SEGUNDO TESTE (16/12/2023)* duração **2 h** **CÁLCULO NUMÉRICO A**

Número: ________ Curso: ________ Caderno: ________ Nome: ________________________________

A primeira parte do teste é constituida por 5 questões de escolha múltipla. Nas questões 1 a 5 assinale com $\times$ a resposta correcta.
Cada resposta correcta vale 1 valor. Respostas em branco valem 0 valores. Se responder erradamente ou de forma ambígua ser-lhe-á atribuída uma cotação negativa correspondente a 0.2 valores.
Se a soma das cotações da escolha múltipla for negativa, será atribuído 0 valores à escolha múltipla.

Classificação
EM -
TOTAL-

1. Considere o integral $I = \int_0^2 f(x)dx$ onde $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ é ponto fixo de f e $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ é raiz da equação $f(x) = 0$.

   O valor da aproximação dada pela regra de Gauss com 2 pontos simples é:

   - [ ] **a)** $I_G = 0$
   - [ ] **b)** $I_G = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$
   - [x] **c)** $I_G = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$
   - [ ] **d)** $I_G = 2$

2. Considere $\alpha \in [a, b]$ e uma função $G \in C^1([a, b])$ tal que $G(\alpha) = \alpha$ e $G'(\alpha) = -0.5$. Considere ainda $x_n = G(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$ uma sucessão de iteradas.

   Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   - [ ] **a)** x_n converge para α se e só se $x_0 = \alpha$.
   - [x] **b)** x_n converge para α qualquer que seja $x_0 \in [a, b]$ suficientemente próximo de α.
   - [ ] **c)** x_n converge para α com ordem de convergência $p = 2$.
   - [ ] **d)** x_n converge qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$.

3. Seja $\alpha \in [1, 3]$ a raiz única da equação não linear $f(x) = 0$, sendo $f(x)$ uma função continua em [1,3] tal que $f(2) > 0$ e $f(2.25) > 0$. Considere a sucessão $x_n, n = 0, 1, 2, ...$ gerada pelo método da bissecção para obter uma aproximação para α, em que $x_2 \in [2, 2.5]$.

   Assinale a opção correta:

   - [ ] **a)** $x_3 = 2.125$ e $|\alpha - x_{21}| < 0.5 \times 10^{-6}$
   - [ ] **b)** $x_3 = 2.125$ e $|\alpha - x_{20}| < 0.5 \times 10^{-6}$
   - [x] **c)** $x_3 = 2.375$ e $|\alpha - x_{21}| < 0.5 \times 10^{-6}$
   - [ ] **d)** $x_3 = 2.375$ e $|\alpha - x_{20}| < 0.5 \times 10^{-6}$

4. Seja $\alpha \in [a, b]$ raiz única da equação $f(x) = 0$ com $f \in C^2([a, b])$, em que $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$.

   Considere ainda uma função iteradora $\phi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ com $\phi'(\alpha) = 0$. Seja $x_n = \phi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$ uma sucessão de iteradas tal que $f(x_0) = 1$.

   Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   ☐ **a)** Não se consegue garantir a convergência de x_n para α.

   ☒ **b)** x_n converge para α com ordem de convergência $p > 1$.

   ☐ **c)** x_n não converge qualquer que seja $x_0 \in [a, b]$.

   ☐ **d)** x_n converge para α com ordem de convergência $p = 1$.

5. Considere o seguinte sistema de equações lineares $AX = B$ com n incógnitas e n equações e a sucessão de vetores obtida pelo método iterativo geral $X^{(k)} = GX^{(k-1)} + H$, $k = 1, 2, ...,$ onde $G \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ é a matriz de iteração e $H \in \mathbb{R}^n$. Sabe-se que e $||G||_1 = 2/3$ e $||G||_\infty = 3/2$.

   Assinale a opção correta:

   ☐ **a)** A sucessão não converge se a matriz A do sistema não for de diagonal estritamente dominante.

   ☐ **b)** A sucessão não converge porque $||G||_\infty > 1$.

   ☒ **c)** A sucessão converge qualquer que seja $X^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

   ☐ **d)** Nada se pode concluir quanto à convergência da sucessão.

   ☐ **e)** Se a matriz A do sistema for de diagonal estritamente dominante então é certo que a sucessão converge.

A segunda parte do teste é constituida por 3 grupos de questões.
Cada resposta deverá estar convenientemente justificada.
Cotações: Questão 6: 7 valores; **Questão 7:** 6.2 valores; **Questão 8:** 1.8 valores.

6. Considere a sucessão

$$\begin{cases} x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x_{n+1} = \varphi_c(x_n), \qquad n{=}0{,}1{,}2{,}... \end{cases}$$

onde $\varphi_{c(x)} = \dfrac{1 + sin(x)}{c}$, com $c > 0$.

a) Prove que α é raiz da equação $1 + sin(x) - cx = 0$ se e só se α é ponto fixo de $\varphi_{c(x)}$.

b) Sendo α raiz única em $[0, \frac{\pi}{2}]$, prove que se $c \geq \frac{4}{\pi}$ então x_n converge para α e a ordem de convergência é $p = 1$ se $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

c) Considerando $c = 2$ e $x_0 = 0$ determine x_2 e uma estimativa para o erro absoluto associado a x_2.

d) Nas mesmas condições da alinea anterior diga quantas iteradas teria de calcular para ter uma estimativa para o erro absoluto inferior a 10^{-6}.

Nota: Apresente os cálculos com 6 casas decimais convenientemente arredondadas.

7. Considere o seguinte sistema de equações lineares $AX = B$, com $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = [1 \ 1 \ 1]^T$.

a) Mostre que o método de Gauss-Seidel converge para a solução de $AX = B$, qualquer que seja a iterada $X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ que se considere.

b) Usando o método de Gauss-Seidel obtenha a iterada $X^{(2)}$ partindo de $X^{(0)} = [0 \ 0 \ 0]^T$ e diga quantas casas decimais significativas no mínimo pode garantir para cada componente de $X^{(2)}$. Justifique.

c) Sem calcular a iterada $X^{(10)}$ diga quantas casas decimais significativas no mínimo pode garantir para cada componente de $X^{(10)}$. Justifique.

8. Considere o problema de valor inicial bem posto

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + (t - y(t))^2, \quad t \in [2, 3] \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

Determine um valor aproximado para $y(2.4)$ pelo método de Taylor de ordem 2 com $h = 0.2$. Justifique devidadmente os cálculos.

Nota: Apresente os cálculos com 6 casas decimais convenientemente arredondadas.

Questão 1

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx$$

Aproximação pela regra de Gauss com 2 pontos I_{G2}

Mudança de variável em I

$$\frac{b-a}{2} = \frac{2}{2} = 1 \,, \quad \frac{b+a}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad x = \frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}$$

$$x = y+1$$

$$I = \int_{-1}^{1} f(y+1)\,dy$$

$$I_{G2} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right) = 1-\frac{1}{\sqrt{3}} + 0$$

opção correcta c) ✓

Como $1-\frac{1}{\sqrt{3}}$ é ponto fixo de f vem $f\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1-\frac{1}{\sqrt{3}}$

" $1+\frac{1}{\sqrt{3}}$ é raiz de f vem $f\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$

Questão 2

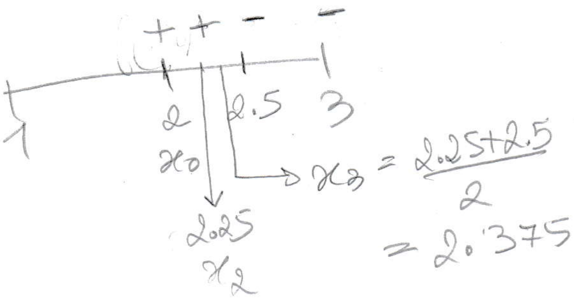
opção correcta b) ✓

Questão 3

$\alpha \in [1,3]$ raiz única $f(x)=0 \Rightarrow f(1)f(3)<0$

$f(2)>0$ e $f(2.25)>0$

$x_n, n=0,1,2$ Método da bissecção



$$|\alpha - x_n| < \frac{b-a}{2^{n+1}} = \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^n} \leq 0.5\times10^{-6}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^n > 2\times10^6$$

$$n\ln(2) > \ln(2\times10^6)$$

$$n > \frac{\ln(2\times10^6)}{\ln(2)} = 20.9316$$

$$n = 21$$

opção correta d)

Questão 4

Opção correta b)

Questão 5

Opção correta c)

6. Seja $\begin{cases} x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ x_{n+1} = \varphi_c(x_n), \ n = 0,1,2 \end{cases}$ e $c > 0$ $\qquad \varphi_c(x) = \frac{1+\sin(x)}{c}$

1.5

a) α é raiz da equação $1+\sin(x) - cx = 0 \Leftrightarrow 1+\sin(\alpha) - c\alpha = 0$

$\Leftrightarrow 1+\sin(\alpha) = c\alpha \underset{c>0}{\Leftrightarrow} \frac{1+\sin(\alpha)}{c} = \alpha \Leftrightarrow \varphi_c(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow$

α é ponto fixo de $\varphi_c(x) = \frac{1+\sin(x)}{c}$

2.5

b) α é raiz única de $1+\sin(x) - cx = 0$ em $[0, \frac{\pi}{2}]$

1) $\varphi_c(x) = \frac{1+\sin(x)}{c}$ está definida e é contínua em $\mathbb{R}$ pois $\sin(x)$ função contínua e $c > 0$

2) $\varphi_c(0) = \frac{1+\sin(0)}{c} = \frac{1}{c} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ pois $0 < \frac{1}{c} \leq 1$ com $c > 0$

$\varphi_c(\frac{\pi}{2}) = \frac{1+\sin(\frac{\pi}{2})}{c} = \frac{1+1}{c} = \frac{2}{c} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se $\frac{2}{c} \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{c \geq \frac{4}{\pi}}$

Como $\varphi_c'(x) = \frac{\overbrace{\cos(x)}^{\geq 0 \text{ em } [0,\frac{\pi}{2}] \text{ 1º quadrante}}}{\underbrace{c}_{>0}} \geq 0 \Rightarrow \varphi_c(x)$ é crescente

logo $0 < \frac{1}{c} \leq \frac{1+\sin(x)}{c} \leq \frac{2}{c} \underset{c \geq \frac{4}{\pi}}{\leq} \frac{2}{\frac{4}{\pi}} = \frac{\pi}{2}$

portanto $\varphi_c(x) \in [0, \frac{\pi}{2}], \ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

3) $|\varphi_c'(x)| = \left|\frac{\cos(x)}{c}\right| = \frac{\cos(x)}{c} \leq \frac{\cos(0)}{c} = \frac{1}{c} < 1$, pois $c > 0$, $M = \frac{1}{c}$

$0 \leq \cos(x) \leq 1$ em $[0, \frac{\pi}{2}]$
função decrescente

logo x_n converge para o único ponto fixo α

ordem de convergência é $p = 1$ se $\varphi'(\alpha) \neq 0$

de acordo com o Teorema, portanto $\frac{\cos(\alpha)}{c} \neq 0$

$\Rightarrow \cos(\alpha) \neq 0$ em $[0, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2}$

1.5

c) $c = 2$ e $x_0 = 0$

$$x_1 = \varphi_2(x_0) = \frac{1+\sin(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \varphi_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1+\sin\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{1.479426}{2} = 0.739713$$ ✓

$$|\alpha - x_2| \leq \frac{M}{1-M} \times |x_2 - x_1| = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} |0.739713 - 0.5| \leq 0.239713$$ ✓

erro à posteriori $\quad M = \frac{1}{2}$

1.5

d) $n = ?$ tal que $|\alpha - x_n| < 10^{-6}$

Erro à priori

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{M^n}{1-M} \times |x_1 - x_0| = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\cancel{1/2}} \times \frac{1}{\cancel{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Basta impor que $\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-6} \iff n > \frac{\ln(10^{-6})}{\ln(1/2)} = 19.93\ldots$

$n = 20$ ✓

Folha nº

Questão 7

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Metodo de Gauss-Seidel

2

A não tem diagonal estritamente dominante então é necessário calcular $\|G_{GS}\|_\infty$

$$G_{GS} = -(D+L)^{-1}U \qquad D+L = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & -4 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(D+L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -1/10 & 1/2 & 0 \\ -1/10 & 3/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

$$G_{GS} = -\begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -1/10 & 1/2 & 0 \\ -1/10 & 3/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 & -2/5 \\ 0 & 1/10 & 1/5 \\ 0 & 1/10 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\|G_{GS}\|_\infty = \max\left(|-1/5|+|-2/5|, |1/10|+|1/5|, |1/10|+|1/5|\right) = \max\left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{3}{10}, \tfrac{3}{10}\right) = \tfrac{3}{5} < 1 \checkmark$$

Logo a sucessão gerada pelo metodo de Gauss-Siedel converge qualquer que seja $X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$

b)

2.4

$$H_{GS} = (D+L)^{-1}B = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ -1/10 & 1/2 & 0 \\ -1/10 & 3/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

$$X^{(n)} = G_{GS}X^{(n-1)} + H_{GS} \quad , n = 1, 2, \dots \quad \text{com } X^{(0)} = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$$X^{(1)} = G_{GS}X^{(0)} + H_{GS} = [1/5 \ \ 2/5 \ \ 2/5]^T \checkmark$$

$$X^{(2)} = G_{GS}X^{(1)} + H_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 & -2/5 \\ 0 & 1/10 & 1/5 \\ 0 & 1/10 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04 \\ 0.52 \\ 0.52 \end{bmatrix} \begin{matrix} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \end{matrix}$$

fórmula do erro à posteriori

$$\|X^* - X^{(2)}\|_\infty \leq \frac{\|G\|_\infty}{1-\|G\|_\infty} \|X^{(2)} - X^{(1)}\|_\infty = \frac{3/5}{1-3/5} \left\| \begin{bmatrix} -0.04 \\ 0.52 \\ 0.52 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ 2/5 \end{bmatrix} \right\|_\infty$$

$$= \frac{3}{2} \|[-0.24 \quad 0.12 \quad 0.12]\|_\infty = \frac{3}{2} \times 0.24 = 0.36 \leq 0.5 \times 10^0$$ logo

não garantimos c.d.s

c) fórmula do erro à priori

1.8

$$\|X^* - X^{(10)}\|_\infty \leq \frac{\|G\|_\infty^{10}}{1-\|G\|_\infty} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty = \frac{(3/5)^{10}}{2/5} \|[1/5 \quad 2/5 \quad 2/5\|_\infty$$

$$= \frac{(3/5)^{10}}{2/5} \times \frac{2}{5} \leq 0.006047$$

$$\leq 0.5 \times 10^{-1}$$

logo garantimos no mínimo 1 c.d.s

Questão 8 (1.8)

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + (t-y)^2, & t \in [2,3] \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

a) Aproximação para $y(2.4)$ pelo Método de Taylor com $h = 0.2$

0.3
$h = 0.2 = \frac{3-2}{N} \Leftrightarrow N = 5$

$t_i = t_0 + hi, \quad i = 1, \dots, 5, \quad t_0 = 2$

$t_1 = 2 + 0.2$

$t_2 = 2 + 0.2 \times 2 = 2.4$

logo $y(2.4) \approx w_2$

0.1
$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{i+1} = w_i + h f(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, w_i), \quad i = 0, \dots, 5 \end{cases}$$

0.5
$f(t, y) = 1 + (t-y)^2$

$f'(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) = 2(t-y) - 2(t-y)\left(1 + (t-y)^2\right)$

$= 2(t-y)\left(\cancel{1} - \cancel{1} - (t-y)^2\right)$

$= -2(t-y)^3$

0.3 $w_{i+1} = w_i + 0.2\left(1 + (t_i - w_i)^2\right) - \frac{0.2^2}{\cancel{2}} \cancel{2} (t_i - w_i)^3 = w_i + 0.2\left(1 + (t_i - w_i)^2 - 0.2(t_i - w_i)^3\right)$

0.3 $w_1 = w_0 + 0.2\left(1 + (t_0 - w_0)^2 - 0.2(t_0 - w_0)^3\right) = 1 + 0.2\left(1 + (2-1)^2 - 0.2(2-1)^3\right)$

$= 1 + 0.2(2 - 0.2) = 1.36$

0.3 $w_2 = 1.36 + 0.2\left(1 + (2.2 - 1.36)^2 - 0.2(2.2 - 1.36)^3\right) \approx 1.677412 \approx y(2.4)$