CN A – Interpolação e Aproximação Polinomial

Felipe B. Pinto 61387 – MIEQB

13 de outubro de 2023

Conteúdo

Questão 10

Considere-se uma função real de variável real, g, cujos valores se conhecem nos nodos $x_0 = -2$, $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$:

x	-2	-1	1
$g(x)$	α	β	γ

Questão 14

Considere a função seccionalmente polinomial, $S(x)$, definida por:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x^2}, & \boldsymbol{-1 \le x < 0} \\ \boldsymbol{a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x}, & \boldsymbol{0 \le x < 1} \\ \boldsymbol{2 - x}, & \boldsymbol{1 \le x \le 2} \end{cases}$$

Onde $a,\ b$ e c são constantes reais.
Diga, justificando, se $S(x)$ pode ser um spline cúbico.

Resposta

$$\lim_{x\to 0^-} S(x) = 0^2 = 0 = \lim_{x\to 0^+} S(x) = a\,0^3 + b\,0^2 + c\,0 = 0;$$

$$\lim_{x\to 1^-} S(x) = a\,1^3 + b\,1^2 + c\,1 = a + b + c = \lim_{x\to 1^+} S(x) = 2 - 1 = 1 \implies$$
$$\implies a + b + c = 1;$$

$$\frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} 2\,x, & -1 \le x < 0 \\ 3\,a\,x^2 + 2\,b\,x + c, & 0 \le x < 1 \\ -1, & 1 \le x \le 2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = 2 * 0 = 0 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = 3\,a\,0^2 + 2\,b\,0 + c = c \implies$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = 3\,a\,1^2 + 2\,b\,1 + c = 3\,a + 2\,b = \lim_{x\to 1^+} \frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x} = -1 \implies$$
$$\implies 3\,a + 2\,b = -1;$$

$$\frac{\mathrm{d}^2S(x)}{\mathrm{d}x^2} = \begin{cases} 2, & -1 \le x < 0 \\ 6\,a\,x + 2\,b, & 0 \le x < 1 \\ 0, & 1 \le x \le 2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{d}^2S(x)}{\mathrm{d}x^2} = 2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{d}^2S(x)}{\mathrm{d}x^2} = 6\,a\,0 + 2\,b = 2\,b \implies b = 1;$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\mathrm{d}^2S(x)}{\mathrm{d}x^2} = 6\,a\,1 + 2\,b = 6\,a + 2 = \lim_{x\to 1^+} \frac{\mathrm{d}^2S(x)}{\mathrm{d}x^2} = 0 \implies a = -1/3$$

$$\therefore \begin{cases} a + b + c = 1 \\ c = 0 \\ b = 1 \\ 6\,a + 2\,b = 0 \implies 2 = 0 \end{cases} \implies S(x) \text{ não pode ser spline}$$

Questão 15

Considere a seguinte tabela de valores de uma função g

x	1	2	4	8
$g(x)$	-2	6	2	40

Determine a expressão do spline cúbico natural, $S(x)$, interpolador de $g(x)$ nos pontos tabelados.

Resposta

$$\left\{\begin{aligned} h_0\, m_0 + 2\,(h_0+h_1)\, m_1 + h_1\, m_2 = 6\left(\frac{y_2-y_1}{h_1}-\frac{y_1-y_0}{h_0}\right)\\ h_1\, m_1 + 2\,(h_1+h_2)\, m_2 + h_2\, m_3 = 6\left(\frac{y_3-y_2}{h_2}-\frac{y_2-y_1}{h_1}\right)\\ m_0 = m_3 = 0;\\ h_i = x_{i+1}-x_i, \quad i \in [0,2]\\ h_0 = 1, h_1 = 2, h_2 = 4\\ y_0 = -2, y_1 = 6, y_2 = 2, y_3 = 40 \end{aligned}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{aligned} 2*(1+2)\, m_1 + 2\, m_2 = 6\left(\frac{2-6}{2}-\frac{6+2}{1}\right)\\ 2\, m_1 + 2\,(2+4)\, m_2 = 6\left(\frac{40-2}{4}-\frac{2-6}{2}\right) \end{aligned}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{aligned} 6\, m_1 + 2\, m_2 = -60\\ 2\, m_1 + 12\, m_2 = 69 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 69 \end{bmatrix}$$

$$S_i(x) = -\frac{(x-x_{i+1})^3}{6\, h_i}\, m_i + \frac{(x-x_i)^3}{6\, h_i}\, m_{i+1} + \\ + \left(f_i - \frac{h_i^2}{6} m_i\right) \frac{x_{i+1}-x}{h_i} + \left(f_{i+1} - \frac{h_i^2}{6} m_{i+1}\right) \frac{x-x_i}{h_i};$$

$$\begin{cases} h_0\, m_0 + 2\,(h_0+h_1)\, m_1 + h_1\, m_2 = 6\left(\frac{y_2-y_1}{h_1}-\frac{y_1-y_0}{h_0}\right)\\ h_1\, m_1 + 2\,(h_1+h_2)\, m_2 + h_2\, m_3 = 6\left(\frac{y_3-y_2}{h_2}-\frac{y_2-y_1}{h_1}\right) \end{cases}$$

Questão 19

Considere a tabela de valores da função f

x_i	-3	0	2
$f(x_i)$	2	4	12

Q19 a.

Determine o polinómio de grau menor ou igual a 1 que melhor aproxima a função tabelada no sentido dos mínimos quadrados, no intervalo $[-3, 2]$

Resposta

$$\begin{cases} a_0 \sum_{i=0}^{2} 1 + a_1 \sum_{i=0}^{2} x_i = \sum_{i=0}^{2} y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^{2} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{2} x_i^2 = \sum_{i=0}^{2} y_i\, x_i \end{cases} = \begin{cases} a_0\,(3) + a_1\,(-1) = 18 \\ a_0\,(-1) + a_1\,(13) = 18 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a_0 = 126/19 \\ a_1 = 36/19 \end{cases} \implies$$

$$\implies p_1(x) = 126/19 + x\,36/19$$

Q19 b.

Mostre que

$$\sum_{i=0}^{2} (f(x_i) - (\gamma_1\, x_i + \gamma_0))^2 \geq 200/19, \forall\, \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$$

Resposta

$$\sum_{0}^{2} (f(x_i) - p_1(x_i))^2 = \ldots$$

Q19 c.

Seja $p_2(x)$ o polinomio de grau menor ou igual a 2 interpolador de f nos pontos tabelados.
Justifique que a aproximação quadrática que melhor aproxima o conjunto de pontos $\{(-3, 2), (0, 4), (2, 12), \}$, no sentido dos mínimos quadrados, é o polinómio p_2.

Resposta

x	$f(x)$	$f[,]$	
-3	2	$\frac{4-2}{0-(-3)} = 2/3$	
0	4		$\frac{4-2/3}{2-(-3)} = 2/3$
2	12	$\frac{12-4}{2-0} = 4$	

$p_2(x) = 2 + (x+3)\,2/3 + (x+3)\,(x-0)\,2/3$ é polinómio de 2 grau

Questão 18

A seguinte tabela represetna a população da China (em milhares de milhões de habitantes) arredondada a 5 dígitos:

t	1990	2000	2010	2020
$P(t)$	1.1769,	1.2906,	1.3688,	1.4393,

Suponha que há uma relação linear entre a data t (em anos) e a população $P(t)$, isto é, que se verifica a relação $p_1(t) = \alpha\, t + \beta$, onde α e β são constantes reais ($\alpha \neq 0$). Com base nestes dados, utilize o método dos mínimos quadrados para obter uma estimativa da população chinesa em 2015.

Resposta

$$t \begin{cases} 0 : 1990, \\ 1 : 2000, \\ 2 : 2010, \\ 3 : 2020, \end{cases} ;$$

$$N\,C = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{3} t_i^0 & \sum_{i=0}^{3} t_i^1 \\ \sum_{i=0}^{3} t_i^1 & \sum_{i=0}^{3} t_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8020 \\ 8020 & 16080600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} =$$

$$= B = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{3} P(t_i) \\ \sum_{i=0}^{3} t_i\, P(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2756 \\ 10581.905 \end{bmatrix};$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha \approx 0.00865 \\ \beta \approx -16.0324 \end{cases} ;$$

$$p_1(2015) \approx 1.39735$$

Questão 19

Considere a tabela de valores da função f

x_i	-3	0	2
$f(x_i)$	2	4	12

Q19 a.

Determine o polinómio de grau menor ou igual a 1 que melhor aproxima a função tabelada, no sentido dos mínimos quadrados, no intervalo $[-3, 2]$.

Resposta

$p_i(x) = c_o + c_1\, x;$

$$N\,C = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{2} x_i^0 & \sum_{i=0}^{2} x_i^1 \\ \sum_{i=0}^{2} x_i^1 & \sum_{i=0}^{2} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \end{bmatrix} =$$

$$= B = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \\ \sum_{i=0}^{2} x_i\, f(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 18 \end{bmatrix} \implies c \begin{cases} 0 : 126/19 \\ 1 : 36/19 \end{cases}$$

$$\therefore p_1(x) = 126/19 + x\, 36/19$$

Q19 b.

Mostre que

$$\sum_{i=0}^{2} \left(f(x_i) - (\gamma_1\, x_i + \gamma_0)\right)^2 \geq 200/19, \quad \forall\, \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$$

Resposta

$p_1(x) \in \{\gamma_1\, x + \gamma_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}\}$; $\quad p_1$ Minimiza o erro quadrático E^2

$$E^2 = \sum_{i=0}^{2} \left(f(x_i) - p_i(x_i)\right)^2 = \begin{pmatrix} (2 - 0.947\,368)^2 & + \\ +(4 - 6.631\,579)^2 & + \\ +(12 - 10.421\,053)^2 & \end{pmatrix} \cong 10.526\,316$$

Q19 c.

Seja $p_2(x)$ o polinómio de grau menor ou igual a 2 interpolador de f nos pontos tabelados.
Justifique que a aproximação quadrática que melhor aproxima o conjunto de pontos $\{(-3, 2), (0, 4), (2, 12)\}$, no sentido dos mínimos quadrados, é o polinomio p_2

Resposta

x_i	$f(x_i)$	$f[.]$	$f[..]$
-3	2		
		2/3	
0	4		2/3
		4	
2	12		