AM 2C – Resumo dos Slides

Felipe B. Pinto 61387 – MIEQB

29 de janeiro de 2022

Conteúdo

Slide 1 Revisão

Algebra Linear

1 Vetores

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \wedge i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

2 Norma

$$N(X)_p = ||X||_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = \sqrt{X|X} \quad X \in \mathbb{R}^n$$

$$N(\cdot) : E \to \mathbb{R}$$

- $N(X) \geq 0 \, (\wedge N(X) = 0 \iff x = 0)$
- $N(\lambda X) = |\lambda| \, N(X)$ . . . . $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $N(X + Y) \leq N(X) + N(Y)$ . . . . $\forall \{X, Y\} \in E$

3 Desigualdade de Hölder

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k \, y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q} \begin{cases} q > 1 \\ p > 1 \\ p^{-1} + q^{-1} = 1 \end{cases}$$

4 Produto Interno

$$\boldsymbol{p(X,Y) = X \big| Y = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k \quad \{X,Y\} \in E}$$

$$\boldsymbol{P : E \times E \to \mathbb{R}}$$

- $X\big|X \geq 0 \wedge (X\big|X = 0 \iff X = 0)$
- $X\big|Y = Y\big|X$ . . . . $\forall \{X,Y\} \in E$
- $\lambda\, X\big|Y = \lambda\,(X\big|Y)$ . . . . $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \wedge \forall \{X,Y\} \in E$
- $(X+Y)\big|Z = (X\big|Z) + (Y\big|Z)$ . . . . $\forall \{X,Y,Z\} \in E$

5 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\boldsymbol{\left|X\big|Y\right| \leq \sqrt{X\big|X}\,\sqrt{Y\big|Y}}$$

$$\begin{aligned}
&\left|X\big|Y\right| \leq \sqrt{X\big|X}\,\sqrt{Y\big|Y} \iff \left|X\big|Y\right|^2 \leq (X\big|X)(Y\big|Y) \iff \\
&\iff \left|X\big|Y\right|^2 - (X\big|X)\,(Y\big|Y) = \left|2\,X\big|Y\right|^2 - 4\,(X\big|X)(Y\big|Y) \leq 0 \impliedby \\
&\impliedby \begin{cases} f(t) := (X + t\,Y)\big|(X + t\,Y) \\ f(t) = (Y\big|Y)t^2 + 2(X\big|Y)t + X\big|X \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

6 Espaço Métrico

$$\boldsymbol{d(X,Y) := \begin{cases} \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_i - y_i)^2} & \{X,Y\} \in \mathbb{R}^n \\ ||X - Y|| & \{X,Y\} \in E \end{cases}}$$

- $d(X,Y) \geq 0 \land (d(X,Y) = 0 \iff X = Y)$
- $d(X,Y) = d(X,Y)$ . . . . $\forall \{X,Y\} \in E$
- $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$ . . . . $\forall \{X,Y,Z\} \in E$

Análise Matemática I

7 Noções Topológicas

- $A \in \mathcal{A} \land \emptyset \in \mathcal{A}$
- $\bigcup_{k=i}^{j} a_k \in \mathcal{A}$ . . . . $a_k \in \mathcal{A}$
- $\bigcap_{k=i}^{j} a_k \in \mathcal{A}$ . . . . $a_k \in \mathcal{A}$

8 Vizinhança

$$\boldsymbol{B(X_0, r) := \{X \in \mathbb{R}^n : d(X, X_0) = ||X - X_0||_2 < r\}}$$

$$B(X_0, r) = \begin{cases} \mathcal{V}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = (X_0 - r, X_0 + r) & x_0 \in \mathbb{R} \\ \left\{X \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - x_{0\,1})^2 + (x_2 - x_{0\,2})^2} < r\right\} & X_0 \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

9 Ponto de Acumulação

$$X_0 \in \mathbb{R}^n : (B(X_0, r)\backslash\{X_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

Conjunto derivado

$$A' \subset \mathbb{R}^n : (B(a'_k, r)\backslash\{a'_k\} \cap A \neq \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{K} \land r > 0$$

10 Ponto interior

$$X_0 \in \mathbb{R}^n : B(X_0, r) \subset A$$

Interior

$$\text{int } A = \bigcup X_k : B(X_k, r) \subset A \quad \forall k \in \mathbb{K}$$

11 Ponto exterior

$$X_0 \in \mathbb{R}^n : B(X_0, r) \cap A = \emptyset$$

Exterior

$$\text{ext } A = \bigcup X_k : B(X_k, r) \cap A = \emptyset \quad \forall k \in \mathbb{K} \land r > 0$$

12 Ponto fronterio

$$X_0 \in \mathbb{R}^n : X_0 \notin \text{int}\, A \cup \text{int}\, A$$

Fronteira

$$\text{fr}\, A = \delta A = \bigcup X_k : X_k \notin \text{int}\, A \cup \text{ext}\, A \quad \forall\, k \in \mathbb{K}$$

13 Ponto Aderente

$$X_0 \in \mathbb{R}^n : B(X_0, r) \cap A \neq \emptyset$$

Fecho (ou Aderencia)

$$\begin{aligned} \bar{A} = \bigcup X_k : B(X_k, r) \cap A \neq \emptyset \quad \forall\, k \in \mathbb{K} \wedge r > 0 \\ = \text{int}\, A \cup \text{fr}\, A \end{aligned}$$

14 Caracterização de Conjuntos

C. Aberto

$$A = \operatorname{int} A$$

C. Fechado

$$A = \bar{A}$$

C. Limitado

$$A \subset B(0_n, r) \quad r > 0$$

C. Compacto

$$A = \operatorname{int} A$$
$$\wedge\ A \subset B(0_n, r) \quad r > 0$$

Exemplo 1

$$A = \left\{X \in \mathbb{R}^2 : 0 < ||X|| < 1\right\} \cup \{(0, 2)\}$$

(i) $\operatorname{int} A$

$$= \left\{X \in \mathbb{R}^2 : 0 < ||X|| < 1\right\}$$

(ii) $\operatorname{fr} A$

$$= \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| = 1\right\} \cup \{(0,0),(0,2)\}$$

(iii) $\bar{A}$

$$= \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A = \\ = \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| \leq 1\right\} \cup \{(0,2)\}$$

(iv) A'

$$= \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| \leq 1\right\}$$

(v) Caracterização

- A não é Aberto $\because A \neq \operatorname{int} A$
- A não é Fechado $\because A \neq \bar{A}$
- A não é Compacto $\because$ A não é Fechado
- A é Limitado $\because A \subset B(0_2, 3)$

Exemplo 2

$$\boldsymbol{B = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| \geq 1 \right\}}$$

(i) $\operatorname{int} B$

$$= \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| > 1 \right\}$$

(ii) $\operatorname{fr} B$

$$= \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| = 1 \right\}$$

(iii) $\bar{A}, A'$

$$\bar{A} = A' = A$$

(iv)

- B é Fechado $\because \bar{A} = A' = A$
- B é Ilimitado $\because$ não é compacto

Exemplo 3

$$\boldsymbol{C = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| < 1 \land X \in \mathbb{Q} \right\} \cup \{(3, 2)\}}$$

(i) $\operatorname{int} C$

$$= \emptyset$$

(ii) $\operatorname{fr} C$

$$= \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| \leq 1\right\} \cup \{(3,2)\}$$

(iii) $\bar{C}$

$$= \operatorname{fr} C$$

(iv) C'

$$= \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| \leq 1\right\}$$

(v) **Caracterização**

- C não é aberto $\because C \neq \operatorname{int} C$
- C não é fechado (nem compacto) $\because C \neq \bar{C}$
- C é limitado $\because C \subset B(0,4)$

15 Conjuntos Separados

$$\bar{A} \cap B = \emptyset \wedge A \cap \bar{B} = \emptyset$$

Conjunto Desconexo

$$A \subset \mathbb{R}^n : \left\{\begin{array}{ll} A_i \cup A_j = A & \wedge \\ \wedge\, \bar{A}_i \cap A_j = \emptyset & \wedge \\ \wedge\, A_i \cap \bar{A}_j = \emptyset & \end{array}\right\} \quad \{A_i, A_j\} \subset \mathbb{R}^n$$

Conjunto Conexo

$$A \subset \mathbb{R}^2 : \left\{\begin{array}{ll} A = A_i \cup A_j & \wedge \\ \wedge\, \neg \left(\begin{array}{ll} \bar{A}_i \cap A_j & = \emptyset\, \wedge \\ \wedge\, A_i \cap \bar{A}_j & = \emptyset \end{array}\right) & \end{array}\right\} \{A_i, A_j\} \subset \mathbb{R}^n$$

Domínio

$$A \subset \mathbb{R}^n : \left\{\begin{array}{ll} \left(\begin{array}{ll} A = A_i \cup A_j & \wedge \\ \wedge\, \neg \left(\begin{array}{lll} \bar{A}_i \cap A_j & = \emptyset & \wedge \\ \wedge\, A_i \cap \bar{A}_j & = \emptyset & \end{array}\right) & \end{array}\right) & \wedge \\ \wedge\, A = \operatorname{int} A & \end{array}\right\}$$

$$\{A_i, A_j\} \subset \mathbb{R}^n$$

Exemplo 4

E4.1) $A \cup B$

$$\boldsymbol{A = \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| < 1\right\}}$$
$$\boldsymbol{B = \left\{X \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 1\right\}}$$

$A \cup B$ Não é separado

$\because \bar{A} \cap B = \{(1,0)\}$

E4.2) $C \cup D$

$$\boldsymbol{C = \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| \leq 1\right\}}$$
$$\boldsymbol{D = \left\{X \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1.1\right\}}$$

$C \cup D$ é separado

E4.3) S

$$\boldsymbol{S = \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| < 1\right\} \cup \{(0,2)\}}$$

S é desconexo

E4.4) $S \backslash \{(0,2)\}$

é um domínio pois é aberto e conexo