Resolução do 2º teste de Análise Matemática II-C
(1ºsemestre 2020-21)

Grupo I

1. Considere a função

$$f(x,y) = (x-1)(y-1)(x+y)$$

☐ Os pontos $(1,1)$ e $(1,-1)$ são de estacionaridade. No primeiro a função não tem extremo, no segundo tem um máximo relativo.
☐ Os pontos $(1,1)$ e $(-1,1)$ são de estacionaridade. No primeiro a função não tem extremo, no segundo tem um mnimo relativo.
☐ Os pontos $(1,1)$ e $(-1,-1)$ são de estacionaridade. Em nenhum deles a função tem extremo relativo.
☐ Os pontos $(-1,1)$ e $(1,-1)$ são de estacionaridade. No primeiro a função não tem extremo, no segundo tem um máximo relativo.
☒ Os pontos $(-1,1)$ e $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ são de estacionaridade. No primeiro a função não tem extremo, no segundo tem um máximo relativo.
☐ Os pontos $(1,-1)$ e $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ são de estacionaridade. No primeiro a função não tem extremo, no segundo tem um mínimo relativo.

Resposta: Os pontos de estacionaridade são as soluções de $\nabla f(x,y) = (0,0)$, isto é,

$$((y-1)(2x-1+y),(x-1)(2y-1+x)) = (0,0).$$

As soluções do sistema anterior são os pontos $(1,1),(1,-1),(-1,1)$ e $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.
Para determinar a natureza dos pontos de estacionaridade determine-se $\Delta_1(x,y)$ e $\Delta_2(x,y)$. Tem-se que $\Delta_1(x,y) = 2y-2$ e

$$\Delta_2(x,y) = \det\begin{bmatrix} 2y-2 & 2x+2y-2 \\ 2x+2y-2 & 2x-2 \end{bmatrix} = 4((y-1)(x-1)-(x+y-1)^2).$$

Como $\Delta_2(1,1) = \Delta_2(1,-1) = \Delta_2(-1,1) = -4$ os pontos $(1,1),(1,-1),(-1,1)$ são pontos de sela.
Como $\Delta_2(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{4}{3} > 0$ e $\Delta_1(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = -\frac{4}{3} < 0$, $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ é maximizante local da função.

2. O integral repetido

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}}(x+y)dx\Big)dy + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\Big(\int_{y-1}^{-y+1}(x+y)dx\Big)dy$$

utilizando a ordem de integração inversa da apresentada, pode ser calculado pelos integrais repetidos:

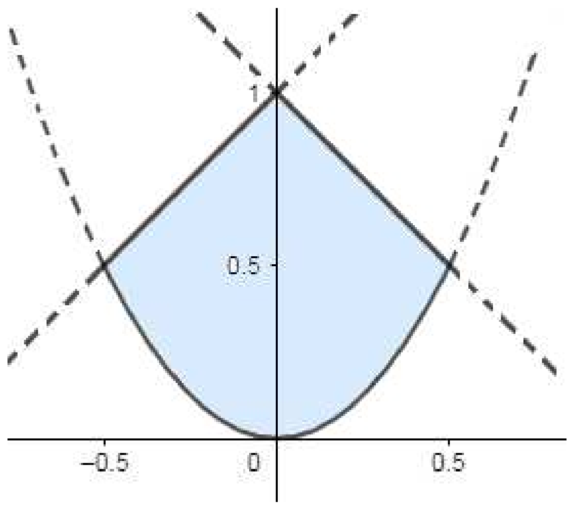
☐ $\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\Big(\int_{2x^2}^{x+1}(x+y)dy\Big)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{-x+1}^{2x^2}(x+y)dy\Big)dx$ ☐ $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{x+1}^{2x^2}(x+y)dy\Big)dx$

☐ $\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\Big(\int_{2x^2}^{-x+1}(x+y)dy\Big)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{2x^2}^{x+1}(x+y)dy\Big)dx$ ☐ $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{2x^2}^{-x+1}(x+y)dy\Big)dx$

☒ $\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\Big(\int_{2x^2}^{x+1}(x+y)dy\Big)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{2x^2}^{-x+1}(x+y)dy\Big)dx$ ☐ $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{2x^2}^{x+1}(x+y)dy\Big)dx$

Resposta: O domínio de integração é

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ -\sqrt{\frac{y}{2}}\le x\le\ -\sqrt{\frac{y}{2}}\wedge 0\le y\le\frac{1}{2}\}$$
$$\cup\,\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y-1\le x\le\ -y+1\wedge\frac{1}{2}\le y\le 1\}.$$



Se $-\frac{1}{2}\le x\le 0$ então $2x^2\le y\le x+1$; se $0\le x\le\frac{1}{2}$ então $2x^2\le y\le\ -x+1$. Portanto o integral considerado pela ordem de integração inversa é

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\Big(\int_{2x^2}^{x+1}(x+y)dy\Big)dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{2x^2}^{-x+1}(x+y)dy\Big)dx.$$ ☐

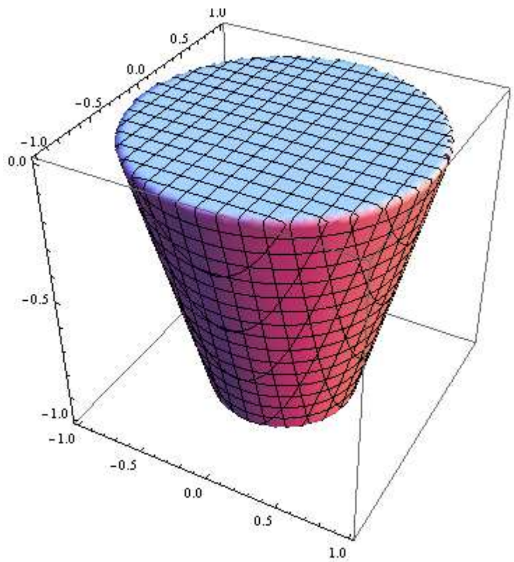
3. Utilizando coordenadas polares, o volume $Vol(D)$ do domínio fechado D, limitado lateralmente pelo cone $z=\ -2+2\sqrt{x^2+y^2}$ e compreendido entre os planos $z=\ -1$ e $z=0$ pode ser calculado a partir dos seguintes integrais repetidos:

☐ $\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{1}{2}}\rho d\rho\Big)d\theta+2\int_0^{2\pi}\Big(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-\rho)d\rho\Big)d\theta$ ☐ $2\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{1}(1-\rho)d\rho\Big)d\theta$

☐ $\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{1}{2}}\rho d\rho\Big)d\theta+2\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{1}(\rho-\rho^2)d\rho\Big)d\theta$ ☐ $2\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{1}(1-\rho^2)d\rho\Big)d\theta$

☒ $\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{1}{2}}\rho d\rho\Big)d\theta+2\int_0^{2\pi}\Big(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\rho-\rho^2)d\rho\Big)d\theta$ ☐ $2\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{1}{2}}(1-\rho)d\rho\Big)d\theta$

Resposta: O domínio em questão tem o seguinte gráfico:



O volume do domínio D considerado pode ser obtido como soma dos volumes dos domínios D_1 e D_2, em que D_1 é o cilindro $x^2+y^2\leq\frac{1}{4}$, com $-1\leq z\leq 0$, e D_2 é o domínio limitado interiormente pela superfície cilindrica $x^2+y^2=\frac{1}{4}$ e exteriormente pela superfície cónica $z=-2+2\sqrt{x^2+y^2}$, com $-1\leq z\leq 0$.
A projecção do domínio D_1 no plano xoy é o círculo centrado na origem e de raio $\frac{1}{2}$. A superfície que limita superiormente este domínio é $z=0$ e inferiormente é $z=-1$, pelo que o volume do domínio D_1, utilizando coordenadas polares, é dado por

$$\int\int_{D_1}(0-(-1))dxdy=\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{1}{2}}1\,\rho\,d\rho\Big)d\theta.$$

A projecção do domínio D_2 no plano xoy é a coroa circular de equação $\frac{1}{4}\leq x^2+y^2\leq 1$. A superfície que limita superiormente este domínio é $z=0$ e inferiormente é $z=-2+2\sqrt{x^2+y^2}$, pelo que o volume do domínio D_2, utilizando coordenadas polares, é dado por

$$\int\int_{D_2}(0-(-2+2\sqrt{x^2+y^2}))dxdy=2\int_0^{2\pi}\Big(\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\rho-\rho^2)\,d\rho\Big)d\theta.$$

O integral pretendido é

$$\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,\rho\,d\rho\Big)d\theta + 2\int_0^{2\pi}\Big(\int_{\frac{1}{2}}^{1} (\rho-\rho^2)\,d\rho\Big)d\theta. \qquad \square$$

4. A função potencial $\varphi(x,y,z)$ do campo conservativo $\vec{u}(x,y,z) =$

$$(y\cos(xy+z^2)+1)\vec{i} + (x\cos(xy+z^2)+ze^{yz}-1)\vec{j} + (2z\cos(xy+z^2)+ye^{yz}+3z^2)\vec{k}$$

que no ponto $(\frac{\pi}{2},1,0)$ toma o valor $\frac{\pi}{2}$ é:

☒ $\varphi(x,y,z) = \sin(xy+z^2)+e^{yz}+x-y+z^3-1$
☐ $\varphi(x,y,z) = \cos(xy+z^2)+e^{yz}+x-y+z^3$
☐ $\varphi(x,y,z) = \sin(xy+z^2)+e^{yz}+x-y-1$
☐ $\varphi(x,y,z) = \cos(xy+z^2)+e^{yz}+x-y$
☐ $\varphi(x,y,z) = \sin(xy+z^2)+x-y+z^3$
☐ $\varphi(x,y,z) = \cos(xy+z^2)+x-y+z^3+1$

Resposta: A função potencial $\varphi(x,y,z)$ obtém-se a partir da resolução do sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = y\cos(xy+z^2)+1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = x\cos(xy+z^2)+ze^{yz}-1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2z\cos(xy+z^2)+ye^{yz}+3z^2 \end{cases}$$

e da condição inicial $\varphi(\frac{\pi}{2},1,0) = \frac{\pi}{2}$.
Da primeira equação obtém-se que $\varphi(x,y,z) = \sin(xy+z^2)+x+h(y,z)$. Derivando esta expressão de φ em ordem a y e igualando à segunda equação obtém-se que $h(y,z) = e^{yz}-y+f(z)$.
Então $\varphi(x,y,z) = \sin(xy+z^2)+e^{yz}+x-y+f(z)$. Derivando esta última expressão de φ em ordem a z e igualando à terceira equação obtém-se $f(z) = z^3+C$.
Então $\varphi(x,y,z) = \sin(xy+z^2)+e^{yz}+x-y+z^3+C$. Tendo em conta que $\varphi(\frac{\pi}{2},1,0) = \frac{\pi}{2}$ conclui-se que $C = -1$. Portanto $\varphi(x,y,z) = \sin(xy+z^2)+e^{yz}+x-y+z^3-1$. $\square$

Grupo II

1. Considere a linha L, fronteira do conjunto

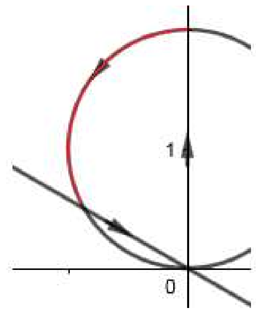
$$D = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+(y-1)^2 \le 1 \wedge y \ge -\frac{\sqrt{3}}{3}x \wedge x \le 0\Big\},$$

percorrida no sentido directo.
a) Parametrize o arco da linha L pertencente a circunferência de equação

$$x^2+(y-1)^2 = 1.$$

Resposta: Tendo em conta que se trata do arco da linha L pertencente a circunferência de raio 1, centrada em $(0,1)$, uma parametrização do arco da linha, considerado, é

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}, \; t_0 \leq t \leq t_1.$$



O arco de circunferência considerado e percorrido no sentido indicado tem início no ponto $(0,2)$ e termina no ponto $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, que é intersecção da recta $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ com a circunferência. O valor do parâmetro t em $(0,2)$ obtém-se fazendo $x = 0$ e $y = 2$ na parametrização, conduzindo ao valor $t_0 = \frac{\pi}{2}$; procedendo de forma análoga obtém-se que o valor do parâmetro t em $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ é $t_1 = \frac{7\pi}{6}$. Portanto uma parametrização do arco da linha é

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \end{cases}, \; \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{7\pi}{6}. \qquad \square$$

b) Calcule

$$\int_{L^+} (-3xy)dx + e^{2y^3} dy$$

a partir de um integral duplo e utilizando coordenadas polares.

Resposta: Sejam $\varphi(x,y) = -3xy$, $\psi(x,y) = e^{2y^3}$ e A o domínio limitado pela linha L. A função φ é contínua e continuamente derivável em ordem a y e a função ψ é contínua e continuamente derivável em ordem a x. O domínio A é fechado, limitado e simplesmente conexo e a linha L é seccionalmente regular. Utilizando a fórmula de Riemann-Green tem-se que

$$\int_{L^+} (-3xy)dx + e^{2y^3} dy = \int\int_A \Big(\frac{\partial(e^{2y^3})}{\partial x} - \frac{\partial(-3xy)}{\partial y} \Big) dxdy = \int\int_A 3x \, dxdy.$$

Considere-se as coordenadas polares $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$. No domínio considerado o valor mínimo de θ é $\frac{\pi}{2}$ (justifique). Para determinarmos o valor máximo de θ começamos por determinar a intersecção da recta com a circunferência obtendo-se o ponto $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$. O valor de ρ neste ponto é 1; substituindo os valores de x, y e ρ nas coordenadas polares obtém-se $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\theta = \frac{1}{2}$, pelo que $\theta = \frac{5\pi}{6}$.
No domínio considerado a variável ρ varia de 0 à equação da circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Substituindo nessa equação x por $\rho\cos\theta$ e y por $\rho\sin\theta$ e resolvendo em ordem a ρ obtém-se $\rho = 2\sin\theta$. Então

$$A \rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\theta, & \frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{5\pi}{6} \\ y = \rho\sin\theta, & 0 \le \rho \le 2\sin\theta \end{cases}$$

e

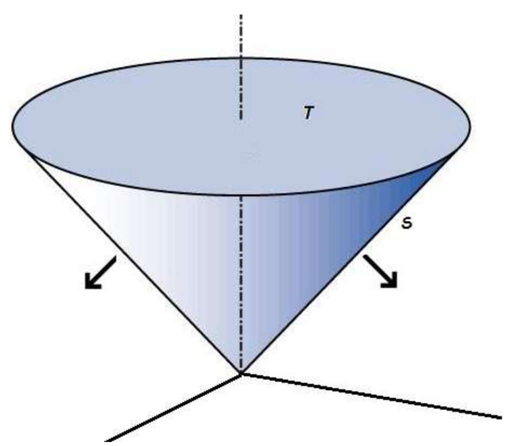
$$\int\int_A 3x\,dxdy = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \Big(\int_0^{2\sin\theta} 3(\rho\cos\theta)\rho\,d\rho\Big)d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} \Big[\rho^3\Big]_0^{2\sin\theta}\cos\theta\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} (8\sin^3\theta\cos\theta)\,d\theta$$
$$= [2\sin^4\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} = 2\sin^4\Big(\frac{5\pi}{6}\Big) - 2\sin^4\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 2\Big(\frac{1}{2}\Big)^4 - 2\cdot 1^4 = \frac{1}{8} - \frac{16}{8} = -\frac{15}{8}.$$

Grupo III

1. Determine, directamente, o valor do fluxo

$$\int\int_S (-x\vec{i} - y\vec{j})\cdot\vec{n}\,dS,$$

na porção da superfície cónica $z = \sqrt{x^2+y^2}, 0 \le z \le 2$, e na face em que $\cos\gamma < 0$, quando $\vec{n} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}$ é um vector unitário com a direcção da normal à superfície considerada.



Resposta: Uma parametrização da porção de superfície cónica considerada é:

$$S_1 \rightarrow \begin{cases} x = \varphi(u,v) = u\cos v, & 0 \le v \le 2\pi \\ y = \psi(u,v) = u\sin v, & 0 \le u \le 2 \\ z = \theta(u,v) = u. & \end{cases}$$

Tem-se que

$$\vec{N} = \frac{\partial(\psi,\theta)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\vec{k} = (-u\cos v)\vec{i} + (-u\sin v)\vec{j} + u\,\vec{k}.$$

Tendo em conta a hipótese, $\vec{n}$ deverá ter a terceira coordenada negativa pelo que a normal pretendida é $(u\cos v)\vec{i} + (u\sin v)\vec{j} - u\,\vec{k}$. Então

$$\begin{aligned}\int\int_S (-x\vec{i} - y\vec{j}) \cdot \vec{n}\, dS &= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2 (-u\cos v\,\vec{i} - u\sin v\vec{j}) \cdot ((u\cos v)\vec{i} + (u\sin v)\vec{j} - u\,\vec{k})du\Big)dv \\ &= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2 (-u^2\cos^2 v - u^2\sin^2 v)du\Big)dv = -\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2 u^2\,du\Big)dv \\ &= -2\pi\int_0^2 u^2\,du = -2\pi\Big[\frac{u^3}{3}\Big]_0^2 = -\frac{16\pi}{3}.\end{aligned}$$

$\square$

2. Sendo S a face exterior da superfície total, que limita o domínio fechado limitado superiormente pelo plano $z = 2$ e inferiormente pela porção de superfície cónica $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 2$, determine a partir do calculo de um integral triplo,

$$\int\int_S (-x\vec{i} - y\vec{j}) \cdot \vec{n}\, dS,$$

Explique de forma sucinta, e sem efectuar cálculos, porque se obtém o mesmo valor que em III.1.

Resposta: 1ª parte. A superfície S limita um domínio fechado D nas condições do teorema da divergência. Por aplicação deste teorema tem-se que

$$\int\int_S (-x\vec{i} - y\vec{j}) \cdot \vec{n}\, dS = \int\int\int_D div(-x\vec{i} - y\vec{j})dxdydz = \int\int\int_D (-2)dxdydz.$$

Utilizando coordenadas cilíndricas para calcular este integral triplo tem-se que

$$D \rightarrow \begin{cases} x = \rho\cos\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi \\ y = \rho\sin\theta, & 0 \le \rho \le 2 \\ z = z & \rho \le z \le 2 \end{cases}, \ |J| = \rho,$$

pelo que

$$\iiint_D (-2u)dxdydz = -2\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^2\Big(\int_\rho^2 \rho\, dz\Big)d\rho\Big)d\theta = -4\pi\int_0^2 (2\rho-\rho^2)d\rho$$
$$= -4\pi\Big[\rho^2-\frac{\rho^3}{3}\Big]_0^2 = -4\pi\Big(4-\frac{8}{3}\Big) = -4\pi\Big(\frac{4}{3}\Big) = -\frac{16\pi}{3}.$$

2ª parte. Designando por σ a superfície total que limita o domínio D, tem-se que $\sigma = S\cup T$, onde S é a superfície considerada na questão 1, e T é o círculo com centro no ponto $(0,0,2)$ e raio 2 (a "tampa"). Pelo teorema da divergência tem-se que

$$\iint_\sigma (-x\vec{i}-y\vec{j})\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_S (-x\vec{i}-y\vec{j})\cdot\vec{n}\,dS + \iint_T (-x\vec{i}-y\vec{j})\cdot\vec{n}\,dT$$
$$= \iiint_D div(-x\vec{i}-y\vec{j})dxdydz.$$

Ora

$$\iint_T (-x\vec{i}-y\vec{j})\cdot\vec{n}\,dT = 0,$$

uma vez que a normal em T é perpendicular ao campo, pelo que

$$(-x\vec{i}-y\vec{j})\cdot\vec{n} = 0. \qquad \square$$

Grupo IV

Seja $A\subset\mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e $g(x,y,z)$ um campo escalar continuamente derivável e que não se anula em A. Sabendo que $\nabla\cdot(g\nabla g)) = \|\nabla g\|^2 + \frac{3}{4}g$, determine

$$\iint_S \nabla g\cdot\vec{n}\,dS,$$

onde S é a face exterior da superfície esférica de centro na origem e raio $R>0$ contida em A e $\vec{n}$ designa o vector unitário dirigido segundo a semi-normal exterior à superfície S.

Resposta: Pelo teorema da divergência

$$\iint_S \nabla g\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_D \nabla\cdot\nabla g\ dxdydz,$$

onde D é a esfera $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq R\}$. Por hipótese, sabe-se que

$$\nabla\cdot(g\nabla g)) = \|\nabla g\|^2 + \frac{3}{4}g.$$

Determine-se $\nabla\cdot(g\nabla g)$. Tem-se que:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (g\nabla g) &= \nabla \cdot \Big(g\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + g\frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + g\frac{\partial g}{\partial z}\vec{k}\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(g\frac{\partial g}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(g\frac{\partial g}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(g\frac{\partial g}{\partial z}\Big)\\
&= \Big(\frac{\partial g}{\partial x}\Big)^2 + g\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \Big(\frac{\partial g}{\partial y}\Big)^2 + g\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \Big(\frac{\partial g}{\partial z}\Big)^2 + g\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\\
&= \|\nabla g\|^2 + g\Big(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\Big)
\end{aligned}
$$

Usando a hipótese de que $\nabla \cdot (g\nabla g)) = \|\nabla g\|^2 + \frac{3}{4}g$ vem que

$$
\|\nabla g\|^2 + g\Big(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\Big) = \|\nabla g\|^2 + \frac{3}{4}g
$$

ou ainda

$$
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \frac{3}{4}.
$$

Mas

$$
\nabla \cdot \nabla g = \nabla \cdot \Big(\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k}\Big) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.
$$

Então

$$
\begin{aligned}
\int\!\!\int_S \nabla g \cdot \vec{n}\, dS = \int\!\!\int\!\!\int_D \nabla \cdot \nabla g \; dxdydz &= \int\!\!\int\!\!\int_D \frac{3}{4}\, dxdydz\,,\\
= \frac{3}{4}Vol(D) = \frac{3}{4}\Big(\frac{4}{3}\pi\, R^3\Big) &= \pi\, R^3.
\end{aligned}
$$