CN A – Interpolação e Aproximação Polinomial

Felipe B. Pinto 71951 – EQB

17 de dezembro de 2024

Conteúdo

Questão 2

Determine os polinómios de Lagrange, de grau menor ou igual a 2, interpoladores das seguintes funções:

a) $f_1(x) = 1/x$ nos pontos: 1, 2 e 4

b) $f_2(x) = e^x$ nos pontos: 0, 1 e 2

c) $f_3(x) = \ln\sqrt{x}$ nos pontos: $1, e, e^2$

d) $f_4(x) = \sin x\frac{\pi}{6}$ nos pontos: 1, 2 e 3

e) $f_5(x) = e^{-x}$ nos pontos: 0, 0.5 e 1

f) $f_6(x) = \cosh x$ nos pontos: -1, 0 e 1

Q2 a. $f_1(x) = 1/x; \{1, 2, 4\}$

Resposta

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i\, L_i(x) = \frac{1}{1}\, L_0 + \frac{1}{2}\, L_1 + \frac{1}{4}\, L_2 =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2 - 6\,x + 8) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}(x^2 - 5\,x + 4)\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}(x^2 - 3\,x + 2)\right) =$$

$$x^2\frac{1}{8} - x\frac{7}{8} + \frac{7}{4};$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \prod_{j=i+1}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j};$$

$$L_0(x) = \prod_{j=0}^{0-1} \frac{x - x_j}{1 - x_j} \prod_{j=0+1}^{2} \frac{x - x_j}{1 - x_j} = \frac{x-2}{1-2}\,\frac{x-4}{1-4} = \frac{1}{3}(x^2 - 6\,x + 8);$$

$$L_1(x) = \prod_{j=0}^{1-1} \frac{x - x_j}{2 - x_j} \prod_{j=1+1}^{2} \frac{x - x_j}{2 - x_j} = \frac{x-1}{2-1}\,\frac{x-4}{2-4} = -\frac{1}{2}(x^2 - 5\,x + 4);$$

$$L_2(x) = \prod_{j=0}^{2-1} \frac{x - x_j}{4 - x_j} \prod_{j=2+1}^{2} \frac{x - x_j}{4 - x_j} = \frac{x-1}{4-1}\,\frac{x-2}{4-2} = \frac{1}{6}(x^2 - 3\,x + 2)$$

Q2 b. $f_2(x) = e^x; \{0, 1, 2\}$

Resposta

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \, L_i(x) = \cdots = x^2 \, \frac{e^2 - 2\,e + 1}{2} - x^1 \, \frac{e^2 - 4\,e + 3}{2} + 1;$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \prod_{j=i+1}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \ldots$$

Q2 c. $f_3(x) = \ln\sqrt{x}; \{1, e, e^2\}$

Resposta

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i\, L_i(x) = \cdots = x^2\, \frac{1}{2\,e - 2\,e^3} + x^1\, \frac{e+1}{2\,e^2 - 2\,e} + x^0\, \frac{e+2}{2 - e^2};$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\ \prod_{j=i+1}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \ldots$$

Q2 d. $f_4(x) = \sin x\frac{\pi}{6}; \{1, 2, 3\}$

Resposta

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i\, L_i(x) = \cdots = x^2\, \frac{3 - 2\sqrt{3}}{4} + x^1\, \frac{8\sqrt{3} - 11}{4} + x^0\, \frac{5 - 3\sqrt{3}}{2};$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \prod_{j=i+1}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Q2 e. $f_5(x) = e^{-x}; \{0.0, 0.5, 1.0\}$

Resposta

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i \, L_i(x) = \cdots = x^2 \, \frac{2 + 2/e - 4/\sqrt{e}}{+} x^1 \, \frac{-3 - 1/e + 4/\sqrt{e}}{+} 1;$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \prod_{j=i+1}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Q2 f. $f_6(x) = \cosh x; \{-1, 0, 1\}$

Resposta

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i\, L_i(x) = \cdots = x^2\,(\cosh 1 - 1) + 1;$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \prod_{j=i+1}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Questão 3

Construa o polinómio de Lagrange do segundo grau, interpolador da função $h(x) = \cos(\pi\,4\,x)$ nos pontos $x_0 = 0, x_1 = 1 e x_2 = 4$. Determine um valor aproximado de $h(0.5)$ e um majorante para o erro absoluto cometido (arredondado a 6 casas decimais e tão pequeno quanto possível). Compare-o com o erro efetivamente cometido.

Resposta

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} y_i\, L_i(x) = h(0)\, L_0(0) + h(1)\, L_1(1) + h(4)\, L_2(4) =$$

$$= \cdots = x^2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) + x^1\left(-\frac{7}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + 1;$$

$$\widehat{h(0.5)} \cong p_2(0.5) = (1/2)^2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right) + (1/2)^1\left(-\frac{7}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + 1 \cong 0.871;$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0}^{i-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \prod_{j=i+1}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Questão 7

Mostre que, sendo $x_i = i, i = 0, 1, \ldots, n$, se tem $\sum_{i=0}^{n} i \, L_i(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, onde

$$\boldsymbol{L_i(x) = \frac{\prod_{j=0}^{n} (x - x_j)}{\prod_{j=0}^{n} (x_i - x_j)}}$$

(nota: Escolha convenientemente uma função $y = f(x)$ a interpolar)

Questão 8

Seja f uma função da qual se conhece a seguinte tabela de valores:

x	0.3	0.5	1.1
$f(x)$	0.5917	0.4444	0.2268

Q8 a.

Construa a tabela de diferenças divididas e, a partir dela, determine, por interpolação polinomial quadrática, um valor aproximado de $f(0.65)$.

Resposta

x	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$
0.3		
	$\frac{0.4444-0.5917}{0.5-0.3} = -0.7365$	
0.5		$\frac{f[0.5,1.1]-f[0.3,0.5]}{1.1-0.3} = 0.4673$
	$\frac{0.2268-0.4444}{1.1-0.5} = -0.3627$	
1.1		

$$f(0.65) = p_2(0.65) \cong$$

$$\cong 0.5917 + ((0.65) - 0.3)(-0.7365) + ((0.65)^2 - 0.5\,(0.65) + 0.25)(0.4673) \cong$$
$$\cong 0.3585;$$

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] =$$
$$= f(0.3) + (x - 0.3)f[0.3, 0.5] + (x - 0.3)(x - 0.5)f[0.3, 0.5, 1.1] \cong$$
$$\cong 0.5917 + (x - 0.3)0.4673 + (x^2 - 0.5\,x + 0.25) - 0.3627$$

Q8 b.

Sabendo que $|f^n(x)| \le \frac{(n+1)!}{(1+x)^{n+2}}, n \in \mathbb{N}, x \in [0.3, 1.1]$ determine majorantes do erro absoluto e do erro relativo (arredondados a 4 casas decimais e tão pequenos quanto possível) associados à aproximação de $f(0.65)$ calculada em a).

Resposta

Erro absoluto:

$\eta_{f(0.65)} = |f(0.65) - p_2(0.65)| \le \dots$
$\le 0.0255;$

Erro relativo:

$$r_{f(0.65)} = \frac{|f(0.65) - p_2(0.65)|}{|f(0.65)|} \le \frac{|f(0.65) - p_2(0.65)|}{0.333} \cong \dots$$
$\cong 0.077;$

$f(0.65) \in I = \left[p_2(0.65) - \eta_{f(0.65)}, p_2(0.65) + \eta_{f(0.65)}\right] =$
$= \left[p_2(0.65) - \eta_{f(0.65)}, p_2(0.65) + \eta_{f(0.65)}\right] = \dots$
$= [0.3330, 0.3840]$

Questão 9

Seja f uma função não negativa da qual se conhece a seguinte tabela de valores:

x	3	6	7
$f(x)$	A	21	B

Sabe-se que:

- $A, B \in \mathbb{R}$
- $f[3,6] = A^2 - 1$
- $f[3,6,7] = 3$

Determine os valores de A e B

Resposta

x	$f(x)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$
3	A		
		$\frac{21-A}{6-3}$	
6	21		$\frac{f[6,7]-f[3,6]}{7-3}$
		$\frac{B-21}{7-6}$	
7	B		

$$f[3,6] = A^2 - 1 = \frac{21 - A}{6 - 3} \implies A = 8/3 \wedge A = -3 \wedge A \in \mathbb{R}^+ \implies A = 8/3;$$

$$f[3,6,7] = 3 = \frac{(B - 21) - (A^2 - 1)}{4} = \frac{B - 21 - (8/3)^2 + 1}{4} \implies B = 352/9$$

Questão 10

Considere-se uma função real de variável real, g, cujos valores se conhecem nos nodos $x_0 = -2, x_1 = -1$ e $x_2 = 1$:

x	-2	-1	1
$g(x)$	α	β	γ

Questão 11

Seja $g(x)$ uma função contínua e invertível no intervalo $[2, 4]$ e da qual se conhecem os seguintes valores (arredondados a 6 casas decimais):

x	2.0	2.6	3.0	4.0
$g(x)$	1.409297	0.900117	0.474453	-0.506802

Q11 a.

A função g admite um único zero real, α, no intervalo $[2,4]$. Considerando a função inversa de g, g^{-1}, e utilizando a teoria de interpolação polinomial, determine um valor aproximado, $\widehat{\alpha}$, de α. (Apresente o valor de α com 6 casas decimais, devidamente arredondados utilizando o mesmo procedimento nos cálculos intermédios).

Resposta

$$\widehat{\alpha} = p_{3,g^{-1}}(0) =$$

$$\cong 2.0 + \begin{pmatrix} (0-1.409297)\,(-1.178\,365) \\ +(0-1.409297)\,(0-0.900117)\,(-0.255\,291) \\ +(0-1.409297)\,(0-0.900117)\,(0-0.474453)\,(-0.162\,686) \end{pmatrix} \cong$$

$$\cong 3.434\,736;$$

$$p_{3,g^{-1}}(y) = g^{-1}(y_0) + \sum_{i=0}^{3-1}\left(\prod_{j=0}^{i} y-y_j\right) g^{-1}_{[y_0,\ldots,y_{i+1}]} =$$

$$= g^{-1}(y_0) + \begin{pmatrix} (y-y_0)g^{-1}[y_0,y_1] \\ +(y-y_0)(y-y_1)g^{-1}[y_0,y_1,y_2] \\ +(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)g^{-1}[y_0,y_1,y_2,y_3] \end{pmatrix} =$$

$$= 2.0 + \begin{pmatrix} (y-1.409297)\,(-1.178\,365) \\ +(y-1.409297)\,(y-0.900117)\,(-0.255\,291) \\ +(y-1.409297)\,(y-0.900117)\,(y-0.474453)\,(-0.162\,686) \end{pmatrix}$$

y	$g^{-1}(y)$	$g^{-1}[\cdot,\cdot]$	$g^{-1}[\cdot,\cdot,\cdot]$	$g^{-1}[\cdot,\cdot,\cdot,\cdot]$
1.409297	2.0			
		−1.178 365		
0.900117	2.6		−0.255 291	
		−0.939 708		−0.162 686
0.474453	3.0		0.056 432	
		−1.019 103		
−0.506802	4.0			

$$g^{-1}[y_0,y_1] = \frac{2.6-2.0}{0.900117-1.409297} \cong -1.178\,365;$$

$$g^{-1}[y_1,y_2] = \frac{3.0-2.6}{0.474453-0.900117} \cong -0.939\,708;$$

$$g^{-1}[y_2,y_3] = \frac{4.0-3.0}{-0.506802-0.474453} \cong -1.019\,103;$$

$$g^{-1}[y_0,y_1,y_2] = \frac{-0.939\,708+1.178\,365}{0.474453-1.409297} \cong -0.255\,291;$$

$$g^{-1}[y_1,y_2,y_3] = \frac{-1.019\,103+0.939\,708}{-0.506802-0.900117} \cong 0.056\,432;$$

$$g^{-1}[y_0,y_1,y_2,y_3] = \frac{0.056\,432+0.255\,291}{-0.506802-1.409297} \cong -0.162\,686$$

Q11 b.

Sabendo que $g(x) = sin(x) + 1/x$ e que $\alpha = 3.436828912\ldots$, indique majorantes (com 6 casas decimais e tão pequenos quanto possível), para $|\epsilon_\alpha|$ e r_α

Resposta

$$|\epsilon_\alpha| = |\widehat{\alpha} - \alpha| \leq |3.434\,737 - 3.436\,829| \cong 0.002\,093;$$

$$r_\alpha = \frac{|\epsilon_\alpha|}{|\alpha|} \leq \frac{0.002\,093}{3.436\,829} \cong 0.000\,609$$

Questão 14

Considere a função seccionalmente polinomial, $S(x)$, definida por:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2,} & \boldsymbol{-1 \leq x < 0} \\ \boldsymbol{a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x,} & \boldsymbol{0 \leq x < 1} \\ \boldsymbol{2 - x,} & \boldsymbol{1 \leq x \leq 2} \end{cases}$$

Onde a, b e c são constantes reais.
Diga, justificando, se $S(x)$ pode ser um spline cúbico.

Resposta

$$S \text{ é Spline Cúbico } \Longleftarrow \exists\{a,b,c\} : \begin{cases} \lim_{x\to 0^-} S(x) & = \lim_{x\to 0^+} S(x) \\ \lim_{x\to 1^-} S(x) & = \lim_{x\to 1^+} S(x) \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} & = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} & = \lim_{x\to 1^+} \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} \\ \lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{d}^2S(x)}{\mathrm{d}x^2} & = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{d}^2S(x)}{\mathrm{d}x^2} \\ \lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{d}^2S(x)}{\mathrm{d}x^2} & = \lim_{x\to 1^+} \frac{\mathrm{d}^2S(x)}{\mathrm{d}x^2} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} S(x) = 0^2 = 0 =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} S(x) = a\,0^3 + b\,0^2 + c\,0 = 0;$$

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = a\,1^3 + b\,1^2 + c\,1 = a + b + c =$$
$$= \lim_{x\to 1^+} S(x) = 2 - 1 = 1;$$

$$\frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} 2\,x, & -1 \leq x < 0 \\ 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c, & 0 \leq x < 1 \\ -1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = 2 * 0 = 0 =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = 3\,a\,0^2 + 2\,b\,0 + c = c \implies c = 0;$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = 3\,a\,1^2 + 2\,b\,1 + c = 3\,a + 2\,b =$$
$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = -1 \implies$$
$$\implies 3\,a + 2\,b = -1;$$

$$\frac{\mathrm{d}^2S(x)}{\mathrm{d}x^2} = \begin{cases} 2, & -1 \leq x < 0 \\ 6\,a\,x + 2\,b, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{d}^2S(x)}{\mathrm{d}x^2} = 2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{d}^2S(x)}{\mathrm{d}x^2} = 6\,a\,0 + 2\,b = 2\,b \implies b = 1$$

$$\implies \begin{cases} a + b + c = 1 \\ c = 0 \implies b = 1 - a \\ 3\,a + 2\,b = -1 \implies \begin{cases} a = \frac{-1-2\,(1-a)}{3} \implies a = -3 \\ b = 1 - (-3) = 4 \end{cases} \\ b = 1 \neq 4 \end{cases}$$

$\therefore S(x)$ não pode ser spline

Questão 15

Considere a seguinte tabela de valores de uma função g

x	1	2	4	8
$g(x)$	-2	6	2	40

Determine a expressão do spline cúbico natural, $S(x)$, interpolador de $g(x)$ nos pontos tabelados.

Resposta

$$\left\{\begin{aligned} h_0\, m_0 + 2\,(h_0+h_1)\, m_1 + h_1\, m_2 &= 6\left(\frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0}\right)\\ h_1\, m_1 + 2\,(h_1+h_2)\, m_2 + h_2\, m_3 &= 6\left(\frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1}\right)\\ m_0 = m_3 &= 0;\\ h_i = x_{i+1} - x_i, &\quad i \in [0,2]\\ h_0 = 1, h_1 = 2, h_2 &= 4\\ y_0 = -2, y_1 = 6, y_2 = 2, y_3 &= 40 \end{aligned}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{aligned} 2*(1+2)\, m_1 + 2\, m_2 &= 6\left(\frac{2-6}{2} - \frac{6+2}{1}\right)\\ 2\, m_1 + 2\,(2+4)\, m_2 &= 6\left(\frac{40-2}{4} - \frac{2-6}{2}\right) \end{aligned}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{aligned} 6\, m_1 + 2\, m_2 &= -60\\ 2\, m_1 + 12\, m_2 &= 69 \end{aligned}\right\} \implies$$

$$\implies \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 69 \end{bmatrix}$$

$$S_i(x) = -\frac{(x-x_{i+1})^3}{6\, h_i}\, m_i + \frac{(x-x_i)^3}{6\, h_i}\, m_{i+1} +$$

$$+\left(f_i - \frac{h_i^2}{6} m_i\right) \frac{x_{i+1}-x}{h_i} + \left(f_{i+1} - \frac{h_i^2}{6} m_{i+1}\right) \frac{x-x_i}{h_i};$$

$$\left\{\begin{aligned} h_0\, m_0 + 2\,(h_0+h_1)\, m_1 + h_1\, m_2 &= 6\left(\tfrac{y_2-y_1}{h_1} - \tfrac{y_1-y_0}{h_0}\right)\\ h_1\, m_1 + 2\,(h_1+h_2)\, m_2 + h_2\, m_3 &= 6\left(\tfrac{y_3-y_2}{h_2} - \tfrac{y_2-y_1}{h_1}\right) \end{aligned}\right.$$

Questão 19

Considere a tabela de valores da função f

x_i	-3	0	2
$f(x_i)$	2	4	12

Q19 a.

Determine o polinómio de grau menor ou igual a 1 que melhor aproxima a função tabelada no sentido dos mínimos quadrados, no intervalo $[-3, 2]$

Resposta

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=0}^{2} 1 + a_1 \sum_{i=0}^{2} x_i = \sum_{i=0}^{2} y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^{2} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{2} x_i^2 = \sum_{i=0}^{2} y_i \, x_i \end{cases} = \begin{cases} a_0 \, (3) + a_1 \, (-1) = 18 \\ a_0 \, (-1) + a_1 \, (13) = 18 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} a_0 = 126/19 \\ a_1 = 36/19 \end{cases} \implies$$

$$\implies p_1(x) = 126/19 + x \, 36/19$$

Q19 b.

Mostre que

$$\sum_{i=0}^{2} (f(x_i) - (\gamma_1 x_i + \gamma_0))^2 \geq 200/19, \forall \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$$

Resposta

$$\sum_{0}^{2} (f(x_i) - p_1(x_i))^2 = \dots$$

Q19 c.

Seja $p_2(x)$ o polinomio de grau menor ou igual a 2 interpolador de f nos pontos tabelados.
Justifique que a aproximação quadrática que melhor aproxima o conjunto de pontos $\{(-3,2),(0,4),(2,12)\}$, no sentido dos mínimos quadrados, é o polinómio p_2.

Resposta

x	$f(x)$	$f[\cdot,\cdot]$	$f[\cdot,\cdot,\cdot]$
-3	2		
		$\frac{4-2}{0-(-3)} = 2/3$	
0	4		$\frac{4-2/3}{2-(-3)} = 2/3$
		$\frac{12-4}{2-0} = 4$	
2	12		

$p_2(x) = 2 + (x+3)\,2/3 + (x+3)\,(x-0)\,2/3$ é polinómio de 2 grau

Questão 18

A seguinte tabela represetna a população da China (em milhares de milhões de habitantes) arredondada a 5 dígitos:

t	1990	2000	2010	2020
$P(t)$	1.1769,	1.2906,	1.3688,	1.4393,

Suponha que há uma relação linear entre a data t (em anos) e a população $P(t)$, isto é, que se verifica a relação $p_1(t) = \alpha\, t + \beta$, onde α e β são constantes reais $(\alpha \neq 0)$. Com base nestes dados, utilize o método dos mínimos quadrados para obter uma estimativa da população chinesa em 2015.

Resposta

$$t \begin{cases} 0 : 1990, \\ 1 : 2000, \\ 2 : 2010, \\ 3 : 2020, \end{cases} ;$$

$$N\,C = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{3} t_i^0 & \sum_{i=0}^{3} t_i^1 \\ \sum_{i=0}^{3} t_i^1 & \sum_{i=0}^{3} t_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8020 \\ 8020 & 16080600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} =$$

$$= B = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{3} P(t_i) \\ \sum_{i=0}^{3} t_i\, P(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2756 \\ 10581.905 \end{bmatrix};$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha \approx 0.00865 \\ \beta \approx -16.0324 \end{cases} ;$$

$$p_1(2015) \approx 1.39735$$

Questão 19

Considere a tabela de valores da função f

x_i	-3	0	2
$f(x_i)$	2	4	12

Q19 a.

Determine o polinómio de grau menor ou igual a 1 que melhor aproxima a função tabelada, no sentido dos mínimos quadrados, no intervalo $[-3, 2]$.

Resposta

$p_i(x) = c_o + c_1\, x;$

$$N\,C = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{2} x_i^0 & \sum_{i=0}^{2} x_i^1 \\ \sum_{i=0}^{2} x_i^1 & \sum_{i=0}^{2} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \end{bmatrix} =$$

$$= B = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \\ \sum_{i=0}^{2} x_i\, f(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 18 \end{bmatrix} \implies c \begin{cases} 0 : 126/19 \\ 1 : 36/19 \end{cases}$$

$\therefore\, p_1(x) = 126/19 + x\, 36/19$

Q19 b.

Mostre que

$$\boldsymbol{\sum_{i=0}^{2}\left(f(x_i)-(\gamma_1\,x_i+\gamma_0)\right)^2 \geq 200/19, \quad \forall\,\gamma_0,\gamma_1 \in \mathbb{R}}$$

Resposta

$p_1(x) \in \{\gamma_1\,x+\gamma_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}\}; \quad p_1$ Minimiza o erro quadrático E^2

$$E^2 = \sum_{i=0}^{2}\left(f(x_i)-p_i(x_i)\right)^2 = \begin{pmatrix} (2-0.947\,368)^2 & + \\ +(4-6.631\,579)^2 & + \\ +(12-10.421\,053)^2 & \end{pmatrix} \cong 10.526\,316$$

Q19 c.

Seja $p_2(x)$ o polinómio de grau menor ou igual a 2 interpolador de f nos pontos tabelados.
Justifique que a aproximação quadrática que melhor aproxima o conjunto de pontos $\{(-3,2),(0,4),(2,12)\}$, no sentido dos mínimos quadrados, é o polinomio p_2

Resposta

x_i	$f(x_i)$	$f[.]$	$f[..]$
-3	2		
		$2/3$	
0	4		$2/3$
		4	
2	12		