SEGUNDO TESTE (21/12/2022) duração **2 h** **CÁLCULO NUMÉRICO A**

Número: ________ Curso: ________ Caderno: ________ Nome: ____________________________

A primeira parte do teste é constituida por 5 questões de escolha múltipla.
Nas questões 1 a 5 assinale com $\times$ a resposta correcta.
Cada resposta correcta vale 1 valor. Respostas em branco valem 0 valores. Se responder erradamente ou de forma ambígua ser-lhe-á atribuída uma cotação negativa correspondente a 0.2 valores.
Se a soma das cotações da escolha múltipla for negativa, será atribuído 0 valores à escolha múltipla.

Classificação
EM -
TOTAL-

1. Considere o seguinte integral impróprio: $I = \int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

   O valor da aproximação dado pela regra de Gauss com 2 pontos simples arredondado com 6 casas decimais é:

   ☐ **a)** I_G=2.649624

   ☐ **b)** I_G=1.224745

   ☐ **c)** I_G=1.044466

   ☒ **d)** I_G=1.324812

2. Sejam $x_n = \phi(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$ a sucessão de iteradas gerada pelo método do ponto fixo e α um ponto fixo de $\phi(x)$ único no intervalo $[a, b]$. Sabe-se que $-1 < \phi'(x) < 0, \forall x \in [a, b]$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   ☐ **a)** x_n não converge e α é ponto fixo repulsor.

   ☐ **b)** α é ponto fixo atractor e a ordem de convergência de x_n é $p > 1$.

   ☒ **c)** x_n converge e a ordem de convergência de x_n é $p = 1$.

   ☐ **d)** x_n converge qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$

3. Seja $\alpha \in [0, 1]$ a raiz única da equação não linear $f(x) = 0$, sendo $f(x)$ uma função continua em [0,1]. Sabe-se que $f(0) > 0$, $f(\frac{1}{2}) > 0$, $f(\frac{3}{4}) < 0$, $f(\frac{5}{8}) > 0$ e $f(1) < 0$. Considere a sucessão gerada pelo método da bissecção para obter uma aproximação para α, então tem-se:

   ☐ **a)** $x_3 = \frac{9}{16}$ e $|\alpha - x_3| \leq 0.0625$

   ☒ **b)** $x_3 = \frac{11}{16}$ e $|\alpha - x_3| \leq 0.0625$

   ☐ **c)** $x_3 = \frac{11}{16}$ e $|\alpha - x_3| \leq 0.125$

   ☐ **d)** $x_3 = \frac{13}{16}$ e $|\alpha - x_3| \leq 0.125$

4. Considere a seguinte regra de integração numérica

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = c_1 f(-\frac{1}{3}) + c_2 f(0) + c_3 f(\frac{1}{3}), \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Quais os valores que c_1, c_2 e c_3 devem assumir para que esta regra seja exata para polinómios básicos de grau o mais elevado possível?

- [x] **a)** $c_1 = 3$, $c_2 = -4$, $c_3 = 3$
- [ ] **b)** $c_1 = \frac{5}{9}$, $c_2 = \frac{8}{9}$, $c_3 = \frac{5}{9}$
- [ ] **c)** $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$
- [ ] **d)** $c_1 = 1$, $c_2 = -4$, $c_3 = 1$

5. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + z = 3 \\ 2x + 4y + z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

e a sucessão gerada pelo método de Jacobi $X^{(n)} = G_J X^{(n-1)} + H_J$, $n = 1, 2, ...$, seja qual for $X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$ onde G_J é a matriz de iteração e $H_J \in \mathbb{R}^3$. **Escolha uma ou mais opções corretas**:

- [ ] **a)** A sucessão diverge porque a matriz A do sistema não é de diagonal estritamente dominante.
- [x] **b)** A sucessão converge porque $||G_J|| < 1$.
- [ ] **c)** Nada se pode concluir quanto à convergência da sucessão.
- [ ] **d)** A sucessão não converge porque $||G_J|| > 1$.
- [x] **e)** A sucessão converge porque a matriz A do sistema é de diagonal estritamente dominante.

A segunda parte do teste é constituida por 3 grupos de questões.
Cada resposta deverá estar convenientemente justificada.
Cotações: Questão 6: 5 valores; **Questão 7:** 7 valores; **Questão 8:** 3 valores.

6. Considere a equação não linear $sin(x)cos(x) = x - 1$. a qual tem uma única raiz α no intervalo $[1, 1.5]$.

   a) Verifique que α é um ponto fixo da função $\varphi(x) = sin(x)cos(x) + 1$.

   b) Mostre que a sucessão $\begin{cases} x_0 \in [1, 1.5] \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) \qquad n{=}0,1,2,... \end{cases}$, converge para α e classifique o ponto fixo α justificando convenientemente.

   c) Considerando $x_0 = 1$ e a sucessão definida em b) diga quantas casas decimais significativas pode garantir para a iterada $n = 700$. Justifique devidamente.

7. Considere o seguinte sistema de equações lineares $AX = B$, com $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e

   $B = [-1 \ \ 1 \ \ 0]^T$. Considere além disso, a decomposição da matriz $A = N - P$ em que

   $N = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz invertível, $P \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ e o método iterativo $X^{(n+1)} = GX^{(n)} + H$, $n = 0, 1, 2, ...$

   a) Mostre que ao determinar as expressões de G e H em função de N, P e B de modo a que a solução de X^* de $AX = B$ seja também a solução de $X = GX + H$, obtem exatamente as expressões de G_{GS} e H_{GS} para o método de Gauss-Seidel.

   b) Verifique que o método anterior converge e obtenha a iterada $X^{(1)}$ partido de $X^{(0)} = [1 \ \ 1 \ \ 0]^T$.

   c) Obtenha o número mínimo de iteradas n de modo a ter-se $||X^* - X^{(n)}||_\infty < 10^{-3}$. Justifique.

8. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = te^{3t} - 2y(t), \quad t \in [0, 1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

   a) Verifique que o problema de valor inicial é bem posto, justificando convenientemente.

   b) Determine um valor aproximado para $y(0.25)$ pelo método de Taylor de ordem 2 e $h = 0.25$. Justifique devidamente os cálculos.

Questão 1

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$ Integral impróprio

Aproximação pela regra de Gauss com 2 pontos

$$\frac{b-a}{2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{b+a}{2} = \frac{1}{2}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\right)dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\right)^2}}\,dy \approx$$

mudança de variável

$$\approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right)^2}}\right) = \frac{2.649624}{2}$$

$$= 1.324812$$

opção d)

Questão 3

$\alpha \in [0,1]$ Metodo da Bissecção

$f(0)>0$, $f(\frac{1}{2})>0$, $f(\frac{3}{4})<0$, $f(\frac{5}{8})>0$ e $f(1)<0$

$x_0 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad f(\frac{1}{2})>0 \wedge f(1)<0 \Rightarrow \alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$

$x_1 = (\frac{1}{2}+1)/2 = \frac{3}{4}$ $\quad f(\frac{3}{4})<0 \wedge f(\frac{1}{2})>0 \Rightarrow \alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$

$x_2 = (\frac{1}{2}+\frac{3}{4})/2 = \frac{5}{8}$ $\quad f(\frac{5}{8})>0 \wedge f(\frac{3}{4})<0 \Rightarrow \alpha \in [\frac{5}{2}, \frac{3}{4}]$

$x_3 = (\frac{5}{2}+\frac{3}{4})/2 = \frac{11}{16}$ $\quad |\alpha - x_3| \leq \frac{1}{2^{3+1}} = 0.0625$

opção b)

Questão 4

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \underbrace{c_1 f\left(-\tfrac{1}{3}\right) + c_2 f(0) + c_3 f\left(\tfrac{1}{3}\right)}_{3 \text{ incógnitas}}$$

Para que esta regra seja exata para polinómios básicos de grau o mais elevado possível tem-se que impôr

$$f(x) = x^0 = 1 \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2 \\ -\frac{c_1}{3} + c_2 \times 0 + \frac{c_3}{3} = \int_{-1}^{1} x\,dx = \frac{1^2 - 1^2}{2} = 0 \\ \frac{c_1}{9} + c_2 \times 0 + \frac{c_3}{9} = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{1^2 + 1^2}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$f(x) = x$$

$$f(x) = x^2$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ -c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_3 = \frac{18}{3} = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = -4 \\ c_3 = 3 \end{cases}$$

Opção a)

Questão 6 **5 valores**

$\sin(x)\cos(x) = x - 1 \quad , \quad \alpha \in [1, 1.5]$

a) 1 $\varphi(x) = \sin(x)\cos(x) + 1$ e $f(x) = \sin(x)\cos(x) - x + 1$

$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin(\alpha)\cos(\alpha) - \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(\alpha)\cos(\alpha) + 1 = \alpha \Leftrightarrow$

$\varphi(\alpha) = \alpha$, com $\varphi(x) = \sin(x)\cos(x) + 1 \Leftrightarrow \alpha$ é ponto fixo de $\varphi(x)$ em $[1, 1.5]$

b) 2

1) $\varphi(x)$ está bem definida e é contínua em $\mathbb{R}$

2) $\varphi(x) \in [1, 1.5], \forall x \in [1, 1.5]$?

$\varphi(1) = \sin(1)\cos(1) + 1 = 1.4546\ldots \in [1, 1.5]$

$\varphi(1.5) = \sin(1.5)\cos(1.5) + 1 = 1.07056\ldots \in [1, 1.5]$

$\varphi(x)$ é estritamente decrescente em $[1, 1.5]$ pois

$\varphi'(x) = \cos^4(x) - \sin^2(x) < 0, \forall x \in [1, 1.5]$

logo $1 < 1.07056\ldots \leq \varphi(x) \leq 1.4546\ldots < 1.5$

logo $\varphi(x) \in [1, 1.5], \forall x \in [1, 1.5]$

3) $|\varphi'(x)| = |\cos^2(x) - \sin^2(x)| = |\cos(2x)| \leq |-0.99| = 0.99 = M < 1$

porque $\cos(2) = -0.416\ldots$

$\cos(3) = -0.9899\ldots < 0.99$

e $|\cos(2x)|$ é função crescente em $[1, 1.5]$

Então a sucessão gerada pelo método do ponto fixo $\begin{cases} x_0 \in [1, 1.15] \\ x_k = \varphi(x_{k-1}) \end{cases}$ Converge para α

$|\varphi'(\alpha)| < 1$ pois $\alpha \in [1, 1.5]$ e $|\varphi'(x)| < 0.99 < 1, \forall x \in [1, 1.5]$

Logo α é ponto fixo atractor

c) 2 $x_0 = 1$, $x_1 = \varphi(1) = \sin(1)\cos(1) = 1.45465$

Erro à priori

$|\alpha - x_{700}| < \frac{M^{700}}{1-M} \times |x_1 - x_0| = \frac{0.99}{1-0.99} \times 0.45465 = 0.000404\ldots < 0.5 \times 10^{-3}$

garante-se 3 c.d.s para x_{700}

Questão 7 7 valores

a) Para que X^* seja solução de $X = GX + H$ tem-se
3
que ter $AX = B \Leftrightarrow X = GX + H$

$$AX = B \Leftrightarrow (N-P)X = B \Leftrightarrow NX - PX = B \Leftrightarrow NX = PX + B$$

$$\Leftrightarrow N^{-1}NX = N^{-1}(PX+B) \Leftrightarrow I_3 X = \underbrace{N^{-1}P}_{G}X + \underbrace{N^{-1}B}_{H}$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad A = N - P \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P = N - A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = N^{-1}P = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ -1/15 & 1/12 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/5 & -1/6 \end{bmatrix}$$

$$H = N^{-1}B = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ -1/15 & 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ -1/4 \\ 3/20 \end{bmatrix}$$

$$N = D + L = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = -U = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

logo $G = N^{-1}P = (D+L)^{-1}(-U) = -(D+L)^{-1}U$
$= G_{GS}$

$H = N^{-1}B = (D+L)^{-1}B = H_{GS}$

b) $\|G\|_\infty = \max\left(\left|-\frac{3}{5}\right|, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}+\left|-\frac{1}{6}\right|\right) = \frac{3}{5} = 0.6 < 1$

2

logo a sucessão $\begin{cases} X^{(0)} = [1 \;\; 1 \;\; 0]^T \\ X^{(n)} = G X^{(n-1)} + H, \; n = 1, 2, \dots \end{cases}$ Converge para X^*

$X^{(1)} = G X^{(0)} + H$

$$X^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/5 & -1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/5 \\ -1/4 \\ 3/20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 0 \\ 1/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/5 \\ -1/4 \\ 3/20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/5 \\ -1/4 \\ 7/20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.25 \\ 0.35 \end{bmatrix}$$

c) K mínimo? tal que $\|X^* - X^{(k)}\|_\infty \leq 10^{-3}$

2

Fórmula do erro à priori

$$\|X^* - X^{(k)}\|_\infty \leq \underbrace{\frac{\|G\|_\infty^k}{1 - \|G\|_\infty} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty \leq 10^{-3}}_{\text{impor } (*)}$$

$$X^{(1)} - X^{(0)} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.25 \\ 0.35 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.8 \\ -1.25 \\ 0.35 \end{bmatrix} \qquad \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty = |-1.8|$$

$(*)$ $\dfrac{0.6^k}{1 - 0.6} \times 1.8 \leq 10^{-3}$

$$0.6^k \leq \frac{0.4 \times 10^{-3}}{1.8}$$

$$k \geq \ln\left(\frac{0.4 \times 10^{-3}}{1.8}\right) / \ln(0.6) = 16.467\dots$$

$k_{min} = 17$ iteradas

Questão 8

$$\begin{cases} y'(t) = te^{3t} - 2y(t), & t \in [0,1] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a) $D = \{(t,y) : 0 \leq t \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$ $f(t,y) = te^{3t} - 2y$

0.8

f é continua em D

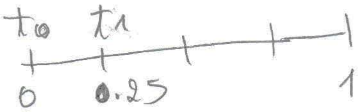
$$\left| \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} \right| = |-2| = 2 = L > 0$$

logo f satisfaz a condição de Lipchitz em $[0,1]$ e o problema é bem posto em relação a y.

b) $h = 0.25$

2.2

$y(0.25) \approx ?$ pelo metodo de Taylor de ordem 2



$t_i = a + hi$

$t_1 = 0.25 \Rightarrow y(0.25) \approx w_1$

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{i+1} = w_i + h\left(f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i)\right) = * \end{cases}$$

$f(t_i, w_i) = t_i e^{3t_i} - 2w_i$

$$f'(t,y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} y'(t) = e^{3t} + t \times 3e^{t} - 2(te^{3t} - 2y)$$

$$= e^{3t}(1 + 3t - 2t) + 4y = e^{3t}(1+t) + 4y$$

$$* = w_i + h\left(t_i e^{3t_i} - 2w_i + \frac{h}{2}\left(e^{3t_i}(1+t_i) + 4w_i\right)\right)$$

$$w_1 = w_0 + 0.25\left(t_0 e^{3t_0} - 2w_0 + \frac{0.25}{2}\left(e^{3t_0}(1+t_0) + 4w_0\right)\right)$$

$$= 0 + 0.25\left(0 \times e^0 - 2 \times 0 + \frac{0.25}{2}\left(e^0(1+0) + 4 \times 0\right)\right)$$

$$= \frac{0.25 \times 0.25}{2} = 0.03125 \approx y(0.25)$$