ANÁLISE MATEMÁTICA II C

7ªsemana de aulas

NOVA SCHOOL OF SCIENCE & TECHNOLOGY

Slides para acompanhamento das aulas T e P de Cláudio Fernandes (TP1, TP5, P1, P2, P3, P4, P6)
O material completo encontra-se no CLIP, na página da UC

caf@fct.unl.pt

Teorema de Green

Teorema:

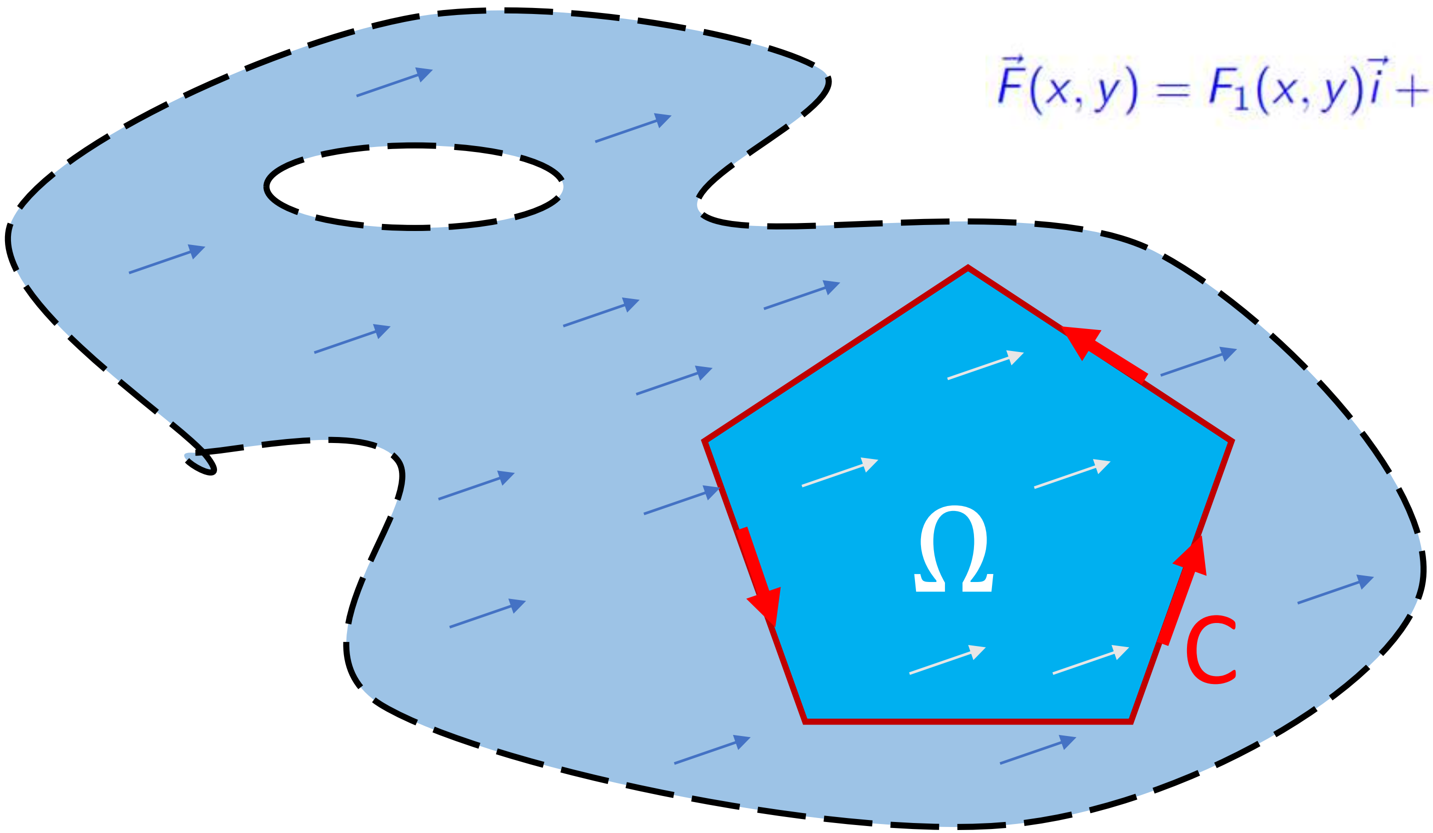
Seja Ω *uma região plana simplesmente conexa, cuja fronteira* C *é uma curva seccionalmente regular, fechada, simples e orientada positivamente. Se*

$$\vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j}, \quad \vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

for um campo vetorial de classe C^1 *num conjunto aberto contendo* Ω*, então*

$$\oint_C F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy.$$

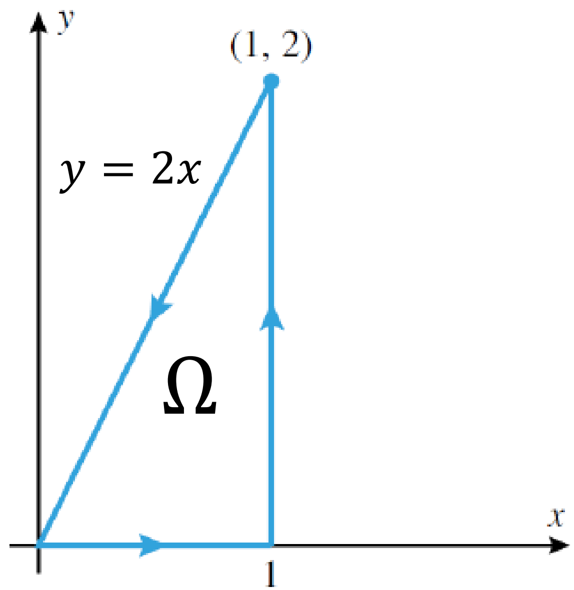
Teorema de Green



$$\vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j}$$

$$\boxed{\oint_C F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = \iint_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\right)}_{rot\,\vec{F}(x,y)} dx\,dy.}$$

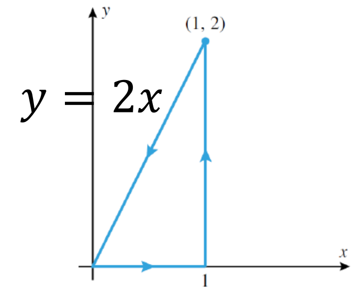
Exemplo



Usando o teorema de Green, calcule o integral ao longo do caminho triangular

$$\int_C x^2 y \, dx + x \, dy.$$

Temos o campo vetorial



$$\vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\vec{\imath} + F_2(x,y)\vec{\jmath} = x^2y\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath}$$

definido e de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. A curva é seccionalmente regular, fechada simples e o seu interior é simplesmente conexo. Então, pelo teorema de Green,

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C x^2y\partial x + x\partial y = \iint_\Omega \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y)\;dxdy$$

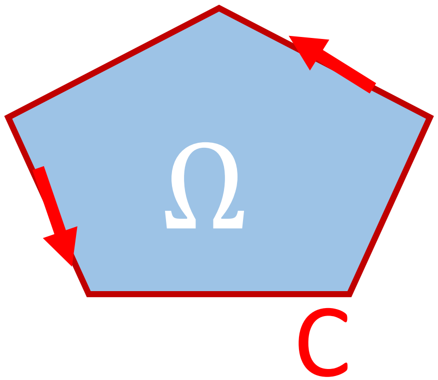
$$= \iint_\Omega 1 - x^2\;dxdy = \int_0^1 \int_0^{2x} 1 - x^2 dy\,dx$$

$$= \int_0^1 (1-x^2)2xdx = 2\int_0^1 (x-x^3)dx = 2[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}]_0^1$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

Aplicação do teorema de Green para determinar áreas de regiões planas

Usando o teorema de Green podemos deduzir fórmulas para cálcular a área de uma região Ω plana que satisfaça as condições do teorema:



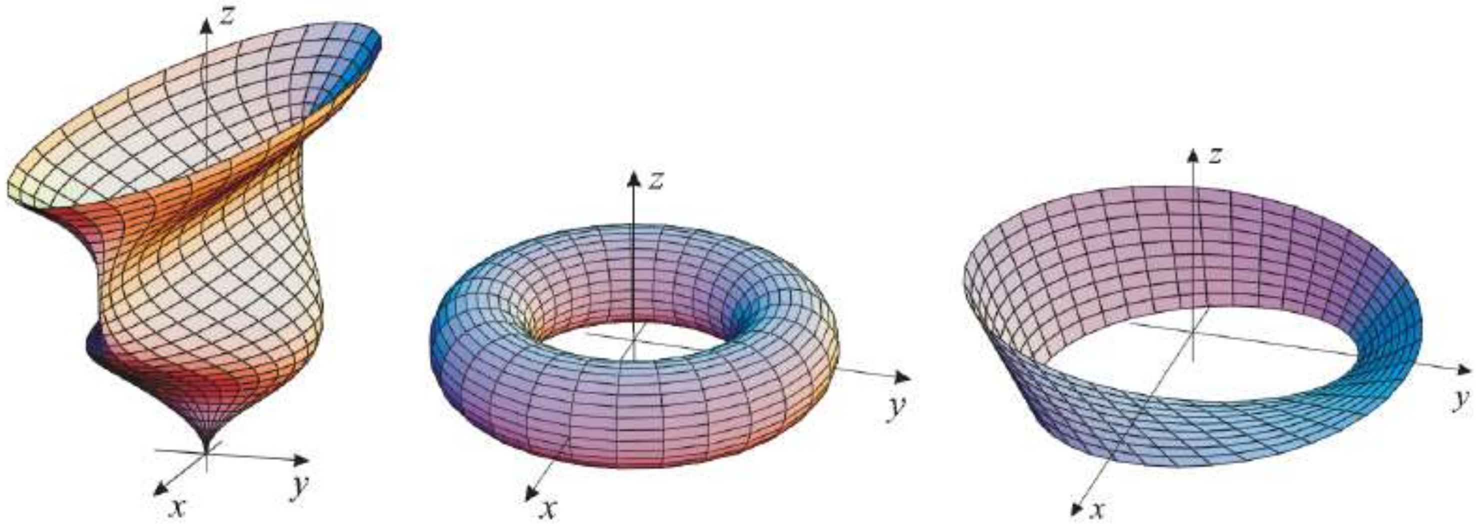
$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} dA = \oint_{C} x\, dy, \qquad (\vec{F}(x,y) = 0\vec{\imath} + x\vec{\jmath}\ )$$

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} dA = \oint_{C} (-y)\, dx, \qquad (\vec{F}(x,y) = -y\vec{\imath} + 0\vec{\jmath}\ )$$

$$A(\Omega) = \iint_{\Omega} dA = \frac{1}{2} \oint_{C} (-y)dx + x\, dy. \qquad (\vec{F}(x,y) = -\tfrac{1}{2}y\vec{\imath} + \tfrac{1}{2}x\vec{\jmath}\ )$$

Superfícies e Integrais de superfície

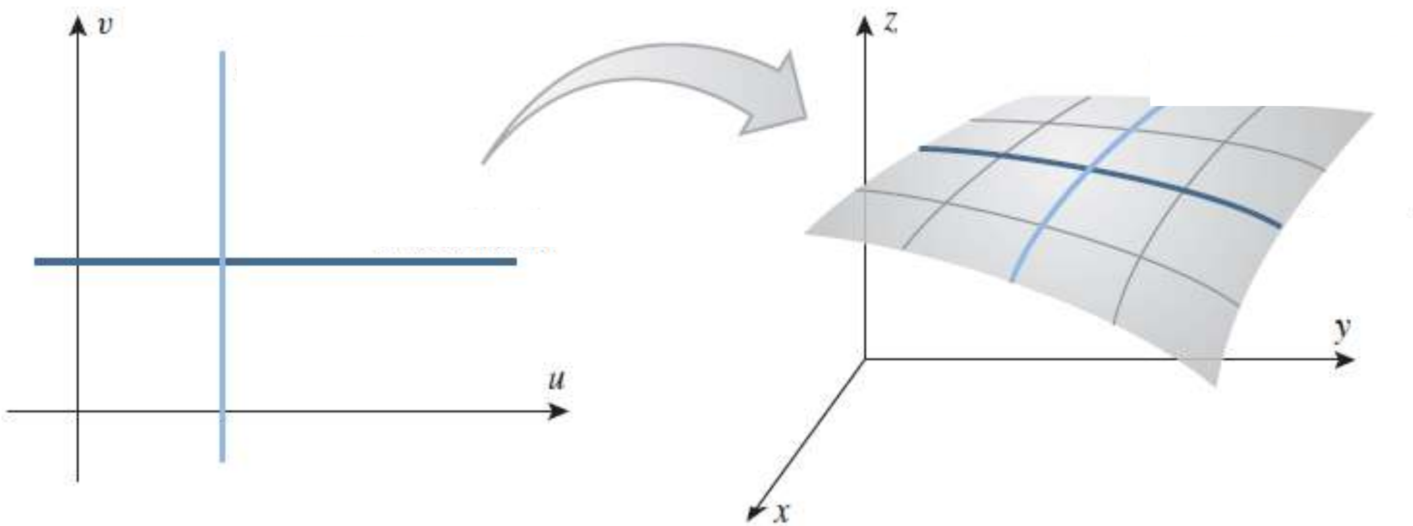
Superfícies



O conjunto $\sigma \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma superfície se existir uma função contínua

$$\vec{r}: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

tal que $\sigma = \vec{r}(D)$. Diz-se que $\vec{r}$ é uma parametrização de σ. Se $\vec{r}$ for de classe C^1, diz-se que a superfície σ é de classe C^1.


v
u
z
y
x

Exemplo - Gráfico de uma função contínua

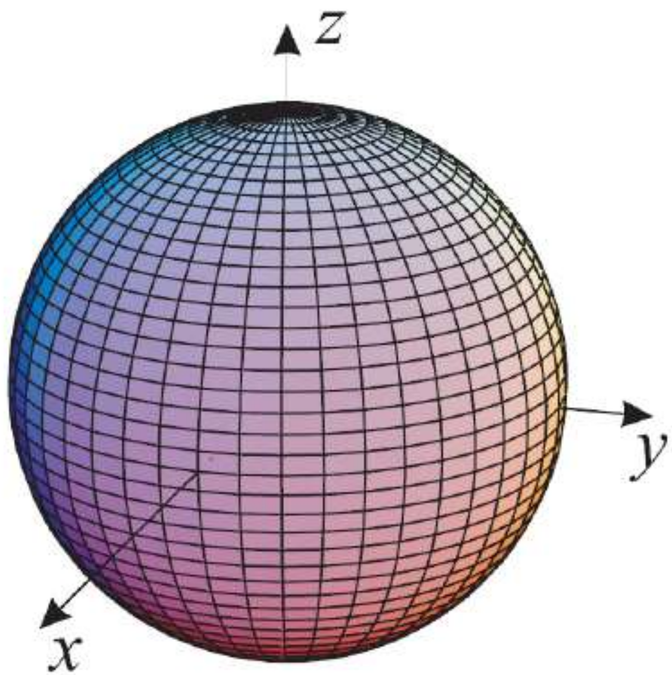
Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e

$$\sigma = G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \wedge z = f(x, y)\}.$$

Esta superfície pode ser parametrizada por

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

Exemplo - Esfera de raio R



$$\vec{r}(u, v) = (R \sin v \cos u, R \sin v \sin u, R \cos v), \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi].$$

Superfícies paramétricas regulares

Diz-se que σ é uma superfície paramétrica regular numa região D do plano uOv se

Derivadas parciais
Associadas à superfície

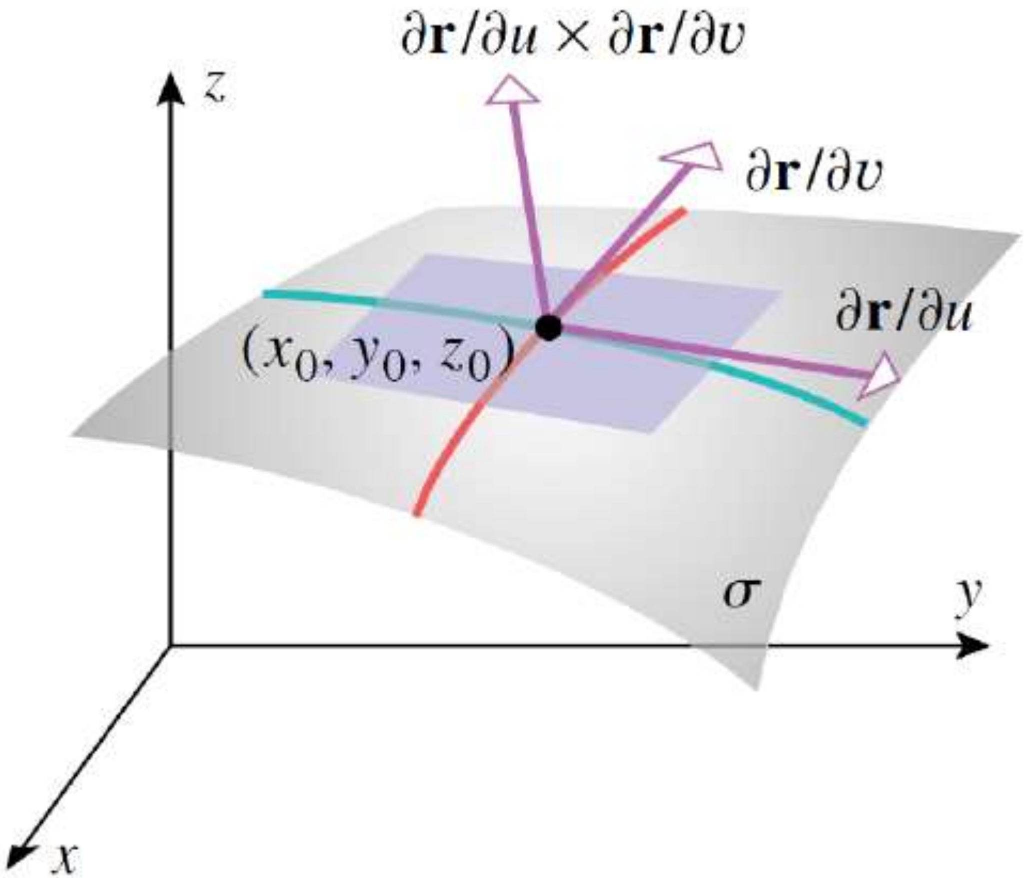
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\right)$$

forem contínuas (isto é, σ é de classe C^1) e

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \neq \vec{0} \quad \forall (u,v) \in D.$$

(as derivadas associadas à superfície fornecem os vetores diretores do plano tangente à superfície em cada ponto)



(a condição do produto externo diz respeito à possibilidade de construir o plano tangente à superfície paramétrica em cada ponto)

Integrais de superfície

Seja σ uma superfície paramétrica regular cuja equação vetorial é

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

onde (u,v) varia numa região D do plano uOv. Se $f : \sigma \to \mathbb{R}$ for contínua, então o integral de f em σ é definido por

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)\, dS$$

$$= \iint_{D} f\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv.$$

Área de uma superfície

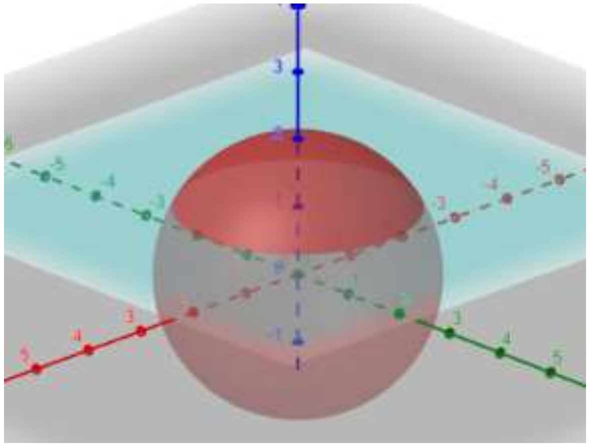
A área de uma superfície σ é dada por

$$\boxed{A(\sigma) = \iint\limits_{\sigma} 1 dS.}$$

$$= \iint\limits_{D} \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) \right\| du\, dv.$$

Exemplo

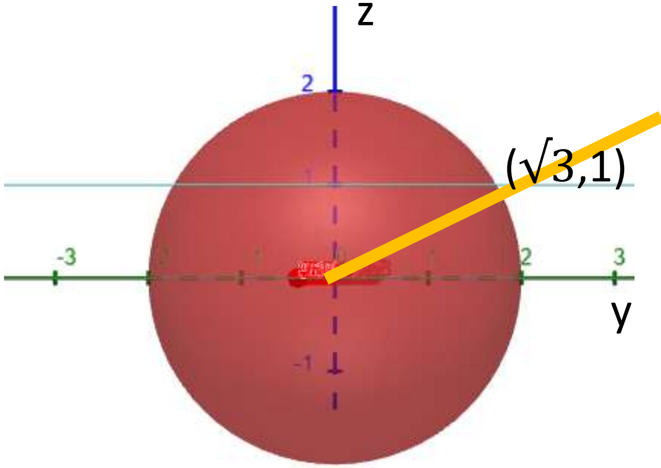
Determine a área da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *acima do plano* $z = 1$.



Considere-se a parametrização da esfera,

$$\begin{cases} x = 2\,sen\,v\cos u \\ y = 2\,sen\,v\,\mathrm{sen}\,u\,, \\ z = 2cos\,v \end{cases} \qquad \underbrace{u \in [0,2\pi],\ \ v \in [0,\tfrac{\pi}{3}]}_{\text{D}}$$

$$\mathrm{A}(\sigma) = \iint_D \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\| du\, dv$$



$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) = (-2\,sen\,v\,\mathrm{sen}\,u\,, 2\,sen\,v\cos u\,, 0\,)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) = (2\,cos\,v\cos u\,, 2\,cos\,v\,\mathrm{sen}\,u\,, -2sen\,v)$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2\,sen\,v\,\mathrm{sen}\,u & 2\,sen\,v\cos u & 0\\ 2\,cos\,v\cos u & 2\,cos\,v\,\mathrm{sen}\,u & -2sen\,v\end{vmatrix}$$

$$=-4sen^2v\cos u\,\vec{i}-4sen^2v\,\mathrm{sen}\,u\,\vec{j}-4sen\quad v\cos v\,\vec{k}$$

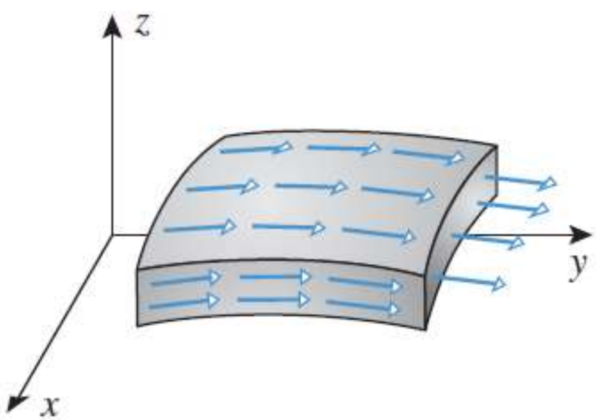
$$\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v)\right\|=\sqrt{16sen^4vcos^2u+16sen^4vsen^2u+16sen^2vcos^2v}=$$

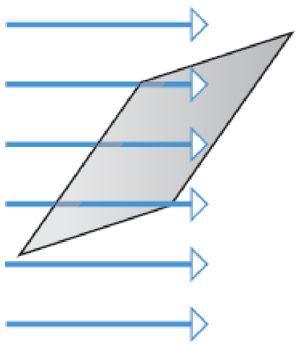
$$=\sqrt{16sen^4v\ +16sen^2v(1-sen^2v)}=4senv$$

$$\mathrm{A}(\sigma)=\iint_D\ \left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right\|du\,dv=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}4sen\,v\,dv\,du=4\,\pi$$

(Para a esfera com raio R o valor de $\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v)\right\|$ será sempre $R^2sen\,v$)

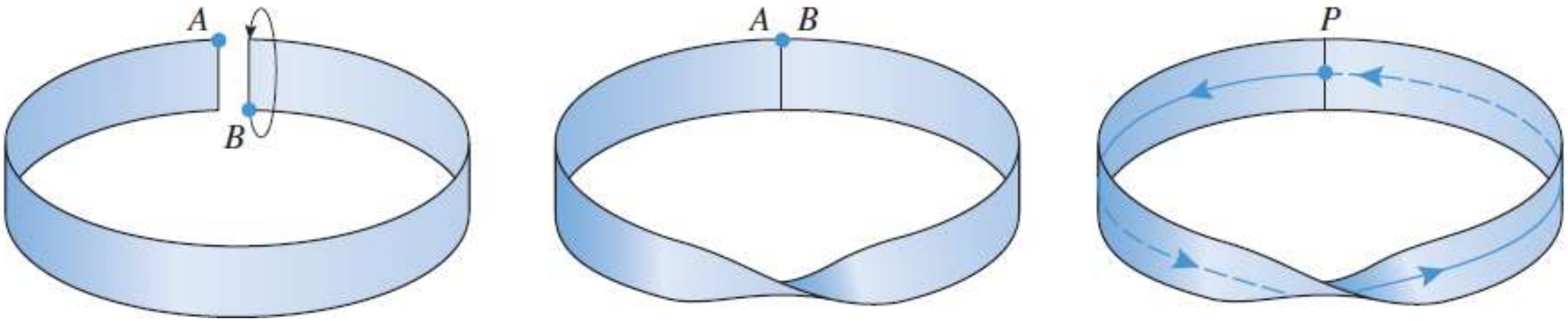
Fluxos: Integrais de campos vetorias através de superfícies





campo vetorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ representa a velocidade de uma partícula fluida no ponto (x, y, z)

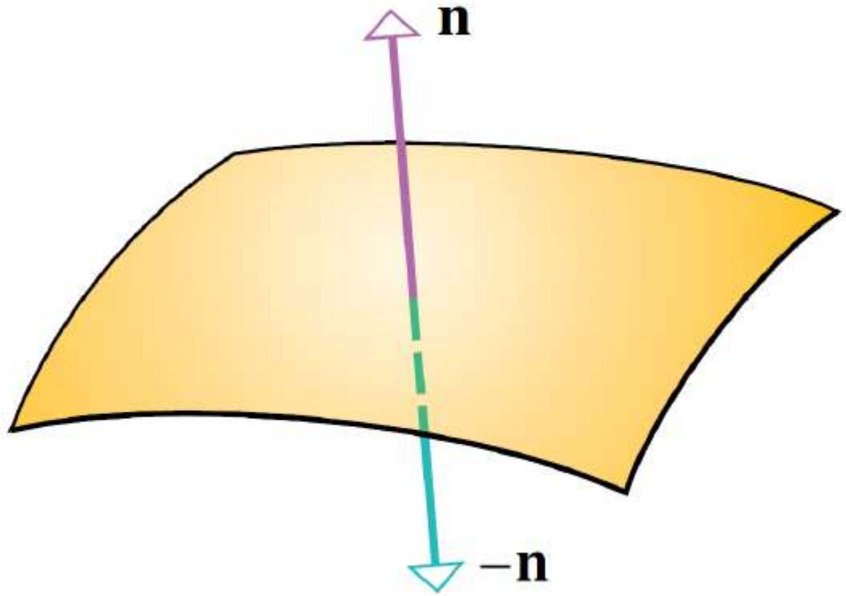
Banda de Möbius



A banda de Möbius e a superfície com apenas um lado

Superfícies orientáveis

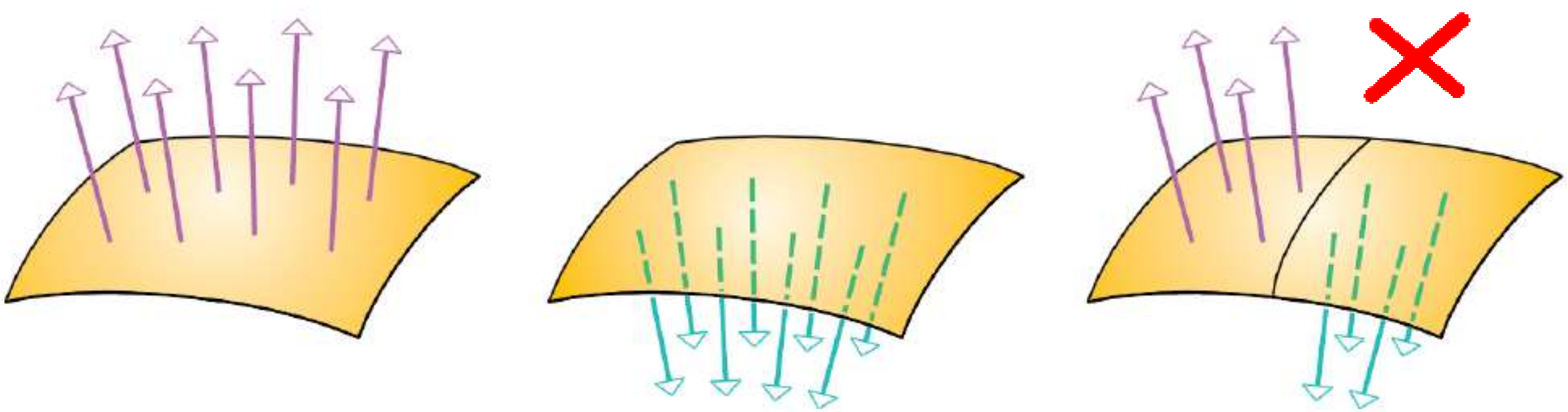
Diz-se que uma superfície de dois lados é orientável e que uma superfície com um único lado é não orientável.



Os vetores normais $\vec{n}$ e $-\vec{n}$ apontam para lados opostos da superfície orientável e, portanto, servem distinguir dois lados.

Superfície orientáveis (continuação)

Pode ser provado que se σ for uma superfície orientável regular, então é sempre possível escolher o sentido de $\vec{n}$ em cada ponto de modo que $\vec{n} = \vec{n}(x, y, z)$ seja contínuo na superfície



Uma superfície orientável regular tem só duas orientações. Entretanto, não podemos criar uma terceira orientação misturando as duas porque isso produz pontos na superfície nos quais há mudança abrupta de sentido.

O vetor normal unitário principal a uma superfície parametrizada

Se uma superfície paramétrica σ for o gráfico de

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad \text{e se}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix} \neq \vec{0}$$

num ponto da superfície, então o vetor normal unitário principal à superfície naquele ponto é definido por

$$\vec{n}(u,v) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right\|}.$$

Definem o sentido positivo da superfície

Fluxo de um campo vetorial

O fluxo de um campo vetorial $\vec{F}$ através de uma superfície σ regular orientada pelo vetor normal $\vec{n}$ à superfície é definido por

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS.$$

Problema que origina o conceito:

Temos uma superfície orientada σ imersa em um campo de fluidos (líquidos ou gazes) e suponha que a superfície é permeável, de modo que o fluido possa fluir através dela livremente em ambos os sentidos.

Encontre o volume líquido do fluido que passa através da superfície por unidade de tempo, onde volume líquido é interpretado como o volume que passa através da superfície no sentido positivo menos o volume que passa através da superfície no sentido negativo.

Fluxos através de superfícies paramétricas orientadas positivamente

Diz-se que uma superfície regular σ parametrizada por

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in D,$$

é orientada positivamente se a sua orientação é definida pelo vetor normal unitário principal $\vec{n}(u,v)$. Neste caso o fluxo de um campo $\vec{F}$ através de σ é dado por

$$\boxed{\begin{aligned}\iint_{\sigma} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS &= \iint_{D} \vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot\vec{n}(u,v)\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v)\right\|du\,dv\\ &= \iint_{D} \vec{F}(\vec{r}(u,v))\cdot\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v)\right)du\,dv.\end{aligned}}$$

Exemplo

Considere a superfície

$$\sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 9 - 3x^2 - 3y^2 \wedge z \geq 3\}$$

orientada com a normal dirigida para cima. Determine o fluxo do campo vetorial $\vec{\phi}(x, y, z) = y^2\vec{j} + (1 - 2y)\vec{k}$ *através da superfície* σ.

Parametrização da superfície:

- $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 9 - 3u^2 - 3v^2 \end{cases}, \quad (u, v) \in D = \{(x, y): \ x^2 + y^2 \leq 2\}$

- $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}(u, v), \dfrac{\partial y}{\partial u}(u, v), \dfrac{\partial z}{\partial u}(u, v)\right) = (1, 0, -6u),$
- $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}(u, v), \dfrac{\partial y}{\partial v}(u, v), \dfrac{\partial z}{\partial v}(u, v)\right) = (0, 1, -6v),$

Esta componente diz-nos que a normal principal é dirigida para cima

- $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ (u,v) = $\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -6u \\ 0 & 1 & -6v \end{vmatrix}$ = $1\vec{k} + 6u\vec{\imath} + 6v\vec{\jmath} = 6u\vec{\imath} + 6v\vec{\jmath} + \vec{k} =$

$$= (6u, 6v, 1)$$

Campo vetorial sobre a superfície (nas variáveis (u,v)

- $\phi(x, y, z) = (0, y^2, 1 - 2y) = (0, v^2, 1 - 2v)$

Assim,

$$\iint_\sigma \vec{\phi} \cdot \vec{n} dS = \iint_D (0, v^2, 1 - 2v\ ) \cdot (6u, 6v, 1) dudv$$

$$= \quad \iint_D 6v^3 + 1 - 2v \ dudv,$$

onde $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : \ u^2 + v^2 \leq 2\}$.

○ $\iint_D \; 6v^3 - 1 - 2v \;\, dudv = {\color{red}?}$

Usando coordenadas polares,

$$\iint_D \; 6v^3 - 1 \; - 2v \, dudv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} (6r^3 sen^3\theta - 1 - 2sen\,\theta) rdrd\theta$$

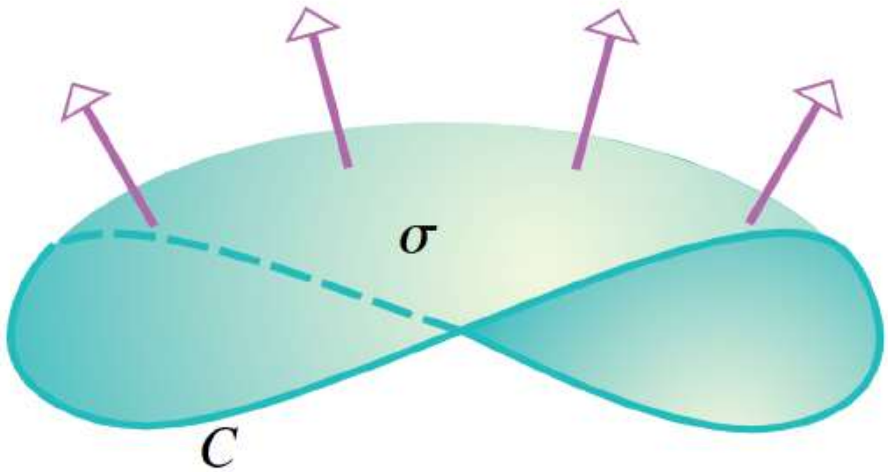
$$= \underbrace{\mathbf{6} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} r^4 sen^3\theta drd\theta}_{\frac{24}{5}\int_0^{2\pi} sen^3\theta d\theta = 0} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} 1 drd\theta}_{-2\sqrt{2}\pi} - \underbrace{2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} rsen\,\theta drd\theta}_{0}$$

$$\int_0^{2\pi} sen^3\theta d\theta = \int_0^{2\pi} sen \quad \theta(1 - \cos^2\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} sen \quad \theta d\theta - \int_0^{2\pi} sen \quad \theta \cos^2\theta \, d\theta = 0$$

Teorema de Stokes.
Teorema da divergência

Superfície com bordo

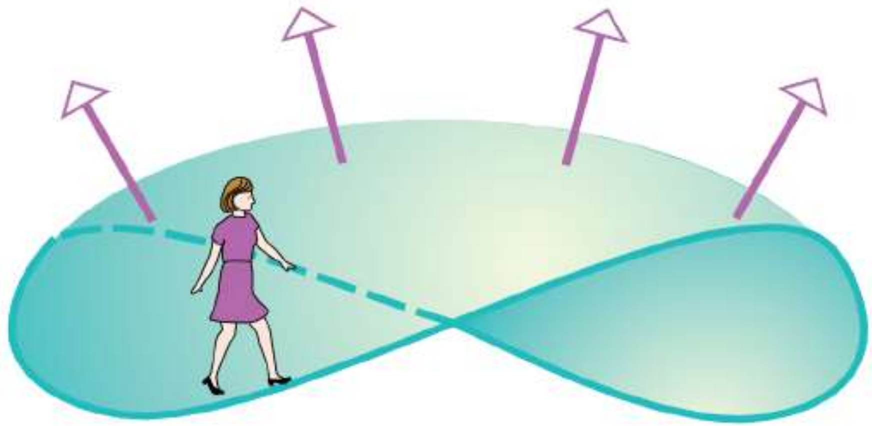
Seja σ uma superfície orientada cujo bordo é uma curva $\mathcal{C}$.



Há duas relações possíveis entre as orientações de σ e $\mathcal{C}$.

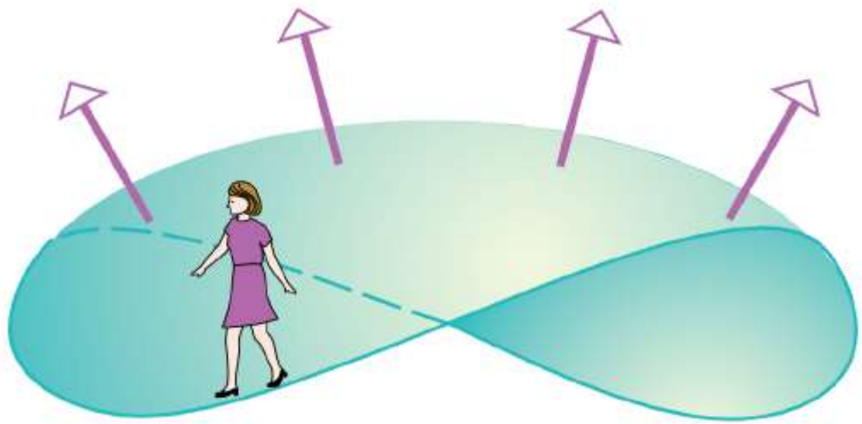
Orientação positiva de bordo

A pessoa está a andar no sentido positivo de $\mathcal{C}$ relativo à orientação de σ se a superfície estiver à sua esquerda.



Orientação negativa de bordo

A pessoa está a andar no sentido negativo de $\mathcal{C}$ relativo à orientação de σ se a superfície estiver à sua direita.



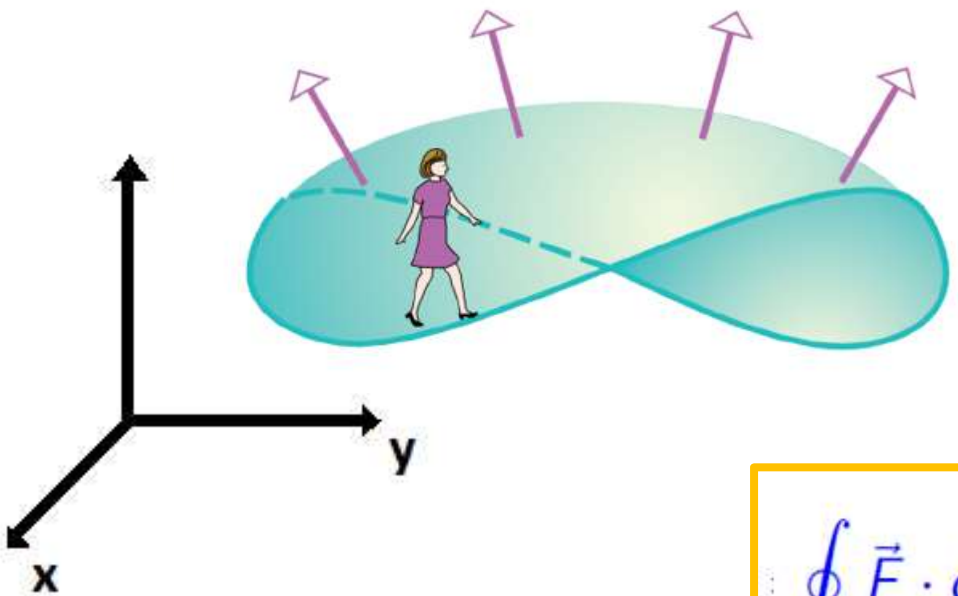
Teorema:

Seja σ uma superfície orientada, de bordo $\mathcal{C}$ orientado positivamente de acordo com σ. Então, para todo campo vectorial $\vec{F}$ de classe C^1 definido num conjunto aberto que contenha σ,

$$\iint_{\sigma} \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Teorema de Stokes

$$\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z)\vec{k}$$



$$\boxed{\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_\sigma \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS}$$

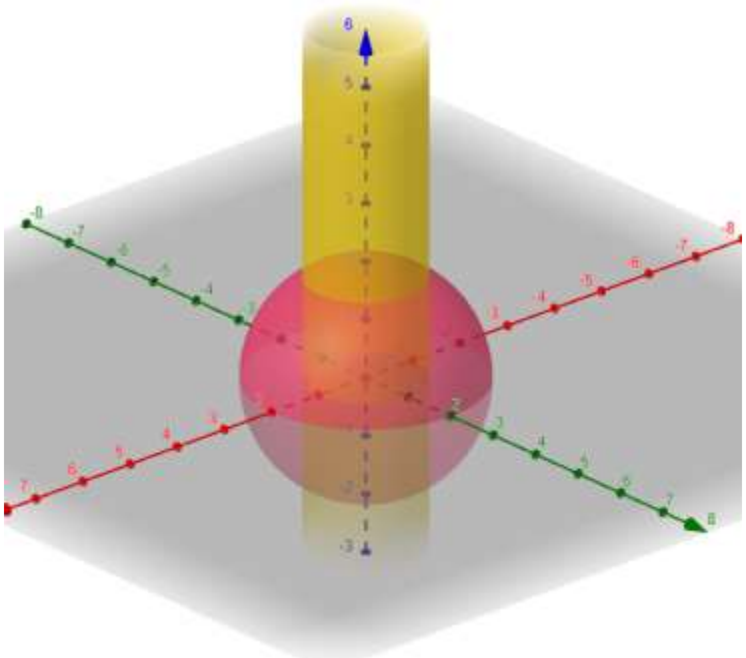
Exemplo

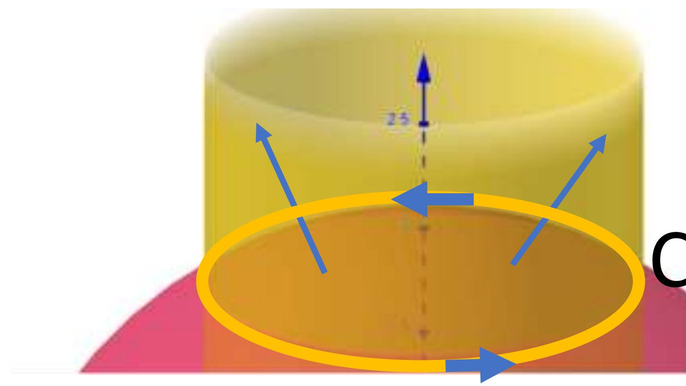
Considere o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = -yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$. *Seja* σ *a parte da superfície de equação* $z = \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$ *que está dentro do cilindro* $x^2 + y^2 = 1$ *(isto é, os pontos de* σ *verificam* $x^2 + y^2 \leq 1$ *), orientada pela normal dirigida para cima* $\vec{n}$. *Usando o teorema de Stokes determine*

$$\iint_\sigma \mathrm{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Resolução: $\vec{F}(x,y,z) = -yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$

σ : Parte de $z = \sqrt{4-(x^2+y^2)}$ dentro de $x^2+y^2=1$ orientada com a normal dirigida para cima

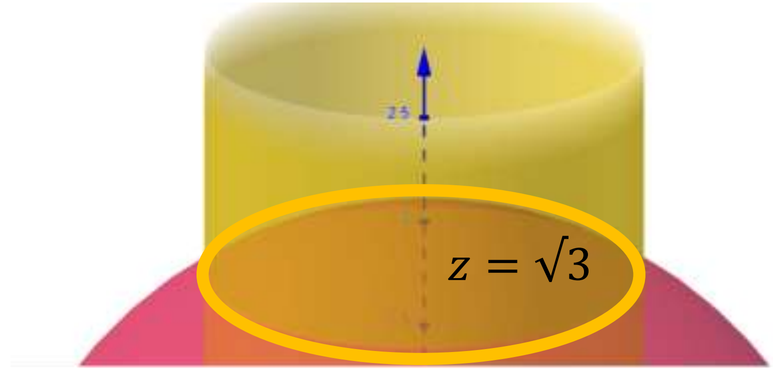




$$\boxed{\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_\sigma \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS}$$

Caracterizemos C:

$$\begin{cases} z = \sqrt{4-(x^2+y^2)} \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{4-1} = \sqrt{3} \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$



Parametrização de C no sentido positivo em relação à superfície :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = sen\ t \\ z = \sqrt{3} \end{cases}, \qquad t \in [0,2\pi]\ , \qquad ou \qquad \vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + sen\ t\,\vec{j} + \sqrt{3}\,\vec{k}$$

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \int_C -yz\partial x + xz\partial y + xy\ dz =$$

$$\vec{F}(x,y,z) = -yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{\imath} + sen\ t\,\vec{\jmath} + \sqrt{3}\,\vec{k}$$

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} =$$

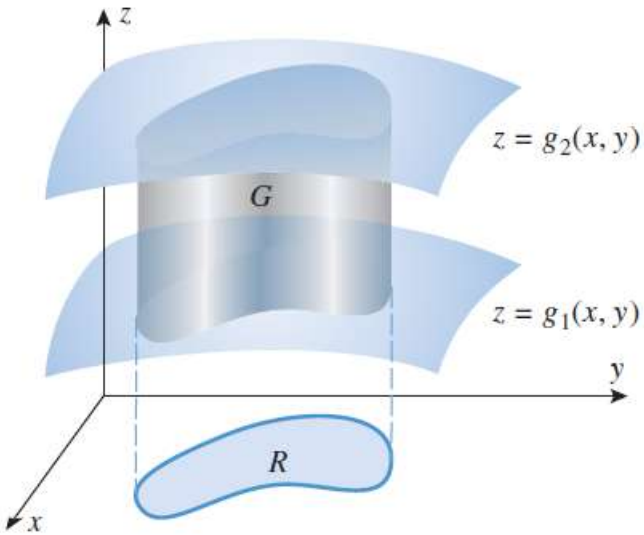
$$\int_C -yz\partial x + xz\partial y + xy\,dz = \int_C -yz\partial x + \int_C xz\partial y + \int_C xy\,dz =$$

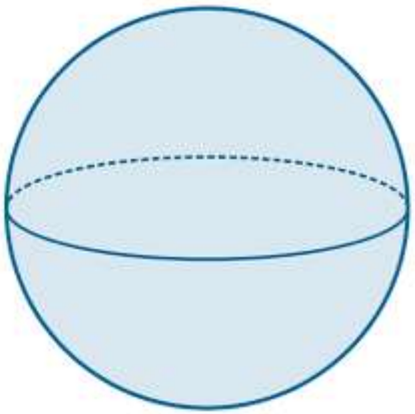
$$-\int_0^{2\pi} \sqrt{3}\,sent(-sen\ t)\partial t + \int_0^{2\pi} \sqrt{3}\cos t\,(\cos t)\,\partial t + \int_0^{2\pi} 0\,dt =$$

$$\sqrt{3}\int_0^{2\pi} sen^2 t\,dt + \sqrt{3}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\ dt = \sqrt{3}\int_0^{2\pi} sen^2 t + \cos^2 t\ dt =$$

$$= 2\sqrt{3}\pi$$

Teorema da divergência - Gauss





(para superfícies “fechados= fronteira de um sólido)

Teorema da divergência - Gauss

Teorema:

Seja G *um sólido simples cuja fronteira* σ *é uma superfície fechada orientada com a normal exterior. Se* $\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z)\vec{k}$ *for um campo vetorial de classe* C^1 *num conjunto aberto contendo* G *e se* $\vec{n}$ *for o vetor normal unitário exterior em cada ponto de* σ*, então*

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_{G} \operatorname{div} \vec{F}(x,y,z)\, dxdydz,$$

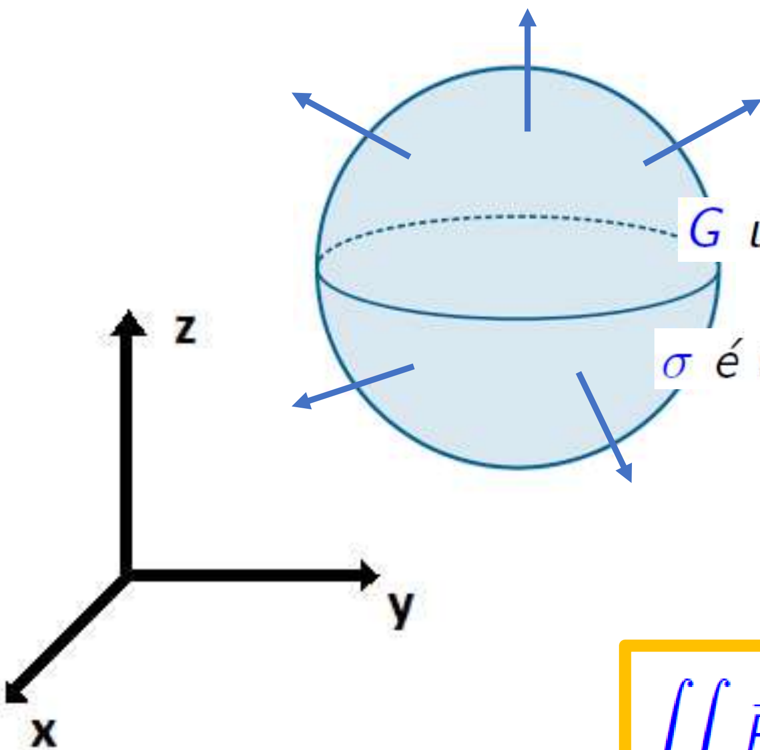
onde

$$\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)$$

é a divergência de $\vec{F}$.

Teorema da divergência - Gauss

$$\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z)\vec{k}$$



G *um sólido*

σ *é uma superfície fechada*

$$\boxed{\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_{G} \operatorname{div} \vec{F}(x,y,z)\, dxdydz,}$$

Exemplo

Considere o sólido em $\mathbb{R}^3$ *definido por*

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2-z \leq 0 \wedge x^2+y^2+z^2 \leq 2 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$$

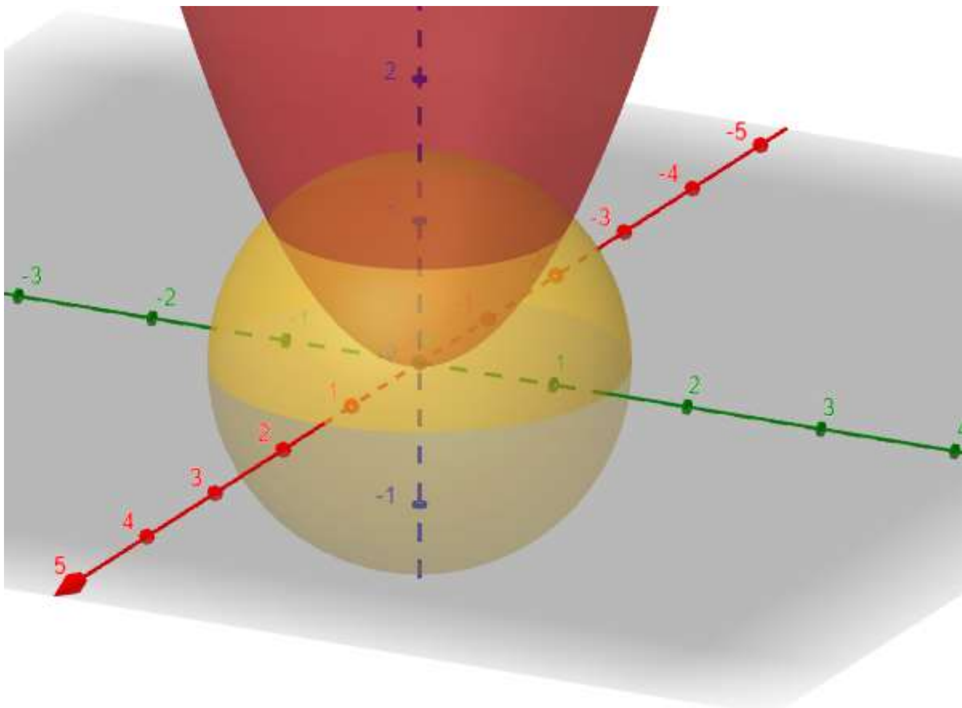
e o campo vetorial
$\vec{F}(x, y, z) = zx^2 \cos^2(z)\,\vec{i} + 2xzy\,\mathrm{sen}^2(z)\,\vec{j} + xy\cos(y)\,\vec{k}$. *Designe por* σ *a fronteira de* E *orientada pela nornal exterior* $\vec{n}$. *Usando o teorema da divergência, determine*

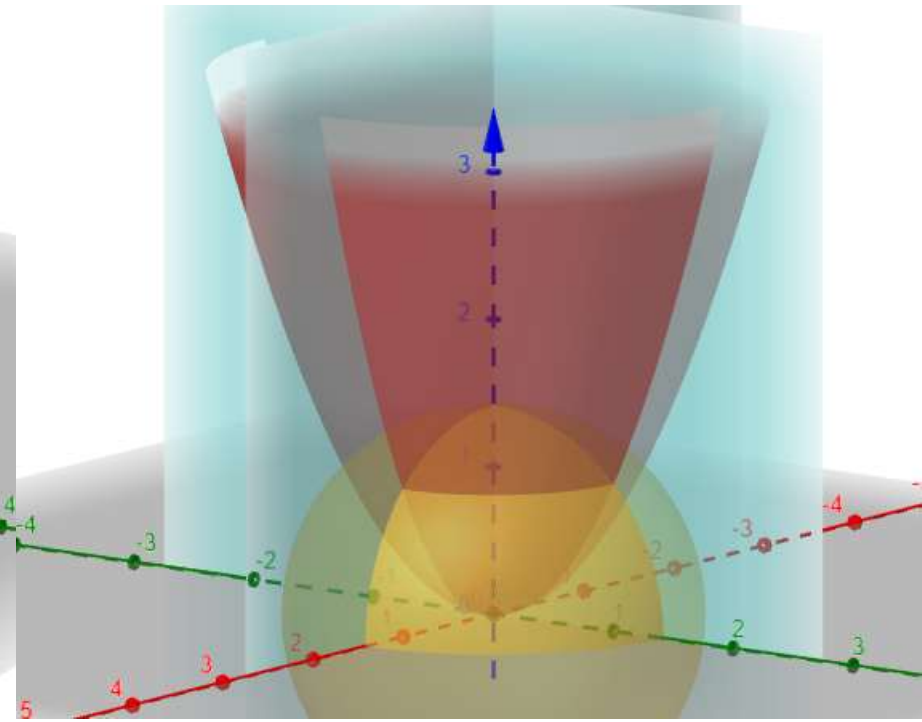
$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Resolução: $\vec{F}(x,y,z) = zx^2\cos^2(z)\,\vec{i} + 2xzy\,\mathrm{sen}^2(z)\,\vec{j} + xy\cos(y)\,\vec{k}.$

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z \leq 0 \wedge x^2+y^2+z^2 \leq 2 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$ (Sólido)

σ a fronteira de E orientada pela nornal exterior $\vec{n}$.





σ e formada pela união de 4 superfície

σ_1 Relacionada com a esfera

σ_2 Relacionada com o paraboloide

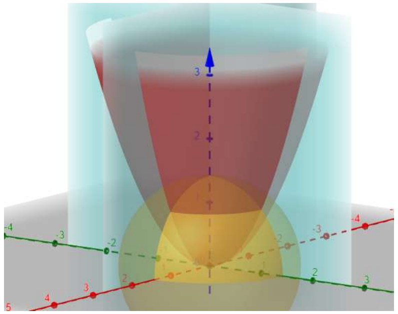
σ_3 Relacionada com plano x=0

σ_4 Relacionada com plano y=0

$$\vec{F}(x,y,z) = zx^2\cos^2(z)\,\vec{i} + 2xzy\,\mathrm{sen}^2(z)\,\vec{j} + xy\cos(y)\,\vec{k}.$$

$$E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2-z \le 0 \wedge x^2+y^2+z^2 \le 2 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0\}$$ (Sólido)

$$\iint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}dS. \; ?$$



$$\boxed{\iint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_G \mathrm{div}\,\vec{F}(x,y,z)\,dxdydz,}$$

$$div\,\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(z\,x^2\cos^2 z) + \frac{\partial}{\partial y}(2xzy\;sen^2 z) + \frac{\partial}{\partial z}(xy\cos y)$$

$$= 2z\,x\cos^2 z + 2xz\;sen^2 z = 2xz$$

$$\iiint_E 2xz\;dxdydz = \iiint_{E^*}(2r \quad \cos\theta \;\; z)r\;drd\theta dz =$$

(coordenadas cilíndricas)

$$=\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} 2\,\mathrm{r}^2\cos\theta\;z\;dz\;dr\;d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} 2\,\mathrm{r}^2\cos\theta\; z\,dz\,dr\,d\theta =$$

$$2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\int_0^1 r^2\left(\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} z\,dz\right)drd\theta =$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos\theta\int_0^1 r^2[z^2]_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}}drd\theta=$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos\theta\int_0^1 r^2(2-r^2-r^4)drd\theta=$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos\theta\int_0^1 (2r^2-r^4-r^6)drd\theta=$$

$$\int_0^{\pi/2}\cos\theta\int_0^1 (2r^2-r^4-r^6)drd\theta =$$

$(2/3\text{-}1/5\ \text{-}1/7)\int_0^{\pi/2}\cos\theta\ \ d\theta$ = (2/3-1/5 -1/7)!!!!!!!!!


The End
VIVOS!