IPEIO - Probabilidades e Estatística
Ano Lectivo 2015/16
1º Teste - 30 de março de 2016
Duração: 1h15 horas

Resolução abreviada do 1º Teste

Versão A

1. $\boxed{\text{F}}$ Como $A \cap B = \emptyset$ também $A \cap B \cap C = \emptyset$. Por isso $P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0$

   $\boxed{\text{V}}$ $P(A \cup C) = 0.4 \Leftrightarrow P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0.4 \Leftrightarrow P(C) = 0.3$

   $\boxed{\text{V}}$ $P\left(A \cap \overline{C}\right) = P(A) - P(A \cap C) = 0.1$

   $\boxed{\text{V}}$ Se $A$ e $C$ são acontecimentos independentes, $P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$.
   Assim $0.1 = 0.2P(C) \Leftrightarrow P(C) = 0.5$

2. Considerem-se os acontecimentos: $F_i$-peça produzida na fábrica i, $\quad i = 1, 2, 3$ e $D$-peça com defeito.
   Informação:

   - 
     - $P(F_1) = 2P(F_2) = 2P(F_3) \Rightarrow P(F_2) = P(F_3)$
     - $P(F_1) + P(F_2) + P(F_3) = 1 \Leftrightarrow 2P(F_2) + P(F_2) + P(F_2) = 1 \Leftrightarrow P(F_2) = 1/4$
     - $P(F_1) = 1/2 \quad P(F_2) = 1/4 \quad P(F_3) = 1/4$
   - $P(D\,|F_1) = 0.02 \quad P(D\,|F_2) = 0.02 \quad P(D\,|F_3) = 0.04$

   $\boxed{\text{B}}$ $P(D) = P(D \cap F_1) + P(D \cap F_2) + P(D \cap F_3) =$
   $= P(D\,|F_1)\,P(F_1) + P(D\,|F_2)\,P(F_2) + P(D\,|F_3)\,P(F_3) = 0.025$

   $\boxed{\text{E}}$ $P(F_1\,|D) = \dfrac{P(F_1 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(D\,|F_1)\,P(F_1)}{P(D)} = \dfrac{0.01}{0.025} = 0.4$

3. $\boxed{\text{F}}$ A função $g$ não é função densidade de probabilidade porque não é satisfeita a condição:
   - $g(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{3}{2}x - 1 \geq 0, \quad \forall\, x \in [0, 2]$
     porque $g(x) < 0, \quad \forall\, x \in [0, 2/3[$

   $\boxed{\text{B}}$ $E(X) = \displaystyle\int_R x f_X(x)\,dx = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{3}\int_0^1 3x\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{7}{12}$

   $\boxed{\text{A}}$ $P(1/3 \leq X \leq 2/3) = \displaystyle\int_{1/3}^{2/3}\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_{1/3}^{2/3} = \frac{1}{3}$

4. (a) $P(75 < X < 90) = \Phi\left(\dfrac{90-80}{10}\right) - \Phi\left(\dfrac{75-80}{10}\right) = \Phi(1) - (1 - \Phi(0.5)) = 0.8413 - (1 - 0.6915) = 0.5328$

   (b) Seja $h$ a produção que a empresa terá de garantir. Assim,

   $$P(X > h) = 0.01 \Leftrightarrow P(X \leq h) = 0.99 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{h-80}{10}\right) = 0.99 \Leftrightarrow \frac{h-80}{10} = 2.33 \Leftrightarrow h = 103.3$$

   (c) Sejam as variáveis aleatórias $X_i$, procura em toneladas no mês $i$, $i = 1, ..., 36$. Assim $T = \sum_{i=1}^{36} X_i$ representa a procura total, em toneladas, durante os próximos 3 anos.
   Dado que $T$ é uma combinação linear de variáveis independentes e com distribuição normal, então

   $$T \sim N\left(E(T), V(T)\right)$$

   onde

   $$E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} E(X_i) = 36 \times 80 = 2880$$

   e, como as variáveis $X_1, ..., X_{36}$ são independentes, tem-se

   $$V(T) = V\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} V(X_i) = 36 \times 100 = 3600$$

   logo

   $$P(T > 2950) = 1 - \Phi\left(\frac{2950 - 2880}{\sqrt{3600}}\right) = 1 - 0.8790 = 0.1210$$

5. (a) Seja $X$ a procura diária de certo artigo na loja A. Sabe-se que $X \sim P(\lambda)$ e que $E(X) = 2$. Então teremos que $\lambda = 2$ pelo que $X \sim P(2)$.
Queremos, $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-2} - e^{-2}.2 \approx 0.594$.

(b) Com $X_i$, o número de produtos vendidos no dia $i$, $i = 1, 2, ..., 365$ podemos definir $S_{365} = \sum_{i=1}^{365} X_i$ como o número de produtos vendidos num ano. Queremos,

$$P(S_{365} \leq 730)$$

mas como estamos nas condições do teorema limite central ($X_i, i = 1, ..., n$ i.i.d. com $n = 365 > 30$) e como $\forall i = 1, ..., 365, X_i \sim P(2)$ donde $E(X_i) = 2$ e $V(X_i) = 2$, então

$$Z = \frac{S_{365} - 365 \times 2}{\sqrt{365 \times 2}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

pelo que

$$P(S_{365} \leq 730) = P\left(\frac{S_{365} - 365 \times 2}{\sqrt{365 \times 2}} \leq \frac{730 - 365 \times 2}{\sqrt{365 \times 2}}\right) = P(Z \leq 0) \approx \Phi(0) = 0.5$$

Versão B

1. $\boxed{\texttt{V}}$ $P(B \cup C) = 0.5 \Leftrightarrow P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0.5 \Leftrightarrow P(B) = 0.3$

   $\boxed{\texttt{F}}$ Se $A$ e $C$ são acontecimentos independentes, $P(A \cap C) = P(A)\,P(C)$.
   Assim $0.1 = 0.2P(A) \Leftrightarrow P(A) = 0.5$

   $\boxed{\texttt{F}}$ $P(C - A) = P(C) - P(A \cap C) = 0.1$

   $\boxed{\texttt{V}}$ Como $B \cap C = \emptyset$ também $A \cap B \cap C = \emptyset$. Por isso $P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0$

2. Considerem-se os acontecimentos: $F_i$-peça produzida na fábrica i, $\quad i = 1, 2, 3$ e $D$-peça com defeito.
   Informação:

   - 
     - $P(F_1) = 2P(F_2) = 2P(F_3) \Rightarrow P(F_2) = P(F_3)$
     - $P(F_1) + P(F_2) + P(F_3) = 1 \Leftrightarrow 2P(F_2) + P(F_2) + P(F_2) = 1 \Leftrightarrow P(F_2) = 1/4$
     - $P(F_1) = 1/2 \quad P(F_2) = 1/4 \quad P(F_3) = 1/4$
   - $P(D\,|F_1) = 0.03 \quad P(D\,|F_2) = 0.03 \quad P(D\,|F_3) = 0.05$

   $\boxed{\texttt{D}}$ $P(D) = P(D \cap F_1) + P(D \cap F_2) + P(D \cap F_3) =$
   $= P(D\,|F_1)\,P(F_1) + P(D\,|F_2)\,P(F_2) + P(D\,|F_3)\,P(F_3) = 0.035$

   $\boxed{\texttt{D}}$ $P(F_3\,|D) = \dfrac{P(F_3 \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(D\,|F_3)\,P(F_3)}{P(D)} = \dfrac{0.0125}{0.035} = \dfrac{5}{14}$

3. $\boxed{\texttt{V}}$ A função $g$ não é função densidade de probabilidade porque não é satisfeita a condição:
   - $g(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{3}{2}x - 1 \geq 0, \quad \forall\, x \in [0, 2]$
     porque $g(x) < 0, \quad \forall\, x \in [0, 2/3[$

   $\boxed{\texttt{C}}$ $E(2X) = \displaystyle\int_R 2x f_X(x)\,dx = \int_0^1 2x\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 4x\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{7}{6}$

   $\boxed{\texttt{E}}$ $P(1/2 \leq X \leq 3/4) = \displaystyle\int_{1/2}^{3/4}\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right]_{1/2}^{3/4} = \frac{9}{32}$

4. (a) $P(75 < X < 90) = \Phi\left(\dfrac{90 - 80}{10}\right) - \Phi\left(\dfrac{75 - 80}{10}\right) = \Phi(1) - (1 - \Phi(0.5)) = 0.8413 - (1 - 0.6915) = 0.5328$

   (b) Seja $h$ a produção que a empresa terá de garantir. Assim,

   $$P(X > h) = 0.01 \Leftrightarrow P(X \leq h) = 0.99 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{h - 80}{10}\right) = 0.99 \Leftrightarrow \frac{h - 80}{10} = 2.33 \Leftrightarrow h = 103.3$$

   (c) Sejam as variáveis aleatórias $X_i$, procura em toneladas no mês $i$, $i = 1, ..., 36$. Assim $T = \sum_{i=1}^{36} X_i$ representa a procura total, em toneladas, durante os próximos 3 anos.
   Dado que $T$ é uma combinação linear de variáveis independentes e com distribuição normal, então

   $$T \sim N\left(E(T), V(T)\right)$$

   onde

   $$E(T) = E\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} E(X_i) = 36 \times 80 = 2880$$

   e, como as variáveis $X_1, ..., X_{36}$ são independentes, tem-se

   $$V(T) = V\left(\sum_{i=1}^{36} X_i\right) = \sum_{i=1}^{36} V(X_i) = 36 \times 100 = 3600$$

   logo

   $$P(T > 2950) = 1 - \Phi\left(\frac{2950 - 2880}{\sqrt{3600}}\right) = 1 - 0.8790 = 0.1210$$

5. (a) Seja $X$ a procura diária de certo artigo na loja A. Sabe-se que $X \sim P(\lambda)$ e que $E(X) = 2$. Então teremos que $\lambda = 2$ pelo que $X \sim P(2)$.
   Queremos, $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-2} - e^{-2}.2 \approx 0.594$.

(b) Com $X_i$, o número de produtos vendidos no dia $i$, $i = 1, 2, ..., 365$ podemos definir $S_{365} = \sum_{i=1}^{365} X_i$ como o número de produtos vendidos num ano. Queremos,

$$P(S_{365} \leq 730)$$

mas como estamos nas condições do teorema limite central ($X_i, i = 1, ..., n$ i.i.d. com $n = 365 > 30$) e como $\forall i = 1, ..., 365, X_i \sim P(2)$ donde $E(X_i) = 2$ e $V(X_i) = 2$, então

$$Z = \frac{S_{365} - 365 \times 2}{\sqrt{365 \times 2}} \overset{a}{\sim} N(0, 1)$$

pelo que

$$P(S_{365} \leq 730) = P\left(\frac{S_{365} - 365 \times 2}{\sqrt{365 \times 2}} \leq \frac{730 - 365 \times 2}{\sqrt{365 \times 2}}\right) = P(Z \leq 0) \approx \Phi(0) = 0.5$$