Capítulo 2 - Variáveis aleatórias

Resolução de alguns exercícios

2.2

a)

i) $P(X \le 3) = F_X(3) = 1/4$

ii) $P(1 < X \le 2) = P(X \le 2) - P(X \le 1) = F_X(2) - F_X(1) = 1/4 - 1/6 = 1/12$

iii) $P(2 \le X < 6) = P(X < 6) - P(X < 2) = F_X(5) - F_X(1) = 7/12 - 1/6 = 5/12$

iv) Se o número de pontos saídos não dista dos dois pontos por mais de um ponto, então é porque ou saiu 1 ponto, ou 2 pontos, ou 3 pontos e portanto tem-se $P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = P(X \le 3)) = F_X(3) = 1/4$

b) Observemos que, por exemplo para $X = 1$ se tem

$$P(X = 1) = P(X \le 1) - P(X < 1) = F_X(1) - F_X(1^-) = 1/6 - 0 = 1/6$$

onde $F(x^-) = P(X < x) = \lim_{t \to x^-} F(t)$. Usando este raciocínio vem então

$$X \begin{cases} 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/12 & 1/4 & 1/12 & 5/12 \end{cases}.$$

Repare-se que $X = 3$ não faz parte do suporte da v.a. X já que

$$P(X = 3) = P(X \le 3) - P(X < 3) = F_X(3) - F_X(2) = 1/4 - 1/4 = 0.$$

c) O dado não é equilibrado uma vez que os elementos do suporte da v.a. não são equiprováveis. Além do mais, o acontecimento $X = 3$ nunca ocorre.

d) $P(X = 6|X \ge 4) = \dfrac{P(X = 6 \cap X \ge 4)}{X \ge 4} = \dfrac{P(X = 6)}{P(X \ge 4)} = \dfrac{5/12}{1/4 + 1/12 + 5/12} = \dfrac{5}{9}.$

Variável aleatória contínua

2.4 a) Para determinarmos o valor da constante k começamos por resolver a equação

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{0} k + x \ \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} k - x \ \mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[kx + \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[kx - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2k - 1 = 1 \Leftrightarrow k = 1.$$

De seguida, observamos que para este valor de k se tem efectivamente ainda que $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - \displaystyle\int_{-1}^{0} 1 + x \ \mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

c) $P(X > 0.5 | X > 0) = \dfrac{P(X > 0.5 \cap X > 0)}{P(X > 0)} = \dfrac{P(X > 0.5)}{P(X > 0)} =$

$$= \frac{\int_{0.5}^{+\infty} f(x) \ \mathrm{d}x}{\int_{0}^{+\infty} f(x) \ \mathrm{d}x} = \frac{\int_{0.5}^{1} 1 - x \ \mathrm{d}x}{\int_{0}^{1} 1 - x \ \mathrm{d}x} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}.$$

2.8 a) Para determinarmos o valor da constante c começamos por resolver a equação

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \int_{-1}^{0} c(1+x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} c(1-\frac{x}{2})\ \mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + c\left[x-\frac{x^2}{4}\right]_{0}^{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{2}{3}.$$

De seguida, observamos que para este valor de c se tem efectivamente ainda que $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $P(X \leq 0 | X \leq 1) = \dfrac{P(X \leq 0 \cap X \leq 1)}{P(X \leq 1)} = \dfrac{P(X \leq 0)}{P(X \leq 1)} =$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{1} f(x)\ \mathrm{d}x} = \frac{\int_{-1}^{0} \frac{2}{3}(1+x)\ \mathrm{d}x}{\int_{-1}^{0} \frac{2}{3}(1+x)\ \mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \frac{2}{3}(1-\frac{x}{2})\ \mathrm{d}x} = \frac{1/3}{1/3+1/2} = \frac{2}{5}.$$

2.14 Estando a função densidade de probabilidade de X completamente especificada, passamos ao cálculo dos valores pedidos:

- $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 x \frac{x}{2}\ \mathrm{d}x + \int_1^2 x \frac{1}{2}\ \mathrm{d}x + \int_2^3 x \frac{3-x}{2}\ \mathrm{d}x = \cdots = \frac{3}{2}$
- $E(X-1) = E(X) - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$
- $E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \frac{x}{2}\ \mathrm{d}x + \int_1^2 x^2 \frac{1}{2}\ \mathrm{d}x + \int_2^3 x^2 \frac{3-x}{2}\ \mathrm{d}x = \cdots = \frac{8}{3}$
- $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{8}{3} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{12}$
- $E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X) = \frac{7}{6}$

Variável aleatória contínua

2.15 a) $\int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \int_0^{\pi} k\sin(x)\ \mathrm{d}x = 1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow k = 1/2$

b) $E(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x \times \frac{1}{2}\sin(x)\ \mathrm{d}x = \cdots = \frac{\pi}{2}$

$E(\cos(x)) = \int_{\mathbb{R}} \cos(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos(x) \times \frac{1}{2}\sin(x)\ \mathrm{d}x = \cdots = 0$

c) $V(X) = E(X^2) - E^2(X) \Leftrightarrow E(X^2) = V(X) + E^2(X) = \cdots = \frac{\pi^2}{2} - 2$

d) $V(5X - 4) = 25V(X) = \cdots = \frac{25}{4}\pi^2 - 50$