INSTRUÇÕES PARA O 1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C

LEIA ATENTAMENTE AS SEGUINTES INSTRUÇÕES ATÉ AO FIM

Hora de início do teste: 9.00   Duração: 2 horas (sem tolerância e sem intervalo)

Todas as respostas são dadas no enunciado que vos será distribuído pelo que não necessitam, nem podem, utilizar outras folhas de resposta.

O teste possui 6 folhas agrafadas, que **não podem** desagrafar, que para além desta primeira folha de instruções, é constituído por quatro grupos e por duas folhas em branco que se destinam a rascunho.

No cabeçalho da página 3 (Grupo I), devem preencher completamente os vossos dados pessoais no espaço para isso reservado: nome completo, curso e nº de aluno. **O não preenchimento dos vossos dados pessoais conduz ao anulamento da prova**.

O Grupo I possui 4 perguntas de escolha múltipla. Devem selecionar de forma inequívoca a opção (única) de resposta. Respostas erradas **não são** penalizadas.

Nos Grupos II,III, IV as perguntas são de resposta aberta e são respondidas no próprio enunciado.

A cotação de cada pergunta está assinalada no início da mesma. Devem ter em atenção o espaço destinado à resposta de cada alínea e gerir esse espaço convenientemente (por exemplo, não utilizar letra ou símbolos matemáticos demasiado grandes). As duas últimas folhas (páginas 9 a 12) estão em branco e destinam-se a ser utilizadas como rascunho e **não serão corrigidas**.

No final da prova, o aluno deverá pedir licença para entregar o teste, em seguida deverá colocar a prova, na mesma mesa onde se encontra a folha de presenças (que deverá assinar neste momento) em cima de outras provas que já tenham sido eventualmente entregues.

.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2020/2021
07 DE NOVEMBRO DE 2020

Duração: 2horas.

COTAÇÕES: Grupo I- $4 \times 9\% = 36\%$, Grupo II- 1. a) 12%, b) 9%
2. a)12%, b)9%, c)10% Grupo III- 12%.

Nome:

Nº de aluno: Nº de caderno:

PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES DO GRUPO I ASSINALE COM X O QUADRADO CORRESPONDENTE À ALTERNATIVA CORRECTA.

GRUPO I

[*1,5 valores*] 1. A elipse centrada em $(-1, 2)$, com um dos vértices em $(-4, 2)$ e um dos focos em $(-1 + \sqrt{5}, 2)$ tem por equação:

☐ $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 39 = 0$ ☐ $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0$

☐ $\dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$ ☐ $\dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{(y+2)^2}{2} = 1$

☐ $\dfrac{(x+1)^2}{9} + \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$ ☐ $\dfrac{(x+1)^2}{3} + \dfrac{(y-2)^2}{2} = 1$

[*1,5 valores*] 2. Uma das seguintes funções não é uma norma. Indique qual:

☐ $g_1(x, y, z) = \sqrt{y^2 + z^2} + |x|$ ☐ $g_2(x, y, z) = |x| + 2|y| + 3|z|$

☐ $g_3(x, y, z) = |x + z| + |y - z| + |x|$ ☐ $g_4(x, y, z) = |x - y - z|$

☐ $g_5(x, y, z) = Max\{|y|, |z|\} + |x|$ ☐ $g_6(x, y, z) = 2|x - z| + 4|y| + 7|z|$

[*1,5 valores*] 3. A equação

$$x^3 + y^3 + (x+1)e^z - 8xyz - 2 = 0,$$

define z como função de x e de y numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, z_0) = (1, -1, 0)$. Então:

☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1)=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1)=0$ ☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1)=-\frac{2}{5},\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1)=-\frac{3}{5}$

☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1)=-1,\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1)=0$ ☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1)=-\frac{2}{5},\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1)=-\frac{3}{10}$

☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1)=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1)=-1$ ☐ $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1)=-\frac{1}{5},\ \frac{\partial z}{\partial y}(1,-1)=-\frac{3}{10}$

[*1,5 valores*] 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (2x+3y, x^3-y^3)$, invertível numa vizinhança do ponto $(1,1)$. Então:

☐ $J_{f^{-1}}(5,0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{15} \end{bmatrix}$ ☐ $J_{f^{-1}}(5,0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$ ☐ $J_{f^{-1}}(5,0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$

☐ $J_{f^{-1}}(5,0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$ ☐ $J_{f^{-1}}(5,0) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{15} \end{bmatrix}$ ☐ $J_{f^{-1}}(5,0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{15} \end{bmatrix}$

1º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2020/2021
07 DE NOVEMBRO DE 2020

GRUPO II

[*2,5 valores*] 1. Considere a função real f de duas variáveis reais, definida por

$$f(x,y) = \frac{\log(1-y^2)+\log(1-x^2)}{\sqrt{x^2+y^2-1}}.$$

Indique o seu domínio D e esboce-o. Indique o interior de D. Diga, justificando, se D é um conjunto aberto. O conjunto D é conexo? Justifique.

1. Resposta:

[*2 valores*] 2. a) Considere a função real g, de duas variáveis reais, definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^3+2xy^2}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Mostre que dado um número real positivo δ, existe um número real positivo ϵ, tal que se $(x,y) \neq (0,0)$ e $\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon$, então $|g(x,y)| < \delta$.

2. a) Resposta:

.

[*2 valores*] 2. b) Determine, por definição, as derivadas $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.
Calcule a derivada direcional de g no ponto $(0,0)$ segundo o vector
$\vec{u} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, e diga, justificando, se g é diferenciável no ponto $(0,0)$.

2. b) Resposta:

GRUPO III

[*2,5 valores*] 1. Seja $z = f(u)$ com f uma função continuamente derivável até à segunda ordem e $u = x^2 - 2xy$. Determine as constantes reais $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de forma a que:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \alpha\, u f'(u) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f'(u) + (2x-2y)^{\beta} f''(u).$$

1.) Resposta:

[*2,5 valores*] 2 . Mostre que o sistema

$$\begin{cases} x^3 + 2y^2 - xu + yv^2 = 0 \\ e^{xy} - uv = 0 \end{cases},$$

define implicitamente u e v como funções de x de y, numa vizinhança do ponto $P_0 = (x_0, y_0, u_0, v_0) = (1, 0, 1, 1)$ e determine $\dfrac{\partial u}{\partial x}(1,0)$ e $\dfrac{\partial v}{\partial x}(1,0)$.

2.) Resposta:

GRUPO IV

[*2,5 valores*] Seja $f(x, y, z)$ uma função real, definida num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^3$ e diferenciável no ponto a pertencente a D. Seja $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ um vector não nulo. Mostre que

$$f'_{\vec{u}}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(a)u_3.$$

Resposta:

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*