TÓPICOS DE RESOLUÇÃO 2º TESTE CÁLCULO NUMÉRICO (14/12/2019)

1. Considere a equação $e^x - 4x = 0$, a qual tem uma única raiz, α, no intervalo $I = [0.3, 0.5]$ e as funções $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{4}$ e $\psi(x) = \ln(4x)$.
   Qual das seguintes afirmações é **falsa**?

☐ **a)** α é ponto fixo atractor de φ e ponto fixo repulsor de ψ;

☐ **b)** A sucessão $y_n = \psi(y_{n-1})$, $n = 1, 2, ...$, converge para α se e só se $y_0 = \alpha$;

☐ **c)** A sucessão $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, ...$, converge para α qualquer que seja $x_0 \in [0.3, 0.5]$;

☐ **d)** A sucessão $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, ...$, converge para α se e só se $x_0 = \alpha$. (opção correcta)

2. Considere uma sucessão de vectores definida por

$$\begin{cases} X^{(0)} = [0\,0 \ldots 0]^T, \\ X^{(n+1)} = GX^{(n)} + H, \; n = 0, 1, ..., \end{cases}$$

   onde $H = [h_1\, h_2 \ldots h_n]^T$ e G é uma matriz quadrada de ordem n tal que $\|G\|_1 = \dfrac{3}{2}$ e $\|G\|_\infty = \dfrac{1}{2}$.
   Qual das seguintes afirmações é sempre verdadeira?

☐ **a)** A sucessão $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a solução do sistema $X = GX$ e $\|X - X^{(n)}\|_\infty \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \|G\|_\infty$;

☐ **b)** A sucessão $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a solução do sistema $X = GX + H$ e $\|X - X^{(n)}\|_\infty \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \max\limits_{1\leq i\leq n}\{|h_i|\}$; (opção correcta)

☐ **c)** $\rho(G) = \dfrac{3}{2}$ pelo que a sucessão $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é uma sucessão convergente;

☐ **d)** A sucessão $\left\{X^{(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a solução do sistema $X = GX + H$ e $\|X - X^{(n)}\|_1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} |h_i|$.

3. Considere $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ e $I_S = 2$ um valor aproximado de I usando a regra de Simpson simples. Sejam I_G uma aproximação de I usando a regra de Gauss com 2 pontos e I_T uma aproximação de I usando a regra dos trapézios simples.

   Sabendo que $f(x) = 3x^2 + ax + b$, com a, $b \in \mathrm{R}$, quais os valores de I_G e I_T?

☐ **a)** $I_T = I_G = 2$;

☐ **b)** $I_G = 2$ e $I_T = 0$;

☐ **c)** $I_G = 2$ e $I_T = 6$; (opção correcta)

☐ **d)** $I_T = I_G = 0$.

4. Considere $I = [2, 3]$, f uma função contínua, a qual tem um único zero, β, no intervalo I e $x_0 = 2.5$, $x_1 = 2.75$ e $x_2 = 2.625$ as 3 primeiras iteradas associadas ao método da bissecção.

   Sabendo que $f(x_0) \times f(x_2) < 0$, qual o valor de x_3 e o menor natural n para o qual pode garantir que x_n é uma aproximação de β com, pelo menos, 6 algarismos significativos?

☐ **a)** $x_3 = 2.5625$ e $n = 17$; (opção correcta)

☐ **b)** $x_3 = 2.5625$ e $n = 20$;

☐ **c)** $x_3 = 2.8125$ e $n = 13$;

☐ **d)** Nenhuma das respostas anteriores.

5. Considere $I(g) = \int_{0}^{1} e^x g(x)dx$ e uma regra de quadratura da forma $Q(g) = A_0 g(0) + A_1 g(1)$ para aproximar $I(g)$. Quais os valores de A_0 e A_1 de modo a que a regra de quadratura seja exacta para polinómios de grau ≤ 1?

☐ **a)** $A_0 = A_1 = 1$;

☐ **b)** $A_0 = -2$, $A_1 = 1$;

☐ **c)** $A_0 = e - 2$, $A_1 = 1$;(opção correcta)

☐ **d)** $A_0 = e - 2$, $A_1 = -1$.

6. Seja $\varphi(x) = \pi + \dfrac{\sin(x/2)}{2}$ e $\alpha \in I = [\pi, 2\pi]$ o único ponto fixo de φ no intervalo I.
Considere a sucessão definida por

$$\begin{cases} x_0 \in I, \\ x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0, 1, ..., \end{cases}$$

a qual converge para α, qualquer que seja $x_0 \in I$. **Considere** $\mathbf{x_0} = \pi$.

(a) Qual a ordem de convergência da sucessão x_n? Justifique a sua resposta.

$\varphi'(x) = \dfrac{\cos(x/2)}{4}$, $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ funções continuas.

$x = \pi$, $\varphi'(\pi) = \dfrac{\cos(\pi/2)}{4} = 0$

$x = 2\pi$, $\varphi'(2\pi) = \dfrac{\cos(\pi)}{4} = -1/4 \neq 0$

$\varphi'(x)$ função decrescente em $I = [\pi, 2\pi]$.

$\varphi'(x) \neq 0$, $\forall\ x \in I =]\pi, 2\pi]$ e $\varphi'(\pi) = 0$.

π é ponto fixo?

$\varphi(\pi) = \pi + \dfrac{\sin(\pi/2)}{2} = \pi + 1/2$ ou seja $\varphi(\pi) \neq \pi$, logo π não é ponto fixo.

Assim, dado que $\alpha \in]\pi, 2\pi]$ vem $\varphi'(\alpha) \neq 0$, pelo que a sucessão x_n converge para α com ordem de convergência 1.

(b) Prove que os termos da sucessão, x_n, $n = 1, 2, ..$, verificam a seguinte estimativa $|\alpha - x_n| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \dfrac{2}{3}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Sabemos que $|\alpha - x_n| \leq \dfrac{K^n}{1-K}|x_1 - x_0|$, $n = 1, 2, ...$, onde $K = \max_{x \in [\pi, 2\pi]} |\varphi'(x)| = 1/4$ porque $|\varphi'(\pi)| = 0$, $|\varphi'(2\pi)| = 1/4$ e $|\varphi'(x)|$ é uma função estritamente crescente em $[\pi, 2\pi]$, uma vez que $|\varphi''(x)| = |\dfrac{sin(x/2)}{8}| \geq 0$, logo o máximo de $|\varphi'(x)|$ em $[\pi, 2\pi]$ é atingido para $x = 2\pi$.

Determinemos x_1: $x_1 = \pi + \dfrac{\sin(\pi/2)}{2} = \pi + 1/2$ pois $x_0 = \pi$,

logo $|\alpha - x_n| \leq \dfrac{(1/4)^n}{1 - 1/4}|\pi + 1/2 - \pi| = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n \dfrac{2}{3}, n = 1, 2, \ldots$.

(c) Sem calcular x_{15}, indique o número de algarismos significativos que pode garantir para x_{15}. Justifique a sua resposta.

Pela alínea anterior $|\alpha - x_{15}| \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^{15} \dfrac{2}{3} = 0.620...\text{x}10^{-9} < 0.5\text{x}10^{-8}$, logo o nº de casas decimais significativas é $k = 8$ e tem-se $m + 1 - n = -8$. Além disso, dado que x_n é convergente para $\alpha \in [\pi, 2\pi], n = 0, 1, ...$, vem que $\pi \leq x_{15} \leq 2\pi$, logo $10^0 \leq x_{15} \leq 10^1$, donde $m = 0$.

Substituindo em $m+1-n=-8$ vem $n=9$ ou seja podemos garantir para x_n, 9 algarimos significativos.

(d) Determine $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha - x_n| \leq 10^{-9}$. Justifique a sua resposta.

Atendendo à alínea b), $|\alpha - x_n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{2}{3}$. Assim se $\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{2}{3} \leq 10^{-9}$ então $|\alpha - x_n| \leq 10^{-9}$.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{2}{3} \leq 10^{-9} \Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) \leq \ln\left(\frac{3}{2}\text{x}10^{-9}\right) \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{4}\right) \leq \ln\left(\frac{3}{2}\text{x}10^{-9}\right)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\text{x}10^{-9}\right)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} \Leftrightarrow n \geq 14.65..., \text{ logo } n = 15 \geq 14.65....$$

7. Considere o sistema de equações lineares $AX = B$, com

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ 0 & a_2 & c_2 \\ c_3 & 0 & a_3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

onde $a_i = (-2)^i c_i \neq 0, i = 1, 2, 3$.

(a) Mostre que o método de Jacobi é convergente para a solução do sistema $AX = B$, qualquer que seja a iterada inicial $X^{(0)}$.

$$A = \begin{bmatrix} -2c_1 & 0 & c_1 \\ 0 & 4c_2 & c_2 \\ c_3 & 0 & -8c_3 \end{bmatrix}$$

A matriz A é de diagonal estritamente dominante porque $2|c_1| > |c_1| \wedge 4|c_2| > |c_2| \wedge 8|c_3| > |c_3|$, logo o método de Jacobi é convergente para a solução do sistema $AX = B$, qualquer que seja a iterada inicial $X^{(0)}$.

Também se podia provar a convergência verificando que $\|G_J\|_\infty < 1$.

$$G_J = -D^{-1}(L+U) = -\begin{bmatrix} -\frac{1}{2c_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4c_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8c_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & c_2 \\ c_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 1/8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\|G_J\|_\infty = max\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\} = \frac{1}{2} < 1$.

(b) Seja $X^{(j)}$, $j = 1, 2, ...$, a sucessão gerada pelo método de Jacobi.

Demonstre que $\|X - X^{(j)}\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \|X^{(0)} - X^{(1)}\|_\infty$, $j = 1, 2, ...$.

Erro apriori

$\|X - X^{(j)}\|_\infty \leq \dfrac{\|G_J\|_\infty^j}{1-\|G_J\|_\infty}\|X^{(0)} - X^{(1)}\|_\infty = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{1-\frac{1}{2}}\|X^{(0)} - X^{(1)}\|_\infty = \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}\|X^{(0)} - X^{(1)}\|_\infty$, $j = 1, 2, \ldots$.

(c) Fazendo $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ e tomando para iterada inicial $X^{(0)} = [-0.7 \quad 0.6 \quad -0.5]^T$, determine $X^{(1)}$ e $\eta > 0$ tal que $\|X - X^{(1)}\|_\infty \leq \eta$.

$X^{(j)} = G_J X^{(j-1)} + H_J$, $j = 1, 2, ...$

$$H_J = D^{-1}B = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -3/8 \end{bmatrix}$$

$$X^{(1)} = G_J X^{(0)} + H_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 1/8 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.7 \\ 0.6 \\ -0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -3/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.75 \\ 0.625 \\ -0.4625 \end{bmatrix}$$

$$\|X - X^{(1)}\|_\infty \leq \frac{\|G_J\|_\infty}{1-\|G_J\|_\infty}\|X^{(0)} - X^{(1)}\|_\infty = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}}\|X^{(0)} - X^{(1)}\|_\infty = \|X^{(0)} - X^{(1)}\|_\infty$$

$$X^{(0)} - X^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.7 \\ 0.6 \\ -0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.75 \\ 0.625 \\ -0.4625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.05 \\ -0.025 \\ 0.0375 \end{bmatrix}$$

$\|X^{(0)} - X^{(1)}\|_\infty = max\{0.05, 0.025, 0.0375\} = 0.05 = \eta > 0.$

8. Considere a seguinte tabela relativa a uma função f

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-5	-6	α	22

e $I = \displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)dx$.

(a) Determine uma aproximação de I usando a regra de Simpson simples.

$h = \dfrac{b-a}{2} = 2$

$\bar{I} = \dfrac{h}{3}(f(-1) + 4f(1) + f(3)) = \dfrac{2}{3}(-2 + 4(-6) + 22) = -\dfrac{8}{3}$

(b) Determine uma aproximação de I usando a regra de Simpson composta.

$n = 2 \Rightarrow h = \dfrac{b-a}{2n} = 1$

$\bar{I} = \dfrac{h}{3}(f(-1) + 4f(0) + 2f(1) + 4f(2) + f(3)) = \dfrac{1}{3}(-2 - 20 - 12 + 4\alpha + 22) = \dfrac{4\alpha}{3} - 4$

(c) Sabendo que $f^{(4)}(x) = 24, \quad \forall x \in [-1, 3]$, e usando as alíneas anteriores determine α.

Erro Regra de Simpsom simples: $I - \bar{I} = -\dfrac{h^5}{90} f^{(4)}(x)$

donde $I - \left(-\dfrac{8}{3}\right) = -\dfrac{2^5}{90} 24 \Leftrightarrow I = -\dfrac{768}{90} - \dfrac{8}{3} = -\dfrac{56}{5}$

Erro Regra de Simpsom composta: $I - \bar{I} = -n \dfrac{h^5}{90} f^{(4)}(x)$

donde $-\dfrac{56}{5} - \left(\dfrac{4\alpha}{3} - 4\right) = -2\dfrac{1^5}{90} 24 = -\dfrac{48}{90}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{4\alpha}{3} = -\dfrac{48}{90} + \dfrac{56}{5} - 4 \Leftrightarrow -\dfrac{4\alpha}{3} = \dfrac{20}{3}$

$\Leftrightarrow \alpha = -5.$