ANÁLISE MATEMÁTICA III C

8ª e 9ª semana de aulas

NOVA SCHOOL OF
SCIENCE & TECHNOLOGY

Cláudio Fernandes

caf@fct.unl.pt

Slides para acompanhamento das aulas TP1 e TP4

O material completo do Prof. João de Deus Marques encontra-se no CLIP, na página da UC

Séries Numéricas

Definição e generalidades

Definição

Seja (a_n) uma sucessão de números reais. Chama-se *série* ou *sucessão das somas parciais* associada à sucessão (a_n) à sucessão (S_n) definida da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 \\
S_2 &= a_1 + a_2 \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
&\dots \\
S_n &= a_1 + a_2 + \dots. + a_n. \\
&\dots
\end{aligned}
$$

A $a_1, a_2, a_3, \dots$ chamam-se termos da série e a a_n o seu termo geral.

Para designar a série usa-se uma das deguintes notações:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \quad \sum a_n, \quad a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \, .$$

Trata-se de um abuso de linguagem, uma vez que, estamos a identificar a série com a "soma" $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$. No entanto este abuso de linguagem é corrente e é utilizado por todos os livros sobre o assunto.

Definição

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se *convergente* se existir e for finito o limite da sucessão das somas parciais S_n e, neste caso, ao valor do limite chama-se *soma* da série. Se o limite da sucessão das somas parciais S_n não existir ou for infinito a série diz-se *divergente.*

Série Geométrica

Exemplo

Suponhamos que (a_n) *é uma progressão geométrica de razão* $r \neq 1$*, isto é, a sucessão*

$$a_1,\ a_2 = a_1 r,\ a_3 = a_1 r^2,\ \ldots,\ a_n = a_1 r^{n-1},\ \ldots\ .$$

À série associada

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1(1+r),\ \ldots,\ S_n = a_1(1 + r + \ldots + r^{n-1}),\ \ldots$$

chama-se série geométrica e tem-se que

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Exemplo (continuação)

É um facto conhecido que a sucessão r^n *converge se e só se* $|r| < 1$, *e que neste caso tem por limite zero. Pode então concluir-se que, a série geométrica converge se e só se a razão da progressão geométrica que lhe está associada for inferior a 1. Supondo que* $|r| < 1$, *tem-se que*

Série Geométrica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}.$$

Exemplo

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n}_{\text{Série g. convergente}} \qquad \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}}_{\text{Série g. convergente}} \qquad \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} 5^{3n} 7^{1-n}}_{\text{Série g. divergente}}$$

Exemplo

Considere-se a dízima infinita periódica $0,33333...$. *Relativamente a esta dízima considere-se a sucessão*

$$a_1 = 0,3 = \frac{3}{10}$$

$$a_2 = 0,03 = \frac{3}{10^2}$$

$$a_3 = 0,003 = \frac{3}{10^3}$$

$$\dots$$

$$a_n = 0,003 = \frac{3}{10^n}$$

$$\dots$$

e a série associada

Exemplo (continuação)

$$S_1 = a_1 = 0,3 = \frac{3}{10}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 0,33 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0,333 = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3}$$

$$\ldots$$

$$S_n = a_1 + \ldots. + a_n = 0,333\ldots3 = \frac{3}{10} + \ldots + \frac{3}{10^n}$$

$$\ldots$$

A sucessão (a_n) *é uma progressão geométrica de razão* $r = \frac{1}{10}$, *pelo que*

$$0,33333\ldots = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}.$$

Série de Mengoli / Telescópica

As séries geométricas são um exemplo em que, não só é fácil estudar a convergência, como é mesmo possível em caso de convergência determinar a sua soma. Em geral tal não é possível, no entanto, existem para além das séries geométricas outras séries para as quais também é possível determinar a sua soma em caso de convergência. O exemplo que se segue é um destes casos.

Exemplo

Considere-se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+2)}$. *Esta série pode ser escrita na forma*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Exemplo (continuação)

Determinemos os primeiros n termos da sucessão das suas somas parciais. Tem-se que

$$S_1 = 1 - \frac{1}{3}$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$$

$$\cdots$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Exemplo (continuação)

Tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{3}{2},$$

pelo que a série considerada não só é convergente como tem por soma $\frac{3}{2}$.

A série que acabamos de estudar tinha a particularidade de o seu termo geral a_n se poder escrever na forma

$$a_n = \alpha_n - \alpha_{n+2}.$$

Genericamente, uma série em que o seu termo geral a_n se possa escrever na forma

$$a_n = \alpha_n - \alpha_{n+k}, \ \ k \in \mathbb{N},$$

chama-se uma série *redutível*, *telescópica* ou de *Mengoli*.

Dada uma série redutível, isto é, uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n - \alpha_{n+k})$$

e sendo $n > k$ tem-se que

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} (\alpha_p - \alpha_{p+k}) = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k - (\alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+k}),$$

pelo que

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k - \lim_{n \to \infty} (\alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+k}).$$

A última igualdade permite concluir que a série converge se e só se convergir a sucessão

$$b_n = \alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+k}.$$

Se, por exemplo, a sucessão (α_n) convergir e tiver por limite o valor α, então a sucessão (b_n) também converge e terá por limite $k\alpha$. Neste caso a série redutível também é convergente e terá por soma

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k - k\alpha.$$

Exemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1/2}{2n-1}}_{\alpha_n} - \underbrace{\frac{1/2}{2n+1}}_{\alpha_{n+1}}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ existe, então a série é convergente.

A sua soma é ½

Proposição

Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *for convergente então a sucessão* (a_n) *converge para zero.*

Demonstração:

Por hipótese a sucessão $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *é convergente, o mesmo sucede à sucessão* $S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$ $(n \geq 2)$ *e tem-se além disso que* $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$. *Como*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = 0,$$

tem-se o resultado pretendido.

É importante notar que esta proposição dá uma condição necessária mas não suficiente para que uma série convirja. Dada uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se a sucessão (a_n) não convergir para zero então a série é divergente mas se a sucessão (a_n) convergir para zero nada se pode concluir quanto à convergência da série.

ATENÇÃO:

Exemplo

As séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+3}{5n-2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ *são divergentes uma vez que os seus termos gerais não convergem para zero.*

ATENÇÃO:

Exemplo (Continuação)

Já a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *apesar do seu termo geral convergir para zero também é divergente. Com efeito, tem-se que*

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Como $\sqrt{n}$ *converge para infinito o mesmo sucede a* S_n *e portanto a série é divergente.*

OBSERVAÇÃO: Séries de DIrichlet

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \begin{cases} \text{Diverge}, & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \text{Converge}, & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Proposição

A natureza de uma série mantém-se se lhe alterarmos um número finito de termos.

Esta última proposição permite, por exemplo, afirmar que se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são duas séries tais que existe uma ordem p a partir da qual $a_n = b_n$ então as duas séries são da mesma natureza.

Proposição

Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *duas séries convergentes de somas* a *e* b *respetivamente e seja* $k \in \mathbb{R}$*. Então*

1. *a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$*, a que se chama série soma das séries* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *também é convergente e tem por soma* $a + b$*.*
2. *A série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (k\ a_n)$ *é convergemte e tem por soma* $k\ a$*.*

Séries alternadas

Definição

Uma série diz-se *alternada* se os seus termos forem alternadamente positivos e negativos. Supondo que o seu primeiro termo é negativo uma série alternada pode escrever-se na forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n, \quad a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Proposição (Critério de Leibniz)

Se a_n for uma sucessão decrescente de termos positivos e de limite zero, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ *é convergente. Supondo a série convergente de soma S e sendo S_n a sucessão das suas somas parciais, tem-se que* $|S - S_n| \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Exemplo

A série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$*, conhecida como série harmónica alternada é convergente uma vez que a sucessão* $a_n = \frac{1}{n}$ *é de termos positivos, monótona decrescente e de limite zero.*
A série harmónica alternada faz parte de uma família de séries designadas por "séries de Dirichlet alternadas" e que têm a forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Estudemos a convergência desta família considerando os vários valores de α

Exemplo (Continuação)

Se $\alpha = 0$ *o termo geral da série é* $(-1)^n$ *que não tem limite pelo que a série é divergente. Se* $\alpha < 0$ *o seu termo geral é* $(-1)^n n^{-\alpha}, \quad -\alpha > 0$ *que converge para infinito e portanto a série também é divergente. Se* $\alpha > 0$ *o seu termo geral é* $(-1)^n a_n$*, com* $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$*. A sucessão* a_n *é uma sucessão decrescente de termos positivos e de limite zero, pelo que a série é convergente. Ao todo viu-se que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \begin{cases} \textit{Diverge}, & \textit{se} \quad \alpha \leq 0 \\ \textit{Converge}, & \textit{se} \quad \alpha > 0 \end{cases},$$

Convergência absoluta

Definição

Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se *absolutamente convergente* se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ for convergente. Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se *simplesmente convergente* se for convergente mas for divergente a série $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Proposição

Toda a série absolutamente convergente é convergente.

A recíproca desta proposição, tal como foi observado no último exemplo, não é verdadeira.

Exemplo

A série harmónica alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, *é simplesmente convergente.*

Séries de termos não negativos

Iremos em seguida estabelecer alguns critérios de convergência para séries de termos não negativos. Tem-se, como é óbvio, que uma séries de termos não negativos é convergente se e só se for absolutamente convergente. Os resultados que iremos estabelecer mantêm-se obviamente verdadeiros para séries cujos termos sejam não negativos somente a partir de certa ordem. Observe-se ainda que uma série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ de termos não positivos se reduz ao estudo de uma séries de termos não negativos uma vez que se tem a igualdade $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{+\infty}(-a_n)$.

Proposição

Uma séries de termos não negativos é convergente se e só se a sucessão das suas somas parciais é limitada.

Proposição (Critério da Comparação)

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *duas séries de termos não negativos tais que*

$$\exists p \in \mathbb{N} \ : \ a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq p.$$

1. *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *for convergente então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *também é convergente.*
2. *Se a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *for divergente então a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *também é divergente.*

Exemplo

1. Considere-se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. *Tem-se que*

$$0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ora a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ *é uma série geométrica de razão* $r = \frac{1}{2}$, *e portanto convergente. Segue-se pela proposição anterior que a série* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ *também é convergente.*

Exemplo (Continuação)

2. Considere-se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$. *Tem-se que*

$$0 \leq \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \geq 2.$$

Uma vez mais pela proposição anterior, a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ *é uma consequência da convergência da série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

Exemplo (Continuação)

3. Considere-se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. *Tem-se que*

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ora a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente. Segue-se pela proposição anterior que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *também é divergente.*

Corolário

Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *duas séries tais que* $a_n \geq 0$ *e* $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k, \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

Então as séries são da mesma natureza.

Exemplo Justifique que a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n(n-1)}$ é divergente

Sugestão: Compare com a série harmónica

Nas condições do último corolário se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0,$$

então a partir de certa ordem ter-se-á necessariamente que $a_n < b_n$, pelo que a convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ permite concluir a convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e a divergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ permite concluir a divergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Analogamente se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty,$$

então a partir de certa ordem ter-se-á necessariamente que $a_n > b_n$, pelo que a convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ permite concluir a convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ e a divergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ permite concluir a divergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exemplo

1. Estude-se a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. *Já foi visto anteriormente que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+2)}$ *é convergente. Tem-se que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{2n^2} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+,$$

pelo que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *também é convergente.*

Exemplo (Continuação)

2. Estude-se a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$. *Já foi visto anteriormente que a série harmónica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ *é divergente. Tem-se que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n+\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n} = 1 \in \mathbb{R}^+,$$

pelo que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ *também é divergente.*

Exemplo (Continuação)

3. Estude-se a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3}$. *Compare-se com a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. *Para isso calcule-se o limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{\log n}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\log n} = +\infty.$$

A convergência de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ *permite concluir a convergência de* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^3}$.