

ALGA - Slides Anotações

Felipe B. Pinto 61387 - MIEQB

4 de outubro de 2022

Conteúdo

Slide 1	Matrizes	3	9	Núcleo	10
Slide 2	Sistema de Equações Lineares	4	Slide 6	Valores e Vetores Próprios	11
Slide 3	Determinantes	5	1	Endomorfismo	11
Slide 4	Espaços Vetoriais	6	Slide 7	Produto Interno, Externo e Misto	12
1	Sequencia Geradora	6	1	Produto Interno	12
2	Base	6	2	Norma	12
Slide 5	Aplicações Lineares	7	3	Angulo dentre vetores . .	13
1	Extensão das condições .	7	Exemplo 1	14
2	Categorização	7	Exemplo 2	14
3	Inclusão do termo nulo . .	8	Exemplo 3	16
Exemplo 1	9	Proposição 1	16
4	Aplicação Soma	9	Exemplo 4	17
5	Aplicação Produto	9	4	Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt . .	17
6	Aplicação Composta . . .	10	Exemplo 5	18
7	Potencia de Expoente k .	10	Exemplo 6	18
8	Imagem	10			

5	Complemento Ortogonal	18
	Proposição 2	19
	Exemplo 7	19
	Proposição 3	19
	Exemplo 8	20
	Proposição 4	20
	Proposição 5	20
6	Projeção Ortogonal	20

Slide 8	Reta e Plano	21
•	Elementos	21
1	Espaço	21
2	Reta	22
3	Plano	23
•	Distâncias	25
4	Distancia dentre 2 espaços	25
	Exemplo 1	26

Slide 1 – Matrizes

Slide 2 – Sistema de Equações Lineares

Slide 3 – Determinantes

Slide 4 – Espaços Vetoriais

1 Sequencia Geradora

$$U \text{ gera } F \implies F = \langle U \rangle$$

2 Base

$$U \text{ base de } F \implies \nexists u_i : u_i = U \alpha \wedge \alpha \neq I^i$$

Slide 5 – Aplicações Lineares

$f : E \rightarrow E'$ é aplicação linear (sobre \mathbb{K}) \iff

$$\iff \begin{cases} f(u + v) = f(u) + f(v) \\ f(\alpha u) = \alpha f(u) \end{cases} \quad \begin{cases} \forall \{u, v\} \in E \\ \forall \alpha \in \mathbb{K} \end{cases}$$

1 Extensão das condições

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \quad \begin{cases} \forall \{\alpha, \beta\} \in \mathbb{K} \\ \forall \{u, v\} \in E \end{cases}$$

2 Categorização

Homotetia

$$f : \begin{cases} E \rightarrow E' \\ f(w) = \beta w \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall w \in E \\ \forall \beta \in \mathbb{K} \end{matrix}$$

f é uma aplicação **homotetia** de razão β

Aplicação Nula

$$f : \begin{cases} E \rightarrow E \\ f(u) = 0_E \end{cases} \quad \forall u \in E$$

Uma aplicação **homotetia** de razão 0

Aplicação Identidade

$$\text{id}_E := f : \begin{cases} E \rightarrow E \\ f(u) = u \end{cases} \quad \forall u \in E$$

Derivada

$$D := f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x] \\ D \left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} \end{cases}$$

3 Inclusão do termo nulo

$$f(0_E) = 0_{E'}$$

$$f(u) + 0_{E'} = f(u) = f(u + 0_E) = f(u) + f(0_E) \implies 0_{E'} = f(0_E)$$

Exemplo 1

$$f(-u) = -f(u) \quad \forall u \in E$$

$$\implies 0_{E'} = f(u) - f(u) = f(u) + f(-u) = f(u + (-u)) = f(0_E)$$

Operações com aplicações

4 Aplicação Soma

$$f + g : \begin{cases} E \rightarrow E' \\ (f + g)(u) = f(u) + g(u) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \forall f : E \rightarrow E' \\ \forall g : E \rightarrow E' \\ \forall u \in E \end{array}$$

5 Aplicação Produto

$$\alpha f : \begin{cases} E \rightarrow E' \\ (\alpha f)(u) = \alpha f(u) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \forall f : E \rightarrow E' \\ \forall \alpha \in \mathbb{K} \\ \forall u \in E \end{array}$$

6 Aplicação Composta

$$g \circ f : \begin{cases} A \rightarrow C \\ (g \circ f)(a) = g(f(a)) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \forall f : A \rightarrow B \\ \forall g : B \rightarrow C \\ \forall a \in A \end{array}$$

obs: Também designada por “ g após f ”

7 Potencia de Expoente k

$$f^k : \begin{cases} A \rightarrow A \\ f^k = \begin{cases} \text{id}_A & : k = 0 \\ f^{k-1} \circ f & : k \in \mathbb{N} \end{cases} \end{cases}$$

8 Imagem

$$\text{Im } F = \{f(a) : a \in A\} \subseteq B$$

9 Núcleo

$$\text{Nuc } f = \text{Ker } f = \{i \in E : f(u) = 0_{E'}\}$$

$$\text{Nuc } f \neq \emptyset$$

$$f(0_E) = 0'_{E'} \implies 0_E \in \text{Nuc } f$$

Slide 6 – Valores e Vetores Próprios

1 Endomorfismo

Seja E um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Chamamos endomorfismo de E a qualquer aplicação linear de E em E .

Slide 7 – Produto Interno, Externo e Misto

1 Produto Interno

$$a|b = \sum_{k=1}^n a_k b_k = a \cdot b$$

Propriedades

- $a|b = b|a$
- $(\alpha a)|b = \alpha(a|b)$
- $(a+b)|c = a|c + b|c$
- $a|a \geq 0$
- $a|a = 0 \iff a = 0_{\mathbb{R}^n}$

2 Norma

$$\|u\| = \sqrt{u|u}$$

Propriedades

- $\|u\| \geq 0$
- $\|u\| = 0 \iff u = 0_{\mathbb{R}^n}$
- $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$

(i) Vetor unitário (versor)

$$\hat{u} = u / \|u\|$$

(ii) Desigualdade de Schwarz

(iii) Desigualdade triangular

$$|u|v| \leq \|u\| \|v\|$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

3 Ângulo entre vetores

$$\angle(u, v) = \arccos \frac{u|v|}{\|u\| \|v\|}$$

Demonstração

$$\begin{aligned} |u|v| \leq \|u\| \|v\| : u \neq 0_{\mathbb{R}^n} \neq v &\implies \frac{|u|v|}{\|u\| \|v\|} \leq 1 \implies \\ \implies -1 \leq \frac{u|v|}{\|u\| \|v\|} \leq 1 &\implies \cos \angle(u, v) = \frac{u|v|}{\|u\| \|v\|} \implies \\ \implies \angle(u, v) = \arccos \frac{u|v|}{\|u\| \|v\|} \end{aligned}$$

Propriedades

$$\bullet \angle(u, v) = \angle(v, u) \quad \bullet \quad u|v| = \|u\| \|v\| \angle(u, v)$$

Exemplo 1

$$\angle((1, 0, 0), (0, 0, 1))$$

$$= \arccos \frac{(1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1)}{\|(1, 0, 0)\| \|(0, 0, 1)\|} = \arccos(0) = \pi/2$$

Exemplo 2

$$\angle(u, v) : \{u, v\} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \wedge u = \alpha v : \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\angle(u, v) = \arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \arccos \frac{\alpha v \cdot v}{\|\alpha v\| \|v\|} = \arccos \frac{\alpha}{|\alpha|} \frac{v \cdot v}{\|v\|^2} = \arccos \pm 1 = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

3.1 Ortogonalidade

$$\angle(u, v) = 0 \iff u \cdot v = 0$$

(i) Propriedades

$$\angle(u, v) = 0 \iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

(ii) Sequencia Ortogonal

$$u \subset \mathbb{R}^n : u_i | u_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

(iii) Sequencia Ortonormada

$$u \subset \mathbb{R}^n : u_i | u_j = \begin{cases} 0 : & i \neq j \\ 1 : & i = j \end{cases}$$

(iv) Base ortonormada

$$\left\{ \begin{array}{l} u | v = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \\ \|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \\ \alpha_i = u | e_i \quad \forall i \iff \\ \iff u = \sum_{i=1}^n (u | e_i) e_i \end{array} \right\} : \left\{ \begin{array}{l} u = e \alpha \\ \wedge v = e \beta \\ \wedge e \text{ base ortonormada} \\ \wedge e \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

Exemplo 3

Determinar a sequência de coordenadas do vetor v na base \mathcal{B}

$$v = (a, b, c)$$

$$\mathcal{B} = \left(\frac{(2, 1, 0)}{\sqrt{5}}, \frac{(-1, 2, 0)}{\sqrt{5}}, (0, 0, 1) \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1|b_1 = 4/5 + 1/5 = 1 \\ b_2|b_2 = 1/5 + 4/5 = 1 \\ b_3|b_3 = 1 \\ b_1|b_2 = -2/5 + 2/5 = 0 \\ b_1|b_3 = 0 \\ b_2|b_3 = 0 \end{array} \right\}; (v|b_1, v|b_2, v|b_3) = \left(\frac{2a+b}{\sqrt{5}}, \frac{2b-a}{\sqrt{5}}, c \right)$$

Proposição 1

$$\left\{ \begin{array}{l} u \text{ é seq. orto.} \\ \wedge u_i \neq 0 \quad \forall i \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} u_i|u_j = 0 \quad \forall i \neq j \\ \wedge u_i \neq 0 \quad \forall i \end{array} \right\} \implies$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} u \text{ é l.i.} \\ \wedge \#u \leq n \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \nexists \alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{I_i\} : u_i = \alpha u \quad \forall i \\ \wedge \#u \leq n \end{array} \right\} :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \subset \mathbb{R}^n \\ \wedge u_i \neq 0_{\mathbb{R}^n} \quad \forall i \end{array} \right\}$$

Exemplo 4

encontre uma base ortornomada para \mathbb{R}^3 usando u

$$u = ((2, 1, 0), (-2, 4, 0), (0, 0, 2))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 | u_2 = -4 + 4 = 0 \\ \wedge u_1 | u_3 = 0 \\ \wedge u_2 | u_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \text{ é l.i.} \\ \wedge \#u = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{u_1}{\|u_1\|} \right), \left(\frac{u_2}{\|u_2\|} \right), \left(\frac{u_3}{\|u_3\|} \right) \right) = \left(\left(\frac{u_1}{\sqrt{5}} \right), \left(\frac{u_2}{\sqrt{20}} \right), \left(\frac{u_3}{2} \right) \right)$$

4 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

$$\left\{ \begin{array}{l} v_i = u_i - \sum_{j=2}^i \frac{u_i | v_j}{\|v_j\|^2} v_j \\ \wedge u \text{ é base de } \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \Rightarrow v \text{ é base ortog. de } \mathbb{R}^n$$

Objetivo: Processo para encontrar uma base ortogonal a partir de uma base arbitrária de qualquer subespaço não nulo de \mathbb{R}^n

Exemplo 5

Encontre a base ortogonal para o subespaço $F \subset \mathbb{R}^n$ a partir de u

$$u = ((1, 1, 1), (1, 3, 2))$$

$$\begin{aligned} v &= \left((1, 1, 1), (1, 3, 2) - \frac{(1, 3, 2)|(1, 1, 1)}{\|(1, 1, 1)\|} (1, 1, 1) \right) = \\ &= \left((1, 1, 1), (1, 3, 2) - \frac{6}{\sqrt{3}^2} (1, 1, 1) \right) = ((1, 1, 1), (-1, 1, 0)) \end{aligned}$$

Exemplo 6

Encontre uma base ortogonal para \mathbb{R}^3 usando a base do exemplo anterior

$$\begin{aligned} v &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{(0, 0, 1)|(1, 1, 1)}{\|(1, 1, 1)\|} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{(0, 0, 1)|(-1, 1, 0)}{\|(-1, 1, 0)\|} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{\|(-1, 1, 0)\|} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= ((1, 1, 1), (-1, 1, 0), (-1/3, -1/3, 2/3)) \end{aligned}$$

5 Complemento Ortogonal

$$F^\perp = \{u \in \mathbb{R}^3 : u|v = 0 \quad \forall v \in F\}$$

Proposição 2

$$F \text{ subespaço de } \mathbb{R}^n \implies F^\perp \text{ subespaço de } \mathbb{R}^n$$

Exemplo 7

(i)

$$F^\perp : F = \{(0, 0, 0)\}$$

$$u|(0, 0, 0) = 0 \quad \forall u \implies \\ \implies F^\perp = \mathbb{R}^3$$

(ii)

$$F^\perp : F = \mathbb{R}^3$$

$$u|v = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^3 \implies \\ \implies F^\perp = \{(0, 0, 0)\}$$

(iii)

$$F^\perp :$$

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \right. \\ \left. x - 2y + 3z = 0 \right\}$$

$$u|(x, y, z) = 0 = x - 2y + 3z \implies \\ \implies F^\perp = \{(1, -2, 3)\}$$

Proposição 3

$$w|u_i = 0 \quad \forall i \implies w \in \langle u \rangle^\perp : \left\{ w \in \mathbb{R}^n \mid u \subset \mathbb{R}^n \right.$$

Exemplo 8

$$F^\perp : F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$$

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\} = \{(2y - 3z, y, z) : \{y, z\} \subset \mathbb{R}\} = \\ &= \langle (2, 1, 0), (-3, 0, 1) \rangle \implies \\ \implies F^\perp &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) | (2, 1, 0) = 0 \wedge (x, y, z) | (-3, 0, 1) = 0\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = -2x \wedge z = 3x\} = \langle (1, -2, 3) \rangle \end{aligned}$$

Proposição 4

$$F \oplus F^\perp = \mathbb{R}^3 \wedge \dim \mathbb{R}^3 = \dim F + \dim F^\perp$$

Proposição 5

$$\begin{aligned} F^\perp &= \mathcal{L}(A) : \\ &F \text{ subespaço de } \mathbb{R}^n \text{ das soluções} \\ &\text{de equações lineares homogêneo } AX = 0 \end{aligned}$$

6 Projeção Ortogonal

$$u = \text{Proj}_F u + \text{Proj}_{F^\perp} u : \begin{cases} \text{Proj}_F(u) \in F \\ \text{Proj}_{F^\perp}(u) \in F^\perp \end{cases}$$

Slide 8 – Reta e Plano

Elementos

1 Espaço

Equação vetorial

$$\mathcal{E}sp_m \subset \mathbb{R}^n : \left\{ \begin{array}{l} P = A + \sum_{i=1}^m \lambda_i U_i \quad \wedge \\ \wedge \{P, A\} \subset \mathcal{E}sp_m \quad \wedge \\ \wedge \{i, n, m\} \subset \mathbb{N} \quad \wedge \\ \wedge m \leq n \quad \wedge \\ \wedge \{\lambda, U_i\} \subset \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$$

Equações paramétricas

$$P_i = A_i + \sum_{j=1}^m \lambda_{j,i} U_{j,i}$$

Exemplos

- $m = 0 \implies$ ponto
- $m = 1 \implies$ reta
- $m = 2 \implies$ plano

2 Reta

Equação vetorial

$$\mathcal{Reta}_m \subset \mathcal{Esp}_m : \left\{ \begin{array}{l} P = A + \lambda U \\ \wedge \{P, A\} \in \mathcal{Reta}_m \end{array} \right\}$$

Definem uma reta:

- 2 Pontos
- 1 Ponto e 1 vetor

Vetor diretor: Vetor não nulo paralelo a reta

Equações cartesianas

(i) Equações paramétricas

$$P_i = A_i + \lambda U_i \quad \forall i \leq n$$

(ii) Equações normais

$$\left. \begin{array}{l} P_i = A_i + \lambda U_i \\ \wedge P_j = A_j + \lambda U_j \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{P_i - A_i}{U_i} = \frac{P_j - A_j}{U_j} \left\{ \begin{array}{l} \{i, j\} \leq n \\ \wedge \{U_i, U_j\} \neq 0 \end{array} \right.$$

(iii) Equações reduzidas

$$P_i = A'_i + P_j U'_i : \left\{ \begin{array}{l} \{i, j\} \subset \mathbb{N} \\ \wedge \{i, j\} \leq n \\ \wedge i \neq j \\ \wedge U'_i = U_i/U_j \\ \wedge A'_i = A_i - A_j U'_i \\ \wedge U_j \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} P_i = A_i + \lambda U_i \\ \wedge \lambda = (P_j - A_j)/U_j : U_j \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow P_i = A_i + U_i (P_j - A_j)/U_j = \\ & = A'_i + U'_i P_j : \left\{ \begin{array}{l} U'_i = U_i/U_j \\ \wedge A'_i = A_i - A_j U'_i \\ \wedge U_j \neq 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Reduzida pois possui uma equação a menos comparando com as equações cartesianas

3 Plano

Equação vetorial

$$\mathcal{Plano}_m \subset \mathcal{Esp}_m : \{ \{P, A\} \subset \mathcal{Plano}_m \wedge n \geq 2 \}$$

Definição 1 ponto e 2 vetores não paralelos

$$P = A + \sum_{j=1}^2 \lambda_j U_j$$

Definição 1 ponto e 1 vetor perpendicular ao plano

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} | (\lambda_1 \times \lambda_2) &= |P - A, \lambda_1, \lambda_2| = \overrightarrow{AP} | \lambda' = \\ &= A | \lambda' + d = 0 \\ &\left\{ \begin{array}{l} d \in \mathbb{R} \\ \wedge \lambda' \in \mathbb{R}^n : \lambda' \perp \text{Plano} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Definem um plano:

- 3 Pontos
- 1 Ponto e 1 Vetor
- 1 Ponto e 2 vetores não paralelos

Vetores diretores: Vetores não nulos e não colineares paralelos ao plano.

Equações cartesianas

(i) Equações paramétricas

$$P_i = A_i + \sum_{j=1}^2 \lambda_{j,i} U_{j,i}$$

(ii) Equação geral

$$A + \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i = 0 : \left\{ \begin{array}{l} A \in \mathbb{R} \\ \wedge \lambda \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \wedge$$

Distâncias

4 Distancia dentre 2 espaços

$$d(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \min(||\overrightarrow{e_1 e_2}||) : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_1 \in \mathcal{E}sp_m \\ \wedge \mathcal{E}_2 \in \mathcal{E}sp_n \\ \wedge e_1 \in \mathcal{E}_1 \\ \wedge e_2 \in \mathcal{E}_2 \end{array} \right. \wedge$$

4.1 Distancia entre 1 Ponto e 1 Reta

$$\begin{aligned} d(P, \mathcal{R}eta) &= \|\overrightarrow{AP}\| \sin(\theta) = \|\overrightarrow{AP}\| \|u\| \sin \theta / \|u\| = \\ &= \|\overrightarrow{AP} \times u\| / \|u\| : \theta = \angle(u, \overrightarrow{AP}) \end{aligned}$$

4.2 Distancia dentre 1 ponto e 1 plano

$$\begin{aligned} d(P, \mathcal{P}lano) &= \|\overrightarrow{AP}\| |\cos(\theta)| = \|\overrightarrow{AP}\| \|w\| |\cos(\theta)| / \|w\| = \\ &= |\overrightarrow{AP} \cdot w| / \|w\| \end{aligned}$$

Exemplo 1

Conclua que \mathcal{Reta} é extritamente paralela ao \mathcal{Plano}

$$\mathcal{Reta} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2 \wedge 2y - 6 = z\}$$

$$\{(1, 0, -1), (2, 2, 0), (1, 1, 1)\} \subset \mathcal{Plano}$$

(i)

$$\begin{aligned} \mathcal{Reta} \parallel \mathcal{Plano} &\implies u \mid v = 0 : \left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{Reta} \\ \wedge v \in \mathcal{Plano} \end{array} \right\} \implies \\ &\implies \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \right) \mid \left(\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \times \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) \right) = \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right) \mid \left(\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \times \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \right) = \\ &= \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right) \mid \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= -6 + 6 = 0 \end{aligned}$$

(ii)

$$\mathcal{Reta} \not\subset \mathcal{Plano} \implies \nexists p : p \in \mathcal{Reta} \wedge p \in \mathcal{Plano} \implies$$