AM3C – Teste 2024.2 Resolução

Felipe B. Pinto 71951 – EQB

13 de dezembro de 2024

Conteúdo

Grupo I

Questão 1

Avalie a convergencia das seguintes séries numéricas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\,\pi)}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^{n} (2\,k-1)$$

Resposta

Using (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) $\implies$ B e C divergentes e A convergente

$$\frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+2}{n}} - \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{1+2/n} - \sqrt{1+1/n}; \tag{1.1}$$

$$(-1)^n = \begin{cases} +1 & n = 2*m \\ -1 & n = 2*m-1 \end{cases}; \tag{1.2}$$

$$\cos(n\}, \pi) = \begin{cases} +1 & n = 2*m \\ -1 & n = 2*m-1 \end{cases}; \tag{1.3}$$

$$\frac{\prod_{k=1}^{n}(2\,k-1)}{n!} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2\,k-1)}{\prod_{k=1}^{n} k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2\,k-1}{k} = \prod_{k=1}^{n} 2 - 1/k \tag{1.4}$$

Questão 2

Considere a série de funções redútivel e avalie sua convergencia

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\,x+2}-\frac{1}{(n+1)\,x+2}\right), \quad x\in[0,1]$$

Resposta

Usando (1.5) A série converge uniformemente para a função identicamente nula

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\,x+2}-\frac{1}{(n+1)\,x+2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\,x+2+x-(n\,x+2)}{(n\,x+2)^2+(n\,x+2)\,x}\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{(n^2\,x^2+4\,n\,x+4)+(n\,x^2+2\,x)}\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2\,x+4\,n+x+2+4/x}\right) \tag{1.5}$$

Questão 3

A equação diferencial $x^2\,y'' + y - 4\,x\,y' + 6\,y = 0$ admite uma solução da forma $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n$. Então a sucessão (a_n) verifica a relação de recorrencia...

Resposta

$$a_{n+2} = \frac{n-3}{n+1}\,a_n, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Questão 4

A função $f(x)$ é par, periódica de período $p = 2$ e no intervalo $]0, 1[$ está definida por $f(x) = x$. Então a sua série de Fourrier é:

Resposta

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\pi} \frac{\cos(n\,\pi\,x)}{n^2}$$

Questão 5

A equação com derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial y} = y\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

com as condições $u(1,1) = e$ e $u(0,0) = 1$ admite uma solução da forma $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$. Então $u(1,0) = ?$

Resposta

$u(0,1) = \sqrt{e}$

Grupo II

Questão 1

Estude a convergencia da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{n^n\, n!}}{\boldsymbol{(2\, n)!}}$$

Resposta

$$\frac{n^n\, n!}{(2\, n)!} = \frac{\prod_{k=1}^{n} n \prod_{k=1}^{k}}{\prod_{k=1}^{2\, n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} n \prod_{k=1}^{n} k}{\prod_{k=1}^{n} k \prod_{k=n+1}^{2\, n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} n}{\prod_{k=n+1}^{2\, n} k} = \prod_{n+1}^{2\, n} \frac{n}{k} =$$

$$= \frac{n}{n+1} * \frac{n}{n+2} * \cdots * \frac{n}{2\, n-1} * \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{1+1/n} * \frac{1}{1+2/n} * \cdots * \frac{1}{1+(n-1)/n} * \frac{1}{2} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n} \implies$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\, n!}{(2\, n)!} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k/n} \approx \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$$

A série converge uniformemente para zero

Questão 2

Determine o intervalo de convêrgencia da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\, x^{2\,n}, \qquad \text{sug: Faça } t = x^2$$

Determine a soma de série no ponto $x = -1$. Designando por $f(x)$ a função que a série representa no seu intervalo de convergencia, determine, justificando, o valor de $f^{(21)}(0)$

Resposta

$$\frac{(-1)^n}{4^n}\, x^{2\,n} = \frac{(-1)^n}{4^n}\, t^n = (-1)^n\,(t/4)^n$$

$$\left\{\begin{matrix} \pm\infty(\text{diverge}) & : t > 4 \\ \pm 1 & : t = 4 \\ 0 & : t < 4 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} \pm\infty(\text{diverge}) & : |x| > 2 \\ \pm 1 & : |x| = 2 \\ 0 & : |x| < 2 \end{matrix}\right\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\,(-1)^{2\,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\,1^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{4^{2\,k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2\,k}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1+4}{4 * 4^{2\,k}} = \frac{3}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}$$

$$f^{(21)}(x) = \frac{(-1)^{21}}{4^{21}}\, 0^{2\,n} = \frac{-1}{4^{21}}$$

Grupo III

Questão 1

Acerca de uma função periódica $f(x)$ sabe-se que é contínua, tem derivada seccionalmente contínua e tem por série de Fourrier

$$\frac{2}{\pi} + \sin(2\,\pi\,x) - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\,n-1)(2\,n+1)}\,\cos(2\,n\,\pi\,x)$$

Diga justificando, a pariaridade e o período positivo mínimo da função $f(x)$. Sabendo que no ponto $x = 1/2$ a função toma o valor um, determine a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n-1)(2\,n+1)}$$

Grupo IV

Questão 1

Seja $f(x,y)$ uma solução da equação com derivadas parciais

$$\boldsymbol{x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+x\,\frac{\partial f}{\partial x}+y\,\frac{\partial f}{\partial y}=0}$$

e seja $g(s,t)=f(x,y)$ em que $x=e^s$ e $y=e^t$. Mostre que g é solução da equação de Laplace, isto é, satisfaz a equação

$$\boldsymbol{\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=0}$$