# Álgebra Linear e Geometria Analítica

## 8 - Recta e Plano

*Departamento de Matemática*
*FCT/UNL*

# Programa

1. Matrizes
2. Sistemas de Equações Lineares
3. Determinantes
4. Espaços Vectoriais
5. Aplicações Lineares
6. Valores e Vectores Próprios
7. Produto Interno, Produto Externo e Produto Misto
8. Geometria Analítica

# Equações da Recta e do Plano

Definem uma recta:

- Dois pontos dessa recta
- Um ponto da recta e um vector paralelo a essa recta.

### Definição

A um vector não nulo paralelo a uma recta $r$ chamamos **vector director da recta** $r$.

### Observação

Se $A$ e $B$ são dois pontos distintos de uma recta $r$, o vector $\overrightarrow{AB}$ é um vector director da recta $r$.

## Equação vectorial da recta

*Dado um ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ de uma recta $r$ e um vector $u(u_1, u_2, u_3)$ director da recta $r$ chamamos* **equação vectorial da recta** *$r$,à equação onde um qualquer ponto $P(x, y, z)$ da recta $r$ é dado por:*

$$r : P = A + \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Atendendo a que

$$r : (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3), \lambda \in \mathbb{R},$$

a equação anterior é ainda equivalente ao sistema:

## Equações cartesianas da recta

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

*que habitualmente designamos por* **equações paramétricas da recta $r$.**

# Equações da Recta e do Plano

*Para* $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0 \quad e \quad u_3 \neq 0,$ *temos*

$$x = a_1 + \lambda u_1 \Longrightarrow \lambda = \frac{x - a_1}{u_1}$$

$$y = a_2 + \lambda u_2 \Longrightarrow \lambda = \frac{y - a_2}{u_2}$$

$$z = a_3 + \lambda u_3 \Longrightarrow \lambda = \frac{z - a_3}{u_3}$$

*e portanto,*

$$\frac{\mathrm{x} - \mathrm{a}_1}{\mathrm{u}_1} = \frac{\mathrm{y} - \mathrm{a}_2}{\mathrm{u}_2} = \frac{\mathrm{z} - \mathrm{a}_3}{\mathrm{u}_3},$$

*estas equações são designadas por* **equações normais da recta**.

O que se passa se $u_1 = 0 \vee u_2 = 0 \vee u_3 = 0$?

# Equações da Recta e do Plano

Quando $u_3 \neq 0$ e considerando

$$\mathrm{m} = \frac{u_1}{u_3} \quad \mathrm{n} = \frac{u_2}{u_3} \quad \mathrm{p} = a_1 - \frac{a_3 u_1}{u_3} \quad \mathrm{q} = a_2 - \frac{a_3 u_2}{u_3},$$

chamamos **equações reduzidas da recta**ao sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{x} = \mathrm{mz} + \mathrm{p} \\ \mathrm{y} = \mathrm{nz} + \mathrm{q} \end{array} \right. .$$

# Equações da Recta e do Plano

Definem um plano:

- Três pontos não colineares desse plano.
- Um ponto do plano e dois vectores não paralelos desse plano.
- Um ponto do plano e um vector perpendicular a esse plano.

### Definição

Aos vectores não nulos paralelos a um plano $\pi$ e não colineares chamamos **vectores directores do plano** $\pi$.

### Observação

Se $A$ e $B$ e $C$ são três pontos distintos e não colineares de um plano $\pi$, os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são vectores directores do plano $\pi$.
Se $u$ e $v$ são vectores directores do plano $\pi$ então o vector $u \times v$ é um vector perpendicular ao plano $\pi$.

# Equações da Recta e do Plano

### Definição

Dado um ponto $A$ de um plano $\pi$ e dois vectores directores do plano $\pi$, $u(u_1, u_2, u_3)$ e $v(v_1, v_2, v_3)$ chamamos **equação vectorial do plano** $\pi$, à equação onde um qualquer ponto $P$ do plano $\pi$ é dado por :

$$\pi : P = A + \lambda u + \mu v, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

**Equações cartesianas do plano**

Atendendo a que $\pi : (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, a equação anterior é ainda equivalente ao sistema:

### Definição

$$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

que habitualmente designamos por **equações paramétricas do plano** $\pi$**.**

# Equações da Recta e do Plano

*Como referimos, se u e v são vectores directores do plano $\pi$ então o vector $u \times v$ é um vector perpendicular ao plano $\pi$.*

*Sendo assim $u \times v$ é ainda perpendicular a qualquer vector do plano $\pi$.*

*Sendo $A(a_1, a_2, a_3)$ um ponto do plano $\pi$ então, para qualquer ponto $P(x, y, z) \in \pi$ teremos que o vector $\overrightarrow{AP}$ será sempre perpendicular ao vector $u \times v$, isto é $\overrightarrow{AP}|(u \times v) = 0$.*

*De facto, esta é uma caracterização dos pontos P do plano $\pi$.Assim dizer que $P \in \pi$ é equivalente a afirmar que*

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

# Equações da Recta e do Plano

*Os pontos do plano $\pi$ são os pontos de $\mathbb{R}^3$ que são soluções da equação linear nas incógnitas $x$, $y$ e $z$:*

$$\mathrm{ax} + \mathrm{by} + \mathrm{cz} + \mathrm{d} = 0.$$

*A esta equação chamamos a* **equação geral do plano** $\pi$.

## Observação

A sequência $(a, b, c)$ dos coeficientes das incógnitas $x$, $y$ e $z$ da equação geral de um plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ é a sequência das coordenadas de um vector perpendicular ao plano $\pi$.

# Problemas métricos: distâncias

Sejam $P$ e $Q$ dois pontos de $\mathbb{R}^3$. Define-se **distância entre os pontos $P$ e $Q$**, e representa-se por $\mathrm{d}(P, Q)$, a norma do vector $\overrightarrow{PQ}$, isto é,

$$\mathrm{d}(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ pontos, rectas ou planos de $\mathbb{R}^3$. Define-se **distância entre $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$** como

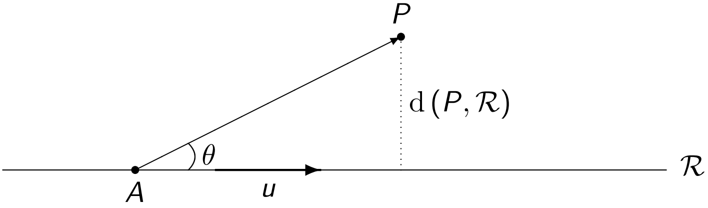
$$\mathrm{d}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \min\{\mathrm{d}(P, Q) : \; P \in \mathcal{F}_1, \; Q \in \mathcal{F}_2\}.$$

### Observação

Se $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$ então $\mathrm{d}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = 0$.

# Problemas métricos: distâncias

- Distância de um ponto $P$ a uma recta $\mathcal{R}$:

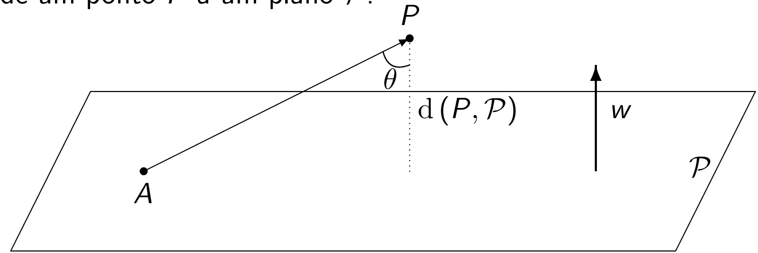



$$\mathrm{d}\,(P,\mathcal{R}) = \|\overrightarrow{AP}\| \operatorname{sen}\theta = \frac{\|\overrightarrow{AP}\|\|u\| \operatorname{sen}\theta}{\|u\|} = \frac{\|\overrightarrow{AP}\times u\|}{\|u\|}.$$

$\theta = \measuredangle(u, \overrightarrow{AP})$

# Problemas métricos: distâncias

- Distância de um ponto $P$ a um plano $\mathcal{P}$:




$$\mathrm{d}\left(P,\mathcal{P}\right) = \|\overrightarrow{AP}\|\,|\cos\theta| = \frac{\|\overrightarrow{AP}\|\|w\|\,|\cos\theta|}{\|w\|} = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \mid w\right|}{\|w\|}.$$

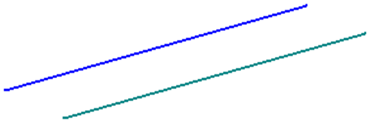
$\theta = \measuredangle(\overrightarrow{AP}, w)$

# Problemas não métricos: incidência e paralelismo

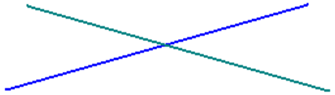
Posição relativa entre duas rectas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$:

(a) $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

(b) $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são estritamente paralelas.

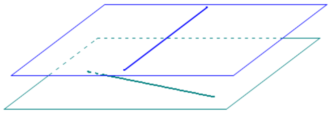


(c) $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são concorrentes, isto é, a sua intersecção é um ponto.



# Problemas métricos: distâncias

(d) $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são enviesadas.



$u_1$ - vector com a direcção de $\mathcal{R}_1$
$u_2$ - vector com a direcção de $\mathcal{R}_2$
$A_1$ - ponto da recta $\mathcal{R}_1$

$u_1$ e $u_2$ têm a mesma direcção $\Longrightarrow$ (a) ou (b).
$u_1$ e $u_2$ não têm a mesma direcção $\Longrightarrow$ (c) ou (d).

(a) ou (b)? $A_1 \in \mathcal{R}_2 \Rightarrow$ (a), $A_1 \notin \mathcal{R}_2 \Rightarrow$ (b)

(c) ou (d)? $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \neq \emptyset \Rightarrow$ (c), $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset \Rightarrow$ (d)

# Problemas métricos: distâncias

Distância entre duas rectas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$:

Caso (a): $\mathrm{d}\,(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = 0$.

Caso (b): $\mathrm{d}\,(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ é a distância de um ponto qualquer de $\mathcal{R}_1$ à recta $\mathcal{R}_2$ (ou de um ponto qualquer de $\mathcal{R}_2$ à recta $\mathcal{R}_1$).

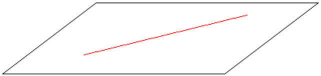
Caso (c): $\mathrm{d}\,(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = 0$.

Caso (d): Considere-se um plano $\mathcal{P}_1$ contendo a recta $\mathcal{R}_1$ e paralelo à recta $\mathcal{R}_2$. A $\mathrm{d}\,(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ é a distância de um ponto qualquer de $\mathcal{R}_2$ ao plano $\mathcal{P}_1$.

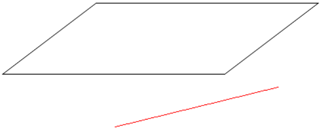
# Problemas não métricos: incidência e paralelismo

Posição relativa entre uma recta $\mathcal{R}$ e um plano $\mathcal{P}$:

(a) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$.

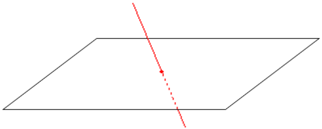


(b) $\mathcal{R}$ é estritamente paralela ao plano $\mathcal{P}$.



# Problemas não métricos: incidência e paralelismo

(c) A intersecção entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{P}$ é um ponto.



$u$ - vector com a direcção da recta $\mathcal{R}$
$w$ - vector perpendicular ao plano $\mathcal{P}$
$A$ - ponto da recta $\mathcal{R}$

$u \mid w = 0 \Longrightarrow$ (a) ou (b).
$u \mid w \neq 0 \Longrightarrow$ (c).

(a) ou (b)? $A \in \mathcal{P} \Rightarrow$ (a), $A \notin \mathcal{P} \Rightarrow$ (b)

# Problemas não métricos: incidência e paralelismo

## Exemplo

Consideremos fixado um referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

Seja $\mathcal{R}$ a recta de equações normais

$$x = 2 \qquad \text{e} \qquad \frac{y-3}{2} = \frac{z}{4}$$

e $\mathcal{P}$ o plano que passa pelos pontos

$$A = (1, 0, -1), \quad B = (2, 2, 0) \quad \text{e} \quad C = (1, 1, 1).$$

Vejamos que $\mathcal{R}$ é estritamente paralela a $\mathcal{P}$.

## Recta e Plano - Exemplos

### Exemplo

Determinemos um vector $u$ com a direcção de $\mathcal{R}$ e um vector $w$ perpendicular a $\mathcal{P}$. Conforme referimos, $\mathcal{R}$ é paralela a $\mathcal{P}$ (podendo ser coincidente ou estritamente paralela) se, e só se,

$$u \mid w = 0.$$

Para obter $u$ basta determinar dois pontos distintos da recta $\mathcal{R}$, por exemplo,

$$D = (2, 3, 0) \qquad \text{e} \qquad E = (2, 1, -4)$$

e considerar, por exemplo,

$$u = \overrightarrow{DE} = (0, -2, -4).$$

## Recta e Plano - Exemplos

### Exemplo

Consideremos, por exemplo, $w = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Como $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 2)$ tem-se

$$w = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (3, -2, 1).$$

$$\left( \text{Mnemónica:} \quad \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3e_1 - 2e_2 + 1e_3. \right)$$

Assim,

$$u \mid w = (0, -2, -4) \mid (3, -2, 1) = 0 \times 3 + (-2) \times (-2) + (-4) \times 1 = 0$$

e, portanto, $\mathcal{R}$ é paralela a $\mathcal{P}$.

## Recta e Plano - Exemplos)

Para determinarmos se $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ ou se $\mathcal{R}$ é estritamente paralela a $\mathcal{P}$ temos de considerar um ponto qualquer de $\mathcal{R}$ e verificar se pertence ou não ao plano $\mathcal{P}$.

Como $(3, -2, 1)$ é um vector perpendicular a $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}$ passa no ponto $A = (1, 0, -1)$, uma equação geral do plano $\mathcal{P}$ será

$$3x - 2y + 1z + d = 0$$

com

$$d = -(3 \times 1 - 2 \times 0 + 1 \times (-1)) = -2.$$

## Recta e Plano - Exemplos

### Exemplo

Atendendo à equação geral do plano $\mathcal{P}$

$$3x - 2y + z - 2 = 0$$

concluímos que o ponto da recta $\mathcal{R}$, $D = (2, 3, 0)$, não pertence ao plano $\mathcal{P}$ pois

$$3 \times 2 - 2 \times 3 + 0 - 2 \neq 0.$$

Logo $\mathcal{R}$ é estritamente paralela a $\mathcal{P}$.

# Problemas métricos: distâncias

Distância entre uma recta $\mathcal{R}$ e um plano $\mathcal{P}$:

Caso (a): $\mathrm{d}\,(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = 0$.

Caso (b): $\mathrm{d}\,(\mathcal{R}, \mathcal{P})$ é a distância de um ponto qualquer da recta $\mathcal{R}$ ao plano $\mathcal{P}$.

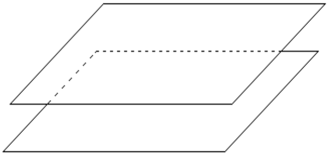
Caso (c): $\mathrm{d}\,(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = 0$.

# Problemas não métricos: incidência e paralelismo

Posição relativa entre dois planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$:

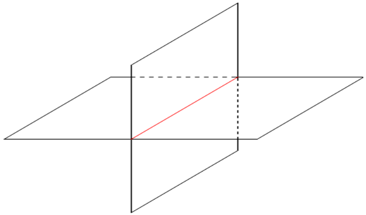
(a) $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$.

(b) $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ são estritamente paralelos.



# Problemas não métricos: incidência e paralelismo

(c) A intersecção dos planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ é uma recta.



$w_1$ - vector perpendicular ao plano $\mathcal{P}_1$.
$w_2$ - vector perpendicular ao plano $\mathcal{P}_2$.
$A_1$ - ponto do plano $\mathcal{P}_1$.

$w_1$ e $w_2$ têm a mesma direcção $\Longrightarrow$ (a) ou (b).
$w_1$ e $w_2$ não têm a mesma direcção $\Longrightarrow$ (c).

(a) ou (b)? $A_1 \in \mathcal{P}_2 \Rightarrow$ (a), $A_1 \notin \mathcal{P}_2 \Rightarrow$ (b)

# Problemas métricos: distâncias

Distância entre dois planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$:

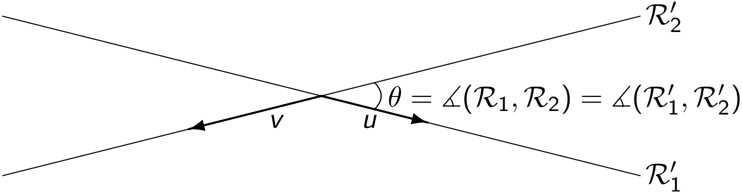
Caso (a): $\mathrm{d}\,(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = 0$.

Caso (b): $\mathrm{d}\,(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ é a distância de um ponto qualquer de $\mathcal{P}_1$ ao plano $\mathcal{P}_2$ (ou de um ponto qualquer de $\mathcal{P}_2$ ao plano $\mathcal{P}_1$).

Caso (c): $\mathrm{d}\,(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = 0$.

# Problemas métricos: ângulos

Ângulo de duas rectas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$:
Define-se como o menor dos ângulos formados por duas rectas complanares $\mathcal{R}_1'$ e $\mathcal{R}_2'$, uma com a direcção de $\mathcal{R}_1$ e a outra com a direcção de $\mathcal{R}_2$.



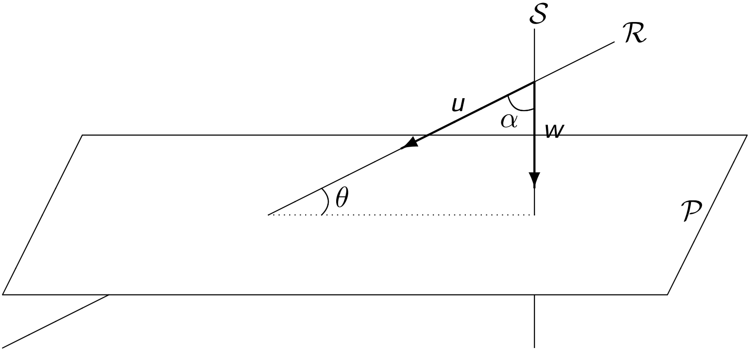

$u$ - vector com a direcção de $\mathcal{R}_1$ (e de $\mathcal{R}_1'$).

$v$ - vector com a direcção de $\mathcal{R}_2$ (e de $\mathcal{R}_2'$).

$$\theta = \measuredangle(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) = \operatorname{arccos} \frac{|u \mid v|}{\|u\| \|v\|}.$$

# Problemas métricos: ângulos

Ângulo de uma recta $\mathcal{R}$ e um plano $\mathcal{P}$:
Define-se como sendo o complementar do ângulo formado pela recta $\mathcal{R}$ com uma recta $\mathcal{S}$ perpendicular ao plano $\mathcal{P}$.




$$\cos\alpha = \frac{|u \mid w|}{\|u\|\|w\|} = \operatorname{sen}\theta.$$

# Problemas métricos: ângulos

Ângulo de dois planos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$:
Define-se como sendo o ângulo formado por duas rectas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, com $\mathcal{R}_1$ perpendicular a $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{R}_2$ perpendicular a $\mathcal{P}_2$.

$w_1$ - vector perpendicular a $\mathcal{P}_1$.

$w_2$ - vector vector perpendicular a $\mathcal{P}_2$.

$$\measuredangle(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \text{arccos} \frac{|w_1 \mid w_2|}{\|w_1\| \|w_2\|}.$$