Número: ________ Curso: ________ Nome: ____

A primeira parte do teste é constituida por 5 questões de escolha múltipla. Nas questões 1 a 5 assinale com $\times$ a resposta correcta. Cada resposta correcta vale 1 valor. Respostas em branco valem 0 valores. Se responder erradamente ou de forma ambígua ser-lhe-á atribuída uma cotação negativa correspondente a 0.2 valores. Se a soma das cotações da escolha múltipla for negativa, será atribuído 0 valores à escolha múltipla.

Classificação
EM -
TOTAL-

1. Considere a seguinte tabela de para a função $f(x)$ nos nodos x_i, $i = 0, 1, 2, 3$:

x_i	-1	0	2	5
$f(x_i)$	-6	2	5	8

Sejam $p_1(x)$ o polinómio de Lagrange de grau ≤ 1 que interpola f nos nodos x_1 e x_3, $q_2(x)$ o polinómio de Newton de grau ≤ 2 que interpola f nos nodos x_0, x_1 e x_3, $S(x)$ o spline cúbico interpolador de todos os pontos da tabela e m_3 o polinómio de grau 3 obtido pelo método dos mínimos quadrados a partir dos pontos tabelados. Tem-se sempre:

☐ **a)** $p_1(-1) + q_2(-1) + S(2) = m_3(2)$

☒ **b)** $p_1(0) + q_2(0) + m_3(0) = S(5) - 2$

☐ **c)** $p_1(5) + q_2(2) + S(2) + m_3(-1) = 12$

☐ **d)** $p_1(2) + q_2(5) + S(-1) = m_3(5) - 6$

2. Seja $I = \int_0^1 f(x)dx$ com $f(x) \in C^4([0,1])$ uma função que verifica $|f^{(k)}(x)| \leq \sqrt[k]{\cos(x) + 2^k - 1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $k = 2, 3, \ldots$. Se pretendesse determinar um valor aproximado de I utilizando a regra de Simpson, qual o menor número de subintervalos de igual amplitude, em que teria de dividir o intervalo [0,1] de forma a garantir pelo menos 6 casas decimais significativas?

☐ **a)** 7;

☐ **b)** 6;

☒ **c)** 14;

☐ **d)** 12;

☐ **e)** 5.

3. Seja $I(f)=\int_{-6}^{10} f(x)dx$, em que $f(x)$ é um polinómio de grau 3 que verifica $f(-x+2)+f(x+2)=4$. $f(x)+f(x+4)$

Utilizando uma regra de integração númerica com grau de precisão 3, qual são os valores para a aproximação $\hat{I}(f)$ e para o integral exacto $I(f)$?

☐ **a)** $\hat{I}(f)=31.89$ e $I(f)=32$

☐ **b)** $\hat{I}(f)=16$ e $I(f)=16.13$

☒ **c)** $\hat{I}(f)=32$ e $I(f)=32$

☐ **d)** $\hat{I}(f)=\frac{64}{\sqrt{3}}+16$ e $I(f)=\frac{64}{\sqrt{3}}+16$

4. Considere-se um sistema $AX=B$ com $A\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $X,B\in\mathbb{R}^n$ e os três métodos iterativos $X_1^{(k)}=G_1X_1^{(k-1)}+H_1$, $X_2^{(k)}=G_2X_2^{(k-1)}+H_2$ e $X_3^{(k)}=G_3X_3^{(k-1)}+H_3$, com $k=1,2,\ldots$ e $X_1^{(0)}=X_2^{(0)}=X_3^{(0)}\in\mathbb{R}^n$, obtidos a partir de $AX=B$. Sabe-se que:

- $||G_1||_\infty=\frac{4}{5}$, $||G_1||_1=\frac{7}{6}$ e $||G_1||_2=\frac{3}{4}$;
- $||G_2||_\infty=\frac{6}{5}$, $||G_2||_1=2$ e $||G_2||_2=\frac{5}{4}$;
- $\rho(G_3)\in\{z\in\mathbb{C}:|z+0.4|\leq 0.5\}$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

☒ **a)** As sucessões $X_1^{(k)}$ e $X_3^{(k)}$ convergem, mas nada podemos concluir acerca da convergência de $X_2^{(k)}$.

☐ **b)** Ambas as sucessões $X_1^{(k)}$ e $X_3^{(k)}$ convergem, mas $X_2^{(k)}$ não converge.

☐ **c)** Ambas as sucessões $X_1^{(k)}$ e $X_2^{(k)}$ não convergem, mas $X_3^{(k)}$ converge.

☐ **d)** Todas as sucessões $X_1^{(k)}$ e $X_2^{(k)}$ e $X_3^{(k)}$ convergem.

5. Seja $f(x)=0$ uma equação não linear com uma única raiz α em $I_0=[a_0,b_0]$ e $x_i\in[a_i,b_i]$ a i-ésima iterada, obtida pelo método da bissecção, com $i\in\mathbb{N}$. Sabe-se que $f(x_i)<0$ e $f(a_i)<0$ então:

☐ **a)** $x_{i+1}=\frac{a_i+x_i}{2}\in[a_i,x_i]$ e $|\alpha-x_{i+1}|\leq\frac{b_0-a_0}{2^{i+1}}$

☐ **b)** $x_{i+1}=\frac{a_i+x_i}{2}\in[a_i,b_i]$ e $|\alpha-x_{i+1}|\leq\frac{b_0-a_0}{2^{i+2}}$

☐ **c)** $x_{i+1}=\frac{a_i+b_i}{2}\in[a_i,b_i]$ e $|\alpha-x_{i+1}|\leq\frac{b_0-a_0}{2^{i+2}}$

☐ **d)** $x_{i+1}=\frac{x_i+b_i}{2}\in[x_i,b_i]$ e $|\alpha-x_{i+1}|\leq\frac{b_0-a_0}{2^{i+1}}$

☒ **e)** $x_{i+1}=\frac{x_i+b_i}{2}\in[x_i,b_i]$ e $|\alpha-x_{i+1}|\leq\frac{b_0-a_0}{2^{i+2}}$

A segunda parte do teste é constituida por 5 grupos de questões. **Cada resposta deverá estar convenientemente justificada.**

Cotações: Questão 6: 4 valores; **Questão 7:** 2.5 valores; **Questão 8:** 3 valores; **Questão 9:** 3.5 valores; **Questão 10:** 2 valores.

6. Considere a seguinte função f tabelada nos nodos x_i, $i = 0, 1, 2, 3$:

x_i	-2	-1	0	1
$f(x_i)$	19	1	1	1

(a) Obtenha o polinómio de Lagrange interpolador de f na tabela dada e determine uma aproximação para $f(0.01)$. Nota: Não é necessário apresentar o polinómio na forma canónica.

(b) Sabendo que $f(x)$ é um polinómio de grau 4, cujo coeficiente de x^4 é 1 determine um majorante, **o mais pequeno possível**, para o erro absoluto e para o erro relativo associados à aproximação de $f(0.01)$. Considere 4 casas decimais nos cálculos.

(c) Considere $q_2(x)$ o polinómio de grau 2 que passa pelos pontos x_0, x_1 e x_3 da tabela e para o qual se tem $\sqrt{\sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - q_2(x_i))^2} = 6$.
Sem obter a expressão de $q_2(x)$, determine $q_2(0)$ e diga se $q_2(x)$ pode ser o polinómio de grau 2 obtido pelo método dos mínimos quadrados para os dados da tabela. Justifique.

(d) Considere a função

$$S(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}x^3 + 27x^2 + \frac{63}{2}x + 10, & x \in [-2, -1[\\ -\frac{9}{2}x^3 + \frac{9}{2}x + 1, & x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Verifique se $S(x)$ é um spline cúbico natural interpolador de f nos pontos x_0, x_1 e x_2 da tabela.

7. Considere a seguinte tabela para a função f:

x_i	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x_i)$	5	6.1875	5	$f(1.5)$	-3	-5.3125	-1

(a) Utilizando a regra dos trapézios com 3 aplicações da regra obtenha uma aproximação $\hat{I}_T$ de $I = \int_0^3 f(x)dx$.

(b) Sabendo que a aproximação $\hat{I}_{PM}$ de I, dada pela regra do ponto médio com $h = 1$, é igual a 2.3125, obtenha $f(1.5)$.

(c) Sabendo que $f^{(4)}(x) = 24$, $\forall x \in \mathbb{R}$, determine o valor exacto de I.

8. Seja α o único zero de $f(x) = x^3 - \sin(x)$ em $I = [0.6, 1]$. Considere as sucessões

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad \text{e} \quad y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)},\ n = 1, 2, ...,$$

em que $x_0 = y_0 = 1$. Nota: Nos cálculos utilize 6 casas decimais devidamente arredondadas.

(a) Prove analiticamente que α é ponto fixo da função iteradora $\varphi(x) = \sqrt[3]{\sin(x)}$.

(b) Verifique que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para α em I e obtenha x_2.

Nota: Não é necessário justificar analiticamente a monotonia das funções, basta verificar graficamente.

(c) Considerando que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente para α, obtenha y_2 e diga justificando, quantas casas decimais significativas pode garantir para y_2?

9. Considere o seguinte sistema de equações lineares $AX = B$ com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que a sucessão gerada pelo método de Gauss-Seidel converge para a solução do sistema $AX = B$.

(b) Partindo de $X^{(0)} = [0\ \ 0]^T$, obtenha $X^{(3)}$.

(c) Sabendo que $X^{(30)} - X^{(29)} \approx [-0.0004\quad 0.0006]^T$, quantas casas decimais significativas pode garantir para $X^{(30)}$?

(d) Seja $\rho(G_{GS})$ e $\rho(G_{GS}(0.8))$ os raios espectrais das matrizes de iteração, respectivamente do método de Gauss-Seidel simples e do mesmo método com um factor de relaxação $\omega = 0.8$. Sabendo que $\rho(G_{GS}) = \frac{3}{4}$ e $\rho(G_{GS}(0.8)) = \frac{1}{5}$, que pode concluir quanto à velocidade de convergência da sucessão gerada pelo método de Gauss-Seidel com factor de relaxação $\omega = 0.8$ relativamente à sucessão gerada pelo método simples. Justifique.

10. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = \cos(2t) + \sin(3t), & t \in [0, 1], \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Verifique que o problema é bem posto.

(b) Determine um valor aproximado de $y(0.5)$ com 6 casas decimais devidamente arredondadas, pelo método de Taylor de ordem 2 e $h = 0.25$.

Exame de Recurso Cálculo Numérico (15/7/2021)

Questão 1

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	-1	0	2	5
$f(x_i)$	-6	2	5	8

p_1 - polinómio de Lagrange de grau ≤ 1 interpolador em x_1 e x_3

q_2 - polinómio de Newton de grau ≤ 2, interpolador em x_0, x_1, x_3

S - spline cúbico interpolador em todos os pontos

m_3 - polinómio de grau 3 obtido pelo método dos mínimos quadrados

a) $\underbrace{p_1(-1)}_{?} + \underbrace{q_2(-1)}_{-6} + \underbrace{S(2)}_{5} = \underbrace{m_3(2)}_{5}$ F

$? + -6 + 5 \neq 5$

b) $\underbrace{p_1(0)}_{2} + \underbrace{q_2(0)}_{2} + \underbrace{m_3(0)}_{2} = \underbrace{S(5)}_{8} - 2$ V

$= 8 - 2$

c) $\underbrace{p_1(5)}_{8} + \underbrace{q_2(2)}_{?} + \underbrace{S(2)}_{5} + \underbrace{m_3(-1)}_{-6} = 12$ F

$\neq 12$

d) $\underbrace{p_1(2)}_{?} + \underbrace{q_2(5)}_{8} + \underbrace{S(-1)}_{-6} = \underbrace{m_3(5)}_{8} - 6$ F

$-6 \neq 8 - 6$

Questão 2

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx \qquad f \in C^4([0,1]) : \left|f^{(k)}(x)\right| \leq \sqrt[k]{\cos(x)+2^k-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

regra de Simpson

$$\left| I - \hat{I}_S \right| = \left| -n \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\gamma) \right| \leq 0.5 \times 10^{-6}$$

$$\boxed{h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1}{2n}}$$

$$\gamma \in \,]0,1[$$

$$\left| \frac{-n\left(\frac{1}{2n}\right)^5}{90} f^4(\gamma) \right| = \frac{n\left(\frac{1}{2n}\right)^5}{90} \left| f^4(\gamma) \right| \leq \frac{\frac{\cancel{n}}{32 n^{\cancel{5}}}}{90} \times 2 = \frac{1}{1440 n^4} \leq 0.5 \times 10^{-6} \quad (*)$$

$$\left| f^4(x) \right| \leq \sqrt[4]{\cos(x) + 2^4 - 1} \leq \sqrt[4]{1+16-1} = 2$$

$0 < \cos(1) < \cos(x) \leq 1$ em $[0,1]$ 1º quadrante

$(*)$ $n \geq 6.105\ldots \Rightarrow n = 7 \Rightarrow 2n = 14$

Resposta correcta: c)

Questão 3

$I(f) = \int_{-6}^{10} f(x)\,dx$, $f(x)$ é um polinómio de grau ≤ 3

que verifica $f(-x+2) + f(x+2) = 4$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Regra de Gauss com 2 pontos tem grau de precisão 3

$$I(f) = \int_{-6}^{10} f(x)\,dx = 8\int_{-1}^{1} f(8y+2)\,dy \; (*)$$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{10-6}{2} = 2 \qquad \frac{b-a}{2} = \frac{10+6}{2} = 8$$

$$(*) \underset{\text{regra de Gauss com 2 pontos}}{\simeq} 8\left(f\left(-\frac{8}{\sqrt{3}}+2\right) + f\left(\frac{8}{\sqrt{3}}+2\right)\right) \underset{f(-x+2)+f(x+2)=4}{=} 8 \times 4 = 32$$

$f(x)$ polinómio de grau 3 $\Rightarrow f^{(4)}(x) = 0$ ou seja

$I - \hat{I} = \ldots\ldots \times f^{(4)}(\xi) = 0 \iff I = \hat{I} = 32 \Rightarrow$ opção c)

Questão 4

$X_1^{(k)} = G_1 X_1^{(k-1)} + H_1$ em que $\|G_1\|_\infty = \frac{4}{5} < 1$, $\|G_1\|_1 = \frac{7}{6} > 1$, $\|G_1\|_2 = \frac{3}{4} < 1$

$\Rightarrow X_1^{(k)}$ converge pois basta 1 das normas de G_1 ser < 1

$X_2^{(k)} = G_2 X_2^{(k-1)} + H_2$ em que $\|G_2\|_\infty = \frac{6}{5} > 1$, $\|G_2\|_1 = 2$, $\|G_2\|_2 = \frac{5}{4} > 1$

$\Rightarrow$ nada se pode concluir acerca da convergência de $X_2^{(k)}$

pois $\|G_2\| < 1$ é uma condição apenas suficiente

$X_3^{(k)} = G_3 X_3^{(k-1)} + H_3$ em que $\rho(G_3) \in \{z \in \mathbb{C} : |z+0.4| \leq 0.5\}$

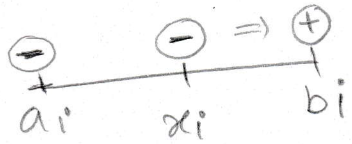
$\Rightarrow \rho(G_3) \in [0, 0.9] \Rightarrow \rho(G_3) < 1$ logo $X_3^{(k)}$ converge

opção a)

Questão 5

$f(x)=0$ tem raiz única $\alpha \in I_0=[a_0,b_0]$ e $x_i \in [a_i,b_i]$
pelo metodo do bissecção:

$f(x_i)<0$ e $f(a_i)<0$



$$x_i = \frac{a_i+b_i}{2} \in [a_i,b_i]$$

$$x_{i+1} = \frac{x_i+b_i}{2} \in [x_i,b_i]$$

$$|\alpha - x_{i+1}| \leq \frac{b_0-a_0}{2^{(i+1)+1}} = \frac{b_0-a_0}{2^{i+2}} \Rightarrow \text{opção } e)$$

Questão 6

	x_0	x_1	x_2	x_3
x_i	-2	-1	0	1
$f(x_i)$	19	1	1	1

a) $$p_3(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x) + f(x_3)L_3(x)$$

$$= 19\,\frac{(x+1)\,x\,(x-1)}{(-2+1)(-2+0)(-2-1)} + \frac{(x+2)\,x\,(x-1)}{(-1+2)(-1+0)(-1-1)} + \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(0+2)(0+1)(0-1)}$$

$$+ \frac{(x+2)(x+1)\,x}{(1+2)(1+1)(1+0)} = -\frac{19}{6}\,(x+1)x(x-1) + \frac{(x+2)x(x-1)}{2} +$$

$$- \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{2} + \frac{(x+2)(x+1)\,x}{6}$$

$$= -3x^3+3x+1$$

$$f(0.01) \simeq p_3(0.01) = 1.029997$$

Questão 6 (Continuação)

b) erro absoluto

$$|f(x) - p_2(x)| = \left|(x+2)(x+1)x(x-1) \times \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\right|, \xi \in]-2,1[$$

$f(x)$ polinómio de grau 4 em que $a_4 = 1$ $\Rightarrow f^{(4)}(x) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$

$x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$|f(0.01) - p_2(0.01)| = |2.01 \times 1.01 \times 0.01 \times (-0.99)| \times \frac{4!}{4!} = 0.02009\ldots < 0.0201$$

erro relativo

$$r_{f(0.01)} = \frac{|f(0.01) - p_3(0.01)|}{|f(0.01)|} \leq \frac{0.0201}{1.009897} = 0.019903 < 0.02$$

$f(0.01) \in [p_3(0.01) - 0.0201, p_3(0.01) + 0.0201] = [1.009897, 1.050097]$

c) $q_2(x)$ polinómio de grau 2 que passa pelos pontos x_0, x_1 e x_3

$$\sqrt{\sum_{i=0}^{3} (f(x_i) - q_2(x_i))^2} = 6 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\underbrace{(f(x_0) - q_2(x_0))^2}_{=0} + \underbrace{(f(x_1) - q_2(x_1))^2}_{=0} + \underbrace{(f(x_2) - q_2(x_2))^2}_{?} + \underbrace{(f(x_3) - q_2(x_3))^2}_{=0}} = 6.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(f(x_2) - q_2(x_2))^2} = 6 \Leftrightarrow |\overbrace{f(0)}^{=1} - q_2(0)| = 6 \Leftrightarrow q_2(0) = \begin{cases} 1 - 6 = -5 \\ \cancel{1 + 6 = 7} \end{cases}$$

logo $q_2(x)$ só pode ser uma parábola com curvatura voltada para cima

$q_2(x)$ é o polinómio interpolador de f nos pontos x_0, x_1 e x_3 logo não pode ser o polinómio de grau 2 obtido pelo método dos mínimos quadrados uma vez que o método para o obter não minimiza as distâncias entre os $f(x_i)$ e $q_2(x_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$

Questão 6 (continuação)

d) $$S(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}x^3 + 27x^2 + \frac{63}{2}x + 10 & -2 \leq x < -1 \\ -\frac{9}{2}x^3 + \frac{9}{2}x + 1 & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

S é de grau 3

S é interpolador de f em x_i, $i = 0,1,2,3$?

$S(-2) = f(-2) \Leftrightarrow 19 = 19$ ✓

$S(-1) = f(-1) \Leftrightarrow 1 = 1$ ✓

$S(0) = f(0) \Leftrightarrow 1 = 1$ ✓

S contínua?

$S_-(-1) = 1 = S_+(-1)$ ✓

$$S'(x) = \begin{cases} \frac{27}{2}x^2 + 54x + \frac{63}{2} \\ -\frac{27}{2}x^2 + \frac{9}{2} \end{cases}$$

S'(x) é contínua?

$S'_-(-1) = S'_+(-1) \Leftrightarrow \frac{27}{2} - 54 + \frac{63}{2} = -\frac{27}{2} + \frac{9}{2} \Leftrightarrow -9 = -9$ ✓

$$S''(x) = \begin{cases} \frac{54x + 54}{2} = 27x + 54 \\ -\frac{54}{2}x = -27x \end{cases}$$

S'' é contínua

$S''_-(-1) = S''_+(-1) \Leftrightarrow -27 + 54 = -27 \times -1 \Leftrightarrow 27 = 27$ ✓

S é spline cúbico ✓

natural?

$S''(-2) = S''(0) = 0$?

$S''(-2) = 54 \times \frac{-2}{2} + 54 = 0$ ✓

$S''(0) = 0$ ✓

logo S é spline cúbico natural

Questão 7

x_i	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x_i)$	5	6.1875	5	$f(1.5)$	-3	-5.3125	-1

(Intervalos: 1, 2, 3)

a) Regra dos trapézios com 3 aplicações da regra $I = \int_0^3 f(x)dx$

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{3} = 1$

$\hat{I}_T = \frac{h}{2}\left(f(0) + 2(f(1) + f(2)) + f(3)\right) = \frac{1}{2}\left(5 + 2(5-3) - 1\right) = \frac{8}{2} = 4$

b) $\hat{I}_{PM} = 2.3125$ com $h = 1 \Rightarrow h = \frac{3}{n} = 1 \Leftrightarrow n = 3$

$\hat{I}_{PM} = h\left(f(0.5) + f(1.5) + f(2.5)\right) = 6.1875 + f(1.5) - 5.3125$

$\underset{2.3125}{\parallel}$ $\quad f(1.5) = 2.3125 + 5.3125 - 6.1875 = 1.4375$

c) $f^{(4)}(x) = 24, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ regra de Simpson simples

$\Downarrow$

$h = \frac{3}{2}$

$I - \hat{I} = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(x)$ (*)

$\hat{I}_S = \frac{h}{3}\left(f(0) + 4f(1.5) + f(3)\right) = \frac{\cancel{3}}{2\times\cancel{3}}\left(5 + 4\times 1.375 - 1\right)$

$= 4.875$

(*) $I - 4.875 = \frac{-\left(\frac{3}{2}\right)^5}{90} \times 24 = -2.025$

$\Leftrightarrow I = -2.025 + 4.875 = 2.85$

Questão 8

$f(x) = x^3 - sen(x)$ com zero único α em $I = [0.6, 1]$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) \end{cases} \qquad \begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = y_n - \dfrac{f(y_n)}{f'(y_n)} \end{cases}$$

a) α é zero de $f(x) \Leftrightarrow f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 - sen(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^3 = sen(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[3]{sen(\alpha)} \Leftrightarrow \alpha = \varphi(\alpha) \Leftrightarrow$

α é ponto fixo de $\varphi(x)$

b) Metódo do ponto fixo

Condições de convergencia

$\varphi(x) = \sqrt[3]{sen(x)}$ continua em I

$\varphi(x) \in I, \forall x \in I$

$\varphi(0,6) = 0.82652\ldots \in I$

$\varphi(1) = 0.944089\ldots \in I$

$\sqrt[3]{sen(x)}$ é função crescente entre $[0, \frac{\pi}{2}]$ logo também o é em $[0.2, 1]$ logo

$0.6 < 0.82652\ldots < \varphi(x) \leq 0.944089\ldots < 1, \forall x \in I$

$|\varphi'(x)| = \left| \dfrac{cos(x)}{3\sqrt[3]{(sen(x))^2}} \right| = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{cos^3(x)}{sen^2(x)}} > 0$ e estritamente decrescente para $\forall x \in I$

$\varphi'(0.6) = 0.402711\ldots < 1$

$\varphi'(1) = 0.202064\ldots < 1$

logo o seu máximo é obtido para $x = 0.6$ donde $|\varphi'(x)| < 1, \forall x \in I$

Conclusão: $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ é convergente para α

$x_1 = \varphi(1) = 0.944089$

$x_2 = \varphi(x_1) = 0.932156$

Questão 8 (continuação)

c) $\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = y_n - \dfrac{f(y_n)}{f'(y_n)} \end{cases}$, $n = 1, 2, \dots$ $\qquad I = [0.6, 1]$

Método de Newton convergente para α

$f'(x) = 3x^2 - \cos(x)$

$f''(x) = 6x + \operatorname{sen}(x)$

$|f'(x)| = \underbrace{|3x^2 - \cos(x)|}_{\text{crescente em } I} \geq 3 \times (0.6)^2 - \cos(0.6) \geq 0.254664 \underset{\text{Truncar}}{=} m_1$

$\hookrightarrow$ mínimo em $x = 0.6$

$|f''(x)| = \underbrace{|6x + \operatorname{sen}(x)|}_{\text{crescente em } I} \leq 6 + \sin(1) \leq 6.841471 = M_2$ $\hookrightarrow$ arredondar para cima

$\hookrightarrow$ máximo em $x = 1$

$y_0 = 1$

$y_1 = 1 - \dfrac{f(1)}{f'(1)} = 0.935549$

$y_2 = 1 - \dfrac{f(y_1)}{f'(y_1)} = 0.928702$

Majorante erro método de Newton

$|\alpha - y_2| \leq \dfrac{M_2}{2m_1}(y_2 - y_1)^2 = 6,298334 \times 10^{-4} < 0.629834 \times 10^{-3}$
$< 0.5 \times 10^{-2}$

podemos garantir 2 casas decimais significativas

Questão 9

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

a) Metodo de Gauss - Seidel

$$X^{(k)} = G_{GS} X^{(k-1)} + H_{GS}$$

$$G_{GS} = -(L+D)^{-1} U \quad H_{GS} = (L+D)^{-1} B$$

$$(L+D)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 3/4 & -1/2 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_{GS} = -\begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 3/4 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & -3/4 \end{bmatrix}$$

$$H_{GS} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 3/4 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5/2 \end{bmatrix}$$

$\|G_{GS}\|_\infty = \max(1/2, 3/4) = 3/4 < 1$ logo $X^{(k)}$ converge para a solução de $AX = B$

b) $X^{(0)} = [0 \quad 0]^T$

$$X^{(1)} = G_{GS} X^{(0)} + H_{GS} = H_{GS} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5/2 \end{bmatrix}$$

$$X^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & -3/4 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -5/2 \end{bmatrix}}_{X^{(1)}} + \begin{bmatrix} 1 \\ -5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ -0.625 \end{bmatrix}$$

$$X^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & -3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.25 \\ -0.625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -5/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6875 \\ -2.03125 \end{bmatrix}$$

questao 9 (continuação)

c) $X^{(30)} - X^{(29)} \simeq \begin{bmatrix} -0.0004 \\ 0.0006 \end{bmatrix}$

$$\|X^* - X^{(30)}\|_\infty \leq \frac{\|G_{GS}\|_\infty}{1 - \|G_{GS}\|} \|X^{(30)} - X^{(29)}\|_\infty \circledast$$ erro à posteriori

$$\circledast = \frac{3/4}{1 - 3/4} \left\| \begin{bmatrix} -0.0004 \\ 0.0006 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \frac{0.75}{0.25} \times 0.0006 \leq 0.1785 \times 10^{-2} < 0.5 \times 10^{-2}$$

podemos garantir 2 casas decimais significativas

d) $\rho(G_{GS}) = \frac{3}{4}$ e $\rho(G_{GS}(0.8)) = \frac{1}{5}$

Um metodo iterativo converge mais rapido quanto menor for o raio espectral da matriz de iteração G, neste caso como $\frac{1}{5} < \frac{3}{4} < 1$, o método de Gauss-Siedel com factor de relaxação $\omega = 0.8$ converge mais rápido que o método de Gauss-Siedel Simples.

A aplicação do factor de relação $\omega = 0.8$ serviu para acelerar a convergência do metodo.

Questão 10

$$\begin{cases} y'(t) = \cos(2t) + \text{sen}(3t) & t \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) $f(t,y) = \cos(2t) + \text{sen}(3t)$

$D_f = \{(t,y) : 0 \le t \le 1 ,\ y \in \mathbb{R}\}$

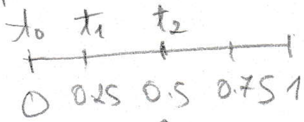
f é contínua em D_f

$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 0 \Rightarrow \exists_{L>0} : \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < L$ por exemplo $L = 1$

logo o problema é bem posto

b) Aproximação para $y(0.5)$ pelo método de Taylor de ordem 2

$h = 0.25$



$t_0 = 0, t_1 = 0.25, t_2 = 0.5$ logo $y(0.5) \simeq w_2$

$w_0 = 1$

$f'(t,y) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t) = -2\sin(2t) + 3\cos(3t) + 0 \times y'(t)$

$w_1 = w_0 + h f(t_0, w_0) + \frac{h^2}{2} f'(t_0, w_0)$

$= 1 + 0.25 f(0,1) + \frac{0.25^2}{2} f'(0,1)$

$= 1 + 0.25 (\underbrace{\cos(0)}_{=1} + \underbrace{\text{sen}(0)}_{=0}) + \frac{0.25^2}{2}(-2\underbrace{\text{sen}(0)}_{=0} + 3\underbrace{\cos(0)}_{=1})$

$= 1.25 + \frac{0.25^2}{2} \times 3 = 1.34375$

$w_2 = w_1 + 0.25 f(t_1, w_1) + \frac{0.25^2}{2} f'(t_1, w_1)$

$= 1.34375 + 0.25 f(0.25, 1.34375) + \frac{0.25^2}{2} f'(0.25, 1.34375)$

$= 1.34375 + 0.25(\cos(2\times 0.25) + \sin(3 \times 0.25)) + \frac{0.25^2}{2}(-2\text{sen}(2\times 0.25) + 3\cos(3\times 0.25))$

$= 1.34375 + 0.389805 + 0.038632 = 1.772187$

$y(0.5) \simeq 1.772187$