Análise Matemática II C
2022/23 (2º semestre)

Lista 8 - Integrais Curvilíneos de campos de vectores. Teorema de Green. Integrais de Superfície. Teorema de Stokes. Teorema da Divergência.

1. Calcule os seguintes integrais de linha:

   (a) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (2x+y)ds$, onde $\mathcal{C}$ é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(0,2)$ e $(3,2)$;

   (b) $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} (x+y^2)ds$, onde $\mathcal{C}$ é a linha que a partir do ponto $A=(2,0)$ percorre a circunferência de equação $x^2+y^2=4$ no sentido horário até ao ponto $(-2,0)$ e regressa a A pelo eixo $(0x)$.

   (c) $\displaystyle\int_C \frac{1}{1+x}ds$, onde a curva C é parametrizada por
   $$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \frac{2}{3}t^{3/2}\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 3;$$

   (d) $\displaystyle\int_C \frac{x}{1+y^2}ds$, onde a curva C é parametrizada por
   $$x = 1+2t, \quad y = t, \quad 0 \leq t \leq 1;$$

   (e) $\displaystyle\int_C 3x^2yz\, ds$, onde a curva C é parametrizada por
   $$x = t, \quad y = t^2, \quad z = \frac{2}{3}t^3, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

2. Determine o valor do integral curvilíneo do campo $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ ao longo da linha (L), definida por:
   $$\begin{cases} x^2/4 + y^2/25 = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$
   percorrida num dos sentidos.

3. Determine o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}$ ao deslocar uma partícula ao longo da curva C, sabendo que:

   (a) $\vec{F}(x,y,z) = xy\ \vec{i} + 2z\ \vec{j} + (y+z)\ \vec{k}$ e C é a curva associada à função vectorial $\vec{r}(t) = t\ \vec{i} + t\ \vec{j} + 2t^2\ \vec{k}$, com $t \in [0,1]$;

   (b) $\vec{F}(x,y,z) = 5e^{\sin(\pi x)}\ \vec{i} - 4e^{\cos(\pi x)}\ \vec{j}$ e C é a curva associada à função vectorial $\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\ \vec{i} + 2\ \vec{j} - \log(t+1)\ \vec{k}$, com $t \in [0, \frac{\pi}{6}]$;

   (c) $\vec{F}(x,y,z) = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} - z\ \vec{k}$ e C é a curva dada por $\begin{cases} x = 1 \\ z = y^4 \end{cases}$, percorrida desde o ponto $(1,0,0)$ até ao ponto $(1,1,1)$.

4. Calcule os seguintes integrais curvilíneos ao longo das curvas indicadas:

   (a) $\int_C x^2 dy + y^2 dx$ onde C é a curva de equação $x^2 + 4y^2 = 4$ com $y \geq 0$, percorrida no sentido horário;

   (b) $\int_C x^2 dx + y^2 dy$ onde C é o segmento de recta $[AB]$ com $A \equiv (0,0)$ e $B \equiv (1,1)$ percorrido de A até B;

   (c) $\int_C (2x^2+2xy+y^2)dx + (x^2+2xy+3y^2)dy$ onde C é a circunferência orientada dada por

   $$\begin{aligned} x &= R\cos t \\ y &= R\sin t \end{aligned}$$

   com $t \in [0, 2\pi]$.

5. Verifique se os seguintes integrais curvilíneos são ou não independentes do caminho e calcule-os:

   (a) $\int_C (x+y)dx + (x+y^3)dy$, entre os pontos $(1,1)$ e $(2,2)$;

   (b) $\int_C (9x^2+4y^2)dx + (8xy+5y^4)dy$, ao longo do polígono de vértices $(1,0)$, $(2,2)$ e $(5,3)$;

   (c) $\int_C (x + ye^{xy})dx + (\pi\cos(\pi y) + xe^{xy})dy$ onde C é a curva orientada de equações paramétricas

   $$\begin{cases} x(t) = \cos(\pi e^t) \\ y(t) = \sqrt[3]{e^t - 1} \end{cases},$$

   com $t \in [0, \log 2]$.

6. Determine $f(x,y)$ tal que $\int_C y^2dx + f(x,y)dy = 0$, onde C é uma curva simples e fechada do plano xOy.

7. Verifique que $\int_C f\left(\frac{x}{y}\right)\frac{xdy-ydx}{x^2} = 0$, para qualquer contorno fechado C que não passe nos eixos e qualquer função f de classe C^1.

8. Considere o campo vectorial $\vec{F}(x,y) = xe^{x^2+y^2}\vec{i} + ye^{x^2+y^2}\vec{j}$.

   (a) Determine $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, em que C é a trajectória de uma partícula que se move do ponto $(0,0)$ até ao ponto $(2,2)$ sobre um segmento de recta.

   (b) Verifique que $\vec{F}$ é conservativo.

   (c) Seja C uma curva fechada em $\mathbb{R}^2$ de classe C^1 . Diga, justificando, o valor de $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

9. Use o Teorema de Green para calcular

$$\int_C \frac{1}{y}dx + \frac{1}{x}dy \ ,$$

   ao longo da curva fechada C, percorrida no sentido positivo, que é a fronteira da região plana R definida por $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ y\geq 1, x\leq 4, y\leq\sqrt{x}\}$.

10. Seja C uma curva simples, fechada, percorrida no sentido positivo e fronteira de uma região plana R simplesmente conexa. Mostre que $\int_C x^2dy = 2\int\int_R xdxdy$.

11. Sejam u e v funções reais de duas variáveis reais, com derivadas parciais de primeira ordem contínuas num aberto contendo a bola fechada R cuja fronteira é a circunferência de equação $x^2+y^2=1$.

    Sejam $\vec{F}$ e $\vec{G}$ dois campos vectoriais definidos por $\vec{F}(x,y) = v(x,y)\vec{i} + u(x,y)\vec{j}$ e $\vec{G}(x,y) = (u_x-u_y)\vec{i} + (v_x-v_y)\vec{j}$.
    Sabendo que sobre a fronteira de R se tem $u(x,y)=1$ e $v(x,y)=y$, prove que

$$\int\int_R \vec{F}.\vec{G}dxdy = -\pi \ .$$

12. Determine $\iint_S f(x,y,z)\,dS$ sobre a superfície parametrizada por $\vec{r} : D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ nos seguintes casos:

    (a) $f(x,y,z) = xy+z$, $\vec{r}(u,v) = (u,v,u+v)$, $D=[0,1]^2$;

(b) $f(x,y,z) = y$, $\vec{r}(u,v) = (u^2, u, v)$, $D = [0,1]^2$;

(c) $f(x,y,z) = x^2$, $\vec{r}(u,v) = (2\cos u, 2\sin u, v)$, $D = [0, 2\pi] \times [0, 2]$.

13. Calcule a área da superfície $\mathcal{S}$, onde

(a) $\mathcal{S}$ é a superfície cónica de equação $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ abaixo do plano $z = 1$;

(b) $\mathcal{S}$ é o paraboloide de equação $z = x^2 + y^2$ abaixo do plano $z = 1$;

(c) $\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge 0 \leq x \leq \frac{y}{2} \wedge \frac{1}{2} \leq z \leq 1\right\}$.

14. Calcule os seguintes integrais de superfície de campos de vectores:

(a) $\int\int_\sigma \vec{F}.\vec{n}\ dS$ onde $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} - x\vec{j} + 8\vec{k}$ e σ é a parte do parabolóide de equação $z = 9 - x^2 - y^2$, situada acima do plano xOy e $\vec{n}$ é a normal dirigida para cima;

(b) $\int\int_\sigma \vec{F}.\vec{n}\ dS$ onde $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} - \vec{j} + 2x^2\vec{k}$ e σ é a porção do parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$, limitada pelas superfícies cilíndricas dadas por $x = 1 - y^2$ e $x = y^2 - 1$ orientada com a normal $\vec{n}$ dirigida para baixo;

(c) $\int\int_\sigma \vec{F}.\vec{n}\, dS$ onde $\vec{F}(x,y,z) = (2x+1)\vec{k}$ e σ é a porção da superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, situada entre os planos dados por $z = 1$ e $z = -\dfrac{1}{2}$, orientada com a normal exterior unitária $\vec{n}$.

15. Seja D a região de $\mathbb{R}^2$ definida pelas inequações $4 \leq x^2 + y^2 \leq 16$ e $|x| \leq y$.

(a) Represente geometricamente a região D.

(b) Considere a superfície σ em $\mathbb{R}^3$ definida por $\sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \wedge (x,y) \in D\}$, orientada segundo a normal dirigida para cima. Calcule o fluxo de $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j}$ através da superfície σ.

16. Seja σ a superfície em $\mathbb{R}^3$ definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ e $z \geq 1$ orientada segundo a normal $\vec{n}$ dirigida para cima. Designe por C a curva definida pelo bordo da superfície σ, orientada no sentido positivo relativamente a σ.

(a) Considere o campo vectorial $\vec{\Phi}(x,y,z) = y\vec{i} - x\vec{j} + xz^2\vec{k}$. Determine $\int_C \vec{\Phi} \cdot d\vec{r}$.

(b) Considere o campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = -z^2\vec{j} - 2\vec{k}$. Usando o Teorema de Stokes, determine o integral $\int\int_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}dS$.

17. Designe por C a curva em $\mathbb{R}^3$ definida pelas equações $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ e $z = 1$, orientada num dos sentidos.

(a) Determine a equação da recta tangente à curva C no ponto $\big(\sqrt{3}, \dfrac{3}{2}, 1\big)$.

(b) Considere o campo vectorial $\vec{\Phi}(x,y,z) = y\vec{i} + z^3\vec{j} + xy\vec{k}$. Determine $\int_C \vec{\Phi}\cdot d\vec{r}$.

(c) Considere o campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = (x - 3z^2)\vec{i} - y\vec{j} - \vec{k}$ e a superfície

$$\sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = 2 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} \wedge z \geq 1\}.$$

Suponha σ orientada segundo a normal dirigida para cima e determine $\int\int_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}dS$.
Sugestão: Use a alínea anterior e o teorema de Stokes.

18. Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 \leq y \leq x\}$. Considere em $\mathbb{R}^3$ a superfície definida por

$$\sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; (x,y) \in D \wedge z = x^2 + y\}.$$

(a) Escreva a equação do plano tangente à superfície σ no ponto $\big(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{7}{12}\big)$.

(b) Seja $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{j} - xy\vec{k}$. Suponha σ orientada segundo a normal dirigida para cima e determine $\int\int_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}dS$.

19. Calcule o fluxo de $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + xy\vec{j} + yz\vec{k}$ através da superfície $\mathcal{S}$, fronteira do sólido definido por

$$E = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\; x^2 + y^2 \leq 1 \wedge y \geq 0 \wedge 0 \leq z \leq 1\Big\}$$

20. Considere o campo vectorial $\vec{\Phi}$ definido por

$$\vec{\Phi}(x,y) = (xy^2 + yx)\vec{i} + (x^2y + \frac{x^2}{2} + y)\vec{j}.$$

Verifique que o campo vectorial é conservativo e determine f tal que $\vec{\Phi} = \nabla f$.

21. Considere a região sólida $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq z \leq 2\}$. Seja $\vec{F}$ o campo vectorial definido por $\vec{F}(x,y,z) = x^3\vec{i} + x^2y\vec{j} + x^2z\vec{k}$.

   (a) Calcule o integral triplo $\int\int\int_E 5x^2 dxdydz$.

   (b) Use o Teorema da divergência para calcular o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície $\mathcal{S}$ correspondente à fronteira de E orientada segundo a normal exterior unitária.

22. Seja $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 \leq x \leq 1\}$. Considere em $\mathbb{R}^3$ a superfície definida por $\sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in D \wedge z = 2x + y^3\}$.

   (a) Escreva a equação do plano tangente à superfície σ no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{9}{8})$.

   (b) Seja $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j}$. Suponha σ orientada segundo a normal dirigida para cima e determine $\int\int_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n} dS$.

23. Use o Teorema da Divergência para calcular o fluxo do campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$, através da superfície esférica de centro na origem e raio r.

24. Calcule, utilizando o teorema da divergência, os seguintes integrais de superfície

   (a)
   $$\int\int_\sigma (x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}) \cdot \vec{n} \ dS \ ,$$
   onde σ é a superfície fronteira do sólido E dado por $E = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq a^2 \wedge 0 \leq z \leq 2\Big\}$, $a \neq 0$, orientada com a normal unitária exterior;

   (b)
   $$\int\int_\sigma \vec{F}.\vec{n} \ dS \ ,$$
   onde $\vec{F}(x,y,z) = y^3e^z\vec{i} - xy\vec{j} + x\operatorname{arctg} y \, \vec{k}$ e σ é a fronteira do sólido limitado pelos três planos coordenados e pelo plano $x+y+z=1$, orientada com a normal exterior $\vec{n}$.

25. Sendo $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e σ a porção de parabolóide dado por $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = -\dfrac{z-4}{4}$, com $z \geq 0$ e orientada com a normal unitária $\vec{n}$ dirigida para baixo, determine $\int\int_\sigma \vec{F}.\vec{n} \ dS$.

26. Seja E a região sólida de fronteira σ, limitada pelas superfícies de equações $z = 0$, $x^2 + y^2 = 2$ e $x^2 + z = 4$. Consideremos o campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = e^x y\vec{i} + (e^z - \dfrac{1}{2}e^x y^2)\vec{j} + 4z\vec{k}$.

    (a) Calcule o volume de E;

    (b) Use o Teorema da Divergência para calcular $\int\int_\sigma \vec{F}.\vec{n}\, dS$, onde $\vec{n}$ é a normal unitária exterior.

27. Verifique o Teorema de Stokes para o campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = x^3\vec{j}$ e sendo (σ) a face exterior da superfície parabólica $z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25}$ com $z \leq 1$.

28. Considere o campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + x\vec{k}$

    (a) Utilizando directamente a definição determine o fluxo do rotacional de $\vec{F}(x, y, z)$ através da face exterior da superfície

    $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

    (b) Determine o fluxo referido na alínea anterior por aplicação do Teorema de Stokes.

29. Usando o Teorema de Stokes, calcule $\int\int_\sigma rot\vec{F}.\vec{n}\, dS$ onde $\vec{F}(x, y, z) = 2y\vec{i} + z\vec{j} + 3\vec{k}$ e σ é a porção de parabolóide de equação $z = 1 - x^2 - y^2$, com $z \geq 0$, orientada com a normal dirigida para cima.