FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

SÉRIES DE FOURIER

1 . Classifique quanto à paridade as seguintes funções:

a) $sin\, 3x$ b) $x^2 + sin^2\, x$ c)$e^{|x|}$ d) $x\, cos\, x$ e) $f(x) = \begin{cases} x+5 & -2 \le x \le 0 \\ -x-5 & 0 \le x \le 2 \end{cases}$

(Resposta: a) Impar b)Par c)Par d)Impar e) Nem par nem impar)

2. i) Mostre que dada uma função $g(x)$ definida em $\mathbb{R}$, a função definida por $p(x) = \dfrac{g(x)+g(-x)}{2}$ é par, a função definida por $q(x) = \dfrac{g(x)-g(-x)}{2}$ é impar e $g(x) = p(x) + g(x)$.

ii) Represente as seguintes funções como soma de uma função par com uma função impar:

a) e^x b)$\dfrac{x}{1-x}$ c) $\dfrac{1+x}{1-x}$

(Resposta: ii) a) $cosh\, x + sinh\, x$ b)$\dfrac{x^2}{1-x^2} + \dfrac{x}{1-x^2}$ c)$\dfrac{1+x^2}{1-x^2} + \dfrac{2x}{1-x^2}$)

3. Determine a série de Fourier das seguintes funções periódicas de período 2π

1. (a) $f(x) = x$ se $-\pi < x < \pi$.
   (b) $f(x) = x$ se $0 < x < 2\pi$.
   (c) $f(x) = x$ se $0 < x < \pi$ e considerando a sua extensão par ao intervalo $-\pi < x < \pi$.
2. (a) $f(x) = x^2$ se $-\pi < x < \pi$. Utilize o resultado obtido para determinar a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2} cos\, nx$, $x \in]\pi, \pi[$ e ainda para mostrar que $\dfrac{\pi^2}{12} = 1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{4^2} + \ldots$.
   (b) $f(x) = x^2$ se $0 < x < 2\pi$.
   (c) $f(x) = x^2$ se $0 < x < \pi$ e considerando a sua extensão ímpar ao intervalo $-\pi < x < \pi$.
3. $f(x) = \begin{cases} x & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < x < 3/2\pi \end{cases}$.

(Resposta: 1 a) $2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} sin\, nx = \begin{cases} f(x) & x \in]-\pi, \pi[\\ 0 & x = -\pi, \pi \end{cases}$ b)$\pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{sin\, nx}{n} = \begin{cases} f(x) & x \in]0, 2\pi[\\ \pi & x = 0, 2\pi \end{cases}$ c) $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{cos\,(2n-1)x}{(2n-1)^2}$, $x \in]0, \pi[$ 2 a) $\dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} \cos nx =$

$\left\{\begin{array}{ll} f(x) & x \in]-\pi,\pi[\\ \pi^2 & x=-\pi,\pi \end{array}\right.$ b) $\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^2}\cos nx-\pi\frac{1}{n}\sin nx)=\left\{\begin{array}{ll} f(x) & x \in]0,2\pi[\\ 2\pi^2 & x=0,2\pi \end{array}\right.$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}-\frac{4(1-(-1)^n)}{\pi n^3})\sin nx=\left\{\begin{array}{ll} f(x) & x \in]0,\pi[\\ 0 & x=0,2\pi \end{array}\right.$ 3. $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} sin\,(2n-1)x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n} sin\,2nx=$
$\left\{\begin{array}{ll} f(x) & x \in]-\pi/2,\pi/2[\cup]\pi/2,(3/2)\pi[\\ -\pi/4 & x=-\pi/2,\pi/2 \\ \pi/4 & x=\pi/2 \end{array}\right.$)

4. Determine a série de Fourier de cada uma das seguintes funções, que se assume serem periódicas de período $p = 2L$.

a)$f(x) = |x|$, $-2 < x < 2$, $p = 2L = 4$

b) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1/2 & -1 < x < 0 \\ -x & 0 < x < 1 \end{array}\right.$, $p = 2L = 2$

c) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & -2 < x < 0 \\ e^{-x} & 0 < x < 2 \end{array}\right.$, $p = 2L = 4$

(Resposta: a) $f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}}{(2n-1)^2}, \quad x \in [-2,2]$

b) $\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(-1)^n)}{n} sin\,n\pi x=\left\{\begin{array}{ll} f(x) & x \in]-1,0[\cup]0,1[\\ \frac{-1}{4} & x=1,-1 \\ \frac{1}{4} & x=0 \end{array}\right.$

c)$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}e^{-2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+e^{-2}(-1)^{n+1})}{4+n^2\pi^2} cos\,\frac{n\pi x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n-1}{n\pi}+\frac{n\pi(1+e^{-2}(-1)^{n+1})}{4+n^2\pi^2}) sin\,\frac{n\pi x}{2}$
$=\left\{\begin{array}{ll} f(x) & x \in]-2,2[\\ \frac{1+e^{-2}}{2} & x=2,-2 \end{array}\right.$

5. Cada uma das seguintes funções encontra-se definida no intervalo $(0, L)$. Comece por considerar a sua extensão par ao intervalo $(-L, L)$ e represente graficamente a sua extensão periódica de período $2L$ a $\mathbb{R}$. Determine a série de Fourier em cosenos de cada uma dessas funções.

a)$f(x) = x^2$, $0 < x < L$

b) $f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & 0 < x < L/2 \\ 1 & L/2 < x < L \end{array}\right.$

c)$f(x) = sin\,\frac{\pi x}{L}$, $0 < x < L$

(Resposta:

a) $f(x) = \frac{L^2}{3}+\frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} cos\,\frac{n\pi x}{L} \quad x \in [0,L]$ b)$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1} cos\,\frac{(2n-1)\pi x}{L}=$
$\left\{\begin{array}{ll} f(x) & x \in [0,L/2[\\ \frac{1}{2} & x=L/2, \end{array}\right.$ c) $f(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} cos\,\frac{2n\pi x}{L} \quad x \in [0,L]$)

6. Cada uma das seguintes funções encontra-se definida no intervalo $(0, L)$. Comece por considerar a sua extensão impar ao intervalo $(-L, L)$ e represente graficamente a sua extensão periódica de período $2L$ a $\mathbb{R}$. Determine a série de Fourier em senos de cada uma dessas funções.

a) $f(x) = x^2$, $0 < x < L$

b) $f(x) = \begin{cases} 1/2 & 0 < x < L/2 \\ 3/2 & L/2 < x < L \end{cases}$

c) $f(x) = L - x$, $0 < x < L$

(Resposta: a) $\frac{2L^2}{\pi}(\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n-1} - \frac{4}{(2n-1)^2})sin\,\frac{(2n-1)\pi x}{L} - \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n}sin\,\frac{2n\pi x}{L} = \begin{cases} f(x) & x \in [0, L[\\ 0 & x = L \end{cases}$

b) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}sin\,\frac{n\pi x}{L} = \begin{cases} f(x) & x \in]0, L/2[\cup]L/2, L[\\ 1 & x = L/2, \\ 0 & x = 0, L \end{cases}$

c) $\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}sin\,\frac{n\pi x}{L} = \begin{cases} f(x) & x \in]0, L] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$)