CÁLCULO NUMÉRICO

Número: ________ Curso: ________ Nome: ______________________________

A primeira parte do teste é constituida por 5 questões de escolha múltipla.
Nas questões 1 a 5 assinale com "x"a resposta correcta.
Cada resposta correcta vale 1.0 valor. Respostas em branco valem 0 valores.
Se responder erradamente ou de forma ambígua ser-lhe-á atribuída uma cotação negativa correspondente a 0.2 valores.
Se a soma das cotações da escolha múltipla for negativa, será atribuído 0 valores à escolha múltipla.

Classificação
EM -
TOTAL-

1. Considere o intervalo $[a, b]$, com $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ e a função f para a qual se conhece os valores $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$.

   Seja p o polinómio de Lagrange de grau menor ou igual a n, tal que, $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$ e q o polinómio do segundo grau que aproxima a função segundo a técnica dos mínimos quadrados. Considere ainda o spline cúbico natural, S, interpolador de f nos pontos dados. Verifica-se sempre:

☐ **a)** $\sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - q(x_i)]^2 = 0$

☐ **b)** $\sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - S(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - p(x_i)]^2$

☐ **c)** $\sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - q(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - p(x_i)]^2$

☐ **d)** $\sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - S(x_i)]^2 \neq \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - p(x_i)]^2$

2. Sejam f uma função definida em $[a, b]$ e $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b$. Considere o spline cúbico natural $S(x)$ interpolador de $f(x)$ nos nodos x_0, x_1, x_2 e x_3, e $p_3(x)$ o polinómio de Newton com diferenças divididas de grau ≤ 3 interpolador de $f(x)$ nos nodos x_0, x_1, x_2 e x_3. Verifica-se sempre:

☐ **a)** $f(x) - p_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\frac{f^{(3)}(\theta)}{3!}, \theta \in]a, b[$

☐ **b)** $S(x) \neq p_3(x), \forall x \in [a, b]$

☐ **c)** $S(x_i) = p_3(x_i), i = 0, ..., 3$

☐ **d)** $S(x) = p_3(x), \forall x \in [a, b]$

3. Seja $I = \int_0^2 f(x)dx$ e $\bar{I} = 8$ uma aproximação de I obtida pela regra de Simpson com $h = 1$. Sabendo que f é um polinómio de grau 4 cujo coeficiente de grau 4 é igual a 3, qual é o valor de I?

   □ **a)** $I = 7$

   □ **b)** $I = \frac{36}{5}$

   □ **c)** $I = 9$

   □ **d)** $I = \frac{49}{5}$

4. Considere que $f(x)$ é um polinómio de grau n. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   □ **a)** Todas as diferenças divididas de ordem $> n$ são iguais a uma constante $K \neq 0$;

   □ **b)** Todas as $f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+n}]$ são nulas;

   □ **c)** Todas as $f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+n}]$ são iguais a uma constante $K \neq 0$;

   □ **d)** Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

5. Seja $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$ e $f(x) \in C^4[-1, 1]$ uma função que verifica $|f_{(4)}(x)| \leq 30$, $\forall x \in [-1, 1]$. Se pretendesse determinar um valor aproximado de I, com pelo menos 3 casas decimais significativas, utilizando a regra de Simpson, qual o menor número de sub-intervalos de igual amplitude em que teria de dividir o intervalo [-1, 1]?

   □ **a)** 5

   □ **b)** 10

   □ **c)** 6

   □ **d)** 12

A segunda parte do teste é constituida por 3 grupos de questões. Cada resposta deverá estar convenientemente justificada.

Cotações: Questão 6: 4 valores; **Questão 7:** 6 valores; **Questão 8:** 4 valores.

6. Considere o seguinte spline natural no intervalo [0,2] interpolador da função $f(x)$:

$$S(x) = \begin{cases} 1 + 2x - x^3, & 0 \le x < 1 \\ 2 + a(x-1) + b(x-1)^2 + c(x-1)^3, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

a) Encontre a, b, c e escreva a expressão do spline.

b) Obtenha uma aproximação para $f(1.5)$.

7. Considere a seguinte tabela de dados em que t representa o tempo e y respresenta o valor observado de uma determinada variável física que varia linearmente com o tempo :

t	0	1	2	3	4
y	0	1	2.5	2	3.5

a) Esboçe num gráfico os pontos apresentados na tabela.
Que método na sua opinião deverá ser utilizado para obter o polinómio que interpola/aproxima os dados e melhor capta o comportamento evidenciado por estes? Justifique.

b) Determine a aproximação $m_1(t) = a_0 + a_1 t$ aos dados fornecidos utilizando a técnica dos minimos quadrados. Deverá apresentar o sistema de equações equações normais.

c) Calcule o erro quadrático da aproximação obtida na alinea anterior.

d) Seja $m_4(t)$ o polinómio de grau menor ou igual a 4 que aproxima os dados da tabela, obtido pela técnica dos mínimos quadrados. Sem determinar m_4, indique qual o valor de $\sum_{i=0}^{4} (y(t_i) - m_4(t_i))^2$ onde $t_i = i$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Justifique.

8. Considere o integral $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$.

a) Determine um valor aproximado $\bar{I}$ de I pela regra do ponto médio e pela regra dos trapézios ambas com 4 aplicações da regra. Nos cálculos utilize 5 casas décimais convenientemente arredondadas.

b) Determine um majorante do erro absoluto associado a ambas as aproximações obtidas na alinea anterior.

Quantos algarismos significativos pode garantir para aproximação dada pela regra do ponto médio e pela regra dos trapézios?

Conclua justificando qual das regras proporciona neste caso uma melhor aproximação ao valor real do integral.