\iiint_W (z^2x^2 + z^2y^2)dx\,dy\,dz,$$

onde W *é a região do espaço determinada pelas condições:*

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad -1 \leq z \leq 1.$$

Resolução:

Fórmula de mudança de variáveis para coordenadas esféricas

$$\det JT(\rho, \theta, \phi) = -\rho^2 \sin\phi.$$

Portanto

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_{S^*} f(\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)\rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

onde S^* é o sólido S escrito em coordenadas esféricas.

Exemplo

Calcule o volume da bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

Resolução:

Massa

A massa de um sólido S, cuja densidade é dada por uma função contínua $\rho(x, y, z)$, é dada por

$$m(S) = \iiint_S \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Exemplo

Exemplo

Calcule a massa do sólido S *com densidade* $\rho(x, y, z) = z$ *e limitado pelas superfícies* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *e* $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.

Resolução: O sólido S em coordenadas esféricas corresponde a $S^* = \{(\rho, \theta, \phi) : \rho \in [0, \sqrt{2}], \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \frac{\pi}{4}]\}$. Assim

$$m(S) = \iiint_S z \, dx \, dy \, dz = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi.$$

Centro de massa (centro de gravidade)

O centro de massa (=centro de gravidade) (x_G, y_G, z_G) de um sólido S, cuja densidade é dada por uma função contínua $\rho(x, y, z)$, é dado por

$$x_G = \frac{1}{m(S)} \iiint_S x\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, ,$$

$$y_G = \frac{1}{m(S)} \iiint_S y\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, ,$$

$$z_G = \frac{1}{m(S)} \iiint_S z\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, ,$$

onde

$$m(S) = \iiint_S \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

é a massa do sólido.

Centro de massa de um sólido homogéneo

O centro de massa (=centro de gravidade) (x_G, y_g, z_G) de um sólido S homogéneo (cuja densidade é constante), é dado por

$$x_G = \frac{1}{V(S)} \iiint\limits_S x \, dx \, dy \, dz,$$

$$y_G = \frac{1}{V(S)} \iiint\limits_S y \, dx \, dy \, dz,$$

$$z_G = \frac{1}{V(S)} \iiint\limits_S z \, dx \, dy \, dz,$$

onde

$$V(S) = \iiint\limits_S 1 \, dx \, dy \, dz$$

é volume do sólido.