AM 2C – Anotações 0: Cónicas

Felipe B. Pinto 61387 – MIEQB

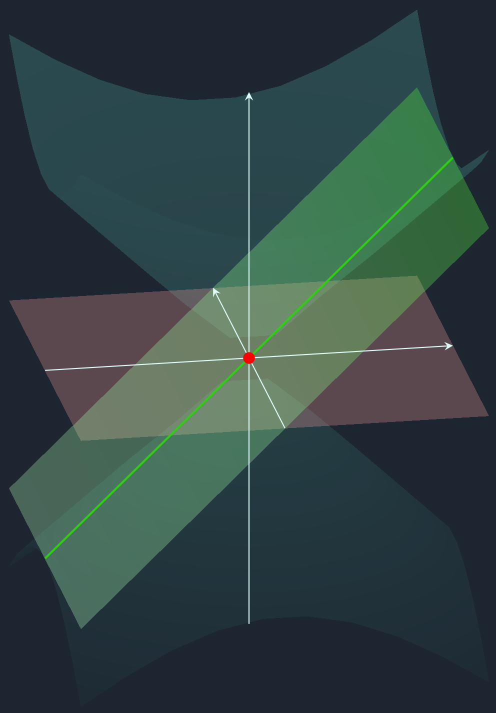
31 de outubro de 2022

Conteúdo

1 Cônicas

Definições

Intersecção de um plano com um cone



Focos e Diretrizes

$$\mathcal{C}on_m \subset \mathbb{R}^m : |\overrightarrow{PF}| = e|\overrightarrow{PD}|$$

$$\begin{pmatrix} \quad P \in \mathcal{C}on_m & \wedge \\ \wedge\, F \in \mathbb{R}^m & \wedge \\ \wedge\, D \subset \mathbb{R}^m & \wedge \\ \wedge\, e \in \mathbb{R} & \end{pmatrix}$$

1.1 Ecentricidade

Podemos classificar as conicas em grupos distintos pela ecentricidade

$$\begin{aligned} e = 0 &\quad\Longrightarrow\quad \text{Circunferencia} \\ 0 < e < 1 &\quad\Longrightarrow\quad \text{Elipse} \\ e = 1 &\quad\Longrightarrow\quad \text{Parabola} \\ e > 1 &\quad\Longrightarrow\quad \text{Hipérbole} \\ \lim(e) = \infty &\quad\Longrightarrow\quad \text{Reta} \end{aligned}$$

Para encontrar a eccentricidade de uma conica podemos usar imágens simétricas de mesma eccentricidade para que esta seja nula

$$|\overrightarrow{PF_1}| \Big/ |\overrightarrow{PD_1}| = |\overrightarrow{PF_2}| \Big/ |\overrightarrow{PD_2}|$$

Notas:

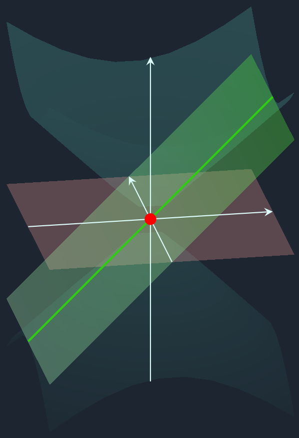
- Em parabolas temos $e = 1$ desnessitando tal ferramenta
- Em elipses a imagem da original é sobreposta com sua simétrica

2 Degeneração

Quando o plano que intersecta a superfície cônica contem o vértice da superfície cônica está é considerada degenerada

Degeneradas

- Ponto
- Reta
- Módulo



Não Degeneradas

- Parábolas
- Elípses
- Hipérboles

3 Expressão geral

$$\mathcal{C}on_m \subset \mathbb{R}^n : \left\{(\lambda^T + (p - p^{'})^T A)(p - p^{'}) = k \quad \right\}$$

$$\begin{pmatrix} \quad \{\lambda, p^{'}\} \subset \mathbb{R}^n & \wedge \\ \wedge\, p \in \mathcal{C}_m & \wedge \\ \wedge\, A \in \mathcal{M}_{n\times n} & \wedge \\ \wedge\, k \in \mathbb{R} & \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{PF}| = e\,|\overrightarrow{PD}| \implies$$
$$\implies \sqrt{(x - x')^2 + (y - (y' + c))^2} = e\,\sqrt{(x - x')^2 + (y - (y' - e\,c))^2} \ldots$$

Forma canônica

$$\mathcal{C}on_m \subset \mathbb{R}^n : \left\{(\lambda^T + p^T A)p = k\right\}$$

$$\begin{pmatrix} \quad \{\lambda, p^{'}\} \subset \mathbb{R}^n & \wedge \\ \wedge\, p \in \mathcal{C}on_m & \wedge \\ \wedge\, A \in \mathcal{M}_{n\times n} : \left\{a_{i,j} = 0 \forall\, i \neq j\right. & \wedge \\ \wedge\, k \in \mathbb{R} & \end{pmatrix}$$

Despresa:

- Ponto central (p')
- Rotações (apenas matrizes A diagonais)

para $\mathbb{R}^2$ e $p' = 0_2$

$$\left(\begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -f \implies$$
$$\implies a\,x^2 + b\,y^2 + c\,x\,y + d\,x + e\,y + f = 0$$

Para $\mathbb{R}^3$ e $p' = 0_3$

$$\left(\begin{bmatrix} g \\ h \\ i \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -j \implies$$
$$\implies a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + d\,x\,y + e\,x\,z + f\,y\,z +$$
$$+ g\,x + h\,y + i\,z + j = 0$$

4 Espaço

Equação vetorial

$$E_m \subset \mathbb{R}^n : \left\{ P = A + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, U_i \right\}$$

$$\left(\begin{array}{lll} & \{P, A\} \subset E & \land \\ \land & \{i, n, m\} \subset \mathbb{N} & \land \\ \land & m \leq n & \end{array} \right)$$

Equações paramétricas

$$P_i = A_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{j,i} \, U_{j,i}$$

Exemplos

- $m = 0 \implies$ ponto
- $m = 1 \implies$ reta
- $m = 2 \implies$ plano

5 Reta

Equação vetorial

$$r \subset \mathbb{R}^n : \{P = A + \lambda U\}$$

$$\begin{pmatrix} \{P, A\} \in r & \land \\ \land\, U \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_{\mathbb{R}^n}\} & \land \\ \land\, \lambda \in \mathbb{R} & \end{pmatrix}$$

Definem uma reta:

- 2 Pontos
- 1 Ponto e 1 vetor

Vetor diretor: Vetor não nulo paralelo a reta

Equações cartezianas

(i) Equações paramétricas

$$P_i = A_i + \lambda U_i \quad \forall\, i \le n$$

(ii) Equações normais

$$\left\{\begin{matrix} P_i = A_i + \lambda U_i & \land \\ \land\, P_j = A_j + \lambda U_j & \end{matrix}\right\} \implies \lambda = \frac{P_i - A_i}{U_i} = \frac{P_j - A_j}{U_j}$$
$$\begin{pmatrix} \{i, j\} \le n & \land \\ \land\, \{U_i, U_j\} \ne 0 & \end{pmatrix}$$

(iii) Equações reduzidas

$$r \subset \mathbb{R}^n : \left\{ P_i = A_i' + P_j\, U_i' \right\}$$

$$\begin{pmatrix} \quad \{i, j\} \in \mathbb{N} & \wedge \\ \wedge\, \{i, j\} \leq n & \wedge \\ \wedge\, i \neq j & \wedge \\ \wedge\, U_i' = U_i / U_j & \wedge \\ \wedge\, A_i' = A_i - A_j\, U_i' & \wedge \\ \wedge\, U_j \neq 0 & \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \quad P_i = A_i + \lambda\, U_i & \wedge \\ \wedge\, \lambda = (P_j - A_j)/U_j : U_j \neq 0 & \end{array} \right\} \implies$$
$$\implies P_i = A_i + U_i\, (P_j - A_j)/U_j =$$
$$= A_i' + U_i'\, P_j : \left\{ \begin{array}{ll} \quad U_i' = U_i/U_j & \wedge \\ \wedge\, A_i' = A_i - A_j\, U_i' & \wedge \\ \wedge\, U_j \neq 0 & \end{array} \right\}$$

Reduzida pois possui uma equação a menos comparando com as equações cartezianas

6 Plano

Equação vetorial

$$\pi \in \mathbb{R}^n : \left\{P = A + \sum_{j=1}^{2} \lambda_j U_j\right\}$$

$$\begin{pmatrix} \{P, A\} \in \pi & \land \\ \land \{n, j\} \in \mathbb{N} & \land \\ \land n \geq 2 & \land \\ \land \lambda \in \mathbb{R}^2 & \land \\ \land U_j \in \mathbb{R}^n \,\forall\, j & \end{pmatrix}$$

Definem um plano:

- 3 Pontos
- 1 Ponto e 1 Vetor
- 1 Ponto e 2 vetores não paralelos

Vetores diretores: Vetores não nulos e não colineares paralelos ao plano.

Equações cartesianas

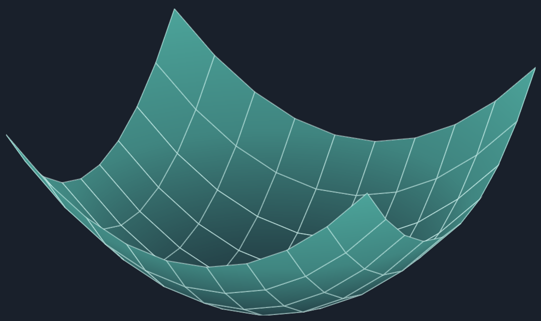
(i) Equações paramétricas

$$P_i = A_i + \sum_{j=1}^{2} \lambda_{j,i} U_{j,i}$$

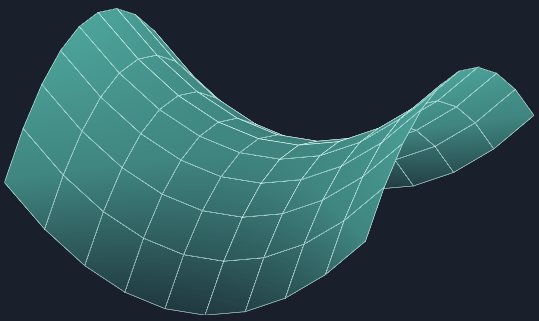
(ii) Equação geral

$$A + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i = 0$$

7 Parabolas e Paraboloides



Elíptico



Hiperbólico

Definição

$$\mathcal{P}ar_m \subset \mathcal{C}on_m : e = 1$$

Um conjunto que consiste em todos os pontos em um plano equidistantes de um determinado ponto fixo e uma determinada linha fixa no plano é uma parábola. O ponto fixo é o foco da parábola. A linha fixa é a diretriz.

7.1 Parabolas em $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{P}ar_2 \subset \mathcal{C}on_2 : (\lambda^T + (p - p^{'})A)(p - p^{'}) = k \implies$$

$$\implies \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} x - x^{'} \\ y - y^{'} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{4\,a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x - x^{'} \\ y - y^{'} \end{bmatrix} = 0 \implies$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} y = \dfrac{(x - x^{'})^2}{4\,a} + y^{'} \\ \vee \\ x = \sqrt{4\,a(y - y^{'})} + x^{'} \end{array} \right\} \implies$$

$$\implies y = x^2 \left(\frac{1}{4\,a} \right) + x \left(\frac{-x^{'}}{2\,a} \right) + \left(\frac{x^{'2}}{4\,a} + y^{'} \right)$$

$$f \in \mathbb{R}^2 : (x^{'}, y^{'} + a)$$
$$L \subset \mathbb{R}^2 : y = y^{'} - a$$

Demonstração

$$|\overrightarrow{p\,f}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - (a + y'))^2} =$$
$$= |\overrightarrow{p\,L}| = \sqrt{(x - x)^2 + (y - (-a + y'))^2} \implies$$
$$\implies (x - x')^2 + ((y - y') - a)^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 - 2\,a(y - y') + a^2 =$$
$$= ((y - y') + a)^2 = (y - y')^2 + 2\,a(y - y') + a^2 \implies$$
$$\implies y = \frac{(x - x')^2}{4\,a} + y' \vee x = \sqrt{4\,a(y - y')} + x'$$

Partindo da forma reduzida

$$y = \alpha\, x^2 + \beta\, x + \gamma \implies$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} a = (4\,\alpha)^{-1} \\ x^{'} = -\beta\, 2\, a = -\beta / 2\, \alpha \\ y^{'} = \gamma - x^{'2} / 4\, a = \gamma - (\beta^2 / 4\, \alpha) \end{array} \right\}$$

7.2 Parabolas em $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{P}ar_3 \subset \mathcal{C}on_3 : (\lambda^T + (p - p^{'}) A)(p - p^{'}) = k \implies$$

$$\implies \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} x - x^{'} \\ y - y^{'} \\ z - z^{'} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4\,a & 0 & 0 \\ 0 & 4\,b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x - x^{'} \\ y - y^{'} \\ z - z^{'} \end{bmatrix} =$$

$$= 0 \implies z = \frac{(x - x^{'})^2}{4\,a} + \frac{(y - y^{'})^2}{4\,b} + z^{'}$$

Demonstração

$$
\begin{aligned}
& p \in \{p \in \mathcal{P}ar_3 : y = y'\} \implies \\
& \implies |\overrightarrow{p\,f}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y' - y')^2 + (z - (z' + a))^2} = \\
& = |\overrightarrow{p\,L}| = \sqrt{(x - x)^2 + (y' - y')^2 + (z - (z' - a))^2} \implies \\
& \implies (x - x')^2 + (z - z')^2 - 2\,a(z - z') + a^2 = \\
& = (z - z')^2 + 2\,a(z - z') + a^2 \implies \\
& \implies z = \frac{(x - x')^2}{4\,a} + z'
\end{aligned}
$$

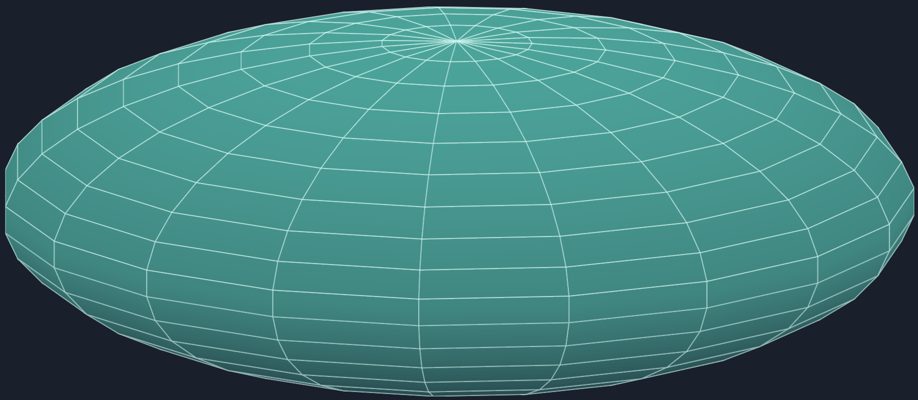
$$
\begin{aligned}
& p \in \{p \in \mathcal{P}ar_3 : x = x'\} \implies \\
& \implies |\overrightarrow{p\,f}| = \sqrt{(x' - x')^2 + (y - y')^2 + (z - (z' + b))^2} = \\
& = |\overrightarrow{p\,L}| = \sqrt{(x' - x')^2 + (y - y')^2 + (z - (z' - b))^2} \implies \\
& \implies (y - y')^2 + (z - z')^2 - 2\,b(z - z') + b^2 = \\
& = (z - z')^2 + 2\,b(z - z') + b^2 \implies \\
& \implies z = \frac{(y - y')^2}{4\,b} + z'
\end{aligned}
$$

$$
\therefore z = \frac{(x - x')^2}{4\,a} + \frac{(y - y')^2}{4\,b} + z'
$$

Paraboloide Hiperbólico: Possume um dos termos negativos.

$$
\mathcal{P}ar_3 : b < 0 \veebar a < 0
$$

8 Elipse e Elipsóides



Definição

$$\mathcal{E}li_m \subset \mathcal{C}on_m : 0 < e < 1 \implies$$
$$\implies |\overrightarrow{f_1\, p}| + |\overrightarrow{f_2\, p}| = k \qquad (k \in \mathbb{R})$$

Uma elipse é o conjunto de pontos em um plano cujas distâncias de dois pontos fixos no plano têm uma soma constante. Os dois pontos fixos são os focos da elipse.

A linha através dos focos de uma elipse é o eixo focal da elipse. O ponto no eixo a meio caminho entre os focos é o centro. Os pontos onde o eixo focal e a elipse se cruzam são os vértices da elipse.

Ecentricidade

$$e = \frac{|\overrightarrow{p'\, f}|}{\mathbf{max}(|\overrightarrow{p'\, p}|)}$$

8.1 Elipses em $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{E}li_2 \subset \mathcal{C}on_2 : ((p - p^{'})^T A)\,(p - p^{'}) = 1 \implies$$
$$\implies \left(\begin{bmatrix} x - x^{'} \\ y - y^{'} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} r_1^{-2} & 0 \\ 0 & r_2^{-2} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x - x^{'} \\ y - y^{'} \end{bmatrix} = 1 \implies$$
$$\implies \frac{(x - x^{'})^2}{r_1^2} + \frac{(y - y^{'})^2}{r_2^2} = 1$$

$$A \cup \{c\} \subset \mathbb{R}^+ : c < r_1 > r_2$$
$$r_1 = |\overrightarrow{p^{'}\,p}| : p = (\mathbf{max}(x), y^{'})$$
$$r_2 = |\overrightarrow{p^{'}\,p}| : p = (x^{'}, \mathbf{max}(y))$$
$$c = |\overrightarrow{p^{'}\,f}| = \sqrt{r_1^2 - r_2^2}$$

$$f_1 \in \mathbb{R}^2 : f_1 = (x^{'} - c, y^{'})$$
$$f_2 \in \mathbb{R}^2 : f_1 = (x^{'} + c, y^{'})$$

Demonstração

$$|\overrightarrow{p\,f_1}| + |\overrightarrow{p\,f_2}| = k \wedge \{f_1, f_2\} \subset \mathbb{R}^2 : |\overrightarrow{p'\,f}| = c \wedge y = y' \implies$$
$$\implies \sqrt{(x - (x' - c))^2 + (y - y')^2} + \sqrt{(x - (x' + c))^2 + (y - y')^2} = 2\,r_1 \implies$$
$$\implies \frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_1^2 - c^2} = 1 \wedge r_2^2 + c^2 = r_1^2 \implies \frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} = 1$$

8.2 Elípses em $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{E}li_3 \subset \mathcal{C}on_3 : ((p-p^{'})^T A)(p-p^{'}) = 1 \implies$$
$$\implies \left(\begin{bmatrix} x-x^{'} \\ y-y^{'} \\ z-z^{'} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} r_1^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & r_2^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r_3^{-2} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x-x^{'} \\ y-y^{'} \\ z-z^{'} \end{bmatrix} = 1 \implies$$
$$\implies \frac{(x-x^{'})^2}{r_1^2} + \frac{(y-y^{'})^2}{r_2^2} + \frac{(z-z^{'})^2}{r_3^2} = 1$$

$$A \cup \{c\} \subset \mathbb{R}^+ : c < r_1 \wedge r_2 < r_1 > r_3$$
$$r_1 = |\overrightarrow{p^{'}p}| : p = (\mathbf{max}(x), y^{'}, z^{'})$$
$$r_2 = |\overrightarrow{p^{'}p}| : p = (x^{'}, \mathbf{max}(y), z^{'})$$
$$r_3 = |\overrightarrow{p^{'}p}| : p = (x^{'}, y^{'}, \mathbf{max}(z))$$
$$c = |\overrightarrow{p^{'}f}|$$

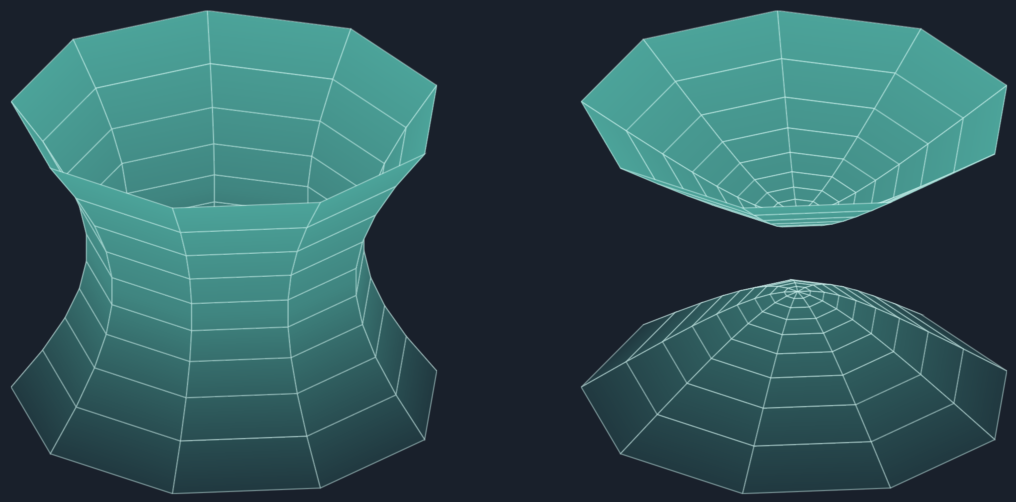
$$f_1 \in \mathbb{R}^3 : f_1 = (x^{'} - c, y^{'}, z^{'})$$
$$f_2 \in \mathbb{R}^3 : f_1 = (x^{'} + c, y^{'}, z^{'})$$

8.3 Parametrização em $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{E}li_3 \subset \mathbb{R}^3 : e = e^{'} + \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{cos}(\theta)\ \mathbf{cos}(\lambda) \\ \mathbf{cos}(\theta)\ \mathbf{sin}(\lambda) \\ \mathbf{sin}(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e \in \mathcal{E}li_3 & \wedge \\ \wedge \{e^{'}, \lambda\} \subset \mathbb{R}^3 & \wedge \\ \wedge \{\theta, \lambda\} \subset \mathbb{R} & \wedge \\ \wedge |\theta| \leq \pi/2 & \wedge \\ \wedge 0 \leq \lambda \leq 2\,\pi & \end{pmatrix}$$

9 Hiperboles e Hiperbolóides



Definição

$$\mathcal{H}ip_m \subset \mathcal{C}on_m : e > 1 \implies$$
$$\implies \left| |\overrightarrow{PF_1}| - |\overrightarrow{PF_2}| \right| = k \quad (k \in \mathbb{R})$$

Uma hipérbole é o conjunto de pontos em um plano cujas distâncias de dois pontos fixos no plano têm uma diferença constante. Os dois pontos fixos são os focos da hipérbole.

A linha através dos focos de uma hipérbole é o eixo focal. O ponto no eixo a meio caminho entre os focos é o centro da hipérbole. Os pontos onde o eixo focal e a hipérbole se cruzam são os vértices

Eccentricidade

$$e = \left|\overrightarrow{P' F}\right| \Big/ \left|\overrightarrow{P' V}\right|$$

9.1 Hipérboles em $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{H}ip_2 \subset \mathcal{C}on_2 : \left((P-P^{'})^T A\right)(P-P^{'}) = 1 \implies$$
$$\implies \left(\begin{bmatrix} x-x^{'} \\ y-y^{'} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/r_1^2 & 0 \\ 0 & -1/r_2^2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x-x^{'} \\ y-y^{'} \end{bmatrix} = 1 \implies$$
$$\implies \left(\frac{x}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{y}{r_2}\right)^2 = 1$$

$$c = |\overrightarrow{P^{'}F}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$
$$V = (x^{'} \pm r_1, y^{'})$$
$$f = (x^{'} \pm c, y^{'})$$

Demonstração

$$
\begin{aligned}
&2\,r_1 = |PF_2| - |PF_1| = \\
&= \sqrt{(x-(x'-c))^2+(y-y')^2} - \sqrt{(x-(x'+c))^2+(y-y')^2} \implies \\
&\implies \left(2\,r_1 + \sqrt{(x-(x'+c))^2+(y-y')^2}\right)^2 = \\
&= 4\,r_1^2 + 4\,r_1\sqrt{(x-x'-c)^2+(y-y')^2} + \left((x-(x'+c))^2+(y-y')^2\right) = \\
&= 4\,r_1^2 + 4\,r_1 \left(\sqrt{\begin{matrix}(x-x')^2\\ -2\,c\,(x-x')+c^2\\ +(y-y')^2\end{matrix}}\right) + \begin{pmatrix}+(x-x')^2\\ -2\,c(x-x')\\ +c^2\\ +(y-y')^2\end{pmatrix} = \\
&= \left(\sqrt{(x-(x'-c))^2+(y-y')^2}\right)^2 = \begin{pmatrix}(x-x')^2\\ +2\,c\,(x-x')\\ +c^2\\ +(y-y')^2\end{pmatrix} \implies
\end{aligned}
$$

$$\implies \frac{c\,(x-x')}{r_1} - r_1 = \sqrt{\begin{matrix}(x-x')^2 \\ -2\,c\,(x-x') \\ +c^2 \\ +(y-y')^2\end{matrix}} \implies$$

$$\implies \left(\frac{c\,(x-x')}{r_1} - r_1\right)^2 = \left(\begin{matrix}\dfrac{c^2\,(x-x')^2}{r_1^2} \\ -2\,c\,(x-x') \\ +r_1^2\end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix}(x-x')^2 \\ -2\,c\,(x-x') \\ +c^2 \\ +(y-y')^2\end{matrix}\right) \implies$$

$$\implies \left(\frac{x-x'}{r_1}\right)^2 (c^2 - r_1^2) - (y-y')^2 = c^2 - r_1^2 \implies$$

$$\implies \left(\frac{x-x'}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{y-y'}{\sqrt{c^2-r_1^2}}\right)^2 = \left(\frac{x-x'}{r_1}\right)^2 - \left(\frac{y-y'}{r_2}\right)^2 = 1$$

(i) Assintotas

$$A(\mathcal{H}ip_2) = \left\{(x,y) : (y-y^{'}) = \pm\frac{r_2}{r_1}(x-x^{'})\right\}$$

9.2 Hipérboles em $\mathbb{R}^3$

Hiperbole de 1 folha

$$\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}1/a^2 & 0 & 0\\ 0 & 1/b^2 & 0\\ 0 & 0 & -1/c^2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 1 \implies$$
$$\implies \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Hiperbole de 2 folha

$$\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}1/a^2 & 0 & 0\\ 0 & -1/b^2 & 0\\ 0 & 0 & -1/c^2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 1 \implies$$
$$\implies \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(i) Equações paramétricas para $\mathbb{R}^3$

unica folha

$$\begin{cases} x = a\,\mathbf{cosh}(v)\,\mathbf{cos}(\theta)\\ y = b\,\mathbf{cosh}(v)\,\mathbf{sin}(\theta)\\ z = c\,\mathbf{sinh}(v)\end{cases}$$
$$\begin{cases} v \in (-\infty,\infty)\\ \theta \in [0, 2\,pi)\end{cases}$$

duas folhas

$$\begin{cases} x = \quad a\,\mathbf{sinh}(v)\,\mathbf{cos}(\theta)\\ y = \quad b\,\mathbf{sinh}(v)\,\mathbf{sin}(\theta)\\ z = \pm c\,\mathbf{cosh}(v)\end{cases}$$
$$\begin{cases} v \in [0,\infty)\\ \theta \in [0, 2\,pi)\end{cases}$$