Resolução do exame de Am3c (2º sem. 2022/ 23)

Grupo I - *Q*1. Para obter a solução de $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{4}xy=\dfrac{1}{4}x^3$ começamos por calcular

$$\varphi(x)=e^{\int \frac{1}{4}x\,dx}=e^{\frac{1}{4}\frac{x^2}{2}}=e^{\frac{x^2}{8}}.$$

A solução da equação é dada por

$$y=\frac{C}{e^{\frac{x^2}{8}}}+\frac{1}{e^{\frac{x^2}{8}}}\int e^{\frac{x^2}{8}}\frac{1}{4}x^3dx=Ce^{-\frac{x^2}{8}}+e^{-\frac{x^2}{8}}\int \frac{e^{\frac{x^2}{8}}x^3}{4}dx.$$

Tem-se

$$\begin{aligned}P\Big(\frac{e^{\frac{x^2}{8}}x^3}{4}\Big)&=P\Big(e^{\frac{x^2}{8}}\frac{x}{4}\Big)x^2-P\Big(P\Big(e^{\frac{x^2}{8}}\frac{x}{4}\Big)2x\Big)=e^{\frac{x^2}{8}}x^2-P(e^{\frac{x^2}{8}}2x)\\&=e^{\frac{x^2}{8}}x^2-8P\Big(e^{\frac{x^2}{8}}\frac{x}{4}\Big)=e^{\frac{x^2}{8}}x^2-8e^{\frac{x^2}{8}}=e^{\frac{x^2}{8}}(x^2-8).\end{aligned}$$

Então

$$y=Ce^{-\frac{x^2}{8}}+e^{-\frac{x^2}{8}}(e^{\frac{x^2}{8}}(x^2-8))=Ce^{-\frac{x^2}{8}}+x^2-8.$$

Como $y(0)=-4$ vem que $C=4$. (1ª opção).

***Q*2.** Se $\varphi(x,y)=xy^k$ é factor integrante então

$$(xy^k)3xy^2dx+(xy^k)4x^2ydy=0$$

é exacta e portanto $\dfrac{\partial}{\partial y}((xy^k)3xy^2)=\dfrac{\partial}{\partial x}((xy^k)4x^2y)$. Então

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^{k+2})=\frac{\partial}{\partial x}(4x^3y^{k+1})\Leftrightarrow(k+2)(3x^2y^{k+1})=12x^2y^{k+1}\Leftrightarrow k=2. \quad \text{(5ª opção)}$$

Q3. Derivando a equação de Lagrange obtém-se

$$\frac{dy}{dx}=-2\frac{dy}{dx}-2x\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\Leftrightarrow p=-2p-2x\frac{dp}{dx}+p\frac{dp}{dx}\Leftrightarrow 3p=(p-2x)\frac{dp}{dx}.$$

Vem então que

$$3p\frac{dx}{dp}=p-2x\Leftrightarrow 3p\frac{dx}{dp}+2x-p=0\Leftrightarrow\frac{dx}{dp}+\frac{2}{3p}x=\frac{1}{3}$$

e a sua solução é

$$x(p)=Ce^{-\int\frac{2}{3p}dp}+\frac{1}{3}e^{-\int\frac{2}{3p}dp}\int e^{\int\frac{2}{3p}dp}dp=Cp^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{3}p^{-\frac{2}{3}}\int p^{\frac{2}{3}}dp=Cp^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{5}p.$$

A solução geral é dada por $\begin{cases}x(p)=Cp^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{5}p\\ y(p)=-2xp+\frac{1}{2}p^2.\end{cases}$ (4ª opção)

***Q*4.** Tem-se que $(5D^2-12D+4)=(5D-2)(D-2)$. Usando este facto, à 2ª linha subtraímos $(5D-2)\times$ (1ª linha) e substituimos na 2ª linha:

$$\begin{aligned} &(5D^2-12D+4)x+(5D^3+13D^2-7D-3)y\\ -&(5D-2)(D-2)x-(5D-2)(D^2+3D)y=-2t+4-(5D-2)(t+1). \end{aligned}$$

Daqui vem

$$\begin{aligned} &(5D^3+13D^2-7D-3)-(5D^3+15D^2-2D^2-6D)y\\ =&-2t+4-(5D-2)(t+1)\Leftrightarrow(-D-3)y=-2t+4-(3-2t)=1\\ \Leftrightarrow&(D+3)y=-1. \end{aligned}$$

Obtém-se então:

$$\begin{cases} (D-2)x+(D^2+3D)y)t+1\\ (D+3)y=-1. \end{cases} \qquad \text{(6ª opção)}$$

***Q*5.** Tem-se $\dfrac{2s^2-8s}{s^4-16}=\dfrac{s}{s^2+4}+\dfrac{1}{s^2+4}-\dfrac{s}{s^2-4}+\dfrac{1}{s^2-4}$ donde

$$\mathcal{L}\Big(\frac{2s^2-8s}{s^4-16}\Big)=\mathcal{L}\Big(\frac{s}{s^2+4}\Big)+\mathcal{L}\Big(\frac{1}{s^2+4}\Big)-\mathcal{L}\Big(\frac{s}{s^2-4}\Big)+\mathcal{L}\Big(\frac{1}{s^2-4}\Big),$$

isto é,

$$\mathcal{L}\Big(\frac{2s^2-8s}{s^4-16}\Big)=cos(2t)+\frac{1}{2}sen(2t)-cosh(2t)+\frac{1}{2}senh(2t). \qquad \text{(3ª opção)}$$

***Q*6.** Tem-se que:

$$\mathcal{L}(f)=\mathcal{L}(e^{-t}sen^2(\omega t))=\mathcal{L}(sen^2(\omega t))_{(s+1)}=\frac{2\omega^2}{(s+1)((s+1)^2+4\omega^2)}=\frac{2\omega^2}{(s+1)(s^2+2s+1+4\omega^2)}$$

$$\mathcal{L}(g)=\mathcal{L}\Big(sen^2(2t)u\Big(t-\frac{\pi}{2}\Big)\Big)=\mathcal{L}\Big(sen^2\Big(2\Big(t-\frac{\pi}{2}\Big)\Big)u\Big(t-\frac{\pi}{2}\Big)\Big)=\frac{8e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s(s^2+16)}.$$

$$\mathcal{L}(h)=\mathcal{L}(cos^2(\omega t))=\mathcal{L}(1)-\mathcal{L}(sen^2(\omega t))=\frac{1}{s}-\frac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}. \qquad \text{(6ª opção).}$$

***Q*7.** Tem-se que

$$\sqrt{n^4+2}-n^2=\frac{(\sqrt{n^4+2}-n^2)(\sqrt{n^4+2}+n^2)}{(\sqrt{n^4+2}+n^2)}=\frac{2}{\sqrt{n^4+2}+n^2}.$$

Por comparação com a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^4+2}-n^2)$ converge. (6ª opção)

***Q*8.** Tendo em conta que $\dfrac{3}{n(n+3)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+3}$ vem que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\Big).$$

Tem-se que

$$S_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\to 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}. \qquad \text{(4ª opção).}$$

***Q*9.** Se $p=1$ então $L=\dfrac{1}{2}$. Como a série é par temos de calcular

$$a_0 = 2\int_0^{\frac{1}{4}} dx - 2\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} dx = 0$$

e

$$\begin{aligned} a_n &= 4\int_0^{\frac{1}{4}} cos(2n\pi x)dx - 4\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} cos(2n\pi x)dx = 4\Big[\frac{sen(2n\pi x)}{2n\pi}\Big]_0^{\frac{1}{4}} - 4\Big[\frac{sen(2n\pi x)}{2n\pi}\Big]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \\ &= 4\Big(\frac{sen(n\frac{\pi}{2})}{2n\pi} - 0\Big) - 4\Big(\frac{sen(n\pi)}{2n\pi} - \frac{sen(n\frac{\pi}{2})}{2n\pi}\Big) \\ &= \frac{4sen(n\frac{\pi}{2})}{n\pi} = \begin{cases} 0, & n = 2k \text{ par} \\ \dfrac{4sen((2k-1)\frac{\pi}{2})}{(2k-1)\pi} = \dfrac{4}{\pi}\dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)}, & n = 2k-1 \text{ ímpar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto $f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos\Big(\frac{2n\pi x}{L}\Big) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} cos(4k-2)\pi x).$ (2ª opção)

***Q*10.** Tendo em conta que $u(x,y) = X(x)Y(y)$ a equação escreve-se

$$xX'(x)Y(y) + yX(x)Y'(y) = 0.$$

isto é,

$$x\frac{X'(x)}{X(x)} + y\frac{Y'(y)}{Y(y)} = 0 \Leftrightarrow x\frac{X'(x)}{X(x)} = -y\frac{Y'(y)}{Y(y)} = k.$$

Então

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{k}{x} \wedge \frac{Y'(y)}{Y(y)} = -\frac{k}{y}$$

donde

$log(X(x)) = klog|x| + c_1 \Leftrightarrow X(x) = |x|^k e^{c_1}$ e $log(Y(y)) = -klog|y| + c_2 \Leftrightarrow Y(y) = |y|^{-k}e^{c_2}$.

Então

$$u(x,y) = X(x)Y(y) = |x|^k|y|^{-k}e^{c_1 c_2} = |x|^k|y|^{-k}C.$$

Como $u(1,1) = 1$ vem que $C = 1$ e portanto

$$u(x,y) = \Big|\frac{x}{y}\Big|^k. \qquad \text{(4ª opção).}$$

Grupo II - *Q*1(*a*) A solução é dada por $y(x) = c_1 cos(2x) + c_2 sen(2x) + Ax^2 + Bx + C$.
Substituindo na equação vem

$$(Ax^2 + Bx + C)'' + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

e daqui vem que

$$2A+4Ax^2+4Bx+4C=x^2-2x+\frac{1}{2}\Rightarrow A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{2}, C=0.$$

A solução é $y(x)=c_1cos(2x)+c_2sen(2x)+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$.

***Q*1(*b*).** Tem-se

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}\Big(-\frac{1}{t^2}\Big) \text{ e } \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\Big(\frac{dy}{dx}\Big(-\frac{1}{t^2}\Big)\Big)=\frac{d^2y}{dx^2}\Big(-\frac{1}{t^2}\Big)^2+\frac{dy}{dx}\Big(\frac{2}{t^3}\Big).$$

Então

$$\begin{aligned}&t^4\frac{d^2y}{dt^2}+2t^3\frac{dy}{dt}+4y=\frac{t^2-4t+2}{2t^2}\\ \Leftrightarrow\ & t^4\Big(\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{1}{t^4}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{2}{t^3}\Big)-2t^3\Big(\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{t^2}\Big)+4y=\frac{1}{2}-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}\\ \Leftrightarrow\ & \frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}-2t\frac{dy}{dx}+4y=\frac{1}{2}-2x+x^2\Leftrightarrow\frac{d^2y}{dx^2}+4y=x^2-2x+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Usando a alínea anterior a solução desta equação é

$$y(x)=c_1cos(2x)+c_2sen(2x)+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x.$$

Desfazendo a substituição vem

$$y(t)=c_1cos\Big(\frac{2}{t}\Big)+c_2sen\Big(\frac{2}{t}\Big)+\frac{1}{4t^2}-\frac{1}{2t}.$$

***Q*2.** Como o raio de convergência é dado por

$$R=\lim_{n\to\infty}\Big|\frac{a_n}{a_{n+1}}\Big|=\lim_{n\to\infty}\Big|\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}{n^n}\,\frac{(n+1)^{n+1}}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n\cdot(2n+2)}\Big|=\lim_{n\to\infty}\Big|\frac{(n+1)^n}{n^n}\,\frac{n+1}{2n+2}\Big|=\frac{e}{2},$$

a série converge no intervalo $\Big]-\frac{e}{2},\frac{e}{2}\Big[$.

Se $x=\frac{e}{2}$ a série escreve-se $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot2n}{n^n}\Big(\frac{e}{2}\Big)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n}\Big(\frac{e}{2}\Big)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}e^n$.

Sabe-se que

$$\lim\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}e^{n+1}}{\frac{n!}{n^n}e^n}=\lim\frac{n^n}{(n+1)^n}e=e^{-1}e=1^+,$$

pois

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}e^{n+1}\geq\frac{n!}{n^n}e^n.$$

Note-se que $\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}e^{n+1}\geq\frac{n!}{n^n}e^n\Leftrightarrow e\geq\frac{(n+1)^n}{n^n}=\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n$, o que é verdade pois $\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n$ é monótona crescente e $\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n=e$. Então a série diverge.

Se $x = -\dfrac{e}{2}$ a série escreve-se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{n^n}\Big(\frac{e}{2}\Big)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}e^n$. Tendo em conta o que se viu atrás $a_n = \dfrac{n!}{n^n}e^n$ é crescente e é de termos positivos; logo $a_n \not\to 0$ e portanto a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}e^n$ não pode convergir.

Grupo III - 1. É uma função ímpar pois os únicos coeficientes não-nulos são os dos senos. Tendo em conta que $\text{sen}\Big(\dfrac{n\pi x}{L}\Big) = \text{sen}\Big(\dfrac{n\pi x}{2}\Big)$ vem que $L = 2$ e portanto $P = 4$.

Tem-se que $1 = f(1) = \displaystyle\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3\pi^2}((-1)^n - 1)\Big)\text{sen}\Big(\frac{n\pi}{2}\Big)$.

Tendo em conta que $\text{sen}\Big(\dfrac{n\pi}{2}\Big) = 0$ se $n = 2k$, considere-se $n = 2k-1$. Então

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{(-1)^{2k-1+1}}{2k-1} + \frac{2}{((2k-1)^3\pi^2}((-1)^{2k-1} - 1)\Big)\text{sen}\Big(\frac{(2k-1)\pi}{2}\Big)\\
&= \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - \frac{4(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3\pi^2}\Big) = \underbrace{\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}}_{=\frac{\pi}{4}} - \frac{32}{\pi^3}\sum_{k=1}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3}.
\end{aligned}
$$

Daqui vem que $\displaystyle\frac{32}{\pi^3}\sum_{k=1}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} - 1 = 1$ e portanto $\displaystyle\sum_{k=1}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

***Q*2.** Aplicando a transformada de Laplace tem-se

$$\mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(y') + 5\mathcal{L}(y) = 0 \Leftrightarrow s^2\mathcal{L}(y) - y(0) - y'(0) + 2(s\mathcal{L}(y) - y(0)) + 5\mathcal{L}(y) = 0,$$

isto é,

$$s^2\mathcal{L}(y) - s + 3 + 2s\mathcal{L}(y) - 2 + 5\mathcal{L}(y) = 0 \Leftrightarrow (s^2 + 2s + 5)\mathcal{L}(y) = s - 1$$

donde

$$\mathcal{L}(y) = \frac{s-1}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} - \frac{2}{(s+1)^2+4}$$

e

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\Big) - \mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{2}{(s+1)^2+4}\Big)\\
&= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(cos(2t))_{s\to s+1})) - \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(sen(2t))_{s\to s+1}))\\
&= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(e^{-t}cos(2t))) - \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(e^{-t}sen(2t)))\\
&= e^{-t}(cos(2t) - sen(2t)).
\end{aligned}
$$

***Q*3. (*a*)** Tem-se

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= g'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = g'(r)\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}2x = g'(r)\frac{x}{r},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= g''(r)\Big(\frac{x}{r}\Big)^2 + g'(r)\Big(\frac{r^2 - x^2}{r^3}\Big).
\end{aligned}
$$

Então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=g''(r)\Big(\frac{x}{r}\Big)^2+g'(r)\Big(\frac{r^2-x^2}{r^3}\Big)+g''(r)\Big(\frac{y}{r}\Big)^2+g'(r)\Big(\frac{r^2-y^2}{r^3}\Big)$$
$$=g''(r)\frac{x^2+y^2}{r^2}+g'(r)\Big(\frac{r^2-x^2+r^2-y^2}{r^3}\Big)=g''(r)+g'(r)\frac{1}{r}.$$

(b) Seja $g'(r)=u(r)$. Então

$$g''(r)+g'(r)\frac{1}{r}=0\Leftrightarrow u'(r)+\frac{1}{r}u(r)=0$$

cuja solução é dada por $u(r)=\dfrac{C}{e^{log(r)}}=\dfrac{C}{r}$. Então $g(r)=C\log(r)+D$ e portanto

$$f(x,y)=C\log(\sqrt{x^2+y^2})+D.$$

Tendo em conta que $f(1,0)=0$ vem que $0=C\log(\sqrt{1})+D\Rightarrow D=0$ e portanto

$$f(x,y)=C\log(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Tendo em conta que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=1$ vem que $1=C\Big(\dfrac{x}{x^2+y^2}\Big)_{(1,1)}\Rightarrow C=2$ e portanto a função pretendida é

$$f(x,y)=2\log(\sqrt{x^2+y^2}).$$