

# INTRODUÇÃO ÀS PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Ano lectivo 2021/2022

## 1 Distribuições Discretas

- Distribuição Hipergeométrica,
- Distribuição Binomial;
- Distribuição de Poisson.

## EXEMPLO

*Num aquário existem  $N = 9$  peixes, dos quais  $M = 5$  estão **saudáveis** e os restantes  $N - M = 4$  estão **doentes**. Considere-se a experiência aleatória: extracção ao acaso e **sem reposição** de  $n = 3$  peixes e registo do seu estado de saúde. Associada a esta experiência, considere-se a v.a.*

*$X =$  nº de peixes saudáveis na amostra extraída de 3 peixes.*

*Pretendemos então caracterizar a função de probabilidade, ou massa de probabilidade, da v.a.  $X$ , i.e., caracterizar*

$$P(X = k), \quad k \in D_X.$$

# DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

- Começamos por observar que o suporte da nossa v.a.  $X$  é dado por  $D_X = \{0, 1, 2, 3\}$
- Temos portanto para cada um dos elementos do suporte  $D_X$

$$P(X = 0) = \frac{C_0^5 \times C_3^4}{C_3^9}, \quad P(X = 1) = \frac{C_1^5 \times C_2^4}{C_3^9}, \quad P(X = 2) = \frac{C_2^5 \times C_1^4}{C_3^9}, \quad P(X = 3) = \frac{C_3^5 \times C_0^4}{C_3^9}.$$

- Nestas condições podemos então escrever a f.m.p. de forma mais compacta como

$$P(X = k) = \frac{C_k^5 \times C_{3-k}^4}{C_3^9} = \frac{C_k^M \times C_{n-k}^{N-M}}{C_n^N}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Na verdade, acabámos de descrever a f.m.p. da **distribuição Hipergeométrica** de parâmetros  $N = 9$ ,  $M = 5$  e  $n = 3$ , i.e.,  
 $H(9, 5, 3)!!$

# DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

## DEFINIÇÃO (DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA)

Considere-se uma população de  $N$  elementos, dos quais  $M$  possuem determinada característica e os restantes ( $N - M$ ) não a possuem (**dicotomia**). Considere-se a experiência aleatória que consiste em seleccionar ao acaso e **sem reposição**  $n$  elementos (amostra) dessa população.

Associada a esta experiência aleatória, define-se a v.a.

$X$  — nº de elementos com a característica, na amostra seleccionada sem reposição.

Nestas condições, a v.a.  $X$  tem então função de probabilidade (ou massa de probabilidade) dada por

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \max(0, M + n - N) \leq k \leq \min(M, n).$$

e diz-se ter distribuição Hipergeométrica de parâmetros  $(N, M, n)$ . De forma abreviada, é usual escrever-se

$$X \sim H(N, M, n).$$

## PROPOSIÇÃO

Seja a v.a.  $X \sim H(N, M, n)$ . Então:

- $E(X) = n \frac{M}{N}$  *(momento de ordem 1)*
- $V(X) = n \frac{M}{N^2(N-1)} (N-M)(N-n)$  *(momento centrado de ordem 2)*

Voltando ao exemplo do aquário temos então para a nossa v.a.  $X \sim H(9, 5, 3)$

$$E(X) = 3 \frac{5}{9} = \frac{5}{3} \quad \& \quad V(X) = 3 \frac{5}{9^2(9-1)} (9-5)(9-3) = \frac{5}{9}.$$

## DEFINIÇÃO (PROVA DE BERNOULLI)

*Experiência aleatória com dois possíveis resultados (“Sucesso” ou “Insucesso”).*

### Exemplos:

- No lançamento ao ar de uma moeda em que o sucesso é por exemplo sair “Cara”, o insucesso será então sair “Coroa”
- No tiro ao alvo, o sucesso pode ser por exemplo “Acertar no alvo”, caso em que o insucesso é “Falhar o alvo”

# DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI

## DEFINIÇÃO (DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI)

É sempre possível definir uma variável aleatória (v.a.)  $X$  que toma o valor 1 se o resultado da experiência é “Sucesso” e 0 se é “Insucesso”, traduzindo a **dicotomia** dos resultados. Denotando  $p = P(\text{“Sucesso”}) > 0$ , então a função de probabilidade de  $X$  é dada por:

$$X \begin{cases} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{cases}, \quad 0 < p < 1$$

Nestas condições, dizemos que a v.a.  $X$  segue uma **distribuição de Bernoulli** de parâmetro  $p$  e escrevemos  $X \sim \text{Ber}(p)$ .



## PROPOSIÇÃO

Seja a v.a.  $X \sim \text{Ber}(p)$ . Então:  $E(X) = p$  e  $V(X) = p(1 - p)$ .

**Dem.**

Sendo  $X$  uma v.a. discreta e dada a sua f.m.p. temos então que

$$\bullet E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p \quad \text{c.q.d.}$$

Analogamente, temos que

$$\bullet E(X^2) = 0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p = p$$

Pelo que, vem finalmente também que

$$\bullet V(X) = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2 = p(1 - p) \quad \text{c.q.d.}$$

# DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

## EXEMPLO

*Um aluno conhece bem 60% da matéria dada. Num exame com cinco perguntas, sorteadas ao acaso, sobre toda a matéria, qual a probabilidade de vir a responder correctamente a duas perguntas?*

Começamos por definir a v.a.

$X =$  nº perguntas correctas em  $n = 5$  perguntas respondidas por um aluno,  
sendo  $p = 0.6$  a probabilidade de um aluno acertar uma pergunta

De seguida observamos que

- se um aluno acerta uma pergunta com probabilidade  $p = 0.6$  então o mesmo erra uma pergunta com probabilidade  $1 - p = 0.4$
- um aluno pode acertar 2 perguntas em 5 de  $\binom{5}{2}$  formas distintas
- $P(X = 2) =$   
 $= \binom{5}{2} P(\text{acertar 1 perg.} \wedge \text{acertar outra} \wedge \text{falhar 1 perg.} \wedge \text{falhar outra} \wedge \text{falhar outra})$   
 $\underset{\text{ind.}}{=} \binom{5}{2} P(\text{acertar 1 perg.})^2 \times P(\text{falhar 1 perg.})^3 = \binom{5}{2} 0.6^2 0.4^3 = 0.2304$

Usando o mesmo raciocínio, facilmente deduzimos a f.m.p. de  $X$

$$P(X = k) = \binom{5}{k} 0.6^k 0.4^{5-k}, \quad k = 0, \dots, 5$$

Na verdade, acabámos de descrever a f.m.p. da **distribuição Binomial** de parâmetros  $n = 5$  e  $p = 0.6$ , i.e.,  
 $Bin(5, 0.6)!!$

# DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

## DEFINIÇÃO (DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL)

Considere-se uma sucessão de provas de Bernoulli independentes, onde em cada prova a probabilidade de “sucesso”,  $p$ , é constante. A v.a.  $X =$  “número de sucessos em  $n$  provas de Bernoulli” segue uma **distribuição Binomial** de parâmetros  $n$  e  $p$ , e escrevemos  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ . A função de probabilidade é:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad 0 < p < 1$$

## PROPOSIÇÃO

Considere a v.a.  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ . Então,  $E(X) = np$  e  $V(X) = np(1 - p)$ .

Voltando ao exemplo do aluno temos então para a nossa v.a.  $X \sim \text{Binom}(5, 0.6)$

$$E(X) = 5 \times 0.6 = 3 \quad \& \quad V(X) = 5 \times 0.6 \times 0.4 = 1.2.$$

# DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

## TEOREMA (PROPRIEDADE ADITIVA DA DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL)

Sejam  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m$  v. a.'s independentes tais que  $X_i \sim \text{Bin}(n_i, p)$ .  
Então a sua soma tem também distribuição Binomial, isto é,

$$S_m = \sum_{i=1}^m X_i \sim \text{Bin}(n_1 + \dots + n_m, p).$$

Seja

$X_i$  = nº perguntas correctas em  $n = 5$  perguntas respondidas pelo aluno  $i$ ,  
sendo  $p = 0.6$  a probabilidade de um aluno acertar uma pergunta

onde  $i = 1, 2$ . Qual a probabilidade de entre os dois alunos, 7 respostas estarem correctas?

( $\simeq 0.2150$ )

## DIFERENÇA ENTRE AS DISTRIBUIÇÕES HIPERGEOMÉTRICA E BINOMIAL

Hipergeométrica	Binomial
<i>População finita constituída por <math>N</math> elementos</i>	<i>População infinita</i>
<i>Extracção sem reposição</i>	<i>Extracção com reposição</i>
<i>Sucessivas extracções não são independentes</i>	<i>Sucessivas extracções são indep.</i>

# DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Apresentamos agora o histograma discreto animado referente a uma amostra de tamanho 10000 da distribuição  $Bin(5, p)$  com  $p$  a variar entre  $0.1 - 0.9$  com passo  $0.1$  (para a correcta visualização do mesmo é necessário abrir este pdf com recurso ao software Adobe Reader).

# DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

## DEFINIÇÃO (DISTRIBUIÇÃO DE POISSON)

Seja  $X$  a v.a. que conta o número de ocorrências de um acontecimento num dado intervalo de tempo<sup>a</sup> de duração  $t$  sendo  $\lambda$  a taxa de ocorrências por unidade de tempo  $t$ .

Dizemos que a variável aleatória  $X$  segue uma distribuição de Poisson de parâmetro  $\lambda$ , e escrevemos  $X \sim P(\lambda)$ , se a função de probabilidade de  $X$  é:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad \lambda > 0.$$

---

<sup>a</sup>Note que podemos também considerar uma área, um volume, etc.

**Nota:** A v.a.  $X$  com distribuição de Poisson obedece aos seguintes critérios:

- 1 a probabilidade de um acontecimento ocorrer num intervalo (de tempo ou de espaço) de amplitude arbitrariamente pequena é proporcional à dimensão do intervalo e independente de ocorrências verificadas em intervalos anteriores;
- 2 A probabilidade de ocorrer mais do que um acontecimento num intervalo de amplitude arbitrariamente pequena é aproximadamente igual a zero;
- 3 O número de acontecimentos que ocorrem em dois intervalos disjuntos são independentes;
- 4 O número de ocorrências em dois intervalos com a mesma duração, têm a mesma distribuição.

# DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

## PROPOSIÇÃO (VALOR MÉDIO E VARIÂNCIA)

Seja  $X$  uma v.a. com distribuição  $P(\lambda)$ . Então,  $E(X) = \lambda$  e  $V(X) = \lambda$ .

**Dem.**

Sendo  $X$  uma v.a. discreta e dada a sua f.m.p. temos então que

$$\begin{aligned} \bullet \quad E(X) &= \sum_{x \in D_X} xP(X=x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \times \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x \times \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} x \times \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x \times (x-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1+1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x-1=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = \lambda e^{-\lambda} \times e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

**c.q.d.**

Demonstra-se que

$$\bullet \quad E(X(X-1)) = \lambda^2$$

e que

$$\bullet \quad E(X(X-1)) = \lambda^2 \Leftrightarrow E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

Finalmente, temos

$$\bullet \quad V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

**c.q.d.**



# DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

## TEOREMA (ADITIVIDADE)

*Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_m$  variáveis aleatórias independentes com  $X_i \sim P(\lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Então,*

$$S_m = \sum_{i=1}^m X_i \sim P(\lambda_1 + \dots + \lambda_m).$$

## EXEMPLO

*Admita que a chegada de automóveis a um parque se processa a uma taxa de 180 automóveis por hora e tem distribuição de Poisson. Caracterize a distribuição do  $n^\circ$  de automóveis que chegam ao parque em 15 minutos.*

De acordo com a observação acima e a definição de processo de Poisson, sendo a v.a. discreta

$X = n^\circ$  de automóveis que chega a um parque de estacionamento **numa hora**  $\sim P(\lambda_x)$   
com  $\lambda_x = 180$  automóveis por hora, então a v.a. discreta

$Y = n^\circ$  de automóveis que chega a um parque de estacionamento **em 15 mins**  $\sim P(\lambda_y)$   
com  $\lambda_y = 180/4 = 45$  automóveis por 15 minutos.

# DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Apresentamos agora o histograma discreto animado referente a uma amostra de tamanho 10000 da distribuição  $P(\lambda)$  com  $\lambda$  a variar entre 0.5 – 10 com passo 0.5 (para a correcta visualização do mesmo é necessário abrir este pdf com recurso ao software Adobe Reader).

## ① Distribuições Absolutamente Contínuas

- Distribuição Exponencial;
- Distribuição Normal;
- Distribuição Chi-quadrado;
- Distribuição t-Student.

# DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

## DEFINIÇÃO (DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL)

Uma variável aleatória  $X$  diz-se seguir uma **distribuição Exponencial** de parâmetro  $\lambda$ , e escrevemos  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , se a sua função densidade probabilidade for dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad \lambda > 0$$

Apresentamos abaixo os gráficos animados das funções densidade de probabilidade (esquerda) e distribuição (direita) da distribuição  $\text{Exp}(\lambda)$  com  $\lambda$  a variar entre 0.25 – 5 com passo 0.25. (para a correcta visualização do mesmo é necessário abrir este pdf com recurso ao software Adobe Reader).

# DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

## PROPOSIÇÃO (VALOR MÉDIO E VARIÂNCIA)

Seja a v.a.  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Então,  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$  e  $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ .

**Dem.**

Sendo  $X$  uma v.a. contínua e dada a sua f.d.p. temos então que

$$\begin{aligned} \bullet \quad E(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \times \lambda e^{-\lambda x} dx \stackrel{i.p.p.}{=} \left[ -x e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x} dx = \\ &= 0 - \left[ \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{\lambda} (e^{-\infty} - 1) = \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \quad \text{c.q.d.}$$

Use novamente a regra de integração por partes (*i.p.p.*) para mostrar que

$$\bullet \quad E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2} \quad \text{TPC}$$

Neste seguimento vem finalmente que

$$\bullet \quad V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left( \frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{c.q.d.}$$

# DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

## FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO

Seja a v.a.  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Então, a sua função de distribuição é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}.$$

**Dem.**

Temos pela definição de função distribuição e pelo facto de  $X$  ser v.a. contínua que

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du.$$

Ora, no caso em que  $x \leq 0$  a f.d.p.  $f(x) = 0$  de modo que  $F(x) = 0$  para  $x \leq 0$ . No caso em que  $x > 0$  temos então que

$$\int_{-\infty}^x f(u) du = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} du = \left[ -e^{-\lambda u} \right]_0^x = -e^{-\lambda x} + 1$$

pelo que escrevemos finalmente

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}.$$

# DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

## TEOREMA (PROPRIEDADE DA FALTA DE MEMÓRIA DA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL)

Seja  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Então:  $P(X \geq s + t | X \geq s) = P(X \geq t) \quad \forall t, s > 0$ .

**Dem.**

Começemos por observar que, sendo  $X$  uma v.a. contínua se tem

$$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leq x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Assim,

$$P(X \geq s + t | X \geq s) \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{P(X \geq s + t)}{P(X \geq s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X \geq t)$$

**c.q.d.**

# DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

## EXEMPLO

*Num dia de semana, o tempo de espera de um aluno da FCT pelo autocarro que faz o trajecto até à Praça de Espanha segue uma distribuição exponencial. Supondo que o tempo médio de espera pelo autocarro é de 15mins, calcule a probabilidade de*

- uma vez chegado à paragem, o aluno esperar mais de 10mins;*
- estando o aluno à espera do autocarro já há 10mins, ter de esperar ainda mais de 5mins.*

Começamos por observar que

$$T = \text{tempo de espera pelo autocarro} \sim \text{Exp}(1/15)$$

já que nos é dito que  $T \sim \text{Exp}(\lambda)$  e que  $E(T) = 1/\lambda = 15\text{mins}$ . Assim temos,

$$\bullet \quad P(T > 10) \underset{\text{v.a.cont.}}{=} P(T \geq 10) = e^{-1/15 \cdot 10} = e^{-\frac{2}{3}} \simeq 0.5134$$

$$\bullet \quad P(T > 10 + 5 | T > 10) \underset{\text{prop.}}{=} P(T > 5) \underset{\text{v.a.cont.}}{=} P(T \geq 5) = e^{-1/15 \cdot 5} = e^{-\frac{1}{3}} \simeq 0.7165$$



# DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

## PROPOSIÇÃO (RELAÇÃO ENTRE A DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL E POISSON)

*Considere um acontecimento que ocorre de acordo com um Processo de Poisson de parâmetro  $\lambda$ , por unidade de tempo. Então, o tempo até à primeira ocorrência e o tempo entre duas ocorrências consecutivas tem distribuição  $Exp(\lambda)$ .*

## EXEMPLO

*Voltemos ao exemplo anterior onde*

*$X = n^\circ$  de automóveis que chega a um parque de estacionamento **numa hora**  $\sim P(180)$ .*

*Caracterize a v.a. que representa o tempo que decorre entre chegadas consecutivas de dois automóveis ao parque. Calcule a probabilidade de decorrer 1 minuto ou mais entre chegadas consecutivas de dois automóveis.*

Pela proposição temos então que

$T =$  tempo que decorre entre chegadas consecutivas de 2 automóveis  $\sim Exp(180)$

pelo que a f.d.p. de  $T$  vem  $f(t) = 180e^{-180t}, t > 0$ . Ainda, dado que  $1\text{min} \equiv 1/60\text{h}$

$$P(T > 1/60) = 1 - P(T \leq 1/60) = 1 - P(T \leq 1/60) = 1 - \int_0^{1/60} 180e^{-180t} dt = e^{-180/60} \approx 0.04979$$

# DISTRIBUIÇÃO NORMAL

## DEFINIÇÃO (DISTRIBUIÇÃO NORMAL)

Uma variável aleatória  $X$  diz-se seguir uma **distribuição Normal** de parâmetros  $\mu$  e  $\sigma^2$ , e escrevemos  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , se a sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

Apresentamos abaixo os gráficos animados das funções densidade de probabilidade (esquerda) e distribuição (direita) da distribuição  $N(0, \sigma^2)$  com  $\sigma^2$  a variar entre 0.5 – 2 com passo 0.05. (para a correcta visualização do mesmo é necessário abrir este pdf com recurso ao software Adobe Reader).

# DISTRIBUIÇÃO NORMAL

## PROPOSIÇÃO

Seja a v.a.  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Então  $E(X) = \mu$  e  $V(X) = \sigma^2$ .

## TEOREMA

Seja  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Então,  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ .

Demonstramos apenas que  $E(Z) = 0$  e  $V(Z) = 1$  usando as propriedades do valor esperado e da variância:

- $E(Z) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}(E(X) - \mu) = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0$
- $V(Z) = V\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$

# DISTRIBUIÇÃO NORMAL

## TEOREMA

Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  variáveis aleatórias independentes com distribuições  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Considerando as constantes reais  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , com algum  $a_i \neq 0$ , temos que:

$$Y = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n \sim N(a_1 \mu_1 + \dots + a_n \mu_n, a_1^2 \sigma_1^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2)$$

Note que, usando as propriedades do valor esperado e da variância, facilmente verificamos que:

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i$$

$$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) \stackrel{X_i' s \text{ ind.}}{=} \sum_{i=1}^n V(a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$$