A. MaT IIC 14 de Junho de 2023 teste 2 (A)

1. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2 = 1\}$

$P = (2\sqrt{2}, 0, 0)$

superfície ilimitada

$$d(P,X) = \|P-X\| = \|(2\sqrt{2}-x, 0-y, 0-z)\| =$$

$X = (x,y,z)$

$$= \sqrt{(2\sqrt{2}-x)^2+(0-y)^2+(0-z)^2} =$$

$$= \sqrt{(2\sqrt{2}-x)^2+y^2+z^2}$$

distância de P ao ponto X

Pretende-se determinar os pontos $X=(x,y,z)$ de S que minimizam $d(P,X)$.

Recorremos à função $\underbrace{f(x,y,z) = d^2(P,X) = (2\sqrt{2}-x)^2+y^2+z^2}$

Para evitar trabalhar com $\sqrt{\ }$.

O nosso problema é então

$$\min f(x,y,z)$$

sujeita à restrição

$$x^2+y^2-z^2 = 1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+y^2-z^2-1}_{g(x,y,z)} = 0$$

Vamos recorrer ao Metodo do multiplicadores de Lagrange. Os extremos restritos de f na superficie S satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ x^2+y^2-z^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2(2\sqrt{2}-x),\ 2y,\ 2z) = \lambda(2x, 2y, -2z) \\ x^2+y^2-z^2=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(2\sqrt{2}-x) = 2x\lambda \\ 2y = 2y\lambda \\ 2z = -2z\lambda \\ x^2+y^2-z^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2}+x = x\lambda \\ y = y\lambda \\ z = -z\lambda \\ x^2+y^2-z^2=1 \end{cases}$$

Procuramos os pontos (x^*, y^*, z^*) que satisfazem o sistema:

$\boxed{1^{\underline{o}}\text{ caso}}$ $y=0$? (Depois temos de analisar $y \neq 0$)

Se $y=0$ então o sistema fica

$$\begin{cases} -2\sqrt{2}+x = x\lambda \\ 0=0 \\ z = -z\lambda \\ x^2-z^2=1 \end{cases}$$

Neste caso vamos ainda analisar os casos em que $z=0$ e $z \neq 0$

a) $z=0$. Então

$$\begin{cases} -2\sqrt{2}+x = x\lambda \\ 0=0 \\ 0=0 \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} — \\ — \\ — \\ x=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2}+1=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \\ x=1 \end{cases} \vee \begin{cases} -2\sqrt{2}-1=-\lambda \\ y=0 \\ z=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

Assim,

$(1,0,0)$ e $(-1,0,0)$ satisfazem o sistema pelo que teremos de analisar $f(1,0,0)$ e $f(-1,0,0)$ para perceber se são mínimos restritos

b) $z \neq 0$. Então

$$\begin{cases} -2\sqrt{2}+x = -x \\ z = -z\lambda \Leftrightarrow \lambda = -1 \\ 0 = 0 \\ x^2 - z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\sqrt{2} \\ \lambda = -1 \\ 0 = 0 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ \\ \\ 2 - z^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ \lambda = -1 \\ y = 0 \\ z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ \\ \\ z = \pm 1 \end{cases}$$

Assim,

$(\sqrt{2},0,1)$ e $(\sqrt{2},0,-1)$ satisfazem o sistema pelo que temos de analisar $f(\sqrt{2},0,1)$ e $f(\sqrt{2},0,-1)$ para perceber se há aqui mínimos restritos.

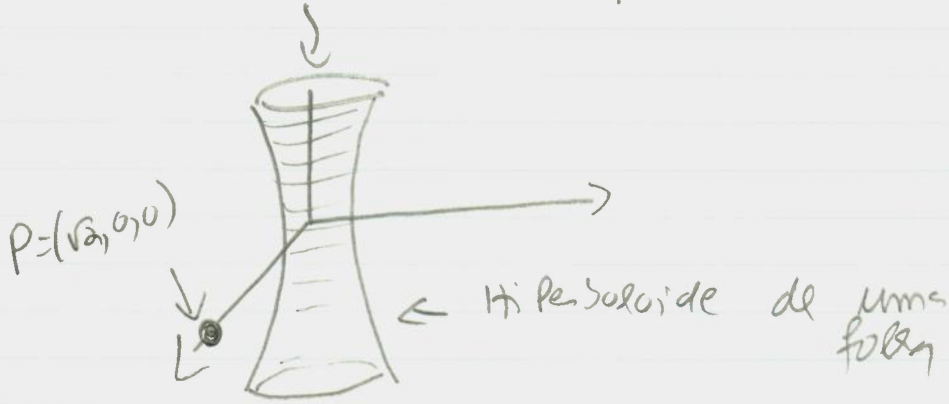
$\boxed{2.^{o}\text{ caso}}$ $y \neq 0$. Então

$$\begin{cases} -2\sqrt{2}+x = x\lambda \\ y = \lambda y \\ - \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2}+\cancel{x} = \cancel{x} \\ \lambda = 1 \\ = \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sqrt{2} = 0 \\ \text{Impossível.} \end{cases}$$

Para $y \neq 0$ não há pontos que satisfazem o sistema.

observação:

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2 = 1\}$



A natureza do problema garante-nos que há pelo menos um ponto em S que está à distância mínima de P.

O método dos mult. de Lagrange diz-nos agora que esses pontos são

$$(1,0,0),\ (-1,0,0),\ (\sqrt{2},0,1) \text{ ou } (\sqrt{2},0,-1)$$

Como

$$f(1,0,0) = (2\sqrt{2}-1)^2+0^2+0^2 \Rightarrow d(P,(1,0,0)) = 2\sqrt{2}-1$$

$$f(-1,0,0) = (2\sqrt{2}+1)^2+0^2+0^2 \Rightarrow d(P,(-1,0,0)) = 2\sqrt{2}+1$$

$$f(\sqrt{2},0,1) = (2\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+0^2+1^2 \Rightarrow d(P,(\sqrt{2},0,1)) = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

$$f(\sqrt{2},0,-1) = (2\sqrt{2}-\sqrt{2})^2+0^2+(-1)^2 \Rightarrow d(P,(\sqrt{2},0,-1)) = \sqrt{3}$$

São os mínimos restritos de f.

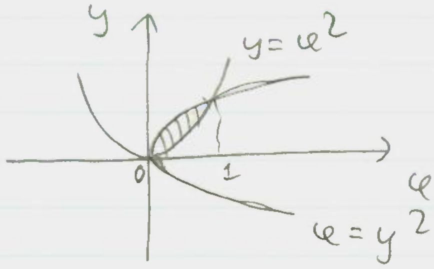
Há dois pontos de S que estão à distância mínima de P. Essa distância é $\sqrt{3}$ $(< 2\sqrt{2}-1)$

A

2 D é a região do plano limitado pelas curvas $y = x^2$ e $x = y^2$.

O valor do integral $\iint_D xy\,dxdy$ é:

Região D



$$\iint_D xy\,dxdy = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy\,dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_0^1 x\left(\frac{x}{2} - \frac{x^4}{2}\right)dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{2}\,dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^6}{12}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \qquad \text{E}$$

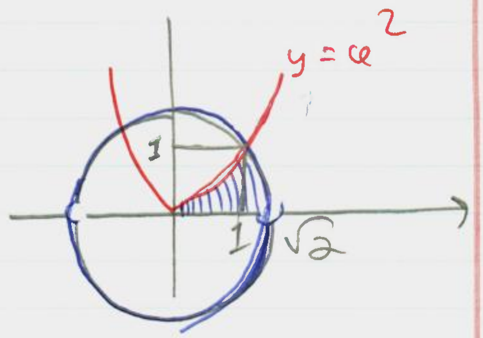
3 $I = \int_0^1 \int_{y^{\frac{1}{2}}}^{\sqrt{2-y^2}} y\,dxdy$

Pretende-se trocar a ordem de integração.

Região de integração:

$x = \sqrt{2-y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$

$x = y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x^2 = y$



Assim,

$$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} y \, dy \, dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{?} y \, dy \, dx$$

C

? $x^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2 - x^2}$

4. Considere o domínio de $\mathbb{R}^2$

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \ y \geq 0, \ 1 \leq x + y \leq 4\}$$

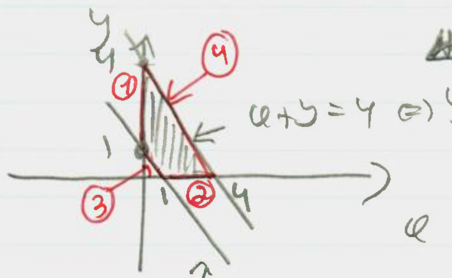
Usando a transformação $\begin{cases} x = u - uv \\ y = uv \end{cases}$ tem-se:

$$\iint_R f(x,y) \, dx \, dy = \iint_{R^*} f(u - uv, uv) \, |\det J_T| \, du \, dv$$

$$J_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - v & -u \\ v & u \end{bmatrix}$$

$$\det J_T = u - \cancel{uv} + \cancel{uv} = u$$

$R^* = R$ mas coordenadas u e v ?



$x + y = 4 \Leftrightarrow y = -x + 4$

R

$x + y = 1 \Leftrightarrow y = -x + 1$

R é limitada pelas curvas c_1, c_2, c_3, c_4 onde

$c_1: \begin{cases} x = 0 \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$

$c_2: \begin{cases} y = 0 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$

$c_3: \begin{cases} y = -x + 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

$c_4: \begin{cases} y = -x + 4 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$

Vejamos o que são estes limites nas variáveis u e v.

c_1^* (vem de c_1)

c_2^* (vem de c_2)

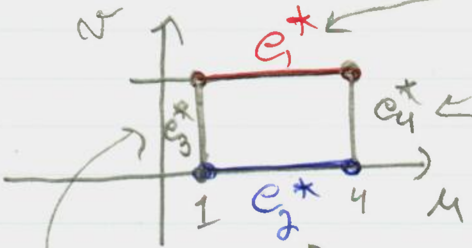
c_3^* (vem de c_3)

c_4^* (vem de c_4)

or, $\begin{cases} x = u - uv \\ y = uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u - y \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x + y \\ y = (x+y)\, v \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u = x + y \\ v = \dfrac{y}{x+y} \end{cases}$

$c_1^*: \begin{cases} u = 0 + y \\ v = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = y \in [1,4] \\ v = 1 \end{cases}$



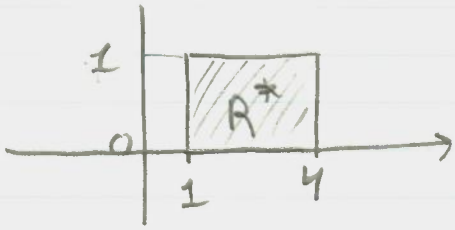
$c_2^*: \begin{cases} u = x \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = x \in [1,4] \\ v = 0 \end{cases}$

$c_3^*: \begin{cases} u = x + (-x+1) \\ v = \dfrac{-x+1}{x+(-x+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = \underbrace{-x+1 \in [0,1]} \end{cases}$

$0 \le x \le 1 \Rightarrow 0 \le -x+1 \le 1$

$c_4^*: \begin{cases} u = 4 \\ v = \dfrac{-x+4}{x+(-x+4)} = \dfrac{1}{4}(-x+4) \in [0,1] \end{cases}$

O Domínio R em coordenadas u e v é então R^*



Assim,

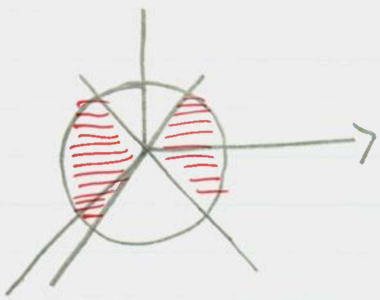
$$\iint_R \frac{1}{x+y}\,dx\,dy = \iint_{R^*} \frac{1}{\cancel{u}} \times \cancel{u}\,du\,dv =$$

$$= \int_1^4 \int_0^1 1\,du\,dv = \int_1^4 1\,dv = 4-1 = 3.$$

(B)

5. $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 16 \wedge z^2 \leq 3x^2+3y^2\}$

O seu volume em coord. esféricas é:

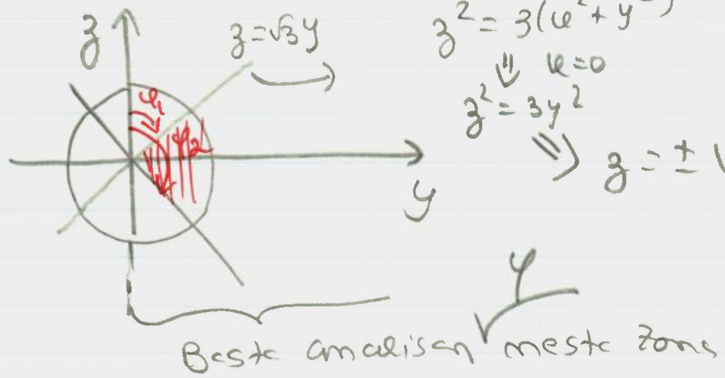


$S^* = \{(x,y,z) = (\rho \sin\varphi \cos\theta, \rho \sin\varphi \sin\theta, \rho\cos\varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 4$

$\wedge \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]\}$

φ_1 e $\varphi_2 = ?$

Projectamos S em yoz e obtemos

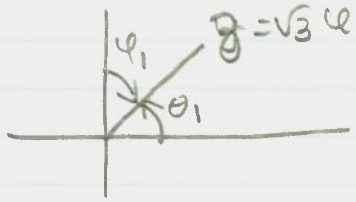


$z^2 = 3(x^2+y^2)$ $\Downarrow$ $x=0$ $z^2 = 3y^2 \Rightarrow z = \pm\sqrt{3}y$

φ

Ora,

$$tg(\theta_1) = \sqrt{3} \Rightarrow \theta_1 = \pi/3 \Rightarrow \varphi_1 = \pi/6$$



Assim,

$$\varphi_2 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$$

$\therefore$ Volume de S é dado por

$$\iiint_S 1\, dx dy dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cood. esféricas}}}{=} \iiint_{S^*} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\theta d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{4}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{4}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \, d\rho \, d\theta$$ C

conservativo

6 $\vec{F}(x,y) = \left(y^2 e^{xy^2} + \dfrac{2x}{y^2+x^2}\right)\vec{i} + \left(2yx\,e^{xy^2} + \dfrac{2y}{y^2+x^2}\right)\vec{j}$

C = curva regular $(x,y) = (3\cos t, 2\operatorname{sen} t)$ $0 \le t \le \pi/2$

tem-se que:

se o campo é conservativo (dito no enunciado) então

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(B) - f(A)$$

B = ponto final de C = $(3\cos \pi/2, 2\operatorname{sen} \pi/2) = (0, 2)$

A = " " " " $= (3\cos 0, 2\operatorname{sen} 0) = (3, 0)$

f = é a função potencial

$f = ?$

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2 e^{xy^2} + \dfrac{2x}{y^2+x^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2yx\,e^{xy^2} + \dfrac{2y}{y^2+x^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow f(x,y) = e^{xy^2} + \ln(y^2+x^2) + h(y)$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial y} = \underbrace{2xy\,e^{xy^2} + \dfrac{2y}{y^2+x^2} + h'(y)}_{\displaystyle \| \atop \displaystyle 2yx\,e^{xy^2} + \dfrac{2y}{y^2+x^2}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad h'(y) = 0 \iff h(y) = C \qquad C =$ constante real

$\therefore f(x,y) = e^{xy^2} + \ln(y^2+x^2) + C$

Escolhendo $C=0$ temos que

$$\int_C \vec{F}\cdot dr = f(0,2) - f(3,0) = e^0 + \ln(4) - \left(e^0 + \ln(9)\right)$$

$$= \ln\left(\frac{4}{9}\right)$$

A

7. $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq \sqrt{3}x,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

$\vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j}$ campo vect. de classe C^1

tal que $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

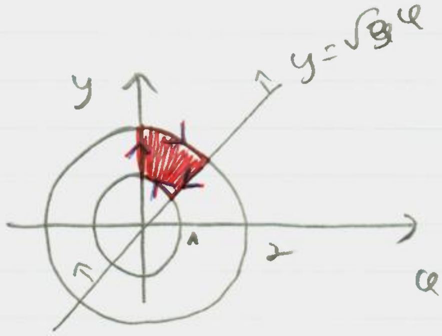
Seja C a fronteira de R orientada no sentido horário

Então
$$\int_C F_1(x,y)dx + F_2(x,y)dy \text{ é:}$$

Pretende-se calcular
$$\int_C \vec{F}(x,y).d\vec{r}$$

onde C é a fronteira de R com orientação horário

Região R



Sendo Ω a região interior de R então pelo teorema de Green sabe-se que

$$\boxed{\int_{C^+} \vec{F}.d\vec{r} = \iint_\Omega \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dxdy}$$

curva orientada anti-horário

Daí
$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = -\int_{C^*} \vec{F}.d\vec{r} = -\iint_\Omega \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dxdy$$

Por hipótese tem-se que $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2$, logo

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\iint_{\Omega} 2 \, dx dy = -2 \underbrace{\iint_{\Omega} 1 \, dx dy}_{\substack{= \iint_R 1 \, dx dy \\ = \text{Área de } R}} =$$

$$= -2 \iint_{\Omega^*} r \, dr d\theta =$$

calculamos o integral com coord. polares

$$= -2 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_1^2 r \, dr \, d\theta = -2 \int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^2 d\theta =$$

$\Omega^* = \{(r,\theta) : \pi/3 \leq \theta \leq \pi/2 \ , \ 1 \leq r \leq 2\}$

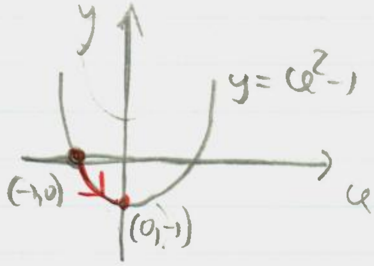
$$= -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \int_{\pi/3}^{\pi/2} 4 - 1 \, d\theta = -3 \left(\pi/2 - \pi/3 \right) = -3 \times \pi/6 = -\pi/2$$

D

8 C é o arco de parábola $y+1 = x^2$ que une $(-1,0)$ a $(0,-1)$.

$\int_C x \, ds$ é:

Curva C



Parametrização de C:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 - 1 \end{cases} \quad -1 \le t \le 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = 1\vec{i} + 2t\vec{j}$$

Logo

$$\int_C x\,ds = \int_{-1}^{0} t \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt = \int_{-1}^{0} t\sqrt{1^2 + (2t)^2}\, dt =$$

$$= \int_{-1}^{0} t\left(1+4t^2\right)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{8}\int_{-1}^{0} \underbrace{8t\left(1+4t^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{u'(t)\,u(t)^{\alpha}} dt$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{(1+4t^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\underbrace{\frac{1}{2}+1}_{\frac{3}{2}}}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{8} \times \frac{2}{3}\left(1 - (5)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(1 - 5\sqrt{5}\right)$$

E

9 W é o trabalho realizado pelo campo

$\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y^3\vec{j} - \vec{k}$ ao longo de C

definida por $\begin{cases} x = 1 \\ z = y^4 \end{cases}$ percorrida desde o ponto

(1,0,0) até ao ponto (1,1,1). Tem-se.

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Parametrização de C

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t^4 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Assim,

$$W = \int_C x\,dx + y^3\,dy - 1\,dz = \int_0^1 1\,x'(t)\,dt + \int_0^1 t^3 y'(t)\,dt +$$

$$- \int_0^1 z'(t)\,dt = \underbrace{\int_0^1 1 \times 0\,dt}_{=0} + \int_0^1 t^3 \times 1\,dt - \int_0^1 4t^3\,dt =$$

$$= \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 - \left[t^4\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$$

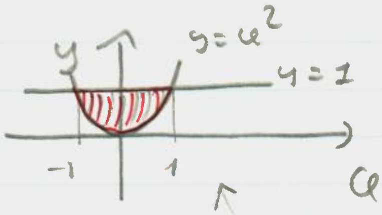
C

10 $\sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \le y \le 1 \wedge z = y - x\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \wedge z = y - x\}$

orientada segundo a normal dirigida para cima

$D = ?$



$y = x^2$

$\vec{F}(x,y,z) = 1\vec{i} + (2y-1)\vec{k}$

Fluxo de $\vec{F}$ através de $\sigma = \iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$

Parametrização de σ

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = v - u \end{cases} \qquad (u,v) \in D$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(1) - \vec{j}(1) + \vec{k}\,1 = 1\vec{i} - 1\vec{j} + 1\vec{k}$$

normal principal está dirigida para cima

Assim,

$$\iint_{\sigma} \underset{\uparrow}{\vec{F}} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{D} (1, 0, 2v-1) \cdot (1, -1, 1)\, du\, dv$$

$(1, 0, 2y-1)$

$\shortparallel$

$(1, 0, 2v-1)$

$$= \iint_{D} 1 + 2v - 1\, du\, dv$$

$$= 2 \iint_{D} v\, du\, dv$$

$$\underset{\uparrow}{=} 2 \int_{-1}^{1} \int_{u^2}^{1} v\, dv\, du = \cancel{2} \int_{-1}^{1} \left[\frac{v^2}{\cancel{2}} \right]_{u^2}^{1} du$$

ver D

$$= \int_{-1}^{1} 1 - u^4\, du = \left[u - \frac{u^5}{5} \right]_{-1}^{1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{5} - \left(-1 + \frac{1}{5} \right) = 2 - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$$

D

11 Seja $\mathcal{E}$ um sólido de volume V e com fronteira σ, uma superfície com a normal interior. Considere o campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2y+z^2)\vec{i} - xy^2\vec{j} + 3z\vec{k}$$

O fluxo de $\vec{F}$ através de σ é:

De acordo com o teorema da divergência, se σ^+ é a fronteira de um sólido com a normal exterior então

$$\iint_{\sigma^+} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_{\mathcal{E}} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

como σ tem a normal interior então

$$\iint_{\sigma} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = -\iiint_{\mathcal{E}} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz =$$

$$= -\iiint_{\mathcal{E}} (\cancel{2xy} - \cancel{2xy} + 3)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= -\iiint_{\mathcal{E}} 3\,dx\,dy\,dz = -3\underbrace{\iiint_{\mathcal{E}} 1\,dx\,dy\,dz}_{\text{Volume de } \mathcal{E}} =$$

$$= -3V$$

B

12 Considere o campo vectorial

$$\phi(x,y,z) = -y\vec{i} + x\vec{j} + (y+z)\vec{k}$$

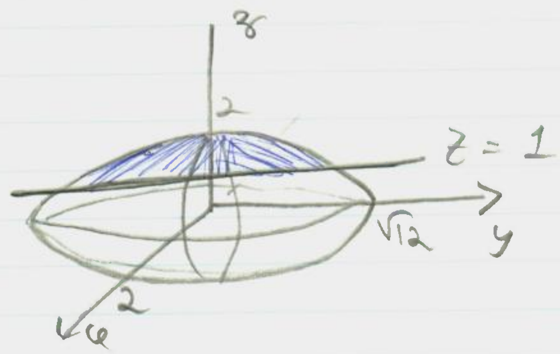
considere a superfície

$$\sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + 3x^2 + \frac{y^2}{3} = 4 \wedge z \geq 1\}$$

Orientada segundo a normal dirigida para cima.

O valor de $\iint_\sigma \text{rot}\,\phi \cdot \vec{n}\, dS$ é :

Qual a superfície σ ?



$$z^2 + 3x^2 + \frac{y^2}{3} = 4 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{4} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} = 1$$

A superfície σ é limitada pelo bordo C

$$\begin{cases} z^2 + 3x^2 + \frac{y^3}{3} = 4 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + \frac{y^3}{3} = 4-1 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{y^3}{9} = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Elipse no plano

Pelo teorema de Stokes sabe-se que se C tiver a orientação positiva em relação à orientação de σ (logo anti-horário) então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_\sigma \operatorname{rot} F \cdot \vec{n} \cdot dS$$

logo, vamos calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Parametrização de C

$$\sigma \begin{cases} x = \cos t \\ y = 3\operatorname{sen} t \\ z = 1 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

(Parametrização da elipse com a orientação anti-horário)

Assim,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C -y\,dx + x\,dy + (y+z)\,dz =$$

$$= \int_C -y\,dx + \int_C x\,dy + \int_C (y+z)\,dz =$$

$$= -\int_0^{2\pi} 3\operatorname{sen} t \times \underbrace{(-\operatorname{sen} t)}_{x'(t)} dt + \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \underbrace{3\cos t}_{y'(t)}\, dt + \overbrace{\int_0^{2\pi} (\quad) \times \underbrace{0}_{z'(t)}\, dt}^{0}$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t \, dt + 3\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt =$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \underbrace{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t}_{1} \, dt = 3 \times 2\pi = 6\pi$$

A

13 Considere a superfície Γ em $\mathbb{R}^3$ com a parametrização

$$\vec{r}(u,v) = (u\cos v,\ 2u\cos v,\ v) \quad (u,v) \in \underbrace{[0,1] \times [0,2\pi]}_{D}$$

A área de Γ é ?

$$\text{Area}(\Gamma) = \iint_\Gamma 1 \, dS = \iint_D \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\,dv = \star$$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & 2\cos v & 0 \\ -u\operatorname{sen} v & -2u\operatorname{sen} v & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(2\cos v - 0) - \vec{j}(\cos v - 0) + \vec{k}\underbrace{(-2u\cos v \operatorname{sen} v + 2u\operatorname{sen} v \cos v)}_{0}$$

$$= 2\cos v\,\vec{i} - \cos v\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

$$\star = \iint_D \sqrt{4\cos^2 v + \cos^2 v} \, du\,dv = \iint_D \sqrt{5}|\cos v| \, du\,dv$$

$$= \sqrt{5}\int_0^1 \int_0^{2\pi} |\cos v| \, dv\,du$$

A

14 S é o sólido de $\mathbb{R}^3$ limitado pelas superfícies
$z = 2-(x^2+y^2)$ e $z = x^2+y^2$

σ é a fronteira de S, orientada com a normal exterior

$\vec{F}(x,y,z) = (xz)\vec{i} + (yz)\vec{j} + \vec{k}$

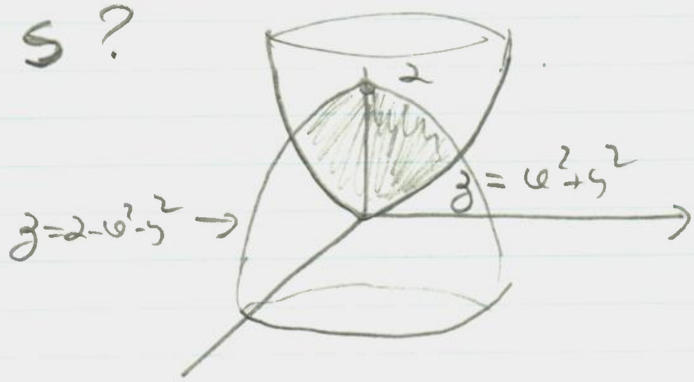
Usando coordenadas cilíndricas o fluxo $\iint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$ é dado por:

De acordo com o teorema da divergência se σ é a fronteira de um sólido com a normal exterior então

$$\iint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_S \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\, dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_S z + z + 0 \, dx\,dy\,dz = 2\iiint_S z\, dx\,dy\,dz$$

Sólido S?

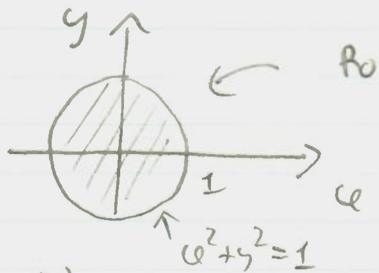


Usando coordenadas cilíndricas então

$$2\iiint_S z\,dx\,dy\,dz \underset{\oplus}{=} 2\iiint_{S^*} z \times r\,dr\,d\theta\,dz = \star$$

$\oplus$ $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$

$S^* = \{(r,\theta,z) : \theta \in [0,2\pi],\ 0 \le r \le 1,\ r^2 \le z \le 2-r^2\}$



Projeção do sólido em xOy

$$\begin{cases} z = 2-(x^2+y^2) \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2-z \\ — \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\star = 2\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{2-r^2} z\,r\,dz\,d\theta\,dr$$

B

15 $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Sabe-se que

$$\int_\gamma \underbrace{(2xy + h(x,y))}_{F_1}\,dx + \underbrace{(x^2 + x\cos y)}_{F_2}\,dy = 0 \leftarrow (*)$$

$\gamma \to$ curva regular fechada. Um possível valor para h é:

Sabemos, do teorema fundamental dos integrais linha, que se $\vec{F}$ é um campo conservativo então

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = 0$$

Assim, se

$$\vec{F}(x,y) = (2xy + h(x,y))\vec{i} + (x^2 + x^2\cos y)\vec{j}$$

é conservativo então temos $(*)$.

Para que tal aconteça temos de ter

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Ora,

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x + \cos y$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2x + h'(x,y)$$

Para as funções dadas no enunciado, a igualdade dá-se quando

$$h(x,y) = \frac{x^2}{2} + \operatorname{sen} y .$$

Repare-se que neste caso,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \left(2xy + \frac{x^2}{2} + \operatorname{sen} y\right)'_y = 2x + \cos y$$

que é igual a $\frac{\partial F_2}{\partial x}$.

B

16 Considere o campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = (2x e^{x^2+y^3} + 1)\vec{i} + 3y^2 e^{x^2+y^3}\vec{j}$$

C é a curva seccionalmente regular que começa em $(1,1)$ e termina em $(0,0)$ e

$$A = \int_C (2x e^{x^2+y^3} + 1)\,dx + 3y^2 e^{x^2+y^3}\,dy .$$

tem-se:

$\vec{F}(x,y)$ está definido em $\mathbb{R}^2$ (simplesmente conexo)

como

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x} &= 6xy^2 e^{x^2+y^3} + 1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= 6xy^2 e^{x^2+y^3} \end{aligned}\right\}$$ são iguais então

$\vec{F}$ é conservativo.

Uma sua função potencial é $f(x,y)$ tal que:

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\, e^{x^2+y^3} + 1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 e^{x^2+y^3} \end{cases}$$

$$f(x,y) = e^{x^2+y^3} + x + h(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \underbrace{3y^2 \cancel{e^{x^2+y^3}} + h'(y)}_{\parallel} \Rightarrow 3y^2 \cancel{e^{x^2+y^3}}$$

$\therefore\ h'(y) = 1 \Rightarrow h(y) = c$, c = const. real

Assim,

$$f(x,y) = e^{x^2+y^3} + x + c$$ é uma função potencial.

Em particular

$$f(x,y) = e^{x^2+y^3} + x + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$ é uma função potencial.

Assim

$$A = f(0,0) - f(1,1) =$$

$$= \left(e^0 + 0 + \cancel{\pi/\sqrt{3}}\right) - \left(e^2 + 1 + \cancel{\pi/\sqrt{3}}\right) =$$

$$= 1 - e^2 - 1 = -e^2 \quad \blacksquare$$

A

Obs: Se este teste for bem resolvido, com cabeça, tudo correrá bem. E nunca mais vos verei!!!!