ANÁLISE MATEMÁTICA III C

10ªsemana de aulas

NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY

Cláudio Fernandes

caf@fct.unl.pt

Slides para acompanhamento das aulas TP1 e TP4

O material completo do Prof. João de Deus Marques encontra-se no CLIP, na página da UC

Séries de termos não negativos

Iremos em seguida estabelecer alguns critérios de convergência para séries de termos não negativos. Tem-se, como é óbvio, que uma séries de termos não negativos é convergente se e só se for absolutamente convergente. Os resultados que iremos estabelecer mantêm-se obviamente verdadeiros para séries cujos termos sejam não negativos somente a partir de certa ordem. Observe-se ainda que uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ de termos não positivos se reduz ao estudo de uma séries de termos não negativos uma vez que se tem a igualdade
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{+\infty}(-a_n).$$

Proposição

Uma séries de termos não negativos é convergente se e só se a sucessão das suas somas parciais é limitada.

Proposição (Critério da Comparação)

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *duas séries de termos não negativos tais que*

$$\exists p \in \mathbb{N} \ : \ a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq p.$$

1. *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *for convergente então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *também é convergente.*
2. *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *for divergente então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *também é divergente.*

Exemplo

1. Considere-se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. *Tem-se que*

$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ora a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ *é uma série geométrica de razão* $r = \dfrac{1}{2}$, *e portanto convergente. Segue-se pela proposição anterior que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ *também é convergente.*

Exemplo (Continuação)

2. Considere-se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$. *Tem-se que*

$$0 \leq \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \geq 2.$$

Uma vez mais pela proposição anterior, a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ *é uma consequência da convergência da série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

Exemplo (Continuação)

3. Considere-se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. *Tem-se que*

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ora a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente. Segue-se pela proposição anterior que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *também é divergente.*

Corolário

Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *duas séries tais que* $a_n \geq 0$ *e* $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Se*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k, \quad k \in \mathbb{R}^+}.$$

Então as séries são da mesma natureza.

Exemplo Justifique que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{n+\sqrt{n}}{n(n-1)}$ é divergente

Sugestão: Compare com a série harmónica

Nas condições do último corolário se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,$$

então a partir de certa ordem ter-se-á necessariamente que $a_n < b_n$, pelo que a convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ permite concluir a convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e a divergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ permite concluir a divergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Analogamente se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty,$$

então a partir de certa ordem ter-se-á necessariamente que $a_n > b_n$, pelo que a convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ permite concluir a convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ e a divergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ permite concluir a divergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exemplo

1. Estude-se a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. *Já foi visto anteriormente que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+2)}$ *é convergente. Tem-se que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{2n^2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+,$$

pelo que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *também é convergente.*

Exemplo (Continuação)

2. Estude-se a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$*. Já foi visto anteriormente que a série harmónica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente. Tem-se que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n+\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

pelo que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ *também é divergente.*

Exemplo (Continuação)

3. Estude-se a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3}$. *Compare-se com a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. *Para isso calcule-se o limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{\log n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n} = +\infty.$$

A convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *permite concluir a convergência de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3}$.

Proposição (Critério da razão)

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série de termos não negativos.*

1. *Suponhamos que existe um número positivo* $r < 1$ *tal que a partir de certa ordem* p *se tem que* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$. *Então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*
2. *Suponhamos que a partir de certa ordem* p *se tem que* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. *Então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

Corolário (Critério de D'Alembert)

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série de termos positivos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

Então:

1. *Se* $a < 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*
2. *Se* $a > 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

OBSERVAÇÃO:

Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

em geral nada se pode concluir. Existem séries quer divergentes quer convergentes em que o limite considerado é igual a 1, como é, por exemplo, o caso das séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

No entanto se o limite for 1 mas por valores superiores a 1, pelo menos a partir de certa ordem, a demonstração do critério de D'Alembert ainda permite concluir que a série é divergente.

Exemplo

Estude-se a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k^n n!}{n^n}$ *em que* k *é uma constante real positiva. Tem-se que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{k^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{k^n n!}{n^n}} = k \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{k}{e},$$

o que permite concluir que se $k < e$ *a série converge e se* $k > e$ *a série diverge.*

Suponhamos que $k = e$. *A sucessão e* $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ *é monótona decrescente de limite* 1 *pelo que converge para* 1 *por valores superiores a* 1. *A observação feita a seguir ao critério de D'Alembert permite concluir que neste caso, isto é quando* $k = e$, *a série também é divergente.*

Proposição (Critério da raíz)

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série de termos não negativos.*

1. *Se existir um número positivo* $r < 1$ *tal que a partir de certa ordem se tem que* $\sqrt[n]{a_n} \leq r$, *então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*
2. *Se existir uma subsucessão* (a_{k_n}) *de* (a_n) *tal que a partir de certa ordem se tem que* $\sqrt[k_n]{a_{k_n}} \geq 1$, *então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

Corolário

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série de termos não negativos e suponhamos que existe* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$. *Então:*

1. *Se* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1$ *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*
2. *Se* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$ *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

Exemplo

1. Estude-se a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. *Tem-se que*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=e>1,$$

pelo que a série diverge.

2. Estude-se a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{n}{4n+1}\right)^{n}$. *Tem-se que*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{n}{4n+1}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{4n+1}\right)=\frac{3}{4}<1,$$

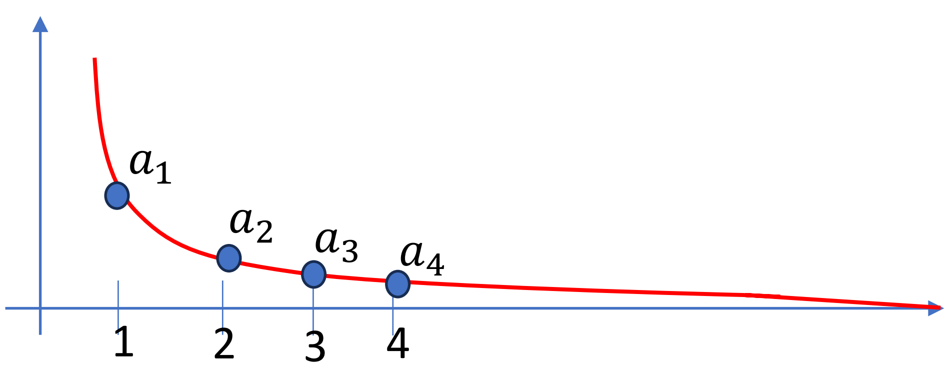
pelo que a série converge.

Critério do Integral

Proposição (Critério do integral)

Seja $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *uma função contínua, positiva e decrescente. Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *seja* $a_n = f(n)$.

Nessas condições a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *e o integral impróprio* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *têm a mesma natureza.*



Exemplo

Estude-se a convergência das séries de Dirichlet, isto é, da família de séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Se $\alpha = 0$, *o termo geral não converge para zero pelo que a série diverge.*
Suponhamos que $\alpha < 0$. *Nestas condições,* $a_n = n^{-\alpha}$, $(-\alpha > 0)$ *pelo que* $a_n \to +\infty$ *pelo que a série também diverge.*

Suponhamos agora que $\alpha > 0$. *Considere-se a função* $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$, *definida em* $[1, +\infty[$.
Trata-se de uma função contínua e positiva cuja derivada $f'(x) = -\dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$ *é negativa e portanto* $f(x)$ *é decrescente.*

Exemplo (Continuação)

O critério do integral, permite afirmar, que para estes valores de α, *a série* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ *e o integral* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ *têm a mesma natureza.*

Estudemos então, para valores de $\alpha > 0$, *a convergência do integral impróprio*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Comecemos por considerar o caso $\alpha = 1$. *Tem-se que*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{k \to +\infty} \int_1^{k} \frac{1}{x} dx = \lim_{k \to +\infty} [\log x]_1^k = \lim_{k \to +\infty} \log k = +\infty$$

e portanto (tal como já se sabia) a série harmónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge.*

Exemplo (Continuação)

Se $\alpha \neq 1$ $(\alpha > 0)$ *vem que*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{k \to +\infty} \int_1^k x^{-\alpha} dx = \lim_{k \to +\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^k$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{k^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

pelo que para valores de $\alpha > 0$ *série converge se e só se* $\alpha > 1$.

Em conclusão, as séries de Dirichlet convergem se e só se $\alpha > 1$.

Exemplo

Determine-se a natureza da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}.$$

Comparemos a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ *com o integral impróprio*

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2} dx.$$

A função $f(x)$ *é contínua, positiva e decrescente no intervalo* $[2, +\infty[$, *pelo que*

Exemplo (Continuação)

o integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}dx$ *e a série* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ *têm a mesma natureza.*

Ora

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}dx = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{-1}{\log x}\right]_2^k = \lim_{k\to\infty}\frac{-1}{\log k} + \frac{1}{\log 2} = \frac{1}{\log 2}$$

é convergente e portanto a série também é convergente.

Proposição (Critério de Raabe)

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos positivos. Se existir*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = a \in \overline{\mathbb{R}},$$

então

1. *se* $a < 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge,*
2. *se* $a > 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Exemplo

Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{1}{n}.$$

Aplicando o critério de d'Alembert vem que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+2)} = 1^-,$$

pelo que nada se pode concluir.

Exemplo (Continuação)

Aplicando o critério de Raabe vem que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{(2n+2)(n+1)}{n(2n+1)} - 1\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{2n^2+4n+2-2n^2-n}{n(2n+1)}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+2}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1,
\end{aligned}$$

o que permite concluir que a série é convergente.

Sucessões e Séries de Funções

Convergência Pontual

Definição

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções, $f_n(x) : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diz-se que f_n converge num ponto $a \in D$ se a sucessão numérica $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente.

Se a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em todos os pontos de D, pode definir-se uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), x \in D.$$

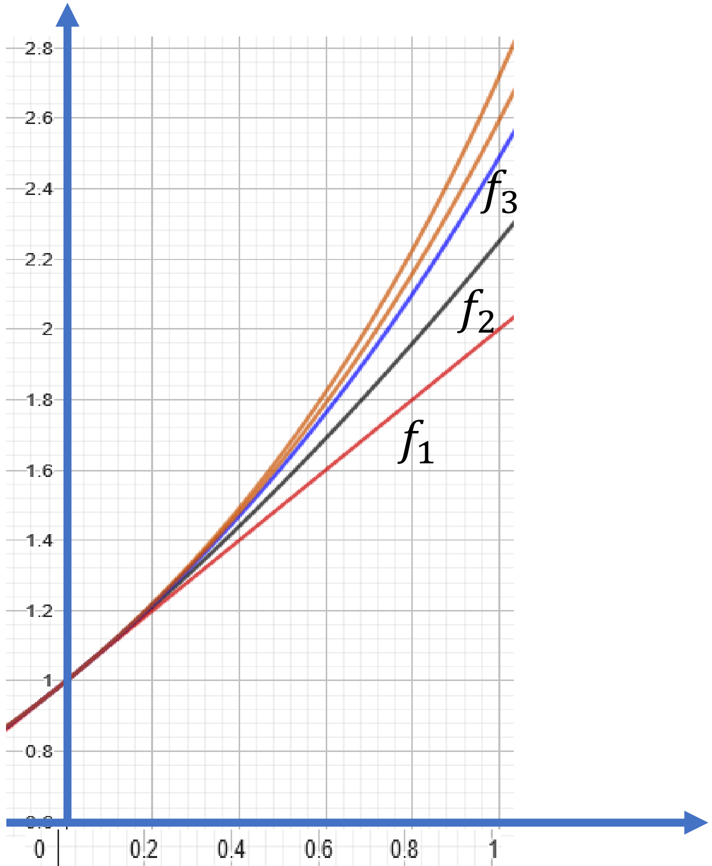
A função $f(x)$ diz-se o limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em D e diz-se que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para f em D.

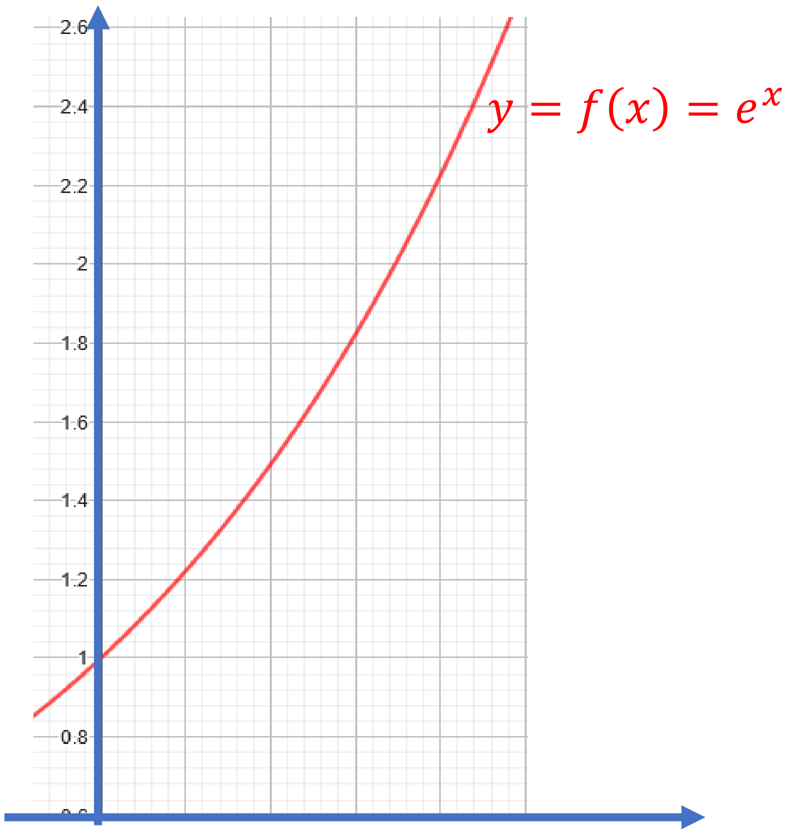
Exemplo

1 - A sucessão de funções

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, x \in [0, 1]$$

converge para e^x, $\forall x \in [0, 1]$





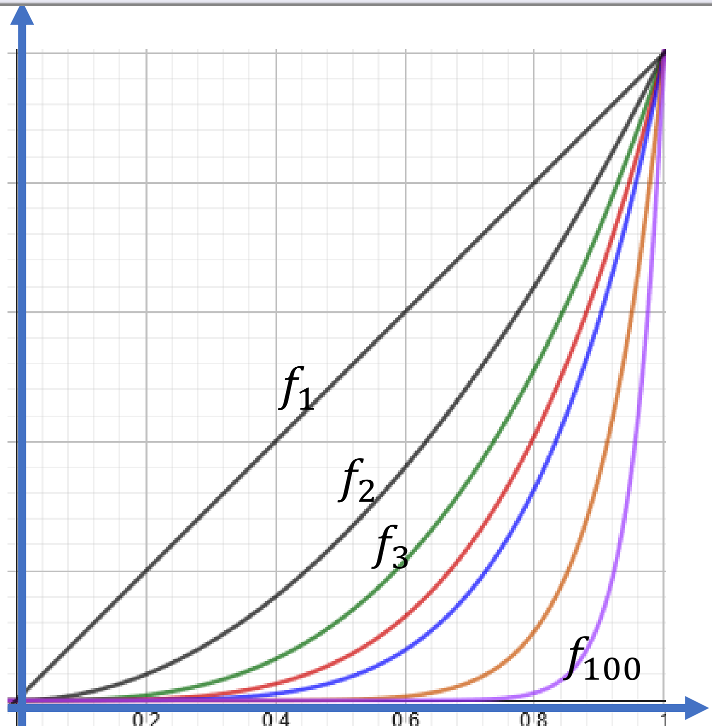
2 - A sucessão de funções

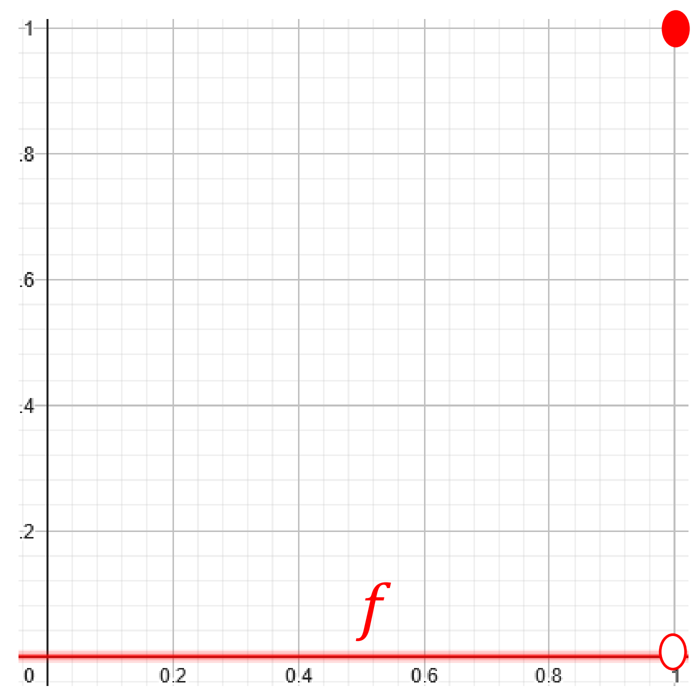
$$f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$$

converge para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ 0 \leq x < 1 \\ 1, & se\ x = 1. \end{cases}$$

Note-se que, neste exemplo, as funções $f_n(x)$ são contínuas, $\forall n \in \mathbb{N}$, mas $f(x)$ é descontínua.



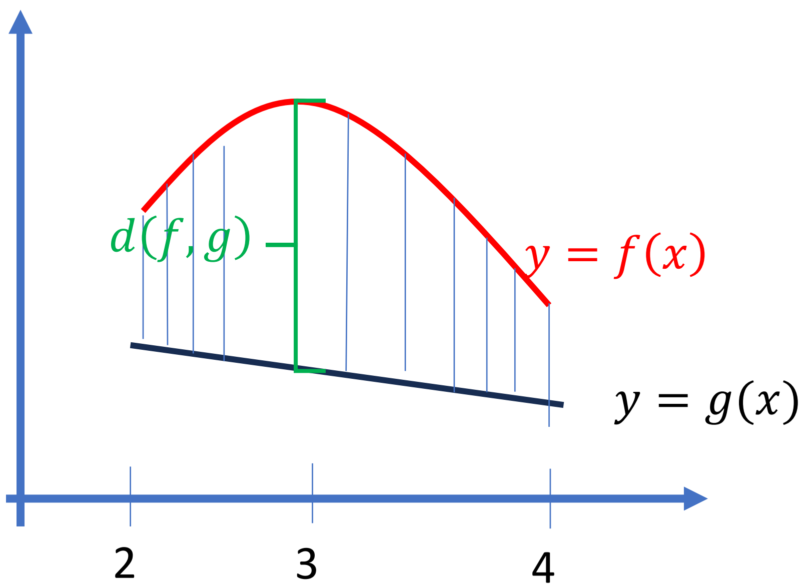


Convergência Uniforme

Dadas duas funções limitadas, $f(x)$ e $g(x)$ definidas num domínio $D \subset \mathbb{R}$, define-se *distância uniforme* da função $f(x)$ à função $g(x)$ ao número

$$d(f,g) = \underset{x \in D}{Sup} |f(x) - g(x)|$$

$D = [2,4]$



OBSERVAÇÃO:

Para cada x calcula-se o comprimento

$$|f(x) - g(x)|$$

e escolhe-se o supremo ("maior") de todos.

$d(f,g)$= "maior" dos comprimentos

Convergência Uniforme

Definição

Diz-se que a sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em D se

$$\forall \delta > 0\, \exists\, p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow (\forall x \in D, |f_n(x) - f(x)| < \delta)$$

ou equivalentemente

$$\forall \delta > 0\, \exists\, p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow (\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)| < \delta),$$

isto é,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0.$$

$d(f_n, f)$

OBSERVAÇÃO:

A convergência uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em D é mais forte do que a convergência pontual em D , isto é,

$$\boxed{f_n \underset{n}{\to} f \ \ (uniformemente) \ \ \Longrightarrow f_n \underset{n}{\to} f \ \ (pontualmente)}$$

Exemplo

1 - Considere-se a sucessão de funções

$$f_n(x) = x + \frac{x}{n}, x \in [0, 1].$$

É imediato que $f_n(x)$ converge uniformemente para $f(x) = x$, com $x \in [0, 1]$. Com efeito

$$sup_{x\in D}\left|x + \frac{x}{n} - x\right| = sup_{x\in D}\left|\frac{x}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0 \ \ (quando\ n \to \infty).$$

Exemplo

2 - A sucessão de funções, $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$ *que já sabemos convergir pontualmente para*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ 0 \leq x < 1 \\ 1, & se\ x = 1. \end{cases}$$

não converge uniformemente para $f(x)$. *Com efeito*

$$sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = sup_{x \in [0,1[} \{|x^n|, 0\} = sup_{x \in [0,1[} |x^n| = 1,$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ *e portanto*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \right) = 1 \neq 0.$$

Teorema

Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções contínuas em D, que converge uniformemente para f em D, então f é contínua em D.

OBSERVAÇÃO: Se (f_n) é uma sucessão de funções contínuas e o seu limite pontual for uma função f descontínua então (f_n) não converge uniformemente para f.