Resolução do 1º teste de Análise Matemática II-C

2 de Novembro de 2022

Grupo I

1. Seja E um espaço vectorial onde está definido um produto interno notado com o símbolo $\mid$ e seja $\|\,.\,\|$ a norma induzida pelo produto interno. Apenas uma das seguintes afirmações é verdadeira. Indique qual.

No que se segue u, v são elementos arbitrários de E.

☐ $\|u+v\| < \|u\| + \|v\|$

☐ se $u \neq 0$, $\|u\| + \|-u\| = 0$

☐ $(\lambda u \mid v) = |\lambda|(u \mid v),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

☐ se $u \neq 0$ e $v = \dfrac{u}{\|u\|}$ então $u \mid v = 1$

☐ se $\|u\| = \|v\| = 1$ então $\|u+v\| = 2$

☒ se $\|u\| = 1$ então $-\|v\| \leq (u \mid v) \leq \|v\|$

2. Sejam V e F um vértice e um foco, respectivamente, da cónica de equação $4x^2 - y^2 + 2y - 5 = 0$. Então:

☐ $V = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ e $F = (-5, 1)$

☐ $V = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ e $F = (-\sqrt{5}, 1)$

☐ $V = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ e $F = (\sqrt{5}, 1)$

☐ $V = (-1, 1)$ e $F = (-5, 1)$

☒ $V = (-1, 1)$ e $F = (-\sqrt{5}, 1)$

☐ $V = (1, 1)$ e $F = (-5, 1)$

3. Seja $w = f(u)$ com f uma função continuamente derivável até à segunda ordem e $u = sen^2(x) - cos^2(y)$. A igualdade

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} sen(2y) - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} sen(2x) = A f'(u) cos(Bx) sen(Cy)$$

é verdadeira se e só se:

☐ $A = 1, B = 2, C = 1$

☐ $A = 1, B = 2, C = 2$

☐ $A = 2, B = 1, C = 2$

☐ $A = 1, B = 1, C = 1$

☒ $A = 2, B = 2, C = 2$

☐ $A = 2, B = 1, C = 1$

4. Pretende-se determinar o ponto da superfície cónica $z-1=\sqrt{x^2+y^2}$ que se encontra à distância mínima do ponto $(1,\,-1,1)$. A função de Lagrange para o problema considerado é:

- ☐ $F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-\sqrt{x^2+y^2})$
- ☐ $F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z-1-\sqrt{x^2+y^2})$
- ☐ $F(x,y,z,\lambda)=(x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)+\lambda\sqrt{x^2+y^2}$
- ☐ $F(x,y,z,\lambda)=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2+\lambda\sqrt{x^2+y^2}$
- ☐ $F(x,y,z,\lambda)=(x+1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2+\lambda(z-\sqrt{x^2+y^2})$
- ☒ $F(x,y,z,\lambda)=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2+\lambda(z-1-\sqrt{x^2+y^2})$

Grupo II

1. Considere a função real g, de duas variáveis reais, definida por

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4\cos(2x)-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Mostre, por definição, que $g(x,y)$ é contínua em $(0,0)$.

b) Determine, por definição, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.

c) Estude a diferenciabilidade de g no ponto $(0,0)$.

Resposta: (a) Para mostrar que

$$\forall\,\delta>0\;\;\exists\,\epsilon>0:(x,y)\neq(0,0)\wedge\sqrt{x^2+y^2}<\epsilon\Rightarrow\;|\,g(x,y)-0\,|<\delta$$

só é necessário verificar que

$$\frac{|x^4\cos(2x)-2x^2y^2|}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\leq\frac{x^4|\cos(2x)|+2x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\leq\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\sqrt{x^2+y^2}<\epsilon.$$

Basta agora considerar $\epsilon=\delta$. Conclui-se então que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4\cos(2x)-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=0=g(0,0)$ e $g(x,y)$ é contínua em $(0,0)$.

(b) Tem-se

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^4\cos(2h)}{(\sqrt{h^2})^3}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|^4\cos(2h)}{h|h|^3}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}\cos(2h) = \begin{cases} 1, & h>0 \\ -1, & h<0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

Portanto $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ não existe.

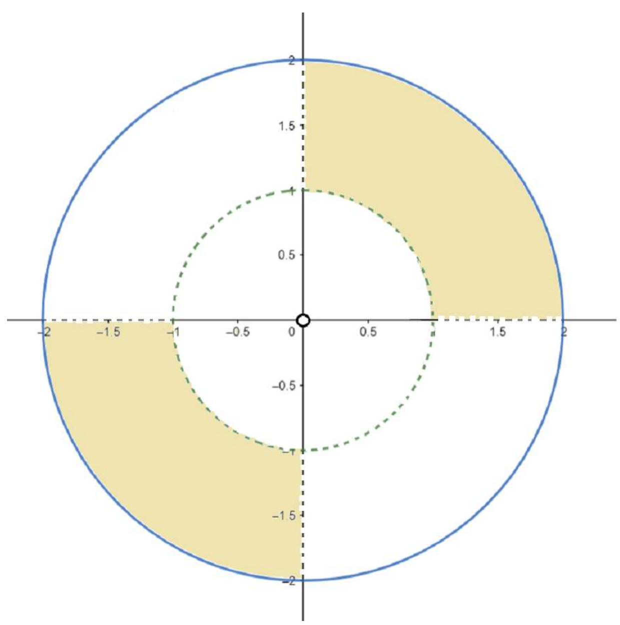
(c) Tendo em conta que uma das derivadas parciais não existe, a função g não é diferenciável em $(0,0)$. □

2. Considere a função real f de duas variáveis reais, definida por

$$\boldsymbol{f(x,y) = \log(xy)\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}}.$$

Indique o seu domínio D e esboce-o. Determine o interior e a fonteira de D. O conjunto D é conexo? Justifique.

Resposta: O gráfico do domínio D é a seguinte região, pintada a castanho:



Tem-se

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy>0 \wedge 4-x^2-y^2\geq 0 \wedge x^2+y^2-1>0\right\}$$
$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2\leq 4 \wedge ((x>0\wedge y>0)\vee(x<0\wedge y<0))\}.$$

Tem-se que

$$Int(D) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4 \wedge ((x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0))\}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{Fr}(D) = &\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4 \wedge ((x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0))\} \\ &\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge ((x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0))\} \\ &\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \wedge ((-2 \leq x \leq -1) \vee (1 \leq x \leq 2))\} \\ &\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \wedge ((-2 \leq y \leq -1) \vee (1 \leq y \leq 2))\}. \end{aligned}$$

Seja

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x > 0 \wedge y > 0\} \text{ e} \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x < 0 \wedge y < 0\}. \end{aligned}$$

Tendo em conta que $ad(A) \cap B = \emptyset$, $ad(B) \cap \mathrm{A} = \emptyset$ e $D = A \cup B$ o conjunto é união de dois conjuntos separados e portanto não é conexo. □

Grupo III

1 - Considere a função

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2} \\ &\boldsymbol{(x,y) \to y^3 + 3x^2 y - 3x^2 - 3y^2 + 2.} \end{aligned}$$

Determine os extremos locais de $\boldsymbol{f(x,y)}$.

Resposta: Em primeiro lugar calculamos

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 6xy - 6x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 3x^2 - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(y-1) = 0 \\ y^2 + x^2 = 2y. \end{cases}$$

Da primeira equação vem que $x = 0 \vee y = 1$. Substituindo $x = 0$ na segunda equação vem $y^2 = 2y \Leftrightarrow y = 0 \vee y = 2$; portanto $(0,0)$ e $(0,2)$ são pontos críticos.

Substituindo $y = 1$ na segunda equação vem $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Portanto $(1,1)$ e $(-1,1)$ são pontos críticos.

Tem-se que

$$\Delta_2 = Det \begin{bmatrix} 6y - 6 & 6x \\ 6x & 6y - 6 \end{bmatrix} = 36 Det \begin{bmatrix} y - 1 & x \\ x & y - 1 \end{bmatrix} = 36(y-1)^2 - 36x^2.$$

Como $\Delta_2(0,0) = 36 > 0$ e $\Delta_1(0,0) = -6 < 0$ o ponto crítico $(0,0)$ é maximizante.

Como $\Delta_2(0,2) = 36 > 0$ e $\Delta_1(0,2) = +6 < 0$ o ponto crítico $(0,2)$ é minimizante.

Como $\Delta_2(1,1) = -36 < 0$ o ponto crítico $(1,1)$ é ponto de sela.

Como $\Delta_2(-1,1) = -36 < 0$ o ponto crítico $(-1,1)$ é ponto de sela. □

2 — Mostre que a equação

$$\boldsymbol{2x^4 - y^4 + 8\,x\,\mathrm{sen}(z) = 1}$$

define y como função de x e de z numa vizinhança do ponto $P_0 = (1, 1, \pi)$. Calcule $\dfrac{\partial y}{\partial x}(1, \pi)$.

Resposta: Considere-se a função $f(x, y, z) = 2x^4 - y^4 + 8\,x\,\mathrm{sen}(z) - 1$.

Tem-se que $f(x, y, z)$ está definida em $\mathbb{R}^3$, que é aberto, e

1) $f(1, 1, \pi) = 2 - 1 + 8 \cdot 1 \cdot sen\pi - 1 = 0$,

2) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 + 8\,\mathrm{sen}(z)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -4y^3$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 8\,x\cos(z)$,

que são contínuas em $\mathbb{R}^3$,

3) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1, \pi) = -4y^3(\pi) = -4 \neq 0$.

Logo, por aplicação do teorema das funções implícitas, existe uma vizinhança de $(1, 1, \pi)$ onde a equação $2x^4 - y^4 + 8\,x\,\mathrm{sen}(z) - 1 = 0$ define implicitamente y como função de x e de z, isto é, $y = \phi(x, z)$. Tem-se também que

$$\frac{\partial y}{\partial x}(1, \pi) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1, \pi)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1, \pi)} = -\frac{(8x^3 + 8\,\mathrm{sen}(z))_{(1,1,\pi)}}{(-4y^3)_{(1,1,\pi)}} = -\frac{8}{-4} = 2. \qquad \square$$

Grupo IV

1 - Seja $f(x_1, \ldots, x_n)$ uma função real definida num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ e diferenciável no ponto $a \in D$. Seja $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ um vector de norma 1. Mostre que

$$\boldsymbol{f'_{\vec{u}}(a) = \nabla f(a) \cdot \vec{u}.}$$

Resposta: Tendo em conta que $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto a e que $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ é um vector de norma 1, tem-se, com $t \in \mathbb{R}$, que

$$\begin{aligned} f(a + t\vec{u}) - f(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,tu_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\,tu_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\,tu_n + \|t\vec{u}\|\,\epsilon(t\vec{u}) \\ &= t\Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)u_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n\Big) + |t|\,\underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1}\,\epsilon(t\vec{u}), \end{aligned}$$

com $\lim\limits_{t \to 0} \epsilon(t\vec{u}) = 0$. Vem então que

$$
\begin{aligned}
f'_{\vec{u}}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a+t\vec{u})-f(a)}{t} &= \lim_{t\to 0}\frac{t\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n\right)+|t|\,\epsilon(t\vec{u})}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1+\ldots.+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n\right)}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{|t|\,\epsilon(t\vec{u})}{t} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)u_1+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)u_n+\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}\,\epsilon(t\vec{u}).
\end{aligned}
$$

Tendo em conta que $\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}\,\epsilon(t\vec{u}) = \pm\lim_{t\to 0}\epsilon(t\vec{u}) = 0$, vem o resultado pretendido. □