Análise Matemática II C **26 de Abril de 2023 - Teste 1 - Versão A (2h)**

1. Seja $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2,\ y \leq -1\}$ e r, θ as coordenadas polares. Tem-se:

   A. $\mathcal{D} = \left\{(x, y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) : \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4},\ -\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta} \leq r \leq \sqrt{2}\right\}$.
   B. $\mathcal{D} = \left\{(x, y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) : \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4},\ \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta} \leq r \leq \sqrt{2}\right\}$.
   C. $\mathcal{D} = \left\{(x, y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) : \frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4},\ -\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta} \leq r \leq \sqrt{2}\right\}$.
   D. $\mathcal{D} = \left\{(x, y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) : \frac{5\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{7\pi}{4},\ \frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta} \leq r \leq \sqrt{2}\right\}$.
   E. Nenhum dos casos anteriores.

2. O plano tangente ao gráfico da função $f(x, y) = e^{-y^2} + \mathrm{sen}\,(2x - y)$ no ponto $(0, 0, 1)$ é:
   A. $2x - y - z = 0$, B. $y + z = 1$, C. $-2x + y - z = 1$,
   D. $2x - y - z = 1$, E. Nenhum dos casos anteriores.

3. Considere a função $f(x, y) = \frac{y^2}{1-x^2}$. A curva de nível de valor -4 de f é:

   A. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1), (0, -1)\} : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\right\}$.
   B. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1), (0, -1)\} : x^2 - \frac{y^2}{4} = 1\right\}$.
   C. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\} : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1\right\}$.
   D. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\} : x^2 - \frac{y^2}{4} = 1\right\}$.
   E. $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$.

4. Seja $T(\rho, \theta, \phi) = (\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi, \rho\cos\phi)$, onde ρ, θ, ϕ são as coordenadas esféricas. A região do espaço limitada pelas superfícies

$$z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}, \qquad z^2 = 3(x^2 + y^2) \qquad \text{é:}$$

   A. $\left\{(x, y, z) = T(\rho, \theta, \phi) : \rho \in [0, \sqrt{3}], \theta \in [0, 2\pi], \phi \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]\right\}$.
   B. $\left\{(x, y, z) = T(\rho, \theta, \phi) : \rho \in [0, \sqrt{3}], \theta \in [0, 2\pi], \phi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right\}$.
   C. $\left\{(x, y, z) = T(\rho, \theta, \phi) : \rho \in [0, \sqrt{3}], \theta \in [0, 2\pi], \phi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]\right\}$.
   D. $\left\{(x, y, z) = T(\rho, \theta, \phi) : \rho \in [0, \sqrt{3}], \theta \in [0, \pi], \phi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]\right\}$.
   E. Nenhum dos casos anteriores.

5. Seja C a curva em $\mathbb{R}^3$ definida pelas equações: $z = 8 - 4x^2 - y^2$, $z = 4$. Tem-se:

   A. $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, 0\right)$ é um vetor tangente à curva no ponto $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 4\right)$.

   B. $\vec{v} = \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ é um vetor tangente à curva no ponto $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 4\right)$.

   C. $\vec{r}(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t, 4)$, $t \in [0, 2\pi]$, é uma parametrização regular de C.

   D. $\vec{r}(t) = (4t^2, t^2, 8 - 4t^2 - t^2)$, $t \in [0, 4]$, é uma parametrização regular de C.

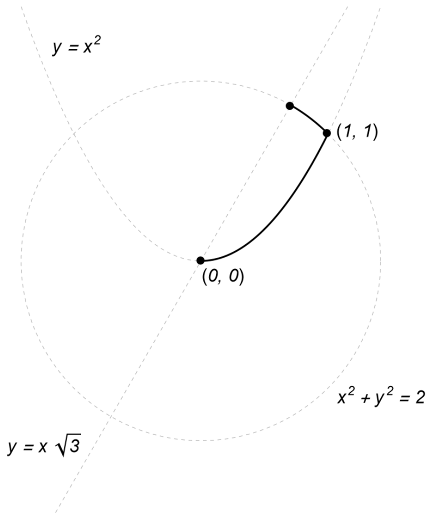
   E. Nenhum dos casos anteriores.

6. Seja $\mathcal{C}$ a curva indicada na figura abaixo. O comprimento da curva $\mathcal{C}$ é:

   A. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{4\pi}{3}} \sqrt{2}\, dt$, B. $\displaystyle\int_{-1}^0 \sqrt{1+4t^2}\, dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2}\, dt$,

   C. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^4}\, dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2}\, dt$, D. $\displaystyle\int_{-1}^0 \sqrt{1+4t^2}\, dt + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{4\pi}{3}} \sqrt{2}\, dt$,

   E. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2}\, dt$.



7. Considere
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^2-y^2-2x^4}{x^2+y^2}.$$
Tem-se:

A. O limite não existe, B. O limite existe e é igual a -1,
C. O limite existe e é igual a -2, D. O limite existe e é igual a 1,
E. Nenhum dos casos anteriores.

8. A equação do plano tangente à superfície definida pela equação
$$y^3+(x+1)e^z = 2-x^3$$
no ponto $(1,-1,0)$ é:

A. $-4x+3y+2z=-1$, B. $4x-3y-2z=1$, C. $-4x-3y+2z=-1$,
D. $4x+3y+2z=1$, E. $-4x-3y-2z=1$.

9. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-y^5}{x^2+2y^4}, & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{se} \quad (x,y)=(0,0), \end{cases}$$
e $\vec{u}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$. Sabendo que $\nabla f(0,0)=\left(1,-\frac{1}{2}\right)$, tem-se.

A. $D_{\vec{u}}f(0,0)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ e f não é diferenciável em $(0,0)$.
B. $D_{\vec{u}}f(0,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ e f é diferenciável em $(0,0)$.
C. $D_{\vec{u}}f(0,0)$ não existe e f não é diferenciável em $(0,0)$.
D. $D_{\vec{u}}f(0,0)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ e f é diferenciável em $(0,0)$.
E. $D_{\vec{u}}f(0,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ e f não é diferenciável em $(0,0)$.

10. Considere a função
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{5x^3+3y^4}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$
Tem-se:

A. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=0,$
B. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=5, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=6,$
C. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=5, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=0,$
D. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=5, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)=3,$
E. Nenhum dos casos anteriores.

11. Seja $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ tal que $\nabla g\,(1,0) = (2,1)$. Considere a função
$$H(x,y) = g\left(x + y^2, x\log(y^4+1)\right).$$
Tem-se:

A. $\frac{\partial H}{\partial x}(0,1) = 4 + \log(2)$, B. $\frac{\partial H}{\partial x}(0,1) = 2 + \log(2)$, C. $\frac{\partial H}{\partial x}(0,1) = 4$,

D. $\frac{\partial H}{\partial x}(0,1) = 0$, E. Nenhum dos casos anteriores.

12. Seja $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 com $\nabla f(1,2) = (1,7)$ e matriz Hessiana no ponto $(1,2)$ dada por $H_f(1,2) = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$. Considerando $h(s,t) = f(t - s^2, t)$, tem-se:

A. $\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}(1,2) = 10$, B. $\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}(1,2) = 5$, C. $\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}(1,2) = 12$,

D. $\frac{\partial^2 h}{\partial s^2}(1,2) = 2$, E. Nenhum dos casos anteriores.

13. Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}$. Considere $g(x,y) = \varphi(2x^2 - y^4)$. Para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tem-se:
A. $3y\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + 2x^2\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$, B. $2y\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + 3x^2\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$,
C. $x^3\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$, D. $y^3\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) + x\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$,
E. $y^2\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) - x^2\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0$.

14. Seja $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ tal que $\nabla g(1,2,1) = (2,1,1)$. Seja $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $f(0,1) = (1,2,1)$ e cuja matriz Jacobiana num ponto arbitrário (s,t) é
$$Jf(s,t) = \begin{bmatrix} s & t \\ 2 & 2t \\ 3s & 3t \end{bmatrix}.$$
A matriz Jacobiana da função $h = g \circ f$ no ponto $(0,1)$ é:

A. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$, B. $\begin{bmatrix} 2 & 7 \end{bmatrix}$, C. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, D. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

E. Nenhum dos casos anteriores.

15. Considere a função $F(x,y,z) = \dfrac{y}{z} - \dfrac{3x}{y} - \dfrac{2z}{x}$ e o ponto $P = (1,-1,1)$. Sabendo que a equação $F(x,y,z) = 0$ define implicitamente z como função de x e y ($z = z(x,y)$) numa vizinhança do ponto $(1,-1,1)$, tem-se:
A. $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = 5$, B. $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = -5$, C. $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = 4$,

D. $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-1) = -4$, E. Nenhum dos casos anteriores.

16. Considere a função $f(x,y,z) = f(x,y) = xy + y^3 + x^2$. Escolha a afirmação correta.

A. A função f admite um ponto de sela em $(0,0)$ e tem um máximo local em $\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$.
B. A função f admite um ponto de sela em $(0,0)$ e tem um mínimo local em $\left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$.
C. A função f admite um ponto de sela em $(0,0)$ e tem um mínimo local em $\left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right)$.
D. A função f não tem pontos de sela mas tem um mínimo local em $\left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{6}\right)$.
E. A função f admite um ponto de sela em $(0,0)$ e tem um máximo local em $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right)$.