CN A – Exercicios: Integração Numérica

Felipe B. Pinto 71951 – EQB

17 de dezembro de 2024

Conteúdo

Questão 1

Considere o Integral:

$$\boldsymbol{I} = \int_{\pi/6}^{\pi/2} e^{\sin x}\ \mathrm{d}x$$

Q1 a.

Determine uma aproximação de I, utilizando a regra dos trapézios simples. Obtenha uma estimativa do erro absoluto cometido na aproximação de I obtida.

Resposta

$$g(x) = e^{\sin(x)};\ \hat{I} = h\, g((a+b)/2) = \frac{I}{3}\, g(\pi/3) = \pi/3\, e^{\sin(\pi/3)} \approx 2.489652;$$

$$|\varepsilon| = \left|\frac{h^3}{24}\, g''(\gamma)\right| \leq \left|\frac{(\pi/3)^3}{24}\, e\right| \leq |0.0130068|, \gamma \in\,]\pi/6, \pi/2[;$$

$$g'(x) = \cos(x)\, e^{\sin x}$$

$$g''(x) = -\sin(x)\, e^{\sin x} + \cos^2(x)\, e^{\sin x} = e^{\sin x}\big(\cos^2(x) - \sin^2(x)\big)$$

Q1 b.

Repita as regras mas para o ponto médio de Simpson

Exemplo 1

$$\boldsymbol{I = \int_1^2 \ln x \; \mathrm{d}x}$$

Resposta

$$\hat{I} = \frac{h}{3}(g(a) + 4\,g((a+b)/2) + g(b)) = \frac{\frac{b-a}{2}}{3}(g(a) + 4\,g((a+b)/2) + g(b)) =$$
$$= \frac{\frac{2-1}{2}}{3}(g(1) + 4\,g((1+2)/2) + g(2)) = \frac{1}{6}(0 + 4\,(0.405465) + (0.693147)) \approx$$
$$\approx 0.385835;$$

$$|E| = \left|-\frac{h^2}{90}\,\frac{\mathrm{d}^4 g(\gamma)}{\mathrm{d}x^4}\right| = \left|-\frac{h^2}{90}\,\frac{\mathrm{d}^4 \ln(\gamma)}{\mathrm{d}x^4}\right| = \left|-\frac{h^2}{90}\,\frac{\mathrm{d}^3 1/\gamma}{\mathrm{d}x^3}\right| = \left|-\frac{h^2}{90}\,\frac{\mathrm{d}^2 - 1/\gamma^2}{\mathrm{d}x^2}\right| =$$
$$= \left|-\frac{h^2}{90}\,\frac{\mathrm{d}2/\gamma^3}{\mathrm{d}x}\right| = \left|-\frac{h^2}{90}\,(-6/\gamma^4)\right| \leq= \left|-\frac{1/4}{90}\,6\right| \leq 0.002084$$

Questão 2

Considere o Integral

$$\boldsymbol{I} = \int_{\mathbf{0.7}}^{\mathbf{1.7}} \boldsymbol{\pi}^{\boldsymbol{x}}\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Q2 a.

Determina uma aproximação $\hat{I}$, de I ultizilando a regra dos trapézios compostos com $h = 0.25$.
Obtenha um majorante do erro absoluto cometido no cálculo do valor aproximado $\hat{I}$

Nota: Nos cálculos intermédios utilize 6 casas decimais, devidamente arrendondadas.

Resposta

$$h = \frac{b-a}{2\,n} \implies n = \frac{b-a}{2\,h} = \frac{1}{2 * 0.25} = 2 \implies$$

$$\implies I_{S,2} = \frac{h}{3}\left(f_{(x_0)} + 4\left(f_{(x_1)} + f_{(x_3)}\right) + 2\,f_{(x_2)} + f_{(x_4)}\right) =$$

$$= \frac{0.25}{3}\left(\pi^{0.7} + 4\left(\pi^{.95} + \pi^{1.45}\right) + 2\,\pi^{1.2} + \pi^{1.7}\right) \implies$$

$$\implies |I - I_{S,2}| \leq n\,\frac{h^5}{90}\,M_4 = 2\,\frac{0.25^5}{90} * 12.021728 \cong 0.000$$

Q2 b.

Repita a alínea anterior para a regra de Simpson.

Q2 c.

Quantos subintervalos teria que considerar se pretendesse calcular um valor aproxiumade de I com um erro inferiror a 10^{-6} usando

(i) A regra do ponto médio

(ii) A regra dos trapézios.

(iii) A regra de Simpson.

Questão 8

Seja $I = \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$ onde $f(x) \in C^n([0,4])$ é uma função que verifica $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq \frac{2^n}{n!}, \forall\, x \in [0,4] e n \in \mathbb{N}$.

$$\boldsymbol{I = \int_0^4 f_{(x)}\ \mathrm{d}x, \quad f_{(x)} \in C^n([0,4])}$$

$$\boldsymbol{\left|f^n_{(x)}\right| \leq \frac{2^n}{n!} \quad \forall\, x \in [0,4] \land n \in \mathbb{N}}$$

Se pretendesse determinar um valor aproximado de I com, pelo menos, 4 casas decimais significativas, utilizando a regra de Simpson, qual o menor número de subintervalos de igual amplitude em que teria de dividir o intervalo $[0,4]$? Justifique.

Resposta

$$\left|I - \hat{I}_S\right| \leq \left|-n\,\frac{h^5}{90}\,f^4_{(\theta)}\right| \leq \left|-n\,\frac{\left(\frac{b-a}{2\,n}\right)^5}{90}\,\frac{2^4}{4!}\right| =$$

$$= n\,\frac{\left(\frac{4-0}{2\,n}\right)^5}{90}\,\frac{2^4}{4!} = \frac{4^4}{2 * n^4 * 3! * 90} \leq 0.5\,\mathrm{E}^{-}4 \implies$$

$$\implies n = \lceil 8.2978 \rceil = 9$$

$\therefore$ 18 Numero de aplicações da regra de Simpson

Seja $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\hat{I}_{P\,M,2} = 5.85$ sua aproximação de I dada pela regra do ponto médio com $n = 2$ e $\hat{I}_{T,2} = 6.45$ a aproximação do I pela regra de trapézios com $n = 3$. Qual o valor da aproximação por I dadaa pela regrad e simpson com $n = 2$

Resposta

$$\hat{I}_S = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4\,(f(x_1) + f(x_3)) + 2\,f(x_2) + f(x_4)) =$$
$$= \frac{0.5}{3}(f(-1) + 4\,(f(-0.5) + f(0.5)) + 2\,f(0) + f(1)) =$$
$$= \frac{0.5}{3}(4\,(5.85) + (12.90)) \cong 6.05;$$

$$x_i = -1 + h * i = \{-1.0, -0.5, 0.0, 0.5, 1.0\};$$

$$h = \frac{b-a}{2\,n} = \frac{1-(-1)}{2*2} = 0.5;$$

$$\hat{I}_{PM,2} = h\left(f\left(\frac{-1+0}{2}\right) + f\left(\frac{0+1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{-1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 5.85;$$

$$\hat{I}_{T,2} = \frac{h}{2}(f(-1) + 2\,f(0) + f(1)) = \frac{1}{2}(f(-1) + 2\,f(0) + f(1)) = 6.45 \implies$$
$$\implies f(-1) + 2\,f(0) + f(1) = 12.90$$

Questão 11

Seja

$$\boldsymbol{I = \int_1^5 f_{(X)}\ \mathrm{d}x}$$

Considere a seguinte tabela da função f, função polinomial de grau 2, da qual se sabe que $f''_{(x)} = 4$:

x	1	2	3	4	5
$f_{(X)}$	-2	-1	1	α	9

Q11 a.

Recorrendo à regra dos trapézios, com duas aplicações, determine um valor aproximado de I e o valor exato de I.

Q11 b.

Recorrendo à regra do ponto médio, com $n = 2$, determine um valor aproximado de I e o valor de I comofunção de α.

Q11 c.

Recorrendo às alíneas anteriores, determine o valor de α.

Q11 d.

Utilize duas aplicações da regra de Simpson para determinar um valor aproximado de I.

Questão 13

Cosidere a seguinte tabela para a função f:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_{(x)}$	40	21	8	1	0	5	16

Resposta

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-(-3)}{n} < 3 \implies n > 2 \wedge n < 4 \implies n = 3 \wedge h = 2$$

Q13 a.

Ultilizando a regra dos trapézios composta, obtenha uma proximação de $\hat{I}_T$ de

$$\boldsymbol{I = \int_{-3}^{3} f_{(x)}\ \mathrm{d}x, \quad h < 3 \land n < 4}$$

Resposta

$$\hat{I}_T = \frac{h}{2}\left(f_{(x_0)} + 2\, f_{(x_2)} + 2\, f_{(x_4)} + f_{(x_6)}\right) = \frac{2}{2}(f_{-3} + 2\, f_{-1} + 2\, f_1 + f_3) = (40 + 2 * 8 + 2 * 0$$

Q13 b.

Utilizando a regra do ponto médio, obtenha outra aproximação $\widehat{I_{PM}}$ de I, com $h = 2$

Resposta

$$\hat{I}_{pm} = 2\left(f_{\left(\frac{-1+x_0}{2}\right)} + f_{\left(\frac{-1+x_4}{2}\right)} + f_{\left(\frac{1+x_6}{2}\right)}\right) =$$
$$= 2\left(f_{(-3)} + f_{(0)} + f_{(2)}\right) = 2\,(21 + 1 + 5) = 54$$

Q13 c.

Sabendo que o erro de quadratura, para $\widehat{I_{PM}}$, é igual a 6 e que $f"(x)$ é constante, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, determine o erro de quadratura para $\widehat{I_T}$.

Resposta

$$I - \hat{I}_{pm} = n\,\frac{h^3}{24}\,f"_{(\theta)} = 3\,\frac{2^3}{24}\,k = 6 \implies k = 6;$$

$$I - \hat{I}_T = -n\,\frac{h^3}{12}\,f"_{(\theta)} = -3\,\frac{2^3}{12}\,k = -3\,\frac{2^3}{12}\,6 = -12$$