ANÁLISE MATEMÁTICA III-C

João de Deus Marques

13 de Novembro de 2023

Definição e generalidades

O assunto que irá ser tratado neste capítulo teve origem num problema colocado há cerca de 2400 anos, quando o filósofo grego Zenão de Eleia (495-435 A.C.) deu início a uma crise na matemática da época ao apresentar um conjunto de paradoxos habilmente formulados. Um destes paradoxos, talvez o mais vezes referido, pode ser formulado na seguinte forma:
Imaginemos um corredor deslocando-se retilineamente e com velocidade constante, de um ponto P_0 para um ponto P. Designemos por P_1 o ponto médio do segmento P_0P, por P_2 o ponto médio do segmento P_1P e genericamente P_{n+1} o ponto médio do segmento P_nP.

Suponhamos que o corredor gasta o tempo T a percorrer a distância que vai de P_0 a P_1. Então gastará $T/2$ a percorrer a distância entre P_1 e P_2, $T/4 = T/2^2$ a percorrer a distância entre P_2 e P_3 ... e $T/2^n$ a percorrer a distância entre P_n e P_{n+1}. O tempo total necessário para percorrer todo o percurso seria a "soma" da infinidade de parcelas

$$T, \ \frac{T}{2}, \ \frac{T}{2^2}, \ \dots, \frac{T}{2^n}, \ \dots$$

isto é

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{2^2} + \dots + \frac{T}{2^n} + \dots \quad .$$

A partir desta constatação, Zenão julgou poder concluir que o tempo total necessário para percorrer o percurso era infinito e consequentemente o corredor nunca atingiria o ponto P. Ora, esta constatação estava em evidente contradição com a evidência de que o percurso seria percorrido no intervalo de tempo $2T$. Concluiu então ter chegado a um paradoxo.
O raciocínio efetuado sugere, como razoável, que se atribua à soma anterior o valor $2T$ ou seja

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{2^2} + \ldots + \frac{T}{2^n} + \ldots = 2T \quad .$$

A teoria das séries, desenvolvida mais de 2000 anos depois, vai dizer-nos como dar sentido à igualdade anterior.

O procedimento é o seguinte: começa-se por somar um número finito de parcelas, por exemplo as n primeiras, e representa-se essa soma por s_n. A esta soma chama-se a soma parcial de ordem n da série.
No passo seguinte analisa-se o comportamento desta soma quando n tende para infinito, isto é, averigua-se se a sucessão s_n converge para um valor finito quando o n converge para infinito. Em caso afirmativo, parece aceitável definir como soma de todas as parcelas o valor do limite da sucessão s_n.
No caso considerado tem-se que

$$s_n = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{2^2} + \ldots + \frac{T}{2^{n-1}}.$$

Ora, para cada $n \in \mathbb{N}$, s_n trata-se da soma dos n primeiros termos da progressão geométrica cujo primeiro termo é T e de razão $\frac{1}{2}$, pelo que

$$s_n = T\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2T(1-(\frac{1}{2})^n).$$

A sucessão $(\frac{1}{2})^n$ converge para zero quando n tende para infinito e portanto, tal como era de prever, s_n converge par $2T$. Esta interpretação de soma de um número infinito de parcelas, invalida a assunção de que uma soma deste tipo seja necessariamente infinita.

Iremos agora proceder a uma aparentemente pequena, mas substancialmente importante alteração ao paradoxo do corredor, a qual proporciona um considerável suporte ao ponto de vista de Zenão.

Admitamos que a velocidade do corredor não é constante e que vai diminuindo gradualmente ao longo do percurso. Mais precisamente, suponhamos que o corredor gasta o tempo T a percorrer a distância que vai de P_0 a P_1, gasta $T/2$ a percorrer a distância entre P_1 e P_2, $T/3$ a percorrer a distância entre P_2 e P_3 ... e em geral gasta T/n a percorrer a distância entre P_{n-1} e P_n.

O "tempo total" gasto a percorrer a totalidade do percurso será a soma infinita

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{3} + \dots + \frac{T}{n} + \dots \quad .$$

Neste caso a nossa intuição não sugere qualquer valor óbvio para atribuir a esta soma. Procedamos como no caso anterior, introduzindo as somas parciais s_n, que neste caso são

$$s_n = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{3} + \dots + \frac{T}{n} \quad .$$

Estas somas parciais não são fáceis de estudar como as anteriores, uma vez que não existe uma fórmula simples que as permita simplificar.

A fim de mostrar que a soma

$$T + \frac{T}{2} + \frac{T}{3} + \ldots + \frac{T}{n} + \ldots \quad ,$$

não é finita, iremos utilizar a desigualdade

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \geq \log(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esta desigualdade pode, por exemplo, ser provada recorrendo ao método de indução matemática. (sugestão: Mostrar que a função $f(x) = \log(\frac{x+2}{x+1}) - \frac{1}{x+1}$ definida no intervalo $[1, +\infty[$ é sempre negativa).

Multiplicando por T ambos os termos da desigualdade anterior obtém-se

$$s_n = T + \frac{T}{2} + \frac{T}{3} + \ldots + \frac{T}{n} \geq T \log(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\log(n+1)$ cresce arbitrariamente quando n tende para infinito, neste caso teremos que concordar com Zenão e concluir que o corredor não pode concluir o percurso num intervalo de tempo finito.

Na teoria das séries faz-se uma distinção clara entre as séries do primeiro tipo em que a soma s_n converge para um limite finito e as do segundo tipo cuja soma não converge para qualquer valor finito.

Com o objectivo de começar a clarificar os conceitos envolvidos na teoria das séries, cosidere-se a seguinte definição.

Definição

Seja (a_n) uma sucessão de números reais. Chama-se *série* ou *sucessão das somas parciais* associada à sucessão (a_n) à sucessão (S_n) definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\ldots \\
S_n &= a_1 + a_2 + ... + a_n. \\
&\ldots
\end{aligned}$$

A $a_1, a_2, a_3, \ldots$ chamam-se termos da série e a a_n o seu termo geral.

Para designar a série usa-se uma das deguintes notações:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad \sum a_n, \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \, .$$

Trata-se de um abuso de linguagem, uma vez que, estamos a identificar a série com a "soma" $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$. No entanto este abuso de linguagem é corrente e é utilizado por todos os livros sobre o assunto.

Definição

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se *convergente* se existir e for finito o limite da sucessão das somas parciais S_n e, neste caso, ao valor do limite chama-se *soma* da série. Se o limite da sucessão das somas parciais S_n não existir ou for infinito a série diz-se *divergente*.

Exemplo

Suponhamos que (a_n) *é uma progressão geométrica de razão* $r \neq 1$*, isto é, a sucessão*

$$a_1, \; a_2 = a_1 r, \; a_3 = a_1 r^2, \; \ldots, \; a_n = a_1 r^{n-1}, \; \ldots \, .$$

À série associada

$$S_1 = a_1, \; S_2 = a_1(1+r), \; \ldots, \; S_n = a_1(1 + r + \ldots + r^{n-1}), \; \ldots$$

chama-se série geométrica e tem-se que

$$S_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}.$$

Exemplo (continuação)

É um facto conhecido que a sucessão r^n *converge se e só se* $|r| < 1$, *e que neste caso tem por limite zero. Pode então concluir-se que, a série geométrica converge se e só se a razão da progressão geométrica que lhe está associada for inferior a* 1. *Supondo que* $|r| < 1$, *tem-se que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}.$$

Exemplo

Considere-se a dízima infinita periódica $0,33333\ldots$. *Relativamente a esta dízima considere-se a sucessão*

$$a_1 = 0,3 = \frac{3}{10}$$

$$a_2 = 0,03 = \frac{3}{10^2}$$

$$a_3 = 0,003 = \frac{3}{10^3}$$

$$\ldots$$

$$a_n = 0,003 = \frac{3}{10^n}$$

$$\ldots$$

e a série associada

Exemplo (continuação)

$$S_1 = a_1 = 0,3 = \frac{3}{10}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 0,33 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0,333 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3}$$

$$\dots$$

$$S_n = a_1 + ... + a_n = 0,333...3 = \frac{3}{10} + ... + \frac{3}{10^n}$$

$$\dots$$

A sucessão (a_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{10}$, pelo que

$$0,33333... = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}.$$

As séries geométricas são um exemplo em que, não só é fácil estudar a convergência, como é mesmo possível em caso de convergência determinar a sua soma. Em geral tal não é possível, no entanto, existem para além das séries geométricas outras séries para as quais também é possível determinar a sua soma em caso de convergência. O exemplo que se segue é um destes casos.

Exemplo

Considere-se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+2)}$. *Esta série pode ser escrita na forma*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right).$$

Exemplo (continuação)

Determinemos os primeiros n termos da sucessão das suas somas parciais. Tem-se que

$$S_1 = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$$

$$\cdots$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Exemplo (continuação)

Tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{2},$$

pelo que a série considerada não só é convergente como tem por soma $\frac{3}{2}$.

A série que acabamos de estudar tinha a particularidade de o seu termo geral a_n se poder escrever na forma

$$a_n = \alpha_n - \alpha_{n+2}.$$

Genericamente, uma série em que o seu termo geral a_n se possa escrever na forma

$$a_n = \alpha_n - \alpha_{n+k}, \ \ k \in \mathbb{N},$$

chama-se uma série *redutível*, *telescópica* ou de *Mengoli*.

Dada uma série redutível, isto é, uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+k})$$

e sendo $n > k$ tem-se que

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} (\alpha_p - \alpha_{p+k}) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k - (\alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+k}),$$

pelo que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k - \lim_{n\to\infty} (\alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+k}).$$

A última igualdade permite concluir que a série converge se e só se convergir a sucessão

$$b_n = \alpha_{n+1} + ... + \alpha_{n+k}.$$

Se, por exemplo, a sucessão (α_n) convergir e tiver por limite o valor α, então a sucessão (b_n) também converge e terá por limite $k\alpha$. Neste caso a série redutível também é convergente e terá por soma

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha_1 + ... + \alpha_k - k\alpha.$$

Proposição

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *for convergente então a sucessão* (a_n) *converge para zero.*

Demonstração:

Por hipótese a sucessão $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *é convergente, o mesmo sucede à sucessão* $S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ $(n \geq 2)$ *e tem-se além disso que* $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$. *Como*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0,$$

tem-se o resultado pretendido.

É importante notar que esta proposição dá uma condição necessária mas não suficiente para que uma série convirja. Dada uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se a sucessão (a_n) não convergir para zero então a série é divergente mas se a sucessão (a_n) convergir para zero nada se pode concluir quanto à convergência da série.

Exemplo

As séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+3}{5n-2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ *são divergentes uma vez que os seus termos gerais não convergem para zero.*

Exemplo (Continuação)

Já a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *apesar do seu termo geral convergir para zero também é divergente. Com efeito, tem-se que*

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Como $\sqrt{n}$ *converge para infinito o mesmo sucede a* S_n *e portanto a série é divergente.*

Proposição

A natureza de uma série mantém-se se lhe alterarmos um número finito de termos.

Esta última proposição permite, por exemplo, afirmar que se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são duas séries tais que existe uma ordem p a partir da qual $a_n = b_n$ então as duas séries são da mesma natureza.

Proposição

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *duas séries convergentes de somas* a *e* b *respetivamente e seja* $k \in \mathbb{R}$. *Então*

1. *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$, *a que se chama série soma das séries* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *também é convergente e tem por soma* $a + b$.
2. *A série* $\sum_{n=1}^{+\infty} (k\ a_n)$ *é convergemte e tem por soma* $k\ a$.

Demonstração:

É uma consequência imediata das propriedades dos limites das sucessões.

Séries alternadas

Definição

Uma série diz-se *alternada* se os seus termos forem alternadamente positivos e negativos. Supondo que o seu primeiro termo é negativo uma série alternada pode escrever-se na forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n, \quad a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proposição (Critério de Leibniz)

Se a_n *for uma sucessão decrescente de termos positivos e de limite zero, então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ *é convergente. Supondo a série convergente de soma* S *e sendo* S_n *a sucessão das suas somas parciais, tem-se que* $|S - S_n| \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Exemplo

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, *conhecida como série harmónica alternada é convergente uma vez que a sucessão* $a_n = \frac{1}{n}$ *é de termos positivos, monótona decrescente e de limite zero.*
A série harmónica alternada faz parte de uma família de séries designadas por "séries de Dirichlet alternadas"e que têm a forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Estudemos a convergência desta família considerando os vários valores de α

.

Exemplo (Continuação)

Se $\alpha = 0$ *o termo geral da série é* $(-1)^n$ *que não tem limite pelo que a série é divergente. Se* $\alpha < 0$ *o seu termo geral é* $(-1)^n n^{-\alpha}$, $-\alpha > 0$ *que converge para infinito e portanto a série também é divergente. Se* $\alpha > 0$ *o seu termo geral é* $(-1)^n a_n$, *com* $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. *A sucessão* a_n *é uma sucessão decrescente de termos positivos e de limite zero, pelo que a série é convergente. Ao todo viu-se que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \begin{cases} \textit{Diverge}, & \textit{se} \quad \alpha \leq 0 \\ \textit{Converge}, & \textit{se} \quad \alpha > 0 \end{cases},$$

Convergência absoluta

Definição

Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se *absolutamente convergente* se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ for convergente. Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se *simplesmente convergente* se for convergente mas for divergente a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Exemplo

A série harmónica alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, *é simplesmente convergente.*

Proposição

Toda a série absolutamente convergente é convergente.

A recíproca desta proposição, tal como foi observado no último exemplo, não é verdadeira.

Séries de termos não negativos

Iremos em seguida estabelecer alguns critérios de convergência para séries de termos não negativos. Tem-se, como é óbvio, que uma séries de termos não negativos é convergente se e só se for absolutamente convergente. Os resultados que iremos estabelecer mantêm-se obviamente verdadeiros para séries cujos termos sejam não negativos somente a partir de certa ordem. Observe-se ainda que uma série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ de termos não positivos se reduz ao estudo de uma séries de termos não negativos uma vez que se tem a igualdade $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{+\infty}(-a_n)$.

Proposição

Uma séries de termos não negativos é convergente se e só se a sucessão das suas somas parciais é limitada.

Proposição (Critério da Comparação)

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *duas séries de termos não negativos tais que*

$$\exists p \in \mathbb{N} \ : \ a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq p.$$

1. *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *for convergente então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *também é convergente.*
2. *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *for divergente então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *também é divergente.*

Exemplo

1. Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. *Tem-se que*

$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ora a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ *é uma série geométrica de razão* $r = \frac{1}{2}$, *e portanto convergente. Segue-se pela proposição anterior que a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ *também é convergente.*

Exemplo (Continuação)

2. Considere-se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$. *Tem-se que*

$$0 \leq \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \geq 2.$$

Uma vez mais pela proposição anterior, a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ *é uma consequência da convergência da série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

Exemplo (Continuação)

3. Considere-se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. *Tem-se que*

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ora a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente. Segue-se pela proposição anterior que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *também é divergente.*

Corolário

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *duas séries tais que* $a_n \geq 0$ *e* $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k, \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

Então as séries são da mesma natureza.

Nas condições do último corolário se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,$$

então a partir de certa ordem ter-se-á necessariamente que $a_n < b_n$, pelo que a convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ permite concluir a convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e a divergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ permite concluir a divergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Analogamente se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty,$$

então a partir de certa ordem ter-se-á necessariamente que $a_n > b_n$, pelo que a convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ permite concluir a convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ e a divergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ permite concluir a divergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exemplo

1. Estude-se a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. *Já foi visto anteriormente que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+2)}$ *é convergente. Tem-se que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{2n^2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+,$$

pelo que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *também é convergente.*

Exemplo (Continuação)

2. Estude-se a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$. *Já foi visto anteriormente que a série harmónica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente. Tem-se que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n+\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

pelo que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ *também é divergente.*

Exemplo (Continuação)

3. Estude-se a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3}$*. Compare-se com a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$*. Para isso calcule-se o limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{\log n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n} = +\infty.$$

A convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *permite concluir a convergência de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3}$.

Corolário

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *duas séries tais que* $a_n > 0$ *e* $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *e existe uma ordem p a partir da qual*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Então

1. *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *for convergente então* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *também é convergente.*
2. *Se* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *for divergente então* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *também é divergente.*

Exemplo

Estude-se a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 2n}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}$.

Compare-se com a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *utilizando o último corolário.*

Façamos $a_n = \dfrac{1}{n}$ *e* $b_n = \dfrac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 2n}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}$. *Tem-se que*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2n+2}{2n+1}.$$

A divergência da série harmónica permite concluir a divergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 2n}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}$.

Proposição (Critério da razão)

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série de termos não negativos.*

1. *Suponhamos que existe um número positivo* $r < 1$ *tal que a partir de certa ordem* p *se tem que* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$. *Então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*
2. *Suponhamos que a partir de certa ordem* p *se tem que* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. *Então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

Corolário (Critério de D'Alembert)

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série de termos positivos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

Então:

1. *Se* $a < 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *converge.*
2. *Se* $a > 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *diverge.*

Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

em geral nada se pode concluir. Existem séries quer divergentes quer convergentes em que o limite considerado é igual a 1, como é, por exemplo, o caso das séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

No entanto se o limite for 1 mas por valores superiores a 1, pelo menos a partir de certa ordem, a demonstração do critério de D'Alembert ainda permite concluir que a série é divergente.

Exemplo

Estude-se a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k^n n!}{n^n}$ *em que* k *é uma constante real positiva. Tem-se que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{k^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{k^n n!}{n^n}} = k \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{k}{e},$$

o que permite concluir que se $k < e$ *a série converge e se* $k > e$ *a série diverge.*

Suponhamos que $k = e$*. A sucessão e* $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ *é monótona decrescente de limite* 1 *pelo que converge para* 1 *por valores superiores a* 1*. A observação feita a seguir ao critério de D'Alembert permite concluir que neste caso, isto é quando* $k = e$*, a série também é divergente.*

Proposição (Critério da raíz)

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série de termos não negativos.*

1. *Se existir um número positivo* $r < 1$ *tal que a partir de certa ordem se tem que* $\sqrt[n]{a_n} \leq r$, *então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*
2. *Se existir uma subsucessão* (a_{k_n}) *de* (a_n) *tal que a partir de certa ordem se tem que* $\sqrt[k_n]{a_{k_n}} \geq 1$, *então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

Corolário

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *uma série de termos não negativos e suponhamos que existe* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$. *Então:*

1. *Se* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} < 1$ *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é convergente.*
2. *Se* $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$ *a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *é divergente.*

Exemplo

1. Estude-se a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. *Tem-se que*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=e>1,$$

pelo que a série diverge.

2. Estude-se a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{n}{4n+1}\right)^{n}$. *Tem-se que*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{2}+(-1)^n\frac{n}{4n+1}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{4n+1}\right)=\frac{3}{4}<1,$$

pelo que a série converge.

Critério do integral

Proposição (Critério do integral)

Seja $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *uma função contínua, positiva e decrescente. Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *seja* $a_n = f(n)$.

Nessas condições a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *e o integral impróprio* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *têm a mesma natureza.*

Exemplo

Estude-se a convergência das séries de Dirichlet, isto é, da família de séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Se $\alpha = 0$*, o termo geral não converge para zero pelo que a série diverge.*
Suponhamos que $\alpha < 0$*. Nestas condições,* $a_n = n^{-\alpha}$, $(-\alpha > 0)$ *pelo que* $a_n \rightarrow +\infty$ *pelo que a série também diverge.*

Suponhamos agora que $\alpha > 0$*. Considere-se a função* $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$*, definida em* $[1, +\infty[$*.*
Trata-se de uma função contínua e positiva cuja derivada $f'(x) = -\dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$ *é negativa e portanto* $f(x)$ *é decrescente.*

Exemplo (Continuação)

O critério do integral, permite afirmar, que para estes valores de α, *a série* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *e o integral* $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ *têm a mesma natureza.*

Estudemos então, para valores de $\alpha > 0$, *a convergência do integral impróprio*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx.$$

Comecemos por considerar o caso $\alpha = 1$. *Tem-se que*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{k \to +\infty} \int_1^{k} \frac{1}{x} dx = \lim_{k \to +\infty} [\log x]_1^k = \lim_{k \to +\infty} \log\ k = +\infty$$

e portanto (tal como já se sabia) a série harmónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge.*

Exemplo (Continuação)

Se $\alpha \neq 1$ $(\alpha > 0)$ *vem que*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{k \to +\infty} \int_1^k x^{-\alpha} dx = \lim_{k \to +\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^k$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{k^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right) = \begin{cases} +\infty, & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

pelo que para valores de $\alpha > 0$ *série converge se e só se* $\alpha > 1$.

Em conclusão, as séries de Dirichlet convergem se e só se $\alpha > 1$.

Exemplo

Determine-se a natureza da família de série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log \ n}{n^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Comecemos por supor $\alpha \leq 0$. *Para estes valores de* α *tem-se que* $a_n = \dfrac{\log \ n}{n^{\alpha}} \to +\infty$ *pelo que as séries divergem.*

Suponhamos agora que $\alpha > 0$. *A função* $f(x) = \dfrac{\log \ x}{x^{\alpha}}$, *é positiva e contínua para valores de* x *superiores a* 1, *além disso*

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\log x \cdot x^{-\alpha})' = \frac{1}{x} x^{-\alpha} - \alpha x^{-\alpha-1} \log x \\ &= x^{-\alpha-1} - \alpha x^{-\alpha-1} \log x = x^{-\alpha-1}(1 - \alpha \log x). \end{aligned}$$

Exemplo (Continuação)

Tem-se que

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < \alpha \log x \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{\alpha}},$$

pelo que, a função $f(x)$ *é decrescente se* $x > e^{\frac{1}{\alpha}}$, $(e^{\frac{1}{\alpha}} > 1)$.

Para cada $\alpha > 0$ *estudemos, no intervalo* $[a, +\infty[$ $(a > e^{\frac{1}{\alpha}})$, *a convergência do integral*

$$\int_a^{+\infty} \frac{\log\ x}{x^\alpha} dx.$$

Exemplo (Continuação)

Comecemos por considerar o caso $\alpha = 1$. *Tem-se que*

$$\int_a^{+\infty} \frac{\log x}{x} dx = \lim_{k\to+\infty} \int_a^k \frac{\log x}{x} dx = \lim_{k\to+\infty} \left[\frac{(\log x)^2}{2}\right]_a^k$$
$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{k\to+\infty} (\log k)^2 - (\log a)^2\right) = +\infty,$$

isto é, o integral diverge e portanto $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ *também diverge.*

Continuando a supor que $\alpha > 0$, *seja agora* $\alpha \neq 1$. *Primitivando por partes a função* $f(x) = \log x \cdot x^{-\alpha}$, *vem que*

$$P\left(\log x \cdot x^{-\alpha}\right) = \log x \cdot \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) - P\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$$

$$= \log x \cdot \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) - \frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^2}$$

Exemplo (Continuação)

e, portanto,

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} dx &= \lim_{k\to+\infty} \int_a^k \frac{\log x}{x^\alpha} dx \\ &= \lim_{k\to+\infty} \left[\log x \left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) - \frac{x^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^2}\right]_a^k \\ &= \lim_{k\to+\infty} \frac{k^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(\log k - \frac{1}{1-\alpha}\right) \\ &- \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(\log a - \frac{1}{1-\alpha}\right).\end{aligned}$$

Se $0 < \alpha < 1$ *o limite anterior é* $+\infty$, *pelo que o integral diverge e a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\alpha}$ *também diverge.*

Exemplo (Continuação)

Se $\alpha > 1$ *estude-se o limite*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(\log k - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \lim_{k\to+\infty} \frac{\log k \cdot k^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \lim_{k\to+\infty} \frac{k^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^2}.$$

Por um lado tem-se

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k^{1-\alpha}}{(1-\alpha)^2} = 0;$$

por outro

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\log k}{k^{\alpha-1}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{k}}{(\alpha-1)k^{\alpha-2}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)k^{\alpha-1}} = 0.$$

Exemplo (Continuação)

Então

$$\int_a^{+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} dx = \log a \cdot \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1} + \frac{a^{1-\alpha}}{(\alpha-1)^2}.$$

Como o integral converge o mesmo se passa com a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\alpha}$.

Em conclusão: as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\alpha}$ *convergem se e só se* $\alpha > 1$.

Exemplo

Determine-se a natureza da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}.$$

Comparemos a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ *com o integral impróprio*

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx.$$

A função $f(x)$ *é contínua, positiva e decrescente no intervalo* $[2, +\infty[$*, pelo que*

Exemplo (Continuação)

o integral $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}dx$ *e a série* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}$ *têm a mesma natureza.*
Ora

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}dx = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{-1}{\log x}\right]_2^k = \lim_{k\to\infty}\frac{-1}{\log k} + \frac{1}{\log 2} = \frac{1}{\log 2}$$

é convergente e portanto a série também é convergente.

Proposição (Critério de Raabe)

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *uma série de termos positivos. Se existir*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = a \in \overline{\mathbb{R}},$$

então

1. *se* $a < 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge,*
2. *se* $a > 1$, *a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Exemplo

Consideremos a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \frac{1}{n}.$$

Aplicando o critério de d'Alembert vem que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n+2)} = 1^-,$$

pelo que nada se pode concluir.

Exemplo (Continuação)

Aplicando o critério de Raabe vem que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{(2n+2)(n+1)}{n(2n+1)}-1\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{2n^2+4n+2-2n^2-n}{n(2n+1)}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+2}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1,
\end{aligned}$$

o que permite concluir que a série é convergente.

Multiplicação de séries

Definição

Chama-se produto de Cauchy de duas séries convergentes

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

à série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}\right) = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \cdots$$

Observação: se o índice de soma começar em zero, isto é, se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ a expressão do produto das séries é dado por

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right).$$

Teorema

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ são duas séries absolutamente convergentes de somas A e B, respectivamente, então o seu produto de Cauchy é absolutamente convergente e tem soma $A \times B$.

Observação. O produto de duas séries simplesmente convergentes pode ser uma série divergente.

Exemplo

Considere-se a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}.$

Comecemos por estudar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x^n}{n!}\right|$*. Seja* $x \in \mathbb{R}$*, arbitrário. Pelo critério de d'Alembert tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\,|x^{n+1}|}{(n+1)!\,|x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

e a série inicial converge absolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplo (Continuação)

Faça-se o produto de Cauchy de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ *com* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$

Tem-se que

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\Big)\cdot\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot x^k y^{n-k}\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Exemplo (Continuação)

É um facto conhecido que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \; e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$$

pelo que, acabou de se provar a conhecida propriedade

$$e^x \cdot e^y = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}.$$

Exemplo

A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ *é simplesmente convergente. Façamos o produto desta série por si própria, isto é,*

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}\Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \Big((-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}\Big).$$

Exemplo

Seja $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}}$. *Como se tem que*

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1$$

vem que $(-1)^n a_n$ *não converge para* 0*, o que implica que a série é divergente.*

Definição

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções, $f_n(x) : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diz-se que f_n converge num ponto $a \in D$ se a sucessão numérica $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ for convergente.

Se a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge em todos os pontos de D, pode definir-se uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), x \in D.$$

A função $f(x)$ diz-se o limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em D e diz-se que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para f em D.

Exemplo

1 - A sucessão de funções

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, x \in [0, 1]$$

converge para e^x, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2 - A sucessão de funções

$$f_n(x) = x^n, x \in [0, 1]$$

converge para

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ 0 \leq x < 1 \\ 1, & se\ x = 1. \end{cases}$$

Note-se que, neste exemplo, as funções $f_n(x)$ *são contínuas,* $\forall n \in \mathbb{N}$, *mas* $f(x)$ *é descontínua.*

Convergência uniforme

Definição

Diz-se que a sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f em D se

$$\forall\delta > 0\, \exists\, p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow (\forall x \in D, |f_n(x) - f(x)| < \delta)$$

ou equivalentemente

$$\forall\delta > \ 0\, \exists\, p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow (\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)| < \delta),$$

isto é,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in D}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0.$$

A convergência uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em D é mais forte do que a convergência pontual em D, uma vez que se exige que, fixado $\delta > 0$ arbitrariamente, a ordem p a partir da qual se tem $|f_n(x) - f(x)| < \delta$ seja a mesma para todo o $x \in D$.

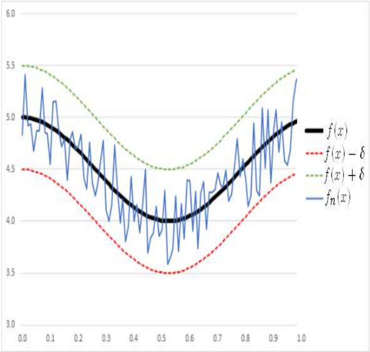

Figura: Convergência uniforme

Exemplo

1 - Considere-se a sucessão de funções

$$f_n(x) = x + \frac{x}{n}, x \in [0, 1].$$

É imediato que $f_n(x)$ *converge uniformemente para* $f(x) = x$, *com* $x \in [0, 1]$. *Com efeito*

$$sup_{x \in D}\left|x + \frac{x}{n} - x\right| = sup_{x \in D}\left|\frac{x}{n}\right| = \frac{1}{n} \to 0 \ \ (quando\ n \to \infty).$$

Exemplo

2 - A sucessão de funções, $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$ *que já sabemos convergir pontualmente para*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ 0 \leq x < 1 \\ 1, & se\ x = 1. \end{cases}$$

não converge uniformemente para $f(x)$. *Com efeito*

$$sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| = sup_{x\in[0,1[}\{|x^n|, 0\} = sup_{x\in[0,1[}|x^n| = 1,$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ *e portanto*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)|\right) = 1 \neq 0.$$

Teorema

Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções contínuas em D, que converge uniformemente para f em D, então f é contínua em D.

Convergência pontual e convergência uniforme de séries de funções

Definição

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções, $f_n(x) : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Chama-se *série de funções* à sucessão de funções (S_n) definida por

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x), \; \forall x \in X$$

(sucessão das somas parciais).

Também se representa a série por $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Definição

Diz-se que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge no ponto $a \in B$ se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(a)$ for convergente.

Se a série for convergente em todos os pontos de $D \subset B$, fica definida uma função $f(x) : D \subset B \to \mathbb{R}$, que a cada ponto $x \in D$, faz corresponder a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

À função $f(x)$ chama-se *função soma* da série e diz-se que a série *converge pontualmente* para f em D.

Exemplo

Consideremos a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{1+x^2}\Big)^n .$$

Se $x = 0$, a série converge para zero.

Se $x \neq 0$, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{1+x^2}\Big)^n$ é, para cada x, uma série geométrica de razão $\displaystyle r = \frac{1}{1+x^2} < 1$, logo convergente, e cuja soma é:

$$x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{1+x^2}\Big)^n = \frac{x^2}{1+x^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} \right) = 1.$$

Exemplo (Continuação)

Pelo que, a série tem por soma, isto é, converge pontualmente para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ x = 0 \\ 1, & se\ x \neq 0. \end{cases}$$

Definição

Considere-se a sucessão de funções (f_n) definidas em $D \subset \mathbb{R}$ e suponhamos que existe o limite pontual em D da série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Designando por f a função limite pontual, diz-se que a série de funções *converge uniformemente* para f em D se a sucessão das somas parciais (S_n) convergir uniformemente para f em D, isto é

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow (\forall x \in D, |f(x) - S_n(x)| < \delta),$$

ou, equivalentemente,

$$\forall \delta > 0 \ \exists p \in \mathbb{N} : n > p \Rightarrow \sup_{x \in D} (|f(x) - S_n(x)|) < \delta,$$

isto é, se

$$\lim_{n \to \infty} (\sup_{x \in D} |f(x) - S_n(x)|) = 0.$$

Exemplo

Já foi visto que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ *converge pontualmente para a função*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Estude-se a série considerada quanto à convergência uniforme.

Tem-se que

$$S_n(x) = \frac{x^2}{1+x^2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n}{1-\frac{1}{1+x^2}}\right) = 1 - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n,$$

Exemplo (Continuação)

pelo que

$$sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|f(x) - S_n(x)\Big|$$
$$= sup_{x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\left\{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n, 0\right\} = 1.$$

Então

$$\lim_{n\to\infty}\left(sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x) - S_n(x)|\right) = 1 \neq 0,$$

o que permite concluir que a série não converge uniformemente para $f(x)$ *em* $\mathbb{R}$.

Teorema (Weierstrass)

Se existir uma série numérica convergente, de termos positivos, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *tal que, para todo o* $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| \leq a_n, \ \forall x \in D,$$

então a série $\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$ *é uniformemente convergente em* D.

Exemplo

Considere-se a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}.$$

Tendo em conta que

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

e que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *é convergente, o teorema de Weierstrasse permite concluir que série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ *é uniformemente convergente em* $\mathbb{R}$.

Teorema

Se as funções $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *são contínuas em* D *e a série* $\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente para* $f(x)$ *em* D, *então* $f(x)$ *é contínua em* D.

Exemplo

Já provámos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ *converge pontualmente para a função*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

As funções $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $n \in \mathbb{N}$, *são contínuas, mas como* $f(x)$ *é descontínua, pode concluir-se que a convergência não é uniforme.*

Séries de potências

Definição

Seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Chama-se série de potências em $x - x_0$ a uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots$$

onde $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de números reais.

Observação: Fazendo $u = x - x_0$, a série pode ser escrita na forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_n u^n + \cdots$$

Teorema

Considere-se a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *e seja*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

1. *Se* $R \in \mathbb{R}^+$ *a série converge absolutamente para cada* $x \in]-R, R[$ *e diverge para cada* $x \in]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$.
2. *Se* $R = +\infty$ *a série de potências converge absolutamente* $\forall x \in \mathbb{R}$.
3. *Se* $R = 0$ *a série só converge se* $x = 0$

.

Definição

Ao valor de R do teorema anterior chama-se *raio de convergência* da série e ao intervalo $]-R,R[$ chama-se *intervalo de convergência* da série.

Corolário

Considere-se a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *e suponhamos que existe*

$$\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R \in \overline{\mathbb{R}_0^+}.$$

Então R é o raio de convergência da série de potências considerada.

Exemplo

Considere-se a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty}(3+(-1)^n)^n x^n.$$

Tem-se que

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(3+(-1)^n)^n}{(3+(-1)^{n+1})^{n+1}} = \begin{cases} 2^{n-1} & \text{, se } n \text{ par} \\ \dfrac{1}{2^{n+2}} & \text{, se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

pelo que não existe o $\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Exemplo (Continuação)

Alternativamente, o raio de convergência pode ser calculado através do seguinte limite

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|(3+(-1)^n)^n|}} = \frac{1}{\overline{\lim}\,(3+(-1)^n)} = \frac{1}{4};$$

o que permite concluir que o raio de convergência da série de potências é $\frac{1}{4}$ *e portanto a série converge absolutamente no intervalo* $]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$ *e diverge no intervalo* $]-\infty,-\frac{1}{4}[\cup]\frac{1}{4},+\infty[$.

Exemplo

Considere-se a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$. *Tem-se que*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}} = \frac{1}{\lim \frac{1}{n}} = +\infty,$$

pelo que o raio de convergência desta série de potências é $+\infty$, *o que significa que a série é absolutamente convergente em* $\mathbb{R}$.

Exemplo

A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ *só converge para* $x = 0$, *pois*

$$\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim \left| \frac{1}{n+1} \right| = 0.$$

Exemplo

Considere-se a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(x+1)^n.$$

Fazendo a mudança de variável $u = x+1$ *obtém-se a série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}u^n$. *Tem-se que*

$$\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \left|\frac{\frac{(-1)^n}{2^n}}{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}}\right| = \lim \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = 2$$

Exemplo (Continuação)

(ou, alternativamente,

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right|}} = \frac{1}{\lim \frac{1}{2}} = 2)$$

pelo que a série converge absolutamente se $|u| = |x+1| < 2$, *isto é, se* $x \in]-3, 1[$, *e diverge se* $|u| = |x+1| > 2$, *ou seja, se*

$$x \in]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[.$$

Estudemos a convergência nos pontos $x = -3$ *e* $x = 1$.

Se $x = -3$ *tem-se que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1,$$

Exemplo (Continuação)

e portanto a série diverge neste ponto; se $x = 1$ *tem-se que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n,$$

pelo que, a série também diverge em $x = 1$.

ao todo mostrámos que, a série converge absolutamente em $]-1,1[$ *e diverge em* $]-\infty,-3] \cup [1,+\infty[$.

Teorema

Suponhamos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *tem raio de convergência* $R > 0$ *e seja* $0 < \rho < R$. *Então a série converge uniformemente em* $[-\rho, \rho]$.

Teorema

Toda a série de potências de raio de convergência $R > 0$ *é derivável termo a termo no seu intervalo de convergência, e tem-se que*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \forall x \in]-R, R[.$$

Série de Taylor e série de MacLaurin.

Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^n em I. Dado $x_0 \in I$ a fórmula de Taylor de f, de ordem n, com resto de Lagrange em torno do ponto $x = x_0$ é dada, como se sabe, por

$$\begin{aligned} f(x) =& f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots \\ &+ f^{(n-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x), \end{aligned}$$

onde $R_n(x) = f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))\dfrac{(x-x_0)^n}{n!}$, com $0 < \theta < 1$.

Suponhamos que $f \in C^\infty(I)$. Chama-se *série de Taylor* de f em torno do ponto $x = x_0$ à série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Quando $x_0 = 0$ a série de Taylor de f designa-se por *série de MacLaurin* e escreve-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Exemplo

Determine-se a série de MacLaurin da função $f(x) = \cos x$. *Tem-se*

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), n \in \mathbb{N}$$

o que permite concluir que

$$f^{(2n+1)}(0) = 0 \text{ e } f^{(2n)}(0) = (-1)^n.$$

Então a série de MacLaurin de $\cos x$ *é*

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Exemplo (Continuação)

Fazendo na série anterior $y = x^2$, *obtém-se a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{y^n}{(2n)!}.$$

Como se tem que

$$\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\left|\frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}}\right| = \lim\left|\frac{(2n+2)!}{(2n)!}\right| = +\infty,$$

a série em potências de y *converge em* $\mathbb{R}_0^+$ $(y \geq 0)$, *pelo que a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

converge em $\mathbb{R}$.

Uma questão fundamental no desenvolvimento em série de Taylor de uma função, realizado em torno ponto de um ponto x_0, é saber em que condições o desenvolvimento obtido, no seu intervalo de convergência, converge para a função em causa.

Na realidade, o facto de existirem as derivadas $f^{(k)}(x_0)$ para todos os valores de $k \in \mathbb{N}$, embora permita escrever a série de Taylor de f em torno do ponto x_0, não garante que, em alguma vizinhança deste ponto a série convirja ou que em caso de convergência convirja para a função em causa.
Neste sentido considere-se o exemplo seguinte:

Exemplo

Considere-se a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , se\ x \neq 0 \\ 0 & , se\ x = 0. \end{cases}$$

Relativamente à função considerada tem-se que $f(0) = 0$ *e* $f^{(n)}(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, *e portanto a sua série de MacLaurin é a série identicamente nula que converge, como é óbvio, para a função identicamente nula em* $\mathbb{R}$.
Portanto, apesar da série de MacLaurin de f *convergir em* $\mathbb{R}$, f *não é a soma da sua série de MacLaurin, exceptuando no ponto* $x_0 = 0$.

A questão pertinente e que se coloca neste momento é a seguinte: que condições devem ser impostas a uma função f para que numa vizinhança de um ponto x_0 em que a série de Taylor de f convirja, a série obtida convirja para a função f.

Sendo I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^n em I, dado $x_0 \in I$ considere-se a fórmula de Taylor de f, de ordem n, com resto de Lagrange em torno do ponto $x = x_0$. Sendo $S_n(x)$ a soma dos n primeiros termos da fórmula de Taylor considerada tem-se que

$$R_n(x) = f(x) - S_n(x),$$

donde:

Teorema

Uma condição necessária e suficiente para que uma função indefinidamente diferenciável $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja a soma da sua série de Taylor numa vizinhança $V \subset I$, de um ponto x_0, é que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad \forall x \in V.$$

O teorema que se segue fornece condições suficientes para que uma função seja a soma da sua série de Taylor.

Teorema

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ em I e suponhamos que existem constantes $M, k > 0$ tais que, numa vizinhança $V \subset I$ de um ponto x_0, se tem para todo o $n \in \mathbb{N}$

$$|f^{(n)}(x)| \leq Mk^n, \quad \forall x \in V.$$

Nestas condições f é a soma da sua série de Taylor em V.

Exemplo

A função $f(x) = \cos x$ *tem por série de MacLaurin a série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

cujo resto é

$$R_n(x) = f^{(n)}(\theta x)\frac{x^n}{n!} = \cos\left(\theta x + \frac{n\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!}.$$

Tem-se que

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!}.$$

Exemplo (Continuação)

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *é convergente em* $\mathbb{R}$. *Com efeito*

$$\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim(n+1) = +\infty,$$

o que permite concluir que $\dfrac{x^n}{n!} \to 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, *ou equivalentemente* $\dfrac{|x|^n}{n!} \to 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *e portanto*

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

Seja $f(x) = e^x$. *Tem-se que* $f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *e portanto* $f^{(n)}(0) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$, *pelo que a sua série de MacLaurin é*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Tem-se que

$$R_n(x) = \left| e^{\theta x} \frac{x^n}{n!} \right| = e^{\theta x} \frac{|x|^n}{n!} \leq e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!}$$

$(\theta x \leq |\theta x| = \theta |x| \leq |x|)$. *Mostremos que* $R_n(x)$ *converge para zero provando a convergência da série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!}$.

Exemplo (Continuação)

Pelo critério de d'Alembert tem-se que

$$\lim \left| \frac{e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!}} \right| = \lim \frac{|x|}{(n+1)} = 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

e portanto a série converge absolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$.
Ao todo provou-se que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

De forma semelhante ao que foi visto nos exemplos anteriores pode mostrar-se que:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \forall x \in]-1,1[,$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Teorema

Suponhamos que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *converge numa vizinhança* V *de* x_0*, isto é, define uma função* f *em* V*. Então a série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *é a série de Taylor de* f *em torno de* x_0 *em* V*.*

Em particular, o desenvolvimento em série de potências de $x-x_0$ *válido numa certa vizinhança de* x_0 *é único.*

Exemplo

A função $g(x) = \dfrac{1}{5-4x}$ *pode ser escrita na forma*

$$\frac{1}{5-4x} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{4}{5}x}.$$

Como se tem

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \; x \in]-1,1[,$$

vem que

$$\frac{1}{5-4x} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}x\right)^n, \; \left|\frac{4}{5}x\right| < 1$$

ou equivalentemente

$$\frac{1}{5-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{5^{n+1}} x^n, \quad x \in]-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}[.$$

Exemplo

Seja

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x - 5}.$$

Tendo em conta que $x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1)$ *tem-se que*

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{(x-5)(x+1)} &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+1}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5-x} - \frac{1}{1+x}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5(1-\frac{x}{5})} - \frac{1}{1-(-x))}\right) \\
&= -\frac{1}{30} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{5}} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-(-x)} \\
&= -\frac{1}{30} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{5}\right)^n - \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n
\end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Para determinação do domínio de convergência da série obtida, deve ter-se em conta que

$$\left|\frac{x}{5}\right| < 1 \wedge |-x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 5 \wedge |x| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1.$$

Então

$$f(x) = \frac{1}{(x-5)(x+1)} = -\frac{1}{6} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5^{n+1}} + (-1)^n \right) x^n, \ -1 < x < 1.$$

Exemplo

Considere-se a função

$$f(x) = xe^x.$$

Como

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$$

vem que

$$xe^x = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \cdots, x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo (Continuação)

Pretende-se agora obter o valor de $f^{(5)}(0)$. *Tendo em conta que o desenvolvimento em série de potencias é único, vem que*

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 = \frac{x^5}{4!}$$

donde

$$\frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \frac{1}{4!}$$

e portanto

$$f^{(5)}(0) = \frac{5!}{4!} = 5.$$

Exemplo

Suponhamos que se pretende escrever

$$f(x) = xe^x$$

como soma de uma série de potências de $x-2$. *Começamos por escrever* xe^x *na forma*

$$\begin{aligned}(x-2+2)e^{x-2+2} =& e^2(x-2+2)e^{x-2}\\ =& e^2(x-2)e^{x-2} + 2e^2e^{x-2}.\end{aligned}$$

Tendo em conta que

$$e^{x-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}$$

a expressão

$$e^2(x-2)e^{x-2} + 2e^2e^{x-2}$$

Exemplo (Continuação)

pode escrever-se na forma

$$
\begin{aligned}
& e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{n+1}}{n!} + 2e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!} \\
= & e^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n-1)!} + 2e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!} \\
= & e^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n-1)!} + 2e^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}\right) \\
= & 2e^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^2(x-2)^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^2(x-2)^n}{n!} \\
= & 2e^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^2}{(n-1)!} + \frac{2e^2}{n!}\right)(x-2)^n x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Solução por desenvolvimento em série

Considere-se a equação linear homogénea de segunda ordem

$$y'' + (x-2)^2 y' + 2(x-2)y = 0, \tag{0.1}$$

com as condições iniciais $y(2) = 3, \; y'(2) = 0$.
Suponhamos que a equação admite uma solução da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-2)^n = c_0 + c_1(x-2) + c_2(x-2)^2 + \ldots + c_n(x-2)^n + \ldots$$

em alguma vizinhança do ponto $x = 2$.
Considerando que a série converge na referida vizinhança, pode ser derivada termo a termo e a série que se obtém ainda converge na mesma vizinhança. Assim

$$y'(x) = c_1 + 2c_2(x-2) + \ldots + nc_n(x-2)^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-2)^{n-1};$$

da mesma forma

$$y''(x) = 2c_2 + \ldots + n(n-1)c_n(x-2)^{n-2} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-2)^{n-2}.$$

Os coeficientes c_0 e c_1 são determinados a partir das condições $y(2) = 3$ e $y'(2) = 0$, obtendo-se $c_0 = 3$ e $c_1 = 0$.
Substituindo as séries correspondentes a y' e y'' na equação (0.1) tem-se que

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-2)^{n-2} + (x-2)^2 \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-2)^{n-1} +$$

$$2(x-2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-2)^n = 0.$$

Nesta equação, colocando todos os termos em $(x-2)$ em potências de $n+1$, vem

$$\sum_{n=-1}^{\infty}(n+3)(n+2)c_{n+3}(x-2)^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(x-2)^{n+1}+$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}2c_n(x-2)^{n+1}=0.$$

Acertando finalmente os índices de soma chega-se à equação

$$2c_2+(6c_3+2c_0)(x-2)+\sum_{n=1}^{\infty}((n+3)(n+2)c_{n+3}+(n+2)c_n)(x-2)^{n+1}=0,$$

que permite obter a relação de recorrência a que os coeficientes $c_2, c_3, ..., c_n, ...$ devem obedecer, que é

$$\begin{cases} 2c_2=0 \\ 6c_3+2c_0=0 \\ (n+3)(n+2)c_{n+3}+(n+2)c_n=0, \quad n=1,2,... \quad . \end{cases}$$

A partir dos valores de c_0 e c_1 já determinados vem que

$$\begin{cases} c_0 = 3, \ \ c_1 = 0, \ \ c_2 = 0, \ \ c_3 = -1 \\ c_{n+3} = -\dfrac{c_n}{n+3} = 0, \ \ n = 1, 2, \dots \ . \end{cases}$$

Tendo em conta que $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$ usando a recorrência deduzida obtém-se

$$c_{3n+1} = c_{3n+2} = 0, \ \ n = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Finalmente, de $c_0 = 3$ vem

$$c_0 = 3, \ c_3 = -1, \ c_6 = \frac{1}{6} = \frac{1}{3^1 2!}, \ c_9 = -\frac{1}{3^2 3!}, \dots, c_{3n} = \frac{(-1)^n}{3^{n-1} n!}, \dots \ .$$

Usando a relação de recorrência provemos que a expressão induzida para os coeficientes c_{3n} está correta.

Para $n = 0$ a igualdade é trivialmente verdadeira pois

$$c_{3n} = c_0 = 3 = \frac{(-1)^0}{3^{0-1}0!}.$$

Assumindo que a expressão é verdadeira para algum n, isto é $c_{3n} = \dfrac{(-1)^n}{3^{n-1}n!}$ mostremos que $c_{3n+3} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n(n+1)!}$. Ora,

$$c_{3n+3} = -\frac{c_{3n}}{3n+3} = \frac{(-1)}{3^{n-1}n!} \cdot \frac{(-1)^n}{3(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{3^n(n+1)!};$$

a primeira igualdade, nesta última expressão, é justificada pela relação de recorrência e a segunda pela hipótese de indução. As expressões dos coeficientes c_{3n+1} e c_{3n+2} são de verificação trivial.

Obtém-se assim a solução

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n}(x-2)^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n+1}(x-2)^{3n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{3n+2}(x-2)^{3n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-1} n!}(x-2)^{3n} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{(x-2)^3}{3}\right)^n}{n!} = 3e^{-\dfrac{(x-2)^3}{3}}.
\end{aligned}
$$

É fácil verificar que a função determinada é de facto solução em $\mathbb{R}$ do PVI considerado.

Acabámos de resolver uma equação determinando uma sua solução que se expressa sob a forma de uma série de potências. Uma questão que naturalmente se coloca é a seguinte: será que as equações lineares homogéneas de segunda ordem escritas na forma normal, isto é, na forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, admitem sempre uma solução desta forma. A resposta a esta questão é negativa.
O teorema seguinte responde parcialmente à questão colocada.

Comecemos por recordar o conceito de função analítica num ponto. Uma função f diz-se analítica no ponto x_0 se puder ser representada por uma série de potências de $x - x_0$ com raio de convergência $r > 0$, isto é

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \;\; \forall x \in \,]x_0 - r, x_0 + r[.$$

Escrevamos a equação diferencial linear de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{0.2}$$

na forma normal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{0.3}$$

Diz-se que x_0 é um *ponto ordinário* da equação (0.2) se as funções $p(x)$ e $q(x)$ em (0.3) são analíticas em x_0. Um ponto que não seja ordinário diz-se um *ponto singular* da equação.

Teorema

Suponhamos que x_0 *é um ponto ordinário da equação*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{0.4}$$

isto é existe $r > 0$ *tal que* $p(x)$ *e* $q(x)$ *são analíticas em* $]x_0 - r, x_0 + r[$.
Então a equação (0.4) *possui duas soluções linearmente independentes* y_1 *e* y_2 *analíticas em* $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Na equação anterior

$$y'' + (x-2)^2\, y' + 2(x-2)y = 0,$$

tem-se que, de facto, as funções $p(x) = (x-2)^2$ e $q(x) = 2(x-2)$ sendo funções polinomiais são analíticas em todo o $\mathbb{R}$ em particular no ponto $x_0 = 2$. Daí admitir soluções da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-2)^n$$

em alguma vizinhança do ponto $x = 2$.