ANÁLISE MATEMÁTICA III-C

João de Deus Marques

24 de Fevereiro de 2024

Introdução

Uma **equação diferencial ordinária de primeira ordem** é uma equação que estabelece uma relação entre uma variável independente, uma função y dessa variável e a sua derivada y'. Designando por x a variável independente, é uma equação da forma

$$F\left(x, y(x), y'(x)\right) = 0, \tag{0.1}$$

onde F é uma função definida num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^3$.
Dado um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, diz-se que uma função $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em I é uma solução da equação diferencial (**??**) se:

1. $(x, \phi(x), \phi'(x)) \in D, \quad \forall x \in I$
2. $F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$

De uma forma geral, chama-se **ordem de uma equação diferencial** à ordem da derivada mais elevada presente na referida equação.

Exemplo

A equação diferencial

$$y' - \frac{1}{x}y = xe^x$$

é de primeira ordem e as funções

$$y(x) = cx + xe^x, \quad c \in \mathbb{R}$$

são soluções em $]0, \infty[$ *desta equação.*

Exemplo

A equação diferencial

$$y'' + 4y = 0$$

é de segunda ordem e as funções

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

são soluções em $\mathbb{R}$ *desta equação* . $\square$

De entre as equações de primeira ordem têm particular importância as equações escritas na *forma normal*, isto é, na forma

$$y'(x) = f(x, y(x)), \tag{0.2}$$

com f função real definida num conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^2$.
As equações de primeira ordem na forma normal admitem uma interpretação geométrica relativamente simples e que permite ter uma ideia aproximada dos gráficos das soluções destas equações. Com efeito, se a cada ponto (x, y) de A se associar a direção das retas de declive igual a $f(x, y)$, associação esta que será feita representando por um segmento de reta de início no ponto (x, y) e com a direção referida, será obtido aquilo a que usualmente se chama um *campo de direções* da equação (**??**).

O gráfico de uma solução da equação (**??**) é uma curva que em cada ponto (x, y) é tangente á reta que passa por esse ponto e tem a direção dada pelo campo de direções nesse ponto, isto é, a direção das rectas de declive igual a $f(x, y)$.

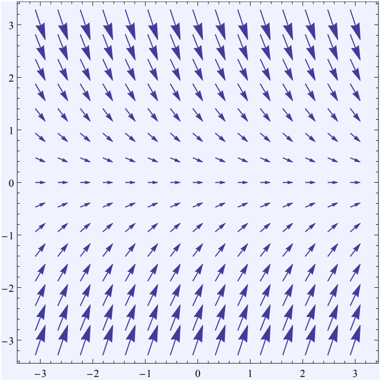

Figura: Campo de direções da equação $y' = -y$.

Soluções implícitas e explícitas

Observe-se que no exemplo anterior as soluções são da forma

$$y = f(x),$$

neste caso diz-se que as soluções são *soluções explícitas* da equação.

Em muitos casos, obtém-se apenas uma expressão da forma

$$G(x, y) = 0,$$

que define implicitamente uma função $y(x)$ solução da equação.

Exemplo

A equação

$$y^3 - x^3 - 8 = 0$$

define uma solução implícita da equação diferencial

$$y^2 y' = x^2$$

em $\mathbb{R}$.

A função

$$y = \varphi(x) = \sqrt[3]{8 + x^3}$$

é uma solução explícita da mesma equação em $\mathbb{R}$.

Exemplo

A equação

$$xy + e^y = x + 1$$

define uma solução implícita da equação diferencial

$$(x + e^y)y' + y = 1.$$

A solução considerada não pode ser escrita na forma explícita.

Famílias de soluções

Tal como sucede no cálculo da primitiva de uma função, em que aparece uma constante c de integração, quando se resolve uma EDO de primeira ordem, geralmente obtém-se como solução uma expressão da forma

$$G(x, y, c) = 0,$$

contendo uma constante (ou parâmetro) c, e que representa um conjunto de soluções a que se chamará **família de soluções a um parâmetro**.

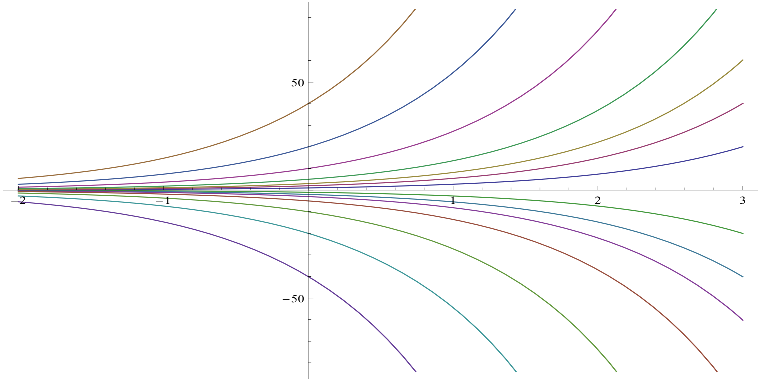

Figura: Família de soluções da equação $y' = y$.

A atribuição de valores à constante c permite obter soluções que não dependem de qualquer constante arbitrária, as quais serão designadas por **soluções particulares**. Há equações que admitindo soluções da forma $G(x, y, c) = 0$ possuem também soluções que não podem ser obtidas a partir desta família, isto é, não é possível chegar a tais soluções qualquer que seja a escolha da constante. Tais soluções, quando existem, chamam-se **soluções singulares**.

Integral geral

Se toda a solução de uma EDO de primeira ordem

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

num dado intervalo I, puder ser obtida a partir de uma família a um parâmetros $G(x, y, c) = 0$, para uma escolha conveniente da constante c, dir-se-á que essa família é o **integral geral** ou **solução geral** da equação.

Equações autónomas

Uma equação diferencial ordinária em que não aparece explicitamente a variável independente é chamada de *equação autónoma*. Se for y a função incógnita e x a variável independente, uma equação diferencial autónoma de primeira ordem é uma equação da forma $F(y, y') = 0$ ou na forma normal

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

Os zeros da função f são particularmente importantes e são chamados *pontos de equilíbrio* (pontos críticos ou estacionários) da equação autónoma. Se c for um ponto de equilíbrio, isto é, $f(c) = 0$ então a função constante $y(x) = c$ é solução da equação autónoma. Se c é ponto de equilíbrio da equação autónoma à solução constante $y(x) = c$ chama-se solução de equilíbrio (ou estacionária) da equação autónoma.

Exemplo

Considere-se a equação autónoma

$$\frac{dy}{dx} = y(a - by)$$

em que a e b são constantes positivas. Os pontos de equilíbrio da equação (zeros da função $f(y) = y(a - by)$*) são* $y = 0$ *e* $y = \frac{a}{b}$*. As soluções de equilíbrio são as funções constantes* $y(x) = 0$ *e* $y(x) = \frac{a}{b}$*. Colocando os pontos de equilíbrio numa reta vertical, dividimos esta reta em três intervalos:* $]-\infty, 0[,]0, \frac{a}{b}[$ *e* $]\frac{a}{b}, +\infty[$.

Exemplo

As setas na reta representada na figura indicam o sinal de $f(y) = y(a - by)$ *em cada um dos intervalos e portanto o tipo de crescimento das soluções não constantes. Este tipo de representação é usualmente designado por "retrato de fase unidimensional" e à reta vertical é usual chamar "reta de fase".*

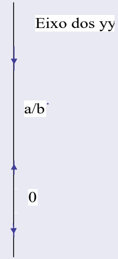

Figura: Reta de fase.

Vejamos que mesmo sem resolver a equação autónoma

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

é, em geral, possível tirar conclusões sobre as suas soluções. Como f não é explicitamente função de x iremos considerar que f está definida para todo o $x \in \mathbb{R}$. Admitiremos também que f como função de y é de classe C^1 em algum intervalo I.

Nas hipóteses de f ser de classe C^1 em algum retângulo $R \subset \mathbb{R}^2$, é possível provar que dado $(x_0, y_0) \in R$ o problema

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0,$$

tem uma e uma só solução em algum intervalo da forma $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \alpha > 0$. Assim, na hipótese de f ser de classe C^1 em algum intervalo I, a equação autónoma possui uma e uma só solução passando por cada ponto $(x_0, y_0) \in R = \mathbb{R} \times I$.

Suponhamos que a equação autónoma possui dois pontos de equilíbrio c_1 e c_2 e que $c_1 < c_2$. Os gráficos das soluções de equilíbrio $y(x) = c_1$ e $y(x) = c_2$ dividem a região R em três subregiões R_1, R_2 e R_3 conforme indicado na figura.

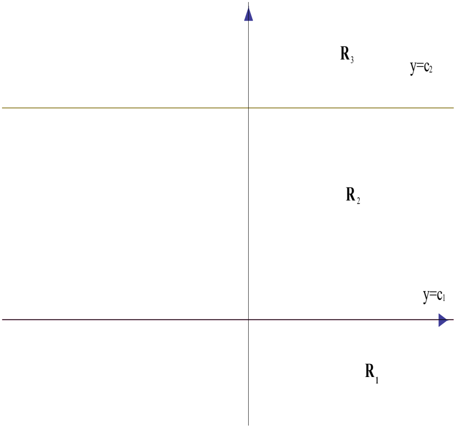

Figura: Soluções de equilíbrio $y(x) = c_1 < y(x) = c_2$.

1. Suponhamos que (x_0, y_0) pertence a uma das subregiões e que $y(x)$ é a solução cujo gráfico passa por este ponto. Então $y(x)$ permanece nesta subregião para todos os valores de x.
2. Tendo em conta a continuidade de f ter-se-á obrigatoriamente $f(y) < 0$ ou $f(y) > 0$ em cada uma das subregiões, consequentemente as soluções são monótonas (crescentes ou decrescentes) em cada uma das subregiões não podendo ter extremos relativos.
3. Se $y(x)$ for uma solução limitada superiormente (resp. inferiormente) pelo ponto crítico c_1 (resp. c_2), então o gráfico de $y(x)$ aproximar-se-à do gráfico da soluções de equilíbrio $y(x) = c_1$ (resp. $y(x) = c_2$) quando $x \longrightarrow +\infty$ ou quando $x \longrightarrow -\infty$. Se $y(x)$ for uma solução limitada pelos dois pontos de equilíbrio consecutivos c_1 e c_2 ($c_1 < y(x) < c_2$ para todo o x) então $y(x)$ aproximar-se-à dos gráficos das soluções de equilíbrio $y(x) = c_1$ e $y(x) = c_2$, de uma quando $x \longrightarrow +\infty$ e da outra quando $x \longrightarrow -\infty$.

Exemplo

Voltemos a considerar a equação autónoma

$$\frac{dy}{dx} = y(a - by).$$

Aos três intervalos determinados na reta de fase pelos pontos de equilíbrio $y = 0$ *e* $y = \frac{a}{b}$ *correspodem três subregiões* R_1, R_2 *e* R_3 *do plano* xy *semelhantes às representadas na figura anterior. Foi também visto que* $y(x)$ *é decrescente em* R_1 *e* R_3 *e crescente em* R_2. *Seja* $y(x)$ *a solução que verifica a condição inicial* $y(0) = y_0$.

Exemplo

1. Se $y_0 < 0$, $y(x)$ *é decrescente e limitada superiormente. Tem-se que*

$$y(x) \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \;\; x \longrightarrow -\infty$$

(o gráfico da solução de equilíbrio $y = 0$ *é uma assíntota horizontal da solução). A solução não é limitada.*

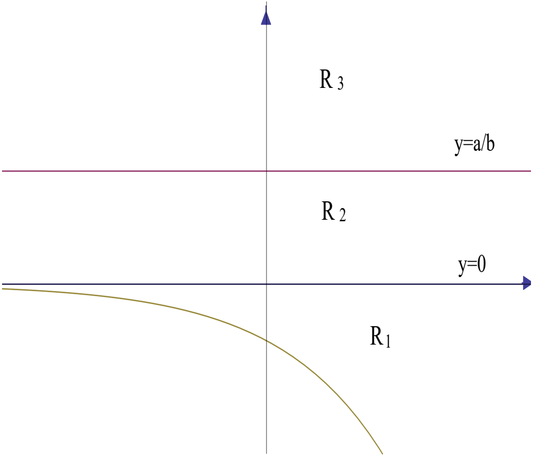

Figura: Retrato de fase.

Exemplo

2. Se $0 < y_0 < \dfrac{a}{b}$, $y(x)$ *é crescente e limitada. Tem-se que*

$$y(x) \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \;\; x \longrightarrow -\infty$$

e

$$y(x) \longrightarrow \frac{a}{b} \quad \textit{quando} \;\; x \longrightarrow +\infty$$

(o gráfico das soluções de equilíbrio $y = 0$ *e* $y = \dfrac{a}{b}$ *são duas assíntotas horizontais da solução).*

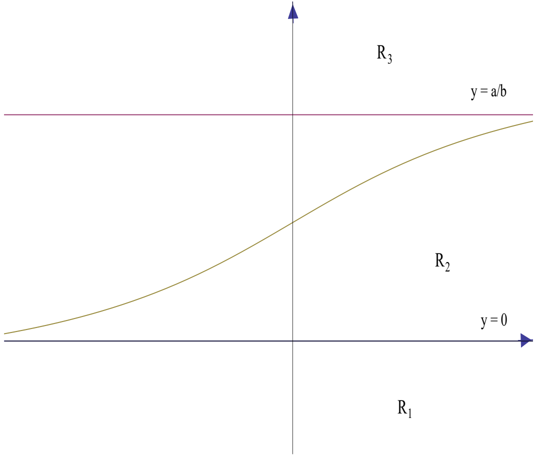

Figura: Retrato de fase.

Exemplo

3. Se $y_0 > \frac{a}{b}$, $y(x)$ *é decrescente e limitada inferiormente. Tem-se que*

$$y(x) \longrightarrow \frac{a}{b} \quad \textit{quando} \quad x \longrightarrow +\infty$$

(o gráfico da solução de equilíbrio $y = \frac{a}{b}$ *é uma assíntota horizontal da solução). A solução não é limitada.*

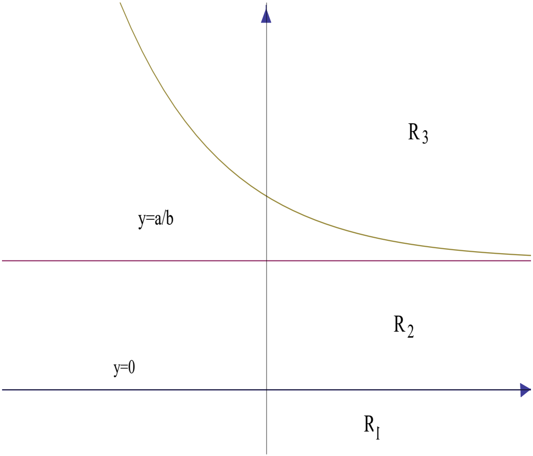

Figura: Retrato de fase.

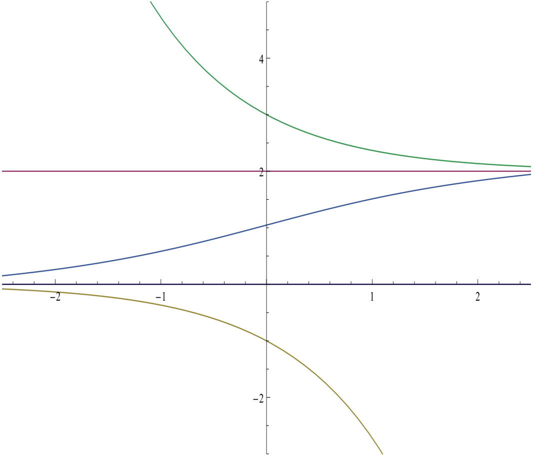

Figura: Retrato de fase.

Exemplo

A equação autónoma

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)^2$$

tem $y = 1$ *como único ponto de equilíbrio. Observando a reta de fase, verifica-se que qualquer solução* $y(x)$ *em qualquer um dos intervalos* $]-\infty, 1[$, $]1, +\infty[$ *é crescente.*

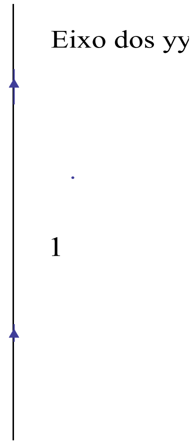

Figura: Retrato de fase.

Uma solução $y(x)$ com uma condição inicial $y(0) = y_0 < 1$ é crescente e limitada superiormente por 1 pelo que $y(x) \longrightarrow 1$ quando $x \longrightarrow +\infty$.

Uma solução $y(x)$ com uma condição inicial $y(0) = y_0 > 1$ é crescente, limitada inferiormente por 1 e ilimitada superiormente.

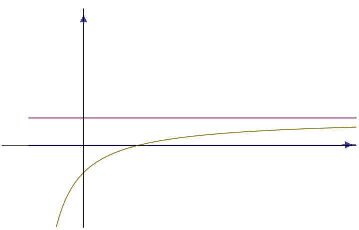

Figura: Solução com uma condição inicial $y(0) = y_0 < 1$

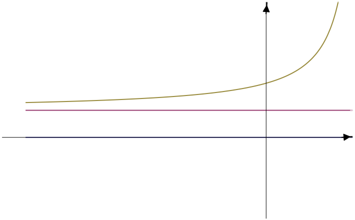

Figura: Solução com uma condição inicial $y(0) = y_0 > 1$

Exemplo

Considerando, por exemplo, o PVI

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)^2, \quad y(0) = -1 (< 1)$$

pode mostrar-se que tem por solução

$$y(x) = 1 - \frac{1}{x + \frac{1}{2}}, \quad -\frac{1}{2} < x < +\infty.$$

Observando o gráfico na figura verifica-se que $x = -\dfrac{1}{2}$ *é uma assíntota vertical e que, tal como já tinha sido observado a partir da reta de fase,* $y(x) \longrightarrow 1$ *quando* $x \longrightarrow +\infty$.

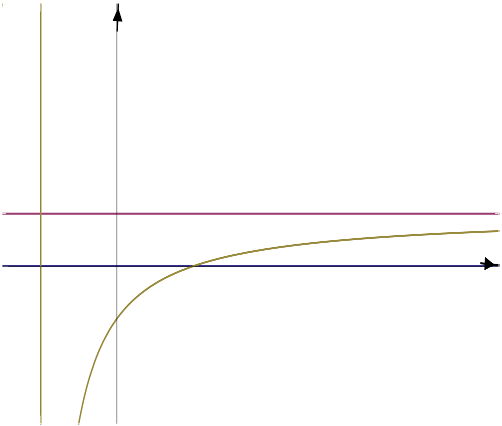

Figura: Solução com a condição inicial $y(0) = -1$.

Exemplo

Considerando agora o PVI

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)^2, \quad y(0) = 2(>1)$$

pode mostrar-se que tem por solução

$$y(x) = 1 - \frac{1}{x-1}, \quad -\infty < x < 1.$$

Observando o gráfico na figura verifica-se que $x = 1$ *é uma assíntota vertical e que, tal como já tinha sido observado a partir da reta de fase,* $y(x)$ *é limitada inferiormente por* 1 *e ilimitada superiormente.*

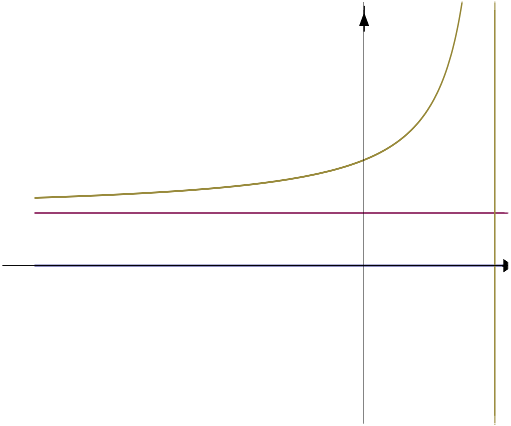

Figura: Solução com a condição inicial $y(0) = 2$.

Suponhamos que $y(x)$ é uma solução não constante da equação autónoma

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

e que c é um seu ponto de equilíbrio. Na figura seguinte colocamos o ponto c em duas retas de fase. Na primeira reta de fase em que ambas as setas apontam para c, as soluções que passam por um ponto (x_0, y_0) suficientemente perto de c convergem para c quando $x \longrightarrow +\infty$. Por este motivo, neste caso, o ponto de equilíbrio c diz-se *assintoticamente estável* e é também usual dizer-se que o ponto c é um *atrator*. Na segunda reta de fase em que ambas as setas apontam no sentido oposto ao de c, todas as soluções passando por um ponto (x_0, y_0) afastam-se de c quando x cresce. Neste caso, o ponto de equilíbrio c diz-se *instável* ou *repulsor*.

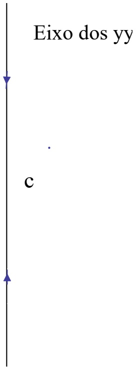

Figura: Ponto de equilíbrio *assintoticamente estável*

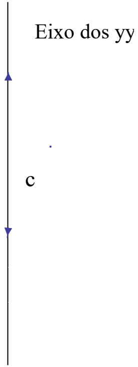

Figura: Ponto de equilíbrio *instável*

Na figura seguinte o ponto c não é nem atrator nem repulsor uma vez que exibe características de ambos. Isto é soluções que passam por um ponto (x_0, y_0) suficientemente perto de c são atraidas ou repelidas consoante y_0 é maior ou menor que c. Por esta razão o ponto c, neste caso, é dito *semiestável*.

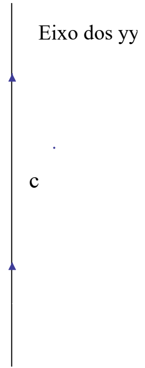

Figura: Ponto de equilíbrio *semiestável*

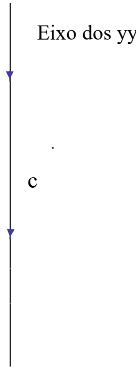

Figura: Ponto de equilíbrio *semiestável*

Na equação

$$\frac{dy}{dx} = y(a - by)$$

o ponto a/b é assintoticamente estável (atrator) e o ponto 0 é instável (repulsor).

Na equação

$$\frac{dy}{dx} = (y - 1)^2$$

o ponto 1 é semiestável.

O campo de direções de uma equação autónoma

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

tem a seguinte particularidade. Uma vez que o membro da direita da equação só depende da variável y, no campo de direções todos os segmentos orientados pertencentes à mesma reta horizontal deverão ser iguais uma vez que o declive das retas tangentes a cada uma das soluções que passa por cada um desses pontos não muda.

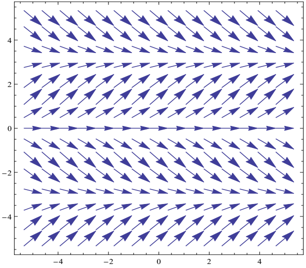

Figura: Campo de direções da equação $y' = \sin y$.

A equação linear de primeira ordem

Uma equação $y' = f(x, y)$ diz-se *linear* se puder ser escrita na forma

$$y' + p(x)y = q(x),$$

com $p(x)$ e $q(x)$ funções contínuas num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$.

Exemplo

A equação

$$y' + 2xy = x^3,$$

é linear em que $p(x) = 2x$ *e* $q(x) = x^3$ *são funções contínuas em* $\mathbb{R}$.

Vejamos como determinar a solução geral da equação linear.

Multiplicando a equação por

$$\varphi(x) = e^{\int p(x)dx}$$

obtém-se

$$e^{\int p(x)dx} y' + e^{\int p(x)dx} p(x) y = e^{\int p(x)dx} q(x),$$

ou seja

$$(e^{\int p(x)dx} y)' = e^{\int p(x)dx} q(x),$$

pelo que

$$e^{\int p(x)dx} y = \int e^{\int p(x)dx} q(x) dx + C.$$

Então o integral geral da equação linear é

$$y = \frac{C}{e^{\int p(x)dx}} + \frac{1}{e^{\int p(x)dx}} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx.$$

Voltando a designar $e^{\int p(x)dx}$ por $\varphi(x)$, o integral geral da equação assume a forma

$$y = \frac{C}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int \varphi(x)\, q(x)dx.$$

Acabou de demonstrar-se o resultado:

Teorema

A equação diferencial linear

$$y' + p(x)y = q(x),$$

com $p(x)$ *e* $q(x)$ *funções contínuas num intervalo aberto* $I \subseteq \mathbb{R}$*, tem como integral geral*

$$y = \frac{C}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int \varphi(x)\, q(x) dx,$$

em que $\varphi(x) = e^{\int p(x) dx}$ *e* C *é uma constante real arbitrária.*

Se na equação linear a função $q(x)$ for identicamente nula, a equação toma a forma

$$y' + p(x)y = 0 \tag{0.3}$$

e designa-se por **equação linear homogénea**.

A equação linear homogénea tem por integral geral

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} = \frac{C}{\varphi(x)}, \quad \varphi(x) = e^{\int p(x)dx}$$

em que C é uma constante real arbitrária.

Se na equação linear a função $q(x)$ não for identicamente nula é usual chamar-lhe **equação linear completa**. A equação que se obtém da equação linear completa quando se substitui $q(x)$ pela função identicamente nula designa-se por **equação homogénea associada.**

Exemplo

O primeiro modelo de crescimento populacional foi proposto por Thomas Malthus em 1798, após ter observado que, na ausência de restrições ambientais, a taxa de variação de uma população era proporcional a essa mesma população. Designando por $p(t)$ o número de indivíduos de determinada população num dado instante t, a hipótese considerada por Malthus conduz à equação diferencial

$$p'(t) = kp(t),$$

sendo k a constante de proporcionalidade (diferença entre as taxas de natalidade e mortalidade médias da população). Trata-se de uma equação linear homogénea que tem por solução geral

$$p(t) = ce^{kt}, \ [verifique]$$

pelo que o crescimento populacional previsto por este modelo é exponencial.

Exemplo (continuação)

Supondo que a unidade temporal t é medida em anos e que $p(t)$ é medida em milhões de habitantes, para um valor de $k = 0,023$ e supondo que $p(0) = 1$, ao fim de dez anos a população será

$$p(10) = e^{0,023 \times 10} = 1,258 \ \ \textit{milhões.}$$

Uma crítica ao modelo preconizado por Malthus consiste no facto de este não considerar restrições logísticas, que impedem o crescimento ilimitado das populações. Apesar das limitações referidas, o modelo é ainda largamente utilizado como uma primeira aproximação à dinâmica populacional.

Exemplo

Considere-se uma população de ratos que habita numa determinada zona rural e vamos supor que na ausência de predadores, a população de ratos cresce a uma taxa proporcional à população do momento. Denotando o tempo por t e a população de ratos por $p(t)$, a hipótese considerada sobre o crescimento populacional pode ser expressa, tal como foi visto no exemplo anterior, pela equação

$$p'(t) = kp(t),$$

em que k é o fator de proporcionalidade e é usualmente designado por taxa de crescimento.

Suponhamos que o tempo é medido em meses e que $k = \frac{1}{2}$. Vamos supor ainda que diversas corujas habitam a mesma região e que elas comem 450 ratos por mês.

Exemplo (continuação)

Com este novo dado a equação que traduz a população de ratos passa a ser a seguinte

$$p'(t) = \frac{1}{2}p(t) - 450.$$

Comecemos por determinar a solução de equilíbrio desta equação. Igualando a zero $\frac{1}{2}p(t) - 450$ *obtém-se o ponto de equilíbrio* $p = 900$ *e a solução de equilíbrio é a função constante* $p(t) = 900$.
Como a equação que estamos a considerar é uma equação linear de primeira ordem podemos determinar a sua solução geral. Tem-se que

$$p'(t) - \frac{1}{2}p(t) = -450,$$

Exemplo (continuação)

e

$$p(t) = \frac{C}{\varphi(t)} + \frac{1}{\varphi(t)} \int \varphi(t)\,(-450)dt,$$

em que

$$\varphi(t) = e^{\int -\frac{1}{2}dt} = e^{-\frac{1}{2}t}$$

e C é uma constante real arbitrária, pelo que

$$p(t) = Ce^{\frac{1}{2}t} + e^{\frac{1}{2}t} \int e^{-\frac{1}{2}t}\,(-450)dt = Ce^{\frac{1}{2}t} + 900.$$

Para $t_0 = 0$ (momento em que se começa a contabilizar a população de ratos) têm-se que $p(0) = C + 900$. A solução de equilíbrio obtém-se para o valor de $C = 0$ e traduz o facto de que partindo de uma população inicial de 900 ratos, a população mantêm-se estável nos 900 ratos ao longo dos meses.

Exemplo (continuação)

Suponhamos que a população inicial de ratos é 1000 *isto é* $p(0) = 1000$*, isto significa que* $C = 100$ *e a solução que estamos a considerar é*

$$p(t) = 100e^{\frac{1}{2}t} + 900.$$

Com esta nova condição inicial a população ao fim de um mês é $p(1) = 1065$*, ao fim de dois meses* $p(2) = 1172$*, ao fim de um ano* $p(12) = 41242$ *(uma praga), no entanto sem predadores ao fim de um ano a população seria de* 363085 *ratos (agora sim uma verdadeira praga).*

Exemplo (continuação)

Suponhamos agora que partimos de uma população inicial inferior a 900*, por exemplo, uma população inicial de* 800 *ratos. Esta nova condição inicial conduz à solução*

$$p(t) = -100e^{\frac{1}{2}t} + 900.$$

Vejamos como evolui a população de ratos com este novo modelo. Ao fim de um mês teremos $p(1) = 735$ *ratos, ao fim de dois meses* $p(2) = 629$ *ratos, ao fim de quatro meses* $p(4) = 162$ *ratos. Ao fim de quanto tempo estará extinta a população de ratos? A resposta obtém-se fazendo* $p(t) = 0$ *e resolvendo a equação em ordem a* t*, obtendo-se* $t = 4,39$ *que corresponde a quatro meses e* 12 *dias.*

Exemplo

Na investigação de um homicídio, é, muitas vezes importante estimar o instante em que a morte ocorreu. A partir de observações experimentais, a lei de arrefecimento de Newton estabelece, com uma exatidão satisfatória, que a taxa de variação da temperatura $T(t)$ *de um corpo em arrefecimento é proporcional à diferença entre a temperatura desse corpo e a temperatura constante* T_a *do meio ambiente, isto é:*

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a).$$

Exemplo (continuação)

Onde:
T: *temperatura, em graus Celsius, do corpo no instante* t
T_a: *temperatura constante, em graus Celsius, do meio ambiente*
t: *tempo, medido em horas*
k: *constante de proporcionalidade (positiva) que depende da constituição do corpo, sendo que o sinal negativo indica que a temperatura do corpo está a diminuir com o passar do tempo.*

Suponhamos que um cadáver é encontrado em condições suspeitas no instante $t_0 = 0$ *e que a temperatura do corpo é medida imediatamente pelo perito e o valor obtido é* $T = 30^o C$.

Exemplo (continuação)

Suponhamos que duas horas depois a temperatura é novamente medida e o valor encontrado é $T_1 = 23^o C$.
O crime parece ter ocorrido durante a madrugada e corpo foi encontrado pela manhã bem cedo, pelas 6 *horas e* 17 *minutos.*
A perícia então faz a suposição adicional de que a temperatura do meio ambiente entre a hora da morte e a hora em que o cadáver foi encontrado se manteve mais ou menos constante nos $20^o C$. *A perícia sabe também que a temperatura normal de um ser humano vivo é de* $37^o C$. *Vejamos como, com os dados considerados, a perícia pode determinar a hora em que ocorreu o crime.*

Exemplo (continuação)

Reescrevendo a equação

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a),$$

na forma

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_a,$$

constata-se que se trata de uma equação linear de primeira ordem cuja solução geral é

$$T(t) = \frac{C}{\varphi(t)} + \frac{1}{\varphi(t)} \int \varphi(t)\, kT_a dt,$$

com $\varphi(t) = e^{\int k dt} = e^{kt}$, *isto é*

$$T(t) = Ce^{-kt} + e^{-kt} \int e^{kt}\, kT_a dt = Ce^{-kt} + T_a,$$

Exemplo (continuação)

ou ainda, tendo em conta que $T_a = 20$

$$T(t) = Ce^{-kt} + 20.$$

A partir da condição $T(0) = 30$ *conclui-se que* $C = 10$ *e da condição* $T(2) = 23$ *que* $k \approx 0.6$ *que conduzem à solução*

$$T(t) = 10e^{-0.6t} + 20.$$

O tempo que decorreu decorreu entre o homicídio e o instante $t_0 = 0$ *é dado pelo valor de t solução da equação* $T(t) = 37$*, isto é,* $10e^{-0.6t} + 20 = 37$*, que conduz ao valor* $t = -0.9$ *horas que corresponde a* -54 *minutos. O que permite concluir que o homicídio decorreu por volta das* 5 *horas e* 23 *minutos.*

Exemplo

Considere-se a equação

$$y' + (1 - \frac{1}{x})y = 2x, \quad x > 0.$$

Como $\varphi(x) = e^{\int (1-\frac{1}{x})dx} = \dfrac{e^x}{x}$ *então*

$$y = Cxe^{-x} + xe^{-x}\int 2e^x dx = Cxe^{-x} + 2x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

A equação homogénea associada

$$y' + (1 - \frac{1}{x})y = 0, \quad x > 0.$$

tem por solução geral

$$y = Cxe^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Método da variação das constantes

Foi visto anteriormente como determinar o integral geral da equação linear completa. Uma forma alternativa de determinar o integral geral da equação linear completa é conhecido como **método da variação das constantes arbitrárias**. Considere-se a equação linear completa

$$y' + p(x)y = q(x). \tag{0.4}$$

Esta última equação tem como equação homogénea associada

$$y' + p(x)y = 0 \tag{0.5}$$

cujo integral geral é

$$y^* = Ce^{-\int p(x)dx} \quad C \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos que a constante C que aparece neste último integral geral é uma função de x, $C(x)$, a determinar, de forma a que

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \tag{0.6}$$

seja o integral geral da equação completa (**??**).
Assim sendo, tem-se que

$$(C(x)e^{-\int p(x)dx})' + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x)$$

ou, equivalentemente,

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Primitivando esta última função vem

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C, \text{ com } c \in \mathbb{R}.$$

Substituíndo a função $C(x)$ em (**??**), obtém-se

$$y = \frac{C}{e^{\int p(x)dx}} + \frac{1}{e^{\int p(x)dx}} \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \right),$$

que, tal como foi visto é o integral geral da equação linear completa.

Exemplo

A equação linear completa

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 1,$$

tem por equação homogénea associada

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 0,$$

cuja solução geral é

$$y^* = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int -\frac{2x}{x^2+1}dx} = C(x^2+1).$$

Exemplo (continuação)

Supondo que C é função de x, e que

$$y = C(x)(x^2 + 1)$$

é solução da equação completa, por substituição (na equação completa) obtém-se

$$C'(x) = \frac{1}{x^2 + 1},$$

pelo que

$$C(x) = \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

A equação linear completa tem por integral geral

$$y = (\arctan x + C)\,(x^2 + 1) = C(x^2 + 1) + (x^2 + 1)\arctan x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Considere-se novamente a equação linear completa

$$y' + p(x)y = q(x).$$

O seu integral geral

$$y = \underbrace{\frac{C}{e^{\int p(x)dx}}}_{\text{integral geral da equação homogénea}} + \underbrace{\frac{1}{e^{\int p(x)dx}} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx}_{\text{solução particular da equação completa}} .$$

é a soma do integral geral da equação homogénea com uma sua solução particular.
Reciprocamente se ao integral geral da equação homogénea somarmos uma solução particular da equação completa obtemos a solução geral da equação completa, uma vez que temos uma sua solução dependendo de uma constante arbitrária.

A equação de Bernoulli e a equação de Riccati

Iremos em seguida considerar dois tipos de equações não lineares que, após mudanças de variável apropriadas, se transformam em equações lineares:

A equação de Bernoulli

e a

Equação de Riccati.

A equação de Bernoulli

Chama-se *equação de Bernoulli* a uma equação que se possa escrever na forma

$$y' + p(x)\,y = q(x)y^k,$$

em que $p(x)$ e $q(x)$ são contínuas em algum intervalo aberto e $k \in \mathbb{R}$. Vamos supor $k \neq 0$ e $k \neq 1$ uma vez que nestes casos a equação é linear.

Multiplicando a equação por y^{-k} obtém-se:

$$y'y^{-k} + p(x)y^{1-k} = q(x).$$

Efetuando a mudança de variável

$$y(x) \longrightarrow z(x)$$

definida por

$$z = y^{1-k},$$

tem-se que

$$z' = (1-k)y^{-k}y',$$

e a equação de Bernoulli dá lugar à equação linear (na função incógnita z)

$$z' + (1-k)p(x)\,z = (1-k)q(x).$$

Determinado o integral geral desta equação o integral geral da equação de Bernoulli obtém-se repondo a função incógnita inicial y.

Exemplo

Considere-se o problema de valores iniciais (PVI)

$$y' - xy = xy^3, \;\; y(0) = 1.$$

Efetuando a mudança de variável $z = y^{-2}$, *obtém-se a equação linear*

$$z' + 2xz = -2x$$

que tem como solução geral

$$z = ce^{-x^2} - 1.$$

Voltando à função inicial e impondo a condição $y(0) = 1$, *obtém-se como solução do PVI*

$$y = \frac{1}{\sqrt{2e^{-x^2} - 1}}, \;\; x \in \left] -\sqrt{\log 2}, \sqrt{\log 2} \right[.$$

Exemplo

Suponhamos que numa comunidade constituída por N *indivíduos*

$$y(t) \longrightarrow \text{ representa o número de infectados pelo vírus da gripe A}$$

$$x(t) = N - y(t) \longrightarrow \text{ representa a população não infectada.}$$

Considere-se que o vírus se propaga pelo contacto entre infectados e não infectados e que a propagação é proporcional ao número de contactos entre estes dois grupos. Suponhamos também que os elementos dos dois grupos se relacionam livremente entre si de modo que o número de contactos entre infectados e não infectados é proporcional ao produto de $x(t)$ *por* $y(t)$ *isto é*

$$kx(t)y(t) = k(N - y(t))y(t)$$

em que k *é a constante de proporcionalidade.*

Exemplo (continuação)

Se y_0 é o número inicial de infectados, o número de infectados $y(t)$ no instante t é a solução do PVI

$$y' = k(N - y)y, \quad k > 0, \quad y(0) = y_0.$$

Trata-se de uma equação de Bernoulli com uma condição inicial cuja solução é

$$y(t) = \frac{Ny_0}{(N - y_0)e^{-kNt} + y_0}.$$

Exemplo (continuação)

Suponhamos, por exemplo, que a população é constituída por cem individuos com dois inicialmente infectados e que t é medido em dias. Considerando a constante de proporcionalidade $k = (6 \times 10^2)^{-1}$ *determine-se ao fim de quantos dias metade da população estará infectada. Para os valores considerados, o valor de t pretendido obtém-se resolvendo a equação*

$$\frac{200}{98e^{-\frac{1}{6}t} + 2} = 50$$

que conduz a $t = 23,34$*, isto é, durante o vigésimo quarto dia metade da população já se encontra infectada.*

A equação de Riccati

Chama-se equação de Riccati a uma equação que se possa escrever na forma

$$y' + p(x)y = q(x) + r(x)y^2$$

com $p(x), q(x)$ e $r(x)$ contínuas em algum intervalo aberto.
A resolução da equação de Riccati depende do conhecimento prévio de uma sua solução particular. Supondo que $y_1(x)$ é uma tal solução, efetua-se a mudança de variável $y(x) \longrightarrow z(x)$ definida por

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}.$$

Tendo em conta que $$y' = y_1' - \frac{z'}{z^2},$$
a nova função incógnita $z(x)$ satisfaz a equação linear

$$z' + (2r(x)y_1 - p(x))z = -r(x).$$

Exemplo

Determine-se a solução do PVI

$$y' - y = -2x + \frac{1}{2x^2}y^2, \quad y(1) = -2, \quad x > 0$$

sabendo que a equação admite a solução $y = 2x$.
Observe-se que a função $y = 2x$ *não é solução do PVI uma vez que não verifica a condição inicial.*
A substituição

$$y = 2x + \frac{1}{z}$$

transforma a equação de Riccati na equação linear

Exemplo (continuação)

$$z' + (1 + \frac{2}{x})z = -\frac{1}{2x^2}$$

cuja solução é

$$z = \frac{c - e^x}{2x^2 e^x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Voltando à função incógnita y e determinando a constante obtém-se a solução

$$y = 2x + \frac{1}{z} = 2x + \frac{2x^2 e^x}{\frac{e}{2} - e^x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

RESUMO:

A EQUAÇÃO LINEAR

$$y' + p(x)y = q(x)$$

tem por solução geral

$$y = \frac{C}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int \varphi(x)\, q(x)dx, \quad \varphi(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

Método da variação das constantes arbitrárias

A partir do integral geral da equação homogénea, procurar uma solução da equação completa da forma

$$y = \frac{C(x)}{\varphi(x)}.$$

A equação de Bernoulli

$$y' + p(x)\, y = q(x) y^k,$$

através da mudança de variável

$$z = y^{1-k},$$

transforma-se numa equação linear.

A equação de Riccati

$$y' + p(x)y = q(x) + r(x)y^2$$

através da mudança de variável

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}, \quad y_1 \text{ solução particular da equação}$$

transforma-se numa equação linear.

A equação diferencial linear de ordem **n**

Uma equação diferencial da forma

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (0.7)$$

com a_n função não identicamente nula, diz-se uma *equação diferencial linear de ordem n*. Às funções $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ é usual chamar coeficientes da equação e à função f termo independente. Se f for identicamente nula, a equação (**??**) diz-se *homogénea*.
No que se segue iremos assumir que as funções $a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ e f são contínuas em algum intervalo I.

O coeficiente a_n por assumir um papel particularmente importante na equação, como teremos oportunidade de verificar posteriormente, é usualmente designado por coeficiente líder. Os pontos em que o coeficiente líder se anula são designados por pontos singulares da equação e introduzem em geral dificuldades adicionais na resolução da equação exigindo cuidados especiais.
Iremos também assumir que no intervalo I considerado o coeficiente líder a_n não se anula, pelo que, dividindo a equação por a_n obtém-se uma equação equivalente com coeficiente líder igual a 1 e que escreveremos ainda na forma

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x). \tag{0.8}$$

Quando uma equação diferencial linear possui coeficiente líder igual a 1 diremos que se encontra escrita na *forma normal*.

Exemplo

A equação

$$y''' + x^2y'' - 5xy' + y = x\cos x$$

é linear de terceira ordem e encontra-se escrita na forma normal

Com o objetivo de simplificar, em termos notacionais, o estudo das equações diferenciais lineares de ordem n é habitual introduzir-se o conceito de *operador de derivação*.
Designemos por $C(I)$ o espaço linear das funções contínuas no intervalo I, e $C^n(I)$ o seu subespaço constituído por todas as funções com derivadas contínuas até à ordem n.

Para cada $k \in \{1, 2, ..., n\}$, define-se o operador de derivação

$$D^k : C^n(I) \longrightarrow C^{n-k}(I)$$

por

$$D^k : y \longrightarrow y^{(k)}.$$

Com esta notação a equação

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

pode escrever-se na forma

$$D^n y + a_{n-1}(x)D^{n-1}y + \ldots + a_1(x)Dy + a_0(x)y = f(x),$$

ou ainda, com um significado óbvio

$$(D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \ldots + a_1(x)D + a_0(x))y = f(x).$$

Designando

$$D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0$$

por P, a equação

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

pode escrever-se na forma simplificada

$$Py = f(x).$$

Exemplo

Com as notações introduzidas a equação

$$y''' + x^2 y'' - 5xy' + y = x\cos x,$$

escreve-se na forma

$$(D^3 + x^2 D^2 - 5xD + 1)y = x\cos x.$$

Facilmente se constata que $P = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$ é um operador linear, isto é, dadas duas funções $y_1, y_2 \in C^n(I)$ e α, β números reais

$$P(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha P y_1 + \beta P y_2.$$

À equação

$$Py = f(x),$$

é usual associar a equação

$$Py = 0$$

a que se chama equação homogénea associada à equação $Py = f(x)$. Por sua vez, esta última equação (com $f(x)$ não identicamente nula), é designada por equação linear não homogénea.

Comecemos por considerar a equação linear homogénea

$$Py = 0,$$

e seja A o subconjunto de $C^n(I)$ constituído por todas as suas soluções, isto é

$$A = \{y \in C^n(I) : Py = 0\}.$$

O conjunto A é o núcleo do operador P, sendo portanto um subespaço de $C^n(I)$. Este subespaço é designado por *espaço solução* da equação e notado por

$$Nuc(P).$$

Considere-se em seguida o importante teorema de existência e unicidade de solução da equação linear homogénea de ordem n.

Teorema

Sejam $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0$ *funções contínuas num intervalo aberto* I *e*

$$P = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0.$$

Dado $x_0 \in I$ *e* $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ *n constantes reais arbitrariamente fixadas, existe uma e uma só função* $y = \varphi(x)$ *satisfazendo a equação diferencial*

$$Py = 0$$

em I *e as condições iniciais*

$$\varphi(x_0) = \alpha_0, \varphi'(x_0) = \alpha_1, ..., \varphi^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}.$$

Já referimos anteriormente que sendo $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0$ funções contínuas no intervalo I e considerando

$$P = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0$$

o conjunto $Nuc(P)$ (espaço solução da equação $Py = 0$) é um subespaço do espaço linear $C^n(I)$. Não obstante $C^n(I)$ ter dimensão infinita o teorema que se segue estabelece que a dimensão de $Nuc(P)$ é finita.

Teorema

Seja

$$P = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0$$

em que $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0$ *são funções contínuas num intervalo aberto* I*. O espaço solução da equação*

$$Py = 0$$

possui dimensão n*, isto é,* $dim(Nuc(P)) = n$*.*

Definição

As n funções reais $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$, definidas num intervalo I dizem-se linearmente independentes neste intervalo se for verdadeira a condição:

$$\alpha_0 y_0(x) + \ldots + \alpha_{n-1} y_{n-1}(x) = 0, \text{ para todo o } x \in I$$

então

$$\alpha_0 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0.$$

Exemplo

As funções f_i com $i = 0, 1, 2, ..., n-1$, definidas por

$$f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ ...,\ f_{n-1}(x) = x^{n-1}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

são linearmente independentes em $\mathbb{R}$. Suponhamos que existem $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tais que

$$\alpha_0 f_0(x) + \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + ... + \alpha_{n-1} f_{n-1}(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

Exemplo (continuação)

isto é

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{n-1} x^{n-1} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $x = 0$ *vem que* $\alpha_0 = 0$. *Derivando ambos os membros da equação anterior obtém-se*

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 x + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e, de novo, fazendo $x = 0$ *vem que* $\alpha_1 = 0$. *Repetindo este raciocínio conclui-se que*

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0,$$

o que permite afirmar que as funções $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ *são linearmente independentes.* $\square$

De acordo com o último teorema quaisquer n soluções linearmente independentes de $Py = 0$ constituem uma base de $Nuc(P)$, a que chamaremos **sistema fundamental de soluções** de $Py = 0$.
Se o conjunto $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ for um sistema fundamental de soluções da equação

$$Py = 0,$$

a função definida por

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i,$$

com $c_1, c_2, ..., c_n$ constantes arbitrárias, constitui a sua solução (ou integral) geral.

Exemplo

Considere-se a equação linear homogénea de segunda ordem

$$(D^2 + 1)y = 0.$$

Facilmente se verifica que as funções $y_1 = \cos x$ *e* $y_2 = \sin x$ *são soluções da equação. De facto são linearmente independentes: com efeito se*

$$\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \sin x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

fazendo primeiro $x = 0$, *e em seguida* $x = \dfrac{\pi}{2}$ *conclui-se que* $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. *Assim as funções* $y_1 = \cos x$ *e* $y_2 = \sin x$ *constituem um sistema fundamental de soluções da equação* $(D^2 + 1)y = 0$, *pelo que a sua solução geral é*

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Considere-se agora a equação linear não homogénea

$$Py = f(x), \tag{0.9}$$

com $f(x) \in C(I)$.

Vejamos que para determinar o integral geral de (**??**) precisamos de resolver dois problemas:

1º. Determinar o integral geral da equação homogénea $Py = 0$,

2º. Determinar uma solução particular da equação completa $Py = f(x)$.

Com efeito, tem-se o teorema:

Teorema

Sejam $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0$ *e* $f(x)$ *funções contínuas num intervalo* I *e seja* $P = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0$.
Se $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ *constituir um sistema fundamental de soluções de*

$$Py = 0,$$

e $\bar{y}$ *for uma solução particular da equação*

$$Py = f(x),$$

então

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i + \bar{y},$$

com $c_1, c_2, ..., c_n$ *constantes arbitrárias é a solução geral da equação*

$$Py = f(x).$$

Exemplo

Considere-se a equação linear não homogénea de segunda ordem

$$(D^2 + 1)y = x.$$

Foi visto no último exemplo, que a solução geral da que a equação homogénea associada $(D^2 + 1)y = 0$ *era*

$$y^* = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

e é fácil constatar que a função $\bar{y} = x$ *é solução particular da equação completa. O último teorema permite afirmar que a equação linear não homogénea*

$$(D^2 + 1)y = x,$$

tem por solução geral

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x.$$

Abaixamento da ordem de uma equação linear homogénea de ordem n

Conhecida uma solução particular $\varphi(x)$ da equação linear homogénea de ordem n

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0)y = 0. \tag{0.10}$$

a mudança de variável definida por

$$y = \varphi(x) \int z(x)dx$$

permite baixar o grau da equação e obter uma nova equação linear homogénea de ordem $n-1$.

Exemplo

Determine-se a solução geral da equação

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0, \quad x > 0,$$

sabendo que $\varphi(x) = x$ *é uma sua solução. Efetuando a substituição*

$$y = \varphi(x)\int z\,dx = x\int z\,dx$$

e tendo em conta que

$$y' = \int z\,dx + xz \quad e \quad y'' = 2z + xz'$$

por substituição na equação obtém-se

Exemplo

a equação linear homogénea de primeira ordem

$$z' + \frac{3}{x}z = 0,$$

cuja solução é

$$z = \frac{C}{x^3}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Então

$$y = x\int z\,dx = x\int \frac{C}{x^3}\,dx = Cx\left(-\frac{1}{2x^2} + D\right),$$

e a equação inicial tem por solução geral

$$y = c_1\frac{1}{x} + c_2 x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Definição

Dadas n funções $f_1, f_2, ..., f_n$ com derivadas pelo menos até à ordem $n-1$ num dado intervalo I, ao determinante

$$W(f_1, f_2, ..., f_n)(x) = Det \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

chama-se *Wronskiano* das funções consideradas.

O teorema seguinte estabelece um critério que permite determinar se n soluções de uma equação linear homogénea de ordem n são ou não linearmente independentes.

Teorema

Sejam $a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0 \in C(I)$ *e* $y_1, y_2, ..., y_n$ *n soluções, definidas em* I*, da equação linear de ordem n*

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0)y = 0.$$

Uma condição necessária e suficiente para que as soluções $y_1, y_2, ..., y_n$ *sejam linearmente independentes em* I *é que*

$$W(y_1, y_2, ..., y_n)(x) \neq 0 \quad \textit{para todo o} \quad x \in I.$$

Exemplo

Considere-se novamente a equação

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0, \quad x > 0$$

e suponhamos que são conhecidas as suas duas seguinte soluções

$$y_1(x) = x \quad e \quad y_2(x) = \frac{1}{x}.$$

Provemos que y_1 *e* y_2 *são linearmente independentes mostrando que o seu Wronskiano não se anula em* $]0, +\infty[$.

Exemplo (continuação)

Tem-se

$$W(y_1, y_2) = Det \begin{bmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{bmatrix} = x\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x} \cdot 1 = -\frac{2}{x} \neq 0$$

pelo que y_1 *e* y_2 *linearmente independentes no intervalo considerado e o integral geral da equação, tal como se viu no exemplo anterior, é*

$$y = c_1 x + c_2 \frac{1}{x}, \quad onde\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Método da variação das constantes arbitrárias para a equação linear de ordem n

Tal como foi visto aquando do estudo da equação linear de primeira ordem, o *método da variação das constantes arbitrárias*, permite determinar o integral geral da equação linear completa a partir do integral geral da equação homogénea associada.
Considere-se a equação linear de segunda ordem não homogénea

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

e suponhamos que

$$y^* = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

é o integral geral da equação homogénea associada

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Suponhamos também que c_1 e c_2 são funções de x,

$$c_1 = c_1(x), \; c_2 = c_2(x),$$

a determinar, de forma a que

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

seja o integral geral da equação completa.
Uma vez que, temos duas funções a determinar, para além de exigirmos que $y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, verifique a equação

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

imporemos também que

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0.$$

Substituindo

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x),$$

na equação

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

tendo em conta que y_1 e y_2 são soluções da equação homogénea e que

$$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0,$$

obtém-se

$$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{a_2(x)}.$$

As funções $c_1(x)$ e $c_2(x)$ determinam-se então a partir do sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = \dfrac{f(x)}{a_2(x)}. \end{cases} \tag{0.11}$$

Este último sistema é possível e determinado uma vez que o determinante

$$W(y_1, y_2) = Det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}$$

não se anula uma vez que se trata do Wronskiano das funções y_1 e y_2 que são linearmente independentes.

O método da variação das constantes arbitrárias, generaliza-se para a equação linear de ordem n

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

e permite também determinar a solução geral desta equação a partir da solução geral da equação homogénea associada

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Sendo $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \ldots + c_ny_n(x)$ a solução geral da equação homogénea suporemos também que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são n funções de x,

$$c_1 = c_1(x),\ c_2 = c_2(x), \ldots,\ c_n = c_n(x),$$

a determinar, de forma a que

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x)$$

seja o integral geral da equação completa.
As funções $c_1(x),\ c_2(x), \ldots,\ c_n(x)$, determinam-se começando por resolver o sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 + \ldots + c_n'(x)y_n = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + \ldots + c_n'(x)y_n' = 0 \\ \ldots \\ c_1'(x)y_1^{(n-2)} + c_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0 \\ c_1'(x)y_1^{(n-1)} + c_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + c_n'(x)y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_n(x)} \end{cases} . \tag{0.12}$$

Tal como no caso da equação linear de segunda ordem, este último sistema é possível e determinado pois o determinante

$$W(y_1, y_2, ..., y_n)(x) = Det \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

não se anula uma vez que se trata do Wronskiano das funções $y_1, y_2, \dots, y_n$ que são linearmente independentes.

Obtidas as funções

$$c_1'(x),\ c_2'(x), \ldots, c_n'(x)$$

calculam-se as suas primitivas

$$c_1(x),\ c_2(x), \ldots, c_n(x)$$

e a equação completa tem por integral geral

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x),$$

com as funções $c_1(x),\ c_2(x), \ldots, c_n(x)$ assim obtidas.

Exemplo

Considere-se a equação

$$y'' + 9y = \frac{1}{\cos(3x)}, \qquad x \in]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}[\tag{0.13}$$

As funções $\cos(3x)$ *e* $\sin(3x)$ *são duas soluções linearmente independentes da equação homogénea*

$$y'' + 9y = 0, \tag{0.14}$$

pelo que o seu integral geral será dado por

$$y = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Utilizemos o método da variação das constantes arbitrárias para determinar o integral geral da equação completa.

Exemplo (continuação)

Comecemos por considerar que $y = c_1(x)\cos(3x) + c_2(x)\sin(3x)$ *é o integral geral da equação (**??**) com* $c_1(x)$ *e* $c_2(x)$ *funções a determinar através do sistema:*

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos(3x) + c_2'(x)\sin(3x) = 0 \\ c_1'(x)(-3\sin(3x)) + c_2'(x)(3\cos(3x)) = \dfrac{1}{\cos(3x)} \end{cases} .$$

Pela regra de Cramer,

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & sen(3x) \\ \dfrac{1}{\cos(3x)} & 3\cos(3x) \end{vmatrix}}{W(\cos(3x), \sin(3x))} = \frac{-\dfrac{\sin(3x)}{\cos(3x)}}{3} = -\frac{\sin(3x)}{3\cos(3x)},$$

Exemplo (continuação)

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos(3x) & 0 \\ -3\sin(3x) & \dfrac{1}{\cos(3x)} \end{vmatrix}}{W(\cos(3x), \sin(3x))} = \frac{\dfrac{\cos(3x)}{\cos(3x)}}{3} = \frac{1}{3},$$

donde

$$c_1(x) = \frac{log(\cos(3x))}{9} + c_1, \;\; c_2(x) = \frac{x}{3} + c_2, \quad com\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

*Então, o integral geral da equação diferencial linear (**??**) é*

$$y = \left(\frac{1}{9}\, log(\cos(3x)) + c_1\right)\cos(3x) + \left(\frac{x}{3} + c_2\right)\sin(3x)$$

$$= c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x) + \frac{x\,\sin(3x)}{3} + \frac{1}{9} log(\cos(3x))\cos(3x).$$

Exemplo (continuação)

*Observe-se que, e de acordo com o teorema (**??**), o integral geral determinado é da forma*

$$y = y^* + \bar{y}$$

em que

$$y^* = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

é o integral geral da equação linear homogénea associada e

$$\bar{y} = \frac{x \sin(3x)}{3} + \frac{1}{9} log(\cos(3x)) \cos(3x)$$

*é uma solução particular da equação (**??**).*

A equação linear de ordem n de coeficientes constantes

Vamos, em seguida, considerar um caso particular de equações lineares: as *equações lineares de coeficientes constantes*. Uma equação linear de coeficientes constantes é uma equação da forma

$$(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0) y = f(x),$$

em que $a_0, ..., a_n$ são constantes reais e $a_n \neq 0$. Ao operador

$$P = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0,$$

chama-se operador de coeficientes constantes de ordem n.

Considere-se a equação linear homogénea de segunda ordem e de coeficientes constantes

$$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0)y = 0.$$

Vamos associar ao operador $P = a_2 D^2 + a_1 D + a_0$ um polinómio real na variável real r com os mesmos coeficientes de P, isto é

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0.$$

A este polinómio, chama-se polinómio característico da equação diferencial linear de segunda ordem e de coeficientes constantes, e a

$$a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0,$$

equação característica da mesma equação.

Exemplo

A equação linear homogénea de segunda ordem e de coeficientes constantes

$$2y'' - 3y' + y = 0,$$

usando o operador D de derivação escreve-se na forma

$$(2D^2 - 3D + 1)y = 0.$$

Esta equação tem por polinómio característico

$$2r^2 - 3r + 1,$$

e por equação característica

$$2r^2 - 3r + 1 = 0.$$

A equação linear homogénea de segunda ordem de coeficientes constantes (reais), escrita na forma normal (coeficiente líder igual a 1)

$$(D^2 + a_1 D + a_0)y = 0,$$

tem por equação característica

$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0.$$

As soluções de uma equação de segunda ordem de coeficientes reais podem ser reais e distintas, reais e iguais, ou complexas conjugadas. No que segue iremos considerar cada um destes três casos.

Comecemos por supor que

$$r^2 + a_1 r + a_0 = 0,$$

tem por soluções $r = \alpha_1$ e $r = \alpha_2$ reais e distintas. Então a equação

$$(D^2 + a_1 D + a_0)y = 0,$$

pode ser escrita na forma

$(D - \alpha_2)(D - \alpha_1)y = 0$, (resp. na forma $(D - \alpha_1)(D - \alpha_2)y = 0$).

Vejamos que as funções

$$y_1(x) = e^{\alpha_1 x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{\alpha_2 x}$$

são duas soluções linearmente independentes. Com efeito,

$$(D - \alpha_1)e^{\alpha_1 x} = De^{\alpha_1 x} - \alpha_1 e^{\alpha_1 x} = \alpha_1 e^{\alpha_1 x} - \alpha_1 e^{\alpha_1 x} = 0,$$

pelo que

$$(D - \alpha_2)(D - \alpha_1)e^{\alpha_1 x} = 0,$$

analogamente, se mostra que

$$(D-\alpha_1)(D-\alpha_2)e^{\alpha_2 x}=0.$$

Segue-se que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação.

Provemos que são linearmente independentes mostrando que o seu Wronskiano não se anula. Tem-se que

$$W(y_1,y_2)=Det\begin{bmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \alpha_2 e^{\alpha_2 x}\end{bmatrix}=(\alpha_2-\alpha_1)e^{(\alpha_1+\alpha_2)x}\neq 0.$$

Então o conjunto $\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}\}$ é um sistema fundamental de soluções e a equação considerada tem por solução geral

$$y=c_1 e^{\alpha_1 x}+c_2 e^{\alpha_2 x},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Exemplo

Considere-se a equação diferencial linear de segunda ordem homogénea e de coeficientes constantes

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Utilizando o operador de derivação D a equação escreve-se na forma

$$(D^2 - 2D - 3)y = 0,$$

e tem por equação característica

$$r^2 - 2r - 3 = 0,$$

que tem por soluções $r = -1$ e $r = 3$. Então o conjunto $\{e^{-x}, e^{3x}\}$ é um sistema fundamental de soluções e a equação tem por solução geral

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos agora que as soluções $r = \alpha_1$ e $r = \alpha_2$ são reais mas iguais, isto é, α_1 é uma raíz dupla do polinómio característico. Então o polinómio característico da equação admite a factorização

$$(r - \alpha_1)^2,$$

e a equação, pode ser escrita na forma

$$(D - \alpha_1)^2 y = 0.$$

Vejamos que neste caso as funções

$$y_1(x) = e^{\alpha_1 x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = x e^{\alpha_1 x}$$

são duas soluções linearmente independentes.

É óbvio que $y_1(x)$ é solução da equação, vejamos que $y_2(x)$ também o é. Tem- se que

$$\begin{aligned}(D-\alpha_1)^2(xe^{\alpha_1 x}) =&(D^2-2\alpha_1 D+\alpha_1^2)(xe^{\alpha_1 x})\\ =&D^2(xe^{\alpha_1 x})-2\alpha_1 D(xe^{\alpha_1 x})+\alpha_1^2(xe^{\alpha_1 x})=0.\end{aligned}$$

Provemos que são linearmente independentes. Tem-se que

$$W(y_1,y_2)=Det\begin{bmatrix} e^{\alpha_1 x} & xe^{\alpha_1 x}\\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_1 x}+\alpha_1 xe^{\alpha_1 x}\end{bmatrix}=e^{2\alpha_1 x}\neq 0.$$

Então o conjunto $\left\{e^{\alpha_1 x}, xe^{\alpha_1 x}\right\}$ é um sistema fundamental de soluções e a equação tem por solução geral

$$y=c_1 e^{\alpha_1 x}+c_2 xe^{\alpha_1 x},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R},$$

que pode ser escrita na forma

$$y=(c_1+c_2 x)e^{\alpha_1 x},\quad c_1,c_2\in\mathbb{R}.$$

Exemplo

Considere-se a equação diferencial linear de segunda ordem homogénea e de coeficientes constantes

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Utilizando o operador de derivação D a equação escreve-se na forma

$$(D^2 - 4D + 4)y = 0,$$

e tem por equação característica

$$r^2 - 4r + 4 = 0,$$

que tem a solução dupla $r = 2$. Então o conjunto $\{e^{2x}, xe^{2x}\}$ é um sistema fundamental de soluções e a equação tem por solução geral

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} = (c_1 + c_2 x)e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos agora que as soluções $r = \alpha_1$ e $r = \alpha_2$ são complexas conjugadas, isto é, $\alpha_1 = a + ib$ e $\alpha_2 = a - ib$ $(b \neq 0)$. Neste caso o polinómio característico da equação admite a factorização

$$(r-a)^2 + b^2,$$

e a equação, pode ser escrita na forma

$$((D-a)^2 + b^2)y = 0.$$

Neste caso as funções

$$y_1(x) = e^{ax}\cos bx \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{ax}\sin bx,$$

são duas soluções linearmente independentes.

Facilmente se verifica que

$$((D-a)^2+b^2)e^{ax}\cos bx = (D^2-2aD+a^2+b^2)(e^{ax}\cos bx) = 0,$$

e também que

$$((D-a)^2+b^2)e^{ax}\sin bx = (D^2-2aD+a^2+b^2)(e^{ax}\sin bx) = 0.$$

A independência linear prova-se uma vez mais mostrando que o Wronskiano destas funções não se anula. Com efeito

$$\begin{aligned} W(y_1,y_2) =& Det\begin{bmatrix} e^{ax}\cos bx & e^{ax}\sin bx \\ ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx & ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx \end{bmatrix} \\ =& be^{2ax} \neq 0, \end{aligned}$$

Então o conjunto $\{e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx\}$ é um sistema fundamental de soluções e a equação tem por solução geral

$$y = c_1 e^{ax}\cos bx + c_2 e^{ax}\sin bx, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

A equação

$$y'' - 10y' + 41y = 0,$$

utilizando o operador de derivação D escreve-se na forma

$$(D^2 - 10D + 41)y = 0,$$

e tem por equação característica

$$r^2 - 10r + 41 = 0.$$

Esta equação tem como soluções $r = 5 \pm 4i$, pelo que o conjunto $\{e^{5x}\cos 4x, e^{5x}\sin 4x\}$ é um sistema fundamental de soluções e a equação tem por solução geral

$$y = c_1 e^{5x}\cos 4x + c_2 e^{5x}\sin 4x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

No que se segue, sendo α uma constante real e $k \in \mathbb{N}$, pretendemos determinar a solução geral da equação

$$(D - \alpha)^k y = 0.$$

Trata-se de uma equação diferencial linear homogénea de ordem k, cujo polinómio característico

$$(r - \alpha)^k$$

tem a raíz $r = \alpha$ com multiplicidade k.

Já foi visto que equação diferencial

$$Dy = 0,$$

(equação diferencial linear homogénea de primeira ordem com $p(x) = 0$) tem por solução geral as funções constantes (funções polinomiais de grau zero) isto é da forma

$$y = c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R},$$

e também que a equação diferencial

$$(D - \alpha)y = 0,$$

(equação diferencial linear homogénea de primeira ordem com $p(x) = -\alpha$) tem por solução geral as funções

$$y = c_0 e^{\alpha x}, \quad c_0 \in \mathbb{R},$$

produto da exponencial $e^{\alpha x}$ por funções polinomiais de grau zero.

A equação diferencial

$$D^2 y = 0,$$

(equação diferencial linear homogénea de segunda ordem em que $r = 0$ é raíz dupla polinómio característico) tem por solução geral as funções polinomiais do primeiro grau

$$y = c_0 + c_1 x, \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Já foi visto também, que a equação diferencial

$$(D - \alpha)^2 y = 0,$$

(equação diferencial linear homogénea de segunda ordem em que $r = \alpha$ é raíz dupla polinómio característico) tem por solução geral as funções

$$y = (c_0 + c_1 x)e^{\alpha x}, \quad c_0 \in \mathbb{R},$$

que são o produto da exponencial $e^{\alpha x}$ por funções polinomiais do primeiro grau.

Tendo em conta que a equação diferencial de ordem k

$$D^k y = 0,$$

tem por tem por solução geral as funções polinomiais de grau $k-1$,

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{k-1} x^{k-1}, \quad c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{R},$$

o que foi visto para o caso $k = 1$ e $k = 2$ parece sugerir que a equação

$$(D - \alpha)^k y = 0,$$

tem por solução geral

$$y = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_{k-1} x^{k-1}) e^{\alpha x}, \quad c_0, c_1, \dots, c_{k-1} \in \mathbb{R},$$

produto da exponencial $e^{\alpha x}$ por funções polinomiais de grau $k-1$. De facto assim é e para o demonstrarmos comecemos por considerar a seguinte proposição.

Proposição

Seja α uma constante real e y uma função com derivadas de todas as ordens em $\mathbb{R}$. Então

$$D^n(e^{-\alpha x}y) = e^{-\alpha x}(D-\alpha)^n y, \quad n = 1, 2, 3, \dots .$$

Demonstração:

Para $n = 1$ vem que

$$D(e^{-\alpha x}y) = -\alpha e^{-\alpha x}y + e^{-\alpha x}Dy = e^{-\alpha x}(Dy-\alpha y) = e^{-\alpha x}(D-\alpha)y.$$

Admitindo por hipótese que

$$D^n(e^{-\alpha x}y) = e^{-\alpha x}(D-\alpha)^n y,$$

Demonstração: (continuação)

mostremos que

$$D^{n+1}(e^{-\alpha x}y) = e^{-\alpha x}(D-\alpha)^{n+1}y.$$

Ora,

$$\begin{aligned} D^{n+1}(e^{-\alpha x}y) =& D(D^n(e^{-\alpha x}y)) \\ =& D(e^{-\alpha x}(D-\alpha)^n y) \\ =& -\alpha e^{-\alpha x}(D-\alpha)^n y + e^{-\alpha x}D(D-\alpha)^n y \\ =& e^{-\alpha x}(-\alpha(D-\alpha)^n + D(D-\alpha)^n)y \\ =& e^{-\alpha x}(D-\alpha)(D-\alpha)^n y \\ =& e^{-\alpha x}(D-\alpha)^{n+1}y, \end{aligned}$$

como pretendido.

Mostremos, então que a equação

$$(D-\alpha)^k y = 0,$$

tem por solução geral

$$y = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{k-1} x^{k-1}) e^{\alpha x}.$$

Se mostrarmos que $e^{-\alpha x}(D-\alpha)^k y = 0$, então $(D-\alpha)^k y = 0$ e ficará provado o resultado pretendido. Provemos então que

$$e^{-\alpha x}(D-\alpha)^k y = 0.$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} e^{-\alpha x}(D-\alpha)^k y =& e^{-\alpha x}(D-\alpha)^k (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{k-1} x^{k-1}) e^{\alpha x} \\ =& D^k (e^{-\alpha x}(c_0 + c_1 x + \ldots + c_{k-1} x^{k-1}) e^{\alpha x}) \\ =& D^k (c_0 + c_1 x + \ldots + c_{k-1} x^{k-1}) \\ =& 0. \end{aligned}$$

Em particular cada uma das k funções

$$y_1 = e^{\alpha x},\ y_2 = xe^{\alpha x},\ \ldots,\ y_k = x^{k-1}e^{\alpha x},$$

é solução da equação. A independência linear destas funções é uma consequência imediata da independência linear dos polinómios $1, x, x^2, \ldots, x^{k-1}$ já provada anteriormente, pelo que o conjunto

$$\left\{e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\right\}$$

contitui um sistema fundamental de soluções e a equação tem por solução geral

$$y = c_0 e^{\alpha x} + c_1 xe^{\alpha x} + c_2 x^2 e^{\alpha x} + \ldots + c_{k-1} x^{k-1} e^{\alpha x},$$

ou ainda

$$y = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{k-1} x^{k-1})e^{\alpha x}.$$

Exemplo

Pelo que acabou de ser visto a equação

$$(D+5)^3 y = 0,$$

tem como sistema fundamental de soluções o conjunto

$$\{e^{-5x}, xe^{-5x}, x^2 e^{-5x}\}$$

e por solução geral

$$y = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) e^{-5x}, \quad c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Já foi visto que o polinómio característico da equação

$$((D-\alpha)^2+\beta^2)y=0,$$

tem o par de raízes complexas conjugadas $\alpha \pm i\beta$. Foi igualmente visto que o conjunto

$$\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x\}$$

constitui um sistema fundamental de soluções pelo que a equação tem como solução geral

$$y=a_0e^{\alpha x}\cos\beta x+b_0e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad a_0, b_0 \in \mathbb{R}.$$

É possível mostrar que a equação

$$((D-\alpha)^2+\beta^2)^k y = 0,$$

cujo polinómio característico tem o par de raizes complexas conjugadas $\alpha \pm i\beta$ cada uma com multiplicidade k tem como sistema fundamental de soluções o conjunto constituído pelas $2k$ funções

$$\{e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, x^2e^{\alpha x}\cos\beta x, ..., x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, x^2e^{\alpha x}\sin\beta x, ..., x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\}.$$

A solução geral da equação é

$$\begin{aligned} y =& a_0 e^{\alpha x} \cos \beta x + a_1 x e^{\alpha x} \cos \beta x + \ldots + a_{k-1} x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x + \\ & b_0 e^{\alpha x} \sin \beta x + b_1 x e^{\alpha x} \sin \beta x + \ldots + b_{k-1} x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x, \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} y =& (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{k-1} x^{k-1}) e^{\alpha x} \cos \beta x + \\ & (b_0 + b_1 x + \ldots + b_{k-1} x^{k-1}) e^{\alpha x} \sin \beta x, \end{aligned}$$

com $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{k-1} \in \mathbb{R}$.

Exemplo

A equação

$$(D^2 - 4D + 5)^2 y = 0,$$

tem como polinómio característico

$$(r^2 - 4r + 5)^2$$

cujas raízes são $r = 2 \pm i$, *cada uma com multiplicidade dois pelo que a equação admite a factorização*

$$((D-2)^2 + 1)^2 y = 0.$$

Exemplo (continuação)

O conjunto

$$\{e^{2x}\cos x, xe^{2x}\cos x, e^{2x}\sin x, xe^{2x}\sin x\}$$

é sistema fundamental de soluções e a equação tem como solução geral

$$y = (a_0 + a_1 x)e^{2x}\cos x + (b_0 + b_1 x)e^{2x}\sin x, \quad a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{R}.$$

Sendo
$$P = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + ... + a_1 D + a_0$$
um operador de coeficientes constantes de grau $n \geq 1$, considere-se a equação
$$Py = 0.$$
Suponhamos que o polinómio característico tem as raízes reais $r_1, r_2, ..., r_k$ cada raíz r_i com multiplicidades p_i e as raízes complexas
$$\alpha_1 \pm i\beta_1, \alpha_2 \pm i\beta_2, ..., \alpha_m \pm i\beta_m$$
cada uma das raízes $\alpha_j + i\beta_j$ (resp. $\alpha_j - i\beta_j$) com multiplicidade q_j.

Nas hipóteses consideradas o operador P admite a fatorização

$$a_n(D-r_1)^{p_1}...(D-r_k)^{p_k}((D-\alpha_1)^2+\beta_1^2)^{q_1}...((D-\alpha_m)^2+\beta_m^2)^{q_m},$$

e a equação pode ser escrita na forma

$$(D-r_1)^{p_1}...(D-r_n)^{p_n}((D-\alpha_1)^2+\beta_1^2)^{q_1}...((D-\alpha_m)^2+\beta_m^2)^{q_m}y=0,$$

$$p_1+p_2+...+p_k+2(q_1+q_2+...+q_m)=n.$$

Os resultados anteriores permitem afirmar que:
da raíz real r_1 com multiplicidade p_1 obtêm-se as p_1 soluções

$$e^{r_1 x}, xe^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \dots, x^{p_1 - 1} e^{r_1 x}$$

da raíz real r_2 com multiplicidade p_2 obtêm-se as p_2 soluções

$$e^{r_2 x}, xe^{r_2 x}, x^2 e^{r_2 x}, \dots, x^{p_2 - 1} e^{r_2 x}$$

$$\vdots$$

da raíz r_k com multiplicidade p_k obtêm-se as p_k soluções

$$e^{r_k x}, xe^{r_k x}, x^2 e^{r_k x}, \dots, x^{p_k - 1} e^{r_k x}$$

do par de raizes complexas conjugadas $\alpha_1 \pm i\beta_1$ cada uma com multiplicidade q_1 obtêm-se as $2q_1$ soluções

$$e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \ldots, x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \ldots, x^{q_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x$$

do par de raizes complexas conjugadas $\alpha_2 \pm i\beta_2$ cada uma com multiplicidade q_2 obtêm-se as $2q_2$ soluções

$$e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x, \ldots, x^{q_2-1}e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x, e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x, \ldots, x^{q_2-1}e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x$$

$$\vdots$$

do par de raizes complexas conjugadas $\alpha_m \pm i\beta_m$ cada uma com multiplicidade q_m obtêm-se as $2q_m$ soluções

$$e^{\alpha_m x}\cos\beta_m x, \ldots, x^{q_m-1}e^{\alpha_m x}\cos\beta_m x, e^{\alpha_m x}\sin\beta_m x, \ldots, x^{q_m-1}e^{\alpha_m x}\sin\beta_m x.$$

É possível mostrar que estas n soluções são linearmente independentes pelo que o conjunto formado por todas elas constitui um sistema fundamental de soluções. O integral geral obtém-se fazendo uma combinação linear de todas elas, isto é

$$
\begin{aligned}
y = & (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{p_1-1}x^{p_1-1})e^{r_1x} + \\
& (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{p_2-1}x^{p_2-1})e^{r_2x} + \\
& \vdots \\
& (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_{p_k-1}x^{p_k-1})e^{r_kx} + \\
& (d_0 + d_1x + \ldots + d_{q_1-1}x^{q_1-1})e^{\alpha_1x}\cos\beta_1x + \\
& (e_0 + e_1x + \ldots + e_{q_1-1}x^{q_1-1})e^{\alpha_1x}\sin\beta_1x + \\
& \vdots \\
& (f_0 + f_1x + \ldots + f_{q_1-1}x^{q_m-1})e^{\alpha_mx}\cos\beta_mx + \\
& (g_0 + g_1x + \ldots + g_{q_1-1}x^{q_m-1})e^{\alpha_mx}\sin\beta_mx.
\end{aligned}
$$

Exemplo

A equação diferencial linear de coeficientes constantes

$$(D^2-2)((D-2)^2+9)^2y=0$$

tem como polinómio característico $(r^2-2)((r-2)^2+9)^2$, *que tem as raízes simples* $r=\sqrt{2}$ *e* $r=-\sqrt{2}$ *e o par de raizes complexas* $r=2\pm 3i$, *cada uma com multiplicidade dois. O sistema fundamental de soluções desta equação é o conjunto*

$$\{e^{\sqrt{2}x}, e^{-\sqrt{2}x}, e^{2x}\cos 3x, xe^{2x}\cos 3x, e^{2x}\sin 3x, xe^{2x}\sin 3x\}$$

e a sua solução geral é

$$y(x)=c_1e^{\sqrt{2}x}+c_2e^{-\sqrt{2}x}+(c_3+c_4x)e^{2x}\cos 3x+(c_5+c_6x)e^{2x}\sin 3x,$$

com $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ *constantes arbitrárias.*

Exemplo

A equação diferencial linear de coeficientes constantes

$$(D^5 + 6D^4 + 9D^3)(D^2 + 2D + 17)y = 0$$

tem como polinómio característico $(r^5 + 6r^4 + 9r^3)(r^2 + 2r + 17)$, *que tem a raíz tripla* $r = 0$, *a raíz dupla* $r = -3$ *e o par de raizes complexas* $r = -1 \pm 4i$ *simples. O sistema fundamental de soluções desta equação é o conjunto*

$$\{1, x, x^2, e^{-3x}, xe^{-3x}, e^{-x}\cos 4x, e^{-x}\sin 4x\}$$

e a sua solução geral é

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + (c_4 + c_5x)e^{-3x} + c_6e^{-x}\cos 4x + c_7e^{-x}\sin 4x,$$

com $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$ *constantes arbitrárias.*

O método da variação das constantes arbitrárias já estudado permite, tal como foi visto, determinar o integral geral de uma equação linear não homogénea, se for conhecido o integral da equação homogénea associada. No entanto, este método nem sempre é o mais expedito. Sabemos que o integral geral da equação completa se obtém somando uma solução da equação completa ao integral geral da equação homogénea. No que se segue iremos ver como determinar, em alguns casos, soluções da equação linear completa.

Sendo

$$P = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0$$

um operador de coeficientes constantes de ordem n considere-se a equação

$$Py = P_k(x) \tag{0.15}$$

em que $P_k(x)$ é um polinómio de grau k.
Seja

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

a equação característica da equação homogénea associada

$$Py = 0.$$

Conhecido o integral geral da equação $Py = 0$, o integral geral de **??** fica perfeitamente definido se determinarmos uma sua solução particular. Vejamos então como determinar uma solução particular da equação **??**.
Derivando $k+1$ vezes a equação **??** obtém-se a equação

$$D^{k+1}Py = 0 \tag{0.16}$$

Comecemos por determinar o integral geral da equação **??**. Para isso consideremos dois casos:

Caso 1. Suponhamos que $r = 0$ não é raíz do polinómio

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0.$$

A equação **??** tem por equação característica

$$r^{k+1}(r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0) = 0,$$

o polinómio r^{k+1} tem a raíz $r = 0$ com multiplicidade $k + 1$ dando origem à parcela

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k)e^{0x} = Q_k(x),$$

em que $Q_k(x)$ é um polinómio de grau k,

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

é o polinómio característico da equação **??** (homogénea) dando origem a uma parcela que é o integral geral equação homogénea e que designamos por y^*.
Segue-se que a solução geral da equação **??** é da forma

$$y = y^* + Q_k(x).$$

Tendo em conta que todas as soluções da equação **??** também são soluções da equação **??**, e que o integral geral de **??** é a soma do integral geral da equação homogénea que lhe está associada com uma sua solução particular, podemos afirmar que a equação **??** admite uma solução particular da forma

$$\overline{y} = Q_k(x).$$

Caso 2. Suponhamos que $r = 0$ é raíz do polinómio

$$r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0$$

com multiplicidade p. Então $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0$ pelo que

$$\begin{aligned} r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 &= r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_p r^p \\ &= r^p (r^{n-p} + a_{n-1} r^{n-p-1} + \dots + a_p). \end{aligned}$$

O integral geral da equação homogénea $Py = 0$, calculado a partir das raizes do último polinómio será a soma de um polinómio de grau $p - 1$, relativo à raíz zero com multiplicidade p, com uma função que designaremos por y_1 determinada a partir das raizes diferentes de zero.

A equação **??** tem por equação característica

$$r^{k+p+1}(r^{n-p} + a_{n-1}r^{n-p-1} + ... + a_{p+1}r + a_p) = 0,$$

o polinómio r^{k+p+1} tem a raíz $r = 0$ com multiplicidade $k + p + 1$ dando origem à parcela

$$(a_0 + a_1 x + ... + a_{p-1}x^{p-1} + a_p x^p + ... + a_{k+p}x^{k+p})e^{0x} = Q_{k+p}(x),$$

em que $Q_{k+p}(x)$ é um polinómio de grau $k + p$,

$$r^{n-p} + a_{n-1}r^{n-p-1} + ... + a_{p+1}r + a_p$$

é o factor do polinómio característico da equação **??** (homogénea) correspondente às raizes diferentes de zero dando origem, no integral geral, à parcela que designamos por y_1.
Segue-se que a solução geral da equação **??** é da forma

$$y = a_0 + a_1x + ... + a_{p-1}x^{p-1} + a_px^p + ... + a_{k+p}x^{k+p} + y_1,$$

ou ainda

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x + ... + a_{p-1}x^{p-1} + y_1 + a_px^p + ... + a_{k+p}x^{k+p} \\ &= y^* + x^p(a_p + a_{p+1}x + ... + a_{k+p}x^k) \\ &= y^* + x^pQ_k(x) \end{aligned}$$

em que $Q_k(x)$ é um polinómio de grau k e y^* é o integral geral da equação $Py = 0$.

Tendo em conta, uma vez mais, que todas as soluções da equação **??** também são soluções da equação **??**, e que o integral geral de **??** é a soma do integral geral da equação homogénea que lhe está associada com uma sua solução particular, podemos afirmar que a equação **??** admite uma solução particular da forma

$$\bar{y} = x^p Q_k(x).$$

Proposição

Seja P um operador de coeficientes constantes e considere-se a equação

$$Py = P_k(x), \tag{0.17}$$

em que $P_k(x)$ é um polinómio de grau k.
1. Se zero não é raiz do polinómio característico da equação $Py = 0$, então a equação **??** *admite uma solução particular da forma*

$$\bar{y} = Q_k(x)$$

em que $Q_k(x)$ é um polinómio de grau k.
2. Se zero é raiz do polinómio característico da equação $Py = 0$ com multiplicidade p, então a equação **??** *admite uma solução particular da forma*

$$\bar{y} = x^p Q_k(x)$$

em que $Q_k(x)$ é um polinómio de grau k.

Exemplo

Considere-se a equação

$$y^{(5)} - 3y''' - 2y'' = x^2 - 3x + 1. \tag{0.18}$$

A equação característica da equação linear homogénea associada é

$$r^5 - 3r^3 - 2r^2 = 0,$$

que tem por soluções $r = 0$ *e* $r = -1$, *ambas com multiplicidade dois, e a solução simples* $r = 2$. *O integral geral da equação homogénea é*

$$y = c_0 + c_1 x + (c_2 + c_3 x)e^{-x} + c_4 e^{2x},$$

com c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 *constantes arbitrárias.*

Exemplo (continuação)

Como o termo independente é um polinómio e zero é raíz do polinómio característico com multiplicidade dois, a equação tem uma solução particular da forma

$$\overline{y} = x^2(\rho_0 + \rho_1 x + \rho_2 x^2) = \rho_0 x^2 + \rho_1 x^3 + \rho_2 x^4.$$

Substituindo $\overline{y}$ *na equação completa obtém-se*

$$0 - 3(6\rho_1 + 24\rho_2 x) - 2(2\rho_0 + 6x\rho_1 + 12x^2\rho_2) = x^2 - 3x + 1,$$

que conduz aos valores de $\rho_0 = -\frac{5}{2}, \rho_1 = \frac{1}{2}, \rho_2 = -\frac{1}{24}$. *O integral geral da equação* **??** *é então dado por*

$$y = c_0 + c_1 x + (c_2 + c_3 x)e^{-x} + c_4 e^{2x} - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^4,$$

ccom c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 *constantes arbitrárias.* □

As duas proposições que se seguem, tem demonstrações semelhantes à da última proposição e permitem calcular soluções particulares nos casos em que os termos independentes são da forma

$$f(x) = P_k(x)e^{\alpha x},$$

produto de um polinómio por uma exponencial e

$$f(x) = a \cos wx + b \sin wx,$$

a, b e w constantes.

Proposição

Seja P um operador de coeficientes constantes e considere-se a equação

$$Py = P_k(x)e^{\alpha x}, \tag{0.19}$$

em que $P_k(x)$ é um polinómio de grau k e α é uma constante real.
1. Se α não é raiz do polinómio característico da equação $Py = 0$, então a equação **??** *admite uma solução particular da forma*

$$\bar{y} = Q_k(x)e^{\alpha x}$$

em que $Q_k(x)$ é um polinómio de grau k.
2. Se α é raiz do polinómio característico da equação $Py = 0$ com multiplicidade p, então a equação **??** *admite uma solução particular da forma*

$$\bar{y} = x^p Q_k(x)e^{\alpha x}$$

em que $Q_k(x)$ é um polinómio de grau k.

Exemplo

Considere-se a equação

$$y'' - y' = xe^x.$$

O polinómio característico da equação homogénea associada é $r^2 - r$ *cujas raizes são* $r = 0$ *e* $r = 1$*, ambas simples. O integral geral da equação homogénea é*

$$y^*(x) = c_0 + c_1 e^x,$$

com c_0, c_1 *constantes arbitrárias.*
A equação completa é o produto de um polinómio do primeiro grau pela exponencial e^x $(\alpha = 1)$.

Exemplo (continuação)

Tendo em conta que $r = 1$ é raiz da equação característica com multiplicidade um, a equação vai admitir uma solução particular da forma

$$\overline{y}(x) = x(\alpha_0 + \alpha_1 x)e^x.$$

Substituindo $\overline{y}$ na equação completa obtêm-se os valores $\alpha_0 = -1$ e $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, pelo que o seu integral geral é

$$y(x) = y^*(x) + y_1(x) = c_0 + c_1 e^x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right) e^x,$$

onde c_0, c_1 são constantes arbitrárias. □

Proposição

Seja P um operador de coeficientes constantes e considere-se a equação

$$Py = a\cos wx + b\sin wx, \tag{0.20}$$

em que a, b e w são constantes.
1. Se wi não é raiz do polinómio característico da equação $Py = 0$, então a equação **??** *admite uma solução particular da forma*

$$\bar{y} = a_0\cos wx + b_0\sin wx,$$

em que a_0 e b_0 são constantes a determinar.
2. Se wi é raiz do polinómio característico da equação $Py = 0$ com multiplicidade p, então a equação **??** *admite uma solução particular da forma*

$$\bar{y} = x^p(a_0\cos wx + b_0\sin wx)$$

em que a_0 e b_0 são constantes a determinar.

Exemplo

A equação homogénea associada à equação

$$y' + 2y = \cos x$$

tem como integral geral $y^*(x) = c_0 e^{-2x}$, *com* c_0 *constante arbitrária [justifique]. Tendo em conta que* $r = i$ *não é raiz da equação característica, a equação admite uma solução particular da forma*

$$\overline{y} = a_0 \cos x + b_0 \sin x.$$

Substituindo $\overline{y}$ *na equação completa obtêm-se os valores* $a_0 = \dfrac{2}{5}$ *e* $b_0 = \dfrac{1}{5}$, *pelo que o integral geral da equação completa é*

$$y(x) = c_0 e^{-2x} + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x, \;\; c_0 \;\; \textit{constante arbitrária.}$$

Exemplo

Considere-se a equação

$$y'' + y' = 1 + \cos 2x,$$

O polinómio característico da equação linear homogénea associada é $r^2 + r$*, que tem as raizes simples* $r = 0$ *e* $r = -1$*, pelo que o integral geral da equação homogénea é*

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} = c_1 + c_2 e^{-x},$$

com c_1, c_2 *constantes arbitrárias.*
Tendo em conta a linearidade do operador $D^2 + D$*, o integral geral da equação completa obtém-se adicionando ao integral geral da equação homogénea uma solução particular,* y_1*, da equação*

$$y'' + y' = 1$$

Exemplo (continuação)

e uma solução particular, y_2*, da equação*

$$y'' + y' = \cos 2x.$$

Como $r = 0$ *é solução da equação característica com multiplicidade um e* $r = 2i$ *não é solução da equação característica, as soluções* y_1 *e* y_2 *são da forma* $y_1 = ax$ *e* $y_2 = a_0 \cos 2x + b_0 \sin 2x$*. Determinando estas funções obtém-se*

$$y_1 = x \quad e \quad y_2 = -\frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x,$$

pelo que a solução geral da equação considerada é

$$y = c_1 + c_2 e^{-x} + x - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x,$$

com c_1, c_2 *constantes arbitrárias.*

A equação de Euler

Chama-se equação de Euler a uma equação do tipo

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1 x \, \frac{dy}{dx} + a_0 \, y = f(x) \qquad (0.21)$$

em que a_n, $a_{n-1}, \ldots, a_1$, a_0 são constantes reais.

Supondo $x > 0$, esta equação transforma-se, por meio da substituição $x = e^t$ $(t = \log x)$ numa equação linear de coeficientes constantes. Comecemos por considerar a equação de Euler de terceira ordem, isto é

$$a_3 x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \, \frac{dy}{dx} + a_0 \, y = f(x).$$

Tem-se que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}$$
$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right)$$
$$= -\frac{2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) + \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^3y}{dt^3}\frac{1}{x} - \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

Substituindo na equação vem que

$$a_3x^3\frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right)+a_2x^2\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+$$
$$a_1x\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}+a_0y=f(e^t)$$

ou ainda

$$a_3\frac{d^3y}{dt^3}+(a_2-3a_3)\frac{d^2y}{dt^2}+(2a_3-a_2+a_1)\frac{dy}{dt}+a_0y=f(e^t),$$

que é uma equação de coeficientes constantes.

Mais geralmente, vejamos que sendo

$$D = \frac{d}{dt},$$

se tem que

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{x^n} D(D-1)\dots(D-(n-1))y, \quad n = 1, 2, \dots \,. \qquad (0.22)$$

Provemos este resultado por indução

Para $n = 1$ vem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}Dy,$$

Admitindo, por hipótese de indução, que para algum n se tem

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{x^n}D(D-1)\ldots(D-(n-1))y$$

provemos que

$$\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} = \frac{1}{x^{n+1}}D(D-1)\ldots(D-n)y.$$

Por hipótese tem-se que

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\cdot D(D-1)\dots(D-(n-1))y\right).$$

Designando $D(D-1)\dots(D-(n-1))y$ por $g(x)$, vem que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}D(D-1)\dots(D-(n-1))y\right)\\
=&\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}g(x)\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}g(x) + \frac{1}{x^n}\frac{dg}{dt}\frac{dt}{dx}\\
=&-\frac{n}{x^{n+1}}g(x) + \frac{1}{x^{n+1}}Dg = \frac{1}{x^{n+1}}(D-n)g\\
=&\frac{1}{x^{n+1}}D(D-1)\dots(D-(n-1))(D-n)y,
\end{aligned}$$

o que prova o pretendido.

Tendo em conta a igualdade (**??**), a equação de Euler (**??**) pode escrever-se na forma

$$
\begin{aligned}
&a_n x^n \frac{1}{x^n} D(D-1)\dots(D-(n-1))y+\\
&a_{n-1}x^{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} D(D-1)\dots(D-(n-2))y+\dots+\\
&a_1 x\,\frac{1}{x} Dy + a_0\, y = f(e^t),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&(a_n D(D-1)\dots(D-(n-1)) + a_{n-1}D(D-1)\dots(D-(n-2))+\\
&\dots + a_1 D + a_0)y = f(e^t),
\end{aligned}
$$

que é uma equação linear com coeficientes constantes.

Exemplo

A equação

$$\frac{1}{4}x^3\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{1}{4}x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4},\quad x>0, \tag{0.23}$$

é de Euler com $a_3=a_2=\frac{1}{4}$, $a_1=-1$, $a_0=0$ *e* $f(x)=\frac{1}{4}$.
Efetuando a substituição $x=e^t$, *e tendo em conta o que foi visto para a equação de Euler de terceira ordem, a equação transforma-se na equação de coeficientes constantes*

$$a_3\frac{d^3y}{dt^3}+(a_2-3a_3)\frac{d^2y}{dt^2}+(2a_3-a_2+a_1)\frac{dy}{dt}+a_0y=f(e^t),$$

Exemplo (continuação)

que neste caso é

$$\frac{1}{4}\frac{d^3y}{dt^3}+(\frac{1}{4}-3\frac{1}{4})\frac{d^2y}{dt^2}+(2\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-1)\frac{dy}{dt}=\frac{1}{4},$$

ou ainda

$$\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}=1, \tag{0.24}$$

O polinómio característico r^3-2r^2-3r *tem as raizes reais simples* $r=-1$, $r=0$ *e* $r=3$, *pelo que o integral geral da equação linear homogénea é*

$$y^*(t)=c_1+c_2e^{-t}+c_3e^{3t},$$

com $c_1,\ c_2,\ c_3$ *constantes arbitrárias.*

Exemplo (continuação)

Tendo em conta que 0 *é raiz da equação característica com multiplicidade* 1 *e o termo independente é um polinómio de grau zero, a equação admite uma solução particular da forma*

$$y_1(t) = Ct,$$

com C *constante a determinar. Substituindo na equação (**??**), obtém-se* $C = -\dfrac{1}{3}$.

Exemplo

[continuação]
*A solução da equação linear não homogénea (**??**) é então*

$$y(t) = y^*(t) + y_1(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^{3t} - \frac{t}{3}.$$

*Voltando à variável inicial, o integral geral de (**??**) é*

$$y(x) = c_1 + \frac{c_2}{x} + c_3 x^3 - \frac{1}{3} \log x,$$

com $c_1, \ c_2, \ c_3$ *constantes arbitrárias.* □

Equações diferenciais exactas

Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ duas funções continuamente deriváveis num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e considere-se a equação

$$u(x, y) + v(x, y)y' = 0,$$

isto é,

$$u(x, y) + v(x, y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

ou, na forma diferencial,

$$u(x, y)dx + v(x, y)dy = 0. \tag{0.25}$$

A equação diferencial (**??**) diz-se *exacta* em D se o par de funções (u, v) for o gradiente de alguma função continuamente derivável em D, isto é, se existir uma função $f(x, y)$ (que se designa *função potencial*), tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u(x, y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = v(x, y)$$

Teorema

Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ duas funções continuamente deriváveis no retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - a| < \alpha \wedge |y - b| < \beta\}$. Uma condição necessária e suficiente para que a equação diferencial $u(x, y)\,dx + v(x, y)\,dy = 0$ seja exacta em R é que

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

em R.

O último teorema estabelece um critério que permite reconhecer se uma dada equação é exata num retângulo.
É importante referir que o resultado estabelecido neste teorema ainda é verdadeiro em domínios muito mais gerais que retângulos, nomeadamente em domínios abertos e simplesmente conexos.

O teorema que se segue indica como determinar o integral geral de uma equação diferencial exata conhecida uma função potencial.

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e conexo

$$u(x, y)\,dx + v(x, y)\,dy = 0 \tag{0.26}$$

uma equação diferencial exata em D e f tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = u \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = v.$$

*Se $y(x)$ for uma solução de (**??**), cujo gráfico está contido em D então $f(x, y(x)) = c$, para alguma constante real c. Reciprocamente se a equação $f(x, y) = c$ define implicitamente y como função diferenciável de x, a função assim definida é solução da equação diferencial (**??**).*

Exemplo

A equação diferencial

$$u(x,y)dx + v(x,y)dy = (2e^{2x}y + 2xy^2)dx + (e^{2x} + 2x^2y)dy = 0$$

é exata (as funções $u(x,y)$ *e* $v(x,y)$ *são continuamente deriváveis em* $\mathbb{R}^2$ *que é um conjunto aberto e simplesmente conexo e* $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x} + 4xy$*), pelo que existe uma função* $f(x,y)$ *tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2e^{2x}y + 2xy^2 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x} + 2x^2y.$$

Tem-se que $f(x,y) = e^{2x}y + x^2y^2$ *(a menos de uma constante aditiva, [verifique]), pelo que a solução da equação é dada implicitamente por*

$$e^{2x}y + x^2y^2 = c, \quad com\ c \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Fator integrante

Considere-se a equação

$$u(x,y)dx + v(x,y)dy = \frac{1}{2}dx + \frac{xy}{y^2+1}dy = 0. \tag{0.27}$$

Como

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \neq \frac{y}{y^2+1} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

a equação não é exacta.

Multiplicando a equação pela função $\alpha(y) = y^2 + 1$ obtém-se

$$U(x,y)dx + V(x,y)dy = \frac{1}{2}(y^2+1)dx + xydy = 0. \qquad (0.28)$$

As funções U e V são continuamente deriváveis em $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial U}{\partial y} = y = \frac{\partial V}{\partial x}.$$

As equações (**??**) e (**??**) são equivalentes mas enquanto a primeira não é exacta a segunda já o é. À função $\phi(x,y) = y^2 + 1$ chama-se um *fator integrante* da equação (**??**).

Na maioria dos casos não há forma de determinar fatores integrantes para equações não exatas. Iremos considerar dois casos em que tal é possível. Suponhamos que não é exata a equação

$$u(x,y)dx + v(x,y)dy = 0. \tag{0.29}$$

Se
$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}}{v} = g(x),$$

a função $\psi(x) = e^{\int g(x)dx}$ é um fator integrante da equação (**??**).

Se
$$\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}}{u} = f(y)$$

a função $\phi(y) = e^{\int f(y)dy}$ é um fator integrante da equação (**??**).

Exemplo

A equação

$$u(x,y)dx + v(x,y)dy = (e^x + 5e^{-y})dx + (e^x - 4e^{-y})dy = 0$$

não é exata pois $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = -5e^{-y} \neq e^x = \dfrac{\partial v}{\partial x}.$

Ora

$$\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}}{u} = \frac{e^x + 5e^{-y}}{e^x + 5e^{-y}} = 1$$

pelo que

$$\phi(y) = e^{\int dy} = e^y$$

é um fator integrante da equação.

Equações de variáveis separáveis

Uma equação diferencial $\qquad y' = f(x,y)$
diz-se de *variáveis separáveis* se puder ser escrita na forma

$$u(x,y)\,dx + v(x,y)\,dy = 0, \tag{0.30}$$

em que $u(x,y)$ depende apenas da variável x $(u(x,y) = u(x))$, $v(x,y)$ depende apenas da variável y ($v(x,y) = v(y)$) e são continuamente deriváveis em algum conjunto aberto, simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$. Observe-se que, com as hipóteses consideradas, uma equação de variáveis separáveis é uma equação diferencial exata pois

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

A equação (**??**) tem por integral geral

$$\int u(x)\,dx + \int v(y)\,dy = C, \qquad C \text{ constante real.}$$

Exemplo

A equação diferencial

$$y' = \frac{2x}{3y^2+4}.$$

é de variáveis separáveis pois pode ser escrita na forma

$$2x\,dx - (3y^2+4)dy = 0.$$

A equação tem como integral geral (na forma implícita)

$$\int 2x\,dx - \int (3y^2+4)\,dy = c,$$

ou seja

$$x^2 - y^3 - 4y = C, \qquad C \text{ constante real.}$$

$\square$

A equação de Lagrange

Chama-se *equação de Lagrange* a uma equação da forma

$$y = x\alpha(y') + \beta(y'), \tag{0.31}$$

onde $\alpha(y') \neq y'$.
Suponhamos que existem intervalos abertos I e J tais que $y(x)$ é diferenciável em I e $y'(x)$ é um difeomorfismo de I em J .
Suponhamos também que as funções α e β são diferenciáveis em J.
Vamos resolver a equação de Lagrange, procurando soluções que verifiquem as condições referidas, começando por efetuar a substituição $y' = p$.
A equação passa então a escrever-se

$$y = x\alpha(p) + \beta(p).$$

Derivando esta última equação em ordem a x, obtém-se a equação

$$p = \alpha(p) + (x\alpha'(p) + \beta'(p))\frac{dp}{dx}.$$

Considerando x como função incógnita e p variável independente e tendo em conta que, pelo teorema da derivada da função inversa, $\dfrac{dp}{dx} = \left(\dfrac{dx}{dp}\right)^{-1}$ obtém-se a equação linear

$$\frac{dx}{dp} - \left(\frac{\alpha'(p)}{p - \alpha(p)}\right) x = \frac{\beta'(p)}{p - \alpha(p)}.$$

Sendo $x = g(p, c)$ o integral geral desta equação, o integral geral de (**??**) é dado parametricamente por

$$\begin{cases} x = g(p, c) \\ y = x\alpha(p) + \beta(p). \end{cases}$$

Exemplo

Considere-se o PVI

$$y = x(1 + y') + y', \quad y(0) = 1.$$

Efetuando a mudança de variável $y' = p$, *a equação diferencial linear na função incógnita* x *e na variável independente* p *que se obtém é*

$$\frac{dx}{dp} + x = -1,$$

que tem como solução geral $\qquad x = ce^{-p} - 1.$
A solução da equação de Lagrange $y = x(1 + y') + y'$, *na forma paramétrica, é*
(continua)

Exemplo (continuação)

$$\begin{cases} x = ce^{-p} - 1 \\ y = x(1+p) + p. \end{cases}$$

O PVI considerado tem como solução, na forma cartesiana,

$$y = 1 + 2x - (x+1)\log(x+1), \quad x \in]-1, +\infty[\qquad \textit{[verifique]}.$$

Não é difícil verificar que $y(x)$ *é diferenciável em* $]-1, \infty[$ *e que* $y'(x)$ *é um difeomorfismo de* $]-1, \infty[$ *em* $\mathbb{R}$*, pelo que a função* $y(x)$ *encontrada é de facto a solução pretendida.*

A equação de Clairaut

Chama-se *equação de Clairaut* a uma equação da forma

$$y = x\,y' + \beta(y') \tag{0.32}$$

em que β é uma função diferenciável em algum intervalo aberto. Analogamente ao que foi feito na resolução da equação de Lagrange efetuando a mudança de variável $y' = p$, obtém-se

$$y = x\,p + \beta(p).$$

Derivando a equação em ordem a x tem-se

$$p = p + (x + \beta'(p))\frac{dp}{dx},$$

pelo que

$$x + \beta'(p) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{dx} = 0.$$

Se $\dfrac{dp}{dx} = 0$ então $p = c$ e a equação (**??**) tem como solução geral a família de retas

$$y = cx + \beta(c).$$

Se $x + \beta'(p) = 0$ obtém-se a solução, dada sob forma paramétrica,

$$\begin{cases} x = -\beta'(p) \\ y = -\beta'(p)p + \beta(p). \end{cases}$$

Trata-se de uma solução singular da equação (**??**), e constitui a envolvente da família de rectas $y = cx + \beta(c)$.

Exemplo

O que acabámos de provar permite afirmar que a equação de Clairaut

$$y = xy' + (y')^2$$

tem como solução geral a família de retas

$$y = cx + c^2, \quad c \in \mathbb{R}$$

e como solução singular, na forma paramétrica,

$$\begin{cases} x = -2p \\ y = -p^2, \end{cases}$$

e na forma cartesiana, $\quad y = -\dfrac{x^2}{4} \quad$ *[verifique].*

Sistemas de equações lineares de coeficientes constantes

Considere-se o problema da determinação das funções $x(t)$ e $y(t)$ que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t \\ 4\dfrac{dx}{dt} + 3x - \dfrac{dy}{dt} = \sin t \end{cases} . \tag{0.33}$$

Trata-se de um *sistema de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes*, de duas equações e duas funções incógnitas.

Representando por D o operador de derivação em ordem a t, isto é, $D = \dfrac{d}{dt}$, o sistema (**??**) escreve-se na forma

$$\begin{cases} Dx + y = \cos t \\ (4D+3)x - Dy = \sin t \end{cases} . \tag{0.34}$$

Um método de eliminação, análogo ao método de eliminação de Gauss utilizado na resolução de sistemas de equações lineares, permite resolver o sistema (**??**).

Suponhamos que é possível substituir o sistema (**??**) por um equivalente onde a segunda equação depende apenas de uma das funções incógnitas. Se assim for, resolvendo esta segunda equação (linear e de coeficientes contantes) determina-se uma das funções incógnitas, digamos $x(t)$. Substituindo a função $x(t)$ determinada, na primeira equação obtém-se uma nova equação na função incógnita $y(t)$ (também linear e de coeficientes constantes) que permite obter a segunda função incógnita. Com efeito:

Derivando a primeira equação do sistema (**??**) em ordem a t e somando-se o resultado à segunda equação, obtém-se

$$D^2x + Dy + (4D+3)x - Dy = -\sin t + \sin t$$

ou seja,

$$(D^2 + 4D + 3)x = 0.$$

O sistema (**??**) é assim equivalente a

$$\begin{cases} Dx + y = \cos t \\ (D^2 + 4D + 3)x = 0 \end{cases} . \qquad (0.35)$$

A segunda equação do sistema é uma equação linear de coeficientes constantes que depende apenas da função incógnita $x(t)$. A sua equação característica é

$$r^2 + 4r + 3 = 0,$$

que tem como soluções $r = -1$ e $r = -3$. Assim, o integral geral da segunda equação do sistema (**??**) é

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}, \quad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{0.36}$$

Substituíndo (**??**) na primeira equação equação do sistema (**??**), $y = \cos t - Dx$, vem

$$y = \cos t - D(c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t})$$

ou seja,

$$y(t) = \cos t + c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{-3t}, \qquad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

A solução geral do sistema é

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} \\ y(t) = \cos t + c_1 e^{-t} + 3c_2 e^{-3t} \end{cases}, \qquad \text{com } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{0.37}$$

Um sistema de n equações diferenciais lineares de coeficientes constantes com n funções incógnitas é um sistema da forma

$$\begin{cases} P_{11}(D)y_1 + P_{12}(D)y_2 + \cdots + P_{1n}(D)y_n = f_1(t) \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ P_{i1}(D)y_1 + P_{i2}(D)y_2 + \cdots + P_{in}(D)y_n = f_i(t) \longleftarrow \ i\text{-ésima equação} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad (E_i) \\ P_{j1}(D)y_1 + P_{j2}(D)y_2 + \cdots + P_{jn}(D)y_n = f_j(t) \longleftarrow \ j\text{-ésima equação} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad (E_j) \\ P_{n1}(D)y_1 + P_{n2}(D)y_2 + \cdots + P_{nn}(D)y_n = f_n(t), \end{cases}$$

onde $P_{ij}(D)$, com $1 \leq i, j \leq n$, são polinómios em D com coeficientes constantes.

Seja $P(D)$ um polinómio em D de coeficientes constantes e

$$P(D)\left(\sum_{k=1}^{n} P_{ik}(D)y_k\right) = P(D)f_i \tag{0.38}$$

a equação que se obtém por aplicação do operador $P(D)$ à i-ésima equação. Substituindo no último sistema a j-ésima equação pela sua soma com a equação (**??**) , isto é por

$$\sum_{k=1}^{n} P_{jk}(D)y_k + P(D)\left(\sum_{k=1}^{n} P_{ik}(D)y_k\right) = f_j + P(D)f_i$$

que representamos de forma simbólica por

$$E_j \to E_j + P(D)E_i,$$

obtém-se o sistema

$$
\begin{cases}
P_{11}(D)y_1 + P_{12}(D)y_2 + \cdots + P_{1n}(D)y_n = f_1(t) \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
P_{i1}(D)y_1 + P_{i2}(D)y_2 + \cdots + P_{in}(D)y_n = f_i(t) \longleftarrow \; i\text{-ésima equação} \\
\vdots \\
\sum_{k=1}^{n} P_{jk}(D)y_k + P(D)\left(\sum_{k=1}^{n} P_{ik}(D)y_k\right) = f_j + P(D)f_i \longleftarrow \; j\text{-ésima equação} \\
\vdots \\
P_{n1}(D)y_1 + P_{n2}(D)y_2 + \cdots + P_{nn}(D)y_n = f_n(t).
\end{cases}
$$

equivalente ao anterior.

Suponhamos que efectuando um número finito de transformações do tipo considerado é possível reduzir o sistema a um com a forma

$$\left\{\begin{array}{r} Q_{11}(D)y_1^* + Q_{12}(D)y_2^* + Q_{13}(D)y_3^* + \cdots + Q_{1n}(D)y_n^* = g_1(t) \\ Q_{22}(D)y_2^* + Q_{23}(D)y_3^* + \cdots + Q_{2n}(D)y_n^* = g_2(t) \\ Q_{33}(D)y_3^* + \cdots + Q_{3n}(D)y_n^* = g_3(t) \\ \vdots \qquad \\ Q_{nn}(D)y_n^* = g_n(t) \end{array}\right. , \tag{0.39}$$

em que $y_1^*, y_2^*, \cdots, y_n^*$ são as funções $y_1, y_2, \cdots, y_n$, escritas, eventualmente, por outra ordem e nenhum dos polinómios $Q_{ii}(D)$, com $1 \leq i \leq n$, é identicamente nulo. Então a solução do sistema obtêm-se resolvendo n equações lineares de coeficientes constantes, cada uma delas dependendo apenas de uma função incógnita. Com efeito, resolvendo a última equação determina-se y_n^*. Substituindo a função obtida na penúltima equação determina-se y_{n-1}^*. A repetição deste processo conduz à determinação das funções $y_1^*, y_2^*, ..., y_{n-1}^*, y_n^*$ que constituem a solução do sistema.

O polinómio em D definido pelo determinante

$$|P_{rs}(D)|_{1\leq r,s\leq n} = \begin{vmatrix} P_{11}(D) & P_{12}(D) & \cdots & P_{1n}(D) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1}(D) & P_{n2}(D) & \cdots & P_{nn}(D) \end{vmatrix}, \qquad (0.40)$$

é designando por *determinante característico do sistema* e o seu grau é igual ao número total de constantes arbitrárias presentes na solução do sistema.

Exemplo

Determinem-se as funções $x(t)$ e $y(t)$ que satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} (D^3 + D^2 - D - 1)x + (-D^2 + 2D - 1)y = 1 + t \\ (D^2 - 1)x + (-D^2 + D)y = t \end{cases} \tag{0.41}$$

em que D é o operador de derivação $\dfrac{d}{dt}$.
O determinante característico do sistema é

$$\begin{vmatrix} D^3 + D^2 - D - 1 & -D^2 + 2D - 1 \\ D^2 - 1 & -D^2 + D \end{vmatrix} = \text{polinómio de grau 5},$$

Exemplo

*pelo que o integral geral do sistema (**??**) depende de cinco constantes arbitrárias. Determine-se a solução do sistema. Aplicando o operador (-1) à segunda equação de (**??**) e somando o resultado à primeira equação, vem que*

$$(-D^2+1)x+(D^2-D)y+(D^3+D^2-D-1)x+(-D^2+2D-1)y=1+t-t,$$

ou seja,

$$(D^3-D)x+(D-1)y=1,$$

*e o sistema (**??**) é equivalente a*

$$\begin{cases}(D^3-D)x+(D-1)y=1\\(D^2-1)x+(-D^2+D)y=t.\end{cases} \qquad (0.42)$$

Exemplo

*Aplicando o operador $(-D)$ à segunda equação de (**??**) e somando o resultado à primeira equação, vem que*

$$(-D^3 + D)x + (D^3 - D^2)y + (D^3 - D)x + (D - 1)y = 0,$$

ou seja,

$$(D^3 - D^2 + D - 1)y = 0,$$

*e o sistema (**??**) é equivalente a*

$$\begin{cases} (D^3 - D^2 + D - 1)y = 0 \\ (D^2 - 1)x + (-D^2 + D)y = t. \end{cases} \tag{0.43}$$

Exemplo

O sistema já está condensado uma vez que a sua primeira equação só depende da função $y(t)$. Resolva-se a equação

$$(D^3 - D^2 + D - 1)y = 0.$$

Trata-se de uma equação diferencial linear de coeficientes constantes homogénea de equação característica

$$r^3 - r^2 + r - 1 = 0,$$

cujas soluções são $r = 1$ e $r = \pm i$ todas simples, pelo que tem por solução geral

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

Substituindo a função $y(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t$ *na segunda equação do sistema (**??**) vem que*

$$(D^2 - 1)x = t + (c_2 - c_3) \sin t + (-c_2 - c_3) \cos t. \tag{0.44}$$

A equação homogénea associada a esta última equação é

$$(D^2 - 1)x = 0,$$

de solução geral

$$x^*(t) = c_4 e^t + c_5 e^{-t}.$$

Exemplo

As equações não homogéneas

$$(D^2 - 1)x = t,$$

e

$$(D^2 - 1)x = (c_2 - c_3)\sin t + (-c_2 - c_3)\cos t,$$

admitem as soluções particulares

$$\bar{x}_1(t) = -t$$

e

$$\bar{x}_2(t) = \frac{1}{2}(c_2 + c_3)\cos t + \frac{1}{2}(c_3 - c_2)\sin t$$

respectivamente [justifique].

Exemplo

*A solução geral da equação (**??**) é*

$$x(t) = c_4 e^t + c_5 e^{-t} - t + \frac{1}{2}(c_2 + c_3)\cos t + \frac{1}{2}(c_3 - c_2)\sin t,$$

e o sistema considerado tem por solução

$$\begin{cases} x(t) = c_4 e^t + c_5 e^{-t} - t + \frac{1}{2}(c_2 + c_3)\cos t + \frac{1}{2}(c_3 - c_2)\sin t \\ y(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t, \quad c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{0.45}$$

Exemplo

Determinem-se as funções $x(t)$ e $y(t)$ que satisfazem o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} (D-2)x + (D-1)y = 0 \\ (2D^2 - 3D - 2)x + (D^2 - D - 2)y = 0 \end{cases} \tag{0.46}$$

em que D é o operador de derivação $\dfrac{d}{dt}$.
O determinante característico do sistema é

$$\begin{vmatrix} D-2 & D-1 \\ 2D^2 - 3D - 2 & D^2 - D - 2 \end{vmatrix} = -D^3 + 2D^2 - D + 2,$$

Exemplo

*pelo que o integral geral do sistema (**??**) depende de três constantes arbitrárias. Determine-se a solução do sistema.*
*Aplicando o operador $(-2D)$ à primeira equação de (**??**) e somando o resultado à segunda equação, vem que*

$$(-2D^2+4D)x+(-2D^2+2D)y+(2D^2-3D-2)x+(D^2-D-2)y=0,$$

ou seja,

$$(D-2)x+(-D^2+D-2)y=0,$$

*e o sistema (**??**) é equivalente a*

$$\begin{cases}(D-2)x+(D-1)y=0\\(D-2)x+(-D^2+D-2)y=0.\end{cases}\tag{0.47}$$

Exemplo

*Multiplicando a segunda equação de (**??**) por* (-1) *e somando o resultado à primeira equação, vem*

$$(-D+2)x+(D^2-D+2)y+(D-2)x+(D-1)y=0,$$

ou seja,

$$(D^2+1)y=0,$$

*e o sistema (**??**) é equivalente a*

$$\begin{cases} (D-2)x+(D-1)y=0 \\ (D^2+1)y=0 \end{cases} . \qquad (0.48)$$

*Resolvendo a segunda equação de (**??**), obtém-se*

$$y(t)=c_1 \sin t + c_2 \cos t, \quad \textit{com } c_1, c_2 \textit{ constantes arbitrárias.}$$

Exemplo

*Substituindo a função $y(t)$ na primeira equação de (**??**), vem*

$$(D-2)x = -(D-1)(c_1 \sin t + c_2 \cos t),$$

ou seja,

$$(D-2)x = (c_1 + c_2)\sin t + (c_2 - c_1)\cos t. \qquad (0.49)$$

A equação homogénea associada tem por integral geral

$$x^*(t) = c_3 e^{2t};$$

como i não é raiz da equação característica a equação completa admite uma solução particular da forma

$$\overline{y}(t) = A \sin t + B \cos t,$$

com A e B constantes a determinar.

Exemplo

Substituindo $\overline{y}(t) = A\sin t + B\cos t$ *em* (**??**), *conclui-se que*

$$A = \frac{-c_2 - 3c_1}{5} \quad e \quad B = \frac{c_1 - 3c_2}{5}.$$

Assim a solução do sistema é

$$\begin{cases} x(t) = c_3 e^{2t} - \left(\dfrac{c_2 + 3c_1}{5}\right)\sin t + \left(\dfrac{c_1 - 3c_2}{5}\right)\cos t \\ y(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{cases},$$

com c_1, c_2 *e* c_3 *constantes arbitrárias.* □

Exemplo

Determine as funções $x(t)$ e $y(t)$ que satisfazem o seguinte sistema de equações diferenciais lineares de coeficientes constantes

$$\begin{cases} (D^2+1)x+(D-2)y=t \\ (3D^4+2D^2-1)x+(3D^3-6D^2+2)y=1-t \end{cases}$$

onde D designa o operador de derivação em ordem a t.

Exemplo

O determinante característico do sistema tem grau três pelo que a solução do sistema depende de três constantes arbitrárias.
Determine-se a solução do sistema: aplicando o operador $-3D^2 + 1$ *à primeira equação do sistema e somando o resultado à segunda, obtém-se*

$$Dy = 1,$$

donde

$$y = t + c_1.$$

Substituindo a função $y = t + c_1$ *na primeira equação obtém-se*

$$(D^2 + 1)x = 3t + 2c_1 - 1.$$

A equação homogénea associada $(D^2 + 1)x = 0$ *tem por integral geral*

$$x^*(t) = c_2 \cos t + c_3 \sin t.$$

Exemplo

O sistema tem por solução

$$\begin{cases} x(t) = c_2 \cos t + c_3 \sin t + 3t + 2c_1 - 1 \\ y(t) = t + c_1 \end{cases}$$

com c_1, c_2 *e* c_3 *constantes arbitrárias.* $\square$