III - Seja S a porção da superfície esférica

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, \ \ \frac{3}{2} \leq z \leq 2.$$

a) Indique equações paramétricas da superfície S e determine um vector com a direção da normal "exterior" à superfície considerada.

Resolução: Uma parametrização para a superfície S é

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 + \sqrt{1-u^2-v^2} \end{cases}, \ \ (u,v) \in D$$

onde

$$D = \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq u \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \ \ \wedge \ \ -\sqrt{\frac{3}{2} - u^2} \leq v \leq \sqrt{\frac{3}{2} - u^2} \right\}$$

é o círculo que corresponde à projeção no plano xoy da superfície S.

Seja

$$\vec{s}(u,v) = u\vec{i} + v\vec{j} + (1 + \sqrt{1-u^2-v^2})\vec{k}, \ \ (u,v) \in D.$$

Então

$$\vec{s}_u{}' = \vec{i} - \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\vec{k}, \ \ \vec{s}_v{}' = \vec{j} - \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\vec{k}$$

e

$$\vec{s}_u{}' \times \vec{s}_v{}' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & -\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{vmatrix} = \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\vec{i} + \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\vec{j} + \vec{k} \ \ (1)$$

é um campo de vectores com a direção do campo normal à superfície S.

Por outro lado, no ponto $(0,0,2) \in S$ o vector normal "exterior" a S é $\vec{k}$,

$$(\vec{s}_u{}' \times \vec{s}_v{}')(0,0) = \vec{k}$$

e assim o campo (1) tem o sentido da normal exterior.

b) Determine o valor do fluxo

$$\int\int_S \nabla \times (xz\vec{j}) \cdot \vec{n} dS,$$

na face exterior da superfície S, através do cálculo de um integral curvilíneo.

Resolução: Pelo teorema de Stokes,

$$\int\int_S \nabla \times (xz\vec{j}) \cdot \vec{n} dS = \int_L xzdy$$

onde L é a linha (bordo da superfície S),

$$L : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \ \ \wedge \ \ z = \frac{3}{2}$$

Uma parametrização para L é

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta \\ z = \frac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow dy = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta d\theta$$

com $\theta \in [0, 2\pi]$ percorrido no sentido crescente. Deste modo,

$$\begin{aligned} \int\int_S \nabla \times (xz\vec{j}) \cdot \vec{n} dS &= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \times \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta d\theta = \frac{9}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= \frac{9}{16}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{2\pi} = \frac{9}{8}\pi. \end{aligned}$$