FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

EXERCÍCIOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA III-D

EQUAÇÕES COM DERIVADAS PARCIAIS

1. Classifique como hiperbólica, parabólica ou elíptica cada uma das seguintes equações:

a) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

b) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - 6\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0.$

c) $a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

(Resposta: a) Parabólica b) Parabólica c) Hiperbólica)

2. Determine em que regiões do plano a equação

$(xy+1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x+2y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + xy^2 u = 0$ é hiperbólica, parabólica ou elíptica.

(Resposta: a)Hiperbólica (resp. elíptica) no exterior (resp. no interior) da elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e parabólica sobre a elipse.)

3. Mostre que

a)A função

$$u(x,t) = sin\, t\, sin\, x$$

é solução da equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ para um valor conveniente da constante c da equação.

b)A função

$$u(x,t) = e^{-9t}\, cos\, x$$

é solução da equação $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ para um valor conveniente da constante c da equação.

(Resposta: a)$c^2 = 1$ b) $c^2 = 9$)

4. a) Determine a solução geral da equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. Determine ainda a solução que verifica as condições $\dfrac{\partial u}{\partial y}(1, y) = y$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \cos y$.

b) Determine a solução geral da equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$. Determine ainda a solução que verifica as condições $\dfrac{\partial u}{\partial y}(0, y) = ye^y$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = e^{-x}$.

c) Efetuando as mudanças de variáveis definidas por $t = 4x + 3y$ e $s = x - 2y$, determine a solução geral da equação $6\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Determine ainda a solução que verifica as condições $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0$ e $u(0, y) = y$.

(Resposta: a)$u(x, y) = (x - 1)\cos y + \dfrac{1}{2}y^2 + c, c \in \mathbb{R}$ b) $u(x, y) = (y - 1)e^y - e^{-x} + c,\ c \in \mathbb{R}$) c) $u(x, y) = y$

5. Utilize o método de separação de variáveis para determinar soluções das seguintes equações:

a) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ b) $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2(x + y)u$ c) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} = y\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

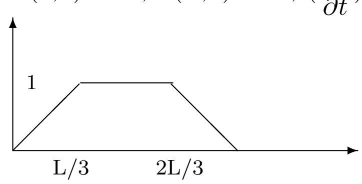
(Resposta: a)$u(x, t) = ce^{k(x-y)}$ b) $u(x, t) = ce^{x^2+y^2+k(x-y)}$ c) $u(x, t) = c|x|^k\ |y|^k$)

6. Determine a deflexão $u(x, t)$ da corda vibrante de comprimento $L = \pi$, extremidades fixas, com $c^2 = 1$ supondo uma velocidade inicial igual a zero e com uma deflexão inicial dada por $f(x) = 0,01\, x\, (\pi - x)$.

(Resposta: $u(x, t) = \dfrac{0.08}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2} cos\,(2n - 1)t\, sin\,(2n - 1)x$)

7. Resolva a equação da corda vibrante sujeita às condições

$u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$, $(\dfrac{\partial u}{\partial t})_{t=0} = 0$ e $u(x, 0)$ dada pela figura indicada.



(Resposta: $u(x, t) = \dfrac{6}{\pi^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{sin\,\frac{n\pi}{3} + sin\,\frac{2n\pi}{3}}{n^2}\, cos\, \dfrac{cn\pi}{L}\, t\ sin\, \dfrac{n\pi}{L}\, x$)

8. Resolva a equação do calor sujeita às condições

a) $u(0,t)=0$, $u(L,t)=0$ e $u(x,0)=\begin{cases} 1 & 0<x<L/2 \\ 0 & L/2<x<L \end{cases}$

b) $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0$, $u(x,0)=cos^2\,x$

(Resposta: a)$u(x,t)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(1-cos\,\dfrac{n\pi}{2})\,e^{\frac{-kn^2\pi^2}{L^2}t}\,sin\,\dfrac{n\pi}{L}x$ b) $u(x,t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\,cos\,2x\,e^{-4t}$)

9. Determine a temperatura $u(x,t)$ de uma barra de comprimento a supondo que os extremos da barra se encontram à temperatura zero e que a distribuição da temperatura inicial é dada por:

a)$u(x,0)=3sin\,\dfrac{\pi x}{a}-5sin\,\dfrac{4\pi x}{a}$ b) $u(x,0)=\begin{cases} x & 0<x<a/2 \\ a-x & a/2<x<a \end{cases}$

(Resposta: a) $u(x,t)=3sin\,\dfrac{\pi}{a}xe^{-\frac{\pi^2k}{a^2}t}-5sin\,\dfrac{4\pi}{a}xe^{-\frac{4^2\pi^2k}{a^2}t}$ b) $u(x,t)=\dfrac{4a}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\,sin\,\dfrac{(2n-1)\pi x}{a}\quad e^{\frac{-k(2n-1)^2\pi^2}{a^2}\,t}$)

10. Resolva a equação de Laplace para uma placa rectângular sujeita às seguintes condições de fronteira:

a)$u(0,y)=0$, $u(1,y)=1-y$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1)=0$

b)$\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y)=u(0,y)$, $u(\pi,y)=1$, $u(x,0)=0$, $u(x,\pi)=0$

(Resposta: a)$u(x,y)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n^2 sinh\,n\pi}\,sinh\,n\pi x\,cos\,n\pi y$ b)$u(x,y)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{n}\,\dfrac{n\,cosh\,nx+sinh\,nx}{n\,cosh\,n\pi+sinh\,n\pi}\,sin\,ny$)

11. Considere a função $u(x,t)$ definida para $0\leq x\leq l$ e $t\geq 0$ solução não trivial da equação

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \qquad (1)$$

a) Efectuando as mudanças de variáveis definidas por $y=x+\frac{1}{2}t$ e $z=x-\frac{1}{2}t$ mostre que a equação admite uma solução da forma

$$u(x,t)=\phi(x+\frac{1}{2}t)+\psi(x-\frac{1}{2}t).$$

b) Considere agora o problema constituído pela equação (1) e pelas condições

$$u(x,0)=e^{-x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\frac{1}{2}x.$$

Mostre que

$$u(x,t)=\frac{1}{2}xt+e^{-x}\cosh\frac{1}{2}t.$$