Ficha 2 - Soluções

Exercício 2

a) $p_2(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{8}x + \frac{7}{4}$

b) $p_2(x) = \frac{e^2-2e+1}{2}x^2 - \frac{e^2-4e+3}{2}x + 1$

c) $p_2(x) = \frac{1}{2e-2e^3}x^2 + \frac{e+1}{2e^2-2e}x + \frac{e+2}{2-e^2}$

d) $p_2(x) = \frac{3-2\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{8\sqrt{3}-11}{4}x + \frac{5-3\sqrt{3}}{2}$

e) $p_2(x) = \left(2 + \frac{2}{e} - \frac{4}{\sqrt{e}}\right)x^2 + \left(-3 - \frac{1}{e} + \frac{4}{\sqrt{e}}\right)x + 1$

f) $p_2(x) = \left(\cosh(1) - 1\right)x^2 + 1$

Exercício 3

$p_2(x) = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)x^2 + \left(-\frac{7}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)x + 1$

$\widehat{h(0.5)} \simeq 0.870812$

$|h(0.5) - p_2(0.5)| \leq 0.070653$

Exercício 4

a) $p_2^A(t) = -\frac{t^2}{2} + 5t$

$p_2^B(t) = -\frac{9}{5}t^2 + \frac{63}{5}t$

$t_{col} = \frac{76}{13} \simeq 5.846$ Segundos

b) $h_{col} = \frac{2052}{169} \simeq 12.142$ m

c) $h^A_{max} = \frac{25}{2} = 12,5$ m

$h^B_{max} = 22.05$ m

CN
2020/2021

Ficha 2

Exercício 5

- $p_n(x) \rightarrow$ polinómio de grau menor ou igual a n, interpolador de $f(x)$ nos nodos distintos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ [*]

- $q_{n+1}(x) = p_n(x) + \Omega_{n+1}(x)\left(f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1})\right)$

- $$\Omega_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_{n+1}-x_0)(x_{n+1}-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_n)}$$

- Em primeiro lugar, repare-se que

$$\Omega_{n+1}(x_0) = \Omega_{n+1}(x_1) = \dots = \Omega_{n+1}(x_n) = 0 \quad \text{e}$$

$$\Omega_{n+1}(x_{n+1}) = 1$$

- Assim sendo, tem-se

$$q_{n+1}(x_0) = \underbrace{p_n(x_0)}_{=f(x_0)} + \underbrace{\Omega_{n+1}(x_0)}_{=0}\cdot\left(f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1})\right) = p_n(x_0) \underset{[*]}{=} f(x_0)$$

$$q_{n+1}(x_1) = \underbrace{p_n(x_1)}_{=f(x_1)} + \underbrace{\Omega_{n+1}(x_1)}_{=0}\cdot\left(f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1})\right) = p_n(x_1) \underset{[*]}{=} f(x_1)$$

$\vdots$

$$q_{n+1}(x_n) = \underbrace{p_n(x_n)}_{=f(x_n)} + \underbrace{\Omega_{n+1}(x_n)}_{=0}\cdot\left(f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1})\right) = p_n(x_n) \underset{[*]}{=} f(x_n) \qquad (1)$$

Exercício 5 <cont.>

- Por último, tem-se

$$q_{n+1}(x_{n+1}) = p_n(x_{n+1}) + \underbrace{\Omega_{n+1}(x_{n+1})}_{=1} \cdot \left(f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}) \right) =$$

$$= \cancel{p_n(x_{n+1})} + f(x_{n+1}) - \cancel{p_n(x_{n+1})} = f(x_{n+1})$$

- Resumindo, tem-se

$$q_{n+1}(x_i) = f(x_i) \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, n+1 \, ,$$

logo

$q_{n+1}(x)$ interpola a função $f(x)$ nos nodos distintos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$

NOTA

- $q_{n+1}(x)$ é um polinómio de grau menor ou igual a $n+1$

CN-I

2020/2021

Ficha 2

Exercício 7

- $x_i = i \,, \; i = 0, 1, 2, \ldots, n$

- $l_i(x) = \dfrac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$

- Provar que $\sum_{i=0}^{n} i\, l_i(x) = x$

— // —

- Em 1º lugar, note-se que

$$\sum_{i=0}^{n} i\, l_i(x)$$

representa o polinómio interpolador de Lagrange da função $f(x)$ que toma os valores $y_i = i$, nos pontos $x_i = i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

- Conclui-se que, se considerarmos a função $y = f(x) = x$, o polinómio interpolador de Lagrange, de grau $\leq n$, que interpola esta função nos nodos $0, 1, 2, \ldots, n$ é o polinómio $p(x) = x$, isto é, $p(x) = f(x)$

- $\therefore \sum_{i=0}^{n} i\, l_i(x) = x$ (**NOTA**: Teorema da existência e unicidade do polinómio interpolador)

Exercício 6

a) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x - 3$

Exercício 8

a)
$p_2(x) \simeq 0.5917 + (x-0.3)\times(-0.7365) + (x-0.3)(x-0.5)\times 0.4672$

$f(0.65) \simeq 0.3585$

b) $|f(0.65) - p_2(0.5)| \leq 0.0255$

$f(0.65) \in [0.3330, 0.3840]$

$r_{f(0.65)} \leq 0.0766$

Exercício 9

$A = \frac{8}{3}$

$B = \frac{352}{9}$

Exercício 10

$2\alpha - 3\beta + \gamma = 0$

Exercício 11

a) $p_3(y) = 2 + (y - 1.409297)\cdot(-1.178365) + (y-1.409297)(y-0.900117$
$\cdot(-0.255291) + (y-1.409297)(y-0.900117)(y-0.474453)\cdot(-0.162686$

$\hat{\alpha} \simeq 3.434735$

b) $|\alpha - \hat{\alpha}| \leq 0.002094$

$r_\alpha \leq 0.000610$

CN

2020/2021

Ficha 2

Exercício 11

-

x	2.0 (x_0)	2.6 (x_1)	3.0 (x_2)	4.0 (x_3)
$y=g(x)$	1.409297 (y_0)	0.900117 (y_1)	0.474453 (y_2)	-0.506802 (y_3)

a) • g tem um único zero real em $[2, 4]$

• Podemos construir a tabela da função inversa de g, g^{-1}, baseada nos pontos da tabela anterior:

y	1.409297 (y_0)	0.900117 (y_1)	0.474453 (y_2)	-0.506802 (y_3)
$x=g^{-1}(y)$	2.0 (x_0)	2.6 (x_1)	3.0 (x_2)	4.0 (x_3)

• uma vez que esta tabela tem 4 pontos, podemos construir o polinómio de Newton, com diferenças divididas, de grau ≤ 3, interpolador de g^{-1} nos pontos tabelados:

$$P_3(y) = x_0 + (y-y_0)\, g^{-1}[y_0, y_1] + (y-y_0)(y-y_1)\, g^{-1}[y_0, y_1, y_2] +$$

$$+ (y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)\, g^{-1}[y_0, y_1, y_2, y_3]$$

CN-D
2020/2021

Ficha 2

Exercício 11 <continuação>

a)

- Tabela de diferenças divididas

(Valores arredondados a 6 casas decimais)

y	x	$g^{-1}[,]$	$g^{-1}[,,]$	$g^{-1}[,,,]$
1.409297	2.0			
		−1.178365		
0.900117	2.6		−0.255291	
		−0.939708		−0.162686
0.474453	3.0		0.056432	
		−1.019103		
−0.506802	4.0			

- $P_3(y) = 2.0 + (y-1.409297)\cdot(-1.178365) +$
$+ (y-1.409297)\cdot(y-0.900117)\cdot(-0.255291) +$
$+ (y-1.409297)\cdot(y-0.900117)\cdot(y-0.474453)\cdot(-0.162686)$

- Se $g(\alpha)=0$, então $g^{-1}(0)=\alpha$

- Assim $\hat{\alpha} = P_3(0) = 2.0 + (0-1.409297)\cdot(-1.178365) +$
$+ (0-1.409297)\cdot(0-0.900117)\cdot(-0.255291) +$
$+ (0-1.409297)\cdot(0-0.900117)\cdot(0-0.474453)\cdot(-0.162686) \approx 3.434735$

Exercício 11 <cont.>

b) • $\alpha = 3.436828912\ldots$

• Assim

$$|\varepsilon_\alpha| = |\alpha - \hat{\alpha}| \leq |3.436828913 - 3.434735| \leq$$

$$\leq 0.002094$$

• Tem-se também

$$r_\alpha = \frac{|\alpha - \hat{\alpha}|}{|\alpha|} \leq \frac{0.002094}{3.436828912} \leq 0.000610$$

CN - D
2020/2021

Ficha 2

Exercício 12

- $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$
- $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}, \; a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- Sabe-se que

$$p_n[x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = \frac{p_n^{(n)}(\eta)}{n!}, \quad \eta = \eta(x) \in \,]\min\{x_0, x_1, \dots, x_n, x\}, \max\{x_0, x_1, \dots, x_n, x\}[$$

- Ora, fazendo $x = x_n$, tem-se

$$p_n[x_n, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] = p_n[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{p_n^{(n)}(\eta)}{n!}$$

- Uma vez que $p_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 1 \times a_n =$

$$= n!\, a_n \quad (\text{constante})$$

- conclui-se que

$$p_n[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{n!\, a_n}{n!} = a_n$$

Soluções ficha 2 - exercícios 13 a 20

Exercício 13

a) $\begin{cases} a = 0 \\ b = -108 \\ c = -21 \end{cases}$

b) $p_2(x) = 66 - 66(x+1) - 21(x+1)(x-0) = -21x^2 - 87x$

c) $f(-0.3) = 24.21$

Exercício 14

obtém-se o sistema de equações impossível, logo S(x) não pode ser spline cúbico

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ c=0 \\ 3a+2b+c=-1 \\ b=1 \\ 6a+2b=0 \end{cases}$$

Exercício 15

$$S_0(x) = \frac{(x-1)^3}{6} \times \left(-\frac{429}{34}\right) - 2(2-x) + \left(6 - \frac{1}{6}\left(-\frac{429}{34}\right)\right)(x-1)$$

$$S_1(x) = -\frac{(x-4)^3}{12} \times \left(-\frac{429}{34}\right) + \frac{(x-2)^3}{12} \times \left(\frac{267}{34}\right) + \left(6 - \frac{2}{3} \times \left(-\frac{429}{34}\right)\right)\frac{4-x}{2} + \left(2 - \frac{2}{3}\left(\frac{267}{34}\right)\right)\frac{x-2}{2}$$

$$S_2(x) = -\frac{(x-8)^3}{24} \times \left(\frac{267}{34}\right) + \left(2 - \frac{8}{3}\left(\frac{267}{34}\right)\right)\frac{8-x}{4} + 10(x-4)$$

Exercício 16

Resolução no clip

Exercício 17 - Splines mistos (não sai no teste)

Resolução no clip

Exercício 18

$p_1(t) \approx 0.0087t - 16.0324$

$P(2015) \approx 1.4054$ milhares de milhões de habitantes

Exercício 15

x	1	2	4	8
$y=g(x)$	-2	6	2	40

x_0, x_1, x_2, x_3 ; y_0, y_1, y_2, y_3

$$\begin{cases} h_0 = x_1 - x_0 = 2-1=1 \\ h_1 = x_2 - x_1 = 4-2=2 \\ h_2 = x_3 - x_2 = 8-4 \end{cases}$$

- $$s(x) = \begin{cases} s_0(x) & ; \ 1 \le x < 2 \\ s_1(x) & ; \ 2 \le x < 4 \\ s_2(x) & ; \ 4 \le x \le 8 \end{cases}$$

- spline cúbico natural $\Rightarrow \begin{cases} m_0 = s''(x_0) = s''(1) = 0 \\ m_3 = s''(x_3) = s''(8) = 0 \end{cases}$

- Incógnitas : $\begin{cases} m_1 = s''(x_1) = s''(2) \\ m_2 = s''(x_2) = s''(4) \end{cases}$

- determinação das incógnitas m_1 e m_2

$$\begin{cases} i=1 \rightarrow h_0 \underbrace{m_0}_{=0} + 2(h_0+h_1) m_1 + h_1 m_2 = 6\left(\frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0}\right) \\ i=2 \rightarrow h_1 m_1 + 2(h_1+h_2) m_2 + h_2 \underbrace{m_3}_{=0} = 6\left(\frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1.0 + 2(1+2) m_1 + 2 m_2 = 6\left(\frac{2-6}{2} - \frac{6-(-2)}{1}\right) \\ 2m_1 + 2(2+4) m_2 + 4.0 = 6\left(\frac{40-2}{4} - \frac{2-6}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6m_1 + 2m_2 = -60 \\ 2m_1 + 12 m_2 = 69 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = -429/34 \\ m_2 = 267/34 \end{cases}$$

- Determinação dos 3 ramos do spline $s(x)$

$$s_i(x) = -\frac{(x-x_{i+1})^3}{6h_i} m_i + \frac{(x-x_i)^3}{6h_i} m_{i+1} +$$

$$\left(y_i - \frac{h_i^2}{6} m_i\right)\frac{x_{i+1}-x}{h_i} + \left(y_{i+1} - \frac{h_i^2}{6} m_{i+1}\right)\frac{x-x_i}{h_i}$$

$(i = 0, 1, 2)$

- $$s_0(x) = -\frac{(x-x_1)^3}{6h_0} m_0 + \frac{(x-x_0)^3}{6h_0} \cdot m_1 +$$

$$+ \left(y_0 - \frac{h_0^2}{6} m_0\right)\frac{x_1-x}{h_0} + \left(y_1 - \frac{h_0^2}{6} m_1\right)\frac{x-x_0}{h_0} =$$

$$= -\frac{(x-2)^3}{6(1)} \cdot 0 + \frac{(x-1)^3}{6(1)} \cdot \left(-\frac{429}{34}\right) +$$

$$+ \left(-2 - \frac{1^2}{6} \cdot 0\right)\frac{2-x}{1} + \left(6 - \frac{1^2}{6} \cdot \left(-\frac{429}{34}\right)\right) \cdot \frac{x-1}{1} =$$

$$\ldots = -\frac{143}{68} x^3 + \frac{429}{68} x^2 + \frac{129}{34} x - 10$$

Exercício 15

$$\bullet\ s_1(x) = -\frac{(x-x_2)^3}{6h_1}\cdot m_1 + \frac{(x-x_1)^3}{6h_1}\cdot m_2 +$$

$$+ \left(y_1 - \frac{h_1^2}{6} m_1\right)\frac{x_2 - x}{h_1} + \left(y_2 - \frac{h_1^2}{6} m_2\right)\frac{x - x_1}{h_1} =$$

$$= -\frac{(x-4)^3}{6.2}\cdot\left(-\frac{429}{34}\right) + \frac{(x-2)^3}{6.2}\cdot\left(\frac{267}{34}\right) +$$

$$+ \left(6 - \frac{2^2}{6}\cdot\left(-\frac{429}{34}\right)\right)\cdot\frac{4-x}{2} + \left(2 - \frac{2^2}{6}\left(\frac{267}{34}\right)\right)\frac{x-2}{2} =$$

$$\ldots = \frac{29}{17}x^3 - \frac{1125}{68}x^2 + \frac{99}{2}x - \frac{688}{17}$$

$$\bullet\ s_2(x) = -\frac{(x-x_3)^3}{6h_2}\cdot m_2 + \frac{(x-x_2)^3}{6h_2}\cdot m_3 +$$

$$+ \left(y_2 - \frac{h_2^2}{6}\cdot m_2\right)\frac{x_3 - x}{h_2} + \left(y_3 - \frac{h_2^2}{6} m_3\right)\cdot\frac{x - x_2}{h_2} =$$

$$= -\frac{(x-8)^3}{6.4}\cdot\left(\frac{267}{34}\right) + \frac{(x-4)^3}{6.4}\cdot(0) +$$

$$+ \left(2 - \frac{4^2}{6}\cdot\left(\frac{267}{34}\right)\right)\frac{8-x}{4} + \left(40 - \frac{4^2}{6}\cdot 0\right)\frac{x-4}{4} =$$

$$\ldots = -\frac{89}{272}x^3 + \frac{267}{34}x^2 - \frac{1635}{34}x + \frac{1524}{17}$$

• Tem-se, finalmente

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{143}{68}x^3 + \frac{429}{68}x^2 + \frac{129}{34}x - 10 \ ; & 1 \leq x < 2 \\ \frac{29}{17}x^3 - \frac{1125}{68}x^2 + \frac{99}{2}x - \frac{688}{17} \ ; & 2 \leq x < 4 \\ -\frac{89}{272}x^3 + \frac{267}{34}x^2 - \frac{1635}{34}x + \frac{1524}{17} \ ; & 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Exercício 16

x	-1	0	2	4
$f(x)$	-12	-4	0	68

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad y_3$

$[n=3)$

(a)

x	$f(x)$	$f[\,,\,]$	$f[\,,\,,\,]$	$f[\,,\,,\,,\,]$
-1	-12			
		8		
0	-4		-2	
		2		2
2	0		8	
		34		
4	68			

$$P_3(x) = -12 + 8(x+1) - 2(x+1)(x-0) + 2(x+1)x(x-2) =$$

$$\ldots = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 4$$

(b) $\cdot\, f'(-1) = 16$

$\cdot\, f'(4) = 66$

$$\begin{cases} h_0 = x_1 - x_0 = 0-(-1) = 1 \\ h_1 = x_2 - x_1 = 2-0 = 2 \\ h_2 = x_3 - x_1 = 4-2 = 2 \end{cases}$$

- Para $S(x)$ ser um spline cúbico completo, interpolador de $f(x)$ nos pontos tabelados é necessário verificar-se

$$\begin{cases} \cdot\, S'(-1) = f'(-1) = 16 \quad (= f'_0 = y'_0) \\ \cdot\, S'(4) = f'(4) = 66 \quad (= f'_3 = y'_3) \end{cases}$$

$$\cdot \quad S(x) = \begin{cases} S_0(x) & ; \ -1 \le x < 0 \\ S_1(x) & ; \ 0 \le x < 2 \\ S_2(x) & ; \ 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

· Incógnitas: $m_i = S''(x_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$

· <u>determinação das incógnitas</u>

$$\begin{cases} 2h_0 m_0 + h_0 m_1 + 6\left(\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - y'_0\right) \\ i=1 \mapsto \ h_0 m_0 + 2(h_0 + h_1) m_1 + h_1 m_2 = 6\left(\dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_0}\right) \Leftrightarrow \\ i=2 \mapsto \ h_1 m_1 + 2(h_1 + h_2) m_2 + h_2 m_3 = 6\left(\dfrac{y_3 - y_2}{h_2} - \dfrac{y_2 - y_1}{h_1}\right) \\ h_2 m_2 + 2h_2 m_3 = 6\left(y'_3 - \dfrac{y_3 - y_2}{h_2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1 \cdot m_0 + 1 \cdot m_1 = 6\left(\dfrac{-4-(-12)}{1} - 16\right) \\ 1 \cdot m_0 + 2(1+2) m_1 + 2 \cdot m_2 = 6\left(\dfrac{0-(-4)}{2} - \dfrac{-4-(-12)}{1}\right) \\ 2 \cdot m_1 + 2(2+2) m_2 + 2 m_3 = 6\left(\dfrac{68-0}{2} - \dfrac{0-(-4)}{2}\right) \\ 2 \cdot m_2 + 2 \cdot 2 \cdot m_3 = 6\left(66 - \dfrac{68-0}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

Exercício 16 (cont.)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m_0 + m_1 = -48 \\ m_0 + 6m_1 + 2m_2 = -36 \\ 2m_1 + 8m_2 + 2m_3 = 192 \\ 2m_2 + 4m_3 = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_0 = -20 \\ m_1 = -8 \\ m_2 = 16 \\ m_3 = 40 \end{cases}$$

• Determinação dos 3 ramos do spline $S(x)$

$$\cdot\, S_0(x) = -\frac{(x-x_1)^3}{6h_0}\cdot m_0 + \frac{(x-x_0)^3}{6h_0}\cdot m_1 +$$

$$+\left(y_0 - \frac{h_0^2}{6}m_0\right)\frac{x_1-x}{h_0} + \left(y_1 - \frac{h_0^2}{6}m_1\right)\frac{x-x_0}{h_0} =$$

$$= -\frac{(x-0)^3}{6.1}\cdot(-20) + \frac{(x-(-1))^3}{6.1}\cdot(-8)$$

$$+\left(-12 - \frac{1^2}{6}\cdot(-20)\right)\frac{0-x}{1} + \left(-4 - \frac{1^2}{6}(-8)\right)\frac{x-(-1)}{1} =$$

$$\ldots = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 4$$

$$\cdot\ S_1(x) = -\frac{(x-x_2)^3}{6h_1}\cdot m_1 + \frac{(x-x_1)^3}{6h_1}\cdot m_2 +$$

$$+\left(y_1 - \frac{h_1^2}{6}\cdot m_1\right)\frac{x_2-x}{h_1} + \left(y_2 - \frac{h_1^2}{6}m_2\right)\cdot\frac{x-x_1}{h_1} =$$

$$= -\frac{(x-2)^3}{6.2}\cdot(-8) + \frac{(x-0)^3}{6.2}\cdot(16) +$$

$$+\left(-4 - \frac{2^2}{6}\cdot(-8)\right)\frac{2-x}{2} + \left(0 - \frac{2^2}{6}\cdot(16)\right)\frac{x-0}{2} =$$

$$\dots = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 4$$

$$\cdot\ S_2(x) = -\frac{(x-x_3)^3}{6h_2}\cdot m_2 + \frac{(x-x_2)^3}{6h_2}\cdot m_3 +$$

$$+\left(y_2 - \frac{h_2^2}{6}m_2\right)\frac{x_3-x}{h_2} + \left(y_3 - \frac{h_2^2}{6}m_3\right)\frac{x-x_2}{h_2} =$$

$$= -\frac{(x-4)^3}{6.2}\cdot(16) + \frac{(x-2)^3}{6.2}\cdot(40) +$$

$$+\left(0 - \frac{2^2}{6}\cdot(16)\right)\frac{4-x}{2} + \left(68 - \frac{2^2}{6}\cdot(40)\right)\frac{x-2}{2} =$$

$$\dots = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 4$$

Ex.16

Assim

$$S(x) \equiv 2x^3-4x^2+2x-4 = P_3(x) \quad , \forall x \in [-1,4]$$

- concluimos que sendo $P_3(x)$ um polinómio de grau ≤ 3 que interpola a função $f(x)$ nos 4 pontos tabelados e verificando este polinómio as condições $P_3'(-1)=16$ e $P_3'(4)=66$, poderíamos imediatamente concluir, pelo teorema da existência e unicidade do polinómio interpolador, que $P_3(x)$ seria um spline cúbico completo.

Nota lembrar que $P_3(x) \in C^2([-1,4])$

Exercício 19

a) $p_1(x) = \frac{36}{19}x + \frac{126}{19}$

Exercício 20

$K_0 = \frac{839}{884}$

$K_1 = 0$

$K_2 = -\frac{2875}{6188}$

$(E_2)^2 \cong 0.006739$