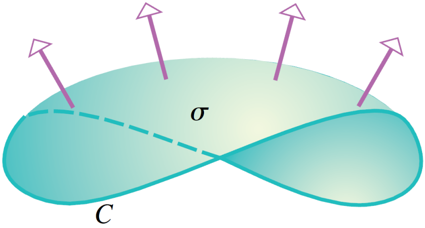
Superfície com bordo

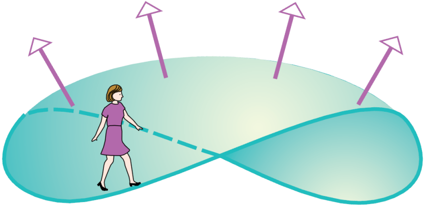
Seja σ uma superfície orientada cujo bordo é uma curva $\mathcal{C}$.



Há duas relações possíveis entre as orientações de σ e $\mathcal{C}$.

Orientação positiva de bordo

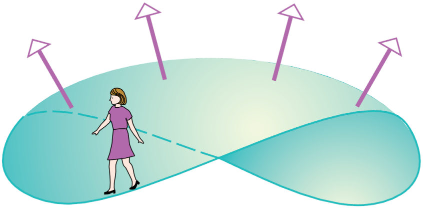
A pessoa está a andar no sentido positivo de $\mathcal{C}$ relativo à orientação de σ se a superfície estiver à sua esquerda.



O sentido positivo de $\mathcal{C}$ estabelece uma relação de mão direita: se os dedos da mão direita estiverem curvados na direção positiva de $\mathcal{C}$, então o polegar apontará na direção da orientação de σ.

Orientação negativa de bordo

A pessoa está a andar no sentido negativo de $\mathcal{C}$ relativo à orientação de σ se a superfície estiver à sua direita.



Teorema de Stokes

Teorema

Seja σ uma superfície orientada, de bordo $\mathcal{C}$ orientado positivamente de acordo com σ. Então, para todo campo vectorial $\vec{F}$ de classe C^1 definido num conjunto aberto que contenha σ,

$$\iint_{\sigma} \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Exemplo

Considere o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = -yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$. *Seja* σ *a parte da superfície de equação* $z = \sqrt{4-(x^2+y^2)}$ *que está dentro do cilindro* $x^2+y^2=1$ *(isto é, os pontos de* σ *verificam* $x^2+y^2 \leq 1$ *), orientada pela normal dirigida para cima* $\vec{n}$. *Usando o teorema de Stokes determine*

$$\iint_{\sigma} \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS.$$

Resolução:

Teorema da divergência - Gauss

Teorema

Seja G *um sólido simples cuja fronteira* σ *é uma superfície fechada orientada com a normal exterior. Se* $\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z)\vec{k}$ *for um campo vetorial de classe* C^1 *num conjunto aberto contendo* G *e se* $\vec{n}$ *for o vetor normal unitário exterior em cada ponto de* σ*, então*

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_{G} \operatorname{div} \vec{F}(x,y,z)\, dxdydz,$$

onde

$$\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z)$$

é a divergência de $\vec{F}$.

Exemplo

Exemplo

Considere o sólido em $\mathbb{R}^3$ *definido por*

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 - z \leq 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$$

e o campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = zx^2 \cos^2(z)\,\vec{i} + 2xzy\,\mathrm{sen}^2(z)\,\vec{j} + xy\cos(y)\,\vec{k}$. *Designe por* σ *a fronteira de* E *orientada pela nornal exterior* $\vec{n}$. *Usando o teorema da divergência, determine*

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS.$$

Exemplo - Resolução

Resolução: