AM 2C – Resumo dos Slides

Felipe B. Pinto 61387 – MIEQB 29 de janeiro de 2022

Conteúdo

Slide 1 Revisão

Algebra Linear

1 Vetores

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n): x_i \in \mathbb{R} \wedge i \in \{1,2,\ldots,n\}\}$$

2 Norma

$$N(X)_p = ||X||_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_i|^p
ight)^{1/p} = \sqrt{Xig|X} \quad X \in \mathbb{R}^n \ N(\cdot): E o \mathbb{R}$$

- $N(X) \ge 0 (\land N(X) = 0 \iff x = 0)$
- $N(\lambda X) = |\lambda| N(X) \dots \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $N(X+Y) \le N(X) + N(Y) \dots \forall \{X,Y\} \in E$

3 Desigualdade de Hölder

$$\sum_{k=1}^n |x_k\,y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p
ight)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q
ight)^{1/q} egin{cases} q>1 \ p>1 \ p>1 \ p^{-1}+q^{-1}=1 \end{cases}$$

4 Produto Interno

$$p(X,Y) = Xig|Y = \sum_{k=1}^n x_k\,y_k \quad \{X,Y\} \in E$$
 $P: E imes E o \mathbb{R}$

- $X|X \ge 0 \land (X|X=0 \iff X=0)$
- $X|Y = Y|X \dots \forall \{X,Y\} \in E$
- $\lambda X | Y = \lambda (X | Y) \dots \dots \dots \dots \forall \lambda \in \mathbb{R} \land \forall \{X, Y\} \in E$
- $(X+Y)|_{Z} = (X|_{Z}) + (Y|_{Z}) \dots \dots \dots \forall \{X,Y,Z\} \in E$

5 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|X|Y| \leq \sqrt{X|X|}\sqrt{Y|Y|}$$

$$\begin{aligned} |X|Y| &\leq \sqrt{X|X}\sqrt{Y|Y} \iff |X|Y|^2 \leq (X|X)(Y|Y) \iff \\ &\iff |X|Y|^2 - (X|X)(Y|Y) = |2X|Y|^2 - 4(X|X)(Y|Y) \leq 0 \iff \\ &\iff \left\{ f(t) := (X+tY)|(X+tY) \right. \\ &\iff \left\{ f(t) = (Y|Y)t^2 + 2(X|Y)t + X|X \geq 0 \right. \end{aligned}$$

6 Espaço Métrico

$$d(X,Y) := egin{cases} \sqrt{\sum\limits_{k=1}^n (x_i-y_i)^2} & \{X,Y\} \in \mathbb{R}^n \ & ||X-Y|| & \{X,Y\} \in E \end{cases}$$

- $d(X,Y) \ge 0 \land (d(X,Y) = 0 \iff X = Y)$
- d(X,Y) = d(X,Y) $\forall \{X,Y\} \in E$
- $d(X,Y) \le d(X,Z) + d(Z,Y) \dots \dots \dots \forall \{X,Y,Z\} \in E$

Análise Matemática I

7 Noções Topológicas

- $A \in \mathcal{A} \land \emptyset \in \mathcal{A}$
- $\bigcup_{k=i}^{j} a_k \in \mathcal{A} \ldots a_k \in \mathcal{A}$
- $\bigcap_{k=i}^{j} a_k \in \mathcal{A} \dots$ $a_k \in \mathcal{A}$

8 Vizinhança

$$B(X_0,r) := \{X \in \mathbb{R}^n : d(X,X_0) = ||X-X_0||_2 < r\}$$

$$B(X_0, r) = \begin{cases} \mathcal{V}_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r \} = (X_0 - r, X_0 + r) & x_0 \in \mathbb{R} \\ \{ X \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2} < r \} & X_0 \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

9 Ponto de Acumulação

$$X_0 \in \mathbb{R}^n : (B(X_0,r)ackslash \{X_0\}) \cap A
eq \emptyset$$

Conjunto derivado

$$A'\subset \mathbb{R}^n: (B(a_k',r)ackslash \{a_k'\}\cap A
eq \emptyset \quad orall\, k\in \mathbb{K} \wedge r>0$$

10 Ponto interior

$$X_0 \in \mathbb{R}^n: B(X_0,r) \subset A$$

Interior

$$\operatorname{int} A = igl(\ igr) X_k : B(X_k, r) \subset A \quad orall \, k \in \mathbb{K}$$

11 Ponto exterior

$$X_0 \in \mathbb{R}^n: B(X_0,r) \cap A = \emptyset$$

Exterior

$$\operatorname{ext} A = \left[ig | X_k : B(X_k, r) \cap A = \emptyset \ | orall \, k \in \mathbb{K} \wedge r > 0
ight.$$

12 Ponto fronterio

$$X_0 \in \mathbb{R}^n: X_0
otin \operatorname{int} A \cup \operatorname{int} A$$

Fronteira

$$\operatorname{fr} A = \delta A = igl | X_k : X_k
otin \operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A \quad orall \, k \in \mathbb{K}$$

13 Ponto Aderente

$$X_0 \in \mathbb{R}^n : B(X_0,r) \cap A
eq \emptyset$$

Fecho (ou Aderencia)

$$egin{aligned} ar{A} = igcup X_k : B(X_k, r) \cap A
eq \emptyset & orall \, k \in \mathbb{K} \wedge r > 0 \ &= \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A \end{aligned}$$

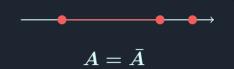
14 Caracterização de Conjuntos

C. Aberto

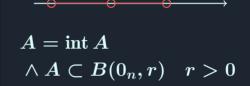
C. Limitado

$$A\subset B(0_n,r)$$
 $r>0$

C. Fechado



C. Compacto



Exemplo 1

$$A = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : 0 < ||X|| < 1
ight\} \cup \left\{ (0,2)
ight\}$$

(i) int *A*

$$= \{X \in \mathbb{R}^2 : 0 < ||X|| < 1\}$$

 $\overline{\text{(ii)}}$ fr A

$$= \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| = 1 \right\} \\ \cup \left\{ (0,0), (0,2) \right\}$$

(iii) \bar{A}

= int
$$A \cup \text{fr } A$$
 =
= $\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| \le 1\}$
 $\cup \{(0,2)\}$

(iv) A'

$$= \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| \le 1 \right\}$$

(v) Caracterização

- A não é Aberto : $A \neq \text{int } A$
- A não é Fechado :: $A \neq \bar{A}$
- A não é Compacto : A não é Fechado
- A é Limitado : $A \subset B(0_2, 3)$

Exemplo 2

$$B=\left\{X\in\mathbb{R}^2:||X||\geq 1
ight\}$$

(i) int *B*

$$= \{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| > 1\}$$

(iii) \bar{A}, A'

$$\bar{A} = A' = A$$

(ii) fr *B*

$$= \{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| = 1\}$$

(iv)

- B é Fechado : $\bar{A} = A' = A$
- B é Ilimitado ∵ não é compacto

Exemplo 3

$$C = \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| < 1 \wedge X \in \mathbb{Q}
ight\} \cup \left\{(3,2)
ight\}$$

(i) int *C*

$$=\emptyset$$

(ii) fr *C*

$$= \left\{X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| \le 1\right\}$$

$$\cup \left\{(3,2)\right\}$$

 \bar{C}

$$= \operatorname{fr} C$$

(iv) C'

$$= \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| \le 1 \right\}$$

(v) Caracterização

- C não é aberto : $C \neq \text{int} C$
- C não é fechado (nem compacto) : $C \neq \bar{C}$
- C é limitado : $C \subset B(0,4)$

15 Conjuntos Separados

$$ar{A}\cap B=\emptyset\wedge A\cap ar{B}=\emptyset$$

Conjunto Desconexo

$$A\subset \mathbb{R}^n: egin{cases} A_i\cup A_j=A & \wedge \ \wedge ar{A}_i\cap A_j=\emptyset & \wedge \ \wedge A_i\cap ar{A}_j=\emptyset & \end{pmatrix} \quad \{A_i,A_j\}\subset \mathbb{R}^n$$

Conjunto Conexo

$$A\subset \mathbb{R}^2: \left\{egin{array}{ccc} A=A_i\cup A_j & & \wedge \ & ar{A}_i\cap A_j &=\emptyset \wedge \ & \wedge ar{A}_i\cap ar{A}_j &=\emptyset \end{array}
ight) \ \end{array}
ight\} \left\{A_i,A_j
ight\}\subset \mathbb{R}^n$$

Domínio

$$A\subset \mathbb{R}^n: \left\{egin{array}{cccc} A=A_i\cup A_j & & & \wedge \ & & igg(ar{A_i}\cap A_j &=\emptyset & \wedge \ & & ig(\wedge A_i\cap ar{A_j} &=\emptyset & \end{pmatrix} & igcap \ & & & ig(A_i,A_jig)\subset \mathbb{R}^n \end{array}
ight.$$

Exemplo 4

$\overline{\mathbf{E4.1}}$) $A \cup B$

$$A=\left\{X\in\mathbb{R}^2:||X||<1
ight\} \ B=\left\{X\in\mathbb{R}^2:x_1=1
ight\}$$

 $A \cup B$ Não é separado

 $:: \bar{A} \cap B = \{(1,0)\}$

E4.2) $C \cup D$

$$C = \left\{X \in \mathbb{R}^2: ||X|| \leq 1
ight\} \ D = \left\{X \in \mathbb{R}^2: x_1 \geq 1.1
ight\}$$

 $C \cup D$ é separado

E4.3) S

$$S = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : ||X|| < 1
ight\} \cup \left\{ (0,2)
ight\}$$

S é desconexo

 $\overline{\mathbf{E4.4})}$ $S \setminus \{(0,\underline{2})\}$

é um domínio pois é aberto e conexo