Ficha 7 - Diferenciabilidade

Indicações de resolução

Exercício 1

Verifique que as seguintes funções são diferenciáveis em $x = 0$:

(a) $f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$ (b) $f_2(x) = \begin{cases} \sin(2x) & \text{se} \quad x < 0 \\ e^{2x} - 1 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$

(c) $f_3(x) = \begin{cases} |x|^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$ (d) $f_4(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

Indicações: (a) Ambos os dois limites laterais $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$ são nulos. Em (b), recorde os limites notáveis em $x = 0$ das funções $\sin(x)/x$ e $(e^x - 1)/x$ e conclua que o valor da derivada em $x = 0$ é 2. Em (c) e (d), o valor da derivada em $x = 0$ é nulo.

Exercício 2

Verifique que as seguintes funções não são diferenciáveis em $x = 0$:

(a) $g_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x < 0 \\ x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$ (b) $g_2(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{se} \quad x < 0 \\ 1 - \cos(x) & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$

(c) $g_3(x) = \sqrt{\sin(x) \cdot x}$ $\quad (x \in [-\pi, \pi])$ (d) $g_4(x) = \ln(1 + |x|)$

Indicações:

(b) Observe que

$$\frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{1 - \cos^2(x)}{(1 + \cos(x))x} = \frac{1}{1 + \cos(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \sin(x)$$

(c) Note que se $-\pi \leq x < 0$,

$$\frac{\sqrt{\sin(x) \cdot x}}{x} = -\sqrt{\frac{\sin(x)}{x}}$$

pelo que os dois limites laterais associados ao cálculo da derivada não deverão ser coincidentes.

Problema 3 ($\star$)

Mostre que se f é diferenciável em $x = a$ então

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

A existência do limite no segundo membro da equação é suficiente para garantir a diferenciabilidade de f em $x = a$?

Indicações: Escreva

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{2h} + \frac{f(a-h) - f(a)}{2(-h)}$$

e verifique que, quando h tende para zero, o segundo membro tende para $f'(a)$. A existência deste limite não garante que a função seja diferenciável num ponto a: considere por exemplo, $a = 0$ e $f(x) = |x|$, em que o limite existe e é nulo. No entanto, importa referir que a expressão estudada neste exercício é muito eficaz quanto à aproximação da derivada num ponto a, conquanto esta exista.

Exercício 4

Sabendo que o mínimo de uma função quadrática com coeficiente principal positivo coincide com o ponto de derivada nula, determine o mínimo das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

(a) $p(x) = x^2 - 2x$ (b) $l(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ (c) $v(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2$

(sendo $a_1, ..., a_n$ números reais fixados).

Exercício 5

Justifique que a função definida em $\mathbb{R}$ por $h(x) = x^4 - x^2$ tem mínimo e determine-o.

Indicações: Verifique que a função $i(y) = y^2 - y$ atinge um mínimo m para um certo argumento y_0, e que m coincide com o mínimo da função h.

Exercício 6

Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ diferenciável em $x = 1$ e tal que $f(1) = 2$ e $f'(1) = 3$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de:

(a) $5f(x)$ no ponto $x = 1$.

(b) $f(x) \cdot \sin(\pi x)$ no ponto $x = 1$.

(c) $\dfrac{f(x)}{x} + \ln(f(x))$ no ponto $x = 1$.

(d) $f(e^{2x})$ no ponto $x = 0$.

(e) $f^{-1}(x)$ no ponto $x = 2$.

Indicações:

(a) $y = 15(x-1) + 10$; (b) $y = -2\pi \cdot (x-1)$; (e) $y = \dfrac{1}{3} \cdot (x-2) + 1$.

Exercício 7

Determine a expressão das derivadas das seguintes funções:

(a) $\ln(x)+\cos(2x)+e^{3x}+\arctan(5x)$ (b) $(x^5+x)\cdot\sin(x)$ (c) $\ln(\cos(x))$

(d) $\dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$ (e) $\tan(x)+\cot(x)$ (f) $(x^2+1)\cdot\arctan(x)$ (h) $e^{\ln^2(x)}$

(i) $\cos(\arcsin(x))$ (j) $\dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$ (k) $\arctan(\ln(1+x^2))$ (l) $\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

(m) $\ln(\ln(x))$ (n) $x|x|^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ (o) a^x $(a > 0)$ (p) $x^x+(\ln(x))^{\ln(x)}$.

Indicações: Poderá sempre confirmar a derivada de muitas destas expressões em programas de cálculo disponíveis on-line.

(n) Começe por derivar em $x > 0$. Repare que a função considerada é ímpar.

(o) Escreva $a^x = e^{x\cdot\ln(a)}$

(p) Escreva $x^x = e^{x\ln(x)}$.

Exercício 8 ($\star$)

(a) Sejam f e g funções diferenciáveis em a tais que

$$f(a) = g(a) = 0 \qquad \text{e} \qquad g'(a) \neq 0$$

Mostre que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

(b) Utilizando a alínea anterior, calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{xe^x + \sin(x)}$$

Indicações:

(a) A questão mais delicada é verificar que o limite está bem definido, isto é que $g(x)$ é diferente de zero para valores de x próximos de a. Tal resulta do facto

$$g(a+h) = g(a) + g'(a)h + hz(h) \qquad \text{com} \quad \lim_{h\to 0} z(h) = 0$$

Com efeito, tendo em conta que $g(a) = 0$, escrevemos

$$g(a+h) = h(g'(a) + z(h))$$

e um estudo de limite permite concluir que, para valores de h não nulos numa vizinhança apropriada de 0, teremos $g(a+h) \neq 0$. A conclusão sobre o limite resulta então do seguinte artifício algébrico:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot \frac{x-a}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Problema 9 ($\star$)

(a) Seja P um ponto situado no primeiro quadrante do plano com coordenadas (r, r). Considere o quadrado Q_r com vértice P e simétrico em relação aos eixos coordenados. Verifique que

$$A'(r) = P(r)$$

em que A e P são respectivamente a área e o perímetro do quadrado Q_r.

(b) Seja P um ponto situado no primeiro octante do espaço com coordenadas (r, r, r). Considere o cubo Q_r com vértice P e simétrico em relação aos planos coordenados. Verifique que

$$V'(r) = S(r)$$

em que V e S são respectivamente o volume e a superfície do cubo Q_r. Como poderemos calcular a "superfície exterior" de um cubo com quatro dimensões?

(c) Observe o fenómeno descrito nas alíneas (a) e (b) nos casos do círculo de raio r e da esfera de raio r.