Nome:

Nº de aluno: Curso:

INSTRUÇÕES PARA O 2º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C

LEIA ATENTAMENTE AS SEGUINTES INSTRUÇÕES ATÉ AO FIM

Hora de início do teste: 9.00 Duração: 2 horas (sem tolerância e sem intervalo)

Todas as respostas são dadas no enunciado que vos será distribuído pelo que não necessitam, nem podem, utilizar outras folhas de resposta.

O teste possui 6 folhas agrafadas, que **não podem** desagrafar, que para além desta primeira folha de instruções, é constituído por quatro grupos e por duas folhas em branco que se destinam a rascunho.

No cabeçalho da página 3 (Grupo I), devem preencher completamente os vossos dados pessoais no espaço para isso reservado: nome completo, curso e nº de aluno. **O não preenchimento dos vossos dados pessoais conduz ao anulamento da prova**.

O Grupo I possui 4 perguntas de escolha múltipla. Devem selecionar de forma inequívoca a opção (única) de resposta. Respostas erradas **não são** penalizadas.

Nos Grupos II,III, IV as perguntas são de resposta aberta e são respondidas no próprio enunciado.

A cotação de cada pergunta está assinalada no início da mesma. Devem ter em atenção o espaço destinado à resposta de cada alínea e gerir esse espaço convenientemente (por exemplo, não utilizar letra ou símbolos matemáticos demasiado grandes). As folhas 5 e 6 estão em branco e destinam-se a ser utilizadas como rascunho e **não serão corrigidas**.

No final da prova, o aluno deverá pedir licença para entregar o teste, em seguida deverá colocar a prova, na mesma mesa onde se encontra a folha de presenças (que deverá assinar neste momento) em cima de outras provas que já tenham sido eventualmente entregues.

COTAÇÕES

Grupo I

Grupo II

1.a)

b)

Grupo III

1.

2.

Grupo IV

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

2º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2020/2021
19 DE DEZEMBRO DE 2020

Nome:

Nº de aluno: Curso:

PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES DO GRUPO I ASSINALE COM X O QUADRADO CORRESPONDENTE À ALTERNATIVA CORRECTA.

GRUPO I

[*1,5 valores*] 1. Considere a função

$$f(x, y) = (x-1)(y-1)(x+y).$$

☐ Os pontos $(1,1)$ e $(1,-1)$ são de estacionaridade. No primeiro a função não tem extremo, no segundo tem um máximo relativo.

☐ Os pontos $(1,1)$ e $(-1,1)$ são de estacionaridade. No primeiro a função não tem extremo, no segundo tem um mínimo relativo.

☐ Os pontos $(1,1)$ e $(-1,-1)$ são de estacionaridade. Em nenhum deles a função tem extremo relativo.

☐ Os pontos $(-1,1)$ e $(1,-1)$ são de estacionaridade. No primeiro a função não tem extremo, no segundo tem um máximo relativo.

☐ Os pontos $(-1,1)$ e $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ são de estacionaridade. No primeiro a função não tem extremo, no segundo tem um máximo relativo.

☐ Os pontos $(1,-1)$ e $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ são de estacionaridade. No primeiro a função não tem extremo, no segundo tem um mínimo relativo.

[*1,5 valores*] 2. O integral repetido

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\sqrt{\frac{y}{2}}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} (x+y)\, dx \right) dy + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{y-1}^{-y+1} (x+y)\, dx \right) dy,$$

utilizando a ordem de integração inversa da apresentada, pode ser calculado pelos integrais repetidos:

☐ $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(\int_{2x^2}^{x+1} (x+y)dy \right) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-x+1}^{2x^2} (x+y)\, dy \right) dx$, ☐ $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{x+1}^{2x^2} (x+y)dy \right) dx$

☐ $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(\int_{2x^2}^{-x+1} (x+y)dy \right) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2x^2}^{x+1} (x+y)\, dy \right) dx$, ☐ $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2x^2}^{-x+1} (x+y)dy \right) dx$

☐ $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(\int_{2x^2}^{x+1} (x+y)dy \right) dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2x^2}^{-x+1} (x+y)\, dy \right) dx$, ☐ $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{2x^2}^{x+1} (x+y)dy \right) dx$

[*1,5 valores*] 3. Utilizando coordenadas polares, o volume $V(D)$ do domínio fechado D, limitado lateralmente pelo cone $z=-2+2\sqrt{x^2+y^2}$ e compreendido entre os planos $z=-1$ e $z=0$ pode ser calculado a partir dos seguintes integrais repetidos:

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{1}{2}}\ \rho\ d\rho\Big)d\theta+2\int_0^{2\pi}\Big(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ (1-\rho)\ d\rho\Big)d\theta$ ☐ $\displaystyle 2\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{1}\ (1-\rho)\ d\rho\Big)d\theta$

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{1}{2}}\ \rho\ d\rho\Big)d\theta+2\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{1}\ (\rho-\rho^2)\ d\rho\Big)d\theta$ ☐ $\displaystyle 2\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{1}\ (1-\rho^2)\ d\rho\Big)d\theta$

☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{1}{2}}\ \rho\ d\rho\Big)d\theta+2\int_0^{2\pi}\Big(\int_{\frac{1}{2}}^{1}\ (\rho-\rho^2)\ d\rho\Big)d\theta$ ☐ $\displaystyle 2\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\frac{1}{2}}\ (1-\rho)\ d\rho\Big)d\theta$

[*1,5 valores*] 4. A função potencial $\varphi(x,y,z)$ do campo conservativo

$\vec{u}(x,y,z)=(y\cos(xy+z^2)+1)\vec{i}+(x\cos(xy+z^2)+ze^{yz}-1)\vec{j}+(2z\cos(xy+z^2)+ye^{yz}+3z^2)\vec{k}$,

que no ponto $(\frac{\pi}{2},1,0)$ toma o valor $\frac{\pi}{2}$ é:

☐ $\varphi(x,y,z)=\sin(xy+z^2)+e^{yz}+x-y+z^3-1$ ☐ $\varphi(x,y,z)=\cos(xy+z^2)+e^{yz}+x-y+z^3$

☐ $\varphi(x,y,z)=\sin(xy+z^2)+e^{yz}+x-y-1$ ☐ $\varphi(x,y,z)=\cos(xy+z^2)+e^{yz}+x-y$

☐ $\varphi(x,y,z)=\sin(xy+z^2)+x-y+z^3$ ☐ $\varphi(x,y,z)=\cos(xy+z^2)+x-y+z^3+1$

2º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2020/2021
19 DE DEZEMBRO DE 2020

GRUPO II

1. Considere a linha L fronteira do conjunto

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1 \wedge y \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}x \wedge \ x \leq 0\},$ percorrida no sentido direto.

[*2,5 valores*] a) Parametrize o arco da linha L pertencente à circunferência de equação

$$x^2 + (y-1)^2 = 1.$$

1.a) Resposta:

[*3 valores*] b) Calcule $\displaystyle\int_{L^+} (-3xy)\ dx + e^{2y^3}\ dy$, a partir de um integral duplo e utilizando coordenadas polares.

1.b) Resposta:

GRUPO III

[*3 valores*] 1. Determine, directamente, o valor do fluxo

$$\iint_S (-x\vec{i} - y\vec{j})\,.\,\vec{n}\;dS,$$

na porção da superfície cónica $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 2$ e na face em que $\cos\gamma < 0$, quando $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ é um vector unitário com a direcção da normal à superfície considerada.

1. Resposta:

[*3 valores*] 2. Sendo S a face exterior da superfície total, que limita o domínio fechado limitado superiormente pelo plano $z = 2$ e inferiormente pela porção de superfície cónica $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le 2$, determine a partir do cálculo de um integral triplo,

$$\iint_S (-x\vec{i} - y\vec{j})\,.\,\vec{n}\;dS.$$

Explique de forma sucinta, e sem efectuar cálculos, porque se obtém o mesmo valor que em III 1.

2. Resposta:

GRUPO IV

[*2,5 valores*] Seja $A \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto e $g(x, y, z)$ um campo escalar continuamente derivável e que não se anula em A.

Sabendo que $\nabla.(g\nabla g) = || \nabla g ||^2 + \dfrac{3}{4}g$, determine

$$\int\int_S \nabla g.\vec{n} \ dS$$

onde S é a face exterior da superfície esférica de centro na origem e raio $r > 0$ contida em A e $\vec{n}$ designa o vector unitário dirigido segundo a semi-normal exterior à superfície S.

(Obs. $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ e $||\nabla g|| = \sqrt{\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial z}\right)^2}$)

Resposta:

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*