CN A – Areas?

Felipe B. Pinto 61387 – MIEQB

16 de outubro de 2023

Conteúdo

Questão 1

$$\boldsymbol{I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} e^{\sin x}\ \mathrm{d}x}$$

Resposta

Q1 a.

Resposta

$$g(x) = e^{\sin(x)};\, \hat{I} = h\,g((a+b)/2) = \frac{I}{3}\,g(\pi/3) = \pi/3\,e^{\sin(\pi/3)} \approx 2.489652;$$

$$|\varepsilon| = \left|\frac{h^3}{24}\,g''(\gamma)\right| \leq \left|\frac{(\pi/3)^3}{24}\,e\right| \leq |0.0130068|\,, \gamma \in \,]\pi/6, \pi/2[\,;$$

$$g'(x) = \cos(x)\,e^{\sin x}$$

$$g''(x) = -\sin(x)\,e^{\sin x} + \cos^2(x)\,e^{\sin x} = e^{\sin x}\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)$$

Q1 b.

Repita as regras mas para o ponto médio de Simpson

Exemplo 1

$$\boldsymbol{I = \int_1^2 \ln x \ \mathrm{d}x}$$

Resposta

$$\hat{I} = \frac{h}{3}\left(g(a) + 4\,g((a+b)/2) + g(b)\right) = \frac{\frac{b-a}{2}}{3}\left(g(a) + 4\,g((a+b)/2) + g(b)\right) =$$
$$= \frac{\frac{2-1}{2}}{3}\left(g(1) + 4\,g((1+2)/2) + g(2)\right) = \frac{1}{6}\left(0 + 4\,(0.405465) + (0.693147)\right) \approx$$
$$\approx 0.385835;$$

$$|E| = \left|-\frac{h^2}{90}\,\frac{\mathrm{d}^4 g(\gamma)}{\mathrm{d}x^4}\right| = \left|-\frac{h^2}{90}\,\frac{\mathrm{d}^4 \ln(\gamma)}{\mathrm{d}x^4}\right| = \left|-\frac{h^2}{90}\,\frac{\mathrm{d}^3 1/\gamma}{\mathrm{d}x^3}\right| = \left|-\frac{h^2}{90}\,\frac{\mathrm{d}^2 - 1/\gamma^2}{\mathrm{d}x^2}\right| =$$
$$= \left|-\frac{h^2}{90}\,\frac{\mathrm{d}2/\gamma^3}{\mathrm{d}x}\right| = \left|-\frac{h^2}{90}\,(-6/\gamma^4)\right| \leq= \left|-\frac{1/4}{90}\,6\right| \leq 0.002084$$

Questão 2

Considere o Integral

$$\boldsymbol{I = \int_{0.7}^{1.7} \pi^x \; \mathrm{d}x}$$

Q2 a.

Determina uma aproximação $\hat{I}$, de I ultizilando a regra dos trapézios compostos com $h = 0.25$.
Obtenha um majorante do erro absoluto cometido no cálculo do valor aproximado $\hat{I}$

Nota: Nos cálculos intermédios utilize 6 casas decimais, devidamente arrendondadas.

Resposta

$$h = \frac{b-a}{2\,n} \implies n = \frac{b-a}{2\,h} = \frac{1}{2 * 0.25} = 2 \implies$$

$$\implies I_{S,2} = \frac{h}{3}\,\left(f_{(x_0)} + 4\,(f_{(x_1)} + f_{(x_3)}) + 2\,f_{(x_2)} + f_{(x_4)}\right) =$$
$$= \frac{0.25}{3}\,\left(\pi^{0.7} + 4\,(\pi^{.95} + \pi^{1.45}) + 2\,\pi^{1.2} + \pi^{1.7}\right) \implies$$

$$\implies |I - I_{S,2}| \leq n\,\frac{h^5}{90}\,M_4 = 2\,\frac{0.25^5}{90} * 12.021728 \cong 260.89\,\mathrm{E}{-6}$$

Q2 b.

Repita a alínea anterior para a regra de Simpson.

Q2 c.

Quantos subintervalos teria que considerar se pretendesse calcular um valor aproxiumade de I com um erro inferiror a 10^{-6} usando

(i) A regra do ponto médio

(ii) A regra dos trapézios.

(iii) A regra de Simpson.

Questão 8

$$\boldsymbol{I = \int_0^4 f_{(x)}\ \mathrm{d}x, \quad f_{(x)} \in C^n([0,4])}$$

$$\boldsymbol{\left| f^n_{(x)} \right| \leq \frac{2^n}{n!} \ \ \forall\, x \in [0,4] \wedge n \in \mathbb{N}}$$

Resposta

$$\left| I - \hat{I}_S \right| \leq \left| -n\,\frac{h^5}{90}\, f^4_{(\theta)} \right| \leq \left| -n\,\frac{\left(\frac{b-a}{2\,n}\right)^5}{90}\,\frac{2^4}{4!} \right| =$$

$$= n\,\frac{\left(\frac{4-0}{2\,n}\right)^5}{90}\,\frac{2^4}{4!} = \frac{4^4}{2 * n^4 * 3! * 90} \leq 0.5\ \mathrm{E}-4 \implies$$

$$\implies n = \lceil 8.2978 \rceil = 9$$

$\therefore$ 18 Numero de aplicações da regra de Simpson

Questão 11

Seja

$$\boldsymbol{I} = \int_1^5 \boldsymbol{f}_{(X)}\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Considere a seguinte tabela da função f, função polinomial de grau 2, da qual se sabe que $f''_{(x)} = 4$:

x	1	2	3	4	5
$f_{(X)}$	-2	-1	1	α	9

Q11 a.

Recorrendo à regra dos trapézios, com duas aplicações, determine um valor aproximado de I e o valor exato de I.

Q11 b.

Recorrendo à regra do ponto médio, com $n = 2$, determine um valor aproximado de I e o valor de I comofunção de α.

Q11 c.

Recorrendo às alíneas anteriores, determine o valor de α.

Q11 d.

Utilize duas aplicações da regra de Simpson para determinar um valor aproximado de I.

Questão 13

Cosidere a seguinte tabela para a função f:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f_{(x)}$	40	21	8	1	0	5	16

Resposta

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-(-3)}{n} < 3 \implies n > 2 \wedge n < 4 \implies n \in]2,4[$$

Q13 a.

Ultilizando a regra dos trapézios composta, obtenha uma proximação de $\hat{I}_T$ de

$$\boldsymbol{I = \int_{-3}^{3} f_{(x)}\,\mathrm{d}x, \quad h < 3 \wedge n < 4}$$

Resposta

$$\hat{I}_T = \frac{h}{2}\left(f_{(x_0)} + 2\,f_{(x_2)} + 2\,f_{(x_4)} + f_{(x_6)}\right) = 72$$

Q13 b.

Resposta

$$\hat{I}_{pm} = 2\,\left(f_{\left(\frac{-1+x_0}{2}\right)} + f_{\left(\frac{-1+x_4}{2}\right)} + f_{\left(\frac{-1+x_6}{2}\right)}\right) =$$
$$= 2\,\left(f_{(-3)} + f_{(0)} + f_{(3)}\right) = 54$$

Q13 c.

Resposta

$$I - \hat{I}_{pm} = n\,\frac{h^3}{24}\,f''_{(\theta)} = 3\,\frac{2^3}{24}\,k = 6 \implies$$
$$\implies k = 6$$

$$I - \hat{I}_T = -n\,\frac{h^3}{12}\,f''_{(\theta)} = -3\,\frac{2^3}{12}\,k = -3\,\frac{2^3}{12}\,6 = -12$$