Bolas abertas em $\mathbb{R}^n$

Dados $A \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$, chama-se bola aberta de centro A e raio ε ao conjunto

$$B_\varepsilon(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : d(X, A) < \varepsilon\} = \{X \in \mathbb{R}^n : \|X - A\| < \varepsilon\}.$$

Casos particulares: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$

- em $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(a) &= \{x \in \mathbb{R} : d(x, a) < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[. \end{aligned}$$

- em $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} B_\varepsilon(a, b) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (a, b)\| < \varepsilon\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \varepsilon\right\}. \end{aligned}$$

Interior de um conjunto

Sejam $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^n$.

- Diz-se que A é interior a $\mathcal{C}$ se existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(A) \subset \mathcal{C}.$$

  Ao conjunto dos pontos interiores a $\mathcal{C}$ chama-se interior de $\mathcal{C}$ e representa-se por $\mathrm{int}(\mathcal{C})$.

Exterior de um conjunto

Sejam $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^n$.

- Chama-se complementar de $\mathcal{C}$ ao conjunto

$$\mathcal{C}^c = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C}.$$

- Diz-se que A é exterior a $\mathcal{C}$ se existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(A) \subset \mathcal{C}^c \quad (\Leftrightarrow \quad B_\varepsilon(A) \cap \mathcal{C} = \emptyset).$$

  Ao conjunto dos pontos exteriores a $\mathcal{C}$ chama-se exterior de $\mathcal{C}$ e representa-se por $\mathrm{ext}(\mathcal{C})$.

Fronteira de um conjunto

Sejam $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^n$.

- Diz-se que A é fronteiro a $\mathcal{C}$ se para qualquer $\varepsilon > 0$,

$$B_\varepsilon(A) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset, \quad B_\varepsilon(A) \cap \mathcal{C}^c \neq \emptyset.$$

Ao conjunto dos pontos fronteiros a $\mathcal{C}$ chama-se fronteira de $\mathcal{C}$ e representa-se por $\mathrm{fr}(\mathcal{C})$.

Proposição

$$\mathrm{fr}(\mathcal{C}) = \mathrm{fr}(\mathcal{C}^c).$$

Fecho (aderência) de um conjunto

Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$. Chama-se fecho ou aderência de $\mathcal{C}$ ao conjunto

$$\overline{\mathcal{C}} = \mathrm{int}(\mathcal{C}) \cup \mathrm{fr}(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \cup \mathrm{fr}(\mathcal{C}).$$

Conjuntos abertos e fechados

Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$.

- Diz-se que $\mathcal{C}$ é aberto se

$$\mathcal{C} = \mathrm{int}(\mathcal{C}).$$

- Diz-se que $\mathcal{C}$ é fechado se

$$\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}}.$$

Algumas propriedades

Teorema

Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$. Então

$$\text{int}(\mathcal{C}) \cup \text{fr}(\mathcal{C}) \cup \text{ext}(\mathcal{C}) = \mathbb{R}^n;$$

$$\text{int}(\mathcal{C}) \cap \text{fr}(\mathcal{C}) = \emptyset; \quad \text{int}(\mathcal{C}) \cap \text{ext}(\mathcal{C}) = \emptyset; \quad \text{fr}(\mathcal{C}) \cap \text{ext}(\mathcal{C}) = \emptyset.$$

Teorema

Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$. Então $\mathcal{C}$ é fechado se e só se $\mathcal{C}^c$ é aberto.

Pontos de acumulação e pontos isolados. Derivado

Sejam $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ e $A \in \mathbb{R}^n$.

- Diz-se que A é ponto de acumulação de $\mathcal{C}$ se toda a bola aberta $B_\varepsilon(A)$ centrada em A contém, pelo menos, um ponto de $\mathcal{C} \setminus \{A\}$.

- Diz-se que $A \in \mathcal{C}$ é ponto isolado de $\mathcal{C}$ se existir uma bola aberta $B_\varepsilon(A)$ centrada em A cuja interseção com $\mathcal{C}$ é A.

Ao conjunto dos pontos de acumulação de $\mathcal{C}$ chama-se derivado de $\mathcal{C}$ e designa-se por $\mathcal{C}'$.

Exemplo

Exemplo

Indique o interior, o exterior, a fronteira, a aderência, o derivado e os pontos isolados do conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 - y^2 > 0 \wedge y - x^2 \geq 0\} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

É aberto? É fechado?

Resolução:

Conjuntos limitados em $\mathbb{R}^n$

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que D é um conjunto limitado se existir um número $r > 0$ tal que

$$D \subset B_r(0).$$

Limites laterais de uma função de uma variável

Seja I um intervalo aberto em $\mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Há apenas dois sentidos pelos quais x pode aproximar x_0:

- à direita:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

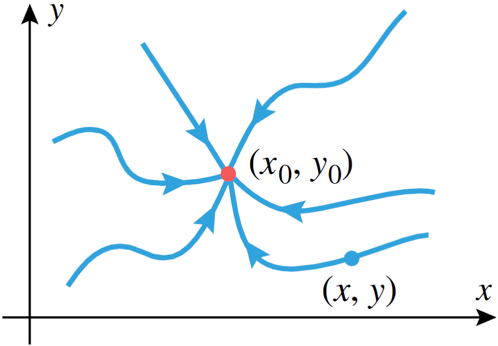
- à esquerda:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Funções de duas variáveis

Sejam D um conjunto aberto em $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$, $\quad (x_0, y_0) \in \overline{D}$.

Há uma infinidade de curvas diferentes ao longo das quais (x, y) pode aproximar (x_0, y_0):



Limites de uma função de duas variáveis ao longo de curvas

Seja C uma curva regular, no plano, com equações paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in I \text{ (intervalo)}$$

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto,

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad (x_0, y_0) \in \overline{D}.$$

Suponhamos que

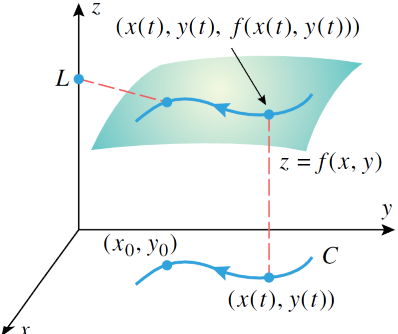
$$C \subset D \cup \{(x_0, y_0)\}, \quad (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0),$$

onde $t_0 \in I$.

Limites de uma função de duas variáveis ao longo de curvas

O limite de f quando (x, y) tende para (x_0, y_0) ao longo de C é definido por

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0),\\ (x,y)\in C}} f(x,y) = \lim_{t\to t_0} f(x(t), y(t)).$$



Limites direcionais

Chama-se limite direcional ao limite ao longo de uma reta.

Observação

as retas que passam pelo ponto (x_0, y_0) *são dadas pelas equações*

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = m(x - x_0) + y_0\} \quad (m \in \mathbb{R})$$

e

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = x_0\}.$$

Exemplo

Seja

$$f(x, y) = -\frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

Exemplo

Calcule os limites direcionais, no ponto $(0, 0)$*, ao longo dos eixos* x *e* y *e ao longo das retas* $x = y$ *e* $x = -y$*.*

Resolução:

Definição de limite segundo Cauchy

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto e

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad (x_0, y_0) \in D'.$$

Escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir um número $\delta > 0$ tal que

$$(x,y) \in D \ \wedge \ 0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Definição de limite segundo Cauchy (continuação)