Séries de Fourier

Quando o matemático francês Joseph Fourier (1768-1830) estava a resolver um problema relativo à difusão do calor necessitou de representar uma determinada função como soma de uma série de senos e cossenos, isto é uma série da forma

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos(nx) + b_n \sin(nx)). \tag{0.1}$$

Já anteriormente Bernoulli e Euler tinham utilizado este tipo de séries na resolução de problemas de astronomia e de vibração de cordas. A uma série da forma (**??**) chama-se *série trigonométrica*. Representar uma função como soma de uma série trigonométrica é por vezes mais vantajoso do que exprimi-la como uma série de potências, nomeadamente quando a função pretende representar fenómenos de natureza periódica.

Definição

Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se *periódica de período* $p \neq 0$ se $x + p \in D$ sempre que $x \in D$ e $f(x) = f(x+p)$ para todo o $x \in D$.

Por exemplo as funções seno e cosseno são periódicas de período 2π. Note-se que também são periódicas de período 4π, 6π,... e, genericamente, são periódica de período $p = 2k\pi$, em que k é um inteiro diferente de zero. Ao período 2π é usual chamar *período positivo mínimo*.
Suponhamos que $f(x)$ é uma função periódica de período $p = 2\pi$ e que é soma de uma série trigonométrica, isto é

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \tag{0.2}$$

Vejamos como determinar os coeficientes a_0, a_n e b_n em (**??**).

Comecemos por determinar o coeficiente a_0. Integrando ambos os membros da igualdade (**??**), entre $-\pi$ e π, tem-se

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) dx. \quad (0.3)$$

Supondo que a série pode ser integrada termo a termo (o que acontece por exemplo se a convergência for uniforme), então

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos(nx)dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin(nx)dx \\ &= 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)dx \\ &= 2\pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\frac{\cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= 2\pi a_0,\end{aligned}$$

e

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Determinem-se agora os coeficientes a_n com $n = 1, 2, \ldots$. Fixando $m \in \mathbb{N}$, multipliquem-se ambos os lados da igualdade (**??**) por $\cos(mx)$ e integre-se entre $-\pi$ e π. Tem-se,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))) \cos(mx)dx$$

$$= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx$$

$$+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx)dx).$$

Tendo em conta que

$$(1)\quad \cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\left(\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)\right),$$

$$(2)\quad \sin(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\left(\sin((n+m)x) + \sin((n-m)x)\right),$$

tem-se que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos((n+m)x) + \cos((n-m)x)\right] dx$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+m)x)}{n+m}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-m)x)}{n-m}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, & n \neq m \\ \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(2mx)+1)\, dx = \pi, & n = m, \end{cases}$$

e também que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\, \cos(mx)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin((n+m)x) + \sin((n-m)x)\, dx$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos((n+m)x)}{n+m}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\cos((n-m)x)}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, & n \neq m \\ \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(2mx)\, dx = 0, & n = m. \end{cases}$$

Como

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) = 0,$$

tem-se

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = a_m\pi,$$

pelo que

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx.$$

Analogamente se mostra que

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx.$$

Aos coeficientes

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx, \qquad n = 1, 2, \ldots \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{0.4}$$

chama-se *coeficientes de Fourier* da função f. À série trigonométrica

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

onde a_0, a_n e b_n são os coeficientes de Fourier chama-se *série de Fourier* de $f(x)$.

Na determinação dos coeficientes de Fourier supusemos que a série trigonométrica tinha por soma $f(x)$ e para além disso que podia ser integrada termo a termo. No entanto desde que a função $f(x)$ seja integrável no intervalo $[-\pi, \pi]$, os coeficientes de Fourier podem ser determinados e é possível escrever *formalmente* a série de Fourier de $f(x)$. Notaremos este facto por

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Convêm observar que alterando o valor da função f em pontos isolados os integrais que definem os coeficientes não se alteram e portanto a série de Fourier também não.

Exemplo

Sendo k uma constante real diferente de zero, determine-se a série de Fourier da função periódica de período $p = 2\pi$ definida no intervalo $]-\pi, \pi[$ por

$$f(x) = \begin{cases} -k, & se \ -\pi < x \leq 0 \\ k, & se \ 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Calculemos os coeficientes de Fourier da função f. Tem-se que:

$$\begin{aligned} a_0 =& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ =& \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} (-k) dx + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} k dx \\ =& -\frac{k\pi}{2\pi} + \frac{k\pi}{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

relativamente aos coeficientes a_n *tem-se que*

$$
\begin{aligned}
a_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \\
=& -\frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)dx + \frac{k}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)dx \\
=& -\frac{k}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{k}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{0}^{\pi} = 0,
\end{aligned}
$$

Exemplo (continuação)

os coeficientes b_n vêm dados por

$$
\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\
=& -\frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx + \frac{k}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx \\
=& \frac{k}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{k}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{0}^{\pi} \\
=& \frac{k}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n}\right) - \frac{k}{\pi}\left(\frac{(-1)^n-1}{n}\right) \\
=& \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ \dfrac{4k}{n\pi}, & n = 2m-1, \end{cases} \qquad m = 1, 2, \ldots \quad .
\end{aligned}
$$

Exemplo (continuação)

A série de Fourier da função $f(x)$ é

$$
\begin{aligned}
a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \sin(2mx) + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1} \sin((2m-1)x) \\
&= \frac{4k}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin((2m-1)x)}{(2m-1)},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
f(x) \sim \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots \right).
$$

Convergência da série de Fourier

Dada uma função $f(x)$ seccionalmente contínua em $\mathbb{R}$, define-se a função $f_M(x)$ como sendo a função cujo valor em cada ponto x é a média aritmética dos limites laterais de $f(x)$ em x, isto é, é a função definida por:

$$f_M(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

Observe-se que nos pontos onde f é contínua $f_M(x) = f(x)$. À função f_M chama-se *função valor médio de $f(x)$*.

Exemplo

Determine-se $f_M(x)$ *sendo* $f(x)$ *função de período* $p = 2\pi$ *que em* $[-\pi, \pi]$ *é definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \\ x, & \text{se } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

A função $f(x)$ *é contínua em todos os pontos de* $\mathbb{R}$ *excepto nos pontos* $x_k = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, *nos quais existem e são finitos os limites laterais* $f(2k\pi^-)$ *e* $f(2k\pi^+)$. *Com efeito*

$$f(2k\pi^-) = \lim_{h \to 0^-} f(2k\pi + h) = \lim_{h \to 0^-} f(h) = \pi$$
$$f(2k\pi^+) = \lim_{h \to 0^+} f(2k\pi + h) = \lim_{h \to 0^+} f(h) = 0.$$

Exemplo (continuação)

Para cada $k \in \mathbb{Z}$ tem-se então que

$$f_M(x_k) = \frac{f(2k\pi^+) + f(2k\pi^-)}{2} = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2},$$

e assim, $f_M(x)$ é a função de período $p = 2\pi$ que no intervalo $[-\pi, \pi]$ é definida por

$$f_M(x) = \begin{cases} \pi, & se \ -\pi \leq x < 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & se \ x = 0 \\ x, & se \ 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

O teorema seguinte estabelece condições relativas à convergência da série de Fourier de uma função $f(x)$.

Teorema (Representação de funções com período $p = 2\pi$ em série de Fourier)

Seja $f(x)$ uma função periódica de período 2π. Se $f(x)$ e $f'(x)$ são seccionalmente contínuas em $[-\pi, \pi]$ (ou em qualquer outro intervalo de amplitude 2π), então a série de Fourier de $f(x)$ converge para $f_M(x)$, isto é,

$$f_M(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

em que a_0, a_n e b_n são os coeficientes de Fourier de $f(x)$.

Exemplo

Considere-se a função de período $p = 2\pi$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se \ -\pi < x < -\dfrac{\pi}{2} \\ 1, & se \ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & se \ \dfrac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Determinem-se os coeficientes de Fourier de $f(x)$, tem-se

Exemplo (continuação)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ =& \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n} - \frac{\sin((-n\frac{\pi}{2}))}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\sin(\frac{n\pi}{2})}{n}\right) \\ =& \frac{2\sin(\frac{n\pi}{2})}{\pi n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Assim,

$$
\begin{aligned}
f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sin(n\frac{\pi}{2})}{\pi n} \cos(nx) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \dots\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}\cos((2k-1)x). \qquad (0.5)
\end{aligned}
$$

Como $f(-\frac{\pi}{2}^-) = f(\frac{\pi}{2}^+) = 0$, $f(-\frac{\pi}{2}^+) = f(\frac{\pi}{2}^-) = 1$ *e* $f'(x) = 0$ *nos pontos onde está definida,* f *e* f' *são seccionalmente contínuas no intervalo* $]-\pi, \pi[$. *O último teorema permite-nos afirmar que a série de Fourier determinada converge para a função*

Exemplo (continuação)

$$f_M(x) = \begin{cases} 0, & se \ -\pi \leq x < -\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{2}, & se \ x = -\dfrac{\pi}{2} \\ 1, & se \ -\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{2}, & se \ x = \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & se \ \dfrac{\pi}{2} < x \leq \pi, \end{cases}$$

pelo que, para cada $x \in \mathbb{R}$, tem-se que

$$f_M(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} \cos((2k-1)x).$$

Exemplo (continuação)

Calculando-se, por exemplo, $f_M(0)$ obtém-se

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}$$

ou ainda

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exemplo (continuação)

Esta última série é uma série numérica alternada. Como a sucessão

$$a_k = \frac{1}{2k-1}$$

é monótona decrescente e tem limite zero, o critério de Leibniz permite afirmar que a série é convergente, no entanto não dá qualquer indicação acerca do valor da sua soma. A série de Fourier da função considerada permitiu não só concluir a convergência da série, bem como determinar o valor da sua soma.

$$(0.6)$$

Exemplo

Seja f a função seccionalmente contínua e de período $p = 2\pi$, definida por $f(x) = x, \ x \in]-\pi, \pi[$. Os coeficientes de Fourier de f são:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi n^3} [\cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi n^3} (\cos(n\pi) - \cos(n\pi)) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} x \cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dx \\ &= -\frac{2\pi \cos(n\pi)}{\pi n} + 0 = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Assim,

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx),$$

ou seja,

$$f(x) \sim 2\left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \dots\right).$$

Como f e f' são seccionalmente contínuas no intervalo $]-\pi, \pi[$ [justifique], a série de Fourier de f é convergente para a função valor médio,

$$f_M(x) = \begin{cases} 0, & se\ x = -\pi \\ x, & se\ -\pi < x < \pi \\ 0, & se\ x = \pi. \end{cases}$$

Funções periódicas de período $2L$

Suponhamos agora que $f(x)$ é uma função periódica de período $p = 2L$. Vejamos como determinar a série de Fourier de f. Efetuemos a mudança de variável definida por

$$x = \phi(u) = \frac{Lu}{\pi}, (u = \phi^{-1}(x) = \frac{\pi x}{L}).$$

Seja g a função obtida por composição de f com ϕ,

$$g(u) = (f \circ \phi)(u) = f(\phi(u)).$$

Vejamos que a função g é periódica de período 2π. Com efeito,

$$\begin{aligned} g(u + 2\pi) =& f(\phi(u + 2\pi)) = f\left(\frac{L(u + 2\pi)}{\pi}\right) \\ =& f\left(\frac{Lu}{\pi} + 2L\right) = f\left(\frac{Lu}{\pi}\right) \\ =& f(\phi(u)) = g(u). \end{aligned}$$

De acordo com o já visto para as funções periódicas de período 2π, a série de Fourier da função g é uma série da forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nu) + b_n \sin(nu)\right),$$

com

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u)\, du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi(u))\, du$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) \cos(nu)\, du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi(u)) \cos(nu)\, du, \quad n = 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u) \sin(nu)\, du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi(u)) \sin(nu)\, du, \quad n = 1, 2, \ldots \, .$$

Efetuando agora a mudança de variável $u = \phi^{-1}(x) = \dfrac{\pi x}{L}$ nos últimos integrais, obtém-se

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\ dx \\
a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ dx, \quad n = 1, 2, \ldots \\
b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ dx, \quad n = 1, 2, \ldots \quad .
\end{aligned} \tag{0.7}$$

À semelhança do teorema para as funções periódicas de período 2π tem-se o teorema:

Teorema (Representação em série de Fourier de funções de período $p = 2L$)

Seja $f(x)$ uma função de período $p = 2L$. Se $f(x)$ e $f'(x)$ são seccionalmente contínuas em $[-L, L]$ (ou em qualquer outro intervalo de amplitude $2L$), então a série de Fourier de $f(x)$ converge para a função valor médio $f_M(x)$, isto é

$$f_M(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right),$$

*com a_0, a_n e b_n os coeficientes de Fourier de f definidos por (**??**).*

Exemplo

Sejam k uma constante real não nula e f a função periódica de período $p = 4$ definida e seccionalmente contínua em $[-2, 2]$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se \ -2 < x < -1 \\ k, & se \ -1 < x < 1 \\ 0, & se \ 1 < x < 2 \end{cases} .$$

*Determinem-se os coeficientes de Fourier de f. De acordo com as fórmulas (**??**) tem-se,*

Exemplo (continuação)

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)\ dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} k\ dx = \frac{k}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\ dx = \frac{k}{2}\int_{-1}^{1}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\ dx$$
$$= \frac{k}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{2k}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\ dx = \frac{k}{2}\int_{-1}^{1}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\ dx$$
$$= \frac{k}{2}\left[-\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})\right]_{-1}^{1} = 0.$$

Exemplo (continuação)

Então

$$f(x) \sim \frac{k}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right),$$

ou ainda

$$f(x) \sim \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).$$

Pelo último teorema a série de Fourier obtida converge no intervalo $[-2,2]$ *para a função valor médio* $f_M(x)$, *definida por*

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x), & se\ x \in]-2,2[,\ x \neq -1,1 \\ 0, & se\ x = -2,2 \\ \dfrac{k}{2}, & se\ \ x = -1,1. \end{cases}$$

Funções pares e funções ímpares

Recordem-se as definições de *função par* e *função ímpar*:
Seja a uma constante real positiva e $f(x)$ uma função definida no intervalo $[-a, a]$. A função $f(x)$ diz-se par se

$$f(-x) = f(x), \ \forall x \in [-a, a],$$

e ímpar se,

$$f(-x) = -f(x), \ \forall x \in [-a, a].$$

Exemplo

As funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x^2$ são exemplos de funções pares em $\mathbb{R}$, enquanto que as funções $d(x) = \sin x$ e $c(x) = x^3$ são funções ímpares em $\mathbb{R}$. Já a função $h(x) = e^x$ não é par nem ímpar.

Os seguintes resultados relativos a funções pares e ímpares são de grande utilidade prática e são de demonstração trivial:

1. O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar e o produto de duas funções ímpares ou duas funções pares é uma função par.

2. Seja $g(x)$ uma função integrável num intervalo $[-L, L]$, $(L > 0)$.

    1. Se $g(x)$ for par então $\int_{-L}^{L} g(x)dx = 2\int_{0}^{L} g(x)dx$,
    2. Se $g(x)$ for ímpar então $\int_{-L}^{L} g(x)dx = 0$.

Suponhamos que $f(x)$ uma função de período $2L$. Destas últimas observações resulta que:
Se $f(x)$ for uma função par então

$$f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \text{é ímpar}$$

e a função

$$f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \text{é par}$$

pelo que os seus coeficientes de Fourier são dados por:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\ dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\ \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\ dx, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{0.8}$$

$$b_n = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{0.9}$$

se $f(x)$ for uma função ímpar então

$$f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \text{é par}$$

e a função

$$f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \text{é ímpar}$$

pelo que os seus coeficientes de Fourier são dados por:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0, & & \\
a_n &= 0, & n &= 1, 2, \ldots \\
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx, & n &= 1, 2, \ldots
\end{aligned} \tag{0.10}$$

Resumamos estes resultados no teorema seguinte:

Teorema (Série de Fourier de funções pares e ímpares de período $p = 2L$)

1. A série de Fourier de uma função $f(x)$ par e de período $p = 2L$ é uma série em cossenos da forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

com

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \quad e \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots \; .$$

Teorema (continuação)

2. A série de Fourier de uma função $f(x)$ ímpar e de período $p = 2L$ é uma série em senos da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

com

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots \quad .$$

Extensões pares e ímpares

Em muitos problema físicos e de engenharia, em que os fenómenos que se pretendem estudar são de natureza periódica, existe a necessidade de representar em série de Fourier funções que se encontram definidas apenas num determinado intervalo limitado. Suponhamos então que $f(x)$ é uma função definida no intervalo limitado $[0, L]$, $(0 < L < \infty)$, e que neste intervalo se pretende representar $f(x)$ por uma série de Fourier.

Uma vez que as séries de Fourier representam funções períodicas, é usual proceder da seguinte forma: começa-se por estender a função f ao intervalo $[-L, L]$ como função par ou como função ímpar e, em seguida, procede-se a sua extensão periódica a toda a recta real. Se a opção escolhida for considerar a extensão par de $f(x)$ a $[-L, L]$, então a sua série de Fourier será, de acordo com o último teorema uma série em cossenos; se pelo contrário a opção escolhida for considerar a extensão ímpar então a série de Fourier de $f(x)$ será uma série em senos.

Exemplo

Seja $R > 0$ uma constante positiva. Determine-se a série de Fourier, relativa à extensão par no intervalo $[-R, R]$, da função $f(x)$ que se supõe periódica de período $p = 2R$ e que no intervalo $[0, R]$ está definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq R/2 \\ R - x, & R/2 \leq x \leq R \end{cases}.$$

*Determinemos os coeficientes de Fourier de $f(x)$ pelas fórmulas (**??**). Tem-se que:*

$$a_0 = \frac{1}{R} \int_0^R f(x)\ dx = \frac{1}{R} \left(\int_0^{R/2} x\ dx + \int_{R/2}^R (R - x)\ dx \right) = \frac{R}{4}$$

Exemplo (continuação)

$$
\begin{aligned}
a_n =& \frac{2}{R} \int_0^R f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{R}\right) dx \\
=& \frac{2}{R} \left(\int_0^{R/2} x \cos\left(\frac{n\pi x}{R}\right) dx + \int_{R/2}^{R} (R-x) \cos\left(\frac{n\pi x}{R}\right) dx \right) \\
=& \frac{2}{R} \left[\frac{R}{n\pi} x \sin\left(\frac{n\pi x}{R}\right) + \frac{R^2}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{R}\right) \right]_0^{R/2} \\
&+ \left[\frac{R^2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{R}\right) \right]_{R/2}^{R} - \left[\frac{R}{n\pi} x \sin\left(\frac{n\pi x}{R}\right) + \frac{R^2}{n^2\pi^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{R}\right) \right]_{R/2}^{R} \\
=& \frac{2R}{n^2\pi^2} \left[2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 - (-1)^n \right];
\end{aligned}
$$

Exemplo (continuação)

observe-se que os coeficientes a_n *determinados só são diferentes de zero quando* $n = 4k - 2, \quad k = 1, 2, \ldots$. *Para estes valores obtém-se*

$$a_{4k-2} = -\frac{2R}{(2k-1)^2\pi^2}, \quad k = 1, 2, \ldots \quad .$$

Como os coeficientes b_n *são nulos, vem que*

$$f(x) \sim \frac{R}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2R}{(2k-1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(4k-2)\pi x}{R}\right).$$

Exemplo (continuação)

Como $f'(x)$ *é seccionalmente contínua em* $[-R, R]$ *e* $f(x)$ *é contínua em* $\mathbb{R}$, *tem-se que*

$$f(x) = \frac{R}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2R}{(2k-1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(4k-2)\pi x}{R}\right), \quad em \quad \mathbb{R}.$$

Em particular, para $x = 0$, *obtém-se*

$$0 = f(0) = \frac{R}{4} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2R}{(2k-1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(4k-2)\pi \cdot 0}{R}\right),$$

o que permite concluir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exemplo (continuação)

Determine-se agora a série de Fourier, relativa à extensão ímpar. Neste caso os coeficientes a_0 e a_n são nulos e os coeficientes b_n são dados por

$$
\begin{aligned}
b_n = & \frac{2}{R}\left[-\frac{R}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi x}{R}\right)+\left(\frac{R}{n\pi}\right)^2\sin\left(\frac{n\pi x}{R}\right)\right]_0^{\frac{R}{2}} \\
& +\frac{2}{R}\left[-\frac{R^2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{R}\right)+\frac{R}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi x}{R}\right)-\left(\frac{R}{n\pi}\right)^2\sin\left(\frac{n\pi x}{R}\right)\right]_{\frac{R}{2}}^{R} \\
= & \frac{4R}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Exemplo (continuação)

Pelo que

$$b_{2n} = 0 \quad e \quad b_{2n-1} = \frac{4R}{\pi^2} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$$

Como $f'(x)$ é seccionalmente contínua em $[-R, R]$ e $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$, tem-se que

$$f(x) = \frac{4R}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{R}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

Determine-se a série de Fourier, relativa à extensão ímpar no intervalo $[-\pi, \pi]$*, da função que se supõe periódica de período* $p = 2\pi$ *e que no intervalo* $[0, \pi]$ *é definida por* $f(x) = \cos x$*.*
Neste caso os coeficientes a_0 *e* a_n *são nulos e os coeficientes* b_n *são dados por*

$$\begin{aligned} b_n =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \, \sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right) dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos x \, \sin(nx) dx \\ =& \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\sin((n+1)x) + \sin((n-1)x)\right) dx. \end{aligned}$$

Se $n = 1$*, vem que*

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0.$$

Se $n = 2, 3, \ldots$*, vem que*

Exemplo (continuação)

$$
\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 2\sin(n+1)x\ \sin(n-1)x)dx \\
=& \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\pi} \\
=& \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos((n+1)\pi)}{n+1} - \frac{\cos((n-1)\pi)}{n-1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right) \\
=& \frac{2n}{\pi(n^2-1))}(1+(-1)^n),
\end{aligned}
$$

ou ainda

$$b_{2k-1} = 0, \quad k = 1, 2, ...$$

e

$$b_{2k} = \frac{4k}{\pi(k^2-1)}, \quad k = 1, 2, ... \quad .$$

Exemplo (continuação)

Assim a série pretendida é dada por

$$\frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k^2 - 1} \right) \sin(2kx).$$

A função $f'(x)$ é seccionalmente contínua em $[-\pi, \pi]$ e $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$ exceto nos pontos $x = 2k\pi$, em que k é um inteiro. Assim

$$\frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k^2 - 1} \right) \sin(2kx) = \begin{cases} f(x), & se \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0, & se \quad x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$