Funções reais de várias variáveis reais

- A área A de um retângulo de comprimento c e largura l é dada por $A = l\,c$. Dizemos que A é uma função de duas variáveis l e c e usamos a notação

$$A = f(l, c) \quad \text{com} \quad f(l, c) = l\,c.$$

  Como os lados do retângulo têm medida positiva é natural considerar $(l, c) \in D$ sendo $D = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$. Dizemos que D é o domínio da função f. Neste caso D está determinado por razões físicas.

- A média aritmética de n números reais (n fixo) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é dada através da fórmula $m = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$. Dizemos que m é uma função de n variáveis x_1, x_2, ..., x_n e escrevemos

$$m = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ com } f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

  Neste caso podemos considerar $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e dizemos que $\mathbb{R}^n$ é o domínio da função f.

Função - Domínio

Em geral dizemos que uma variável u é função de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e escrevemos

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

se existe uma regra que atribui um único valor real u a cada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pertencente a um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$.
As variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dizem-se variáveis independentes e u diz-se variável dependente. O subconjunto D diz-se domínio da função f.

Domínio

Dada uma função através de uma expressão analítica podemos ter duas situações: ou o domínio é dado explicitamente ou é considerado o domínio natural que consiste no conjunto dos pontos para os quais a expressão analítica tem sentido.

Exemplo

Determine e esboce o domínio da função

$$f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$$

Resolução:

Gráfico de uma função real de uma variável real

Seja $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$. Chama-se gráfico de f ao conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in D \wedge y = f(x)\}.$$

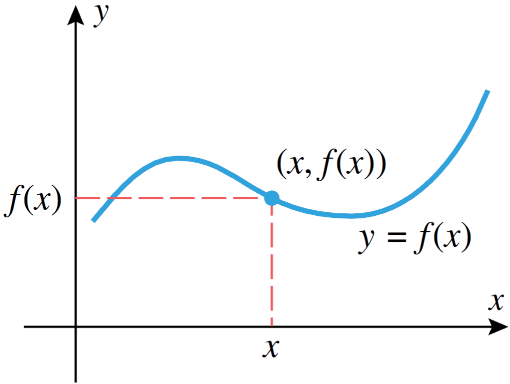
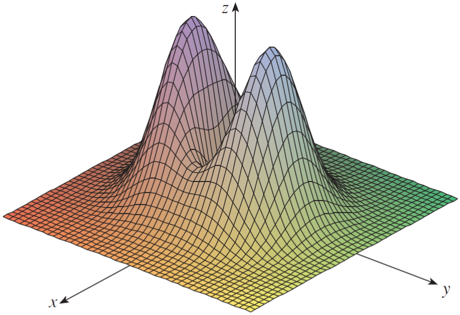


Gráfico de uma função real de várias variáveis reais

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ e $f : D \to \mathbb{R}$. Chama-se gráfico de f ao conjunto

$$\{(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \ldots, x_n) \in D \wedge y = f(x_1, \ldots, x_n)\}.$$

Se $n = 2$, o gráfico é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$:



(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2-y^2}$

Gráfico - Exemplos

Exemplos

Esboce os gráficos das funções:

(a) $f(x,y) = 3x$;

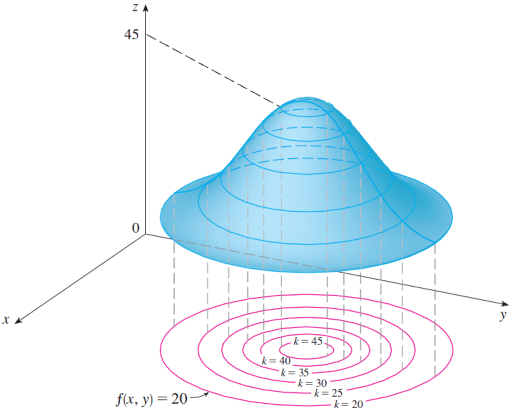
(b) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$.

Resolução:

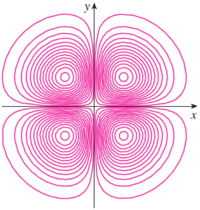
Curvas de nível de uma função de duas variáveis

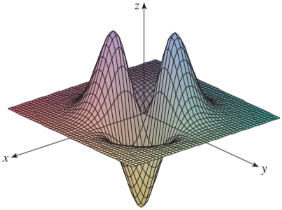
Seja $D \subset \mathbb{R}^2$. A curva de nível $k \in \mathbb{R}$ de uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é definida por

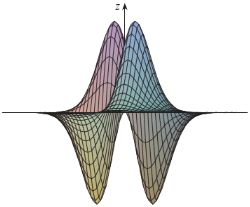
$$\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in D : f(x, y) = k\}.$$



Exemplo: a função $f(x, y) = -xye^{-x^2-y^2}$







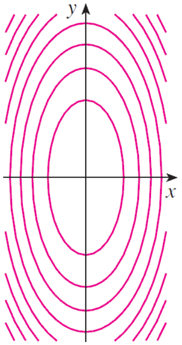
Observação

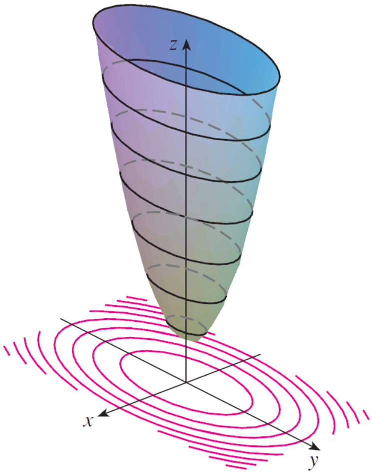
Curvas de nível de valores diferentes não se intersetam.

Exemplo

Exemplo

Esboce algumas curvas de nível da função $f(x,y) = 4x^2 + y^2 + 1$.





Superfícies de nível de uma função de 3 variáveis

Seja $D \subset \mathbb{R}^3$. A superfície de nível $k \in \mathbb{R}$ de uma função

$$f : D \to \mathbb{R}$$

é definida por

$$\mathcal{S}_k = \{(x, y, z) \in D : f(x, y, z) = k\}.$$

Exemplo

Determine e esboce as superfícies de nível de valores $1, 4$ *e* 9 *da função* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Resolução:

$\mathcal{S}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$:

$\mathcal{S}_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$;

$\mathcal{S}_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$.

Superfícies de nível da função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$