PRIMEIRO TESTE (18 de Abril de 2020) DURAÇÃO **2 h**

CÁLCULO NUMÉRICO

Número: ________ Curso: ________ Nome: ______________________________

A primeira parte do teste é constituida por 5 questões de escolha múltipla. Nas questões 1 a 5 assinale com "x"a resposta correcta. Cada resposta correcta vale 2.0 valores. Respostas em branco valem 0 valores. Se responder erradamente ou de forma ambígua ser-lhe-á atribuída uma cotação negativa correspondente a 0.4 valores. Se a soma das cotações da escolha múltipla for negativa, será atribuído 0 valores à escolha múltipla.

Classificação
EM -
TOTAL-

1. Seja $x \in \mathbb{R}$ and $\hat{x}$ uma aproximação de x com 5 algarismos significativos e $10^3 \leq |x| < 10^4$. Quantas casas decimais podemos garantir para $\hat{x}$?

☐ **a)** 5

☐ **b)** 3

☐ **c)** 1 (correcta)

☐ **d)** 2

2. Seja m_3 o polinómio de grau 3 que ajusta o conjunto de pontos (x_i, y_i), $i = 0, ..., 4$ contidos no intervalo $[a, b]$, usando o método dos mínimos quadrados. Seja p_4 o polinómio de grau ≤ 4 interpolador dos pontos (x_i, y_i), $i = 0, ..., 4$ e S o spline cúbico interpolador dos mesmos pontos. Qual das seguintes afirmações não é verdadeira?

☐ **a)** $\sum_{i=0}^{4} [m_3(x_i) - y_i]^2 > \sum_{i=0}^{4} [S(x_i) - p_4(x_i)]^2$;

☐ **b)** Existe pelo menos um $x_i, i = 0, ..., 4$ tal que $m_3(x_i) \neq p_4(x_i)$;

☐ **c)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{4} [p_4(x_i) - S(x_i)]^2 = 0$;

☐ **d)** $S(x) = p_4(x), \forall x \in [a, b]$. (correcta)

(V.S.F.F)

3. Seja $f(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i$ com $a_3 = 1$ e p_2 um polinómio interpolador de f nos nodos distintos $x_i, i = 0, 1, 2$ em $\mathbb{R}$. A expressão para $f(x)$ pode ser obtida por:

☐ **a)** $f(x) = p_2(x) + 6\prod_{i=0}^{2}(x - x_i), \forall x \in \mathbb{R};$

☐ **b)** $f(x) = p_2(x) + \frac{1}{6}\prod_{i=0}^{2}(x - x_i), \forall x \in \mathbb{R};$

☐ **c)** $f(x) = p_2(x) + x^3, \forall x \in \mathbb{R};$

☐ **d)** $f(x) = p_2(x) + \prod_{i=0}^{2}(x - x_i), \forall x \in \mathbb{R}.$ (correcta)

4. Seja $I = \int_0^4 f(x)dx$ e $f(x) \in C^4[0, 4]$ uma função que verifica $|f^{(n)}(x)| \leq \dfrac{2^n}{n!}, \forall x \in [0, 4]$ e $n \in \mathbb{N}$. Se pretendesse determinar um valor aproximado de I, com pelo menos 4 casas decimais significativas, utilizando a regra de Simpson, qual o menor número de sub-intervalos de igual amplitude em que teria de dividir o intervalo [0, 4]?

☐ **a)** 18 (correcta)

☐ **b)** 8

☐ **c)** 9

☐ **d)** 16

5. Seja $I = \int_0^1 \frac{log(x)}{x+1}dx$. Qual dos valores seguintes representa um valor aproximado para I, $\hat{I}$, com 6 casas décimais devidamente arredondadas, utilizando uma regra de integração numérica de aplicação simples que permita obter um grau de precisão de 3?

☐ **a)** $\hat{I} = -0.462098$

☐ **b)** $\hat{I} = -0.822467$

☐ **c)** $\hat{I} = -0.707957$ (correcta)

☐ **d)** $\hat{I} = -1$

A segunda parte do teste é constituida por 3 grupos de questões. Cada resposta deverá estar convenientemente justificada.

Cotações: Questão 6: 5 valores; **Questão 7:** 3 valores; **Questão 8:** 2 valores.

6. Considere a seguinte tabela de dados para a função f:

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$f(0)$	0	$f(2)$	2

Sabe-se que $f[x_2, x_3] = 3$, $f[x_1, x_2, x_3] = 2$ e $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{2}{3}$.

a) Determine $f[x_0, x_1]$, $f[x_1, x_2]$, $f[x_0, x_1, x_2]$, $f(0)$ e $f(2)$.

b) Determine o polinómio de Newton de grau ≤ 3 interpolador de f nos nodos $x_i, i = 0, 1, 2, 3$. (Caso não tenha conseguido fazer a alinear a) considere $f(0) = -\frac{1}{2}$ e $f(2) = \frac{1}{2}$.)

c) Obtenha o polinómio de grau 1, $q_1(x)$, que ajusta o conjunto de pontos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, 3$, utilizando a técnica dos mínimos quadrados e considerando $f(3) = -1/2$ em vez de 2.

d) Seja $p_1(x) = a + bx$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Prove usando a alínea anterior que $\sum_{i=0}^{3} (f(x_i) - p_1(x_i))^2 > 0.675$. Justifique adequadamente.

7. Considere o seguinte spline cúbico interpolador duma função $f(x)$ no intervalo [0,2]:

$$S(x) = \begin{cases} 1 + ax + 2x^2 - 2x^3, & 0 \leq x < 1 \\ 1 + b(x-1) - 4(x-1)^2 + 7(x-1)^3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

a) Encontre a e b e escreva a expressão do spline.

b) Considere a tabela de valores para a função f

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	1	2
$f'(x_i)$	0	4	11

Que tipo de spline é $S(x)$? Completo ou natural? Justifique

c) Obtenha uma aproximação para $f(0.5)$. Quantas casas décimais significativas se pode no mínimo garantir para essa aproximação, sabendo que $|f^{(3)}(x)| \leq 0.1$?

8. Considere o integral $I = \int_{-2}^{0} xe^{-x}dx$.

   a) Determine um valor aproximado $\hat{I}$ de I pela regra dos trapézios com 4 aplicações. Obtenha um majorante para o erro absoluto associado a essa aproximação. Nos cálculos utilize 6 casas décimais convenientemente arredondadas.

   b) Determine um valor aproximado $\hat{I}$ de I pela regra do ponto médio com 2 aplicações. Obtenha um majorante para o erro absoluto associado a essa aproximação. Nos cálculos utilize 6 casas décimais convenientemente arredondadas.

   Comente os resultados obtidos.

1º teste Cálculo Numérico – 18/4/2020

1.

$$1000 \leq |x| < 10.000 \Rightarrow m+1 = 4$$

$$|\varepsilon x| \leq 0.5 \times 10^{m+1-s} = -k$$

$$4-5 = -1 = -k \Rightarrow k = 1$$

3.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + x^3$$

$$\frac{f^{(3)}(x)}{3!} = \frac{6}{6} = 1$$

$$f(x) - P_2(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\frac{f^{(3)}(x)}{3!}$$

$$f(x) = P_2(x) + \prod_{i=0}^{2}(x-x_i)$$

4.

$$I = \int_0^4 f(x)\,dx \ ; \ f(x) \in C^4[0,4]$$

$$|I - I_s^1| = |n \frac{h^5}{90} f^{(4)}(x)| \qquad |f^{4}(x)| = \frac{2^4}{4!} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$n \frac{h^5}{90} f^4(x) \leq 0.5 \times 10^{-4}$$

$$n \frac{\left(\frac{b-a}{2n}\right)^5}{90} \times \frac{2}{3} \leq 0.5 \times 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\cancel{n}\frac{4^5}{2^5 n^{\cancel{5}4}}}{90} \times \frac{2}{3} \leq 0.5 \times 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{2048}{8640 n^4} \leq 0.5 \times 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow n^4 \geq 4740.741..$$

$n \geq 8.2977...$ $\quad n = 9$ nº de aplicações da regra

$2n = 18$ nº de subintervalos

5. $I = \int_0^1 \frac{\log(x)}{x+1} dx$ Integral impróprio pois $\log(0) = -\infty$

Não se pode usar a regra dos trapézios e a de Simpson pois necessitam dos pontos extremos 0 e 1.

A regra do ponto médio tem grau de precisão 1

Regra de Gauss com 2 pontos tem grau de precisão 3

$$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right)dy = \frac{1}{2}\left(f\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\simeq -0.707957$$

6.

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$f(0)$	0	$f(2)$	2

a) $f[x_2, x_3] = 3$, $f[x_1, x_2, x_3] = 2$ e $f[x_0, x_1, x_2$

$f[x_3, x_2] = f(x_3) - f(x_2) = 2 - f(3) = 3$

$f(2) = -1$ ✓

$f[x_0, x_1] = f(x_1) - f(x_0) = 0 - f(0) = -f(0)$

$f[x_1, x_2] = f(x_2) - f(x_1) = f(2) - f(1) = -1 - 0 = -1$ ✓

$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{2} = \frac{-1 + f(0)}{2}$

$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{3} = \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{2 - \left(\frac{-1+f(0)}{3}\right)}{3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{f(0)}{6} = \frac{1}{6} \Rightarrow f(0) = 1$

$f[x_0, x_1, x_2] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ ✓

$f[x_0, x_1] = -1$ ✓

b) $p_3(x_0) = f(0) + f[x_0,x_1]\,x + f[x_0,x_1,x_2]\,x(x-1) +$
$+ f[x_0,x_1,x_2,x_3]\,x(x-1)(x-2)$

$= 1 - x + \frac{2}{3}x(x-1)(x-2) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + 1$

c)

x_i	0	1	2	3
y_i	1	0	-1	-1/2

$\sum_{i=0}^{3} x_i^0 = 4$, $\sum_{i=0}^{3} x_i = 6$, $\sum_{i=0}^{3} x_i^2 = 14$, $\sum_{i=0}^{3} y_i = -0.5$, $\sum_{i=0}^{3} x_i y_i = -3.5$

$\begin{cases} 4a_0 + 6a_1 = -0.5 \\ 6a_0 + 14a_1 = -3.5 \end{cases}$ $\begin{cases} a_0 = \frac{7}{10} \\ a_1 = -\frac{11}{20} \end{cases}$ $q_1(x) = \frac{7}{10} - \frac{11}{20}x$

d)

x_i	0	1	2	3	E^2
$q_1(x_i)$	0.7	0.15	-0.4	-0.95	
$(y_i - q_1(x))^2$	0.09	0.0225	0.36	0.2025	0.675

Erro quadrático $\sum_{i=0}^{3} (y_i - q_1(x_i))^2 = 0.675$, $p_1 = a + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$

o polinómio de grau 1 que minimiza $\sum_{i=0}^{3} (f(x_i) - p_1(x))^2$
é o polinómio obtido na alínea anterior
$q_1(x) = \frac{7}{10} - \frac{11}{20}x$ logo nem com

$a \neq \frac{7}{10}, b \neq \frac{11}{2} \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=0}^{3} (f(x_i) - (a + bx_i))^2 = \sum_{i=0}^{3} (f(x_i) - p_1(x_i))^2 > 0.675$

7. $$S(x) = \begin{cases} 1+ax+2x^2-2x^3, & 0 \le x < 1 \\ 1+b(x-1)-4(x-1)^3+7(x-1)^3, & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

a) como $S(x)$ é spline cúbico tem que verificar $S(x)$, $S'(x)$ e $S''(x)$ contínuas em $[0,2]$

$$S'(x) = \begin{cases} a+4x-6x^2 & 0 \le x < 1 \\ b-8(x-1)+21(x-1)^2 & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$S(x)$ contínua em $[0,2] \Rightarrow S(1^-) = S(1^+)$

$$1+a+\cancel{2}-\cancel{2} = 1 \Leftrightarrow a = 0$$

$S'(x)$ contínua em $[0,2] \Rightarrow S'(1^-) = S(1^+)$

$$a+4-6 = b \Leftrightarrow a-2 = b \Leftrightarrow b = -2$$

$$S(x) = \begin{cases} 1+2x^2-2x^3, & 0 \le x < 1 \\ 1-2(x-1)-4(x-1)^2+7(x-1)^3, & 1 \le x < 2 \end{cases}$$

b)

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	1	2
$f'(x_i)$	0	2	11

S spline natural $\Rightarrow S''(0) = 0 = S''(2)$

$$S''(x) = \begin{cases} 4-12x, & 0 \le x < 1 \\ -8+42(x-1), & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

$S''(0) = 4 \neq 0 \qquad S''(2) = -8+42 = 34 \neq 0$

S não é spline natural

S spline completo $\Rightarrow S'(0) = f'(0)$ e $S'(2) = f'(2)$

$S'(0) = 0 = f'(0)$ e $S'(2) = -2-8+21 = 1 = f'(2)$

S é spline completo

e) $f(0.5) \simeq S(0.5) = S_0(0.5) = 1 + 2\times\frac{1}{4} - 2\times\frac{1}{8} = 1.25$

$|f^{(3)}(x)| \le 0.1$

$|f(0.5) - S(0.5)| = \left|(0.5-0)(0.5-1)(0.2-2)\frac{f^{(3)}(\theta)}{3!}\right| \quad \theta \in]0,2[$

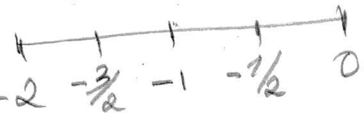
$\le 0.5\times 0.5\times 1.5\times \frac{0.1}{6}$

$= 0.00625 \le 0.5\times 10^{-1}$

podemos garantir 1 c.d.s

8. $\int_{-2}^{0} x e^{-x}\, dx$

a) Trapézios com $n=4$



$h = \frac{b-a}{4} = \frac{2}{4} = 0.5 \quad f(x) = xe^{-x}$

$\hat{I}_T = \frac{0.5}{4}\left(f(-2) + 2\left(f(-\frac{3}{2}) + f(-1) + f(\frac{1}{2})\right) + f(0)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(-14.778112 + 2(-6.722534 - 2.718282 - 0.824361) + 0\right)$

$= -8.827116$

$|I - \hat{I}_T| = \left|-n\frac{h^3}{12} f''(\xi)\right|, \quad \xi \in]-2,0[$

$f'(x) = (1-x)e^{-x}$ é contínua

$f''(x) = (x-2)e^{-x}$ " "

$|f''(x)| = |(x-2)e^{-x}|$ é decrescente no intervalo $[-2,0]$

logo o máximo é obtido para $x=-2$

$|f''(x)| \le |f''(-2)| \le 29.556225$

$|I - \hat{I}_T| \le 4\times\frac{0.5^3}{12}\times 29.556224 = 1.231509$

b) Ponto médio com $n=2$

$$h = \frac{2}{2} = 1$$

$-2 \quad -\frac{3}{2} \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad 0$

$$\hat{I}_{PM} = f\left(-\frac{3}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -6.722534 - 0.824361 = -7.546894$$

$$|I - \hat{I}_{PM}| = \left| n \times \frac{h^3}{24} \times f''(\xi) \right| , \; \xi \in]-2, 0[$$

$$|I - \hat{I}_{PM}| \leq 2 \times \frac{1}{24} \times 29.556224 = 2.463019$$

O erro obtido para a aproximação dada pela regra dos trapézios com 4 aplicações é metade do erro obtido pela regra do ponto médio com 2 aplicações, donde neste caso a regra dos trapézios fornece um melhor aproximação para I do que regra do ponto médio pois foi aplicada 4 vezes.