PRIMEIRO TESTE (15 de Abril de 2019) DURAÇÃO **2 h** **CÁLCULO NUMÉRICO**

Número: ________ Curso: ________ Nome: ____________________________________

A primeira parte do teste é constituida por 5 questões de escolha múltipla.
Nas questões 1 a 5 assinale com "x" a resposta correcta.
Cada resposta correcta vale 1.0 valor. Respostas em branco valem 0 valores.
Se responder erradamente ou de forma ambígua ser-lhe-á atribuída uma cotação negativa correspondente a 0.2 valores.
Se a soma das cotações da escolha múltipla for negativa, será atribuído 0 valores à escolha múltipla.

Classificação
EM -
TOTAL-

1. Considere o intervalo $[a,b]$, com $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ e a função f para a qual se conhece os valores $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$.

   Seja p o polinómio de Lagrange de grau menor ou igual a n, tal que, $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$ e q o polinómio do segundo grau que aproxima a função segundo a técnica dos mínimos quadrados. Considere ainda o spline cúbico natural, S, interpolador de f nos pontos dados. Verifica-se sempre:

   ☐ **a)** $\sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - q(x_i)]^2 = 0$

   ☒ **b)** $\sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - S(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - p(x_i)]^2$

   ☐ **c)** $\sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - q(x_i)]^2 = \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - p(x_i)]^2$

   ☐ **d)** $\sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - S(x_i)]^2 \neq \sum_{i=0}^{n} [f(x_i) - p(x_i)]^2$

2. Sejam f uma função definida em $[a,b]$ e $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b$. Considere o spline cúbico natural $S(x)$ interpolador de $f(x)$ nos nodos x_0, x_1, x_2 e x_3, e $p_3(x)$ o polinómio de Newton com diferenças divididas de grau ≤ 3 interpolador de $f(x)$ nos nodos x_0, x_1, x_2 e x_3. Verifica-se sempre:

   ☐ **a)** $f(x) - p_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\frac{f^{(3)}(\theta)}{3!}, \theta \in]a, b[$

   ☐ **b)** $S(x) \neq p_3(x), \forall x \in [a, b]$

   ☒ **c)** $S(x_i) = p_3(x_i), i = 0, ..., 3$

   ☐ **d)** $S(x) = p_3(x), \forall x \in [a, b]$

3. Seja $I = \int_0^2 f(x)dx$ e $\bar{I} = 8$ uma aproximação de I obtida pela regra de Simpson com $h = 1$. Sabendo que f é um polinómio de grau 4 cujo coeficiente de grau 4 é igual a 3, qual é o valor de I?

- [ ] a) $I = 7$
- [x] b) $I = \frac{36}{5}$
- [ ] c) $I = 9$
- [ ] d) $I = \frac{49}{5}$

4. Considere que $f(x)$ é um polinómio de grau n. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- [ ] a) Todas as diferenças divididas de ordem $> n$ são iguais a uma constante $K \neq 0$;
- [ ] b) Todas as $f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+n}]$ são nulas;
- [x] c) Todas as $f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+n}]$ são iguais a uma constante $K \neq 0$;
- [ ] d) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

5. Seja $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ e $f(x) \in C^4[-1, 1]$ uma função que verifica $|f_{(4)}(x)| \leq 30$, $\forall x \in [-1, 1]$. Se pretendesse determinar um valor aproximado de I, com pelo menos 3 casas decimais significativas, utilizando a regra de Simpson, qual o menor número de sub-intervalos de igual amplitude em que teria de dividir o intervalo [-1, 1]?

- [ ] a) 5
- [ ] b) 10
- [ ] c) 6
- [x] d) 12

3. $I = \int_0^2 f(x)\,dx \qquad \bar{I} = 8$

Regra de Simpson com $h = 1$

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \overset{=3}{a_4} x^4 \qquad a_4 = 3$

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^3 + 12 x^3$

$f''(x) = 2a_2 x + 6a_3 x + 36x^2$

Se $h = 1 \Rightarrow$ regra de simpson simples

$f'''(x) = 6a_3 + 72x$

$f^{(4)}(x) = 72$

$I - \bar{I} = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\theta) \quad , \theta \in]0,2[$

$I - \bar{I} = -\frac{1}{90} \times 72 = -\frac{4}{5} = 0.8$

$I = -\frac{4}{5} + \bar{I} \iff I = -\frac{4}{5} + 8 = -\frac{4}{5} + \frac{40}{5} = \frac{36}{5}$

$\bar{I} = 8 \qquad\qquad = 7.2$

5. $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \qquad f \in C^4[-1,1] \quad |f^{(4)}(x)| \leq 30$

$|I - \bar{I}| \leq 0.5 \times 10^{-3} \qquad h = \frac{1-(1)}{2n} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n}$

$|I - \bar{I}| = \left| -\frac{h^5}{90} \times n \times f^{(4)}(\theta) \right| \qquad \theta \in]-1,1[$

$|I - \bar{I}| \leq \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^{\cancel{5}4}}{90} \times \cancel{n} \times 30 \leq 0.5 \times 10^{-3}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{30}{90 n^4} \leq 0.5 \times 10^{-3}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3n^4} \leq 0.5 \times 10^{-3}$

$3n^4 \geq \frac{1}{0.5 \times 10^{-3}}$

$n^4 \geq \frac{1}{1.5 \times 10^{-3}}$

$n^{\cancel{4}} \geq 5.0813257$

$n = 6$ nº de aplicações

nº de subintervalos $= 2n = 12$

6. Spline natural

$$S(x) = \begin{cases} 1+2x-x^3 \to S_0(x) & 0 \leq x < 1 \\ 2+a(x-1)+b(x-2)^2+c(x-1)^3 = S_1(x) & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$S'(x) = \begin{cases} 2-3x^2 & 0 \leq x < 1 \\ a+2b(x-1)+3c(x-1)^2 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$S''(x) = \begin{cases} -6x & 0 \leq x < 1 \\ 2b+6c(x-1) & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Condições para $S(x)$ ser spline

– Continuidade da 2ª derivada

$$S_0''(1) = S_1''(1) \Leftrightarrow -6 = 2b \Leftrightarrow b = -3$$

– Continuidade da 1ª derivada

$$S_0'(1) = S_1'(1) \Leftrightarrow 2-3 = a+0++0 \Leftrightarrow a = -1$$

$S(x)$ é spline natural

$$\Rightarrow S''(0) = S''(2) = 0$$

$$S''(0) = 0$$

$$S''(2) = 2x-3+6c(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow S''(2) = -6+6c(2-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6c = +6$$

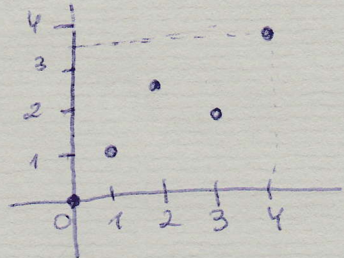
$$\Leftrightarrow c = 1$$

$$S(x) = \begin{cases} 1+2x-x^3 \\ 2-(x-1)-3(x-1)^2+(x-1)^2 \end{cases}$$

b) $f(1{,}5) \simeq S(1{,}5) = 2 - \frac{1}{2} - 3 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 0.875$

7.

x	0	1	2	3	4
y	0	1	2.5	2	3.5



a) Dado que y varia linearmente com o tempo t e o gráfico evidencia um comportamento quase linear o método que melhor capta o comportamento linear é o método dos mínimos quadrados porque permite obter um polinómio de grau 1 que aproxima os pontos dados minimizando as distâncias entre os pontos e a recta.

b) $m_1(t) = a_0 + a_1 t$

$$\sum_{i=0}^{4} x_i = 10 \qquad \sum_{i=0}^{4} y_i = 9$$

$$\sum_{i=0}^{4} x_i^2 = 30 \qquad \sum_{i=0}^{4} y_i x_i = 26$$

$$\begin{cases} 5a_0 + 10a_1 = 9 \\ 10a_0 + 30a_1 = 26 \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{9-10a_1}{5} \\ a_0 = \dfrac{26-30a_1}{10} \end{cases}$$

$$\frac{9-10a_1}{5} = \frac{26-30a_1}{10} \iff 18 - 20a_1 = 26 - 30a_1$$

$$\iff 18 - 26 = -30a_1 + 20a_1 \iff -8 = -10a_1 \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{-8}{-10} = 0{,}8 \\ a_0 = \dfrac{9 - 10 \times 0{,}8}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 0.8 \\ a_0 = \dfrac{1}{5} = 0.2 \end{cases} \qquad m_1(t) = 0.2 + 0.8t$$

c) erro quadrático

$$\sum_{i=0}^{4} \left(y(t_i) - m_1(t_i)\right)^2 = (0-0.2)^2 + (1-1)^2 + (2.5-1.8)^2 + (2-2.6)^2 + (3.5-3.4)^2$$

$$= 0.04 + (0.7)^2 + (0.6)^2 + (0.1)^2 = 0.9$$

d) $m_4(t)$ grau ≤ 4

$\sum_{i=0}^{4} (y(t_i) - m_4(t_i))^2 = 0$ porque quando temos 5 pontos ou nodos o polinómio m_4 dado pela técnica dos mínimos quadrados coincide com o polinómio interpolador dos 5 nodos, logo $p_4(t_i) = m_4(t_i)$

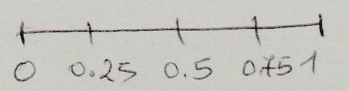
e como $p_4(t_i) = y(t_i) \Rightarrow y(t_i) - m_4(t_i) = 0, \ i = 0, \dots, 4$

8. $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$

$(e^{x^2})' = e^{x^2} \times 2x$

$(e^{x^2})'' = 2x\, e^{x^2} \times 2x + e^{x^2} \times 2 = 2e^{x^2}(2x^2+1)$

a) Regra do ponto médio com 4 aplicações e 5 casas decimais



$h = 0.25$

$\bar{I}_{PM} = 0.25\left(f\left(\frac{0+0.25}{2}\right) + f\left(\frac{0.25+0.5}{2}\right) + f\left(\frac{0.5+0.75}{2}\right) + f\left(\frac{0.75+1}{2}\right)\right)$

$= 1.44875$

Regra dos Trapézios com 4 aplicações e 5 casas decimais

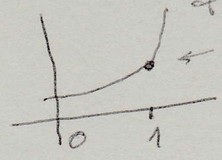
$\bar{I}_T = \frac{0.25}{2}\left(f(0) + 2\left(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75)\right) + f(1)\right) = 1.49068$

b) $|I - \bar{I}_T| = \left| -\frac{4 \times (0.25)^3}{12} \times f''(\theta) \right|, \theta \in]0,1[$ Regra dos Trapézios

$f''(x)$ contínua

← máximo em $x=1$

$f''(x) = 2e^{x^2}(2x^2+1)$



$|f''(x)| \leq |f''(1)| = 2e(2+1) = 6e = 16.3097..$

$|I - \bar{I}_T| \leq \frac{4 \times (0.25)^3}{12} \times \underbrace{6e}_{<17} \leq 0.089 < 0.5 \times 10^0$

$m + 1 - n = 0 + 1 - n = 0$, $n = 1$

$10^{0=m} \leq \bar{I}_T = 1.44875 \leq 10^{+1}$

$\bar{I}_T$ tem 1 ~~casa~~ algarismo significativo

Regra do ponto médio

$|I - \bar{I}_{PM}| \leq \left| \frac{4 \times (0.25)^3}{24} \times 6e \right| \leq 0.0443 < 0.5 \times 10^{-1}$

$10^0 \leq \bar{I}_{PM} \leq 10^{+1}$

$\overset{0}{m} + 1 - \overset{2}{n} = -1 \implies n = 2 \implies$ $\bar{I}_{PM}$ tem 2 algarismos significativos

logo a regra do ponto médio fornece melhor aproximação