Soluções ficha 4 - CNA

Exercício 1

b) $x_3 = 1.3125$, $|\alpha - x_3| \leq 0.0625$

c) $n = 19$ iteradas

Exercício 2

b) $x_2 = 1.0625$, $I_3 = [1.0625, 1.125]$

c) $n = 16$ iteradas

d) Sabendo que $x^* \in [1.0625, 1.125]$ $\eta_{x^*} \leq 0.718 \times 10^{-5}$

Exercício 3

c) ordem de convergência $p = 1$

d) $x_4 \simeq 2.108229$, $|\gamma - x_4| < 0.29 \times 10^{-2}$

e) $k = 7$ iteradas

Exercício 5

c) $x_2 \simeq 1.312255625$ $|\alpha - x_2| < 0.876667$

Exercício 6

b) ordem de convergência $p = 1$

c) $k = 5$ iteradas

$x_5 \simeq 1.178057949$

d) α é ponto fixo repulsor de G e $\{x_n\}$ é divergente

e) $x_2 \simeq 1.176510763$

Exercício 10

b) $x_2 \approx -1.163999894 \ldots$, $|\alpha - x_2| \leq 0.232 < 0.5 \times 10^{0}$
não se garante nenhuma casa decimal significativa

EN-D

2020/2021

Ficha 4

10.

- $g(x) = 10x^3 - 8x + 3$
- $I = [-2, -1]$
- $g(\alpha) = 0 \quad ; \quad \alpha \in I$

a)

- $x_n \equiv \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{10x_{n-1}^3 - 8x_{n-1} + 3}{30x_{n-1}^2 - 8} \end{cases}, n \in \mathbb{N}$

sucessão gerada pelo método de Newton

I) $\left.\begin{cases} g(x) = 10x^3 - 8x + 3 \\ g'(x) = 30x^2 - 8 \\ g''(x) = 60x \end{cases}\right\}$ funções contínuas em I

II) $\left.\begin{cases} g(-2) = -61 < 0 \\ g(-1) = 1 > 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow g(-2) \times g(-1) < 0$

CN - D

2020/2021

Ficha 4

Ex. 10. <continuação>

III)

- $g''(x) = 60x$ é uma função negativa e crescente em I $\Rightarrow$ $g'(x)$ é estritamente decrescente em I

- Assim sendo,

$$\underbrace{g'(-1)}_{=22} \leq g'(x) \leq \underbrace{g'(-2)}_{=112}, \quad \forall x \in I,$$

donde se conclui que $g'(x)$ é uma função positiva e decrescente em I

$$\therefore \begin{cases} g'(x) > 0, \ \forall x \in I \\ g''(x) < 0, \ \forall x \in I \end{cases}$$

g' e g'' não mudam de sinal em I

IV)

- $x_0 = -2$

$$\begin{cases} \cdot\ g(-2) = -61 < 0 \\ \cdot\ g''(-2) < 0 \end{cases} \Rightarrow g(-2) \times g''(-2) > 0$$

Ex. 10 (cont.)

$\therefore$ a sucessão $\{x_n\}_{n\geq 0}$, definida pelo método de Newton, converge para α

b) $\begin{cases} x_0 = -2 \\ x_1 = x_0 - \dfrac{10x_0^3 - 8x_0 + 3}{30x_0^2 - 8} = -2 - \dfrac{10(-2)^3 - 8(-2) + 3}{30(-2)^2 - 8} = \\ \quad = -2 - \dfrac{-80+16+3}{120-8} = -2 - \dfrac{-61}{112} = \\ \quad = -1.455357142\ldots \\ x_2 = x_1 - \dfrac{10x_1^3 - 8x_1 + 3}{30x_1^3 - 8} = \ldots \\ \quad \ldots = -1.163999894\ldots \end{cases}$

- $|\alpha - x_2| \leq \dfrac{M_2}{2m_1}(x_2 - x_1)^2$, $\begin{cases} m_1 = \min |g'(x)|_I \\ M_2 = \max |g''(x)|_I \end{cases}$

- $\boxed{m_1}$

$|g'(x)| \underset{(I)}{=} g'(x) = 30x^2 - 8 \underset{(I)}{\geq} 22 = m_1$

Ex. 10 < cont. >

- $\boxed{M_2}$

$$|g''(x)| \underset{(I)}{=} -g''(x) = -60x \underset{(I)}{\leq} -60(-2) = 120 = M_2$$

- Assim sendo,

$$|\alpha - x_2| \leq \frac{120}{2 \times 22} \times (-1.163999894\ldots - (-1.455357142\ldots)) =$$

$$= 0.231515\ldots \leq 0.232 < 0.5 \times 10^0$$

$\therefore$ Não se garante nenhuma casa decimal significativa para $\underline{\underline{x_2}}$.

Exercício 12

β é ponto fixo de $\varphi_1(x)$ e $\varphi_3(x)$ em I

β não é ponto fixo de $\varphi_2(x)$ e $\varphi_4(x)$ em I

Exercício 14

a) $f(x) = 2^{-x} - x$

b) $n = 13$ iteradas

Exercício 15

a) $x_1 \approx 0.756617$, $|\alpha - x_1| < 0.04955 < 0.5 \times 10^{-1}$

b) $g(x) = \cos(x)$

α é ponto fixo atractor de $g(x)$ e $\begin{cases} x_0 \in [0.5, 1] \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$ é convergente para α

Exercício 16

c) $x_2 = 3.286614$

d) $|\alpha - x_2| < 0.391$

Exercício 17

$x_4 = 2.53125$ garante 1 c.d.s

14. $g(x) = 2^{-x}$ em $[1/3, 1]$.

(a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = x$

$g(x) = 2^{-x} = x \Leftrightarrow \underbrace{2^{-x} - x}_{f(x)} = 0$

$f(x) = 2^{-x} - x$

b) $g(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$, $\left[\begin{array}{l} g(\frac{1}{3}) = 0.7937,\ g(1) = 0.5,\ g'(x) < 0 \\ \Rightarrow g(x) \text{ é decrescente} \Rightarrow g(x) \in [\frac{1}{3}, 1] \\ \qquad \forall x \in [\frac{1}{3}, 1] \end{array}\right.$

$g'(x) = -2^{-x} \ln(2)$

$|g'(x)| = \underbrace{2^{-x} \ln(2)}_{\text{é função decrescente em } [1/3,\,1]} \leq 2^{-1/3} \log(2) \simeq \overbrace{0.5506}^{k} < 1$

logo com $g'(a)$ existe e $|g(x)| \leq k < 1$ pelo teorema do ponto fixo

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = 1/3 \\ x_n = 2^{-x_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$ converge para o

único ponto fixo $p \in [1/3, 1]$.

c) erro à priori

$|p - x_n| \leq \dfrac{k^n}{1-k} |x_1 - x_0| \leq 0.5 \times 10^{-3}$ $\qquad k = 0.5506$

$x_0 = 1/3 \Rightarrow x_1 = g(x_0) = 2^{-1/3} \simeq 0.7937$

$\dfrac{(0.5506)^n}{1 - 0.5506} |0.7937 - 1/3| \leq 0.5 \times 10^{-3}$

$0.5506^n \leq \dfrac{0.5 \times 10^{-3}}{|0.7937 - 1/3|} (1 - 0.5506)$

$0.5506^n \leq 0.000488\ldots$ $\longrightarrow$ continua

14. $n \ln(\underbrace{0.5506}_{<1}) \leq \ln(0.000488\ldots)$

$$n \geq \frac{\ln(0.000488\ldots)}{\ln(0.5506)} = 12.777\ldots$$

$n = 13.$

Teríamos que calcular 13 iteradas para obter uma aproximação com pelo menos 3 casas decimais significativas.

16. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x + 1$, $I = [3,4]$

a) f é contínua em I pois é um polinómio

$f(3) = -2$, $f(4) = 33 \Rightarrow f(3) \times f(4) < 0$

$\Rightarrow$ existe pelo menos 1 zero de $f(x)$ em I

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8 = \underbrace{4x^2}_{>0 \text{ em } I}\underbrace{(x-3)}_{\geq 0 \text{ em } I} + \underbrace{8}_{>0} > 0$ em I

$\Rightarrow$ f é estritamente crescente em I, portanto f tem no máximo um zero em I.

Pelo que esse zero é único em I

b) Condições de convergência do método de Newton

- f, f', f'' contínuas em I
- $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8 > 0, \forall x \in I$
- $f''(x) = 12x^2 - 24x = \underbrace{12x}_{>0}\underbrace{(x-2)}_{>0 \text{ em } I} > 0, \forall x \in I$

logo f' e f'' não se anulam em I

Considere-se $x_0 = 4$, $f(4) = 33 > 0$ e $f''(4) > 0$

$\Rightarrow f(4) f''(4) > 0$ logo a sucessão

$$\begin{cases} x_0 = 4 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad k = 0, 1, 2 \ldots \end{cases}$$

Converge e podemos usar o método de Newton

c)

$$x_1 = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} \simeq 3.541667$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3.286614$$

d) Majorante para o erro absoluto associado a x_2

$I = [3, 4]$

$0 < m_1 \leq |f'(x)|$

$f'(x) > 0, \forall x \in I$
$f''(x) > 0, \forall x \in I$ $\Big\} \Rightarrow |f'(x)| = f'(x)$ e $f'(x)$ é estritamente crescente em I, logo

$m_1 = f'(3) = 8$

$|f''(x)| \leq M_2$

$f''(x) > 0, \forall x \in I$
$f'''(x) = 24x - 24 > 0, \forall x \in I$ $\Big\} \Rightarrow |f''(x)| = f''(x)$ e $f''(x)$ é estritamente crescente em I

logo $M_2 = f''(4) = 96$

$$|\alpha - x_2| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_2 - x_1)^2 = \frac{96}{2\times 8}(3.286614 - 3.541667)^2$$

$= 0.3903 \ldots < 0.391$

Ficha 4

(18.) • $\underbrace{\ln(3x^2)-x}_{f(x)}=0$

• $f(\alpha)=0$, $\alpha\in I=[0,1]$

(a) • $\varphi(x)=\sqrt{\frac{e^x}{3}}$

• $f(\alpha)=0 \Leftrightarrow \ln(3\alpha^2)-\alpha=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln(3\alpha^2)=\alpha \underset{(I)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 3\alpha^2=e^\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2=\frac{1}{3}e^\alpha \underset{(I)}{\Leftrightarrow}$

$\underset{(I)}{\Leftrightarrow} \alpha=\sqrt{\frac{e^\alpha}{3}}=\varphi(\alpha)$

(b) • $\varphi(x)=\sqrt{\frac{e^x}{3}}$ está definida e é contínua em I

$(e^x/3>0,\ \forall x\in I)$

• $\varphi'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{e^x}{3}}>0,\ \forall x\in I \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(x)$ é estritamente crescente em I

Exer. 18 (cont.) Ficha 4

(b)

- Assim

$$\underbrace{\varphi(0)}_{\sqrt{1/3}=0.577} \leq \varphi(x) \leq \underbrace{\varphi(1)}_{\sqrt{e/3}=0.951\ldots}, \quad \forall x \in I$$

conclui-se que $\forall x \in [0,1], \varphi(x) \in [0,1]$, pois

$$\varphi(x) \in [0.577\ldots, 0.951\ldots] \subset [0,1]$$

- finalmente tem-se

$$|\varphi'(x)| = \Big|\underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{e^x}{3}}}_{\substack{\cdot >0, \text{ em } I \\ \cdot \text{ crescente em } I}}\Big| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{e^x}{3}} \underset{(I)}{\leq} \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{e}{3}}}_{\approx 0.475945} = M < 1$$

$\therefore$ a sucessão

$$\begin{cases} x_0 = 1.0 \\ x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n=1,2,\ldots \end{cases}$$

, definida pelo método do ponto fixo, converge para α, único ponto fixo de $\varphi(x)$ em I

Exerc. 18 (cont.) Ficha 4

(b) • Como $\varphi'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, então $\varphi'(\alpha) \neq 0$.

• A ordem de convergência da sucessão x_n é 1, pois a 1ª derivada de $\varphi(x)$ que é não nula, quando $x = \alpha$, é a derivada de 1ª ordem.

(c) • Vamos utilizar a fórmula do erro à priori:

$$|\alpha - x_K| \leq \frac{M^K}{1-M} \times |x_1 - x_0|$$

• Basta impôr a condição

$$\frac{M^K}{1-M} \times |x_1 - x_0| \leq 0.5 \times 10^{-1}$$

• Ora $x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(1) = \sqrt{\frac{e^1}{3}} = \sqrt{\frac{e}{3}} \approx 0.951890$

• Assim sendo,

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{e}{3}}\right)^K}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{e}{3}}} \times |0.951890 - 1| \leq 0.5 \times 10^{-1} \Leftrightarrow \ldots$$

$\Leftrightarrow K \geq 0.8184\ldots \Leftarrow K_{min} = 1$

$\therefore$ a iterada x_1 já apresenta a precisão desejada

3

Exerc. 18 (cont.) Ficha 4

(d) • $\varphi(x) = \ln(3x^2)$

• $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, $k=0,1,\dots$ $(x_0 \in I)$

• Neste caso ter-se-ia

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{6x}{3x^2}\right| = \left|\frac{2}{x}\right| \underset{(I)}{=} \frac{2}{x} \underset{(I)}{>} 1 , \forall x \in I$$

• Em particular ter-se-ia

$$|\varphi'(\alpha)| = \frac{2}{\alpha} > 1 \quad , \text{pois } \alpha \in I$$

• Por outro lado $\varphi'(x)$ não está definida em $x=0$

∴ O ponto α seria um ponto fixo repulsor e a sucessão x_k só seria convergente para α se $x_0 = \alpha$