**Análise Matemática II C**
2022/23 (2º semestre)

# Lista 5 - Limites, continuidade e cálculo diferencial

1. Usando a definição de limite de uma função num ponto, mostre que:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^3}{x^2+y^2} = 0;$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-4xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

2. Estude a existência dos seguintes limites:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-3}{x^2+y^2+1};$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^6}{x^2+y^6};$

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6};$

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^2+3y^2+x^3y^3}{x^2+y^2+x^4+y^4};$

   (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\log\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)};$

   (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \frac{(x-1)(y+2)+(x-1)^2}{\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}};$

   (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{e^x(x-1)y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}.$

3. Estude as seguintes funções quanto à continuidade:

   (a)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{(x-2)^3}{(x-2)^2 + (y-1)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (2,1), \\ 1, & \text{se } (x,y) = (2,1); \end{cases}$$

(c)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - x^3 + 3y^2 - y^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 3, & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

(d)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\, y^2}{x^2\, y^2 + (x-y)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

4. Considere a função $f(x,y) = \mathrm{e}^x \mathrm{sen}(y) + \cos(x - 3y)$.

   (a) Calcule as derivadas parciais de $1^{\underline{a}}$ ordem de $f$.

   (b) Escreva a equação do plano tangente ao gráfico de $f$ no ponto $\big(1, 0, f(1,0)\big)$.

   (c) Determine o campo vetorial gradiente num ponto genérico $(x.y)$.

   (d) Considere $\vec{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Determine a derivada direcional $D_{\vec{v}} f(1,0)$.

5. Considere a função, real de duas variáveis, definida por

$$f(x,y) = \mathrm{sen}\, x \cos y.$$

   Determine $D_{\vec{w}} f(x,y)$, onde $\vec{w} = (u,v) \in \mathbb{R}^2$ designa um vetor genérico de norma 1. Justifique a resposta.

6. Considere as seguintes funções definidas em $\mathbb{R}^2$ :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y^2 \cos(2x^2 + \pi)}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Verifique que as funções $f$ e $g$ são contínuas no ponto $(0,0)$.

(b) Estude a existência das derivadas parciais de primeira ordem no ponto $(0,0)$.

7. Considere a seguinte função definida em $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (1,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

   (a) Estude $f$ quanto à continuidade no ponto $(1,0)$.

   (b) Considere o vetor $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e estude a existência da derivada direcional $D_{\vec{u}}f(1,0)$.

8. Considere a seguinte função definida em $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Estude $f$ quanto à continuidade no ponto $(0,0)$.

   (b) Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   (c) Considere o vetor $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ e estude a existência da derivada direcional $D_{\vec{u}}f(0,0)$. Será $f$ diferenciável no ponto $(0,0)$? Justifique a resposta.

9. Considere a função definida em $\mathbb{R}^2$ pela expressão

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{se } xy > 0, \\ 0, & \text{se } xy \leq 0. \end{cases}$$

   (a) Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   (b) Considere o vetor $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e determine a derivada direcional $D_{\vec{u}}f(0,0)$. Que pode concluir quanto à diferenciabilidade no ponto $(0,0)$? Justifique a resposta.

10. Sendo $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, considere a função $\varphi$, definida em $\mathbb{R} \backslash \{0\}$ pela expressão $\varphi(x) = \|x\|^{2-n}$

   (a) Justifique que $\varphi$ é diferenciável em todos os pontos do seu domínio.

   (b) Determine as derivadas parciais de $\varphi$ no ponto $(1,0,\ldots,0)$ e a derivada de $\varphi$ no mesmo ponto segundo um vetor arbitrário $\vec{v}$ de norma 1.

(c) Verifique que em qualquer ponto do domínio de $\varphi$ se tem

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} = 0.$$

11. Considere a função $T(\rho, \theta, \varphi) = (x, y, z)$, onde $x = \rho \sin\varphi \cos\theta$, $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$, $z = \rho \cos\varphi$.

    (a) Determine a matriz Jacobiana da função $T$ no ponto $(2, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$.

    (b) Calcule o determinante da matriz determinada na alínea anterior.

12. Sejam $(x, y, z)$ as coordenadas cartesianas no espaço e $(r, \theta, z)$ as coordenadas cilíndricas. Considere a função $g(r, \theta, z) = (x, y, z)$.

    (a) Determine a matriz Jacobiana da função $g$ num ponto genérico $(r, \theta, z)$, e o seu determinante.

    (b) Considere a função $u = f(x, y, z)$. Sabendo que $f_x\big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\big) = 1$ e $f_y\big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\big) = 2$ determine $\frac{\partial u}{\partial r}$ e $\frac{\partial u}{\partial \theta}$ no ponto $\big(1, \frac{\pi}{4}, 0\big)$.

    (c) Considere a função $u$ definida na alínea anterior. Escreva $\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ em função das derivadas parciais de $f$ em ordem às variáveis $x$ ,$y$ e $z$.

13. Sendo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferencivel e $z = \frac{y^2}{2} + \varphi\big(\frac{1}{x} + \log y\big)$, mostre que

$$y\frac{\partial z}{\partial y} + x^2 \frac{\partial z}{\partial x} = y^2.$$

14. Sejam $f$ e $g$ funções de classe $C^2(\mathbb{R})$. Prove que a a função $u$ definida por $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ verifica a equação de propagação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

15. Sejam $x = u + v$, $y = u\,\mathrm{sen} v$ e $z = v$. Seja $w = f(x, y, z)$. Calcule

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial w}{\partial v}$$

num ponto $(u, v)$ em função das derivadas parciais de $f$.

16. Seja $u(x,y)$ uma função tal que $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^{x^3}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 3y$. Considere a função definida por

$$\varphi(r,\theta) = u\big(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta + r\big),\ \forall (r,\theta) \in \mathbb{R}^2.$$

 (a) Determine $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r,\theta)$.

 (b) Calcule $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta}(2, \dfrac{\pi}{3})$.

17. Seja $f$ uma função diferenciável no ponto $(3,4)$ com

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,4) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(3,4) = -1.$$

Se $f(3,4) = 5$, estime o valor de $f(3.01, 3.98)$.

18. Justificando, utilize uma aproximação à 1ª ordem para obter uma aproximação de $f(x_0, y_0)$ para cada uma das seguintes funções:

 (a) $f(x,y) = e^{-x}(xy^2+1)$, $\quad (x_0,y_0) = (0.07, 0.04)$;

 (b) $f(x,y) = e^{-xy^2} + \cos(2x-y)$, $\quad (x_0,y_0) = (0.01, 0.03)$;

 (c) $f(x,y) = ye^{x^2} + \ln\left(\dfrac{x+1}{y}\right)$, $\quad (x_0,y_0) = (0.10, 1.02)$.

19. Determine uma equação do plano tangente à superfície de equação dada, no ponto indicado.

 (a) $z = \cos(x^2+y^2)$; $\quad (0,0,1)$.

 (b) $x^2+y^2+z^2 = 1$; $\quad (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

20. Suponha que $x$ e $y$ estão relacionadas pela equação $x + \cos y = 1$. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ no ponto $x = 1$ e $y = \frac{\pi}{2}$.

21. Verifique que as seguintes equações definem localmente $y$ como função de $x$ nos pontos $P_0$ indicados a calcule a derivada dessa função.

 (a) $x^2y + 3y^3x^4 - 4 = 0$ e $P_0 = (1,1)$;

 (b) $x\cos(xy) = 0$ e $P_0 = (1, \pi/2)$.

22. (a) Mostre que a equação

$$e^z \sin(xyz) + 2z + 2xy = \pi$$

define implicitamente $z$ como função de $x$ e $y$ numa vizinhança de $(1, \frac{\pi}{2}, 0)$.

(b) Considerando $\vec{u} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, calcule $D_{\vec{u}} z(1, \frac{\pi}{2})$.

23. (a) Mostre que a equação

$$z^3 \sin(xy) + e^{xz} - y = 0$$

define implicitamente $x$ em função de $y$ e $z$ ($x = \psi(y, z)$) numa vizinhança do ponto $(0, 1, 1)$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial \psi}{\partial y}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial \psi}{\partial z}(1, 1)$.

24. (a) Mostre que a equação

$$x \ln x + y \ln y + z \ln z = 0.$$

define implicitamente $x$ em função de $y$ e $z$ ($x = \psi(y, z)$) numa vizinhança do ponto $(1, 1, 1)$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial \psi}{\partial y}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial \psi}{\partial z}(1, 1)$.

25. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função com derivadas parciais contínuas. Considere a função

$$u(x, y) = \text{sen}(xy) + \varphi\left(y\cos\big(\frac{x}{2}\big), \cos(xy)\right)$$

(a) Determine $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ em função das derivadas parciais da função $\varphi$.

(b) Supondo que $\nabla\varphi\big(\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\big) = \big(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\big)$, determine $\dfrac{\partial u}{\partial x}\big(\frac{\pi}{3}, 2\big)$.

26. Estude as seguintes funções quanto à diferenciabilidade no ponto $(0, 0)$:

(a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(b)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(c)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

27. Considere a seguinte função definida na bola aberta de centro na origem e raio $\dfrac{\pi}{2}$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}\,\mathrm{tg}(\sqrt{x^2+y^2}), & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Determine as derivadas parciais de $1^{\underline{o}}$ ordem da função $f$ no ponto $(0,0)$.

   (b) Estude a função $f$ quanto à diferenciabilidade no ponto $(0,0)$.

28. Considere uma função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $(1,0,1)$ e tal que

$$f(1,0,1) = 3\,, \qquad \nabla f\,(1,0,1) = (1,2,1)\,.$$

Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(x,y) = (e^x \sin y, xy, \frac{1}{x^2+1})\,.$$

Justifique que $H(x,y) = (f \circ g)(x,y)$ é diferenciável em $(0, \frac{\pi}{2})$ e determine uma equação do plano tangente ao gráfico de $H$ no ponto de $\mathbb{R}^3$ com coordenadas $(0, \frac{\pi}{2}, H(0, \frac{\pi}{2}))$.

29. Considere a superfície $S$ em $\mathbb{R}^3$ definida pela equação $x^2+2y^2+z^2 = 3$. Seja $C$ uma curva paramétrica regular contida em $S$ que passa no ponto $P_0 = (1,1,0)$. Mostre que o vetor $\vec{u} = (2,4,0)$ é perpendicular à recta tangente à curva no ponto $P_0$.

30. Sejam $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função definida por

$$g(x,y,z) = \big(\mathrm{sen}\sqrt{x^2+y^2},\ \frac{1}{2}z\big)$$

e $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1$ em $\mathbb{R}^2$. Considere a função $H = f \circ g$.

(a) Determine as derivadas parciais de $H$ num ponto $(x, y, z)$, em função das derivadas parciais de $f$.

(b) Sabendo que $\nabla f(1,1) = (3,-1)$ determine $\nabla H\big(\frac{\pi}{2}, 0, 2\big)$.

31. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2$. Considere a função definida por $g(x,y) = xyf(x^2+y^2)$.

    Verifique que, no domínio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy \neq 0\}$, a função $g$ satisfaz a equação

$$y\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - x\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{y^2-x^2}{xy}\, g(x,y).$$

32. Sejam $u$ uma função com derivadas parciais de $2^{\underline{a}}$ ordem contínuas tal que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ e $f(x,y) = u(x,y)\mathrm{e}^{x+y}$. Verifique que $f$ é solução da equação diferencial

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + f = 0.$$

33. Seja $u(x,y,z)$ uma função com derivadas parciais de $2^{\underline{a}}$ ordem contínuas em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

    Mostre que a função definida por $\varphi(r,\theta,z) = u(r\cos\theta, r\mathrm{sen}\theta, z)$ é solução da equação diferencial

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}.$$

34. Determine a equação do plano tangente ao cone elíptico $x^2 + 4y^2 = z^2$ no ponto $(3,2,5)$.

35. Considere o elipsóide $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{2} = 1$. Determine em que pontos o plano tangente à superfície é paralelo ao plano $y = 0$.