Álgebra Linear e Geometria Analítica

6 - Valores e Vectores Próprios

Departamento de Matemática
FCT/UNL

Programa

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Definição

Seja E um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$. Chamamos **endomorfismo** de E a qualquer aplicação linear de E em E.

Definição

Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear. Se um vector não nulo $u \in E$ e um escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ verificam

$$f(u) = \alpha u,$$

dizemos que

- α é **valor próprio** de f;
- u é **vector próprio** de f associado ao valor próprio α.

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Proposição

Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear. Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ um valor próprio de f e

$$E_\alpha = \{u \in E : f(u) = \alpha u\} = Nuc(f - \alpha id_E).$$

Tem-se:

1. *E_α é um subespaço de E e $1 \leq dim E_\alpha \leq dim E$.*
2. *Os vectores próprios de f associados ao valor próprio α são os elementos não nulos de E_α, isto é, são os elementos de $E_\alpha \setminus \{0_E\}$.*

Definição

Seja $f : E \longrightarrow E$ uma aplicação linear e α um valor próprio de f. Ao subespaço vectorial

$$E_\alpha = \{u \in E : f(u) = \alpha u\} = Nuc(f - \alpha id_E)$$

chamamos **subespaço próprio** de f **associado ao valor próprio** α.

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se uma matriz não nula $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ e um escalar α verificam verificam

$$AX = \alpha X,$$

dizemos que

- α é **valor próprio** de A;
- X é **vector próprio** de A associado ao valor próprio α.

Proposição

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, α um valor próprio de A e

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : \ AX = \alpha X\}.$$

Tem-se:

1. *M_α é um subespaço vectorial de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$.*
2. *Os vectores próprios de A associados ao valor próprio α são os elementos de $M_\alpha \setminus \{0_{n\times 1}\}$.*

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Definição

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e α um valor próprio de A. Ao subespaço vectorial

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : \ AX = \alpha X\} \\ &= \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : \ (A - \alpha I_n)\, X = 0\} \end{aligned}$$

chamamos **subespaço próprio** de A **associado ao valor próprio** α.
A dimensão do subespaço M_α designa-se por **multiplicidade geométrica** do valor próprio α e é representada por $\mathrm{mg}(\alpha)$.

Se M_α é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, tem-se

$$\mathrm{mg}(\alpha) = \dim M_\alpha \leq \dim \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) = n.$$

Como $M_\alpha \neq \{0_{n\times 1}\}$ (porquê?) então $\dim M_\alpha \geq 1$. Assim

$$1 \leq \mathrm{mg}(\alpha) \leq n.$$

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e* α *um valor próprio de A. Tem-se*

$$mg(\alpha) = n - \mathrm{r}(A - \alpha I_n).$$

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *e seja* $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ *tal que*

$$AX = \alpha X.$$

1. *Para qualquer* $k \in \mathbb{N}$, *tem-se* $A^k X = \alpha^k X$.
2. *Para qualquer polinómio* $q(x) = b_r x^r + b_{r-1}x^{r-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{K}_r[x]$, *definindo* $q(A) = b_r A^r + b_{r-1}A^{r-1} + \ldots + b_1 A + b_0 I_n$, *tem-se* $q(A)X = q(\alpha)X$.
3. *Se* α *é valor próprio de* A *e* $q(A) = 0$, *então* $q(\alpha) = 0$.

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se que α é valor próprio de A se, e só se, $|A - \alpha I_n| = 0$.

Dem. Por definição, α é valor próprio de A se, e só se, existe $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ tal que

$$X \neq 0 \qquad \text{e} \qquad AX = \alpha X,$$

ou equivalentemente,

$$X \neq 0 \qquad \text{e} \qquad (A - \alpha I_n)\, X = 0.$$

O sistema homogéneo, com n incógnitas, $(A - \alpha I_n)\, Y = 0$ admite uma solução não nula se, e só se, é indeterminado. Tal equivale a afirmar que

$$\mathrm{r}\,(A - \alpha I_n) < n$$

ou, ainda, que

$$|A - \alpha I_n| = 0.$$

6.1 Definição, exemplos e propriedades

O teorema anterior motiva a seguinte definição.

Definição

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Chamamos **polinómio característico** de A e representamos por $p_A(x)$, ou simplesmente $p(x)$ se não houver ambiguidade, o polinómio na variável x com coeficientes em $\mathbb{K}$, dado por $p(x) = |A - xI_n|$.
À equação $p(x) = 0$ chamamos **equação característica** de A.

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *então o seu polinómio característico,* $p_A(x)$*, tem grau* n*, sendo da forma*

$$p_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com $a_i \in \mathbb{K}, i = 1, \ldots, n-1$ *e em que* $a_0 = \det A$*.*

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Observação

Certos autores definem o polinómio característico de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ por $|xI_n - A|$. Notemos que $|xI_n - A| = |-(A - xI_n)| = (-1)^n\,|A - xI_n|$.
então, para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$ tem-se
$|\alpha I_n - A| = 0$ se, e só se, $|A - \alpha I_n| = 0$.

Observação

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ com polinómio característico $p_A(x)$. Notemos que os valores próprios de A são os zeros do polinómio característico de A, isto é os zeros de $p_A(x)$.

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Teorema Fundamental da Álgebra

Qualquer equação na variável x, da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

com $a_n \neq 0, n \geq 1$ e $a_k \in \mathbb{C}, k = 0, 1, \ldots, n$, tem exactamente n zeros em $\mathbb{C}$.

Definição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e α um valor próprio de A. Designa-se por **multiplicidade algébrica** do valor próprio α, e representa-se por $\mathrm{ma}(\alpha)$, a multiplicidade de α como zero do polinómio característico de A, isto é, o maior inteiro k tal que $(\alpha - x)^k$ divide $p_A(x)$.

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se $\beta_1, \ldots, \beta_n$ são os n zeros (não necessáriamente distintos), em $\mathbb{C}$, do polinómio característico de A, então $\det A = \beta_1 \cdots \beta_n$.

Proposição

Os valores próprios de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ triangular são os elementos da sua diagonal principal.

Exemplos

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

$$p(x) = |A - xI_3| = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (2-x)(1-x)^2,$$

$$|A - xI_3| = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 1$$

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Exemplos

A tem os valores próprios

$$2 \quad \text{com} \quad \text{ma}(2) = 1 \quad \text{e} \quad 1 \quad \text{com} \quad \text{ma}(1) = 2.$$

Determinemos o subespaço próprio de A associado a cada valor próprio, bem como a multiplicidade geométrica de cada valor próprio.

O subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2 é:

$$\begin{aligned} M_2 &= \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ (A - 2I_3)\, X = 0\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar para resolver o sistema $(A - 2I_3)\, X = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[(linhas)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}$$

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Exemplos

$$\begin{aligned} M_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \; b = 0 \;\wedge\; c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : \; a \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : \; a \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle . \end{aligned}$$

Como $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é linearmente independente e, portanto,

$$\text{Base de } M_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Concluímos assim que $\mathrm{mg}(2) = \dim M_2 = 1$.

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Exemplos

Da mesma forma, o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 1 é:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ (A - 1 I_3)\, X = 0\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ a = 0 \ \wedge \ c = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} : \ b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \ b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle .
\end{aligned}$$

De forma análoga concluímos que

Base de $M_1 = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ e que $\mathrm{mg}(1) = 1.$

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Exemplos

2. Consideremos a matriz I_n. O seu polinómio característico é $p(x) = |I_n - xI_n| = |(1-x)I_n| = (1-x)^n$.
Assim I_n tem apenas o valor próprio 1 com $\mathrm{ma}(1) = n$. O subespaço próprio de I_n associado ao seu único valor próprio é

$$\begin{aligned} M_1 &= \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : \ (I_n - 1I_n)X = 0\} \\ &= \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : \ 0X = 0\} \\ &= \{X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})\} \\ &= \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}). \end{aligned}$$

Logo $\mathrm{mg}(1) = \dim M_1 = n$. Concluímos que todo o vector $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, com $X \neq 0$, é vector próprio de I_n associado ao valor próprio 1.

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Proposição

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. São equivalentes as afirmações:

1. *A é invertível.*
2. *A não tem o valor próprio zero*
3. *O termo constante do polinómio característico de A é não nulo.*

Dem. Sabemos que A é invertível se, e só se, $|A| \neq 0$.
Se $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ é o polinómio característico de A então

$$p(0) = |A - 0I_n| = |A|$$

e

$$p(0) = a_0.$$

Assim, são equivalentes as três afirmações

$$|A| \neq 0, \qquad |A - 0I_n| \neq 0 \qquad \text{e} \qquad a_0 \neq 0,$$

conforme pretendíamos demonstrar.

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Recordemos:

Definição

Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A e B são **semelhantes** se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}AP = B.$$

Proposição

Se $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são semelhantes então os seus polinómios característicos são iguais. (isto implica que A e B têm os mesmos valores próprios) com as mesmas multiplicidades algébricas.

Dem. Existe $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, invertível, tal que $P^{-1}AP = B$ então

$$\begin{aligned} |B - xI_n| &= \left|P^{-1}AP - xI_n\right| = \left|P^{-1}AP - xP^{-1}I_nP\right| = \left|P^{-1}(A - xI_n)P\right| \\ &= \left|P^{-1}\right| |A - xI_n| \, |P| = \left|P^{-1}\right| |P| \, |A - xI_n| = |P|^{-1} |P| \, |A - xI_n| \\ &= |A - xI_n| \, . \end{aligned}$$

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Definição

Seja f um endomorfismo de um espaço vectorial E, com E de dimensão finita, e seja $\mathcal{B}$ uma base arbitrária de E. Chamamos **polinómio característico** de f ao polinómio característico da matriz $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$.

Proposição

Seja f um endomorfismo de um espaço vectorial E de dimensão finita. Seja $\mathcal{B}$ uma base arbitrária de E e $A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$. Tem-se:

1. *u é vector próprio de f se, e só se, a matriz $X \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, cuja coluna é a sequência das coordenadas de u na base $\mathcal{B}$, é um vector próprio de A.*
2. *α é valor próprio de f se, e só se, α é valor próprio de A.*

Proposição

Seja α um valor próprio de $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Tem-se $\quad mg(\alpha) \leq ma(\alpha)$.

6.1 Definição, exemplos e propriedades

Proposição

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *valores próprios de* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$*, com* $\alpha \neq \beta$*. Se* $X_1, \ldots, X_k$ *são os vectores próprios de* A*, linearmente independentes associados ao valor prórpio* α *e* $Y_1, \ldots, Y_l$ *são vectores próprios de* A*, linearmente independentes, associados ao valor próprio* β*, então*

$$X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_l$$

são linearmente independentes.

Proposição

Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *valores próprios, dois a dois distintos, de* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$*. Se* $X_{i1}, \ldots, X_{ik_i}$ *são os vectores própros de* A*, linearmente independentes associados ao valor prórpio* $\alpha_i, i = 1, \ldots, r$*, então*

$$X_{11}, \ldots, X_{1k_1}, \ldots, X_{r1}, \ldots, X_{rk_r}$$

são linearmente independentes.

6.2 Matrizes e endomorfismos diagonalizáveis

Definição

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dizemos que A é uma matriz **diagonalizável** se A é semelhante a uma matriz diagonal , isto é, se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que

$$P^{-1}AP = D.$$

Diz-se, ainda, que P é uma matriz **diagonalizante** de A.

Os valores próprios de uma matriz diagonal são os elementos da sua diagonal principal (porquê?), conclui-se que

Proposição

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz diagonalizável e D é uma matriz diagonal semelhante a A então os valores próprios de A são os elementos da diagonal principal de D.

6.2 Matrizes e endomorfismos diagonalizáveis

O resultado seguinte, é uma das caracterizações mais importantes das matrizes diagonalizáveis.

Proposição

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é diagonalizável se, e só se, A tem n vectores próprios linearmente independentes.
Neste caso, se $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ são n vectores próprios de A linearmente independentes correspondentes, respectivamente, aos valores próprios $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (não necessariamente distintos) então a matriz

$$P = [X_1 \mid \cdots \mid X_n] \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$$

é invertível e é uma matriz diagonalizante de A. Mais especificamente, tem-se

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

6.2 Matrizes e endomorfismos diagonalizáveis

Dem. Suponhamos que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é diagonalizável e seja $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, invertível, tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} = D.$$

Assim

$$AP = PD$$

ou, ainda,

$$A\,[X_1 \mid \cdots \mid X_n] = [X_1 \mid \cdots \mid X_n] \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

sendo $X_i \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, $i = 1, \ldots, n$, a i-ésima coluna de P.
A igualdade anterior é equivalente a

$$[AX_1 \mid \cdots \mid AX_n] = [d_1X_1 \mid \cdots \mid d_nX_n]$$

e, portanto,

$$AX_1 = d_1X_1, \cdots, AX_n = d_nX_n.$$

6.2 Matrizes e endomorfismos diagonalizáveis

Dem. Como $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é invertível, tem-se $\mathrm{r}(P) = n$ e, portanto, as n linhas de P são linearmente independentes. Como $|P| = \left|P^\top\right| \neq 0$ tem-se que $\mathrm{r}\left(P^\top\right) = n$. Assim, as n linhas de $P^\top$ são linearmente independentes e logo as n colunas de P são linearmente independentes.
Conclui-se que $X_1, \ldots, X_n$ são n vectores próprios de A linearmente independentes.

A implicação recíproca obtém-se de forma idêntica pois, como A tem n vectores próprios $X_1, \ldots, X_n$ linearmente independentes, basta considerar

$$P = [X_1 \mid \cdots \mid X_n]$$

para se concluir que P é invertível e $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

Proposição

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tem n valores próprios, dois a dois distintos, então A é diagonalizável

6.2 Matrizes e endomorfismos diagonalizáveis

Proposição

$A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *é diagonalizável se, e só se,*

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{mg}(\alpha_i) = n,$$

sendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ *os valores próprios, dois a dois distintos, da matriz* A.

Exemplos

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, estudada num exemplo anterior.
   A tem os valores próprios 2 com $mg(2) = 1$ e 1 com $mg(1) = 1$.
   Concluímos que A não é diagonalizável. De facto, sendo $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = 1$ os valores próprios de A, tem-se $\sum_{i=1}^{2} \mathrm{mg}(\alpha_i) = 2 \neq 3$.

6.2 Matrizes e endomorfismos diagonalizáveis

Proposição

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tem n valores próprios, dois a dois distintos, então A é diagonalizável.

Exemplo

2 Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{K})$, cujo polinómio característico é

$$\begin{vmatrix} -x & -1 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \underset{l_3}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} (3-x)\begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = (3-x)(x^2+1).$$

Se $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$ então A tem apenas o valor próprio 3 com $\mathrm{ma}(3) = 1$. O subespaço próprio correspondente é:

$$\begin{aligned} M_3 &= \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ (A - 3I_3)\, X = 0\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

6.2 Matrizes e endomorfismos diagonalizáveis

Exemplo

Cálculo auxiliar para resolver o sistema $(A - 3I_3)\,X = 0$:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 + 3l_1]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[-\frac{1}{10} l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 + 3l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}.$$

Então

$$\begin{aligned} M_3 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ a = 0 \ \wedge \ b = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : \ c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \ c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Assim $\mathrm{mg}(3) = 1$ e, portanto, $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ não é diagonalizável (para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

6.2 Matrizes e endomorfismos diagonalizáveis

Exemplo

Se $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{C}}$ então A tem os valores próprios 3, i e $-i$. Se determinarmos os subespaços próprios correspondentes a cada um desses valores próprios obteremos, respectivamente,

$$M_3 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad M_i = \left\langle \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad M_{-i} = \left\langle \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Assim, $\underline{\text{para } \mathbb{K} = \mathbb{C}}$, A é diagonalizável, pois

$$mg(3) + mg(i) + mg(-i) = 3$$

Um exemplo de <u>matriz diagonalizante</u> de A é a matriz

$$P = \begin{bmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e, de acordo com o Teorema anterior, obteremos

6.2 Matrizes e endomorfismos diagonalizáveis

Exemplo

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Note que se considerarmos a matriz, também diagonalizante de A,

$$Q = \begin{bmatrix} i & -i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{então} \quad Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Definição

Uma aplicação linear $f : E \longrightarrow E$ com E de dimensão finita, diz-se **diagonalizável** se existe uma base $\mathcal{B}$ de E tal que

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$$

é uma matriz diagonal.

6.2 Matrizes e endomorfismos diagonalizáveis

Proposição

Se $f : E \longrightarrow E$ é uma aplicação linear com $\dim(E) = n$, então f é diagonalizável se, e só se, f tem n vectores próprios linearmente independentes.

Exemplo

Seja f um endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$\forall_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \qquad f(a,b,c) = (a, 2b+c, c).$$

Vamos determinar se existe uma base $\mathcal{B}$, de $\mathbb{R}^3$, tal que $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$ é uma matriz diagonal e, em caso afirmativo, indicar uma base nessas condições.

6.2 Matrizes e endomorfismos diagonalizáveis

Exemplo

Seja $\mathcal{B}'$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ obtemos

$$A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}',\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A tem os valores próprios 1 e 2 e os subespaços próprios

$$M_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{e} \quad M_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Logo, A é diagonalizável, pois tem 3 ($=$ ordem de A) vectores próprios linearmente independentes.

6.2 Matrizes e endomorfismos diagonalizáveis

Exemplo

Como

$$A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\quad \text{e} \quad A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

podemos afirmar que

$$f(1,0,0)=1(1,0,0),\quad f(0,-1,1)=1(0,-1,1)\quad \text{e} \quad f(0,1,0)=2(0,1,0).$$

Assim, se tomarmos $\mathcal{B}=\big((1,0,0),(0,-1,1),(0,1,0)\big)$ concluímos que
$\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B})=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}.$