title here

Felipe B. Pinto 61387 – MIEQB

22 de abril de 2023

Conteúdo

I – Introdução à Teoria da Probabilidade

Questão 18

Considere os acontecimentos A e B de um espaço de resultados tais que $P(A \cup B) = 0.8$, e $P(A - B) = 0.3$. Qual o valor da $P(B)$

$$P(B) = P(B \cup A) - P(A - B) = 0.8 - 0.3 = 0.5$$

Questão 27

Um aluno conhece bem 60% da matéria dada. Num exame com cinco perguntas, sorteadas ao acaso, sobre toda a matéria, qual a probabilidade de vir a responder correctamente a duas perguntas?

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} * 0.6^n * (1 - 0.6)^{5-2}$$

II – Variáveis Aleatórias

Questão 1

A variável aleatória (v.a.) X representa o número de doentes com gripe que procuram, por dia, o Dr. Remédios. Em 50% dos dias, pelo menos 2 pacientes com gripe procuram o Dr. Remédios. A sua função de probabilidade é dada por:

$$\boldsymbol{x}\left\{\begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \boldsymbol{p} & \mathbf{0.2} & & \boldsymbol{q} & \mathbf{0.3} \end{matrix}\right\}$$

Q1 a.

Determine p e q.

$$q = P(X = 2) = P(X \geq 3) - P(X = 3) = 0.5 - 0.3 = 0.2$$
$$p = P(X = 0) = 1 - P(X \bar{=} 0) = 1 - P(X > 0) =$$
$$= 1 - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) = 1 - 0.2 - 0.2 - 0.3 = 0.3$$

Q1 b.

Determine a função de probabilidade das v.a.'s $Y = 40\,X$ e $W = \max(X, 1)$.

$$\boldsymbol{Y} = \left\{\left\{\begin{matrix} \mathbf{0} & \mathbf{40} & \mathbf{80} & \mathbf{120} \\ \mathbf{0.3} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0.3} \end{matrix}\right\}\right\} \qquad \boldsymbol{W} = \left\{\begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0.5} & \mathbf{0.2} & \mathbf{0.3} \end{matrix}\right\}$$

Questão 2

A v.a. X representa o número de pontos que saem no lançamento de um determinado dado. A sua função de distribuição segue-se:

$$\boldsymbol{F(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & x < 1 \\ 1/6 & 1 \leq x < 2 \\ 1/4 & 2 \leq x < 4 \\ 1/2 & 4 \leq x < 5 \\ 7/12 & 5 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6 \end{array} \right\}}$$

Q2 a.

Calcule as seguintes probabilidades, usando a função de distribuição:

(i) A probabilidade de o número de pontos saídos ser no máximo 3.

$P(X \leq 3) = F(3)$

(ii)

$P(1 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = F(2) - F(1)$

(iii)

$P(2 \leq X < 6) = P(X < 6) - P(X < 2) = F(6^-) - F(2^-) = 7/12 - 1/6 = 5/12$

Q2 b.

Determine a função de probabilidade de X e confirme os resultados acima obtidos.

$$P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F(X) - F(X^-) \implies$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{lr} P(X=1) = 1/6 - 0 = & 1/6 \\ P(X=2) = 1/4 - 1/6 = & 1/12 \\ P(X=3) = 1/4 - 1/4 = & 0 \\ P(X=4) = 1/2 - 1/4 = & 1/4 \\ P(X=5) = 7/12 - 1/2 = & 1/12 \\ P(X=6) = 1 - 7/12 = & 5/12 \end{array} \right\}$$

$$\boldsymbol{X = \left\{ \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 5/12 \end{array} \right\}}$$

Q2 c.

Pode afirmar que o dado é equilibrado? Justifique.

N, os lados tem diff probs

Q2 d.

Sabendo que o número de pontos saído é pelo menos 4, calcule a probabilidade de saírem 6 pontos.

$$P(X = 6 | X \geq 4) = \frac{P(X = 6 \cap X \geq 4)}{P(X \geq 4)} = \frac{P(X = 6)}{P(X \geq 4)} = \frac{F(6) - F(6')}{F(4^-)} =$$

$$= \frac{1 - 7/12}{1/4} = 5/9$$

Questão 6

Seja X uma v.a. com a seguinte função densidade probabilidade:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 4\,x & 0 < x < k \\ 0 & c.c. \end{cases}}$$

Q6 a.

k

$$\int_{-\infty}^{infty} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^k f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^k 4\,x\ \mathrm{d}x = 4\left(x^2\right)\Big|_0^k = 4\,k^2 = 1 \implies$$
$$\implies k = 1/\sqrt{2}$$

Q6 b.

Calcule $P(1/4 \leq X \leq 1/3)$, a mediana e o quantil de ordem 0.95.

(i) $P(1/4 \leq X \leq 1/3)$

$$P(1/4 \leq X \leq 1/3) = \int_{1/4}^{1/3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1/4}^{1/3} 4\,x\,\mathrm{d}x = 4\left(x^2\right)\Big|_{1/4}^{1/3} =$$
$$= 4\left(3^{-2} - 4^{-2}\right) = 4\left(3^{-2} - 4^{-2}\right) = 194.44\,\mathrm{E}{-3}$$

(ii) Mediana

$$P(X \leq m_e) = \int_0^{m_e} f(x)\,\mathrm{d}x = 4(m_e^2) = 1/2 \implies m_e = \sqrt{(1/2)/4} = 353.55\,\mathrm{E}{-3}$$

(iii)

$$P(X \leq q_{95}) = \int_0^{q_{95}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.95$$

Questão 13

Seja X uma v.a. com a seguinte função de distribuição:

$$\boldsymbol{F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - (x+1)\,e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}}$$

Q13 a.

Calcule $P(X < 1)$

Q13 b.

Calcule $P(X < 2 | X \geq 1)$

Q13 c.

Determine a função densidade probabilidade de X.

Q13 d.

Dado que $\int_0^\infty x^2\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = 2\int_0^\infty x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ e $\int_0^\infty x^3\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = 3\int_0^\infty x^2\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$, determine *E(X)* e *V(X)*.

(i) *E(X)*

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\, x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^2\, e^{-x}\, \mathrm{d}x =$$
$$= 2\int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = 2\, \Delta x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x\Big|_0^{+\infty} = 2\left(-0 + \frac{0+1}{e^0}\right) = 2$$

(ii) *V(X)*

$$V(X) = -E^2(X) + E(X^2) = -2^2 + \int_{\mathbb{R}} x^2\, f(x)\, \mathrm{d}x = -2^2 + \int_0^{\infty} x^3\, e^{-x}\, \mathrm{d}x =$$
$$= -2^2 + 3\int_0^{\infty} x^2\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = -2^2 + 3 * 2 = 2$$

III – Principais Distribuições

Questão 3

O senhor Sousa tem uma empresa que compra e vende selos e outros artigos de colecionismo. Ele guarda 20 selos dentro de uma bolsa preta, estando ainda cada um deles metido num envelope opaco. 6 destes selos valem 100 euros cada um e os restantes nada valem. O senhor Sousa, para promover a venda, cobra 20 euros por cada selo, mas não permitindo que o cliente veja o conteúdo do envelope. Suponha que um cliente compra 5 selos.

Q3 a.

Qual a probabilidade dos cinco selos nada valerem?

$$P(X=0)=\frac{\binom{6}{0}\binom{20-6}{5}}{\binom{20}{5}}=\frac{\frac{6!}{0!*6!}\binom{20-6}{5}}{\binom{20}{5}}$$

Q3 b.

Qual a probabilidade do cliente não perder nem ganhar dinheiro com a compra?

$$P(X=1)=\frac{\binom{6}{1}\binom{14}{4}}{\binom{20}{5}}$$

Questão 5

Determinado exame é constituído por 5 questões de escolha múltipla, em que cada questão tem 4 opções de resposta possíveis - apenas uma sendo a correcta. Supondo que um aluno que vai fazer o exame responde a tudo ao acaso

Q5 a.

qual é a probabilidade de ele acertar a mais de metade das questões?

$$P(X \geq 3) = \sum_{n=3}^{5} P(X = n) = \sum_{n=3}^{5} \binom{5}{n} 0.25^n \, 0.75^{5-n}$$

Q5 b.

Qual é o número médio de respostas correctas?

$$E(X) = n * p = 5 * 0.25 = 1.25$$

Q5 c.

E o seu desvio padrão?

$$\rho = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n * p * (1 - p)} = 0.9682$$

Questão 10

Suponha que, o número de pessoas que utilizam uma caixa multibanco é um processo de Poisson de taxa $\lambda = 10/\mathrm{h}$. Calcule;

Q10 a.

a probabilidade de não ir ninguém à caixa multibanco durante 1 hora.

$$P(X=0) = \frac{e^{-10}\,10^0}{0!} = e^{-10} \cong 45.40\,\mathrm{E}{-6}$$

Q10 b.

a probabilidade de irem 20 pessoas à referida caixa durante 4 horas.

$$P(X=20) = \frac{e^{-40}\,40^{20}}{20!} = 192.00\,\mathrm{E}{-6}$$

Q10 c.

O número médio de visitas à caixa multibanco durante 4 horas e o seu coeficiente de variação.

V – Estimação Pontual

Questão 2

Considere que se seleccionou uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de uma população com valor médio μ e variância σ^2.

Q2 a.

Mostre que $\overline{X}$ é estimador centrado e consistente da média populacional.

$$\boldsymbol{\overline{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i}$$

$$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n^{-1}\,\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i) = n^{-1}n\mu = \mu;$$

$$\mathrm{V}(\overline{X}) = \mathrm{V}\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n^{-2}\,\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(X_i) = n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 =$$
$$= \sigma^2/n \implies$$
$$\implies \lim_{n\to\infty} EQB(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{V}(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty}\sigma^2/n = 0$$

$\overline{X}$ é consistente em média quadrática de μ

Q2 b.

Mostre que $\hat{\theta}_1,\ \hat{\theta}_2$ também são estimadores centrados de μ. Qual é melhor? São consistentes?

$$\boldsymbol{\hat{\theta}_1 = \frac{X_1 + X_n}{2} \qquad \hat{\theta}_2 = \frac{2\,X_1 + 3\,X_2 + 5\,X_3}{10}}$$

$$\mathrm{E}(\hat{\theta}_1) = \mathrm{E}\left(\frac{X_1 + X_n}{2}\right) = 2^{-1}\,\mathrm{E}\,(X_1 + X_n) = 2^{-1}(\mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_n)) = 2^{-1}(2\mu) =$$
$$= \mu;$$

$$\mathrm{V}(\hat{\theta}_1) = \mathrm{V}\left(\frac{X_1 + X_n}{2}\right) = 4^{-1}\,\mathrm{V}\,(X_1 + X_n) = 4^{-1}(\mathrm{V}(X_1) + \mathrm{V}(X_n)) =$$
$$= 4^{-1}(\sigma^2 + \sigma^2) = \sigma^2/2;$$

$$\lim_{n\to\infty} EQM(\hat{\theta}_1) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{V}(\hat{\theta}_1) = \lim_{n\to\infty}\sigma^2/2 = \sigma^2/2 \neq 0;$$

$$\mathrm{E}(\hat{\theta}_2) = \mathrm{E}\left(\frac{2\,X_1 + 3\,X_2 + 5\,X_3}{10}\right) = 10^{-1}\,\mathrm{E}\,(2\,X_1 + 3\,X_2 + 5\,X_3) =$$
$$= 10^{-1}\,(2\ \mathrm{E}(X_1) + 3\ \mathrm{E}(X_2) + 5\ \mathrm{E}(X_3)) = 10^{-1}\,(2\,\mu + 3\,\mu + 5\,\mu) =$$
$$= 10^{-1}\,(10\,\mu) = \mu;$$

$$\mathrm{V}(\hat{\theta}_2) = \mathrm{V}\left(\frac{2\,X_1 + 3\,X_2 + 5\,X_3}{10}\right) = 10^{-2}\,\mathrm{V}\,(2\,X_1 + 3\,X_2 + 5\,X_3) =$$
$$= 10^{-2}\left(2^2\ \mathrm{V}(X_1) + 3^2\ \mathrm{V}(X_2) + 5^2\ \mathrm{V}(X_3)\right) = 10^{-2}\left(2^2\,\sigma^2 + 3^2\,\sigma^2 + 5^2\,\sigma^2\right) =$$
$$= 0.38\,\sigma^2;$$

$$\lim_{n\to\infty} EQM(\hat{\theta}_2) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{V}(\hat{\theta}_2) = \lim_{n\to\infty} 0.38\,\sigma^2 = 0.38\,\sigma^2\ \not{0};$$

$$\therefore EQM(\hat{\theta}_2) < EQM(\hat{\theta}_1)$$

$\hat{\theta}_2$ é mais preciso

Q2 c.

Mostre que $\bar{X}^2$ não é estimador centrado de ^{2}.

$$E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + E^2(\bar{X}) = \sigma^2/n + \mu^2 \neq \mu$$

Questão 3

Suponha que seleccionou uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de uma população com distribuição $U(0,\theta)$, isto é, com função densidade:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \theta^{-1} & 0 \le x \le \theta \\ 0 & c.c. \end{cases}}$$

$$E(X) = \int_0^\theta x\,\theta^{-1}\,\mathrm{d}\theta = \theta^{-1}\,\theta^2/2 = \theta/2;$$

$$\mathrm{V}(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_0^\theta x^2\,\theta^{-1}\,\mathrm{d}\theta - \theta^2/4 = \theta^{-1}\,\theta^3/3 - \theta^2/4 = \theta^2/12$$

Q3 a.

Verifique se o estimador $2\,\overline{X}$ é centrado e consistente.

$$\mathrm{E}(2\,\overline{X}) = 2\ \mathrm{E}(\overline{X}) = 2\ \mathrm{E}(X) = 2\,\theta/2 = \theta;$$

$$\lim_{n\to\infty} EQM(2\,\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} V(2\,\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} 4\,V(\overline{X}) = \lim_{n\to\infty} 4\,V(X)/n =$$
$$= \lim_{n\to\infty} 4\,(\theta^2/12)/n = \lim_{n\to\infty} \theta^2/3n = 0$$

$2\,\overline{X}$ é estimador consistente em média quadrática de θ

Q3 b.

Dada a amostra $(1.215, 1.580, 0.726, 2.843, 3.394, 0.612, 2.621, 1.181, 2.930, 0.317)$, estime o valor de θ. Nota:$\sum x_i = 17.42$.

$$\hat{\theta} = 2\,\overline{x} = 2 * 17.42/10 = 3.484$$

VI – Estimação por intervalo de confiança

VII – Testes de Hipóteses

Questão 1

Uma fábrica de gelados afirma que a procura do gelado de chocolate no verão, por dia e em euros, é uma v.a. Normalmente distribuída com valor médio 200 EUR e desvio padrão 40 EUR. Numa amostra aleatória constituída por 10 dias seleccionados ao acaso do período de verão verificou-se que $\bar{x} \cong 216$.

Q1 a.

Teste, ao nível de significância 5%, se de facto o consumo médio de gelado de chocolate no verão é de 200 EUR por dia.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \begin{cases} H_0 : \mu_0 = 200 \\ H_1 : \mu_1 \neq 200 \end{cases}$$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{216 - 200}{40/\sqrt{10}} \cong 1.26 \notin \left[-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}\right]^c =$$

$$= \left[-z_{5\%/2}, z_{5\%/2}\right]^c = [-z_{0.025}, z_{0.025}]^c = [-1.96, 1.96]^c$$

Q1 b.

Teste, ao ao nível de significância 5%, se de facto o consumo médio de gelado de chocolate no verão é menor do que e200 por dia.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \begin{cases} H_0 : \mu_0 \geq 200 \\ H_1 : \mu_1 < 200 \end{cases}$$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{216 - 200}{40/\sqrt{10}} \cong 1.26 \notin [-z_\alpha, \infty]^c = [-z_{0.05}, \infty]^c = [-1.645, \infty]^c$$

Q1 c.

Qual a potência do teste, da alínea anterior, se $\mu = 190$.

$$1 - \beta = P(\text{Rejeitar } H_0 | \mu = 190)$$

Q1 d.

Resolva as duas primeiras alíneas usando o p-valor.

(i) (b)

$$\text{p-valor} = P(Z < z_{observado}|H_0) = P(Z < 1.26|H_0) =$$

$$= \Phi(1.26) \cong 0.8962 > 0.05 = \alpha$$

$\therefore$ não rejeita

(ii) (a)

$$\text{p-valor} = 2\,P(Z > z_{obs}|H_0) = 2\,P(Z > 1.26|H_0) = 2\,(1 - P(Z < 1.26|H_0)) =$$

$$= 2\,(1 - \Phi(1.26)) = 2\,(1 - 0.8962) = 0.2076 = 0.05 > \alpha$$

$\therefore$ não rejeita

Nota: Como em (a) o α possui duas regiões de rejeição de $\alpha/2$ fazemos o p-valor ser o dobro da probabilidade para comparar com o valor de α (sem dividir por 2), e como se refere ao valor da direita pegamos o valor da complementar da tabela da normal.