Soluções ficha 5 - CNA

Exercício 1

$\|X\|_1 = 3$, $\|X\|_\infty = 2$

$\|A\|_1 = 13$, $\|A\|_\infty = 12$

Exercício 2

A é matriz de diagonal estritamente dominante

Exercício 3

c) $X^{(2)} = [0.45 \quad 0.0165 \quad 1.231]^T$, $\|X^* - X^{(2)}\|_\infty \leq 0.2$

d) nº de iteradas mínimo $= 28$

Exercício 4

b) $X^{(1)} = [0.199 \quad -2.606 \quad 1.81]^T$, $\|X^* - X^{(1)}\|_\infty \leq 4.606$

c) $X^{(1)} = [0.199 \quad -2.5209 \quad 2.99607]^T$, $\|X^* - X^{(1)}\|_\infty \leq 1.938$

Exercício 5

$a \in \,]-7,-4[\, \cup \,]4,7[$

Exercício 6

a) $x \in \,]-0.4, 0.4[$

c) nº mínimo de iteradas $= 57$

Exercício 7

a) $X^{(2)} \simeq \begin{bmatrix} -0.016667 \\ 0.316667 \\ 0.416667 \end{bmatrix}$

c) $\|X^* - X^{(2)}\|_\infty \leq 0.866667$

d) $\|X - X^{(50)}\|_\infty \leq 0.24 \times 10^{-4}$ logo não podemos garantir 6 c.d.s.

FICHA 5

Exercício 6

- $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha/4 & 0 \\ -\alpha & 1 & 0 \\ 0.6 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

- $B = [0.2 \quad 1.2 \quad 0.3]^T$

- $X \rightarrow$ solução do sistema de equações
$$Ax = B$$

— // —

a)

verificar para que valores de α,
se verifica $\rho(G_J) < 1$.

- Ora

  - $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow -D^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

  - $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0.6 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$

  - $U = \begin{bmatrix} 0 & \alpha/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow L+U = \begin{bmatrix} 0 & \alpha/4 & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0.6 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$

FICHA 5

Exercício 6 <continuação>

- Desta forma temos:

$$G_J = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha/4 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \\ -0.6 & -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\det(G_J - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha/4 & 0 \\ \alpha & -\lambda & 0 \\ -0.6 & -\alpha & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{-\lambda^3 - \frac{\alpha^2}{4}\lambda}_{\text{polinómio característico}} .$$

- Sendo assim, a equação característica é

$$-\lambda^3 - \frac{\alpha^2}{4}\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \frac{\alpha^2}{4}\lambda = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda\left(\lambda + \frac{\alpha^2}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \vee \lambda = -\frac{\alpha}{2} i \vee$$

$$\vee\ \alpha = \frac{\alpha}{2} i .$$

FICHA 5

Exercício 6 <continuação>

- Por conseguinte

$$\sigma(G_J) = \left\{0, -\frac{\alpha}{2} i, \frac{\alpha}{2} i\right\}$$

- Então $\rho(G_J) = \max\left\{0, \left|\frac{\alpha}{2}\right|\right\} =$

$$= \left|\frac{\alpha}{2}\right|.$$

- Basta então impôr a condição

$$\left|\frac{\alpha}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < 2 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \alpha \in \left]-2, 2\right[$, para se obter a convergência do método de Jacobi.

FICHA 5

Exercício 6 <continuação>

- Com $\alpha = 0.1$ tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.025 & 0 \\ -0.1 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) • Como $0.1 \in]-2, 2[$, conclui-se que a sucessão $\{X^{(K)}\}_{K \in \mathbb{N}}$, gerada pelo método de Jacobi, converge para a solução X do sistema $AX = B$.

- Ora, neste caso

$$G_J = \begin{bmatrix} 0 & -0.025 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ -0.6 & -0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$H_J = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \text{ pelo que}$$

FICHA 5

Exercício 6 <continuação>

- $X^{(1)} = G_J \cdot X^{(0)} + H_J =$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -0.025 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ -0.6 & -0.1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.17 \\ 1.22 \\ 0.06 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.2 \\ 0.3 \end{bmatrix} =$$

$$= [0.1695 \quad 1.217 \quad 0.076]^T.$$

c) • Objectivo: $\|X - X^{(m)}\|_\infty \leq 10^{-10}$.

- Sabe-se que: $\|X - X^{(m)}\|_\infty \leq \dfrac{(\|G_J\|_\infty)^m}{1 - \|G_J\|_\infty} \times \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty$

- Basta então impôr a condição

$$\frac{(\|G_J\|_\infty)^m}{1 - \|G_J\|_\infty} \times \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty \leq 10^{-10}. \quad [2]$$

FICHA 5

Exercício 6 <continuação>

- Ora $\|G_J\|_\infty = \text{máx}\{|0|+|-0.025|+|0|, |0.1|+|0|+|0|, |-0.6|+|-0.1|+|0|\} =$

$= \text{máx}\{0.025, 0.1, 0.7\} = 0.7$,

e

$X^{(1)} - X^{(0)} = [-0.0005 \quad -0.003 \quad 0.016]^T$,

pelo que

$\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty = \text{máx}\{|-0.0005|, |-0.003|, |0.016|\}$

$= 0.016$

- Sendo assim $[2] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{0.7^n}{1-0.7} \times 0.016 \leq 10^{-10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0.7^n \leq \dfrac{0.3 \times 10^{-10}}{0.016} \Leftrightarrow$

FICHA 5

Exercício 6 <continuação>

$$\Leftrightarrow n \geq \log_{0.7}\left(\frac{0.3\times 10^{-10}}{0.016}\right) =$$

$$= \frac{\ln\left(\frac{0.3\times 10^{-10}}{0.016}\right)}{\ln(0.7)} =$$

$$= 56{,}338852\ldots \Leftarrow n_{\text{mín.}} = 57.$$

Exercício 7 - ficha 5

$$S = \begin{cases} -2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad X^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$$

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ A não tem diagonal estritamente dominante mas se trocarmos as linhas da seguinte forma

$A' = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ tem-se $|5| > |1| + |3| = 4$
$|3| > |-1| + 1 = 2$
$|4| > 0 + |-2| = 2$

logo a matriz já tem diagonal estritamente dominante e o método de Jacobi converge para X^* solução do sistema S, uma vez que $Ax = B \iff A'X = B$ com $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Método de Jacobi

$$\begin{cases} X^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T \\ X^{(k)} = G_J X^{(k-1)} + H_J,\ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

onde $G_J = D^{-1}(L+U)$, $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

$H_J = D^{-1}B$

$$G_J = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 & -3/5 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \qquad H_J = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

$X^{(1)} = G_J X^{(0)} + H = H = [1/5\ \ 1/3\ \ 1/4]^T$

$X^{(2)} = G_J X^{(1)} + H = [-1/60\ \ 19/60\ \ 5/12]^T \simeq \begin{bmatrix} -0.016667 \\ 0.316667 \\ 0.416667 \end{bmatrix}$

4.c) $\|x^* - x^{(2)}\|_\infty \leq \dfrac{\|G_J\|_\infty}{1-\|G_J\|_\infty} \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty$ erro à posteriori

$\|G_J\|_\infty = \max\{4/5, 2/3, 1/2\} = 4/5 = 0.8 < 1$

$$x^{(2)} - x^{(1)} = \begin{bmatrix} -7/60 \\ 19/60 \\ 5/12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13/60 \\ -1/60 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

$\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = \max\left(\frac{13}{60}, \frac{1}{60}, \frac{1}{6}\right) = \frac{13}{60} \simeq 0.216667$

$\|x^* - x^{(2)}\|_\infty \leq \frac{0.8}{1-0.8} \times 0.216667 < 0.866667$

erro à priori

$\|x^* - x^{(2)}\|_\infty \leq \dfrac{(\|G_J\|_\infty)^2}{1-\|G_J\|_\infty} \times \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \frac{0.8^2}{0.2} \times \frac{1}{3} < 1.066667$

$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \|x^{(1)}\| = \max(1/5, 1/3, 1/4) = \frac{1}{3}$

logo o menor dos majorantes possíveis é 0.866667

d) $\|x^* - x^{(50)}\|_\infty \leq \dfrac{\|G\|_\infty^{50}}{1-\|G\|_\infty} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$ erro à priori

$\|x^* - x^{(50)}\|_\infty \leq \frac{0.8^{50}}{0.2} \times \frac{1}{3} \leq 0.24 \times 10^{-4} > 0.5 \times 10^{-6}$

logo não poderemos garantir 6 c.d.s para $x^{(50)}$, apenas 4 c.d.s.

Exercício 8

a) $G = D^{-1}M \qquad H = D^{-1}B$

b) $\|G\|_\infty = 0.75 < 1$ logo o método iterativo converge

c) $X^{(2)} \approx \begin{bmatrix} 0.116667 \\ 0.295833 \\ 0.058333 \end{bmatrix}$

d) $n_{min} = 30$

Exercício 9

a) $x = 1 \wedge y = 0 \wedge z = 2$

b) $x = 1/3 \wedge y = 0 \wedge z = 2/3$

Exercício 8 - Ficha 5

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad AX = B$$

$$X^{(n)} = GX^{(n-1)} + H$$

$$A = D - M \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad M \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

a) X^* é solução de $AX = B$

$AX = B \iff (D-M)X = B \iff DX - MX = B \iff DX = MX + B \iff$

$X = \underbrace{D^{-1}M}_{G}X + \underbrace{D^{-1}B}_{H} \iff X = GX + H$ com $G = D^{-1}M$ e $H = D^{-1}B$

Como os sistemas $AX = B$ e $X = GX + H$ são equivalentes então X^* é solução de $X = GX + H$

b) $M = D - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad G = D^{-1}M = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/8 \\ 1/2 & 0 & -1/4 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\|G\|_\infty = \max\left(\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{4} = 0.75 < 1$

logo o método iterativo converge.

c) $H = D^{-1}B = \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$X^{(0)} = [0.1 \quad 0.3 \quad 0]$

$$X^{(1)} = GX^{(0)} + H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/8 \\ 1/2 & 0 & -1/4 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/8 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.05 \\ 0.066667 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.3 \\ 0.066667 \end{bmatrix}$$

$$X^{(2)} = G X^{(1)} + H = \begin{bmatrix} 0.116667 \\ 0.295833 \\ 0.058333 \end{bmatrix}$$

d) n ? talque $\| X^* - X^{(n)} \| \leq 0.5 \times 10^{-4}$

erro à priori

$$\| X^* - X^{(n)} \|_\infty \leq \frac{\| G \|_\infty^n}{1 - \| G \|_\infty} \| X^{(1)} - X^{(0)} \|_\infty \leq 0.5 \times 10^{-4} \; (*)$$

$$X^{(1)} - X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.125 \\ 0.3 \\ 0.066667 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.025 \\ 0 \\ 0.066667 \end{bmatrix}$$

$$\| X^{(1)} - X^{(0)} \|_\infty = 0.066667$$

$$(*) \quad \frac{0.75^n}{1 - 0.75} \times 0.066667 \leq 0.5 \times 10^{-4}$$

$$0.75^n \leq \frac{0.25 \times 0.5 \times 10^{-4}}{0.066667}$$

$$n \geq \frac{\ln(0.0001875\ldots)}{\ln(0.75)} = 29.83\ldots$$

$$n_{min} = 30$$