# CN A – Teste 2020 Resolução

Felipe B. Pinto 61387 – MIEQB

20 de outubro de 2023

## Conteúdo

# Questão 1

Seja $x \in \mathbb{R}$ e $\hat{x}$ uma aproximação de $x$ com 5 algarismos significativos e $10^3 \leq |x| < 10^4$. Quantas casas decimais podemos garantir para $\hat{x}$?

## Resposta

$$k : |\varepsilon_x| \leq 0.5 * 10^{-k} = 0.5 * 10^{m+1-5};$$

$$10^3 \leq |x| < 10^{m+1} = 10^4 \implies k = 1$$

# Questão 2

seja $m_3$ um polinómio de grau 3 que ajusta o conjunto de pontos $(x_i, y_i), i \in [0,4]$ contidos no intervalo $[a,b]$, usando o método dos mínimos quadrados. Seja $p_4$ o polinómio de grau $\leq 4$ interpolador de pontos $(x_i, y_i), i \in [0,4]$ e *S* o spline cúbico interpolador dos mesmos pontos. Qual das seguintes afirmações não é verdadeira?

a) $\sum_{i=0}^{4} (m_{3\,(x_i)} - y_i)^2 > \sum_{i=0}^{4} (S_{(x_i)} - p_{4\,(x_i)})^2$

b) Existe pelomenos um $x_i, i \in [0,4] : m_{3\,(x_i)} \neq p_{4\,(x_i)}$

c) $\sum_{i=0}^{4} (p_{4\,(x_i)} - S_{(x_i)})^2 = 0$

d) $S_{(x)} = p_{4\,(x)}, \quad \forall\, x \in [a,b]$

# Questão 3

Seja $f_{(x)} = \int_{i=0}^{3} a_i \, x^i$ com $a_3 = 1$ e $p_2$ um polinómio interpolador de $f$ nos nodos distintos $x_i \in \mathbb{R}, i = \{0, 1, 2\}$. A expressão para $f_{(x)}$ pode ser obtida por:

a) $f_{(x)} = p_{2\,(x)} + 6 \prod_{i=0}^{2} (x - x_i), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

b) $f_{(x)} = p_{2\,(x)} + \frac{1}{6} \prod_{i=0}^{2} (x - x_i), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

c) $f_{(x)} = p_{2\,(x)} + x^3, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

d) $f_{(x)} = p_{2\,(x)} + \prod_{i=0}^{2} (x - x_i), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

# Questão 4

Seja

$$\boldsymbol{I = \int_0^4 f_{(x)}\ \mathrm{d}x \qquad f_{(x)} \in C^4\,[0,4]}$$

$$\boldsymbol{f} \text{ verifica } \left|\boldsymbol{f^{(n)}_{(x)}}\right| \leq \boldsymbol{\frac{2^n}{n!}},\ \forall\, \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{0},4] \wedge \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$$

Se pretende determinar um valor aproximado de $I$, com pelomenos 4 casa decimais significativas, utilizando a regra de Simpson, qual o menor número de sub-intervalos de qual amplitude em que teria de dividir o intervalo $[0,4]$?

---

Resposta

$$\left|I - \hat{I}_S\right| = \left|-n\,\frac{h^5}{90}\,f^{(4)}_{(x)}\right| \leq \left|-n\,\frac{\left(\frac{b-a}{2\,n}\right)^5}{90}\,\frac{2^4}{4!}\right| = \left|\frac{-n\,(4-0)^5 * 2^4}{90 * 2^5\,n^5\,4!}\right| =$$

$$= \left|\frac{-4^4}{90 * 2\,n^4\,3!}\right| = \frac{4^4}{90 * 2\,n^4\,3!} \leq 0.5\ \mathrm{E}-4 \implies$$

$$\implies n = \lceil 8.2978 \rceil = 9 \implies \text{ numero de subintervalos: } 2\,n = 18$$

# Questão 5

Seja

$$I = \int_0^1 \frac{\log(x)}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

Qual dos valores seguintes representa um valor aproximado para $I$, $\hat{I}$, com 5 casas décimais devidamente arredondadas, utilizando uma regra de integração numérica de aplicação simples que permita obter um grau de precisão de 3?

# Questão 6

Considere a seguinte tabela de dados para a função $f$:

| $x_i$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $f_{(x_i)}$ | $f_{(0)}$ | $0$ | $f_{(2)}$ | $2$ |

Sabe-se que

$$\boldsymbol{f_{[x_2,x_3]} = 3; \qquad f_{[x_1,x_2,x_3]} = 2; \qquad f_{[x_1,x_2,x_3,x_4]} = 2/3}$$

Q6 a.

Determine $f_{[x_0,x_1]}; f_{[x_1,x_2]}; f_{[x_0,x_1,x_2]}; f_{(0)}; f_{(2)}$.

Q6 b.

Determine o polinómio de Newton de grau $\leq 3$ interpolador de $f$ nos nodos $x_i, i = \{0, 1, 2, 3\}$.
(caso não tenha conseguido fazer a linha a) considere $f_{(0)} = -1/2$ e $f_{(2)} = 1/2$).

Q6 c.

Obtenha o polinómio de grau 1, $q_{1\,(x)}$, que ajusta o conjunto de pontos $(x_i, f_{(x_i)}), i = \{0, 1, 2, 3\}$, utilizando a técnica dos mínimos quadrados e considerando $f_{(3)} = -1/2$ em véz de 2.

Q6 d.

Seja $p_{1\,(x)} = a + b\,x,\ \{a, b\} \in \mathbb{R}$. Prove usando a alínea anterior que $\sum_{i=0}^{3} (f_{(x_i)} - p_{1\,(x_i)})^2$

# Questão 7

Considere o seguinte spline cúbico interpolador duma função $f_{(x)}$ no intervalo $[0, 2]$:

$$\boldsymbol{S_{(x)}} = \begin{cases} \boldsymbol{1 + a\,x + 2\,x^2 - 2\,x^3,} & \boldsymbol{0 \le x < 1} \\ \boldsymbol{1 + b\,(x-1) - 4\,(x-1)^2 + 7\,(x-1)^3,} & \boldsymbol{1 \le x \le 2} \end{cases}$$

## Q7 a.

Encontre $a$ e $b$ e escreva a expressão do spline.

## Q7 b.

considere a tabela de valores para a função $f$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $f_{(x_i)}$ | 1 | 1 | 2 |
| $f'_{(x_i)}$ | 0 | 4 | 11 |

Que tipo de spline é $S_{(x)}$? Completo ou natural? Justifique

## Q7 c.

Obtenha uma aproximação para $f_{(0,5)}$. Quantas casa decimáis significativas se pode no minimo garantir para essa aproximação sabendo que $\left|f^{(3)}_{(x)}\right| \le 0.1$?

## Questão 8

Considere o integral

$$I = \int_{-2}^{0} x\, e^{-x}\ \mathrm{d}x$$

### Q8 a.

Determine um valor aproximado $\hat{I}$ de $I$ pela regra do ponto médio com 4 aplicações. Obtenha um majorante para o erro absoluto associado a essa aproximação. Nos cálculos ultilize 6 casas decimais convenientemente arredondadas.

### Q8 b.

Determine um valor aproximado $\hat{I}$ de $I$ pela regra do ponto médio com 2 aplicações. Obtenha um majorante para o erro absoluto associado a essa aproximação. Nos cálculos ultilize 6 casas decimais convenientemente arredondadas.