Análise Matemática II C
2022/23 (2º semestre)

Lista 6 - Extremos

1. Determine, caso existam, os extremos das seguintes funções:
   (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13$;
   (b) $f(x, y) = x^2 + xy^2 + y^4$;
   (c) $f(x, y) = x^5y + xy^5 + xy$;
   (d) $f(x, y) = \mathrm{e}^{1+x^2-y^2}$;
   (e) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$;
   (f) $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$.

2. Calcule, caso existam, os extremos (relativos e absolutos) da função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$, quando:
   (a) $D = \mathbb{R}^2$;
   (b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \wedge 0 \leq x \leq 1 \wedge y \geq 0\}$;
   (c) D é o conjunto dos pontos que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 1$.

3. Averigue a existência de pontos estacionários para a função $f(x, y)$ e caso existam, indique a sua natureza. Justifique a resposta.
   (a) $f(x, y) = x^3 + xy^2 - x$.
   (b) $f(x, y) = \dfrac{x^4}{2} - x^2y + y^2 - 4y$.

4. Determine o mínimo da função $h(x, y, z) = x + y + z$ condicionada ao elipsoide de $\mathbb{R}^3$ definido por
$$\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1\,.$$

5. Determine a distância mínima da origem $(0, 0, 0)$ à superfície de equação $z = \dfrac{1}{xy}$.

6. Determine o mínimo e o máximo (globais) da função $f(x, y)$ em D :
   (a) $f(x, y) = x^2 + y, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(c) $f(x,y) = xy(3 - x - y), \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x + y \leq 3\}$;

(d) $f(x,y) = 2x^2 - y + y^2 + 5, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$;

(e) $f(x,y) = 9 - 2x^2 - 3y^2, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4\}$;

(f) $f(x,y) = 4x^2 + 10y^2, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4\}$;

(g) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 5, \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$.