Cálculo Numérico A

Ficha 2 - Interpolação e Aproximação Polinomial

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função g

x_i	-2	0	1
$g(x_i)$	1	-2	-2.5

Sejam p, q e r os polinómios de grau 2, definidos por

$$p(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{5x}{6} - 2,$$

$$q(x) = \frac{x(x-1)}{6} + (x+2)(x-1) - \frac{5(x+2)x}{6}$$

e

$$r(x) = 1 - \frac{3(x+2)}{2} + \frac{(x+2)x}{3}.$$

Mostre que p, q e r interpolam a função g nos pontos tabelados.
Indique, justificando, qual a relação entre estes polinómios ?

2. Determine os polinómios de Lagrange, de grau menor ou igual a 2, interpoladores das seguintes funções:

a) $f_1(x) = \frac{1}{x}$ nos pontos 1, 2 e 4
b) $f_2(x) = e^x$ nos pontos 0, 1 e 2
c) $f_3(x) = ln(\sqrt{x})$ nos pontos 1, e e e^2
d) $f_4(x) = \sin(\frac{\pi}{6}x)$ nos pontos 1, 2 e 3
e) $f_5(x) = e^{-x}$ nos pontos 0, 0.5 e 1
f) $f_6(x) = \cosh(x)$ nos pontos -1, 0 e 1

3. Construa o polinómio de Lagrange do segundo grau, interpolador da função $h(x) = \cos(\frac{\pi}{4}x)$ nos pontos $x_0 = 0,\ x_1 = 1$ e $x_2 = 4$.
Determine um valor aproximado de $h(0.5)$ e um majorante para o erro absoluto cometido (arredondado a 6 casas decimais e tão pequeno quanto possível).
Compare-o com o erro efetivamente cometido.

4. Dois objetos, A e B, foram lançados para cima, segundo o mesmo plano vertical, de um mesmo local e com inclinações diferentes.
Os instantes e as alturas (a partir do solo) foram registados, tendo sido obtidos os seguintes resultados:

Objeto A

t (segundos)	0	4	10
h (metros)	0	12	0

Objeto B

t (segundos)	0	5	7
h (metros)	0	18	0

.

Utilizando polinómios interpoladores de Lagrange, determine:

a) O instante, t_{col}, em que os dois objetos colidiram.
b) A altura, h_{col}, a que os dois objetos colidiram.
c) As alturas máximas, hA_{max} e hB_{max}, que os dois objetos atingiram.

5. Seja p_n o polinómio de grau menor ou igual a n, interpolador de uma função f nos pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
Justifique que o polinómio q_{n+1} definido por

$$q_{n+1}(x) = p_n(x) + \Omega_{n+1}(x)\Big(f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1})\Big) \ ,$$

onde Ω_{n+1} é a função de Lagrange

$$\Omega_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_0)(x_{n+1}-x_1)\ldots(x_{n+1}-x_n)} \ ,$$

interpola f nos pontos distintos $x_0,\ x_1,\ \ldots, x_{n+1}$.

6. Seja f uma função da qual se conhece a seguinte tabela de valores

x_i	0	2	5	6	7
$f(x_i)$	-3	-1	27	51	$f(7)$

a) Usando a fórmula de Newton, determine o polinómio de grau menor ou igual a três, $p_3(x)$, interpolador de $f(x)$ nos quatro primeiros pontos tabelados.

b) Mostre que o polinómio p_4, definido por

$$p_4(x) = p_3(x) + \frac{x(x-2)(x-5)(x-6)}{70}(f(7) - p_3(7)),$$

interpola f em todos os pontos tabelados.

c) Suponha que f é uma função polinomial de grau menor ou igual a 4. Justifique que se tem a seguinte expressão para o erro de interpolação

$$f(x) - p_3(x) = \frac{x(x-2)(x-5)(x-6)}{70}(f(7) - p_3(7)), \quad \forall x \in [0, 7].$$

7. Mostre que, sendo $x_i = i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, se tem $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} iL_i(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, onde

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}.$$

(*Nota:* Escolha convenientemente a função $y = f(x)$ a interpolar.)

[Extraído de **Fundamentos de Análise Numérica (com Python 3 e R); F. Correia dos Santos, Jorge Duarte, Nuno D. Lopes; Edições SÍLABO (2ª Edição revista e ampliada)**]

8. Seja f uma função da qual se conhece a seguinte tabela de valores :

x	0.3	0.5	1.1
$f(x)$	0.5917	0.4444	0.2268

a) Construa a tabela de diferenças divididas e, a partir dela, determine, por interpolação polinomial quadrática, um valor aproximado de $f(0.65)$.

b) Sabendo que $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq \frac{(n+1)!}{(1+x)^{n+2}}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in\ [0.3,\ 1.1]$, determine majorantes do erro absoluto e do erro relativo (arredondados a 4 casas decimais e tão pequenos quanto possível) associados à aproximação de $f(0.65)$ calculada em **a**).

9. Seja f uma função não negativa da qual se conhece a seguinte tabela de valores :

x	3	6	7
$f(x)$	A	21	B

,

com A, $B \in \mathbb{R}$.
Sabe-se que $f[3,6] = A^2 - 1$ e $f[3,6,7] = 3$.
Determine os valores de A e B.

10. Considere-se uma função real de variável real, g, cujos valores se conhecem nos nodos $x_0 = -2$, $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$:

x	-2	-1	1
$g(x)$	α	β	γ

,

onde α, β e γ são constantes reais.
Estabeleça uma relação entre os valores α, β e γ de forma a que o polinómio $p(x)$, interpolador de g nos pontos da tabela anterior, seja de grau inferior a 2.
Justifique a sua resposta.

11. Seja $g(x)$ uma função contínua e invertível no intervalo $[2,4]$ e da qual se conhecem os seguintes valores (arredondados a 6 casas decimais):

x	2.0	2.6	3.0	4.0
$g(x)$	1.409297	0.900117	0.474453	-0.506802

.

a) A função g admite um único zero real, α, no intervalo $[2,4]$.
Considerando a função inversa de g, g^{-1}, e utilizando a teoria de interpolação polinomial, determine um valor aproximado, $\widehat{\alpha}$, de α.
(Apresente o valor de $\widehat{\alpha}$ com 6 casas decimais, devidamente arredondadas, utilizando o mesmo procedimento nos cálculos intermédios).

b) Sabendo que $g(x) = \sin(x) + \frac{1}{x}$ e que $\alpha = 3.436828912\ldots$, indique majorantes (com 6 casas decimais e tão pequenos quanto possível), para $|\epsilon_\alpha|$ e r_α.

12. Considere uma função polinomial definida por

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \ ,$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ e $a_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Prove que, para qualquer conjunto de nodos distintos $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ se tem

$$p_n[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = a_n.$$

13. Considere a seguinte tabela de diferenças divididas de uma função real f.

x	$f(x)$	$f[\,,\,]$	$f[\,,\,,\,]$
-1	66		
		-66	
0	a		c
		b	
1	-108		

a) Indique, justificando, os valores das constantes a, b e c.

b) Determine a expressão analítica do polinómio $p_2(x)$, interpolador da tabela anterior.

c) Indique um valor aproximado de $f(-0.3)$.

14. Considere a função seccionalmente polinomial, $S(x)$, definida por:

$$\begin{cases} x^2 \quad , \quad -1 \leq x < 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx \quad , \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 - x \quad , \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases} ,$$

onde a, b e c são constantes reais.
Diga, justificando, se $S(x)$ pode ser um spline cúbico.

15. Considere a seguinte tabela de valores de uma função g

x	1	2	4	8
$g(x)$	-2	6	2	40

Determine a expressão do spline cúbico natural, $s(x)$, interpolador de $g(x)$ nos pontos tabelados.

16. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x	-1	0	2	4
$f(x)$	-12	-4	0	68

a) Usando a fórmula de Newton, determine o polinómio de grau menor ou igual a três, $p_3(x)$, interpolador de $f(x)$ em todos os pontos tabelados.

b) Sabe-se que $f'(-1) = 16$ e $f'(4) = 66$.
Determine a expressão do spline cúbico completo, $S(x)$, interpolador de $f(x)$ nos pontos tabelados.
Que conclusão pode tirar do resultado obtido? Justifique.

17. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	-9	-5	3	3

Determine a expressão do spline cúbico misto, $S(x)$, interpolador de $f(x)$ nos pontos tabelados, que satisfaz as condições de fronteira $S''(-2) = 16$ e $S'(1) = -8$.

18. A seguinte tabela representa a população da China (em milhares de milhões de habitantes) arredondada a 5 dígitos:

t	1990	2000	2010	2020
$P(t)$	1.1769	1.2906	1.3688	1.4393

Suponha que há uma relação linear entre a data t (em anos) e a população $P(t)$, isto é, que se verifica a relação $p_1(t) = \alpha t + \beta$, onde α e β são constantes reais ($\alpha \neq 0$). Com base nestes dados, utilize o método dos mínimos quadrados para obter uma estimativa da população chinesa em 2015.

19. Considere a tabela de valores da função f

x_i	-3	0	2
$f(x_i)$	2	4	12

a) Determine o polinómio de grau menor ou igual a 1 que melhor aproxima a função tabelada, no sentido dos mínimos quadrados, no intervalo $[-3, 2]$.

b) Mostre que $\displaystyle\sum_{i=0}^{2}(f(x_i) - (\gamma_1 x_i + \gamma_0))^2 \geq \frac{200}{19},\ \forall \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$.

c) Seja $p_2(x)$ o polinómio de grau menor ou igual a 2 interpolador de f nos pontos tabelados.
Justifique que a aproximação quadrática que melhor aproxima o conjunto de pontos $(-3, 2),\ (0, 4),\ (2, 12)$, no sentido dos mínimos quadrados, é o polinómio p_2.

20. Determine as constantes reais k_0, k_1, k_2 tais que a função polinomial

$$g(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2$$

seja a melhor aproximação de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ nos pontos $-1,\ -\frac{3}{5},\ -\frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{5},\ 1$, utilizando o método dos mínimos quadrados.
Calcule o erro quadrático.

21. **Exercício computacional** (R ou Phyton)
Dada uma função $f(x)$ e um conjunto de nodos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, implemente um programa que lhe permita construir o polinómio de Lagrange, interpolador da função f nos pontos atrás considerados.
Utilize como exemplo de aplicação a função e os nodos considerados no exercício **3**.

22. **Exercício computacional** (R ou Phyton)
Para cada uma das alíneas **a**) a **f**) do exercício **2**, e nos intervalos previamente definidos, imprima:

a) Os gráficos conjuntos das funções consideradas e dos respetivos polinómios interpoladores de Lagrange ($p(x)$).

b) O gráfico da função "erro de interpolação polinomial", $E(x)$, definido por
$E(x) = f_i(x) - p(x)\ ,\ i = 1, 2, \ldots, 6$.