ANÁLISE MATEMÁTICA III C

6ªsemana de aulas

NOVA SCHOOL OF
SCIENCE & TECHNOLOGY

Cláudio Fernandes

caf@fct.unl.pt

Slides para acompanhamento das aulas TP1 e TP4

O material completo do Prof. João de Deus Marques encontra-se no CLIP, na página da UC

Transformada de Laplace

Definição e generalidades

A *transformada de Laplace* é uma poderosa ferramenta na resolução de equações diferenciais e correspondentes problemas de valores iniciais e de fronteira. Possui a notável vantagem de reduzir equações diferenciais a equações algébricas. Esta transformação de problemas de cálculo em problemas algébricos, usualmente designada por *cálculo operacional*, é particularmente importante na resolução de problemas de matemática aplicada. O cálculo operacional tem na transformada de Laplace um dos seus mais importantes métodos, revelando-se particularmente útil em questões de natureza mecânica e elétrica nos quais as forças envolvidas apresentam descontinuidades ou atuam em intervalos de tempo muito curtos.

A transformada de Laplace permite também resolver diretamente problemas de valores iniciais sem que seja necessário calcular primeiro a solução geral da equação, bem como resolver equações não homogéneas sem ter que se calcular previamente a solução da equação homogénea correspondente. Se considerarmos uma função de duas variáveis $f(x, y)$, primitivável em ordem a x, e calcularmos $\int f(x, y)dx$ obtemos uma nova função na variável y. Analogamente, dada uma função $f(t)$ ao calcularmos $\int_a^b K(s, t)f(t)dt$ obtemos uma nova função na variável s, a que chamaremos uma *transformada integral* de $f(t)$. Neste capítulo estamos particularmente interessados numa transformada integral em que o intervalo de integração é o intervalo ilimitado $[0, +\infty[$. Se uma função $f(t)$ estiver definida em $[0, +\infty[$, o integral impróprio $\int_0^\infty K(s, t)f(t)dt$ define-se pelo limite

$$\int_0^\infty K(s, t)f(t)dt = \lim_{a \longrightarrow \infty} \int_0^a K(s, t)f(t)dt.$$

Se este limite existir diremos que o integral existe ou que é convergente; caso contrário, diremos que não existe ou que é divergente. Em geral, o limite considerado existirá apenas para alguns valores da nova variável s. A função $K(s, t)$ é usualmente designada por núcleo da transformada integral e a escolha de $K(s, t) = e^{-st}$ conduz a uma transformada integral particularmente importante: a transformada de Laplace.

Suponhamos que $f(t)$ está definida em $[0, +\infty[$. Para os valores de s em que o integral

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt,$$

converge fica definida uma função na variável s a que se chama *transformada de Laplace* da função $f(t)$, e que se representa por $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ou apenas $\mathcal{L}\{f\}$.

Em geral utilizaremos letras minúsculas para representar a função a ser transformada e a correspondente maiúscula para representar a sua transformada de Laplace. Por exemplo, $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$.

À função original $f(t)$ chama-se *transformada de Laplace inversa* de $F(s)$, e escreve-se

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Exemplo

Seja $f(t) = 1, \ t \geq 0$. *Tem-se*

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 \, dt = \lim_{k \to \infty} \int_0^{k} e^{-st} \cdot 1 \, dt = \lim_{k \to \infty} \left[-\frac{1}{s} \, e^{-st} \right]_0^k$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(-\frac{1}{s} \, e^{-sk} + \frac{1}{s} \right).$$

Este último limite existe e é finito quando $s > 0$ *e toma o valor* $\dfrac{1}{s}$, *pelo que*

$$\boxed{\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad s > 0.} \tag{0.1}$$

Exemplo

Seja $f(t) = e^{at}, \; t \geq 0$, *em que* a *é uma constante real.*

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\, e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t}\, dt$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_0^{k} e^{(a-s)t}\, dt = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^k$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{e^{(a-s)k}}{a-s} - \frac{1}{a-s} \right) = \frac{1}{s-a}, \quad se \;\; s > a$$

pelo que

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a. \tag{0.2}$$

Exemplo

Determine-se $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}$, *com* ω *constante.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cos(\omega t\} &= \int_0^{\infty} e^{-st}\cos(\omega t)\,dt = \lim_{k\to\infty}\int_0^{k} e^{-st}\cos(\omega t)\,dt \\
&= \lim_{k\to\infty}\left[e^{-st}\left(\frac{-s\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)}{s^2+\omega^2}\right)\right]_0^k \\
&= \lim_{k\to\infty} e^{-sk}\left(\frac{-s\cos(\omega k)+\omega\sin(\omega k)}{s^2+\omega^2}\right) - \left(\frac{-s}{s^2+\omega^2}\right) \\
&= \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad se \;\; s>0.
\end{aligned}$$

Analogamente se mostra que

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}, \quad s>0. \tag{0.3}$$

A linearidade da transformada de Laplace é uma consequência imediata da linearidade do integral. Assim, dadas duas funções $f(t)$ e $g(t)$ que admitem transformadas de Laplace e sendo a e b constantes reais, tem-se

$$\mathcal{L}\{af + bg\} = a\mathcal{L}\{f\} + b\mathcal{L}\{g\}.$$

Exemplo

Considere-se a função $f(t) = \cosh(at) = \dfrac{e^{at} + e^{-at}}{2}$, *com a constante real. Tem-se,*

$$\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} + \mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right)$$

$$= \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > \max\{-a, a\}.$$

Analogamente se mostra que

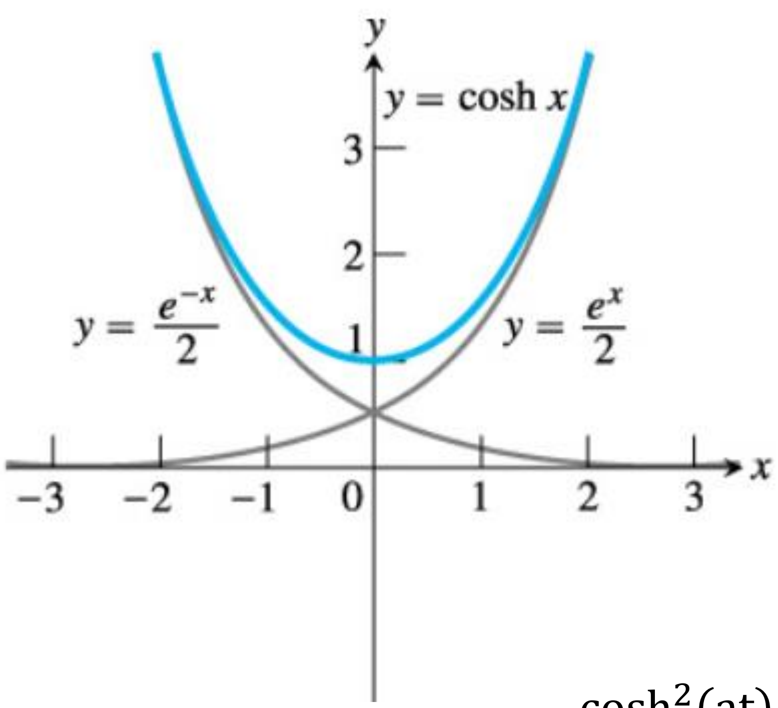
$$\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > \max\{-a, a\}.$$

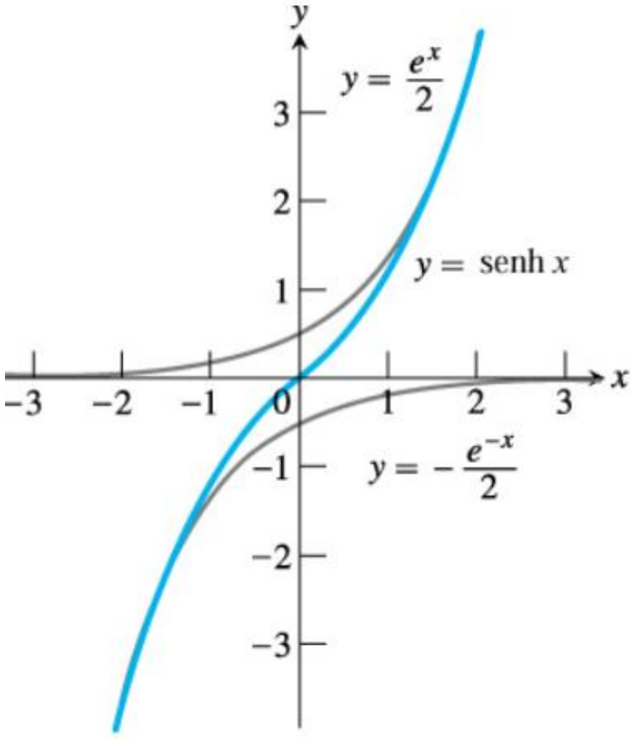
$\square$

OBSERVAÇÃO:

$$f(t) = \cosh(at) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$f(t) = \operatorname{senh}(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}$$





$$\cosh^2(\mathrm{at}) - \operatorname{senh}^2(at) = 1$$

Tendo em conta que, a transformada de Laplace inversa também é linear (a inversa de uma transformação linear, quando existe, ainda é linear), considere-se o exemplo seguinte;

Exemplo

Determine-se $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$, *sendo*

$$F(s) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}, \quad a \neq b \ \ e \ \ s > \max\{a, b\}.$$

Tem-se que

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right),$$

pelo que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\} = \frac{1}{a-b}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-b}\right\}\right) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}.$$

Exemplo

Mostremos, utilizando o método de indução, que para $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\boxed{\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.}$$

Para $n = 0$ *já foi visto que,* $\mathcal{L}\{t^0\} = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$. *Admitindo-se, por hipótese que,* $\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{(n-1)!}{s^n}$, *tem-se que*

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^k t^n e^{-st} dt$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left[-t^n \left(\frac{e^{-st}}{s}\right)\right]_0^k + \lim_{k\to\infty} \frac{n}{s} \int_0^k t^{n-1} e^{-st} dt$$

$$= \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{n!}{s^{n+1}},$$ *como se pretendia.*

Existência de transformada de Laplace

O integral que define a transformada de Laplace de determinada função nem sempre converge, pelo que nem todas as funções admitem transformada de Laplace. Por exemplo as funções $f(t) = t^{-1}$ e $g(t) = e^{t^4}$ não possuem transformada de Laplace. Nesta secção vamos ver que condições impor a uma função de forma a garantir que esta possua transformada de Laplace. "Grosso modo" pode dizer-se que uma função admite transformada de Laplace se em termos de continuidade for "relativamente bem comportada" e o seu módulo for "controlável" por uma função exponencial. Para precisar o que acabamos de dizer, comecemos por recordar os conceitos de função seccionalmente contínua e de função de ordem exponencial.

Definição

Uma função $f(t)$, diz-se *seccionalmente contínua* num intervalo limitado $I = [a, b]$, com $a < b$, se for contínua em todos os pontos de I excepto quando muito num número finito, nos quais admite limites laterais finitos.

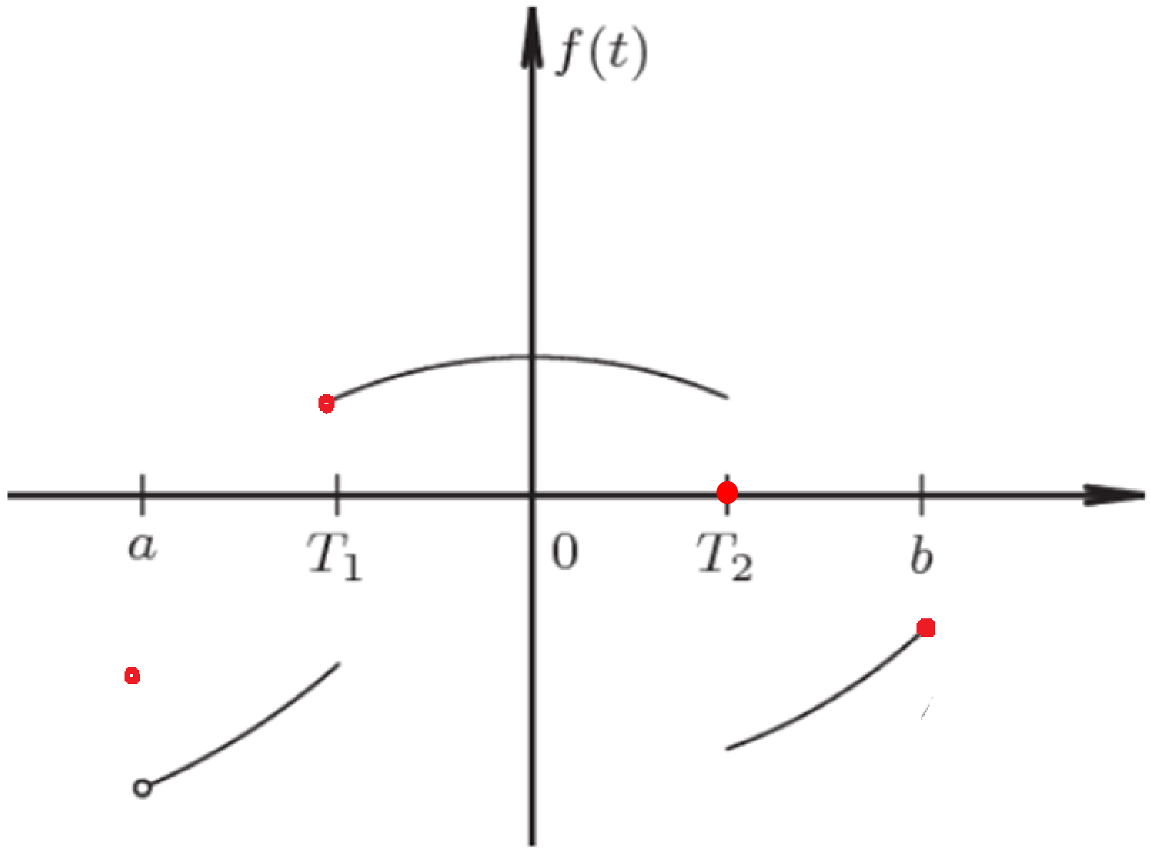
Isto significa que se $x_0 \in]\, a, b\, [$ e $f(x)$ não for contínua (ou não estiver definida) em x_0, os limites

$$f(x_0^+) = \lim_{h \to 0^+} f(x_0 + h) \text{ e } f(x_0^-) = \lim_{h \to 0^-} f(x_0 + h),$$

existem e são finitos. Se $x_0 = a$ (resp. $x_0 = b$) $f(a^+)$ (resp. $f(b^-)$) terá que existir e ser finito.

OBSERVAÇÃO:

Exmplo de uma função seccionalmente contínua em [a,b]



Definição

Uma função $f(t)$ definida em $[0, +\infty[$ diz-se de *ordem exponencial* $\gamma \in \mathbb{R}$, se existir uma constante $M > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq Me^{\gamma t}, \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

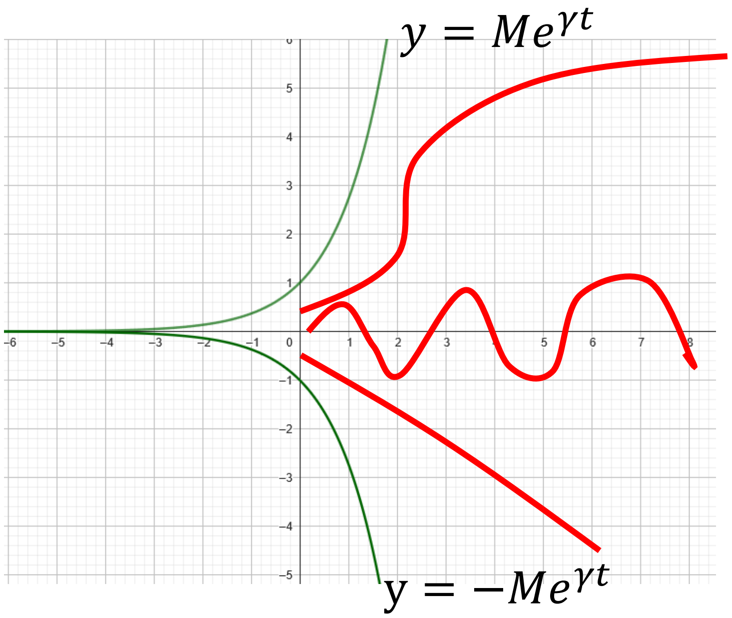
Uma função $f(t)$ diz-se de *ordem exponencial* se for de ordem exponencial γ para algum $\gamma \in \mathbb{R}$.

As funções $f(t) = 2$ e $g(t) = \sin t$ são de ordem exponencial. Com efeito, tem-se que

$$|f(t)| \leq 2e^{0t}, \quad |g(t)| \leq e^{0t}, \quad t \in [0, +\infty[.$$

OBSERVAÇÃO:

Quando $\gamma > 0$ uma função de ordem exponencial γ é aquela cujo gráfico se encontra entre os gráficos das funções $-\mathrm{M}e^{\gamma x}$ e $Me^{\gamma x}$ (para algum M>0)



Funções constantes e funções limitadas são de ordem exponencial.

As duas funções consideradas são limitadas em $[0, +\infty[$; de facto todas as funções limitadas são de ordem exponencial. Com efeito, se $f(t)$ é limitada em $[0, +\infty[$ existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq M, \quad \forall t \geq 0,$$

e assim,

$$|f(t)| \leq Me^{0t}, \quad \forall t \geq 0.$$

É também simples constatar que as funções $\cosh t$, $\sinh t$ e t^n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ são de ordem exponencial em $[0, +\infty[$, uma vez que

$$|\cosh(t)| = \left|\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right| = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \leq \frac{e^t}{2} + \frac{e^t}{2} = e^t,$$

$$|\sinh(t)| = \left|\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right| \leq \left|\frac{e^t}{2}\right| + \left|\frac{e^{-t}}{2}\right| = \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} \leq \frac{e^t}{2} + \frac{e^t}{2} = e^t$$

$$|t^n| = t^n \leq n!(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots) = n!e^t.$$

Quanto à existência da transformada de Laplace, tem-se o seguinte resultado:

Teorema (Existência de transformada de Laplace)

Se $f(t)$ é de ordem exponencial γ em $[0, +\infty[$ e seccionalmente contínua em qualquer intervalo limitado $I \subset [0, +\infty[$, então $f(t)$ admite transformada de Laplace em $]\gamma, +\infty[$.

As condições impostas no teorema anterior são condições suficientes mas não necessárias, isto é, existem funções que não estando nas condições do Teorema 0.1 admitem transformada de Laplace. Por exemplo, a função $t^{-\frac{1}{2}}$ não é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$, no entanto tem transformada de Laplace. É possível mostrar que

$$\mathcal{L}\{t^{-\frac{1}{2}}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

OBSERVAÇÃO:

A transformada de Laplace de uma função, quando existe, é única. Reciprocamente, pode provar-se que duas funções, definidas em $[0, +\infty[$, que tenham a mesma transformada de Laplace terão de ser iguais excepto, eventualmente, num conjunto de pontos isolados. Como este facto não é importante para as aplicações diz-se que a inversa da transformada de Laplace é, essencialmente, única. Em particular duas funções contínuas que possuam a mesma transformada de Laplace são iguais.

Transformada de Laplace da derivada

Uma das propriedades notáveis da transformada de Laplace permite exprimir a transformada de Laplace da derivada de ordem n de uma função a partir da transformada de Laplace da função considerada e das suas derivadas no ponto zero.

Comece-se por estabelecer o resultado para a primeira derivada.

Teorema (Transformada de Laplace da derivada)

Suponhamos que $f(t)$ é contínua e de ordem exponencial γ em $[0, +\infty[$ e que $f'(t)$ é seccionalmente contínua em qualquer intervalo limitado contido em $[0, +\infty[$. Então $f'(t)$ tem transformada de Laplace definida para $s > \gamma$, e tem-se que

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0). \tag{0.4}$$

(Teorema 2 exercícios P)

O teorema seguinte generaliza o último teorema para a transformada de Laplace da derivada de ordem n de f.

Teorema (Transformada de Laplace da derivada de ordem n)

Suponhamos que $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$, são contínuas e de ordem exponencial γ em $[0, +\infty[$ e que $f^{(n)}(t)$ é seccionalmente contínua em qualquer intervalo limitado $I \subset [0, +\infty[$. Então existe transformada de Laplace de $f^{(n)}(t)$, definida para $s > \gamma$, e tem-se

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = s^n \mathcal{L}(f) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{0.5}$$

OBSERVAÇÃO:

A determinação da transformada de Laplace de uma função utilizando a definição não é, em geral, prático e envolve cálculos morosos. Vejamos, com alguns exemplos, como o último teorema permite simplificar em muitos casos o cálculo da transformada de Laplace.

Exemplo

Já calculada anteriormente a transformada de Laplace da função $f(t) = t^n$, vejamos no entanto como calcular esta mesma transformada de Laplace, de uma forma bastante mais rápida, utilizando o último teorema. Como $f^{(n+1)}(t) = 0$, vem que

$$0 = \mathcal{L}\{f^{(n+1)}\} = s^{n+1}\mathcal{L}\{f\} - s^n f(0) - \dots - sf^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0).$$

Tendo em conta que

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0 \quad e \quad f^{(n)}(0) = n!$$

obtém-se

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

□

Exemplo

Já foi calculada a transformada de Laplace da função $\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}$ *utilizando a definição e foi referido que* $\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}$ *podia ser calculada de forma análoga.*

Calculemos, utilizando 0.5, a transformada de Laplace de $f(t) = \sin(\omega t)$. *Tem-se que*

$$f'(t) = \omega \cos(\omega t), \;\; f''(t) = -\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 f(t)$$

e

$$f(0) = 0, f'(0) = \omega.$$

Como

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)$$

vem que

$$-\omega^2\mathcal{L}\{f\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - \omega$$

donde

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}.$$

□

Exemplo

Determine-se

$$\mathcal{L}\{\sin^2 t\}.$$

Considerando $f(t) = \sin^2 t$ *tem-se que* $f(0) = 0$ *e* $f'(t) = 2\sin t\cos t = \sin 2t$. *Utilizando 0.4 vem que*

$$\mathcal{L}\{\sin 2t\} = s\mathcal{L}\{\sin^2 t\}.$$

Do exemplo anterior sabe-se que

$$\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4},$$

e portanto

$$\mathcal{L}\{\sin^2 t\} = \frac{2}{s(s^2+4)}. \tag{0.6}$$

Estabelecido o teorema da transformada de Laplace para derivadas é agora possível recorrer a este resultado para resolver, de forma bastante eficiente, alguns tipos de equações diferenciais com condições iniciais. Nomeadamente (como veremos nos exemplos que se seguem) o uso da transformada de Laplace permite reduzir a resolução de uma equação linear de ordem n de coeficientes constantes, na incógnita y, à resolução de uma equação algébrica na incógnita $\mathcal{L}\{y\}$.

Exemplo

Considere-se o PVI

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \qquad y(0) = 3,\ y'(0) = 1.$$

Seja $\mathcal{L}\{y\} = Y$. *Aplicando o teorema da transformada de Laplace para a derivada de ordem n, vem*

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 4sY - \overset{12}{\cancel{4}y(0)} + 3Y = 0.$$

Usando as condições iniciais e simplificando obtém-se

$$Y = \frac{3s + 13}{s^2 + 4s + 3}.$$

Exemplo (continuação)

Tem-se que

$$\frac{3s+13}{s^2+4s+3} = \frac{3s+13}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3},$$

com A e B constantes a determinar. O cálculo destas constantes conduz a $A = 5$ e $B = -2$, e portanto

$$Y = \frac{3s+13}{s^2+4s+3} = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s+3}.$$

Por aplicação da transformada de Laplace inversa vem,

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\} = 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\},$$

ou seja, $\qquad y(t) = 5e^{-t} - 2e^{-3t}.$

Exemplo (continuação)

Acabou de se provar que se a função incógnita $y(t)$ *do PVI possuir transformada de Laplace, a equação tem solução e é dada por* $y(t) = 5e^{-t} - 2e^{-3t}$. *Para concluir a resolução, deve ainda ser demonstrado que a função* $y(t) = 5e^{-t} - 2e^{-3t}$ *admite, de facto, transformada de Laplace em algum intervalo da forma* $]a, +\infty[$. *Para tal note-se que a função* $y(t)$ *é obviamente contínua em* $[0, \infty[$ *e que, como as funções* $y_1(t) = 5e^{-t}$ *e* $y_2(t) = -2e^{-3t}$ *são de ordem exponencial* -1 *e* -3, *respetivamente,* $y(t)$ *é de ordem exponencial* $\gamma = -1$. *Assim sendo o teorema de existência de transformada de Laplace garante que* $Y(s)$ *existe e está definida para* $s > -1$, *pelo que* $y(t) = 5e^{-t} - 2e^{-3t}$ *é de facto a solução do PVI.* $\square$

Transformada de Laplace de um integral

Teorema (Transformada de Laplace de um integral)

Se $f(t)$ é uma função de ordem exponencial γ em $[0, +\infty[$ e seccionalmente contínua em qualquer intervalo limitado $I \subset [0, +\infty[$ então a função

$$g(t) = \int_0^t f(x)dx, \quad t > 0,$$

admite transformada de Laplace em $]\gamma, +\infty[$, dada por

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)dx\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}, \tag{0.8}$$

por aplicação da transformada de Laplace inversa, têm-se que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}\right\} = \int_0^t f(x)dx, \quad com\ t > 0. \tag{0.9}$$

Exemplo

Determine-se a transformada de Laplace inversa de

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}.$$

Pretende determinar-se uma função $f(t)$ tal que

$$\mathcal{L}\{f\} = \frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}, \quad \textit{ou seja} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}\right\}.$$

Sabe-se que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right\} = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} = \frac{1}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0. \tag{0.10}$$

Exemplo (continuação)

Assim,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+\omega^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right\}\right\},$$

resultando de (0.9) que

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin(\omega t)}{\omega}\right\}\right\} = \int_0^t \frac{\sin(\omega x)}{\omega}\,dx \\ &= \frac{1}{\omega^2}\left[-\cos(\omega x)\right]_0^t = \frac{1-\cos(\omega t)}{\omega^2}. \end{aligned}$$