

CN A Exercicios

Felipe B. Pinto 61387 – MIEQB

13 de outubro de 2023

Conteúdo

I Exercicios	2	Questão 19	9
Questão 1	3	Questão 18	10
Questão 10	4	Questão 19	11
II Interpolação e Aproximação Polinomial	5	III Areas?	12
Questão 10	6	Questão 1	13
Questão 14	7	Exemplo 1	14
Questão 15	8	Questão 2	15

I – Exercícios

Questão 1

Considere os seguintes valores aproximados

Q1 c.

$$61.124(0.5)$$

Resposta

$$\begin{cases} \hat{X} = 61.124 \\ |\eta_X| = 0.5 \text{ E} - 3 \\ \text{Casas decimais significativas} = 3 \end{cases}$$

Q1 e.

$$206.1 \pm 0.02$$

Resposta

$$\begin{cases} \hat{X} = 206.1 \\ |\eta_X| = 0.02 \leq 0.5 \text{ E} - 2 \\ \text{Casas decimais significativas} = 2 \end{cases}$$

$$717.0$$

Resposta

$$\begin{cases} \hat{X} = 717.0 \\ |\eta_X| = 0.5 \text{ E} - 1 \\ \text{Casas decimais significativas} = 1 \end{cases}$$

Questão 10

question
body

II – Interpolação e Aproximação Polinomial

Questão 10

Considere-se uma função real de variável real, g , cujos valores se conhecem nos nodos $x_0 = -2$, $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$:

x	\parallel	-2	-1	1
<hr/>				
$g(x)$	\parallel	α	β	γ

Questão 14

Considere a função seccionalmente polinomial, $S(x)$, definida por:

$$\begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 0 \\ a x^3 + b x^2 + c x, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Onde a , b e c são constantes reais.

Diga, justificando, se $S(x)$ pode ser um spline cúbico.

Resposta

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} S(x) = 0^2 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = a 0^3 + b 0^2 + c 0 = 0;$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) &= a 1^3 + b 1^2 + c 1 = a + b + c = \lim_{x \rightarrow 1^+} S(x) = 2 - 1 = 1 \implies \\ &\implies a + b + c = 1; \end{aligned}$$

$$\frac{dS(x)}{dx} = \begin{cases} 2x, & -1 \leq x < 0 \\ 3ax^2 + 2bx + c, & 0 \leq x < 1 \\ -1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{dS(x)}{dx} = 2 * 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{dS(x)}{dx} = 3a 0^2 + 2b 0 + c = c \implies$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{dS(x)}{dx} &= 3a 1^2 + 2b 1 + c = 3a + 2b = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{dS(x)}{dx} = -1 \implies \\ &\implies 3a + 2b = -1; \end{aligned}$$

$$\frac{d^2S(x)}{dx^2} = \begin{cases} 2, & -1 \leq x < 0 \\ 6ax + 2b, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{d^2S(x)}{dx^2} = 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{d^2S(x)}{dx^2} = 6a 0 + 2b = 2b \implies b = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{d^2S(x)}{dx^2} = 6a 1 + 2b = 6a + 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{d^2S(x)}{dx^2} = 0 \implies a = -1/3$$

$$\therefore \begin{cases} a + b + c = 1 \\ c = 0 \\ b = 1 \\ 6a + 2b = 0 \implies 2 = 0 \end{cases} \implies S(x) \text{ não pode ser spline}$$

Questão 15

Considere a seguinte tabela de valores de uma função g

x	1	2	4	8
$g(x)$	-2	6	2	40

Determine a expressão do spline cúbico natural, $S(x)$, interpolador de $g(x)$ nos pontos tabelados.

Resposta

$$\left\{ \begin{array}{l} h_0 m_0 + 2(h_0 + h_1) m_1 + h_1 m_2 = 6 \left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \right) \\ h_1 m_1 + 2(h_1 + h_2) m_2 + h_2 m_3 = 6 \left(\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \right) \\ m_0 = m_3 = 0; \\ h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i \in [0, 2] \\ h_0 = 1, h_1 = 2, h_2 = 4 \\ y_0 = -2, y_1 = 6, y_2 = 2, y_3 = 40 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 2 * (1 + 2) m_1 + 2 m_2 = 6 \left(\frac{2 - 6}{2} - \frac{6 + 2}{1} \right) \\ 2 m_1 + 2(2 + 4) m_2 = 6 \left(\frac{40 - 2}{4} - \frac{2 - 6}{2} \right) \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 6 m_1 + 2 m_2 = -60 \\ 2 m_1 + 12 m_2 = 69 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 69 \end{bmatrix}$$

$$S_i(x) = -\frac{(x - x_{i+1})^3}{6 h_i} m_i + \frac{(x - x_i)^3}{6 h_i} m_{i+1} +$$

$$+ \left(f_i - \frac{h_i^2}{6} m_i \right) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + \left(f_{i+1} - \frac{h_i^2}{6} m_{i+1} \right) \frac{x - x_i}{h_i};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_0 m_0 + 2(h_0 + h_1) m_1 + h_1 m_2 = 6 \left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \right) \\ h_1 m_1 + 2(h_1 + h_2) m_2 + h_2 m_3 = 6 \left(\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \right) \end{array} \right\}$$

Questão 19

Considere a tabela de valores da função f

x_i	-3	0	2
$f(x_i)$	2	4	12

Q19 a.

Determine o polinómio de grau menor ou igual a 1 que melhor aproxima a função tabelada no sentido dos mínimos quadrados, no intervalo $[-3, 2]$

Resposta

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_0 \sum_{i=0}^2 1 + a_1 \sum_{i=0}^2 x_i = \sum_{i=0}^2 y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^2 x_i + a_1 \sum_{i=0}^2 x_i^2 = \sum_{i=0}^2 y_i x_i \end{cases} &= \begin{cases} a_0 (3) + a_1 (-1) = 18 \\ a_0 (-1) + a_1 (13) = 18 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 126/19 \\ a_1 = 36/19 \end{cases} &\Rightarrow \\ \Rightarrow p_1(x) = 126/19 + x 36/19 \end{aligned}$$

Q19 b.

Mostre que

$$\sum_{i=0}^2 (f(x_i) - (\gamma_1 x_i + \gamma_0))^2 \geq 200/19, \forall \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$$

Resposta

$$\sum_0^2 (f(x_i) - p_1(x_i))^2 = \dots$$

Q19 c.

Seja $p_2(x)$ o polinomio de grau menor ou igual a 2 interpolador de f nos pontos tabelados. Justifique que a aproximação quadrática que melhor aproxima o conjunto de pontos $\{(-3, 2), (0, 4), (2, 12), \}$, no sentido dos mínimos quadrados, é o polinómio p_2 .

Resposta

x	$f(x)$	$f[,]$	
-3	2	$\frac{4-2}{0-(-3)} = 2/3$	
0	4	$\frac{12-4}{2-0} = 4$	$\frac{4-2/3}{2-(-3)} = 2/3$
2	12		

$p_2(x) = 2 + (x + 3) 2/3 + (x + 3) (x - 0) 2/3$ é polinómio de 2 grau

Questão 18

A seguinte tabela representa a população da China (em milhares de milhões de habitantes) arredondada a 5 dígitos:

t	1990	2000	2010	2020
$P(t)$	1.1769,	1.2906,	1.3688,	1.4393,

Suponha que há uma relação linear entre a data t (em anos) e a população $P(t)$, isto é, que se verifica a relação $p_1(t) = \alpha t + \beta$, onde α e β são constantes reais ($\alpha \neq 0$). Com base nestes dados, utilize o método dos mínimos quadrados para obter uma estimativa da população chinesa em 2015.

Resposta

$$t \begin{cases} 0 : 1990, \\ 1 : 2000, \\ 2 : 2010, \\ 3 : 2020, \end{cases} ;$$

$$N C = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^3 t_i^0 & \sum_{i=0}^3 t_i^1 \\ \sum_{i=0}^3 t_i^1 & \sum_{i=0}^3 t_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8020 \\ 8020 & 16080600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} =$$

$$= B = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^3 P(t_i) \\ \sum_{i=0}^3 t_i P(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2756 \\ 10581.905 \end{bmatrix} ;$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha \approx 0.00865 \\ \beta \approx -16.0324 \end{cases} ;$$

$$p_1(2015) \approx 1.39735$$

Questão 19

Considere a tabela de valores da função f

x_i	-3	0	2
$f(x_i)$	2	4	12

Q19 a.

Determine o polinómio de grau menor ou igual a 1 que melhor aproxima a função tabelada, no sentido dos mínimos quadrados, no intervalo $[-3, 2]$.

Resposta

$p_i(x) = c_o + c_1 x;$

$$N C = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^2 x_i^0 & \sum_{i=0}^2 x_i^1 \\ \sum_{i=0}^2 x_i^1 & \sum_{i=0}^2 x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \end{bmatrix} =$$

$$= B = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^2 f(x_i) \\ \sum_{i=0}^2 x_i f(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 18 \end{bmatrix} \implies c \begin{cases} 0 : 126/19 \\ 1 : 36/19 \end{cases}$$

$$\therefore p_1(x) = 126/19 + x \, 36/19$$

Q19 b.

Mostre que

$$\sum_{i=0}^2 (f(x_i) - (\gamma_1 x_i + \gamma_0))^2 \geq 200/19, \quad \forall \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$$

Resposta

$p_1(x) \in \{\gamma_1 x + \gamma_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}\}; \quad p_1$ Minimiza o erro quadrático E^2

$$E^2 = \sum_{i=0}^2 (f(x_i) - p_i(x_i))^2 = \begin{pmatrix} (2 - 0.947 \, 368)^2 & + \\ +(4 - 6.631 \, 579)^2 & + \\ +(12 - 10.421 \, 053)^2 \end{pmatrix} \cong 10.526 \, 316$$

Q19 c.

Seja $p_2(x)$ o polinómio de grau menor ou igual a 2 interpolador de f nos pontos tabelados.

Justifique que a aproximação quadrática que melhor aproxima o conjunto de pontos $\{(-3, 2), (0, 4), (2, 12)\}$, no sentido dos mínimos quadrados, é o polinomio p_2

Resposta

x_i	$f(x_i)$	$f[.]$	$f[..]$
-3	2		
0	4	$2/3$	
2	12	4	$2/3$

III – Areas?

Questão 1

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} e^{\sin x} \, dx$$

Resposta

Q1 a.

Resposta

$$g(x) = e^{\sin(x)}; \hat{I} = h g((a+b)/2) = \frac{I}{3} g(\pi/3) = \pi/3 e^{\sin(\pi/3)} \approx 2.489652;$$

$$|\varepsilon| = \left| \frac{h^3}{24} g''(\gamma) \right| \leq \left| \frac{(\pi/3)^3}{24} e \right| \leq |0.0130068|, \gamma \in]\pi/6, \pi/2[;$$

$$g'(x) = \cos(x) e^{\sin x}$$

$$g''(x) = -\sin(x) e^{\sin x} + \cos^2(x) e^{\sin x} = e^{\sin x} (\cos^2(x) - \sin^2(x))$$

Q1 b.

Repita as regras mas para o ponto médio de Simpson

Exemplo 1

$$I = \int_1^2 \ln x \, dx$$

Resposta

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \frac{h}{3} (g(a) + 4g((a+b)/2) + g(b)) = \frac{\frac{b-a}{2}}{3} (g(a) + 4g((a+b)/2) + g(b)) = \\ &= \frac{\frac{2-1}{2}}{3} (g(1) + 4g((1+2)/2) + g(2)) = \frac{1}{6} (0 + 4(0.405465) + (0.693147)) \approx \\ &\approx 0.385835;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|E| &= \left| -\frac{h^2}{90} \frac{d^4 g(\gamma)}{dx^4} \right| = \left| -\frac{h^2}{90} \frac{d^4 \ln(\gamma)}{dx^4} \right| = \left| -\frac{h^2}{90} \frac{d^3 1/\gamma}{dx^3} \right| = \left| -\frac{h^2}{90} \frac{d^2 - 1/\gamma^2}{dx^2} \right| = \\ &= \left| -\frac{h^2}{90} \frac{d2/\gamma^3}{dx} \right| = \left| -\frac{h^2}{90} (-6/\gamma^4) \right| \leq \left| -\frac{1/4}{90} 6 \right| \leq 0.002084\end{aligned}$$

Questão 2

Considere o Integral

$$I = \int_{0.7}^{1.7} \pi^x dx$$

Q2 a.

Determina uma aproximação \hat{I} , de I utilizando a regra dos trapézios compostos com $h = 0.25$.
Obtenha um majorante do erro absoluto cometido no cálculo do valor aproximado \hat{I}

Nota: Nos cálculos intermédios utilize 6 casas decimais, devidamente arredondadas.

Resposta

$$h = \frac{b-a}{2n} \implies n = \frac{b-a}{2h} = \frac{1}{2 * 0.25} = 2 \implies$$

$$\begin{aligned} \implies I_{S,2} &= \frac{h}{3} (f_{(x_0)} + 4(f_{(x_1)} + f_{(x_3)}) + 2f_{(x_2)} + f_{(x_4)}) = \\ &= \frac{0.25}{3} (\pi^{0.7} + 4(\pi^{.95} + \pi^{1.45}) + 2\pi^{1.2} + \pi^{1.7}) \implies \end{aligned}$$

$$\implies |I - I_{S,2}| \leq n \frac{h^5}{90} M_4 = 2 \frac{0.25^5}{90} * 12.021728 \cong 260.89 \text{ E}-6$$

Q2 b.

Repita a alínea anterior para a regra de Simpson.

Q2 c.

Quantos subintervalos teria que considerar se pretendesse calcular um valor aproximado de I com um erro inferior a 10^{-6} usando

(i) A regra do ponto médio

(ii) A regra dos trapézios.

(iii) A regra de Simpson.