Partição de um intervalo

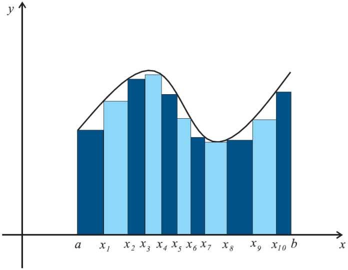
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dados $n + 2$ pontos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = b,$$

ao conjunto dos subintervalos da forma $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n$, chama-se partição de $[a, b]$.

Soma inferior de Darboux

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $\mathcal{P}$ uma partição de $[a, b]$.

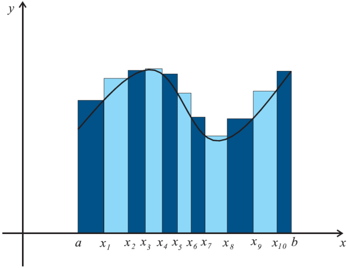


Chama-se soma inferior de Darboux de f, relativa à partição $\mathcal{P}$ a

$$s_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

Soma superior de Darboux

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $\mathcal{P}$ uma partição de $[a, b]$.



Chama-se soma superior de Darboux de f, relativa à partição $\mathcal{P}$ a

$$S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=0}^{n} (x_{i+1} - x_i) \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

Integrais de Darboux

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ e

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

uma função limitada.

- Ao ínfimo do conjunto das somas superiores de f chama-se integral superior de Darboux de f em $[a, b]$ e representa-se por

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

- Ao supremo do conjunto das somas inferiores de f chama-se integral inferior de Darboux de f em $[a, b]$ e representa-se por

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx.$$

Integral de Riemann

Se

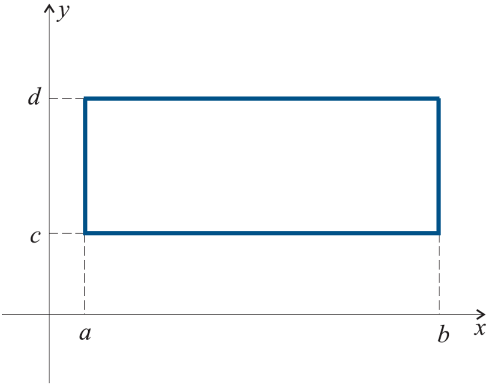
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

diz-se que f é integrável à Riemann em $[a, b]$; a este número chama-se integral de Riemann de f em $[a, b]$ e representa-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx.$$

Domínio retangular

$$\begin{aligned} R &= [a, b] \times [c, d] \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}. \end{aligned}$$



Partição de R

Dados $n+2$ pontos

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n < x_{n+1} = b$$

e $m+2$ pontos

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m < y_{m+1} = d,$$

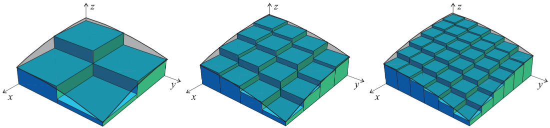
ao conjunto dos subretângulos da forma

$$R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}],$$

chama-se partição de R.

Soma inferior de Darboux

Seja $f : R \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $\mathcal{P}$ uma partição de R.

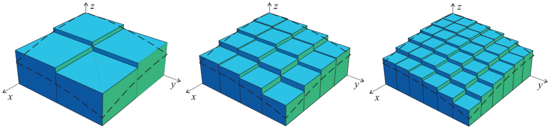


Chama-se soma inferior de Darboux de f, relativa à partição $\mathcal{P}$ a

$$s_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \inf_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y).$$

Soma superior de Darboux

Seja $f : R \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $\mathcal{P}$ uma partição de R.



Chama-se soma superior de Darboux de f, relativa à partição $\mathcal{P}$ a

$$S_{\mathcal{P}}(f) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \sup_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y).$$

Integrais duplos de Darboux

Seja

$$f : R \to \mathbb{R}$$

uma função limitada.

- Ao ínfimo do conjunto das somas superiores de f chama-se integral duplo superior de Darboux de f em R e representa-se por
$$\overline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy.$$
- Ao supremo do conjunto das somas inferiores de f chama-se integral duplo inferior de Darboux de f em R e representa-se por
$$\underline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Integral duplo em R

Se

$$\overline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy = \underline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy,$$

diz-se que f é integrável à Riemann em R; a este número chama-se integral duplo de Riemann de f em R e representa-se

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \overline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy = \underline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Outra notação do integral duplo:

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

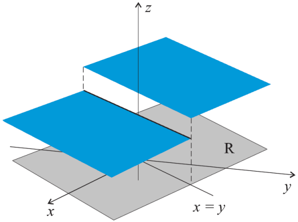
onde $dA = dx\,dy$ é a “area infinitesimal”.

Integrabilidade de funções contínuas

Teorema

Seja R um retângulo. Se $f : R \to \mathbb{R}$ for contínua em R, então f é integrável em R.

Exemplo de uma função descontínua mas integrável:



Integração parcial em ordem a x

Seja $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

Fixando $y \in [c, d]$, podemos definir a função

$$f_y(x) = f(x, y), \quad x \in [a, b].$$

Esta função é contínua em $[a, b]$, logo é integrável em $[a, b]$ e a função

$$J(y) = \int_a^b f_y(x)\, dx = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

está bem definida. A este processo chama-se integração parcial em ordem a x.

A integração parcial em ordem a y define-se analogamente:

$$I(x) = \int_c^d f_x(y)\, dy = \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Integrais iterados

Teorema
Seja $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então as funções*

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy, \quad J(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$$

são contínuas em $[a, b]$ *e* $[c, d]$*, respectivamente.*

Definição. Chamam-se integrais iterados de f em $[a, b] \times [c, d]$ aos integrais

$$\int_a^b I(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx,$$

$$\int_c^d J(y)\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy.$$

Exemplo

Exemplo

Calcule os integrais iterados da função

$$f(x, y) = y \sin(x + y^2)$$

no retângulo

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\right].$$

Resolução:

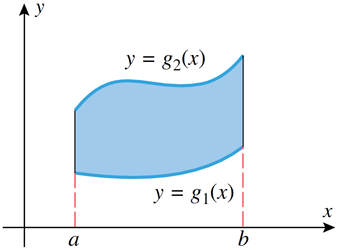
Teorema de Fubini

Teorema

Seja $f : R = [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então*

$$\iint\limits_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy.$$

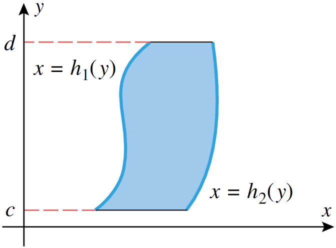
Regiões verticalmente simples



Diz-se que D é uma região verticalmente simples se existirem dois números $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e duas funções contínuas $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que $g_1(x) \leq g_2(x)$ para $x \in [a, b]$ e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

Regiões horizontalmente simples



Diz-se que D é uma região horizontalmente simples se existirem dois números $c, d \in \mathbb{R}$ tais que $c < d$ e duas funções contínuas $h_1, h_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ tais que $h_1(y) \leq h_2(y)$ para $y \in [c, d]$ e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \wedge h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}.$$

Teorema de Fubini (conjuntos verticalmente simples)

Teorema

Se

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

onde $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ *são contínuas e se*

$$f : D \to \mathbb{R}$$

for contínua, então

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Exemplo

Determine

$$\iint_D x^2 y \, dx \, dy$$

sendo D *a parte fechada do plano limitada pelo triângulo com vértices nos pontos* $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$.

Resolução:

Teorema de Fubini (conjuntos horizontalmente simples)

Teorema

Se

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \wedge h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

onde $h_1, h_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ *são contínuas e se*

$$f : D \to \mathbb{R}$$

for contínua, então

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Regiões mistas

Diz-se que D é uma região mista se existirem números $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que

$$a < b, \quad c < d$$

e funções contínuas

$$g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad h_1, h_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$$

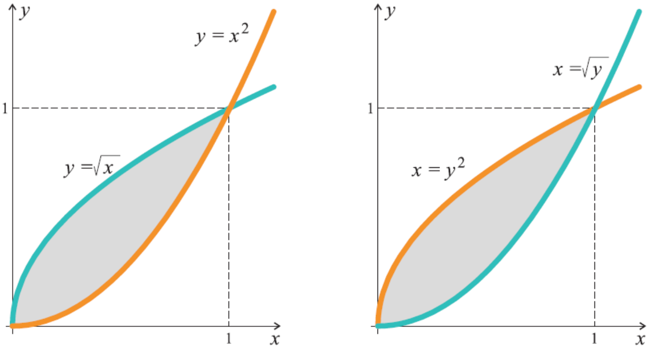
tais que

$$g_1(x) \leq g_2(x) \text{ para } x \in [a, b], \quad h_1(y) \leq h_2(y) \text{ para } y \in [c, d]$$

e

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d \wedge h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}. \end{aligned}$$

Exemplo



$$
\begin{aligned}
D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1] \wedge y \in [x^2, \sqrt{x}]\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0,1] \wedge x \in [y^2, \sqrt{y}]\}.
\end{aligned}
$$

Teorema de Fubini para regiões mistas

Teorema

$D \subset \mathbb{R}^2$ for uma região mista e $f : D \to \mathbb{R}$ for uma função contínua, então

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Calcule o integral iterado

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 e^{x^4}\, dx\, dy$$

invertendo a ardem de integração.

Nota: a função $f(x) = e^{x^4}$ não admite uma primitiva que se escreva de forma elementar!

Resolução

Resolução:

Áreas e volumes como integrais duplos

- A área de uma região plana D é dada por

$$\iint_D 1\,dx\,dy = \iint_D dA.$$

- Se f for uma função de duas variáveis, contínua e não negativa numa região D, então o volume do sólido compreendido entre a superfície

$$z = f(x, y)$$

e a região D é dado por

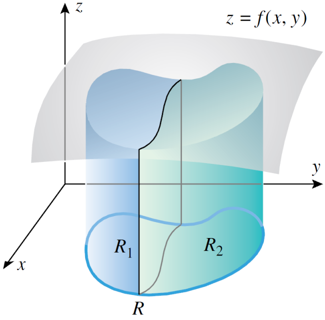
$$\iint_D f(x, y)\,dA$$

Aditividade do integral duplo

Teorema

Seja $R = R_1 \cup R_2$ *e* $\mathrm{int}(R_1) \cap \mathrm{int}(R_2) = \emptyset$.
Se f *for integrável em* R_1 *e em* R_2, *então* f *é integrável em* R *e*

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint_{R_2} f(x,y)\,dA.$$



Linearidade do integral duplo

Teorema

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e*

$$f, g : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

duas funções integráveis em R*. Então a função*

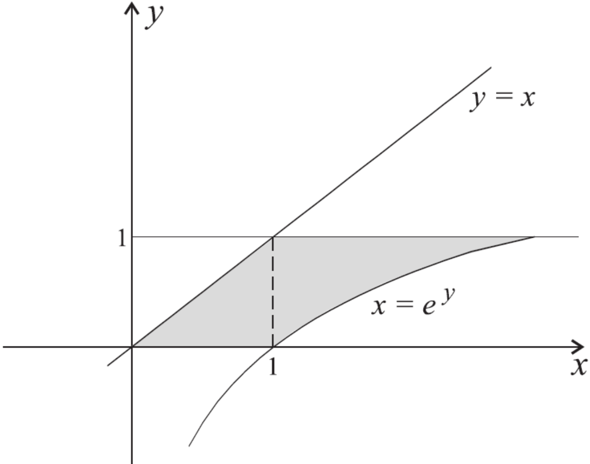
$$\alpha f + \beta g$$

é integrável em R *e*

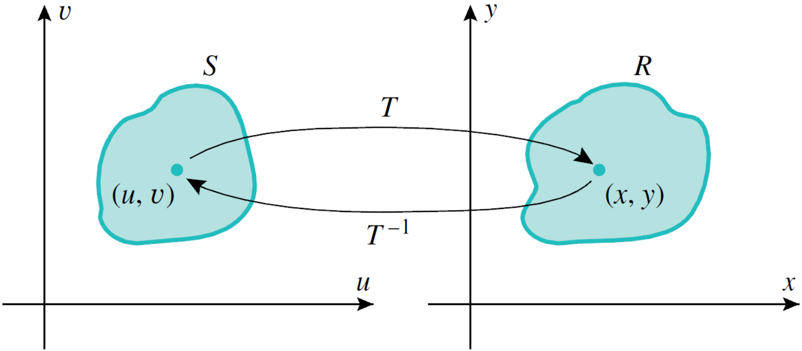
$$\iint_R [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)] dA = \alpha \iint_R f(x,y)\, dA + \beta \iint_R g(x,y)\, dA.$$

Exemplo

Calcule o integral duplo $\iint_D \sqrt{x}\, dA$ *sobre a região* D *indicada:*



Transformação do plano



$$T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$$

Imagens de retas paralelas aos eixos

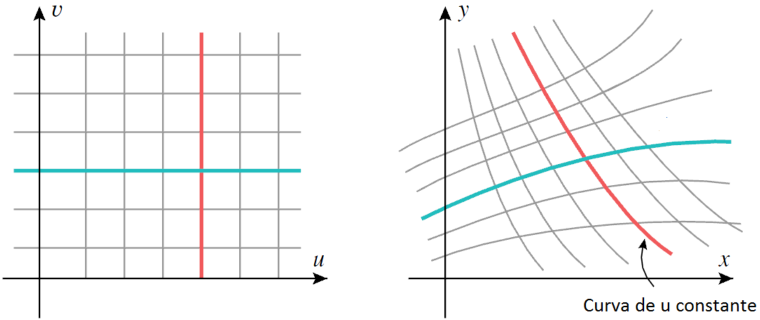


Imagem de uma partição do conjunto S

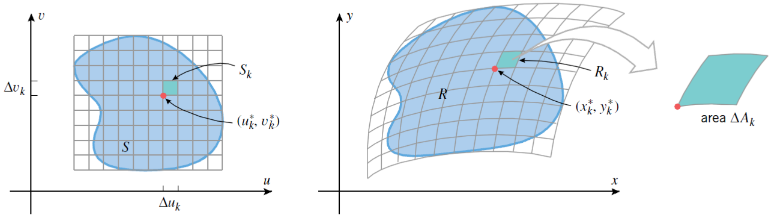
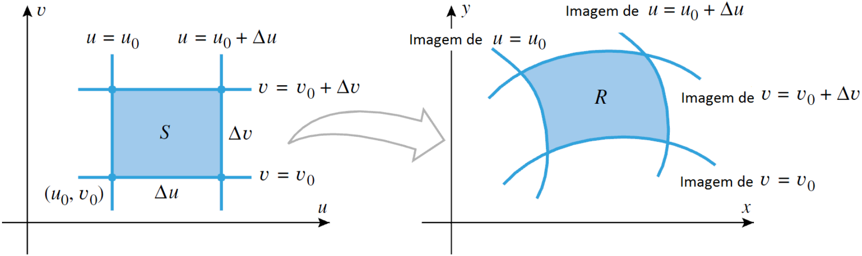


Imagem de um retângulo pequeno



$$\text{Área}(R) \approx \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right| \text{Área}(S)$$

Jacobiano

Se T for a transformação do plano uv no plano xy definida pelas equações

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v)$$

então o jacobiano de T é definido por

$$\det JT(u,v) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix}.$$

Mudança de variáveis

Teorema

Sejam $f : R \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e* $T : S \to R$ *uma função vetorial tal que* $T(S) = R$ *e*

(i) T *é de classe* C^1,

(ii) T *é injetiva no interior de* S,

(iii) *o jacobiano de* T *não se anula em* $\mathrm{int}(S)$*:*

$$\det JT(u, v) \neq 0 \quad \textit{se} \quad (u, v) \in \mathrm{int}(S).$$

Então

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v))\, |\det JT(u, v)|\, du\, dv.$$

Mudança de variáveis em coordenadas polares

No caso das coordenadas polares a função T tem a seguinte forma:

$$T(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)) = (r\cos\theta, r\sin\theta), \quad (r,\theta) \in [0,+\infty[\times[0,2\pi[.$$

Esta função é sobrejetiva e injetiva no conjunto $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$.

$$\det JT(r,\theta) = \det \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

Logo, no caso das coordenadas polares, a fórmula de mudança de varáveis é

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr\,d\theta,$$

onde o conjunto R^* é o conjunto R escrito em coordenadas polares.

Exemplo

Calcule

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}(x^2+y^2)^{3/2}dy\,dx$$

utilizando mudança para coordenadas polares.

Resolução: