Física 1 – Exercicios Resoluções: Vetores

Felipe B. Pinto 61387 – MIEQB

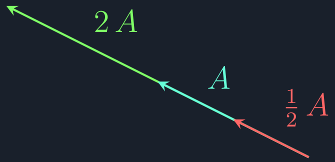
11 de junho de 2023

Conteúdo

Questão 1

Dado o vector $\vec{A}$ da figura seguinte, desenhe os vectores $\frac{1}{2}\vec{A}$ e $2\,\vec{A}$

Resposta

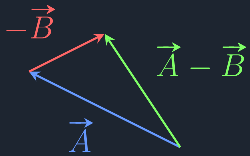


Questão 2

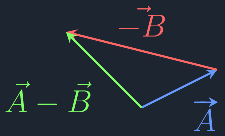
Para cada um dos pares de vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ seguintes, obtenha graficamente o vector diferença $\vec{A} - \vec{B}$

Resposta

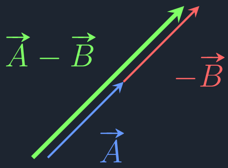
Q2 a.



Q2 b.



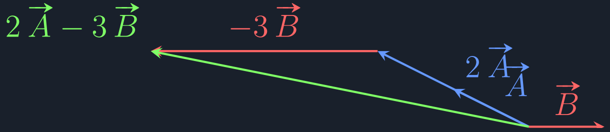
Q2 c.



Questão 3

Dados os vectores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ seguintes, obtenha graficamente o vector $\vec{C} = 2\,\vec{A} - 3\,\vec{B}$.

Resposta



Questão 4

Obtenha os valores numéricos das componentes (escalares), segundo os eixos dos x e dos y, de cada um dos vectores indicados.

Resposta

Q4 a.

$$\vec{A} = 5\ \cos(130°)\,\hat{\imath} + 5\ \sin(130°)\,\hat{\jmath} \cong -3.2\,\hat{\imath} + 3.8\,\hat{\jmath}$$

Q4 b.

$$\vec{B} = -4\ \cos(30°)\,\hat{\imath} - 4\ \sin(30°)\,\hat{\jmath} = -2\sqrt{3}\,\hat{\imath} - 2\,\hat{\jmath}$$

Q4 c.

$$\vec{C} = 5\ \cos(45°)\,\hat{\imath} - 5\ \sin(45°)\,\hat{\jmath} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\hat{\imath} - \frac{5\sqrt{2}}{2}\hat{\jmath}$$

Questão 5

Quais são as componentes, segundo os eixos dos x e dos y, do vector soma $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}$ dos três vectores referidos na questão Q4?

Resposta

$$\vec{D} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C} \cong (-3.2 - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}/2)\hat{\imath} + (3.8 - 2 - 5\sqrt{2}/2)\hat{\jmath} \cong -3.1\,\hat{\imath} - 1.7\,\hat{\jmath}$$

Questão 6

Um vector pode ter uma componente nula e módulo não nulo? Justifique.

Resposta

Sim,

$$\{\forall V \subset \mathbb{R}^n : v_i = 0; i \in \mathbb{N}\} \implies \sum_{k=1}^{n} v_k^2 \geq 0 \implies \left|\vec{V}\right| \geq 0$$

Questão 7

Um vector pode ter módulo nulo e uma componente não nula? Justifique.

Resposta

Não,

$$\{\forall V \subset \mathbb{R}^n : v_i \neq 0; i \in \mathbb{N}\} \implies \sum_{k=1}^{n} v_k^2 > 0 \implies \left|\vec{V}\right| > 0$$

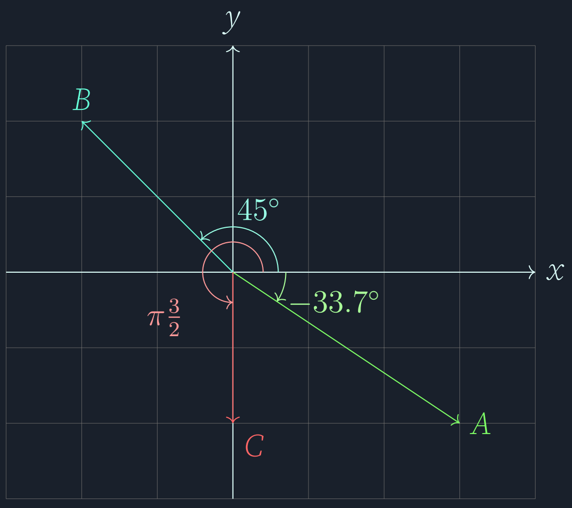
Questão 8

Para cada vector cujas componentes segundo os eixos dos x e dos y são indicadas:

- Desenhe o vector utilizando o sistema de eixos apresentado;
- Indique o ângulo θ que define a direcção e sentido do vector;
- Obtenha o módulo do vector e o valor de θ.

Q8 a. $A_x = 3, A_y = -2$
Q8 b. $B_x = -2, B_y = 2$
Q8 c. $C_x = 0, C_y = -2$

Resposta



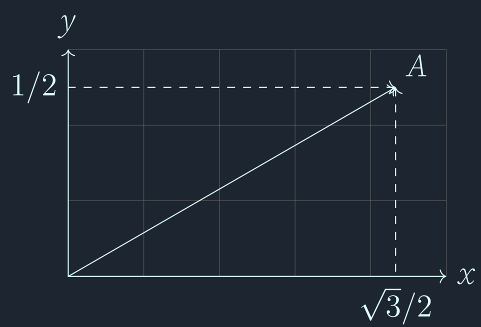
Questão 9

Dado o vector $\vec{A}(5, 30°$ (acima da horizontal)) , obtenha as componentes A_x e A_y nos três sistemas de coordenadas indicados abaixo.

Resposta

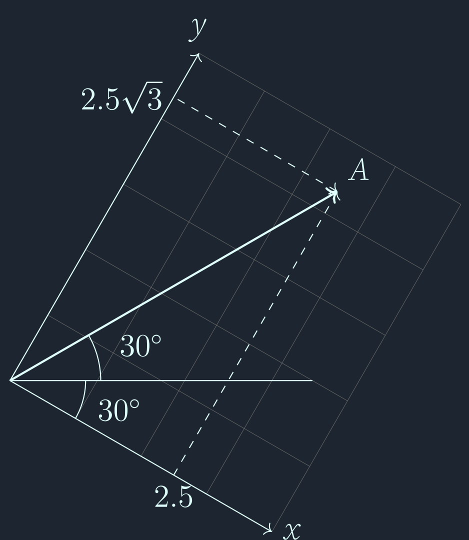
Q9 a.

$$\vec{A} = 5\,\cos(30°)\,\hat{\imath} + 5\,\sin(30°)\,\hat{\jmath} = 2.5\sqrt{3}\,\hat{\imath} + 2.5\,\hat{\jmath}$$



Q9 b.

$$\vec{A} = 5\,\cos(60°)\,\hat{\imath} + 5\,\sin(60°)\,\hat{\jmath} = 2.5\,\hat{\imath} + 2.5\sqrt{3}\,\hat{\jmath}$$



Q9 c.

$$\vec{A} = 5\,\cos(-15°)\,\hat{\imath} + 5\,\sin(-15°)\,\hat{\jmath} \cong 4.83\,\hat{\imath} - 1.29\,\hat{\jmath}$$

Grupo I

Nestes problemas, os vectores unitários que definem a direcção e sentido dos eixos coordenados x,y,z são denominados, respectivamente, por $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$.

Problema 1

Calcule:

P1 a.

O módulo do vetor $\vec{a} = \hat{\imath} + 2\,\hat{\jmath} + 2\,\hat{k}$

Resposta

$$|\vec{a}| = \sqrt{1 + 2^2 + 2^2} = 3$$

P1 b.

O vector unitário com a direcção e sentido de $\vec{a}$ (Dado um vector $\vec{a}$, o vector unitário com a direcção e sentido de $\vec{a}$, que poderemos denotar por $\hat{a}$, denomina-se versor de $\vec{a}$).

Resposta

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = 3^{-1}\,\hat{\imath} + 1.5^{-1}\,\hat{\jmath} + 1.5^{-1}\,\hat{k}$$

Problema 2

Dados os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, cujas componentes segundo os eixos coordenados x, y e z são, respectivamente

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a_x = 5; a_y = 4;} && \boldsymbol{a_z = -3} \\ \boldsymbol{b_x = 3; b_y = -4;} && \boldsymbol{b_z = 5} \end{aligned}$$

P2 a.

O vetor $\vec{c} = 6\,\vec{a} - 3\,\vec{b}$

Resposta

$$\vec{c} = (30-9)\hat{\imath} + (24+12)\hat{\jmath} + (-18-15)\hat{k} = 21\,\hat{\imath} + 36\,\hat{\jmath} - 33\,\hat{k}$$

P2 b.

A quantidade $\vec{a}^2 + \vec{b}^2$

Resposta

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = 25 + 16 + 9 + 9 + 16 + 25 = 100$$

P2 c.

O ângulo entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$

Resposta

$$|\vec{a}|\,\left|\vec{b}\right|\,\cos(\theta) = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z \implies$$
$$\implies \theta = \arccos\left(\frac{15-16-15}{\sqrt{50}\,\sqrt{50}}\right) \cong 108.66°$$

P2 d.

A projeção de $\vec{b}$ segundo $\vec{a}$

Resposta

$$\left|\vec{b}\right|\,\cos(\theta)\,\hat{a} = \sqrt{50}\,\cos(108.66°)\,\hat{a} \cong -2.26\,\hat{a}$$

Problema 3

Dados os pontos $P(x_1, y_1, z_1)$ e $Q(x_2, y_2, z_2)$, escreva a expressão cartesiana (isto é, em termos dos vectores unitários segundo os eixos dos x, y e z) do vector $\overrightarrow{PQ}$ e obtenha a expressão do seu módulo.

Resposta

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k} =$$
$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^1}$$

Problema 4

Considere os dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, no plano $x\,0\,y$, possuindo, respectivamente, os módulos $\sqrt{3}$ e 1. O vector $\vec{u}$ faz com o semi-eixo $0\,x$ um ângulo de $30°$ e o vector $\vec{v}$ faz com esse semi-eixo um ângulo de $60°$. Calcule:

P4 a.

As componentes $\vec{u}$ e $\vec{v}$, segundo os eixos dos *x*, *y* e *z*

Resposta

$$\vec{u} = \sqrt{3}\,\cos(30°)\,\hat{\imath} + \sqrt{3}\,\sin(30°)\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k} = 1.5\,\hat{\imath} + \sqrt{3}/2\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$
$$\vec{v} = \cos(60°)\,\hat{\imath} + \sin(60°)\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k} = 0.5\,\hat{\imath} + \sqrt{3}/2\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

P4 b.

As componentes da resultante da adição de $\vec{u}$ e $\vec{v}$

Resposta

$$\vec{u} + \vec{v} = 2\,\hat{\imath} + \sqrt{3}\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

P4 c.

O módulo dessa resultante

Resposta

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{7}$$

P4 d.

As componentes do vetor diferença $\vec{u} - \vec{v}$

Resposta

$$\vec{u} - \vec{v} = 1\,\hat{\imath} + 0\,\hat{\jmath} + 0\,\hat{k}$$

P4 e.

O módulo do vetor $\vec{u} - \vec{v}$

Resposta

$$|\vec{u} - \vec{v}| = 1$$

P4 f.

O produto interno $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Resposta

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1.5 * 0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 * 0 = 0.75 + 0.75 + 0 = 1.5$$

Problema 5

Calcul o módulo do vetor $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, em que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são os vetores abaixo indicados e o ângulo que o vector $\vec{r}$ faz com o semi-eixo positivo dos x.

$$\boldsymbol{\vec{a} = (37; 30^\circ)\,\vec{b} = (25; 60^\circ) \qquad \vec{c} = (30; 135^\circ)}$$

Aqui os vectores são denotados por $|\vec{v}|, \theta$, em que $|\vec{v}|$ representa a amplitude do vector e θ representa o ângulo que o vector faz com o semi-eixo positivo dos x.

Resposta

$$|\vec{r}| = \left|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right| = \left|\begin{matrix} (37\ \cos(30^\circ) & +25\ \cos(60^\circ) & +30\ \cos(135^\circ)) & \hat{\imath}+ \\ +(37\ \sin(30^\circ) & +25\ \sin(60^\circ) & +30\ \sin(135^\circ)) & \hat{\jmath} \end{matrix}\right| =$$

$$= \left|\begin{matrix} (18.5\sqrt{3} + 12.5 - 15\sqrt{2}) & \hat{\imath}+ \\ +(18.5 + 12.5\sqrt{3} + 15\sqrt{2}) & \hat{\jmath} \end{matrix}\right| \cong |23.33\,\hat{\imath} + 61.36\,\hat{\jmath}| \cong 65.65$$

$$\theta_r = \arccos(r_x / |\vec{r}|) \cong \arccos(23.33/65.65) \cong 69.18^\circ$$

Problema 6

Decomponha um deslocamento de 80 km numa direcção 60° para sul da direção Este em dois vectores, um dos quais na direcção Este.

Resposta

$$\vec{d} = (80\,\mathrm{km}, -60^\circ) = 80\,\mathrm{km}\;\cos(60^\circ)\,\hat{e} - 80\,\mathrm{km}\;\sin(60^\circ)\,\hat{s} = 40\,\mathrm{km}\,\hat{e} - 40\,\sqrt{3}\,\hat{s}$$

Problema 7

Um barco parte do seu porto, tendo-se deslocado de 160 km para norte do ponto de partida. Decomponha o deslocamento do barco em dois vectores componentes, um dirigido para nordeste e o outro para noroeste. Que distância teria o barco percorrido a mais para atingir a sua posição final, se viajasse primeiramente para nordeste e depois para noroeste?

Resposta

$$|B_{ne}\hat{ne}| + |B_{nw}\hat{nw}| - |B_n\,\hat{n}| = 160\,(\cos(45^\circ) + \sin(45^\circ) - 1) \cong 66.27$$