

# AM 3C – Equações Diferenciais Ordinárias

Felipe B. Pinto 71951 – EQB

29 de dezembro de 2024

## Conteúdo

Questão 1 . . . . .	2	Questão 7 . . . . .	16
Questão 2 . . . . .	5	Questão 10 . . . . .	19
Questão 3 . . . . .	6	Questão 14 . . . . .	21
Questão 4 . . . . .	9	Questão 15 . . . . .	25
Questão 6 . . . . .	13	Questão 16 . . . . .	26

# Questão 1

Verifique que cada uma das funções indicadas é solução da equação diferencial considerada.

Q1 a.

$$y(x) = e^{2x} \cos(3x), \quad y'' - 4y' + 13y = 0$$

---

---

## Resposta

$$0 = y'' - 4y' + 13y =$$

Using (1) (2)

$$= e^{2x}(-5 \cos(3x) - 12 \sin(3x)) - 4(e^{2x}(2 \cos(3x) - 3 \sin(3x))) + 13y =$$

$$= e^{2x}(-5 \cos(3x) - 12 \sin(3x) - 8 \cos(3x) + 12 \sin(3x)) + 13y =$$

$$= e^{2x}(-13 \cos(3x)) + 13y \implies$$

$$\implies y = e^{2x} \cos(3x)$$

$$y' = \frac{d}{dx}(e^{2x} \cos(3x)) = 2e^{2x} \cos(3x) - e^{2x} \sin(3x) 3 =$$

$$= e^{2x}(2 \cos(3x) - 3 \sin(3x)) \tag{1}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} =$$

Using (1)

$$= \frac{d}{dx}(e^{2x}(2 \cos(3x) - 3 \sin(3x))) =$$

$$= 2e^{2x}(2 \cos(3x) - 3 \sin(3x)) + e^{2x}(-6 \sin(3x) - 9 \cos(3x)) =$$

$$= e^{2x}(-5 \cos(3x) - 12 \sin(3x)) \tag{2}$$

Q1 b.

$$y(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + c_1 e^{-x^2}, \quad \frac{dy}{dx} + 2x y = 1$$

---

---

## Resposta

$$y = \frac{1}{2x} \left( 1 - \frac{dy}{dx} \right) =$$

using (3)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2x} \left( 1 - \left( -2x e^{-x^2} \left( c_1 + \int_0^x e^{t^2} dt \right) + x \right) \right) \\ &= \frac{1}{2x} + e^{-x^2} \left( c_1 + \int_0^x e^{t^2} dt \right) - 1/2 \end{aligned}$$

Portanto  $y(x)$  não é solução da edo

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + c_1 e^{-x^2} \right) = \\ &= -2x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + e^{-x^2} \frac{d}{dx} \left( \int_0^x e^{t^2} dt \right) - c_1 2x e^{-x^2} = \\ &= -2x e^{-x^2} \left( c_1 + \int_0^x e^{t^2} dt \right) + e^{-x^2} (x e^{x^2} - 0 * e^{0^2}) = \\ &= -2x e^{-x^2} \left( c_1 + \int_0^x e^{t^2} dt \right) + x \end{aligned} \tag{3}$$

using (4)

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \right) = \frac{d}{dx} (P(f(b(x))) - P(f(a(x)))) = b'(x) f(b(x)) - a'(x) f(a(x)) \tag{4}$$

## Questão 2

Mostre que a equação  $2x^2y - y^2 + 1 = 0$  define implicitamente uma solução da equação diferencial

$$(x^2 - y) \frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

Determine explicitamente a solução que verifica a condição  $y(0) = 1$ .

---

---

### Resposta

Verificando a função implícita

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(2x^2y - y^2 + 1) &= 2 * 2xy + 2x^2y' - 2yy' = 4xy + (2x^2 - 2y)y' = \\ &\qquad\qquad\qquad \text{using } a = b \implies a' = b' \end{aligned}$$

$$= \frac{d0}{dx} = 0 \implies 2xy + (x^2 - y)y' = 0$$

Encontrando solução explícita em que  $y(0) = 1$

...

# Questão 3

Determine os valores de  $k$  para os quais:

Q3 a.

$y(x) = e^{(kx)}$  é solução da equação

$$y'' - y' + 6y = 0$$

---

## Resposta

$$y'' - y' + 6y = \frac{d^2}{dx^2}(e^{kx}) - \frac{d}{dx}(e^{kx}) + 6x = k^2 e^{kx} - k e^{kx} + 6 e^{kx} = 0$$

$$k^2 - k + 6 = 0 \vee e^{kx} = 0 \implies k = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 * 1 * 6}}{2 * 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{2 * 1}$$

$$e^{kx} = 0 \implies k \rightarrow -\infty$$

Não existe  $k$  exceto  $(k = -\infty \wedge x > 0) \wedge (k = \infty \wedge x < 0)$

Q3 b.

$y(x) = x^k$  é solução da equação

$$x y'' + 2 y' = 0.$$

---

Resposta

$$\begin{aligned} 0 &= x y'' + 2 y' = x (x^k)'' + 2 (x^k)' = x (k (k - 1) x^{(k - 2)}) + 2 (k x^{(k - 1)}) = x^{k-1} k (k + \\ &\implies k = -1 \vee k = 0 \end{aligned}$$

# Questão 4

Em cada uma das seguintes equações autónomas determine os pontos de equilíbrio e represente o respetivo retrato de fase. Classifique os pontos críticos e represente graficamente os diferentes tipos de soluções em cada uma das regiões determinadas pelas soluções de equilíbrio.

Q4 a.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y$$

---

---

## Resposta

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 3y = y(y - 3) = 0$$

	...	0	...	3	...
$y$	-	0	+	+	+
$y - 3$	-	-	-	0	+
$y(y - 3)$	+	0	-	0	+

---

# Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem e Equações Redutíveis a Lineares de Primeira Ordem

---

Q5 b.

Determine a solução geral da equação diferencial linear homogénea de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + 2x y = 0$$

---

---

Resposta

$$\frac{dy}{dx} + 2x y = 0 \implies$$

$$\implies y = \gamma(x)^{-1} C + \gamma(x)^{-1} \int \exp a(x) * b(x) \, dx = \left( \int \exp(2x) \right)^{-1} C + \gamma(x)^{-1} \int \exp$$

# Questão 6

Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais lineares de primeira ordem:

Q6 a.

$$\frac{dy}{dx} - y \tan x = \cos x, \quad x \in ]-\pi/2, \pi/2[$$

Q6 b.

$$y^2 \, dx - (2xy + 3) \, dy = 0$$

considere x como função incógnita e y variável independente

---

Resposta

$$y^2 \, dx - (2xy + 3) \, dy = 0 \implies$$

x como função de y

$$\implies y^2 \frac{dx}{dy} - (2xy + 3) = 0 \implies \frac{dx}{dy} = 2xy^{-1} + 3y^{-2} \implies$$

$\implies$

## Questão 7

Determine a solução geral da equação

$$\frac{dz}{dx} + (x - x^{-1}) z = 0, \quad x > 0$$

e utilizando o método da variação das constantes arbitrárias determine a solução geral de

$$\frac{dz}{dx} + (x - x^{-1}) z = -x^2$$

---

### Resposta

$$\frac{dz}{dx} + (x - x^{-1}) z = 0, \quad x > 0 \implies$$

$$\implies z = c \gamma^{-1}(x) = c \exp - \int (x - x^{-1}) dx = \dots = c \exp -x^2/2$$

Variação das constantes arbitrárias

$$\frac{dz}{dx} + (x - x^{-1}) z = -x^2 \implies z(x) = c(x) x \exp -x^2/2;$$

$$z'(x) = c'(x) x \exp -x^2/2 + c(x) (\exp(-x^2/2) - x^2 \exp(-x^2/2))$$

Q8 b.

Utilizando a substituição definida por  $y = e^{4x}$ , determine a solução geral da equação:

$$x \frac{d^2y}{dx^2} - (4x + 1) \frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

---

---

## Resposta

$$(xD - (4x + 1)D^2 + 4)y = Py = 0 \implies$$

$$\implies y = e^{4x} \int z \implies$$

$\implies ;$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{4x}) \int z + \frac{d}{dx}\left(\int z\right) = 4x e^{4x} \int z + z e^{4x};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(4x e^{4x} \int z + z e^{4x}\right) = \dots$$

$$\implies x e^{4x} \left(16 \int z + 8z \frac{dz}{dx}\right) - (4x + 1)e^{4x} \left(4 \int z + z\right) + 4e^{4x} \int z = 0 \implies$$

$\implies \dots \implies$

$$\implies \frac{dz}{dx} + (4 - 1/x)z = 0 \implies$$

$$\implies \dots z = \frac{C}{\exp(\int (4 - 1/x))} = \dots = C x e^{-4x} \implies$$

$$\implies y = e^{4x} \int C x e^{-4x} = C e^{4x} \left(-\frac{x e^{-4x}}{4} - \frac{e^{-4x}}{16} + k\right) = \dots =$$

$$= -\frac{c}{4}(x + 1/4) + c k e^{4x} = c_1(x + 1/4) + c_2 e^{4x} \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Q9 c.

---

## Resposta

$$\frac{dz}{dx} + \frac{z}{2\sqrt{x}} = -\frac{z^3}{2} \implies z^{-3} \frac{dz}{dx} + \frac{z^{-1}}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

# Questão 10

Considere as seguintes eq dif de prim ordem não lin

Q10 b.

$$y' + x y^2 - (2x^2 + 1)y + x^3 + x - 1 = 0$$
$$y_1(x) = x$$

---

---

Resposta

$$y' + x y^2 - (2x^2 + 1)y + x^3 + x - 1 = 0 \implies$$
$$\implies y' + y(-(2x^2 + 1)) = (-x^3 - x + 1) + y^2(-x)$$

# Questão 14

Determine o integral geral de cada uma das seguintes equações diferenciais lineares de coeficientes constantes:

Q14 a.

$$D^3 (D + 1)^2 ((D - 5)^2 + 16) y = 0, \quad \left( \text{em que } D = \frac{d}{dx} \right)$$

---

## Resposta

$$D^3 (D + 1)^2 ((D - 5)^2 + 16) y = 0 \implies$$

$$\implies \text{Raizes:} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 5 \pm 4i & 1 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x} + c_5 e^{-5x} \cos 4x + c_6 e^{-5x} \sin 4x$$

Q14 b.

$$(D^4 - 1) y = x^3 - x + 2, \quad \left( \text{em que } D = \frac{d}{dx} \right)$$

---

---

## Resposta

$$\begin{aligned} y &= y_0 + y_1 = \\ &= (c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x) + (x^3 - x + 2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 \text{ é solução de } (D^4 - 1) y = 0 &\implies \\ \implies (\alpha^4 - 1) &= (\alpha^2 + 1)(\alpha^2 - 1) \implies \end{aligned}$$

$$\implies \text{Raizes:} \left\{ \begin{array}{ccc} \text{Raizes} & & \text{Multiplicidade} \\ 1 & & 1 \\ -1 & & 1 \\ \pm i & & 1 \end{array} \right.$$

$$\implies y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x;$$

$$\begin{aligned} y_1 \text{ é } x^p \text{ vezes um polinomio de mesmo grau que } x^3 - x + 2 \\ p \text{ é a multiplicidade da raiz } \alpha = 0 \implies \implies \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x^p (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) \implies \\ \implies (D^4 + 1) y_1 &= 0 + y_1 = y_1 = x^3 - x + 2 \end{aligned}$$

Q14 c.

$$y'' + y = \cos x$$

---

---

## Resposta

$$\begin{aligned} y'' + y = (D^2 + 1)y = \cos x &\implies \\ \implies y = y_0 + y_1 = (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \left(\frac{x}{2} \sin x\right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2 + 1 = 0 &\implies \\ \implies \begin{matrix} \text{Raizes} & \pm 1 \\ \text{Multiplicidade} & 1 \end{matrix} \end{aligned}$$

$$\implies y_0 = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$\begin{aligned} y_1 &= x^p (r e^{ax} \cos(bx) + s e^{ax} \sin(bx)) = x(r \cos x + s \sin x) \implies \\ \implies \frac{dy_1}{dx} &= r \cos x + s \sin x = x(-r \sin x + s \cos x) \implies \\ \implies \frac{d^2y_1}{dx^2} &= \dots \implies \\ \implies (D^2 + 1)y_1 &= -2r \sin x + 2s \cos x = \cos x \implies s = 1/2 \wedge r = 0 \implies \\ \implies y_1 &= \frac{x}{2} \sin x \end{aligned}$$

## Questão 15

Determine a sol geral da equação diferencial linear homogénea de coeficientes consntantes

$$D^2y - 4 Dy + 5 y = 0$$

Utilizando uma das substituições  $x = e^t$  ou  $y = x^{-1} \int z \, dx$  determine a solução geral da equação

$$D^2y - 4 Dy + 5 y = \frac{e^{2x}}{\sin x}$$

# Questão 16

Utilizando uma das substituições  $x = e^t$  ou  $y = x^{-1} \int z \, dx$  determine a solução da equação geral

$$2x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 7x \frac{dy}{dx} + 3x = 0$$

com  $x > 0$ . Determine ainda a solução geral da equação

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{7}{2x} \frac{dy}{dx} + \frac{3}{2x^2} y = 0.5x^{-3/2}$$

## Resposta

$$y = c_1 x^{-3/2} + c_2 x^{-1} + \frac{\sqrt{x}}{6}$$

$$D_x^2 y + \frac{7}{2x} D_x y + \frac{3}{2x^2} y = x^{-3/2}/2$$

16 Usar a substituição  $x = e^t$

$$2e^{2t} \left( \frac{d^2y}{dt^2} \right) + 7e^t \left( \frac{dy}{dt} \right) + 3y = 0$$

não tem coeficientes constantes

→ variações de Euler  $y = y(t)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2} \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} D(D-1)y - \frac{1}{x^2} \left( \frac{dy}{dt} \right)^2$$

$$D = \frac{d}{dt}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{x^n} \left[ D(D-1) \cdots (D-(n-1)) \right] y$$

$$\Rightarrow 2 \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2} \left( \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + 7 \times \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} + 3y = 0$$

$$2 \frac{d^2y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 3y = 0 \quad \text{equação a coeficientes constantes}$$

$$2t^2 + 5t + 3 = 0 \quad q = \frac{-5 \pm \sqrt{25-48}}{4} \rightarrow -\frac{3}{2}, -1$$

$$H(t) = c_1 e^{-\frac{3}{2}t} + c_2 e^{-t}$$

$$c_2 = (e^{-\frac{3}{2}t})' = -\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}t}$$

$x = e^t$

$$2 \frac{d^2y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 3y = e^{-t}$$

substituir particular  $y_p = b_1 t e^{-t}$

$$y_p' = b_1 e^{-t} - b_1 t e^{-t}$$

$$y_p'' = b_1 t e^{-t} - b_1 e^{-t}$$

$\lambda = -\frac{1}{2}$  é raiz da equação característica

$$2k_1 \frac{1}{4} e^{-t/2} + b_1 t e^{-t/2} - b_1 e^{-t/2} = e^{-t/2}$$

solução geral

$$H(t) = c_1 e^{-\frac{3}{2}t} + c_2 e^{-t} + \frac{b_1 t e^{-t/2}}{6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{7}{2x} \frac{dy}{dx} + \frac{3}{2x^2} y = \frac{1}{2x^{-3/2}}$$

sol. geral:

$$y = c_1 x^{-\frac{3}{2}} + c_2 x^{-1} + \frac{c_3 x^{-\frac{1}{2}}}{6}$$

Q28 b.

A equação

$$(x^2y^2 + x^2y^2 + 3) dx + x^2y dy = 0$$

Admite fatores que são apenas funções de x. Seja um desses fatores integrantes e o integral geral dessa equação. Determine a solução particular que passa pelo ponto  $(1,0)$

## Resposta

$$\varphi(x) = c e^{2x}$$

$$\varphi_i(x) = e^{2x}.$$

$$e^{2x}(x^2y^2 + 3) = e$$

$$e^{2x}(x^2y^2 + 3) = 3e^2$$

Resolução  
 $(x^2y^2 + x^2y^2 + 3) dx + x^2y dy = 0$  [28b]  
Sabendo que admite um fator integrante que só depende de x.  
 $\varphi(x) :$   
 $\boxed{\varphi(x)} \left( x^2y^2 + x^2y^2 + 3 \right) dx + \boxed{\varphi(x)x^2y} dy = 0$   
é um diferencial exato  
 $\frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi(x)(x^2y^2 + x^2y^2 + 3) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \varphi(x)x^2y \right]$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left( \varphi(x)(x^2y^2 + x^2y^2 + 3) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \varphi(x)x^2y \right] \\ \Leftrightarrow & \varphi(x)(2x^2y + 2x^2y) = \varphi'(x)x^2y + \varphi(x)2x^2y \\ & \varphi(x)2x^2y = \varphi'(x)2x^2y \\ & \left( \frac{1}{\varphi(x)} \right)' = -\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)^2} \quad z = \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} \quad \int z dx = \int \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} dx \end{aligned}$$

$$2x = \log |\varphi(x)| + C$$
 [28b]  
 $e^{2x} = K |\varphi(x)|$   
 $\boxed{\varphi(x) = e^{2x}}$  é um fator integrante  
 $e^{2x} (x^2y^2 + x^2y^2 + 3) dx + e^{2x} x^2y dy = 0$   
 $\frac{\partial f}{\partial x} = x^2y e^{2x} \Rightarrow f(x,y) = \int x^2y e^{2x} dx + g(y)$   
 $= x^2 \frac{y}{2} e^{2x} + g(y)$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{x^2y^2 e^{2x}}{2} + g(y) \right) = \left[ x^2y^2 e^{2x} + x^2y^2 e^{2x} + g'(y) \right] \\ & \left[ -e^{2x}(x^2y^2 + x^2y^2 + 3) \right] \\ & g'(y) = 3e^{2x} \\ & g(y) = \int 3e^{2x} dx = \frac{3e^{2x}}{2} + C' \\ & f(x,y) = \frac{x^2y^2}{2} e^{2x} + \frac{3e^{2x}}{2} + C' \end{aligned}$$

$px = e^{2x}$  é um fator integrante

Q31 c.

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + x + \frac{dy}{dt} + 2y = t \\ -\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 3x - \frac{d^2y}{dt^2} = -3t - 1 \end{cases}$$

Resposta

$$\left[ \begin{array}{cc|c} D^2 + 1 & D + 2 & T \\ -D^3 + 3D^2 - D + 3 & -D^2 & 3t - 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} D^2 + 1 & D + 2 & T \\ 0 & -D - 6 & 0 \end{array} \right]$$