Analize Matemática I

Felipe B. Pinto 61387 - MIEQB

5 de julho de 2021

Conteúdo

Formulas de Recorrência

1. $\int \sin^n(a\,u)\,\mathrm{d}u = -\frac{\sin^{n-1}(a\,u)\,\cos(a\,u)}{a\,n} + (n-1)/n\,\int \sin^{n-2}(a\,u)\,\mathrm{d}u$
2. $\int \cos^n(a\,u)\,\mathrm{d}u = \frac{\sin(a\,u)\,\cos^{n-1}(a\,u)}{a\,n} + (n-1)/n\,\int \cos^{n-2}(a\,u)\,\mathrm{d}u$
3. $\int \tan^n(a\,u)\,\mathrm{d}u = \frac{\tan^{n-1}(a\,u)}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2}(a\,u)\,\mathrm{d}u$
4. $\int \cot^n(a\,u)\,\mathrm{d}u = -\frac{\cot^{n-1}(a\,u)}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2}(a\,u)\,\mathrm{d}u$
5. $\int \sec^n(a\,u)\,\mathrm{d}u = \frac{\sec^{n-2}(a\,u)\tan(a\,u)}{a\,(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(a\,u)\,\mathrm{d}u$
6. $\int \csc^n(a\,u)\,\mathrm{d}u = -\frac{\csc^{n-2}(a\,u)\cot(a\,u)}{a\,(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}(a\,u)\,\mathrm{d}u$

Identidades Trigonométricas

1. $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
2. $1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$
3. $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$
4. $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2\,x)}{2}$
5. $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2\,x)}{2}$
6. $\sin(2x) = 2\sin(x)\,\cos(x)$
7. $2\,\sin(x)\,\cos(y) = \sin(x-y) + \sin(x+y)$
8. $2\,\sin(x)\,\sin(y) = \cos(x-y) - \cos(x+y)$
9. $\cos(x)\,\cos(y) = \cos(x-y) + \cos(x+1)$
10. $1 \pm \sin(x) = 1 \pm \cos(\pi/2 - x)$

Tabela de Derivadas

1. $(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$
2. $(u\,v)' = u'\,v + v'\,u$
3. $(u/v)' = \frac{u'\,v - v'\,u}{v^2}$
4. $(a^u)' = a^u\,\ln(a)\,u' \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(a > 0, a \neq 1)$
5. $(e^u)' = e^u\,u'$
6. $\log_a'(u) = \frac{u'}{u}\,\log_a(e)$
7. $\ln'(u) = \frac{1}{u}\,u'$
8. $(u^v)' = v\,u^{v-1}\,u' + u^v\,\ln(u)\,v'$
9. $\sin'(u) = \quad u'\,\cos(u)$
10. $\cos'(u) = -u'\,\sin(u)$
11. $\tan'(u) = \quad u'\,\sec^2(u)$
12. $\cot'(u) = -u'\,\csc^2(u)$
13. $\sec'(u) = \quad u'\,\sec(u)\,\tan(u)$
14. $\csc'(u) = -u'\,\csc(u)\,\cot(u)$
15. $\arcsin'(u) = \quad u'/\sqrt{1-u^2}$
16. $\arccos'(u) = -u'/\sqrt{1-u^2}$
17. $\arctan'(u) = \quad u'/\sqrt{1+u^2}$
18. $\mathrm{arccot}'(u) = -u'/\sqrt{1+u^2}$
19. $\mathrm{arcsec}'(u) = \quad u'/(|u|\,\sqrt{u^2-1}) \;.\;.\;. \;(|u| > 1)$
20. $\mathrm{arccsc}'(u) = -u'/(|u|\,\sqrt{u^2-1}) \;.\;.\;. \;(|u| > 1)$

Tabela de Integrais

1. $\int \mathrm{d}u = u + c$
2. $\int u^n \mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(n \neq -1)$
3. $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + c$
4. $\int a^u \mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln a} + c, a > 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(a \neq 1)$
5. $\int e^u \mathrm{d}u = e^u + c$
6. $\int \sin(u)\,\mathrm{d}u = -\cos u + c$
7. $\int \cos(u)\,\mathrm{d}u = \quad \sin u + c$
8. $\int \tan(u)\,\mathrm{d}u = \ln|\sec(u)| + c$
9. $\int \cot(u)\,\mathrm{d}u = \ln|\sin(u)| + c$
10. $\int \sec(u)\,\mathrm{d}u = \ln|\sec(u) + \tan(u)| + c$
11. $\int \csc(u)\,\mathrm{d}u = \ln|\csc(u) - \cot(u)| + c$
12. $\int \sec(u)\,\tan(u)\,\mathrm{d}u = \quad \sec(u) + c$
13. $\int \csc(u)\,\cot(u)\,\mathrm{d}u = -\csc(u) + c$
14. $\int \sec^2(u)\,\mathrm{d}u = \quad \tan(u) + c$
15. $\int \csc^2(u)\,\mathrm{d}u = -\cot(u) + c$
16. $\int \mathrm{d}u/(u^2 + a^2) = \arctan(u/a)/a + c$
17. $\int \mathrm{d}u/(u^2 - a^2) = \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|/2\,a + c \quad (u^2 > a^2)$
18. $\int \mathrm{d}u/\sqrt{u^2 + a^2} = \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + c$
19. $\int \mathrm{d}u/\sqrt{u^2 - a^2} = \arcsin(u/a) + c \quad (u^2 < a^2)$
20. $\int \mathrm{d}u/\sqrt{a^2 - u^2} = \arcsin(u/a) + c \quad (u^2 < a^2)$
21. $\int \mathrm{d}u/\left(u\,\sqrt{a^2 - u^2}\right) = \mathrm{arcsec}\,|u/a|/a + c$

I | 15/03 - Conceitos Básicos I

1 Majorante

$m \in \text{Majorante}(X) \iff$
$\iff m \in \mathbb{R} \wedge x \leq m \; \forall x \in X$

2 Minorante

$m \in \text{Minorante}(X) \iff$
$\iff m \in \mathbb{R} \wedge x \geq m \; \forall x \in X$

3 Infimo

(i) Standalone

$\text{Inf}(X) = i \iff$
$\iff i \in \mathbb{R} \wedge x \geq m \; \forall x \in X \wedge$
$\wedge \nexists y \in \mathbb{R} \backslash X : i < y < x \; \forall x \in X$

(ii) Usando Vizinhança

$\text{Inf}(X) = i \iff$
$\iff i \in \mathbb{R} \wedge x \geq i \; \forall x \in X \wedge V_\delta(i) \cap X \neq \emptyset$

4 Supremo

(i) Standalone

$\text{Sup}(X) = s \iff$
$\iff s \in \mathbb{R} \wedge x \leq s \; \forall x \in X \wedge$
$\wedge \nexists y \in \mathbb{R} \backslash X : x < y < s$

(ii) Usando Vizinhança

$\text{Sup}(X) = s \iff$
$\iff s \in \mathbb{R} \wedge x \leq s \; \forall x \in X \wedge V_\delta(s) \cap X \neq \emptyset$

5 Minimo

(i) Standalone

$\text{Min}(X) = m \iff$
$\iff m \in X \wedge m \leq y \; \forall y \in m$

(ii) Usando Minorante

$\text{Min}(X) = m \iff$
$\iff m \in X \wedge m \in \text{Minorante}(X)$

6 Maximo

(i) Standalone

$\text{Max}(X) = m \iff$
$\iff m \in X \wedge m \geq y \; \forall y \in m$

(ii) Usando Majorante

$= \text{Max}(X) = m \iff$
$\iff m \in X \wedge m \in \text{Majorante}(X)$

7 Conjunto Limitado

X é um conjunto limitado $\iff$
$\iff \{m_1 \leq x \leq m_2 \quad \forall x \in X : m_1 \in \text{Minorante}(X), \; m_2 \in \text{Majorante}(X)\}$

8 Vizinhanca

$V_\delta(x) = (x - \delta, x + \delta) \quad \delta \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$

9 Interior

(i) Standalone

$x \in \mathrm{Int}(X) \iff$
$\iff \exists\, \delta > 0 : (x-\delta, x+\delta) \subseteq X$

(ii) Usando Vizinhança

$x \in \mathrm{Int}(X) \iff$
$\iff V_\delta(x) \subseteq X$

11 Fronteira

$f \in \mathrm{Fr}(X) \iff$
$\iff V_\delta(f) \cap X \neq \emptyset \wedge V_\delta(f) \cap \mathbb{R} \backslash X \neq \emptyset$

10 Exterior

(i) Standalone

$x \in \mathrm{Ext}(X) \iff$
$\iff \exists\, \delta \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : (x-\delta, x+\delta) \cap X = \emptyset$

(ii) Usando Vizinhança

$x \in \mathrm{Ext}(X) \iff$
$\iff V_\delta(x) \cap X = \emptyset$

II | 16/03 - Conceitos Básicos II

1 Conjunto Aberto

X é um conjunto aberto $\iff$
$\iff X = \text{Int}(X)$

3 Feixe

$\bar{X} = \text{Int}(X) \cup \text{Fr}(X)$

2 Conjunto Fechado

X é um conjunto fechado $\iff$
$\iff X = \text{Int}(X) \cup \text{Fr}(X)$

4 Ponto de Acumulação

x é um ponto de acumulação de X $\iff$
$\iff V_\delta(x) \cap (X \backslash \{x\}) \neq \emptyset$

III | 19/03 - Indução por igualdade

1. Prove que algum numero pertence ao conjunto
2. Prove que o proximo pertence ao conjunto

Seja $V = \left\{ P_{(n)} \quad \forall\, n \in \text{Dominio} \right\}$
$P_{(x)} \in V;\ P_{(x+1)} \in V$

1 Exemplo

$$\boldsymbol{\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0}$$

(i) $n = 0$

$$\sum_{i=0}^{0} \frac{1}{2^i} = 1 = 2 - \frac{1}{2^0} = 2 - 1 = 1$$

(ii) $n = m + 1$

$$\sum_{i=0}^{m+1} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{m+1}} =$$
$$= 2 - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} = 2 - \frac{1}{2^{m+1}}$$

IV | 22/03 - Indução por Desigualdade

1 Exemplo 1

$$\boldsymbol{n \leq 2^{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}}$$

(i) $n = 1$

$1 \leq 2^{1-1} = 1$

(ii) $n = m + 1$

$$m + 1 \leq 2^{m-1} + 1 = \frac{2^m + 2}{2} \leq 2^{m+1-1} = 2^m \implies$$
$$\implies 2 \leq 2^{m+1} - 2^m = 2^m(2-1) = 2^m$$

2 Exemplo 2

$$\boldsymbol{n^2 \leq 2^n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \land n \geq 4}$$

(i) $n = 4$

$4^2 \leq 2^4 = 4^2$

(ii) $n = m + 1$

$$(m+1)^2 = m^2 + 2\,m + 1 \leq$$
$$\leq 2^m + 2\,m + 1 \leq 2 * 2^m = 2^{m+1} \implies$$
$$\implies 2\,m + 1 \leq 2^m;$$
$$\begin{cases} m = 4 \implies 2 * 4 + 1 = 9 \leq 2^4 = 16 \\ m = n + 1 \implies 2 * (n+1) + 1 = 2\,n + 1 + 2 \leq \\ \leq 2^n + 2 \leq 2 * 2^n = 2^{n+1} \implies 2 \leq 2^n \end{cases}$$

V | 23/03 - Sucessões

$$\boldsymbol{u_{(n)}} : \mathbb{N} \rightarrow \textbf{Imagem}$$

1 Sucessão monótona

1.1 Decrescente

$u_{(n)} \geq u_{(n+1)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

1.2 Crescente

$u_{(n)} \leq u_{(n+1)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

2 Sucessão limitada

$u_{(n)}$ é limitada $\iff$
$\iff m_1 \leq u_{(n)} \leq m_2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

3 Sucessão Convergente

$u_{(n)}$ converge para $l \in \mathbb{R} \iff$
$\iff \exists\, p \in \mathbb{N} : u_{(n)} \in V_\delta(l) \quad \forall\, n > p$

Nota:

$u_{(n)} \in V_\delta(l) \iff |u_{(n)} - l| < \delta \iff$
$\iff l - \delta < u_{(n)} < l + \delta$

3.1 Exemplo

$$\boldsymbol{u_{(n)} = 1/\sqrt{2\,n - 1};}$$
$$\boldsymbol{u_{(n)} > 0;\ \ \delta = 1/10}$$

$\iff 0 < \dfrac{1}{\sqrt{2\,n-1}} < \dfrac{1}{10} \iff$
$\iff 0 < \dfrac{1}{2\,n-1} < \dfrac{1}{100};\ 2\,n - 1 > 100 \implies$
$\implies \lfloor 101/2 \rfloor < n$

VI | 26/03 - Demonstrações para sucessões

1 Sucessão convergente $\implies$ Limitada

$u_{(n)}$ é uma sucessão convergente $\iff u_{(n)} \in V_\varepsilon(l) \quad \forall \varepsilon > 0 \iff l - \varepsilon < u_{(n)} < l + \varepsilon \iff$
$\iff \exists \{m_1, m_2\} \subset \mathbb{R} : m_1 < u_{(n)} < m_2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff u_{(n)}$ é uma sucessão limitada

2 Sucessão é monótona e limitada $\implies$ convergente

$u_{(n)}$ é uma sucessão monotona e limitada $\iff$
$\iff (u_{(n)} < u_{(n+1)} \vee u_{(n)} > u_{(n+1)}) \wedge \exists \{m_1, m_2\} \subset \mathbb{R} : m_1 < u_{(n)} < m_2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies$
$\implies \exists \, \mathrm{Sup}(u_{(n)}) \in \mathbb{R} \backslash u_{(n)} \iff u_{(n)}$ é uma sucessão convergente

VII | 29/03 - Lemas de Desigualdades

1 Lema $\lim\limits_{n\to\infty} u_{(n)} \leq \lim\limits_{n\to\infty} v_{(n)}$

$u_{(n)}$ e $v_{(n)}$ são convergentes $\wedge$
$\wedge\, u_{(n)} \leq v_{(n)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \implies$
$\implies \lim\limits_{n\to\infty} u_{(n)} \leq \lim\limits_{n\to\infty} v_{(n)}$

2 Lema das sucessões enquadradas

$\{u_{(n)}, v_{(n)}, w_{(n)}\} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\, \wedge$
$\wedge\, v_{(n)} \leq u_{(n)} \leq w_{(n)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\, \wedge$
$\wedge\, \exists\, l \in \mathbb{R} : \{v_{(n)}, w_{(n)}\} \xrightarrow{\text{converge}} l \implies$
$\implies u_{(n)} \xrightarrow{\text{converge}} l$

2.1 Exemplo: $u_{(n)} = \sin(n)/n$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n};\ \left\{\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right\} \to 0 \implies$$
$$\implies \frac{\sin(n)}{n} \to 0$$

3 Lema $u_{(n)} * v_{(n)} \to 0$

$u_{(n)}$ é limitada $\wedge\, v_{(n)} \to 0 \implies$
$\implies 0 \leq |u_{(n)} * v_{(n)}| = |u_{(n)}| * |v_{(n)}| \leq$
$\leq \text{Majorante}(u_n) * 0 = 0 \implies$
$\implies u_{(n)} * v_{(n)} \to 0$

3.1 Exemplo: $S_{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n^2}$

$$0 \leq S_{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n^2} \leq \frac{n\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0 \implies$$
$$\implies S_{(n)} \to 0$$

3.2 Exercicio: $\frac{2^n - n}{3^n + 1}$

$$0 \leq \frac{2^n - n}{3^n + 1} \leq \frac{2^n}{3^n} = (2/3)^n \to 0 \implies$$
$$\implies \frac{2^n - n}{3^n + 1} \to 0$$

4 Lema

$u_{(n)} \to l_1 \wedge v_{(n)} \to l_2 \implies$
$\implies u_{(n)} + v_{(n)} \to l_1 + l_2 \implies$
$\implies |u_{(n)} + v_{(n)} - (l_1 + l_2)| =$
$= |u_{(n)} - l_1 + v_{(n)} - l_2| \leq |u_{(n)} - l_1| + |v_{(n)} - l_2| < \varepsilon$

VIII | 30/03

1

$$
\begin{aligned}
& u_{(n)} \to l_1 \wedge v_{(n)} \to l_2 \implies \\
& \implies 0 \le |u_{(n)}\, v_{(n)} - l_1\, l_2| = \\
& = |(u_{(n)} - l_1)\, v_{(n)} + v_{(n)}\, l_1 - l_1\, l_2| = \\
& = |(u_{(n)} - l_1)\, v_{(n)} + l_1\,(v_{(n)} - l_2)| \le \\
& \le |(u_{(n)} - l_1)|\, |v_{(n)}| + |l_1|\, |(v_{(n)} - l_2)| \to 0 \implies \\
& \implies u_{(n)} * v_{(n)} \to l_1 * l_2
\end{aligned}
$$

2 Sucessão que tende para o infinito

$$
\begin{aligned}
& u_{(n)} \to \infty \iff \\
& \iff u_{(n)} > m \quad \forall\, m \in \mathbb{R} \wedge \forall\, \{n, p\} \subset \mathbb{N} : n > p
\end{aligned}
$$

3 Indeterminações

(i) $u_{(n)}\, v_{(n)} : u_{(n)} \to 0 \wedge v_{(n)} \to \infty$

(ii) $u_{(n)}/v_{(n)} : u_{(n)} \to \infty \wedge v_{(n)} \to \infty$

(iii) $u_{(n)} + v_{(n)} : u_{(n)} \to \infty \wedge v_{(n)} \to -\infty$

(iv) $(1 + 1/n)^n : n \to \infty$

4 Exercicios

(i) $u_{(n)} = \sqrt{n^2 + 2\,n} - n$

$$
\begin{aligned}
& = \frac{n^2 + 2\,n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2\,n} + n} = \frac{2}{\sqrt{1 + 2/n} + 1} \to \\
& \to \frac{2}{\sqrt{1} + 1} = 1
\end{aligned}
$$

(ii) $a_{(n)} = \frac{n + \cos(n)}{n\, \ln(n+1)}$

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} a_{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} + \lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)}{n} * \\
& * \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 + 0 * 0 = 0
\end{aligned}
$$

(iii) $b_{(n)} = \left(\frac{n^2 - 2\,n + 1}{n^2 + 2\,n + 1}\right)^n$

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} b_{(n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2\,n} = \\
& = \left(\frac{\lim_{n\to\infty} (1 - 1/n)^n}{\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n}\right)^2 = \left(\frac{e^{-1}}{e^1}\right)^2 = e^{-4}
\end{aligned}
$$

IX | 06/04 - Subsucessões

$$\boldsymbol{u \circ i_{(n)} = u_{(i_{(n)})}}$$

$$\boldsymbol{u : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \wedge i : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \wedge}$$
$$\boldsymbol{\wedge i_{(n)} < i_{(n+1)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}}$$

1 Exemplo: $u_{(n)} = (-1)^n$

(i) $i_{(n)} = 2\,n$

$u \circ i_{(n)} = (-1)^{2\,n} = 1$

(ii) $j_{(n)} = 2\,n - 1$

$u \circ j_{(n)} = (-1)^{2\,n-1} = -1$

2 Exemplo: $u_{(n)} = \sin(n\,\pi/4)$

(i) $i_{(n)} = 4\,n$

$u \circ i_{(n)} = \sin(4\,n\,\pi/4) = \sin(n\,\pi) = 0$

3 Subsusecção convergente

$u_{(n)}$ é uma sucessão convergente $\implies$
$\implies u_{(n)} \in V_\varepsilon(l) \quad \forall\,\{n, p\} \subset \mathbb{N} : n > p;$
$i_{(p)} \geq p \implies u \circ i_{(n)} \in V_\varepsilon(l)$
$\forall\,\{n, p\} \subset \mathbb{N} : n > p \implies$
$\implies u \circ i_{(n)}$ é uma sucessão convergente

4 Lema

$u \circ i_{(n)}$ é uma sucessão monotona $\implies$
$\implies u \circ i_{(n)} < u \circ i_{(m)} \quad \forall\,\{m, n\} \in \mathbb{N} : m > n$

5

"Qualquer Sucessão possui pelo menos uma subsucessão monótona"

6

"Qualquer sucessão limitada possui pelo menos uma subsucessão monótona convergente"

$u_{(n)}$ é limitada $\implies$
$\implies u \circ i_{(n)}$ é uma sucessão convergente

X | 09/04 - Limites

$$\limsup u_{(n)} = \text{Sup}\{l : l \text{ é sublimite de } u\}$$
$$\liminf u_{(n)} = \text{Inf}\{l : l \text{ é sublimite de } u\}$$

$u_{(n)} \to l \iff \limsup u_{(n)} = \liminf u_{(n)} = l$

1 Lema geral das funções enquadradas

$$\{u_{(n)}, v_{(n)}, w_{(n)}\} : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : w_{(n)} \leq u_{(n)} \leq v_{(n)} \implies$$
$$\implies \liminf w_{(n)} \leq \liminf u_{(n)} \leq \limsup u_{(n)} \leq \limsup v_{(n)}$$

1.1 Exemplo

$$u_{(n)} = \left(1 + \frac{1 + (-1)^n}{n}\right)^n$$

$1^n = 1 \leq u_{(n)} \leq \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^n \to e^2$

2 Lema

"Se $u_{(n)} \to l$ então a sucessão $s_{(n)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} u_{(n)}}{n} \to l$"

XI | 12/04 - Sucessão de Cauchy

$$\boldsymbol{u_{(n)} : |u_{(m)} - u_{(n)}| < \varepsilon \quad \forall \{m, n, p\} \in \mathbb{N} : m > p \land n > p}$$

1 Criterio suficiente para uma sucessão ser Cauchy

$|u_{(n+2)} - u_{(n+1)}| \leq \alpha |u_{(n+1)} - u_{(n)}|$
$\forall\, n \in \mathbb{N} : n > p \land \alpha \in (0,1) \implies$
$\implies u_{(n)}$ é Cauchy

1.1 Exemplo

$$u_{(n)} = \begin{cases} 0 & n = 1 \\ (2/3)\, u_{(n-1)} + 1 & n > 1 \end{cases}$$

$|u_{(n+2)} - u_{(n+1)}| =$
$= |(2/3)\, u_{(n+1)} + 1 - (2/3)\, u_{(n)} - 1| =$
$= (2/3)\, |u_{n+1} - u_{(n)}|$
$\therefore u_{(n)}$ é Cauchy

2 Convergencia

$$u_n \begin{cases} 0 & n = 1 \\ u_{(n-1)}\, 2/3 + 1 & n > 1 \end{cases}$$

$u_n \to l;\ u_n\, 2/3 + 1 \to l\, 2/3 + 1 \quad \therefore l = l\, 2/3 + 1 \implies$
$\implies l = 3$

XII | 13/04 - Sucessões de Cauchy II

1

$$\boldsymbol{u_n = 1/2^n}$$

$$|u_m - u_n| = \left| u_m + \sum_{k=n+1}^{m-1} (-u_k + u_k) - u_n \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=n}^{m-1} u_{k+1} - u_k \right| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |u_{k+1} - u_k|$$

2

$$\boldsymbol{u_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 1 + 1/u_{n-1} & n > 1 \end{cases}}$$

$$1 \leq u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies 1 \leq u_{n+1} \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies$$

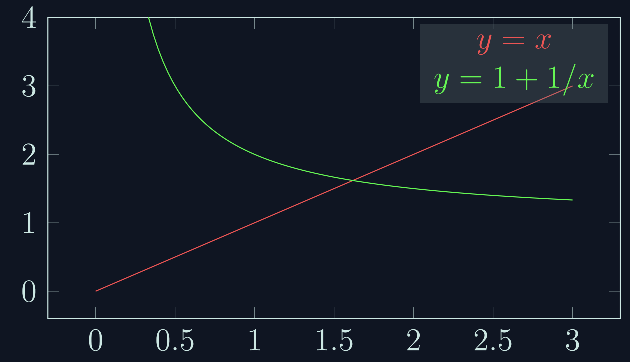
$$\implies 2 \geq 1 + 1/u_n \geq 3/2 \geq 1$$

2.1 Limite

$$u_{n+1} = 1 + 1/u_n \implies l = 1 + 1/l \implies$$

$$\implies l^2 - l - 1 = 0 \implies l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

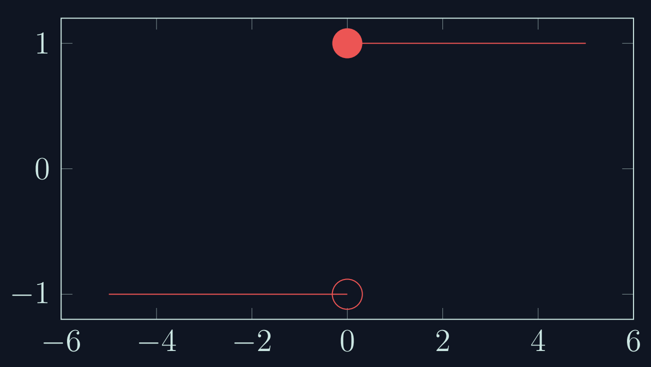
2.2 Visualização gráfica do limite



XIII | 16/04

1

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



2 Definição derivada

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(i) f não é obrigada a estar definida em $x = a$

(ii) (x_n) é uma sucessão que aproxima de a por valores diferentes de a

3 Existencia de limite

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) \iff$$

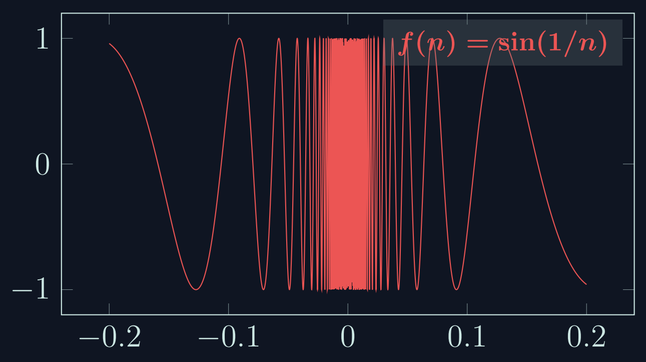
$$\iff \begin{cases} \exists \lim_{x \to a^-} f(x) \\ \exists \lim_{x \to a^+} f(x) \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) \end{cases}$$

4 Exemplo

$$g(a) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\exists \lim_{x \to 0} g(x) \iff \lim_{x \to 0^-} g(x) = 0; \ \lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$$

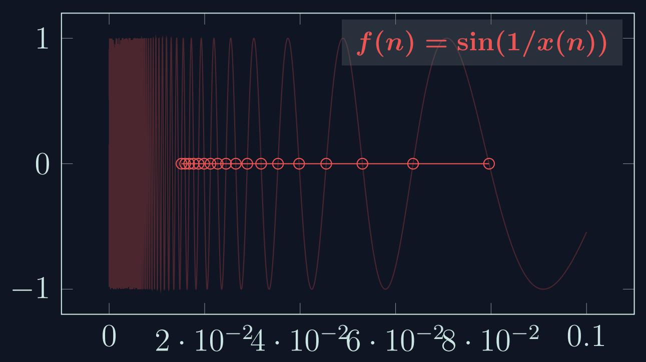
5 Exemplo



5.1 Usando sucessões para encontrar limites

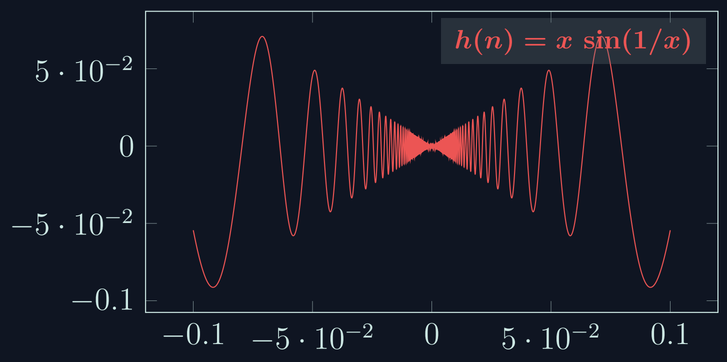
$$x(n) = 1/(n\,\pi) \quad n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$$

$$f(x(n)) = \sin\left(\frac{1}{1/(n\,\pi)}\right) = \sin(n\,\pi) \quad n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$$



6

$h(x) = x \sin(1/x) \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$



$$h(x) = x \sin(1/x) = \frac{\sin(1/x)}{1/x}$$

XIV | 19/04 - Limites

$$\boldsymbol{f : \mathrm{D} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f \text{ está definida em } V_\delta(a) \backslash \{a\}}$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \in \mathbb{R} \iff \lim f(x(n)) = L \quad \forall\, x(n) : x(n) \to a$$

1 Limite notável: $\sin(x)/x$

graph missing

area triangulo menor $= x/2 <$

$< $ area triangulo maior $= \tan(x)/2 \implies$

$\implies x < \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \implies \cos(x) < \dfrac{\sin(x)}{x} < 1 \implies$

$\implies \lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1 < \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} < \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$

$\therefore \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

1.1 Exemplo

$$\lim_{x \to 0} \sin(x^2)/x^2$$

$= 1$

1.2 Exemplo

$$\lim_{x \to 0} \sin(x^2)/x$$

$= \lim\limits_{x \to 0} x \left(\dfrac{\sin(x^2)}{x^2}\right) = 0$

1.3 Exemplo

$$\lim_{x \to 0} \sin(2\,x)/x$$

$= \lim\limits_{x \to 0} 2 \left(\dfrac{\sin(2\,x)}{2\,x}\right) = 2$

1.4 Exemplo

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2(x)}{x\,(1 + \cos(x))} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1 + \cos(x)} \dfrac{\sin^2(x)}{x^2} = 0$

2 Limite notável: $(e^x - 1)/x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) - 1}{x} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{(n-1)}}{n!} = \lim\limits_{x \to 0} 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^{(n-1)}}{n!} = 1$

XV | 20/04 - Funções continuas

1

$$f : \mathbf{I} \to \mathbb{R} \quad a \in \operatorname{int}(\mathbf{I})$$

$$f \text{ é continua em } x = a \iff \exists \lim_{x\to a} f(x) = L \land f(a) = L$$

2 Continuidade

$$f \text{ é continua em } x = a$$

$$\iff \exists \lim_{x\to a^+} = L^+ \land \exists \lim_{x\to a^-} = L^- \land L^+ = L^- = f(a)$$

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \land \nexists f(a)$$

$$\overline{f} = \begin{cases} f(x) & x \neq a \\ L & x = a \end{cases}$$

2.1 Exemplo

$$h(x) = \sin(x)/x$$

$$\overline{h} = \begin{cases} \sin(x)/x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

2.2 Exemplo

$$g(x) = e^{-1/|x|}$$

$$\overline{g} = \begin{cases} e^{-1/|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

3 Continuidade segundo Cauchy

$$f : \mathbf{I} \to \mathbb{R} \land a \in \operatorname{int}(\mathbf{I})$$

$$\therefore f \text{ é continua em } x = a \text{ segundo Cauchy} \iff$$
$$\iff \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 : |f(a) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall |x - a| < \delta$$

XVI | 23/04 - Continuidade: Teoremas

$$f \text{ é continua em } [a,b]$$

$$\Longleftarrow \; f \text{ é continua em } x \in (a,b) \wedge \\ \wedge \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) \wedge \lim_{x\to b^+} f(x) = f(b)$$

1 Teorema de Bolzano

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \wedge f \text{ é continua em } [a,b] \\ : f(a) < f(b) \quad \forall k : f(a) < k < f(b) \\ \Longrightarrow \exists c \in (a,b) : f(c) = k$$

2 Teorema de Weierstrass

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \wedge f \text{ é continua em } [a,b] \\ \therefore \exists \{x_{\max}, x_{\min}\} \subset [a,b] : \\ : f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$$

3 Corolário de Bolzano e Weierstrass

$$f : [a,b] \to \mathbb{R} \wedge f \text{ é continua em } [a,b] \\ \therefore f([a,b]) = [x_{\max}, x_{\min}]$$

3.1 Exemplo Aplicação

$$e^{-x} = x$$

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}; \quad f(x) = e^{-x} - x \Longrightarrow \\ \Longrightarrow f(0) = 1; \; f(1) = 1/e - 1 < 0 \\ \therefore \exists c \in [0,1] : e^{-c} = c$$

3.2 Exemplo Aplicação

$$g : [0,\pi] \to \mathbb{R}; \quad g(x) = x \sin(x)$$

$$g(0) = g(\pi) = 0 \therefore \exists x_{\max} \geq 0$$

XVII | 26/04 - Funções Inversas

$$f : \mathrm{I} \to \mathrm{J} \land \mathrm{I}, \mathrm{J} \subset \mathbb{R} \land f \text{ é injetiva e subjetiva (bijetiva)}$$

$$f^{-1} : \mathrm{J} \to \mathrm{I} \quad \begin{cases} f^{-1} \circ f(x) = x & \forall\, x \in \mathrm{I} \\ f \circ f^{-1}(y) = y & \forall\, y \in \mathrm{J} \end{cases}$$

1 Exemplo

$$\begin{aligned} f \quad &: [0, +\infty] \to [0, +\infty] \quad f(x) &= x^2 \\ f^{-1} &: [0, +\infty] \to [0, +\infty] \quad f^{-1}(x) &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

2 Exemplo

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = 2x + 1$$

(i) f é injetiva?

$\Longleftarrow$ f é estritamente monotona

(ii) Contradomínio de f

$= [1, 3]$

(iii) f^{-1}

$$f^{-1} : [1, 3] \to [0, 1] \quad f^{-1}(y) = \frac{y - 1}{2}$$

3 Exemplo

$$\begin{aligned} \sin &: [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1] \\ \arcsin &: [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2] \end{aligned}$$

4 Exemplo

$$\begin{aligned} \tan &: [-\pi/2, \pi/2] \to [-\infty, \infty] \\ \arctan &: [-\infty, \infty] \to [-\pi/2, \pi/2] \end{aligned}$$

XVIII | 27/04 - Derivadas

1 Definição

$$f : \mathrm{I} \to \mathbb{R} \wedge a \in \mathrm{int}(\mathrm{I})$$

$$D \in \mathbb{R} : D = f'(a) = \frac{\mathrm{d}f(a)}{\mathrm{d}x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2 Definição Alternativa

$$\begin{aligned} \exists\, f'(a) \iff \exists\, \mathrm{D} \in \mathbb{R}, \\ Z : V_\delta(0) \to \mathbb{R} : \\ f(x) = f(a) + D\,(x-a) + \\ +(x-a)\,Z(x-a) \end{aligned}$$

3 Definição derivada para funções de imagens abertas

$$f : \mathrm{I} \to \mathbb{R} \wedge \mathrm{I} \neq \bar{\mathrm{I}}$$

$$f' : \mathrm{I} \to \mathbb{R} \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\, f(h)}{h}$$

XIX | 30/04 - Regras de Derivação

1 Derivação da Soma

$$\boldsymbol{(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)}$$

$$(f+g)'(a) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) =$$
$$= f'(a) + g'(a)$$

2 Derivação do Produto

$$\boldsymbol{(f\,g)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)}$$

$$(f\,g)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)\,g(x) - f(a)\,g(a)}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{(f(x)-f(a))\ g(x) + f(a)\,(g(x)-g(a))}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a}\left(g(x)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right) =$$
$$= g(x)\,f'(x) + f(x)\,g'(x)$$

3 Derivada da Divisão

3.1 Previa

$$\boldsymbol{(1/f(x))' = -f'(a)/f^2(a)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{1/f(x) - 1/f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(a)-f(x)}{(x-a)\,f(x)\,f(a)} =$$
$$= -f'(a)/f^2(a)$$

4 Derivada de Conjugada

$$\boldsymbol{(f\circ u)'(a) = f'(u(a))\,u'(a)}$$

$$(f\circ u)'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(u(x)) - f(u(a))}{x-a} =$$
$$= \lim_{x\to a} \frac{f(u(x)) - f(u(a))}{u(x)-u(a)}\,\frac{u(x)-u(a)}{x-a} = f'(u(a))\,u'(a)$$

4.1 Exemplo

$$\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)}\,u'(x) \qquad \left(e^{x^3}\right)' = e^{x^3}\,3\,x^2$$

4.2 Exemplo

Nota: $(\ln)'(u) = u'/u$

$$(\ln'(1/\cos(x))) = \frac{-\sin(x)/x^2}{\cos(x)} = \frac{1}{\tan(x)\,x^2}$$

5 Tecnica de encontrar derivações

5.1 $\ln'(x) = 1/x$

$$\left(e^{\ln(x)}\right)' = (x)' \implies e^{\ln(x)}\ \ln'(x) = x\ \ln'(x) = 1 \implies$$
$$\implies (\ln)'(x) = 1/x$$

5.2 $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$

$$(\tan(\arctan(x)))' = (x)' \implies$$
$$\implies \tan'(\arctan(x))\ \arctan'(x) =$$
$$= \left(1+\tan^2(\arctan(x))\right)\ \arctan'(x) =$$
$$= \left(1+x^2\right)\ \arctan'(x) = 1 \implies$$
$$\implies \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

5.3 $\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$

$$(\sin(\arcsin(x)))' = (x)' \implies \cos(\arcsin(x))\ \arcsin'(x) =$$
$$= \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}\ \arcsin'(x) =$$
$$= \sqrt{1-x^2}\ \arcsin'(x) = 1 \implies \arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$$

XX | 03/05 - Teoremas da diferenciabilidade

1 Teorema de Rolle

$$f\begin{cases} f:[a,b]\to\mathbb{R}\,\wedge \\ f \text{ é continua em } [a,b]\,\wedge \\ \exists\, f'(x) \quad \forall\, x\in(a,b)\,\wedge \\ f(a)=f(b)\end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{array}{l}\exists\, c\in[a,b]: f'(c)=0\,\wedge \\ \max(f),\min(f)\subset f(c)\end{array}$$

$$\min(f)=x_0\in(a,b): \\ f(x_0)\le f(x)\quad\forall\, x\in(a,b)$$

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0;\ \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$$
$\therefore f'(x_0)=0$

2 Teorema de Lagrange

$$f\begin{cases} f:[a,b]\to\mathbb{R} \\ f \text{ é continua em } [a,b] \\ \exists\, f'(x)\ \forall\, x\in(a,b)\end{cases}$$

$$\therefore \exists\, c\in(a,b): f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \\ f(b)=f(a)+f'(c)\,(b-a)$$

2.1 Corolário

$$f\begin{cases} f:[a,b]\to\mathbb{R}\,\wedge \\ f \text{ é continua em } [a,b]\,\wedge \\ \exists\, f'(x) \quad \forall\, x\in(a,b)\,\wedge \\ f'(x)>0 \quad \forall\, x\in(a,b)\end{cases}$$
$\therefore f$ é estritamente crescente em (a,b)

$$\{x,y\}\in(a,b): f(x)<f(y)\implies \\ \implies f(y)=f(x)+f'(c)\,(y-x)$$

2.2 Ideia de Demonstração do teorema de Lagrange

Nota: REVER

$$h(x)=(b-a)\,f(x)-(f(b)-f(a))(x-a)$$

$$\begin{cases} h(a)=(b-a)\,f(a) \\ h(b)=(b-a)\,f(b)-(f(b)-f(a))(b-a)\end{cases}$$
$$\implies (b-a)\,f(a)=(b-a)\,f(b)-(f(b)-f(a))(b-a)\implies \\ \implies f(a)=f(b)-(f(b)-f(a))(b-a)$$

XXI | 15/06 - Exercícios para o Teste

Q0 - a)

$$\boldsymbol{\int_{\varepsilon^3}^{8\,\pi^3} \frac{\cos(\sqrt[3]{x})}{3\,\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon}^{2\,\pi} t\,\cos(t)\,\mathrm{d}t}$$

$$\boldsymbol{(x = t^3)}$$

$$\int_{\varepsilon^3}^{8\,\pi^3} \frac{\cos(\sqrt[3]{x})}{3\,\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x = \int_{\sqrt[3]{\varepsilon^3}}^{\sqrt[3]{8\,\pi^3}} \frac{\cos\left(\sqrt[3]{t^3}\right)}{3\,\sqrt[3]{t^3}}\mathrm{d}\left(t^3\right) =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{2\,\pi} \frac{\cos(t)}{3\,t} 3\,t^2\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{2\,\pi} t\,\cos(t)\mathrm{d}t$$