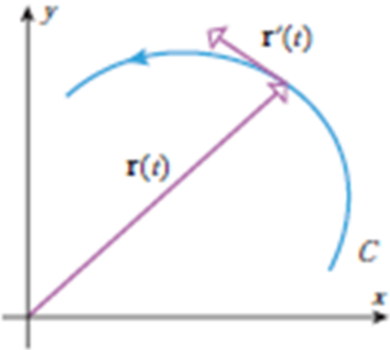
Vetor tangente a uma curva paramétrica

Seja C o gráfico de uma função vetorial $\vec{r}$ diferenciável no ponto t_0. Suponhamos que Se $\vec{r}\prime(t_0) \neq 0$ e tem o ponto inicial sobre a ponta do vetor $\vec{r}(t_0)$, então o vetor $\vec{r}\prime(t_0)$ é tangente ao gráfico de $\vec{r}$ e aponta no sentido crescente do parâmetro t.



Funções vetoriais regulares

- Diz-se que $\vec{r}$ é uma função de classe C^1 (e escreve-se $\vec{r} \in C^1(I)$) em I se $\vec{r}$ é diferenciável em I e a função derivada é contínua em I.
- Diz-se que uma função vetorial é regular em I se $\vec{r} \in C^1(I)$ e $\vec{r}\prime(t) \neq 0$, $\forall t \in I$.

Curvas regulares

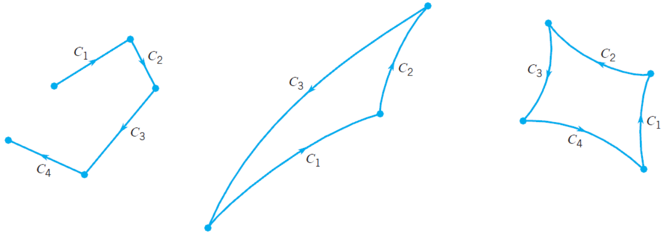
Seja C uma curva ou linha orientada no espaço ou no plano.

- Se C é uma curva fechada, diz-se que C é uma curva simples se tiver um único ponto de "sobreposição" (o ponto inicial coincide com o ponto final).
- Se C não é uma curva fechada, diz-se que C é uma curva simples se não tiver pontos de "sobreposição".

Diz-se que C é curva curva regular se for uma curva simples e existir uma função vetorial regular cujo gráfico seja C.

Curvas seccionalmente regulares

Uma curva paramétrica C diz-se seccionalmente regular se é a união de um número finito de curvas regulares $C_1, \ldots, C_n$, tais que o ponto inicial de C_{i+1} é o ponto terminal de C_i.



Parametrização de uma curva no plano ou no espaço

Seja C uma curva regular correspondente ao gráfico de

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}, \quad t \in I.$$

À curva paramétrica associada

$$(x, y, z) = \big(f(t),\ g(t),\ h(t)\big), \quad t \in I$$

chamamos parametrização de C e as equações

$$x = f(t),\ y = g(t),\ z = h(t), \quad t \in I$$

dizem-se equações paramétricas da curva C.

Linhas- Exemplos

Exemplos

(a) *Considere a linha* C *em* $\mathbb{R}^2$ *definida pela equação* $(x-1)^2+(y-2)^2=3$ *orientada no sentido anti-horário (ou sentido trigonométrico). Determine uma parametrização de* C.

(b) *Dados dois pontos no espaço* $P=(x_0,y_0,z_0)$ *e* $Q=(x_1,y_1,z_1)$ *Determine uma parametrização do segmento de reta* $\{PQ\}$ *orientado de* P *para* Q.

(c) *Considere a linha orientada* C *em* $\mathbb{R}^2$ *definida pela equação* $y=x^2$, $0\leq x\leq 2$ *com ponto inicial* $(0,0)$ *e ponto final* $(2,4)$. *Determine uma parametrização de* C.

Exemplos

Resolução:

Reta tangente a uma linha simples

Seja C uma linha regular definida pela função vetorial

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}, \quad t \in I.$$

Dado um ponto P_0 pertencente a C, existe $t_0 \in I$ tal que $P_0 = \big(f(t_0), g(t_0), h(t_0)\big)$.

- Chama-se reta tangente à curva C no ponto P_0 à reta que passa no ponto P_0 e tem vetor diretor $\vec{r}\,'(t_0)$.

A equação vetorial da reta é dada por

$$(x, y, z) = P_0 + \lambda \vec{r}\,'(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

Determinar a reta tangente à elipse $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ *no ponto* $P = \left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Reta tangente - Exemplo

Resolução:

Curvas - Trajetórias - Vetores velocidade e aceleração

As trajetórias de partículas que se movem no plano ou no espaço são descritas por curvas paramétricas onde o parâmetro corresponde ao tempo.

Seja

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}, \quad t \in I$$

a trajetória (duas vezes diferenciável) de uma partícula que se move no espaço.

O vetor velocidade no instante t_0 é dado por $\vec{r}\prime(t_0)$.

O vetor aceleração no instante t_0 é dado por $\vec{r}\prime\prime(t_0)$.

Integração de funções vetoriais

Seja $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ uma função vetorial contínua definida no intervalo $[a, b]$, $a < b$, com valores em $\mathbb{R}^3$.

$$\int_a^b \vec{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b x(t)\,dt\right)\vec{i} + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)\vec{j} + \left(\int_a^b z(t)\,dt\right)\vec{k}.$$

Exemplo

Seja $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + e^t\vec{j} - 2\cos t\;\vec{k}$. *Determine* $\int_0^1 \vec{r}(t)\,dt$.

Resolução:

Integração de funções vetoriais

Sejam $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ funções vetoriais contínuas definidas no intervalo $[a, b]$, $a < b$ com valores em $\mathbb{R}^3$ (ou em $\mathbb{R}^2$). Seja λ uma constante real. Então:

(a) $\int_a^b \lambda\, \vec{r}_1(t)\, dt = \lambda \int_a^b \vec{r}_1(t)\, dt$;

(b) $\int_a^b (\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t))\, dt = \int_a^b \vec{r}_1(t)\, dt + \int_a^b \vec{r}_2(t)\, dt$.

Primitivação de funções vetoriais

Seja $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ uma função vetorial contínua definida no intervalo $[a, b]$, $a < b$, com valores em $\mathbb{R}^3$.

$$\int \vec{r}(t)\,dt = \left(\int x(t)\,dt\right)\vec{i} + \left(\int y(t)\,dt\right)\vec{j} + \left(\int z(t)\,dt\right)\vec{k}.$$

Exemplo

Considere a função vetorial $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \cos t\vec{j}$ *com valores em* $\mathbb{R}^2$ *e determine* $\int \vec{r}(t)\,dt$.

Resolução:

Comprimento de uma curva

Seja C uma curva regular em $\mathbb{R}^3$ (ou em $\mathbb{R}^2$) gráfico da função vetorial regular

$$\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3 \quad (\mathbb{R}^2).$$

Então o comprimento da curva C é dado por

$$L = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt.$$

Exemplo

Considere a função vetorial

$$\vec{r}(t) = \cos t\, \vec{i} + \operatorname{sen} t \vec{j} + \vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

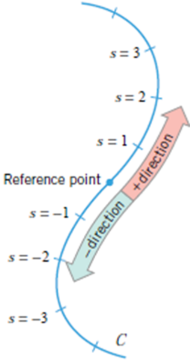
Seja C o gráfico de $\vec{r}$. Determine o comprimento de C.

Resolução:

Função comprimento de arco

Para $c \in I$, define-se a função comprimento de arco que verifica $s(c) = 0$ por

$$s(t) = \int_c^t \left\| \frac{d\vec{r}}{d\tau}(\tau) \right\| d\tau.$$



Comprimento de arco

Seja $c, d \in I$, $c < d$. O comprimento do arco correspondente a $c \leq t \leq d$ é dado por

$$L = \int_c^d \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt.$$

Exemplo

Considere a função vetorial

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \operatorname{sen} t\vec{j} + 2t\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Seja C o gráfico de $\vec{r}$.

(a) *Determine a função comprimento de arco $s(\cdot)$ que verifica $s(0) = 0$.*

(b) *Determine o comprimento do arco da curva C correspondente a $0 \leq t \leq \pi$.*

Exemplo

Resolução:

Parametrização associada ao comprimento de arco

Seja C uma curva regular e

$$(x, y, z) = \big(f(t),\ g(t),\ h(t)\big), \quad t \in [a, b]$$

uma parametrização de C.
Seja

$$s : [a, b] \to [\alpha, \beta]$$

a função comprimento de arco tal que $s(a) = 0$. A função $s(t)$ é invertível. Seja $t = t(s)$ a função inversa

$$t : [\alpha, \beta] \to [a, b].$$

- A parametrização associada ao comprimento de arco é definida por

$$(x, y, z) = \big(f(t(s)),\ g(t(s)),\ h(t(s))\big), \quad s \in [\alpha, \beta].$$

Exemplo

Exemplo

Seja

$$(x, y, z) = \big(\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ t\big), \quad t \in [0, 2\pi]$$

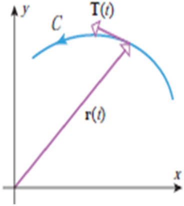
uma parametrização de uma curva regular C *em* $\mathbb{R}^3$. *Determine a parametrização associada ao comprimento de arco.*

Resolução:

Vetor tangente unitário

Seja C uma curva regular em $\mathbb{R}^3$ (ou em $\mathbb{R}^2$) definida pela função vetorial regular $\vec{r}: [a, b] \to \mathbb{R}^3 \quad (\mathbb{R}^2)$. Define-se

- vetor tangente unitário à curva C no instante t_0
  $\vec{T}(t_0) = \frac{\vec{r}\prime(t_0)}{\|\vec{r}\prime(t_0)\|}$;
- se o parâmetro da função vetorial for o comprimento de arco $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $\vec{T}(s_0) = \vec{r}\prime(s_0)$ uma vez que $\|\vec{r}\prime(s_0)\| = 1$.



Vetor normal unitário principal

- O vetor normal unitário principal à curva C no instante t_0 é $\vec{N}(t_0) = \frac{\vec{T}\prime(t_0)}{\|\vec{T}\prime(t_0)\|}$, no caso de $\vec{T}\prime(t_0) \neq \vec{0}$. Para curvas no plano, o vetor $\vec{N}(t_0)$ diz-se normal unitário interior (corresponde ao vetor $n(t_0)$ que aponta para o lado concavo da curva).
- se o parâmetro da função vetorial for o comprimento de arco $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $\vec{N}(s_0) = \frac{\vec{r}''(s_0)}{\|\vec{r}''(s_0)\|}$