CÁLCULO NUMÉRICO

Número: ________ Curso: ________ Nome: ______________________________

A primeira parte do teste é constituida por 5 questões de escolha múltipla.
Nas questões 1 a 5 assinale com "x"a resposta correcta.
Cada resposta correcta vale 1.0 valor. Respostas em branco valem 0 valores. Se responder erradamente ou de forma ambígua ser-lhe-á atribuída uma cotação negativa correspondente a 0.2 valores.
Se a soma das cotações da escolha múltipla for negativa, será atribuído 0 valores à escolha múltipla.

Classificação v1
EM -
TOTAL-

1. Considere uma sucessão de vectores definida por $X^{(n+1)} = GX^{(n)} + H$, $n = 0, 1, ...$, com $X^{(0)}, H \in \mathbb{R}^3$ e $G = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.1 & 0 \\ 0.5 & -0.3 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$

   Pode concluir-se que:

   ☒ **a)** A sucessão $X^{(n)}$ é convergente qualquer que seja a aproximação inicial $X^{(0)}$.

   ☐ **b)** A convergência da sucessão $X^{(n)}$ depende da aproximação inicial $X^{(0)}$.

   ☐ **c)** Nada se pode concluir quanto à convergência da sucessão $X^{(n)}$.

   ☐ **d)** A sucessão $X^{(n)}$ é divergente.

2. Considere a função $f(x) = sen(x) + e^x$, a qual tem um único zero, α, no intervalo $[-1, -0.5]$. Seja (x_n), $n \in \mathbb{N}_0$, a sucessão gerada pelo método da bisseção para aproximar α. A aproximação x_n de α que verifica $|\alpha - x_n| \leq \frac{1}{15}$ é:

   ☐ **a)** -0.75

   ☐ **b)** -0.625

   ☐ **c)** -0.5885

   ☒ **d)** -0.5625

3. Considere a função $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$ que tem um único zero, α, em $[1, 2]$ e a sucessão convergente para α dada por

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

a) O valor de x_2 arredondado com 4 casas decimais é:

☒ **1)** 1.2323

☐ **2)** 1.5128

☐ **3)** 1.1248

☐ **4)** 1.1350

b) Sabendo que em [1, 2], M2 $\geq$ 52, m1 $\leq$ 16, $x_3 = 1.1350$ e $x_4 = 1.1242$, quantas casas decimais pode garantir para x_4?

☐ **1)** duas

☒ **2)** três

☐ **3)** quatro

☐ **4)** cinco

4. Seja $x_n = g(x_{n-1})$ uma sucessão convergente para $\alpha \in [a, b]$ e $g \in C^3([a, b])$, então a ordem de convergência de x_n é 2 se

☐ **a)** $g'(\alpha) = g''(\alpha) = 0$ e $g'''(\alpha) \neq 0$.

☐ **b)** $g'(\alpha) = 0$ e $g''(\alpha) \neq 0$.

☐ **c)** $g'(\alpha) \neq 0$ e $g''(\alpha) = 0$.

☐ **d)** $g'(\alpha) = g''(\alpha) \neq 0$ e $g'''(\alpha) = 0$.

A segunda parte do teste é constituida por 3 grupos de questões. Cada resposta deverá estar convenientemente justificada.

Cotações: Questão 5: 6 valores; **Questão 6:** 4.5 valores; **Questão 7:** 4.5 valores.

5. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 0.5x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - 0.5x_3 = -4 \end{cases}$$

e $X^{(0)} = [0 \ \ 0 \ \ 0]^T$.

(a) Verifique a convergência do método de Gauss-Seidel para a solução de $AX = B$.

(b) Seja G a matriz de Gauss-Siedel associada ao sistema $AX = B$. Sem calcular o raio espectral de G, $\rho(G)$, determine $\eta > 0$ tal que $\rho(G) \leq \eta$. Justifique.

(c) Calcule $X^{(2)}$.

(d) Quantas casas decimais pode garantir para $X^{(2)}$?

6. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{y^2 + y}{t}, \quad t \in [1, 2], \\ y(1) = -2. \end{cases}$$

(a) Verifique se o problema é bem posto sem utilizar a definição de problema bem posto?

(b) Determine um valor aproximado de $y(2)$ pelo método de Taylor de ordem 2 com $h = 0.5$.

(c) Sabendo que a solução do problema é $y(t) = \dfrac{2t}{1 - 2t}$, quantas casas decimais pode garantir para o valor aproximado de $y(2)$? justifique.

7. Considere a função $g(x) = 2^{-x}$ com um único ponto fixo p em $[\frac{1}{3}, 1]$.

(a) Obtenha a função $f(x)$ talque $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$.

(b) Verifique se a sucessão

$$\begin{cases} x_0 = \frac{1}{3} \\ x_n = g(x_{n-1}), \ n = 1, 2, ... \end{cases}$$

converge para o único ponto fixo $p \in [\frac{1}{3}, 1]$.

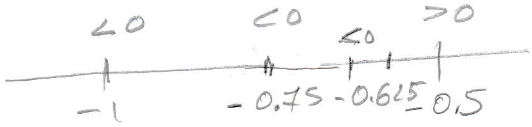
(c) Calcule o n$^{\text{o}}$ de iteradas n de forma a obter uma aproximação de p com 3 casas decimais significativas. Considere nos cálculos 4 casas decimais devidamente arredondadas.

2º teste CN

2. $f(x) = \text{sen}(x) + e^{x}$ tem 1 único zero em $[-1, -0.5]$

$f(-1) < 0 \quad f(-0.5) > 0$

$|\alpha - x_n| \leq \frac{1}{15} \simeq 0.0667$



$$x_0 = \frac{-1 + (-0.5)}{2} = -0.75$$

$f(-0.75) < 0 \qquad |\alpha - x_0| \leq \left|\frac{b-a}{2}\right| = \frac{-0.5-(-1)}{2} = 0.25 > 0.0$

$$x_1 = \frac{-0.75 + (-0.5)}{2} = -0.625$$

$f(-0.625) < 0$

$|\alpha - x_1| \leq \frac{-0.5-(-1)}{2^2} = 0.125 > \frac{1}{15}$

$$x_2 = \frac{-0.625 + (-0.5)}{2} = -0.5625$$

$$|\alpha - x_2| \leq \frac{-0.5-(-1)}{2^3} = 0.0625 < \frac{1}{15}$$

$\alpha = -0.5885$

2º teste CN

3. a) $f(x) = x^4 + 2x^2 - x^3 + 3 \qquad \alpha \in [1, 2]$

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0,1,2 \ldots \end{cases}$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)} = 2 - \frac{19}{39} = 1.5128$$

$$f'(x) = 4x^3 + 4x - 1$$

$$x_2 = 1.5128 - \frac{f(1.5128)}{f'(1.5128)} = \underline{1.2323} \checkmark$$

$$x_3 = 1.2323 - \frac{f(1.2323)}{f'(1.2323)} = 1.1350$$

b) $f''(x) = 12x^2 + 4$ função crescente em $[1,2]$

$M_1 = f''(2) = 12 \times 4 + 4 = 52$

$m_1 = f''(1) = 12 + 4 = 16$

$M_1 \geq |f''(x)| \; \forall x \in [1,2]$

$m_1 \leq |f''(x)| \; \forall x \in [1,2]$

$x_3 = 1.1350 \qquad \alpha = 1.1241$

$x_4 = 1.1242$

$$|\alpha - x_4| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_4 - x_3|^2 = \frac{52}{2 \times 16} (1.1242 - 1.1350)^2 = 0.00019 < 0.5 \times 10^{-3}$$

3 c.d.s

2º teste CN

5. Considere o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -4 \end{cases} \quad e \quad X^{(0)} = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T$$

a) Verifique a convergência do método de Gauss-Seidel para a solução $AX=B$

$AX = B \Leftrightarrow A'X = B'$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1/2 \\ 1 & -2 & -1/2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Seja $A' = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1/2 \\ 1 & -2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B' = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

A' tem diagonal estritamente dominante pelo que a sucessão de vectores definida pelo método de Gauss-Siedel converge para a solução de $AX=B$, qualquer que seja a aproximação inicial $X^{(0)}$

b) Seja G a matriz de Gauss-Siedel associada ao sistema $AX=B$. Sem calcular o raio espectral de G, $\rho(G)$, determine $\eta > 0 : \rho(G) \leq \eta$. Justifique

Sabe-se que $\rho(G) \leq \|G\|$ para qualquer norma matricial (teorema cap. 5)

D - matriz diagonal
L - matriz triangular inferior
U - matriz triangular superior

$A' = D + L + U$

$G = -(D+L)^{-1}U$

$H = (D+L)^{-1}B'$

$$D+L = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (D+L)^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ -0.25 & -0.5 & 0 \\ 0.125 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & -0.125 \\ 0 & -0.125 & 0.0625 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

33850

$$\|G\|_\infty = \max\left[0.75,\ 0.375,\ 0.1875\right] = 0.75$$

$$\rho(G) \leq \|G\|_\infty = 0.75 = ?$$

c) Calcule $x^{(2)}$

$$\begin{cases} x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T \\ x^{(n+1)} = Gx^{(n)} + H \end{cases}$$

$$x^{(1)} = Gx^{(0)} + H = H = [-2\ \ 1\ \ -0.5]^T$$

$$x^{(2)} = Gx^{(1)} + H = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & -0.125 \\ 0 & -0.25 & 0.0625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1.625 \\ 1.3125 \\ -0.65625 \end{bmatrix}$$

d) Quantas casas decimais significativas pode garantir para $x^{(2)}$?

$$\|x^* - x^{(2)}\|_\infty \leq \frac{\|G\|_\infty}{1 - \|G\|_\infty} \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty$$

$$x^{(2)} - x^{(1)} = \begin{bmatrix} -1.625 \\ 1.3125 \\ -0.65625 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.3125 \\ -0.15625 \end{bmatrix}$$

$$\|x^{(2)} - x^{(1)}\| = \max(0.375,\ 0.3125,\ -0.15625) = 0.375$$

$$\|x^* - x^{(2)}\|_\infty = \frac{0.75}{1 - 0.75} \times 0.375 = 1{,}125 > 0.5 \Rightarrow 0 \text{ c.d.s}$$

Folha nº

6 - Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+y}{t} & 1 \leq t \leq 2 \quad e \; h = 0.5 \\ y(1) = -2 \end{cases}$$

Nos cálculos utilize 5 casas decimais convenientemente arredondadas.

a) Verifique que o problema é bem posto

$D = \{(t, y) : 1 \leq t \leq 2 \;\; e \; y \in \mathbb{R}\}$

$f(t, y) = \dfrac{y^2+y}{t}$ é contínua em D

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left|\frac{2y+1}{t}\right|$$

Como $-\infty < y < +\infty$ não existe $L > 0$ tal que $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < L$

logo nada podemos concluir quanto ao problema ser bem posto.

b) Determine um valor aproximado de $y(2)$ pelo método de taylor de ordem 2

$t = a + h \times i \iff 2 = 1 + 0.5 \cdot i$

$i = \dfrac{2-1}{0.5} = 2$

$t_0 \quad t_1 \quad t_2$

$1 \quad 1.5 \quad 2$

$$\begin{cases} w_0 = -2 \\ w_{i+1} = w_i + h\left(f(t_i, w_i) + \dfrac{h}{2} f'(t_i, w_i)\right) \end{cases}$$

$\longrightarrow$

33850

$$f'(t,y) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \times y' =$$

$$= -\frac{y^2+y}{t^2} + \frac{2y+1}{t} \times \frac{y^2+y}{t} =$$

$$= \frac{\cancel{-y^2-y}}{t^2} + \frac{2y^3+2y^2\cancel{+y^2}\cancel{+y}}{t^2} = \frac{2y^2(y+1)}{t^2}$$

$t_0 = 1$

$$w_1 = w_0 + 0.5\left(f(\overset{=1}{t_0},\overset{=-2}{w_0}) + \frac{0.5}{2} f'(\overset{=1}{t_0},\overset{=-2}{w_0})\right) =$$

$$= -2 + 0.5\left(\frac{(-2)^2-2}{1} + \frac{0.25\left(2\times(-2)^2\times(-2+1)\right)}{1}\right)$$

$$= -2 + 0.5\left(2 + 0.25\times(-8)\right) = -2 + 1 - 1 = -2$$

$t_1 = 1.5$

$$w_2 = -2 + 0.5\left(\frac{2}{1.5} + \frac{0.25\times(-8)}{(1.5)^2}\right) = -1.77778 \simeq y(2)$$

e) Sabendo que a solução do problema é $y(t) = \frac{2t}{1-2t}$ quantas casas decimais significativas pode garantir para o valor aproximado de $y(2)$? Justifique

$$y(2) = -1.33333$$

$$|y(2) - w_2| \leq 0.445 < 0.5\times10^0 \Rightarrow 0 \text{ c.d.s}$$

2º Teste CN

7. $g(x) = 2^{-x}$ em $[1/3, 1]$.

(a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$

$g(x) = 2^{-x} = x \Leftrightarrow \underbrace{2^{-x} - x}_{f(x)} = 0$

$f(x) = 2^{-x} - x$

b) $g(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$, $\left[\begin{array}{l} g(\frac{1}{3}) = 0.7937,\ g(1) = 0.5,\ g'(x) < 0 \\ \Rightarrow g(x) \text{ é decrescente} \Rightarrow g(x) \in [\frac{1}{3}, 1] \\ \qquad \forall x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{array}\right.$

$g'(x) = -2^{-x} \ln(2)$

$|g'(x)| = \underbrace{2^{-x}\ln(2)}_{\text{é função decrescente em } [1/3, 1]} \leq 2^{-1/3} \log(2) \simeq \overbrace{0.5506}^{k} < 1$

logo com $g'(a)$ existe e $|g(x)| \leq k < 1$ pelo teorema do ponto fixo

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1/3 \\ x_n = 2^{-(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$ converge para o único ponto fixo $p \in [1/3, 1]$.

c) erro à priori

$|p - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| \leq 0.5 \times 10^{-3}$ $\qquad K = 0.5506$

$x_0 = 1/3 \Rightarrow x_1 = g(x_0) = 2^{-1/3} \simeq 0.7937$

$\frac{(0.5506)^n}{1 - 0.5506} |0.7937 - 1/3| \leq 0.5 \times 10^{-3}$

$0.5506^n \leq \frac{0.5 \times 10^{-3}}{|0.7937 - 1/3|} (1 - 0.5506)$

$0.5506^n \leq 0.000488\dots$ $\longrightarrow$ continua

7 c) cont.

33850

$$n \ln(\underbrace{0.5506}_{<1}) \leq \ln(0.000488\ldots)$$

$$n \geq \frac{\ln(0.000488\ldots)}{\ln(0.5506)} = 12.777\ldots$$

$n = 13$,

Teríamos que calcular 13 iteradas para obter uma aproximação com pelo menos 3 casas decimais significativas.

Folha nº