Continuidade num ponto

Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}$. Diz-se que f é contínua em $A \in D$ se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir um número $\delta > 0$ tal que

$$X \in D \wedge \ \|X - A\| < \delta \Longrightarrow |f(X) - f(A)| < \varepsilon.$$

Observação

- *Se $A \in D$ for um ponto isolado de D, então f é contínua no ponto A.*
- *Se $A \in D$ for um ponto de acumulação, então f é contínua em A se e só se*

$$\lim_{X \to A} f(X) = f(A).$$

Continuidade num conjunto

Seja

$$D \subset \mathbb{R}^n$$

e

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

Diz-se que f é contínua no conjunto D se f for contínua em cada ponto $A \in D$.

Continuidade e operações algébricas

Teorema

Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$, $A \in D$ *e*

$$f, g : D \to \mathbb{R}.$$

Se f *e* g *forem contínuas em* A, *então*

- $f \pm g$ *é contínua em* A;
- $f \cdot g$ *é contínua em* A;
- f/g *é contínua em* A *desde que* $g(A) \neq 0$.

Prolongamento por continuidade

Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}$. Diz-se que f é prolongável por continuidade a um ponto

$$A \in D' \setminus D,$$

se existir uma função

$$g : D \cup \{A\} \to \mathbb{R}$$

tal que

- $$f(X) = g(X) \quad \text{para} \quad X \in D;$$
- g é contínua em A.

Então

$$g(X) = \begin{cases} f(X) & \text{se} \quad X \in D, \\ \lim\limits_{X \to A} f(X) & \text{se} \quad X = A. \end{cases}$$

Exemplo

Exemplo

Mostre que a função

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

é prolongável por continuidade ao ponto $(0,0)$.

Resolução:

Derivada de uma função de uma variável

Seja $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int}(D)$ e $f : D \to \mathbb{R}$. A derivada de f em a, definida por

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

fornece a informação muito importante sobre o comportamento de f numa vizinhança de a:

- a monotonia de f;
- a equação da reta tangente

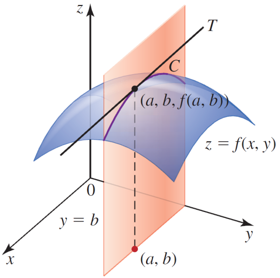
$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

- a aproximação à 1ª ordem:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a).$$

Derivadas parciais de uma função de duas variáveis

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, $(a, b) \in \text{int}(D)$ e $f : D \to \mathbb{R}$.



Vamos fixar $y = b$ e considerar a função

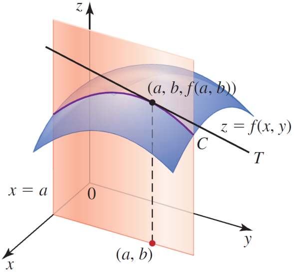
$$\varphi(x) = f(x, b)$$

Esta função pode ser derivada no sentido de $\mathbb{R}$:

$$\varphi'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(a+h) - \varphi(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

Derivadas parciais de uma função de duas variáveis

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, $(a,b) \in \operatorname{int}(D)$ e $f : D \to \mathbb{R}$.



Vamos fixar $x = a$ e considerar a função

$$\psi(y) = f(a,y)$$

Esta função pode ser derivada no sentido de $\mathbb{R}$:

$$\psi'(b) = \lim_{k\to 0} \frac{\psi(b+k) - \psi(b)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}.$$

Definição das derivadas parciais

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$, $(a, b) \in \operatorname{int}(D)$ e

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

Chama-se derivada parcial de f (de 1ª ordem)

- em ordem a x no ponto (a, b) ao limite

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

- em ordem a y no ponto (a, b) ao limite

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}.$$

Exemplo

Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem de

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no ponto $(0,0)$.

Resolução:

Derivadas parciais e continuidade

- Se $n = 1$ e existir $f'(a)$, então f é contínua em a.
- No caso $n = 2$, a existência das derivadas parciais de 1ª ordem num ponto A não garante a continuidade de f no ponto A.

Exemplo

A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é contínua em $(0,0)$, *mas*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Derivadas parciais de funções de n *variáveis*

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ e

$$A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{int}(D).$$

Chama-se derivada parcial de f em ordem a variável x_j, onde $j \in \{1, \ldots, n\}$, ao limite

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h}.$$

Derivada parcial da soma e do produto

Teorema

Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$, $A \in \operatorname{int}(D)$ *e* $f, g : D \to \mathbb{R}$. *Se existirem*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial x_j}(A)$$

para um $j \in \{1, \ldots, n\}$, *então existe*

(a) $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_j}(A)$ *e* $\dfrac{\partial(f+g)}{\partial x_j}(A) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(A) + \dfrac{\partial g}{\partial x_j}(A)$.

(b) $\dfrac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_j}(A)$ *e* $\dfrac{\partial(f \cdot g)}{\partial x_j}(A) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(A) \cdot g(A) + f(A) \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_j}(A)$.

Derivada parcial do quociente

Teorema

Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$, $A \in \text{int}(D)$ *e* $f, g : D \to \mathbb{R}$. *Se existirem*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial x_j}(A)$$

para um $j \in \{1, \ldots, n\}$ *e*

$$g(A) \neq 0,$$

então existe $\dfrac{\partial (f/g)}{\partial x_j}(A)$ *e*

$$\frac{\partial (f/g)}{\partial x_j}(A) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(A) \cdot g(A) - f(A) \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x_j}(A)}{[g(A)]^2}.$$

Derivadas parciais de 2ª ordem de uma função de duas variáveis

Definição e notação das derivadas parciais de 2ª ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$ (a derivada cruzada/mista)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$ (a derivada cruzada/mista)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Derivadas parciais de ordens superiores

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}$. Denotamos por

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_m} \ldots \partial x_{j_2} \partial x_{j_1}}$$

a função obtida derivando f n vezes

1º em ordem a x_{j_1};

2º em ordem a x_{j_2};

...

mº em ordem a x_{j_m}.

Equação da onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

c é uma constante que depende das características físicas da corda

Exemplo

Mostre que a função

$$u(x, t) = \sin(x - ct)$$

é uma solução da equação da onda unidimensional.

Resolução: