Número: ________ Curso: ________ Nome: ____

A primeira parte do teste é constituida por 5 questões de escolha múltipla. Nas questões 1 a 5 assinale com $\times$ a resposta correcta. Cada resposta correcta vale 1.0 valor. Respostas em branco valem 0 valores. Se responder erradamente ou de forma ambígua ser-lhe-á atribuída uma cotação negativa correspondente a 0.2 valores. Se a soma das cotações da escolha múltipla for negativa, será atribuído 0 valores à escolha múltipla.

Classificação
EM -
TOTAL-

1. Seja α a raiz da equação não linear $f(x) = 0$ e $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{c} + x$ com $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Qual das seguintes afirmações é falsa?

☐ **a)** Se $(c > 0 \wedge f'(\alpha) > 0)$ então α é ponto fixo repulsor de $\varphi(x)$.

☐ **b)** Se $(c < 0 \wedge 0 < f'(\alpha) < -2c)$ então α é ponto fixo atractor de $\varphi(x)$.

☐ **c)** Se $(c > 0 \wedge f'(\alpha) < -2c)$ então α é ponto fixo atractor de $\varphi(x)$.

☐ **d)** α é ponto fixo de $\varphi(x)$ qualquer que seja $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Considere a seguinte sucessão de vectores de $\mathbb{R}^n$ dada por

$$\begin{cases} X^{(0)} = [0\,0...0]^T, \\ X^{(k)} = GX^{(k-1)} + H, \ k = 1, 2, ... \end{cases}$$

com $H = [h_1\, h_2 ... h_n]^T$. Sabe-se que $\|G\|_1 = \frac{3}{2}$, $\|G\|_\infty = \frac{4}{3}$ e $\rho(G^T G) = 0.81$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

☐ **a)** A sucessão $X^{(k)}$ não é convergente para a solução do sistema $X = GX + H$ pois $\|G\|_1 > 1$ e $\|G\|_\infty > 1$.

☐ **b)** A sucessão $X^{(k)}$ é convergente para a solução do sistema $X = GX + H$ e $\left\|X - X^{(k)}\right\|_2 \leq 10(0.9)^k \sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2}$.

☐ **c)** A sucessão $X^{(k)}$ é convergente para a solução do sistema $X = GX + H$ e $\left\|X - X^{(k)}\right\|_\infty \leq 3(\frac{4}{3})^k \max_{1\leq i\leq n}\{|h_i|\}$

☐ **d)** A sucessão $X^{(k)}$ é convergente para a solução do sistema $X = GX + H$ e $\left\|X - X^{(k)}\right\|_\infty \leq 10(0.9)^k \max_{1\leq i\leq n}\{|h_i|\}$

3. Considere as funções $f(x) = e^x - 2$ e $g(x) = cos(e^x - 2)$. Seja $\alpha \in [0.5, 1.5]$ o ponto de interseção das duas funções anteriores. Seja $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ a sucessão gerada pelo método da bisseção convergente para α. Qual o valor da iterada x_3 e qual o número de iteradas k necessário para obter uma aproximação de α com 4 casas décimais significativas?

☐ **a)** $x_3 = 1.125$ e $k = 14$;

☐ **b)** $x_3 = 1.0625$ e $k = 13$;

☐ **c)** $x_3 = 1.125$ e $k = 13$;

☐ **d)** $x_3 = 1.0625$ e $k = 14$.

4. Seja α o único zero em $[a, b]$ da função não linear $f(x)$. Considere-se a sucessão convergente para α dada por

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, ... \end{cases}$$

tal que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se $f''(\alpha) = 0$, qual das seguintes afirmações é sempre verdadeira?

☐ **a)** A ordem de convergência de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é pelo menos $p = 3$.

☐ **b)** A ordem de convergência de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é $p = 2$.

☐ **c)** A ordem de convergência de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é $p = 1$.

☐ **d)** A ordem de convergência de $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é no máximo $p = 3$.

5. Seja $X^{(k)} = GX^{(k-1)} + H$, $k = 1, 2, ...$, um método iterativo com $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e $H \in \mathbb{R}^n$. Sejam $G_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - g_{ii}| \leq r_i\}$ os circulos de Gershgorin da matriz G, em que os elementos da diagonal da matriz G são dados por $g_{ii} = cos(i\pi)$ e $r_i \in]0, 1[$, com $i = 1..., n$. Qual das seguintes afirmações é sempre verdadeira?

☐ **a)** $\rho(G) < 2$ e o método iterativo não converge.

☐ **b)** $\rho(G) < 2$ e o método iterativo converge.

☐ **c)** $\rho(G) < 1$ e o método iterativo converge.

☐ **d)** $\rho(G) < 2$ e nada podemos concluir acerca da convergência do método iterativo.

A segunda parte do teste é constituida por 3 grupos de questões.
Cada resposta deverá estar convenientemente justificada.
Cotações: Questão 6: 5 valores; **Questão 7:** 7 valores; **Questão 8:** 3 valores.

6. Considere a função $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x + 1$ e o intervalo $I = [3, 4]$.
   (a) Verifique que existe um único zero α de $f(x)$ em I.
   (b) Verifique que se pode utilizar o método de Newton para obter uma aproximação para α no intervalo I.
   (c) Calcule a iterada x_2.
   (d) Determine uma estimativa para o erro absoluto associado a x_2.

7. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$S = \begin{cases} -2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

   e $X^{(0)} = [0 \;\; 0 \;\; 0]^T$. Considere nos cálculos 6 casas decimais devidamente arredondadas.
   (a) Verifique a convergência do método de Jacobi para a solução X^* do sistema S.
   (b) Utilizando o método de Jacobi determine $X^{(2)}$.
   (c) Determine o menor dos majorantes possíveis para $\left\| X^* - X^{(2)} \right\|_\infty$.
   (d) Sem calcular $X^{(50)}$, verifique se pode garantir 6 casas decimais significativas, para cada componente dessa iterada.

8. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = \log(t^y), \quad t \in [0.5, 1], \\ y(0.5) = 1. \end{cases}$$

   (a) Verifique se o problema é bem posto.
   (b) Determine um valor aproximado de $y(0.6)$ com 6 casas decimais devidamente arredondadas, pelo método de Taylor de ordem 3 com $h = 0.1$.

Resolução 2º Teste de Cálculo Numérico (26 de Junho 2020)

Questão 1

α raiz de $f(x)=0$, $\varphi(x)=\frac{f(x)}{c}+x$, $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Teorema 3

$|\varphi'(x)|=\left|\frac{f'(x)}{c}+1\right|$

$|\varphi'(\alpha)|<1 \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{c}+1\right|<1 \Leftrightarrow -1<\frac{f'(\alpha)}{c}+1<1 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\text{se } c<0 \wedge 0<f'(\alpha)<-2c \\ \text{se } c>0 \wedge -2c<f'(\alpha)<0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \text{ é ponto fixo atractor}$$

$|\varphi'(\alpha)|>1 \Rightarrow \left|\frac{f'(\alpha)}{c}+1\right|>1 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l}\text{se } c>0 \wedge f'(\alpha)<0 \\ \text{se } c<0 \wedge f'(\alpha)>-2c \\ \underline{\text{se } c>0 \wedge f'(\alpha)<-2c}\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\alpha \text{ é ponto fixo repulsor}}$$

se $c>0 \wedge f'(\alpha)>0$

opção correcta: c)

Questão 2:

$$\begin{cases} X^{(0)} = [0\ 0 \dots 0]^T \\ X^{(k)} = G X^{(k-1)} + H, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$H = [h_1\ h_2 \dots h_n]^T$.

$\|G\|_1 = \frac{3}{2}$, $\|G\|_\infty = \frac{4}{3}$ e $\rho(G^T G) = 0.81$

$\|G\|_1 > 1$ e $\|G\|_\infty > 1$

$\|G\|_2 = \sqrt{\rho(G^T G)}$ norma matricial induzida pela norma euclidiana

$\|G\|_2 = \sqrt{0.81} = 0.9 < 1$

$\Rightarrow$ $\|G\| < 1$ para alguma norma matricial induzida por uma norma vectorial $\Rightarrow$ a sucessão $X^{(k)}$ é convergente

$$\|X - X^{(k)}\|_2 \leq \frac{\|G\|_2^k}{1 - \|G\|_2} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_2$$

$X^{(1)} = [h_1\ h_2 \dots h_n]^T$ dado que $X^{(0)} = [0\ 0 \dots 0]^T$

$\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_2 = \|X^{(1)}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}$ logo

$$\|X - X^{(k)}\|_2 = \frac{0.9^k}{1 - 0.9} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2} = 10 \times 0.9^k \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}$$

Opção correcta: b)

Questão 3

$f(x) = e^x - 2$ e $g(x) = \cos(e^x - 2)$

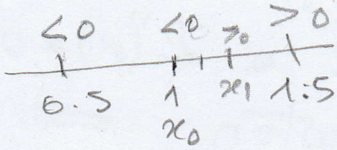
α ponto de inteseção entre f e g, $\alpha \in [0.5, 1.5]$

$e^x - 2 - \cos(e^x - 2) = 0 \iff h(x) = 0$

$h(0.5) < 0$

$h(1.5) > 0$

Método da Bissecão



$x_0 = \dfrac{0.5 + 1.5}{2} = 1$

$h(1) < 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1 + 1.5}{2} = 1.25$

$h(1.25) > 0 \Rightarrow x_2 = \dfrac{1 + 1.25}{2} = 1.125$

$h(1.125) > 0 \Rightarrow x_3 = \dfrac{1 + 1.125}{2} = 1.0625$

$|\alpha - x_k| < \dfrac{b-a}{2^{k+1}}$

$\dfrac{b-a}{2^{k+1}} < 0.5 \times 10^{-4} \Rightarrow |\alpha - x_k| < 0.5 \times 10^{-4}$

$\iff \dfrac{1}{2^{k+1}} < 0.5 \times 10^{-4}$

$k > \dfrac{\log(1) - \log(0.5 \times 10^{-4})}{\log(2)} - 1 \cong 13.28771$

$k = 14$

opção correcta: d)

Questão 4

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_k = x_{k-1} - \dfrac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $f''(\alpha) = 0$

Método de Newton $\Longrightarrow$ $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

(caso particular do método do ponto fixo)

Teorema da ordem de convergência

$$\varphi'(x) = 1 - \left(\frac{f'(x) \times f'(x) - f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} \right) =$$

$$= \frac{\cancel{(f'(x))^2} - \cancel{(f'(x))^2} + f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$\varphi'(\alpha) = 0$ porque $f(\alpha) = 0$ e $f''(\alpha)$

Dado que a $\varphi'(\alpha) = 0$ vamos calcular $\varphi''(\alpha)$

$$\varphi''(x) = \frac{(f'(x) f''(x) + f(x) f'''(x)) \cancel{(f'(x))^2} - f(x) f''(x) (2 \cancel{f'(x)} f''(x))}{(f'(x))^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{(f'(x))^2 f''(x) + f(x) f'(x) f'''(x) - 2 f(x) (f''(x))^2}{(f'(x))^3}$$

$$\varphi''(\alpha) = \frac{(f'(\alpha))^2 \overset{=0}{f''(\alpha)} + \overset{=0}{f(\alpha)} f'(\alpha) f'''(\alpha) - 2 \overset{=0}{f(\alpha)} (\overset{=0}{f''(\alpha)})^2}{(f'(\alpha))^3}$$

$\varphi''(\alpha) = 0$, pois $f(\alpha) = 0$ e $f''(\alpha) = 0$

Dado que $\varphi''(\alpha) = 0$, duas situações podem ocorrer:

$\varphi'''(\alpha) \neq 0$ ou $\varphi'''(\alpha) = 0 \Rightarrow p = 3$ ou $p > 3$

$\Rightarrow$ a ordem de convergencia p e pelo menos 3

opção correcta: a)

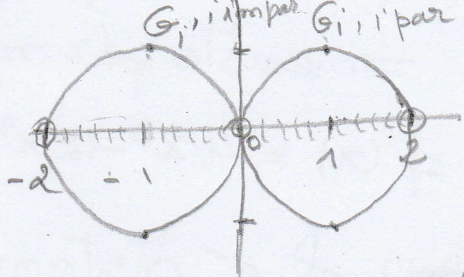
Questão 5.

5. $X^{(k)} = GX^{(k-1)} + H \quad , k = 1, 2, \dots$

$G_i = \{ z \in \mathbb{C} : |z - g_{ii}| \leq r_i \}$ $\qquad g_{ii} = \cos(i\pi) \; , i = 1, \dots, n \; ; r_i \in]0,1[$

Por teorema sabemos que $\sigma(G) \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i$

$g_{ii} = \cos(i\pi) = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ par} \\ -1 & \text{se } i \text{ ímpar} \end{cases}$



Logo sendo $\rho(G)$ o maior dos valores próprios em módulo de G $\rho(G)$ está contido nos círculos G_i com centro $g_{ii} = 1$ ou -1 e raio $0 < r_i < 1$, logo só podemos dizer que $0 < \rho(G) < 2$, pelo que nada podemos concluir acerca da convergência do método iterativo, pois tanto pode convergir (se $\rho(G) < 1$) como divergir (se $1 \leq \rho(G) < 2$).

Opção correcta: d)

Questão 6

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x + 1 \quad , \quad I = [3,4]$

a) f é contínua em I pois é polinómio

$f(3) = -2 \; , \; f(4) = 33 \implies f(3) \times f(4) < 0$

$\implies$ existe pelo menos 1 zero de $f(x)$ em I

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8 = \underbrace{4x^2}_{>0}\underbrace{(x-3)}_{\geq 0} + \underbrace{8}_{>0} > 0 \quad \forall x \in I$ em I

$\implies f$ é estritamente crescente em I

logo esse zero é único em I

b) Condições de convergência do método de Newton

- f, f' e f'' contínuas em I

- $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I$

$f''(x) = 12x^2 - 24x = \underbrace{12x}_{>0}\underbrace{(x-2)}_{>0} > 0 \quad \forall x \in I$ em I

logo f' e f'' não se anulam em I

Considere-se $x_0 = 4$, $f(4) = 33 > 0$ e $f''(4) > 0 \implies$

$\implies f(4)f''(4) > 0$ logo a sucessão

$$\begin{cases} x_0 = 4 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}$$

converge e podemos usar o método de Newton.

c) $x_1 = 4 - \dfrac{f(4)}{f'(4)} \simeq 3.541667$

$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 3.286614$

6.d) $0 < m_1 \leq |f'(x)|$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0, \forall x \in I \\ f''(x) > 0, \forall x \in I \end{array}\right\} \Rightarrow |f'(x)| = f'(x) \text{ e } f'(x) \text{ é estritamente crescente em } I$$

logo $m_1 = f'(3) = 8$

$|f''(x)| \leq M_2$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) > 0, \forall x \in I \\ f'''(x) = 24x - 24 > 0 \ \forall x \in I \end{array}\right\} \Rightarrow |f''(x)| = f''(x) \text{ e } f''(x) \text{ é estritamente crescente em } I$$

logo $M_2 = f''(4) = 96$

$$|\alpha - x_2| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_2 - x_1)^2 = \frac{96}{2 \times 8}(3.286614 - 3.541667)$$

$$= 0.3903\ldots < 0.391$$

Questão 7

$$S = \begin{cases} -2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \qquad X^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$$

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ A não tem diagonal estritamente dominante mas se trocarmos as linha da seguinte forma

$A' = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ tem-se $|5| > |1| + |3| = 4$

$|3| > |-1| + 1 = 2$

$|4| > 0 + |-2| = 2$

logo a matriz já tem diagonal estritamente dominante e o método de Jacobi converge para X^* solução do sistema S, uma vez que $Ax = B \Leftrightarrow A'X = B$ com $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) Método de Jacobi

$$\begin{cases} x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T \\ x^{(k)} = G_J X^{(k-1)} + H_J,\ k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

onde $G_J = D^{-1}(L+U)$ $\quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$

$H_J = D^{-1} B$

$$G_J = \begin{bmatrix} 0 & -1/5 & -3/5 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \qquad H_J = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

$$X^{(1)} = G_J X^{(0)} + H = H = [1/5\ \ 1/3\ \ 1/4]^T$$

$$X^{(2)} = G_J X^{(1)} + H = [-1/60\ \ 19/60\ \ 5/12]^T \simeq \begin{bmatrix} -0.016667 \\ 0.316667 \\ 0.416667 \end{bmatrix}$$

7. c) $\|x^* - x^{(2)}\|_\infty \leq \dfrac{\|G_J\|_\infty}{1-\|G_J\|_\infty} \|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty$ erro à posteriori

$\|G_J\|_\infty = \max\{4/5, 2/3, 1/2\} = 4/5 = 0.8 < 1$

$$x^{(2)} - x^{(1)} = \begin{bmatrix} -1/60 \\ 19/60 \\ 5/12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/3 \\ 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13/60 \\ -1/60 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

$\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = \max\left(\frac{13}{60}, \frac{1}{60}, \frac{1}{6}\right) = \frac{13}{60} \simeq 0.216667$

$\|x^* - x^{(2)}\|_\infty \leq \frac{0.8}{1-0.8} \times 0.216667 < 0.866667$

erro à priori

$\|x^* - x^{(2)}\|_\infty \leq \dfrac{(\|G_J\|_\infty)^2}{1-\|G_J\|_\infty} \times \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \dfrac{0.8^2}{0.2} \times \dfrac{1}{3} < 1.066667$

$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = \|x^{(1)}\| = \max(1/5, 1/3, 1/4) = \frac{1}{3}$

logo o menor dos majorantes possíveis é 0.866667

d) $\|x^* - x^{(50)}\|_\infty \leq \dfrac{\|G\|_\infty^{50}}{1-\|G\|_\infty} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$ erro à priori

$\|x^* - x^{(50)}\|_\infty \leq \dfrac{0.8^{50}}{0.2} \times \dfrac{1}{3} \leq 0.24 \times 10^{-4} > 0.5 \times 10^{-6}$

logo nao poderemos garantir 6 c.d.s para $x^{(50)}$, apenas 4 c.d.s.

Questão 8

8. $\begin{cases} y'(t) = \log(t^y) & t \in [0.5, 1] \\ y(0.5) = 1 \end{cases}$

a) $f(t,y) = \log(t^y) = y\log(t)$

$D = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : 0.5 \leq t \leq 1 \ , \ y \in \mathbb{R}\}$

- f é contínua em D pois é um logaritmo
- f satisfaz a condição de Lipchitz?

$\forall (t,y_1), (t,y_2) \in D \quad |f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$

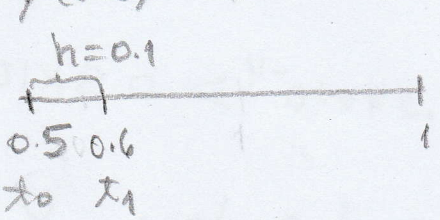
$L > 0$ constante de Lipchitz

$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = |y_1\log(t) - y_2\log(t)| = |\log(t)|\,|y_1 - y_2|$

$|\underbrace{\log(t)}_{\leq 0 \text{ em } [0.5,1]}| \leq -\log(0.5) < 0.6932 = L > 0$ logo o problema é bem posto

ou então $\left|\dfrac{\partial f(t,y)}{\partial y}\right| = |\log(t)| \leq 0.6932 = L$

b) $y(0.6) \simeq ?$ método de Taylor de ordem 3 e $h = 0.1$



$y(0.6) \simeq w_1$

$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_1 = w_0 + hf(t_0,w_0) + \dfrac{h^2}{2}f'(t_0,w_0) + \dfrac{h^3}{3!}f''(t_0,w_0) \end{cases}$

$f(t_0,w_0) = f(0.5,1) = \log(0.5) \simeq -0.693147$

$f'(t,y) = \dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \times y'(t) = \dfrac{y}{t} + \log(t)\,y\log(t) = \underbrace{\dfrac{y}{t}}_{f_1} + \underbrace{\log^2(t)y}_{f_2}$

$f'(t_0,w_0) = \dfrac{1}{0.5} + \log^2(0.5) \simeq 2.480453$

8.b cont.

$$f''(t,y) = \frac{\partial f'}{\partial t} + \frac{\partial f'}{\partial y} y'(t) = -\frac{y}{t^2} + \frac{2\log(t)y}{t} + \left(\frac{1}{t} + \log^2 t\right) y \log t$$

$$= -\frac{y}{t^2} + \frac{2\log(t)y}{t} + \frac{\log(t)y}{t} + \log^3(t)y$$

$$= -\frac{y}{t^2} + \frac{3\log(t)y}{t} + \log^3(t)y$$

$$f''(t_0,w_0) = f''(0.5,1) = -\frac{1}{0.5^2} + \frac{3\log(0.5)}{0.5} + \log^3(0.5) \simeq -8.491908$$

$$w_1 \simeq 1 + 0.1 \times (-0.693147) + \frac{0.01}{2} \times 2.480453 + \frac{0.001}{6} \times (-8.491908)$$
$$\simeq 0.941672$$

$$y(0.6) \simeq 0.941672$$