Nome:

Nº de aluno: Curso:

INSTRUÇÕES PARA O 1º TESTE DE REPETIÇÃO DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C

LEIA ATENTAMENTE AS SEGUINTES INSTRUÇÕES ATÉ AO FIM

Hora de início do teste: 13.30 Duração: 2 horas (sem tolerância e sem intervalo)

Todas as respostas são dadas no enunciado que vos será distribuído pelo que não necessitam, nem podem, utilizar outras folhas de resposta.

O teste possui 7 folhas agrafadas, que **não podem** desagrafar, que para além desta primeira folha de instruções, é constituído por quatro grupos e por duas folhas em branco que se destinam a rascunho.

No cabeçalho da página 3 (Grupo I), devem preencher completamente os vossos dados pessoais no espaço para isso reservado: nome completo, curso e nº de aluno. **O não preenchimento dos vossos dados pessoais conduz ao anulamento da prova**.

O Grupo I possui 6 perguntas de escolha múltipla. Devem selecionar de forma inequívoca a opção (única) de resposta. Respostas erradas **não são** penalizadas.

Nos Grupos II,III, IV as perguntas são de resposta aberta e são respondidas no próprio enunciado.

A cotação de cada pergunta está assinalada no início da mesma. Devem ter em atenção o espaço destinado à resposta de cada alínea e gerir esse espaço convenientemente (por exemplo, não utilizar letra ou símbolos matemáticos demasiado grandes). As duas últimas folhas (páginas 11 a 14) estão em branco e destinam-se a ser utilizadas como rascunho e **não serão corrigidas**.

No final da prova, o aluno deverá pedir licença para entregar o teste, em seguida deverá colocar a prova, na mesma mesa onde se encontra a folha de presenças (que deverá assinar neste momento) em cima de outras provas que já tenham sido eventualmente entregues.

COTAÇÕES

Grupo I

Grupo II

1.

2.

Grupo III

1.

2.

Grupo IV

1.

.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

1º TESTE DE REPETIÇÃO DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2020/2021
08 DE JULHO DE 2021

Duração: 2horas.

Nome:

Nº de aluno: Nº de caderno:

PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES DO GRUPO I ASSINALE COM X O QUADRADO CORRESPONDENTE À ALTERNATIVA CORRECTA.

GRUPO I

[*1,5 valores*] 1. Sejam V e F um vértice e um foco, respetivamente, da hiperbole de equação

$$2(x-4)^2-(y+3)^2=\frac{5}{2}.$$

Então:

☐ $V=\left(4,-3+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ e $F=\left(4,-3+\sqrt{\frac{15}{2}}\right)$ ☐ $V=\left(4-\frac{\sqrt{5}}{2},-3\right)$ e $F=\left(4+\frac{\sqrt{15}}{2},-3\right)$

☐ $V=\left(4-\frac{5}{4},-3\right)$ e $F=\left(4+\frac{15}{4},-3\right)$ ☐ $V=\left(4-\sqrt{\frac{5}{2}},-3\right)$ e $F=\left(4+\sqrt{\frac{15}{2}},-3\right)$

☐ $V=\left(4,-3+\frac{5}{2}\right)$ e $F=\left(4,-3+\frac{15}{2}\right)$ ☐ $V=\left(-\frac{\sqrt{5}}{2},0\right)$ e $F=\left(\frac{\sqrt{15}}{2},0\right)$

[*1,5 valores*] 2. Seja $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\leq 0 \ \wedge \ y\neq -x^2\}\cup\{(0,0)\}$.

☐ A é desconexo, $IntA\neq A$ e $A'=A$ ☐ A é conexo, $IntA\neq A$ e $A'=A$

☐ A é desconexo, $adA\neq A$ e $A'\neq A$ ☐ A é ilimitado, A é conexo e $intA\neq A$

☐ A é ilimitado, A é conexo e $intA=A$ ☐ A é ilimitado, $adA=A$ e $A'\neq A$

A' designa o conjunto dos pontos de acumulação de A.

[*1,5 valores*] 3. Considere a função real de duas variáveis reais, definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} x-y, & xy = 0 \\ 0, & xy \neq 0. \end{cases}$$

Relativamente à função g tem-se que:

☐ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -1$ mas não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

☐ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -1$ e é diferenciável no ponto $(0,0)$

☐ $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$ e é diferenciável no ponto $(0,0)$

☐ A função $g(x,y)$ não tem limite no ponto $(0,0)$ nem possui derivadas parciais nesse ponto.

☐ A função $g(x,y)$ tem limite no ponto $(0,0)$ mas não possui derivadas parciais nesse ponto.

☐ A função $g(x,y)$ não tem limite no ponto $(0,0)$ mas possui derivadas parciais nesse ponto.

[*1,5 valores*] 4. Seja f uma função real de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. Considere a função $z = f(u,v)$, com $u = g(x-y)$ e $v = h(xy)$, em que f e g são duas funções reais de variável reais diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Sabendo que

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = K(x,y)\,\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)h'(xy),$$

em que $K(x,y)$ é uma função nas variáveis x e y, tem-se que:

☐ $K(x,y) = x - y$ ☐ $K(x,y) = 2x - y$ ☐ $K(x,y) = x - 2y$

☐ $K(x,y) = x + y$ ☐ $K(x,y) = 2x + y$ ☐ $K(x,y) = x + 2y$

[*1,5 valores*] 5. Considere a função f definida por

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{xy}, 3y - \frac{1}{x^2}\right) = (u,v).$$

Numa vizinhança do ponto $(1,1)$ a função f é invertível e tem-se:

☐ $\dfrac{\partial x}{\partial v}(1,2) = -1$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u}(1,2) = 2$ ☐ $\dfrac{\partial x}{\partial v}(1,2) = -1$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u}(1,2) = -2$

☐ $\dfrac{\partial x}{\partial v}(1,2) = 1$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u}(1,2) = 2$ ☐ $\dfrac{\partial x}{\partial v}(1,2) = \dfrac{1}{5}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u}(1,2) = \dfrac{2}{5}$

☐ $\dfrac{\partial x}{\partial v}(1,2) = -\dfrac{1}{5}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u}(1,2) = \dfrac{2}{5}$ ☐ $\dfrac{\partial x}{\partial v}(1,2) = \dfrac{1}{5}$ e $\dfrac{\partial y}{\partial u}(1,2) = -\dfrac{2}{5}$

[*1,5 valores*] 6. A função $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$ tem como pontos de estacionariadade os pontos:

☐ $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,-1)$. No primeiro não tem extremo no segundo tem um máximo relativo e no terceiro um mínimo relativo.

☐ $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,-1)$. No primeiro não tem extremo no segundo tem um mínimo relativo e no terceiro um máximo relativo.

☐ $(0,0)$ e $(1,1)$. Em nenhum deles tem extremos relativos.

☐ $(0,0)$, $(1,1)$. No primeiro não tem extremo e no segundo tem um mínimo relativo.

☐ $(0,0)$, $(-1,-1)$. No primeiro não tem extremo e no segundo tem um máximo relativo.

☐ $(0,0)$, $(1,1)$. No primeiro não tem extremo e no segundo tem um máximo relativo.

1º TESTE DE REPETIÇÃO DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2020/2021
08 DE JULHO DE 2021

GRUPO II

[*2 valores*] 1. Considere a função real f de duas variáveis reais, definida por

$$f(x,y) = \frac{\log(1-(x^2+y^2))}{x^2-y^2}.$$

Indique o seu domínio D e esboce-o. Indique o interior de D. Diga, justificando, se D é um conjunto aberto. O conjunto D é conexo? Justifique.

1. Resposta:

[*2,5 valores*] 2. Considere a função real de duas variáveis reais, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y+2x^5}{x^4+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & se \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que $f(x,y)$ não tem limite no ponto $(0,0)$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ por definição. Diga, justificando, se $f(x,y)$ é diferenciável no ponto $(0,0)$.

2. Resposta:

GRUPO III

[*2,5 valores*] 1. Mostre que a equação

$$e^{xz} + y\sin x - y^2 + z^3 + 2x = 2\pi$$

define x como função de y e de z numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, z_0) = (\pi, 1, 0)$. Para essa função, determine $\dfrac{\partial x}{\partial y}(1,0)$ e $\dfrac{\partial x}{\partial z}(1,0)$.

1. Resposta:

[*2,5 valores*] 2. Sendo $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, \rho) = (x,y,z)$ e $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (x^2+y^2, z) = (u,v)$ determine a matriz jacobiana de $h = f \circ g$.

2. Resposta:

GRUPO IV

[*1,5 valores*] 1. Seja f uma função real, definida num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^2$ e $a = (a_1, a_2)$ um ponto pertencente a D. Suponhamos que existem $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$. Mostre, detalhadamente que, sendo $\varepsilon(h_1, h_2)$ tal que

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 + ||(h_1, h_2)||\varepsilon(h_1, h_2),$$

se existir $\lim_{(h_1,h_2)\to 0} \varepsilon(h_1, h_2)$ este limite é necessariamente zero.

1. Resposta:

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*