

Lista 2 - Coordenadas polares, esféricas e cilíndricas.

1. Escreva em coordenadas polares e represente geometricamente o conjunto definido pelas seguintes inequações: $0 < x^2 + y^2 \leq 1$, $-\sqrt{3}x \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{3}x$.
2. Escreva em coordenadas cartesianas e represente geometricamente os conjuntos definidos em coordenadas polares por:
 - (a) $\theta = \pi$;
 - (b) $\pi \leq \theta < \frac{5\pi}{3}$ e $1 < r \leq 3$.
3. Escreva as seguintes equações em coordenadas polares:
 - (a) $y = 3$;
 - (b) $x^2 + y^2 = 9$;
 - (c) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$;
 - (d) $y = x$;
 - (e) $x^2 - y^2 = 4$;
 - (f) $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.
4. Identifique as curvas, representadas em coordenadas polares, e escreva as equações em coordenadas cartesianas:
 - (a) $r \cos(\theta) = 4$;
 - (b) $r = \frac{2}{1 - \cos(\theta)}$;
 - (c) $r = 4 \sin(\theta + \pi)$;
 - (d) $\tan(\theta) = 2$;
 - (e) $\theta = \frac{5\pi}{4}$.
5. Seja $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \log(y)$.

- (a) Determine o domínio D de f .
- (b) Represente o conjunto D em coordenadas polares.

6. Descreva em coordenadas cilíndricas:

- (a) o sólido de \mathbb{R}^3 definido pelas condições

$$x^2 + y^2 \leq z, \quad x^2 + y^2 + z \leq 8, \quad y \geq 0,$$

- (b) o sólido em \mathbb{R}^3 limitado pelo parabolóide de equação $x^2 + y^2 = 1 - z$ e pela folha superior da superfície cônica $(z + 1)^2 = x^2 + y^2$;
- (c) a região do espaço limitada pelas superfícies $z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

7. Seja $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{xy}} + \log(z - x^2 - y^2) + \sqrt{3 - z}$.

- (a) Determine o domínio D de f .
- (b) Represente o conjunto D em coordenadas cilíndricas.

8. Escreva em coordenadas esféricas ou cilíndricas os seguintes conjuntos:

- (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 < 2, z \geq 0, y \geq 0, x > 0\}$;
- (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leq \frac{x^2 + y^2}{2}, 0 < z < 2\}$;
- (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2} \wedge y \geq 0\}$.

9. Escreva em coordenadas esféricas:

- (a) o sólido em \mathbb{R}^3 definido por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\};$$

- (b) o sólido em \mathbb{R}^3 limitado pelas superfícies

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{e} \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

10. Escreva em coordenadas cartesianas e represente geometricamente os subconjuntos de \mathbb{R}^3 definidos nas coordenadas indicadas:

- (a) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ (esféricas);
- (b) $z = r$ (cilíndricas);
- (c) $\theta = \frac{\pi}{6}$ (esféricas).