Cálculo Numérico A

Capítulo 3 – Integração Numérica

Fórmulas de integração numérica de Newton-Cotes simples e compostas

Método de integração de Gauss

Fórmulas de Newton-Cotes simples

Introdução

Muitas vezes torna-se necessário calcular um valor aproximado de um integral $I = \int_a^b g(x)dx$, pois é difícil ou impossível, conhecer, à priori, a expressão analítica de g.

Estas situações ocorrem quando, por exemplo, são apenas conhecidos alguns valores da função (função tabelada) ou quando a sua primitiva é difícil de determinar.

Neste capítulo iremos utilizar a interpolação polinomial para deduzir as fórmulas de integração pretendidas.

Objetivo

Sejam $\boldsymbol{I(g) = \int_a^b g(x)dx}$ e $\widehat{I(g)} = \int_a^b p_n(x)dx \approx I(g)$, onde $p_n(x)$ é o polinómio interpolador de g em $n+1$ nodos distintos e igualmente espaçados $\{x_k\}_{k=0,1,\ldots,n}$, ou seja tal que

$x_{k+1} - x_k = h_k = h$ (constante) , $k = 0,1,\ldots,n-1$, com

$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n \leq b$.

Estas fórmulas são designadas por **fórmulas de Newton-Cotes**.

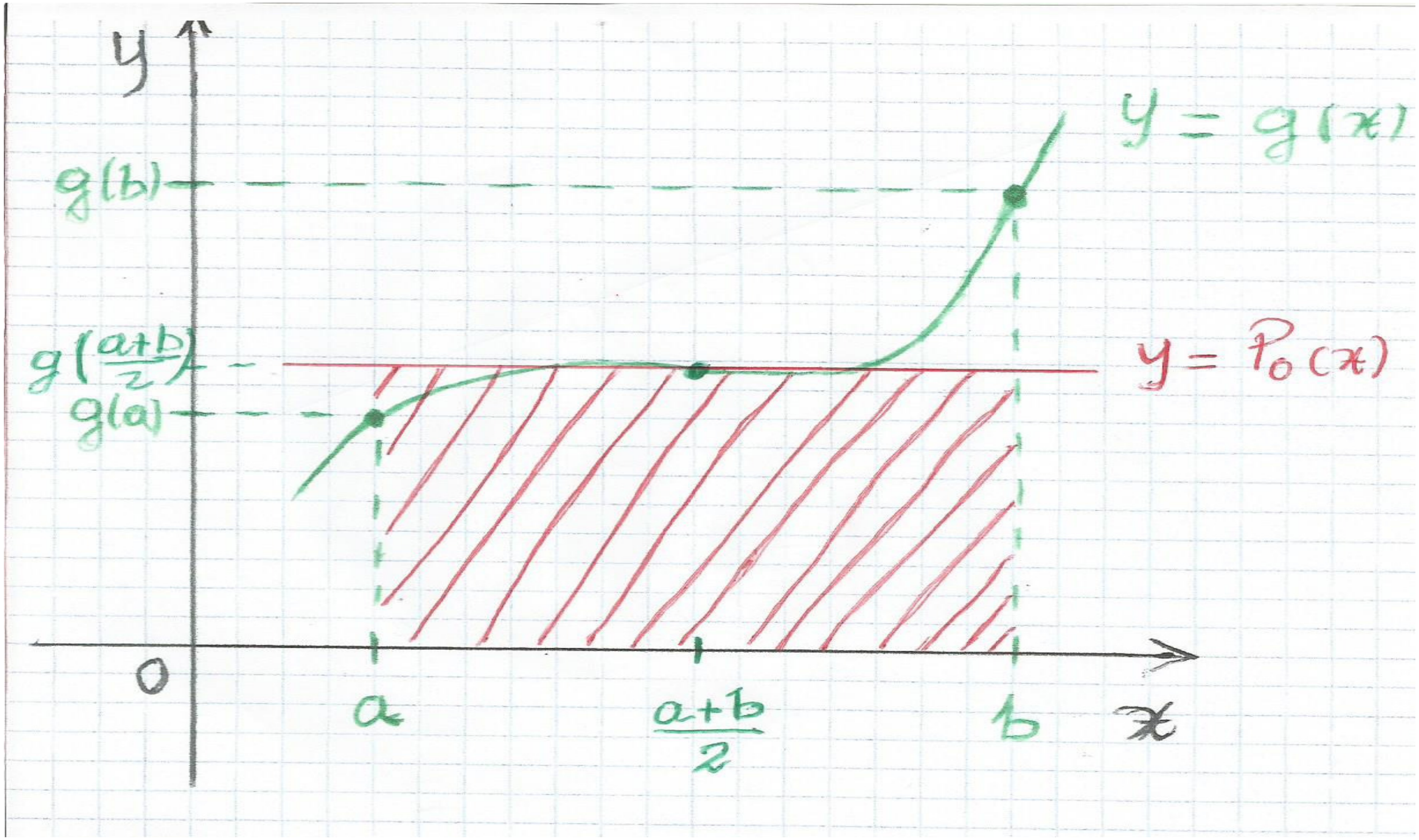
Em particular, se $g \in C^{n+1}([a,b])$, então o **erro de integração numérica** cometido é

$$E_I = I(g) - \widehat{I(g)} = \int_a^b \left(g(x) - \widehat{g(x)}\right) dx = \int_a^b \underbrace{\left(g(x) - p_n(x)\right)}_{E(x)} dx \,,$$

onde $E(x)$ é o erro de interpolação já anteriormente estudado.

Regra do ponto médio

Neste caso considera-se $\widehat{g(x)} = g\left(\frac{a+b}{2}\right)$ e interpola-se a função integranda por um polinómio de grau 0 :


y
y = g(x)
g(b)
g((a+b)/2)
y = P0(x)
g(a)
0
a
(a+b)/2
b
x

Por conseguinte

- $I(g) = \int_a^b g(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} g(x)dx \approx (x_1 - x_0)g\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) =$

  $= (b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right) = \widehat{I(g)}.$

Assumindo que $g \in C^2([a,b])$ e utilizando a fórmula de Taylor tem-se

$$g(x) = \underbrace{g\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{constante} + \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\underbrace{g'\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{constante} + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 g''(\theta_x) \ ,$$

onde $\theta_x \in \left]min\left(x, \frac{a+b}{2}\right), max\left(x, \frac{a+b}{2}\right)\right[$.

Sendo assim,

- $E_I = I(g) - \widehat{I(g)} = \int_a^b g(x)dx - (b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right) =$

$$= \int_a^b g(x)dx - \int_a^b g\left(\frac{a+b}{2}\right)dx = \int_a^b \left(g(x) - g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)dx =$$

$$= \int_a^b \left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)g'\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 g''(\theta_x)\right)dx \ =$$

$$= g'\left(\frac{a+b}{2}\right)\underbrace{\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx}_{=0} + \frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}_{\geq 0} g''(\theta_x)dx = \qquad (*)$$

$$= \frac{g''(\gamma)}{2}\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \left(\frac{g''(\gamma)}{2}\right)\frac{(b-a)^3}{12} =$$

$$= \frac{(b-a)^3}{24} g''(\gamma) \text{ , com } \gamma \in \left]a,b\right[.$$

---

* **Teorema do valor médio para integrais**

Sejam f e g duas funções de classe $C([a,b])$.

Supondo que f não muda de sinal em $[a,b]$, tem-se $\int_a^b f(x)g(x)dx = g(\beta)\int_a^b f(x)dx$, $\beta \in \left]a,b\right[$.

Resumindo, temos

Regra do ponto médio (simples)

- Fórmula de quadratura

Seja $I(g) = \int_a^b g(x)dx$.

Então, utilizando a regra do ponto médio simples tem-se

$$\widehat{I(g)} = hg\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad \text{com} \quad h = b - a \,.$$

- Erro de quadratura

Sendo $g \in C^2([a,b])$, tem-se

$$E_I = I(g) - \widehat{I(g)} = \frac{h^3}{24}g''(\gamma) \;, \; \text{com} \;\; \gamma \in \,]a,b[.$$

Exemplo 1

Seja $I = \int_1^2 \frac{1}{x+2} dx$.

Determine um valor aproximado de I , $\hat{I}$, utilizando a regra do ponto médio simples.

Determine ainda um majorante do erro absoluto cometido na aproximação calculada.

Resolução

- Nodos e função integranda

Tem-se $x_0 = a = 1$, $x_1 = b = 2$, $g(x) = \frac{1}{x+2}$ e $h = 2 - 1 = 1$.

- Cálculo do valor aproximado de I (fórmula de quadratura)

Assim sendo,

$$\hat{I} = (2-1)g\left(\frac{1+2}{2}\right) = g(1.5) = \frac{2}{7} = 0.285714\ldots.$$

- Cálculo do majorante do módulo de erro absoluto cometido em $\hat{I}$ (Erro de quadratura)

Tem-se

$$\left|I - \hat{I}\right| \leq \frac{h^3}{24} M_2 \ \text{, com } \ M_2 = max|g''(x)| \ , \ x \in [1,2] \, .$$

Ora $|g''(x)| = \left|\frac{2}{(x+2)^3}\right| = \frac{2}{(x+2)^3} \leq \frac{2}{(1+2)^3} = \frac{2}{27} = M_2$, $\forall x \in [1,2]$.

Sendo assim tem-se $\left|I - \hat{I}\right| \leq \left(\frac{1^3}{24}\right)\left(\frac{2}{27}\right) = \frac{1}{324} = 0.00308\ldots <$

$< 0.31 \times 10^{-2} \leq 0.5 \times 10^{-2}$, pelo que estão garantidas, pelo menos, duas casas decimais significativas para o valor

$\hat{I} = 0.285714\ldots$.

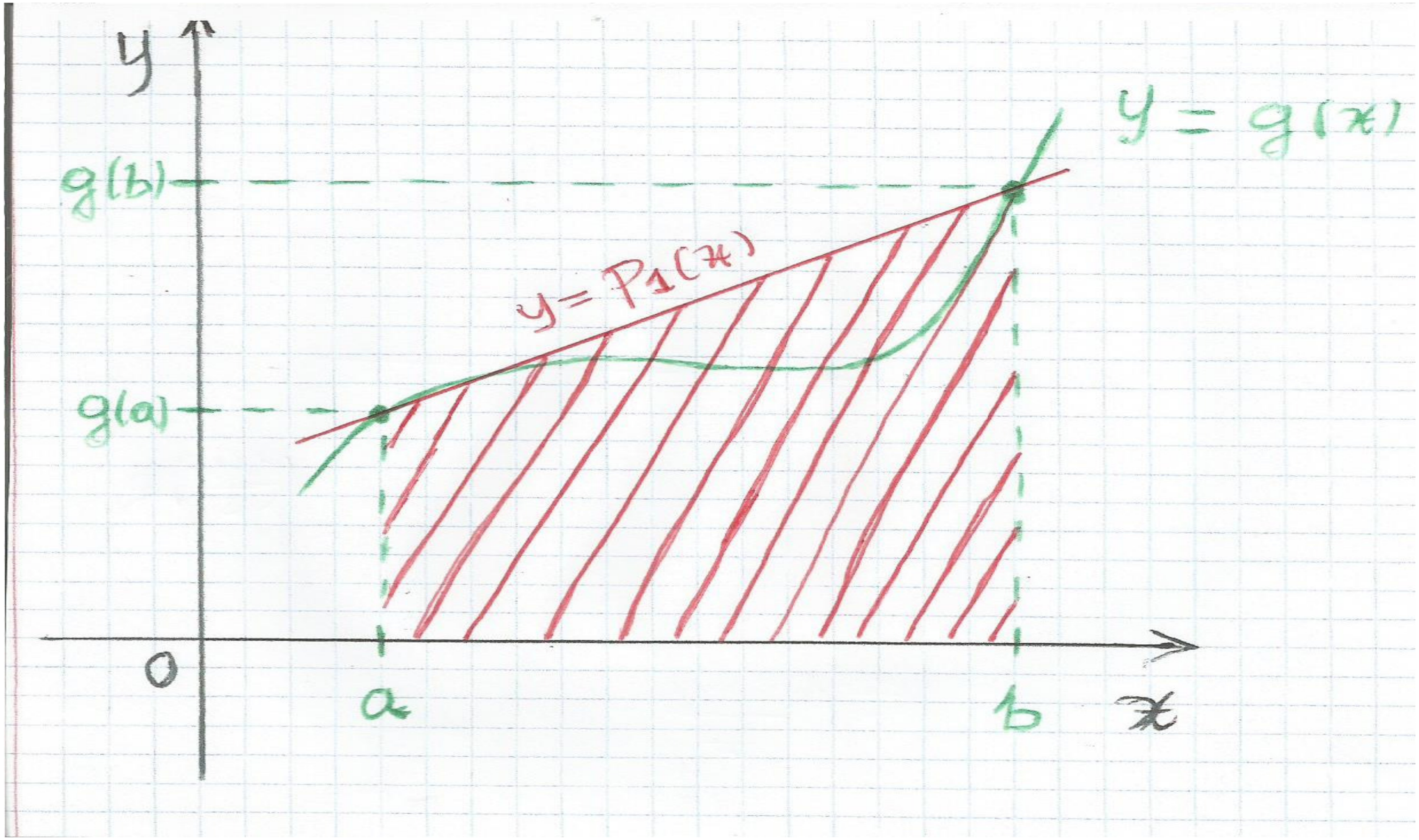
- Observação

Repare-se que $I = [ln|x+2|]_1^2 = ln\left(\frac{4}{3}\right) = 0.287682\ldots$ e

$\left|I - \hat{I}\right| = 0.00196\ldots < 0.31 \times 10^{-2}$.

Regra dos trapézios

Neste caso utiliza-se como função integranda o polinómio de grau ≤ 1, interpolador de $g(x)$ nos pontos $\left(x_0, g(x_0)\right)$ e $\left(x_1, g(x_1)\right)$, ou seja $\left(a, g(a)\right)$ e $\left(b, g(b)\right)$:


y
$y = g(x)$
g(b)
$y = P_1(x)$
g(a)
0
a
b
x

Assim sendo,

- $I(g) = \int_{x_0=a}^{x_1=b} g(x)dx \approx$

$$\approx \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} g(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} g(x_1) \right) dx =$$

$$= \frac{x_1 - x_0}{2} \big(g(x_0) + g(x_1) \big) = \frac{b-a}{2} \big(g(a) + g(b) \big) = \widehat{I(g)} \, .$$

Assumindo novamente que $g \in C^2([a,b])$, tem-se

$$I(g) - \widehat{I(g)} = \int_{x_0=a}^{x_1=b} \left(g(x) - \widehat{g(x)} \right) dx = \int_a^b E(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2!} g''(\theta_x) dx = \int_a^b \underbrace{(x-a)(x-b)}_{\leq 0} \frac{g''(\theta_x)}{2} dx \ = \qquad (**)$$

$$= \frac{g''(\gamma)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)\, dx = \left(\frac{g''(\gamma)}{2}\right)\left(-\frac{(b-a)^3}{6}\right) =$$

$= -\frac{(b-a)^3}{12} g''(\gamma)$, com $\gamma \in \,]a,b[$.

** Utilizando novamente o teorema do valor médio para integrais.

Resumindo, temos

Regra dos trapézios (simples)

- Fórmula de quadratura

Seja $I(g) = \int_a^b g(x)dx$.

Então, utilizando a regra dos trapézios simples tem-se

$$\widehat{I(g)} = \frac{h}{2}\big(g(a) + g(b)\big) \quad \text{com} \quad h = b - a\,.$$

- Erro de quadratura

Sendo $g \in C^2([a,b])$, tem-se

$$E_I = I(g) - \widehat{I(g)} = -\frac{h^3}{12}g''(\gamma)\ , \ \text{com}\ \ \gamma \in\,]a,b[.$$

Exemplo 2

Seja $I = \int_1^2 \frac{1}{x+2} dx.$

Determine um valor aproximado de I , $\hat{I}$, utilizando a regra dos trapézios simples.

Determine ainda um majorante do erro absoluto cometido na aproximação calculada.

Resolução

- Nodos e função integranda

Tem-se $x_0 = a = 1$, $x_1 = b = 2$, $g(x) = \frac{1}{x+2}$ e $h = 2 - 1 = 1.$

- Cálculo do valor aproximado de I (fórmula de quadratura)

Assim sendo,

$$\hat{I} = \frac{2-1}{2}\big(g(1) + g(2)\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{24} = 0.291666\ldots .$$

- Cálculo do majorante do módulo de erro absoluto cometido em $\hat{I}$

  (Erro de quadratura)

Assim sendo,

$$\left|I - \hat{I}\right| \leq \frac{h^3}{12} M_2 \ , \ \text{com} \ M_2 = max|g''(x)| \ , \ x \in [1,2] .$$

Como já se viu no exemplo 1, $M_2 = \frac{2}{27}$, pelo que

$$\left|I - \hat{I}\right| \leq \left(\frac{1^3}{12}\right)\left(\frac{2}{27}\right) = \frac{1}{162} = 0.00617 \ldots <$$

$< 0.62 \times 10^{-2} \leq 0.5 \times 10^{-1}$, pelo que está garantida, pelo menos, uma casa decimal significativa para o valor $\hat{I} = 0.291666\ldots$.

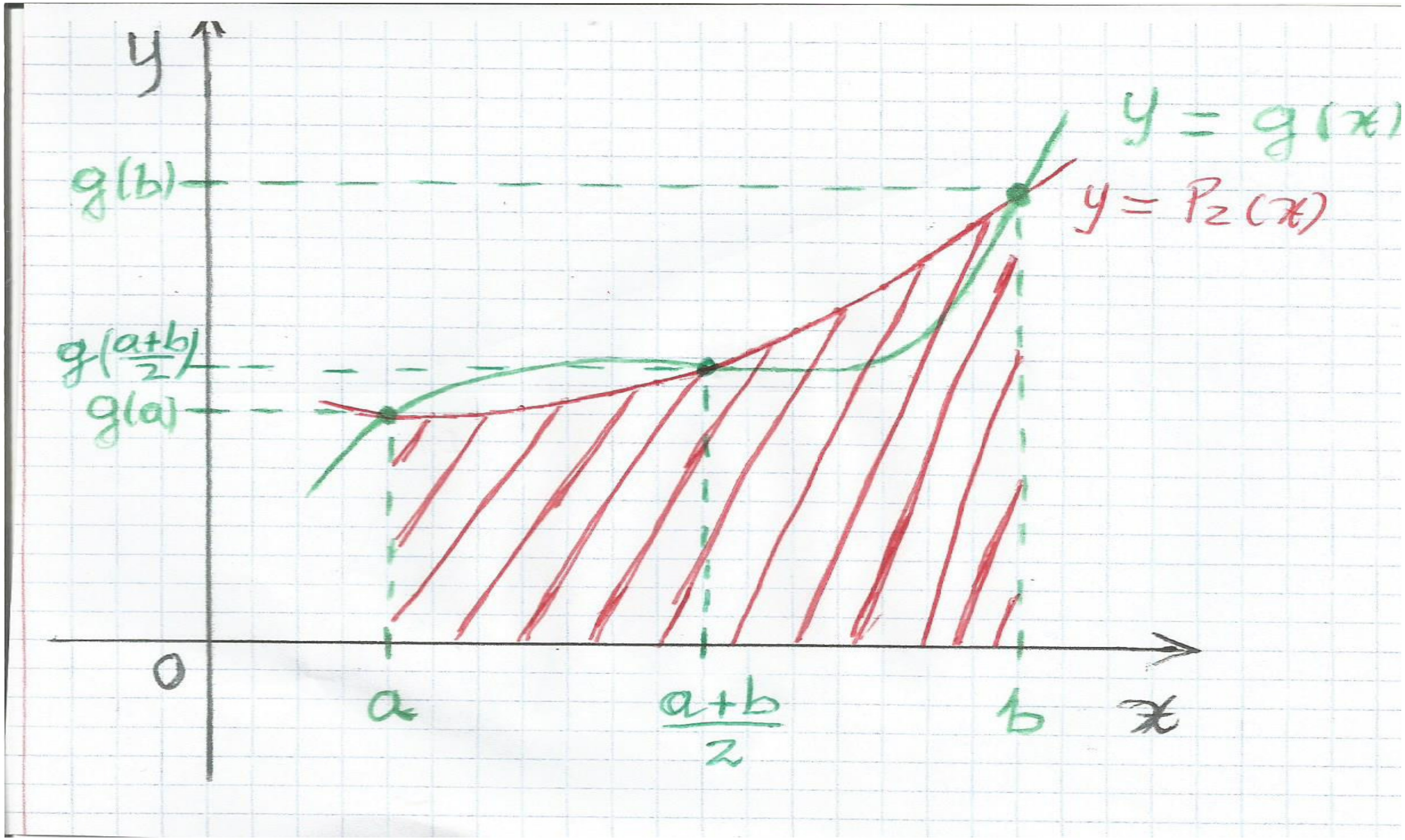
- Observação

Como $I = [ln|x+2|]_1^2 = ln\left(\frac{4}{3}\right) = 0.287682 \ldots$. tem-se

$$\left|I - \hat{I}\right| = 0.00398 \ldots < 0.62 \times 10^{-2} .$$

Regra de Simpson

Neste caso utiliza-se como função integranda o polinómio de grau ≤ 2, interpolador de $g(x)$ nos pontos $\big(x_0, g(x_0)\big)$, $\big(x_1, g(x_1)\big)$ e $\big(x_2, g(x_2)\big)$, ou seja $\big(a, g(a)\big)$, $\left(\frac{a+b}{2}, g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ e $\big(b, g(b)\big)$:



y
y = g(x)
g(b)
y = P2(x)
g((a+b)/2)
g(a)
0
a
(a+b)/2
b
x

Assim sendo,

- $I(g) = \int_{x_0=a}^{x_2=b} g(x)dx \approx$

$$\approx \int_{x_0}^{x_2} \left(\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} g(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} g(x_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} g(x_2) \right) dx =$$

$= I_0 g(x_0) + I_1 g(x_1) + I_2 g(x_2)$, onde

- $I_0 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} dx = \frac{h}{3}$;

- $I_1 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} dx = \frac{4h}{3}$;
- $I_2 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} dx = \frac{h}{3}$,

com $h = \frac{x_2-x_0}{2} = \frac{b-a}{2}$, $x_0 = a$, $x_1 = a + h$ e $x_2 = a + 2h = b$.

Finalmente tem-se

$$\widehat{I(g)} = \frac{h}{3}\big(g(x_0) + 4g(x_1) + g(x_2)\big).$$

Assumindo agora que $g \in C^4([a,b])$, tem-se

$$I(g) - \widehat{I(g)} = \int_{x_0=a}^{x_2=b} \left(g(x) - \widehat{g(x)}\right) dx = \int_a^b E(x)\, dx =$$

$$= \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!} g^{(3)}(\theta_x) dx = \quad (***)$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{2880} g^{(4)}(\gamma) = -\frac{\left(\frac{b-a}{2}\right)^5}{90} g^{(4)}(\gamma) = -\frac{h^5}{90} g^{(4)}(\gamma) \text{ , com } \gamma \in \,]a,b[.$$

*** Prova-se esta igualdade, apesar de não se poder utilizar o teorema do valor médio para integrais, uma vez que o polinómio $(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$ não tem sinal constante em $[a, b]$.

Resumindo, temos

Regra de Simpson (simples)

- Fórmula de quadratura

Seja $I(g) = \int_a^b g(x)dx$.

Então, utilizando a regra de Simpson simples tem-se

$$\widehat{I(g)} = \frac{h}{3}\left(g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b)\right) \quad \text{com} \quad h = \frac{b-a}{2}.$$

- Erro de quadratura

Sendo $g \in C^4([a,b])$, tem-se

$$E_I = I(g) - \widehat{I(g)} = -\frac{h^5}{90} g^{(4)}(\gamma) \ , \text{ com } \gamma \in \,]a,b[.$$

Exemplo 3

Seja $I = \int_1^2 \frac{1}{x+2} dx$.

Determine um valor aproximado de I , $\hat{I}$, utilizando a regra de Simpson simples.

Determine ainda um majorante do erro absoluto cometido na aproximação calculada.

Resolução

- Nodos e função integranda

Tem-se $x_0 = a = 1$, $x_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$, $x_2 = b = 2$ e $g(x) = \frac{1}{x+2}$.

- Cálculo do valor aproximado de I (fórmula de quadratura)

Assim sendo, $h = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$ e

$$\hat{I} = \frac{h}{3}\left(g(1) + 4g\left(\frac{3}{2}\right) + g(2)\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3} + 4\left(\frac{2}{7}\right) + \frac{1}{4}\right) = \frac{145}{504} =$$

$$= 0.287698\ldots.$$

- Cálculo do majorante do módulo de erro absoluto cometido em $\hat{I}$ (Erro de quadratura)

Assim sendo,

$$\left|I-\hat{I}\right| \leq \frac{h^5}{90} M_4 \ \text{, com } \ M_4 = max\left|g^{(4)}(x)\right| \ , \ x \in [1,2] \ .$$

Ora $\left|g^{(4)}(x)\right| = \left|\frac{24}{(x+2)^5}\right| = \frac{24}{(x+2)^5} \leq \frac{24}{(1+2)^5} = \frac{8}{81} \ , \ \forall x \in [1,2].$

Sendo assim tem-se $\left|I-\hat{I}\right| \leq \left(\frac{0.5^5}{90}\right)\left(\frac{8}{81}\right) = \frac{1}{29160} =$

$= 0.0000342 \ldots \leq 0.35 \times 10^{-4} \leq 0.5 \times 10^{-4}$, pelo que estão garantidas, pelo menos, quatro casas decimais significativas para o valor $\hat{I} = 0.287698\ldots$.

- Observação

Como $I = [ln|x+2|]_1^2 = ln\left(\frac{4}{3}\right) = 0.287682\ldots$. tem-se

$$\left|I - \hat{I}\right| = 0.000016\ldots < 0.35 \times 10^{-4} .$$

Algumas regras de Newton_Cotes

No quadro que se segue estão ilustradas algumas das principais regras de Newton-Cotes.

O grau do polinómio interpolador da função g nos nodos considerados está representado por n e $g_i = g(x_i)$, $i = 0,1,\ldots$.

n	Fórmula de Newton-Cotes		Erro
0	$\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx \approx hg\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$; $h = x_1 - x_0$	(Regra do ponto médio)	$\frac{h^3}{24} g''(\mu)$; $\mu \in]x_0, x_1[$
1	$\int_{x_0}^{x_1} g(x)dx \approx \frac{h}{2}(g_0 + g_1)$; $h = x_1 - x_0$	(Regra dos trapézios)	$-\frac{h^3}{12} g''(\mu)$; $\mu \in]x_0, x_1[$
2	$\int_{x_0}^{x_2} g(x)dx \approx \frac{h}{3}(g_0 + 4g_1 + g_2)$; $h = \frac{x_2 - x_0}{2}$	(Regra de Simpson)	$-\frac{h^5}{90} g^{(4)}(\mu)$; $\mu \in]x_0, x_2[$
3	$\int_{x_0}^{x_3} g(x)dx \approx \frac{3h}{8}(g_0 + 3g_1 + 3g_2 + g_3)$; $h = \frac{x_3 - x_0}{3}$	(Regra dos 3/8)	$-\frac{3h^5}{80} g^{(4)}(\mu)$; $\mu \in]x_0, x_3[$
4	$\int_{x_0}^{x_4} g(x)dx \approx \frac{2h}{45}(7g_0 + 32g_1 + 12g_2 + 32g_3 + 7g_4)$; $h = \frac{x_4 - x_0}{4}$	(Regra de Boole)	$-\frac{8h^7}{945} g^{(6)}(\mu)$; $\mu \in]x_0, x_4[$
5	$\int_{x_0}^{x_5} g(x)dx \approx \frac{5h}{288}(19g_0 + 75g_1 + 50g_2 + 50g_3 + 75g_4 + 19g_5)$; $h = \frac{x_5 - x_0}{5}$		$-\frac{275h^7}{12096} g^{(6)}(\mu)$; $\mu \in]x_0, x_5[$
6	$\int_{x_0}^{x_6} g(x)dx \approx \frac{h}{140}(41g_0 + 216g_1 + 27g_2 + 272g_3 + 27g_4 + 216g_5 + 41g_6)$; $h = \frac{x_6 - x_0}{6}$	(Regra de Weddle)	$-\frac{9h^9}{1400} g^{(8)}(\mu)$; $\mu \in]x_0, x_6[$

Definição

Grau de precisão de uma fórmula de integração

Uma fórmula de integração diz-se ter **grau de precisão** $\boldsymbol{n}$ $(\boldsymbol{n} \in \mathbb{N})$ quando é exata para todos os polinómios básicos do tipo

x^k , $k = 0,1, \dots, n.$

Assim

→ O grau de precisão das regras do ponto médio e dos trapézios é 1;

→ O grau de precisão da regra de Simpson é 3.

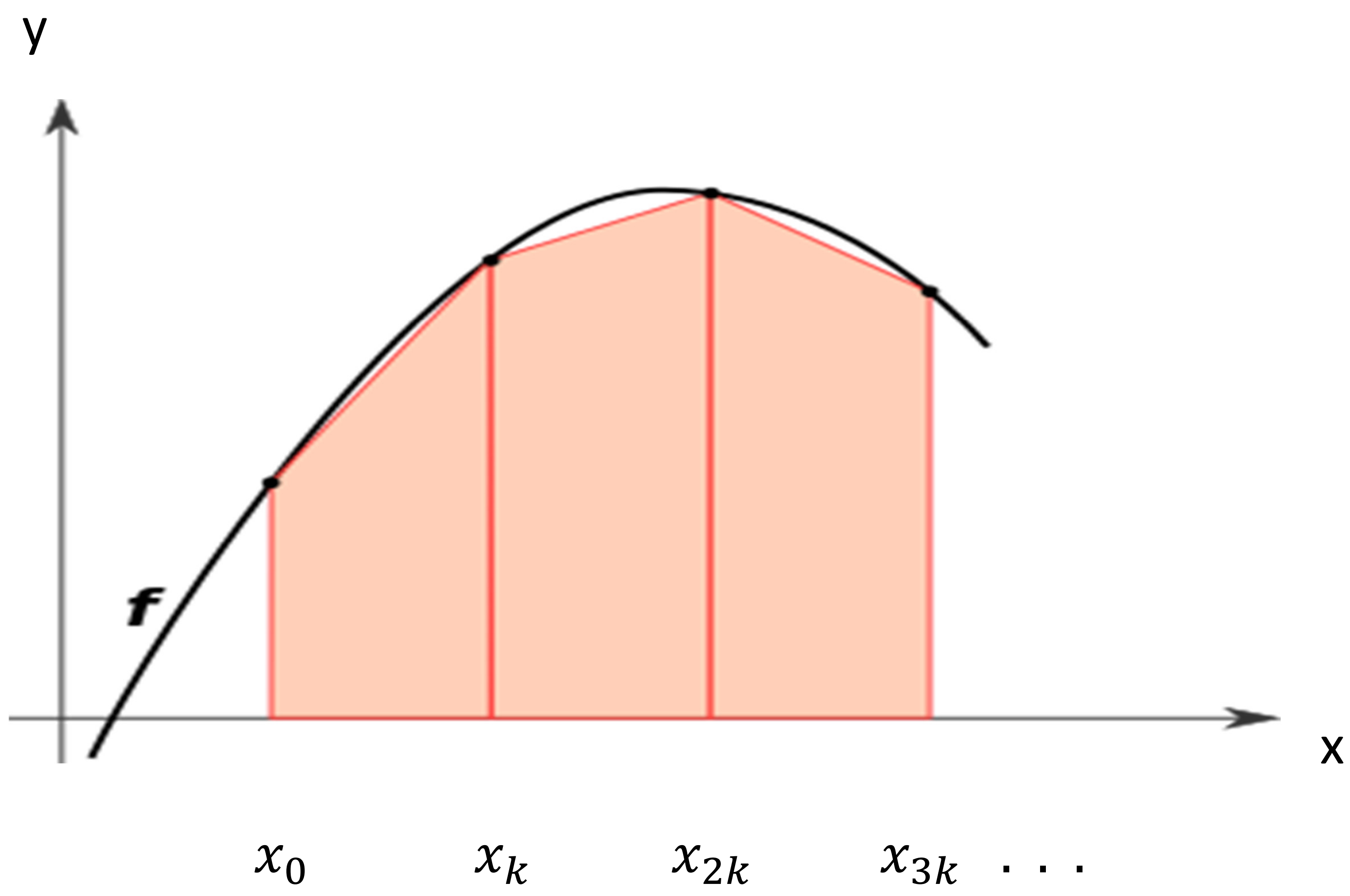
Fórmulas de Newton-Cotes compostas

Introdução

O raciocínio utilizado para as regras simples, no cálculo de um valor aproximado de um integral $I = \int_a^b f(x)dx$, pode estender-se ao intervalo $[a, b]$ $(\text{com } x_0 = a \text{ e } x_n = b)$ se este for dividido em vários intervalos, de igual amplitude, do tipo

$$[x_0, x_k] \ , \ [x_k, x_{2k}] \ , \ [x_{2k}, x_{3k}] \ , \ \dots \ , \ [x_{n-k}, x_n] \ ,$$

ou seja uma regra de integração designa-se por composta quando consiste na aplicação, numa partição do intervalo $[a, b]$, de várias vezes a correspondente regra de integração simples.


y
x
f
x_0
x_k
x_{2k}
x_{3k} . . .

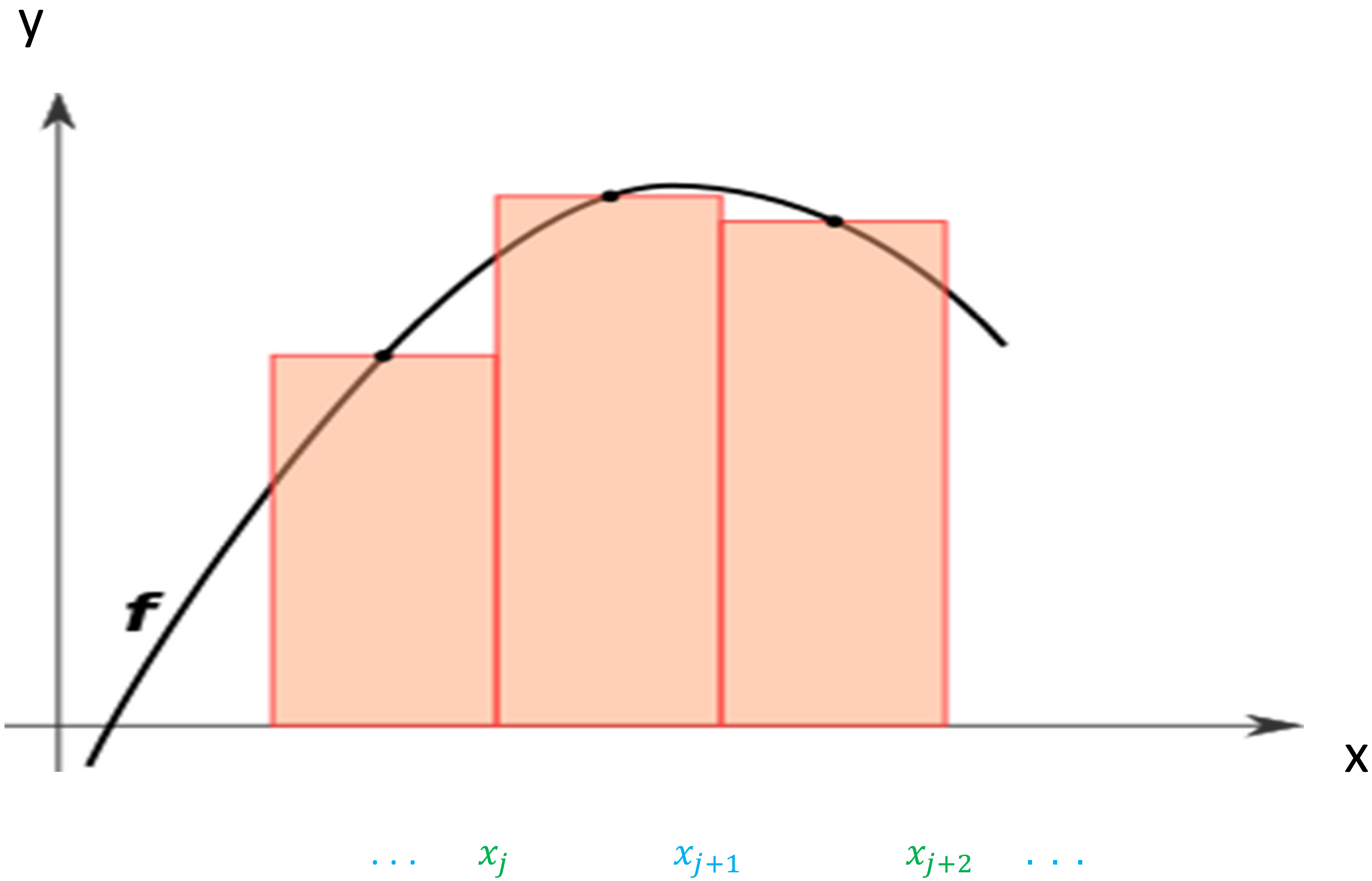
Nesse caso o integral inicial pode escrever-se na forma

$$I(f) = \int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_k} f(x)dx + \int_{x_k}^{x_{2k}} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-k}}^{x_n} f(x)dx \,.$$

Regra do ponto médio composta

Neste caso, em cada um dos intervalos $[x_j, x_{j+1}]$ anteriormente considerados, toma-se $\widehat{f(x)} = f\left(\frac{x_j+x_{j+1}}{2}\right)$, aproximando-se desta forma a função integranda por um polinómio de grau 0 :

$y = f\left(\frac{x_j+x_{j+1}}{2}\right)$.


y
f
x
$\cdots$ x_j x_{j+1} x_{j+2} $\cdots$

Tem-se então

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx hf\left(\frac{x_j+x_{j+1}}{2}\right) \quad , \quad j = 0,1,\ldots,n-1$$ e

$$h = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}.$$

Sendo assim

- $I(f) = \sum_{j=0}^{n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)dx \approx hf\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + hf\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \cdots$

  $\ldots + hf\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) =$

$$= h\left(f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right)\right) =$$

$$= h\sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) = \widehat{I(f)} \;\; , \;\; h = \frac{b-a}{n}.$$

Por outro lado o erro de quadratura é a soma dos erros de quadratura cometidos em cada um dos intervalos $[x_j, x_{j+1}]$ (ver regra do ponto médio simples) , ou seja

- $E_I = I(f) - \widehat{I(f)} = \frac{h^3}{24}\left(f''(\gamma_0) + f''(\gamma_1) + \cdots + f''(\gamma_{n-1})\right) =$

$$= \frac{h^3}{24}\sum_{j=0}^{n-1} f''(\gamma_j) \;\; , \;\; \gamma_j \in \left]x_j, x_{j+1}\right[.$$

Se a função $f(x)$ for contínua em $[a,b]$, então, aplicando o *Teorema de Weierstrass* (*), tem-se

$$n\underbrace{\min f''(x)}_{m} \le \sum_{j=0}^{n-1} f''(\gamma_j) \le n\underbrace{\max f''(x)}_{M}\ ,\ \ x \in [a,b]\,,$$

donde $m \le \dfrac{\sum_{j=0}^{n-1} f''(\gamma_j)}{n} \le M$.

---

* ***Teorema de Weierstrass***

Seja f uma função contínua em $[a,b]$.

Então, existem duas constantes k_1 e $k_2 \in [a,b]$ tais que $f(k_1) \le f(x) \le f(k_2)$. $\forall x \in [a,b]$.

Aplicando o *Teorema do valor intermédio* (**) a f'', tem-se

$$\exists \theta \in \,]a,b[\, : \; f''(\theta) = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} f''(\gamma_j)}{n}.$$

Conclui-se, desta forma, que o erro de quadratura associado à regra do ponto médio composta é

- $I(f) - \widehat{I(f)} = n\frac{h^3}{24} f''(\theta)$, com $\theta \in \,]a,b[$ e $h = \frac{b-a}{n}$.

** ***Teorema do valor intermédio***

Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e k uma constante tal que $k \in \left]\min\left(f(a),f(b)\right),\max\left(f(a),f(b)\right)\right[$. Então $\exists c \in \,]a,b[\, : \, f(c) = k$.

Resumindo, tem-se

Regra do ponto médio (composta)

- Fórmula de quadratura

Seja $I(f) = \int_a^b f(x)dx$.

Então, utilizando a regra do ponto médio composta, tem-se

$$\widehat{I(f)} = h \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right) \quad \text{com} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

- Erro de quadratura

Sendo $f \in C^2([a,b])$, tem-se

$$E_I = I(f) - \widehat{I(f)} = n\frac{h^3}{24} f''(\theta) \text{ , com } \theta \in]a,b[.$$

Exemplo 1

Seja $I = \int_1^2 \frac{1}{x+2} dx.$

Determine um valor aproximado de I , $\hat{I}$, utilizando a regra do ponto médio composta, com $h = 0.25.$

Determine ainda um majorante do erro absoluto cometido na aproximação calculada.

Resolução

- Nodos e função integranda

Tem-se $x_0 = a = 1$, $x_1 = 1.25$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 1.75$,

$x_4 = b = 2$, $f(x) = \frac{1}{x+2}$ e $h = 0.25$.

- Cálculo do valor aproximado de I (fórmula de quadratura)

Assim sendo,

$$\hat{I} = 0.25\left(f\left(\frac{1+1.25}{2}\right) + f\left(\frac{1.25+1.5}{2}\right) + f\left(\frac{1.5+1.75}{2}\right) + f\left(\frac{1.75+2}{2}\right)\right) =$$

$$= 0.25\big(f(1.125) + f(1.375) + f(1.625) + f(1.875)\big) \approx$$

$$\approx 0.287556.$$

$< 0.20 \times 10^{-3} \leq 0.5 \times 10^{-3}$, pelo que estão garantidas, pelo menos, três casas decimais significativas para o valor

$\hat{I} = 0.287555\ldots$.

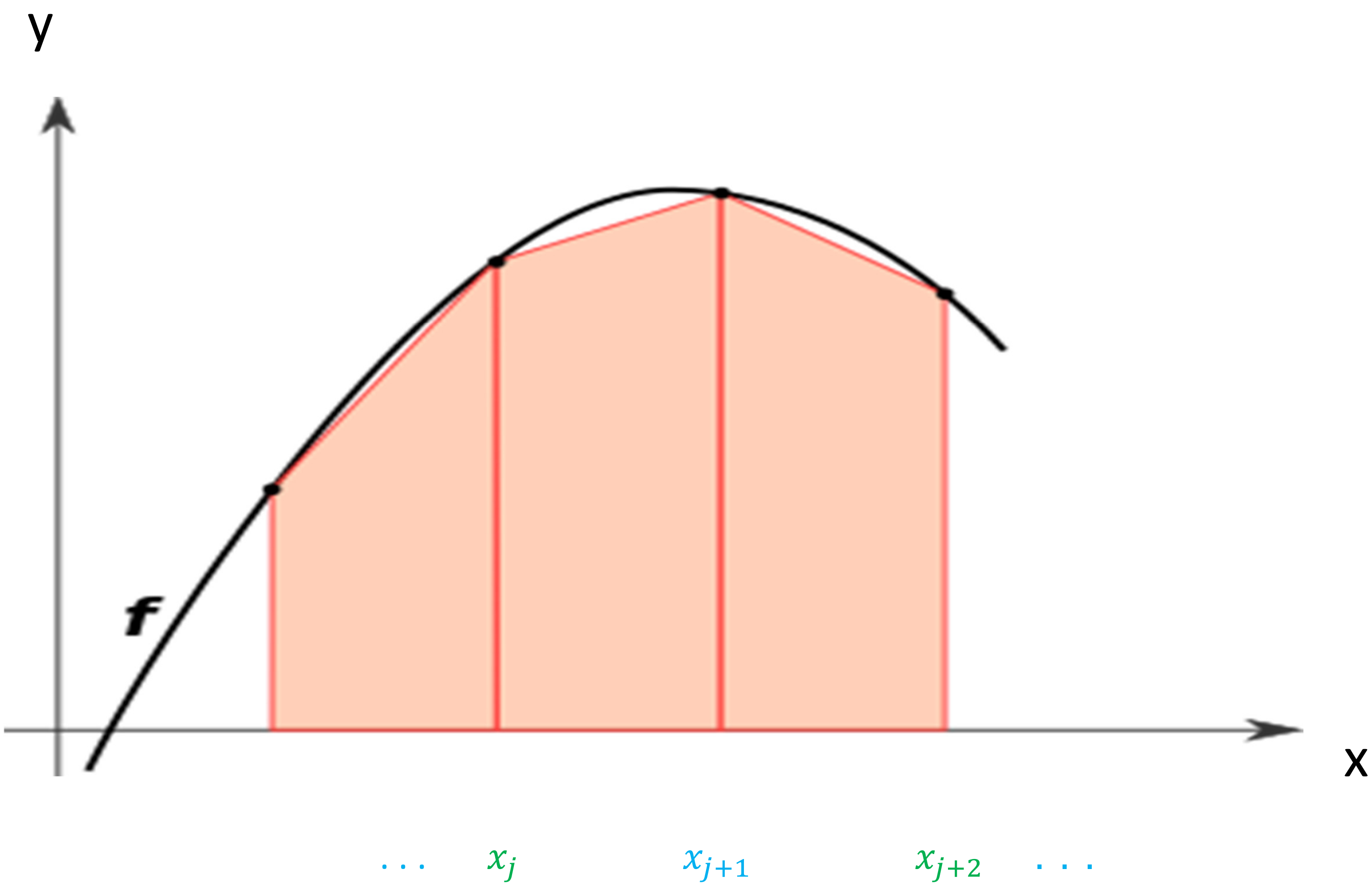
- Observação

Repare-se que $I = [ln|x+2|]_1^2 = ln\left(\frac{4}{3}\right) = 0.287682\ldots$ e

$\left|I - \hat{I}\right| = 0.000126\ldots < 0.13 \times 10^{-3} \leq 0.20 \times 10^{-3}$.

Regra dos trapézios composta

Neste caso utiliza-se como função integranda o polinómio de grau ≤ 1, interpolador de $f(x)$ nos pontos $\left(x_j, f\left(x_j\right)\right)$ e $\left(x_{j+1}, f\left(x_{j+1}\right)\right)$:


y
f
x
. . .
x_j
x_{j+1}
x_{j+2}
. . .

Sendo assim

- $I(f) \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2[f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})] + f(x_n)\right) =$

$$= \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f\left(x_j\right) + f(x_n)\right) = \widehat{I(f)}\,,\ h = \frac{b-a}{n}.$$

Utilizando um raciocínio idêntico ao que foi feito para o erro de quadratura associado à regra do ponto médio composta, facilmente se deduz que o erro de quadratura associado à regra dos trapézios composta é

- $I(f) - \widehat{I(f)} = -n\frac{h^3}{12}f''(\mu)$, com $\mu \in \,]a, b[$ e $h = \frac{b-a}{n}$.

Resumindo, tem-se

Regra dos trapézios (composta)

- Fórmula de quadratura

Seja $I(f) = \int_a^b f(x)dx$.

Então, utilizando a regra dos trapézios composta, tem-se

$$\widehat{I(f)} = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)\right) \quad \text{com} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

- Erro de quadratura

Sendo $f \in C^2([a,b])$, tem-se

$$E_I = I(f) - \widehat{I(f)} = -n\frac{h^3}{12}f''(\mu) \ , \ \text{com} \ \mu \in \,]a,b[.$$

Exemplo 2

Seja $I = \int_1^2 \frac{1}{x+2} dx.$

Determine um valor aproximado de I , $\hat{I}$, utilizando a regra dos trapézios composta, com $h = 0.25.$

Determine ainda um majorante do erro absoluto cometido na aproximação calculada.

Resolução

- Nodos e função integranda

Tem-se $x_0 = a = 1$, $x_1 = 1.25$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 1.75$,

$x_4 = b = 2$, $f(x) = \frac{1}{x+2}$ e $h = 0.25$.

- Cálculo do valor aproximado de I (fórmula de quadratura)

Assim sendo,

$$\hat{I} = \frac{0.25}{2}\big(f(1) + 2[f(1.25) + f(1.5) + f(1.75)] + f(2)\big) \approx$$

$$\approx 0.287935\ .$$

- Cálculo do majorante do módulo do erro absoluto cometido em $\hat{I}$ (Erro de quadratura)

Tem-se

$|I-\hat{I}| \leq n\frac{h^3}{12}M_2$, com $M_2 = max|g''(x)|$, $x \in [1,2]$ e

$n = 4$ (nº de aplicações da regra).

Tendo em conta os resultados obtidos no exemplo 1, tem-se

$$|I-\hat{I}| \leq 4\left(\frac{0.25^3}{12}\right)\left(\frac{2}{27}\right) = \frac{1}{2592} = 0.00038\ldots <$$

$< 0.39 \times 10^{-3} \leq 0.5 \times 10^{-3}$, pelo que estão garantidas, pelo menos, três casas decimais significativas para o valor

$\hat{I} = 0.287935\ldots$.

- Observação

Repare-se que $I = [ln|x+2|]_1^2 = ln\left(\frac{4}{3}\right) = 0.287682\ldots$ e

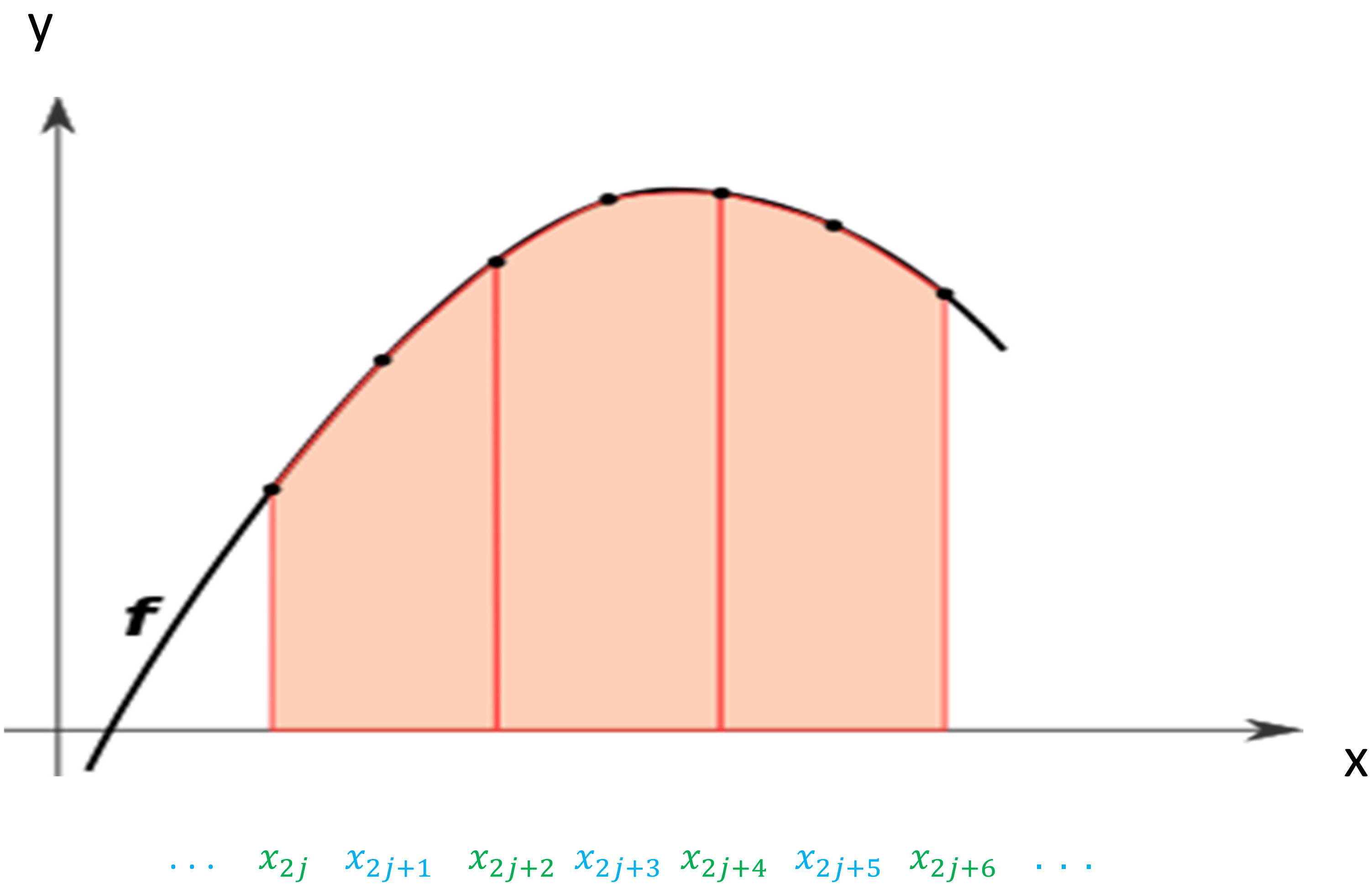
$\left|I - \hat{I}\right| = 0.000252\ldots < 0.39 \times 10^{-3}$.

Regra de Simpson composta

Neste caso utiliza-se como função integranda o polinómio de grau ≤ 2, interpolador de $f(x)$ nos pontos $\left(x_{2j}, f\left(x_{2j}\right)\right)$, $\left(x_{2j+1}, f\left(x_{2j+1}\right)\right)$ e $\left(x_{2j+2}, f\left(x_{2j+2}\right)\right)$.

- Observação

O número de subintervalos utilizados em cada aplicação da regra de Simpson simples é sempre **par**.


y
x
f
$\cdots \quad x_{2j} \quad x_{2j+1} \quad x_{2j+2} \quad x_{2j+3} \quad x_{2j+4} \quad x_{2j+5} \quad x_{2j+6} \quad \cdots$

Sendo assim

- $I(f) \approx \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots$

$$\ldots + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\Big) =$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{2j-1}\right) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f\left(x_{2j}\right) + \right.$$
$$\left. + f(x_{2n})\right) = \widehat{I(f)} \;,\; h = \frac{b-a}{2n}.$$

Utilizando novamente um raciocínio idêntico ao que foi feito para o erro de quadratura associado à regra do ponto médio composta, chegar-se-ia à conclusão que o erro de quadratura associado à regra de Simpson composta é

- $I(f) - \widehat{I(f)} = -n\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\sigma)$, com $\sigma \in]a,b[$ e $h = \frac{b-a}{2n}$.

Resumindo, tem-se

Regra de Simpson (composta)

- Fórmula de quadratura

Seja $I(f) = \int_a^b f(x)dx$.

Então, utilizando a regra de Simpson composta, tem-se

$$\widehat{I(f)} = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{2j-1}\right) + 2\sum_{j=1}^{n-1} f\left(x_{2j}\right) + \right.$$
$$\left. + f(x_{2n})\right) = \;, \quad \text{com} \quad h = \frac{b-a}{2n}.$$

- Erro de quadratura

Sendo $f \in C^4([a,b])$, tem-se $E_I = I(f) - \widehat{I(f)} = -n\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\sigma)$, com $\sigma \in]a,b[$.

Exemplo 3

Seja $I = \int_1^2 \frac{1}{x+2} dx$.

Determine um valor aproximado de I , $\hat{I}$, utilizando a regra de Simpson composta, com $h = 0.25$.

Determine ainda um majorante do erro absoluto cometido na aproximação calculada.

Resolução

- Nodos e função integranda

Tem-se $x_0 = a = 1$, $x_1 = 1.25$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 1.75$,

$x_4 = b = 2$, $f(x) = \frac{1}{x+2}$ e $h = 0.25.$

- Cálculo do valor aproximado de I (fórmula de quadratura)

Assim sendo,

$$\hat{I} = \frac{0.25}{3}\left(f(1) + 4[f(1.25) + f(1.75)] + 2f(1.5) + f(2)\right) \approx$$

$$\approx 0.287683 \, .$$

- Cálculo do majorante do módulo do erro absoluto cometido em $\hat{I}$ (Erro de quadratura)

Tem-se

$\left|I-\hat{I}\right| \leq n\frac{h^5}{90}M_4$, com $M_4 = max\left|g^{(4)}(x)\right|$, $x \in [1,2]$ e

$n = 2$ (nº de aplicações da regra).

Ora $\left|g^{(4)}(x)\right| = \left|\frac{24}{(x+2)^5}\right| = \frac{24}{(x+2)^5} \leq \frac{24}{(1+2)^5} = \frac{8}{81} = M_4$, $\forall x \in [1,2]$.

Sendo assim tem-se

$$\left|I-\hat{I}\right| \leq 2\left(\frac{0.25^5}{90}\right)\left(\frac{8}{81}\right) = \frac{1}{466560} = 0.000002\ldots <$$

$< 0.3 \times 10^{-5} \leq 0.5 \times 10^{-5}$, pelo que estão garantidas, pelo menos, cinco casas decimais significativas para o valor

$\hat{I} = 0.287683\ldots$.

- Observação

Repare-se que $I = [ln|x+2|]_1^2 = ln\left(\frac{4}{3}\right) = 0.287682\ldots$ e

$\left|I - \hat{I}\right| = 0.000001\ldots < 0.3 \times 10^{-5}$.

Método de integração de Gauss

Introdução

Até agora, os métodos de integração estudados, consistem na substituição de uma função inicial $f(x)$ por um polinómio interpolador $p_n(x)$ e consequente cálculo do integral

$\widehat{I(f)} = \int_a^b p_n(x)dx$ como valor aproximado do integral

$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$

Desta forma, ao escolher, *à priori*, uma determinada regra de integração, o que se determinava era uma combinação linear dos valores da função $f(x)$ do tipo

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx c_0 f(x_0) + \ldots + c_j f(x_j) \;,\; j \in \mathbb{N}_0 \;,$$

onde os parâmetros $x_j \in [a,b]$ e os valores $f(x_j)$, $j \in \mathbb{N}_0$, eram conhecidos.

No método de integração de Gauss, o que se pretende é escolher uma combinação linear do tipo

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i\, f(x_i) \;,\quad n \in \mathbb{N} \;,$$

tal que a regra de integração resultante seja **exata para polinómios de grau o mais elevado possível**, isto é, para polinómios de grau menor ou igual a $\mathbf{2n-1}$.

Repare-se que, neste caso, há

- n nodos x_i a determinar
- n constantes (*pesos*) c_i a determinar ,

o que perfaz um total de $\mathbf{2n}$ incógnitas a determinar.

Regra de Gauss com 2 pontos (simples)

Nesta regra o objetivo é determinar a seguinte fórmula de integração

$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$, onde x_1 , x_2 são

2 pontos (nodos) distintos e c_1 e c_2 são 2 coeficientes

a determinar.

Há assim 4 incógnitas , pelo que se pretende que a regra seja exata para polinómios de grau ≤ 3 , ou seja, que seja exata para os polinómios básicos $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$, $p_2(x) = x^2$ e $p_3(x) = x^3$.

Assim sendo, é necessário resolver o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \widehat{I(1)} = I(1) \\ \widehat{I(x)} = I(x) \\ \widehat{I(x^2)} = I(x^2) \\ \widehat{I(x^3)} = I(x^3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1(1) + c_2(1) = \int_{-1}^{1} 1dx \\ c_1(x_1) + c_2(x_2) = \int_{-1}^{1} xdx \\ c_1({x_1}^2) + c_2({x_2}^2) = \int_{-1}^{1} x^2dx \\ c_1({x_1}^3) + c_2({x_2}^3) = \int_{-1}^{1} x^3dx \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1x_1 + c_2x_2 = 0 \\ c_1x_1^2 + c_2x_2^2 = \frac{2}{3} \\ c_1x_1^3 + c_2x_2^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

Resumindo, tem-se

Regra de Gauss simples com 2 pontos *(n=2)*

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Exemplo 4

Seja $I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x+2}\, dx$.

Determine um valor aproximado de I , $\hat{I}$, utilizando a regra de Gauss com 2 pontos.

Resolução

Seja $f(x) = \frac{1}{x+2}$.

Então $I \approx \hat{I} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}+2} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}+2} \approx 1.090909.$

Nota: $I = ln(3) \approx 1.098612$.

O mesmo raciocínio podia ser utilizado na dedução das **Regras de Gauss simples com 1, 3 e 4 pontos**

Nº de pontos *(n)*	Pontos (nodos)	Pesos
1	*0*	*2*
2	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	*1*
3	0	$\dfrac{8}{9}$
	$\pm\sqrt{\dfrac{3}{5}}$	$\dfrac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\dfrac{3}{7}-\dfrac{2}{7}\sqrt{\dfrac{6}{5}}}$	$\dfrac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{\dfrac{3}{7}+\dfrac{2}{7}\sqrt{\dfrac{6}{5}}}$	$\dfrac{18-\sqrt{30}}{36}$

No caso em que se pretende determinar um valor aproximado, $\hat{I}$, de um integral genérico

$$I = I(f) = \int_a^b f(x)dx \quad (a \neq b),$$

pode utilizar-se uma mudança de variável, obtendo, desta forma, o seguinte resultado

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(y)dy \ , \text{ com}$$

$$g(y) = f\left(\frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}\right),$$ e aplicar então a Regra de Gauss com 2 ou mais pontos.

Erro associado à Regra de Gauss simples com *n* pontos

Demonstra-se que, se $f \in C^{(2n)}([-1,1])$, o erro associado à

Regra de Gauss com *n* pontos é dado pela seguinte expressão

$$I(f) - \widehat{I(f)} = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\theta) \quad , \quad \theta \in [-1,1] .$$

Regra de Gauss composta com *m* pontos

É possível aplicar várias vezes a regra de Gauss simples, utilizando um raciocínio semelhante ao utilizado nas regras de Newton-Cotes compostas.

Considere-se uma partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$ tal que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, com $x_j = a + jh$, $j = 0,1, \dots, n$ e $h = \frac{b-a}{n}$.

Sendo assim tem-se

$$I(f) = \int_{a=x_0}^{b=x_n} f(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)$$

$$= \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{-1}^{1} \underbrace{f\left(\frac{h}{2}y + \frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)}_{g(y)} dy \approx$$

$$\approx \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{m} c_k \underbrace{f\left(\frac{h}{2} y_k + \frac{x_j + x_{j+1}}{2}\right)}_{g(y_k)} \quad .$$

Resumindo, tem-se

Regra de Gauss composta com *m* pontos

$$I(f) \approx \frac{h}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{m} c_k f\underbrace{\left(\frac{h}{2}y_k + \frac{x_j+x_{j+1}}{2}\right)}_{g(y_k)}$$

, onde $h = \frac{b-a}{n}$ e c_k e y_k são os coeficientes (pesos) e nodos associados à Regra de Gauss com m pontos

- Observação

Esta regra de integração tem grau de precisão $2m-1$.