Introdução às Probabilidades e Estatística e Investigação Operacional

Filipe Marques

Gabinete 25 - email: fjm@fct.unl.pt
horário de dúvidas: 2ª feira das 11h-12h e 4ª feira das 11h-12h
link: https://videoconf-colibri.zoom.us/j/3421652188

Ano lectivo 2021/2022

Variáveis aleatórias

- Variáveis aleatórias discretas;
- Variáveis aleatórias contínuas;
- Momentos de variáveis aleatórias;
- Outros parâmetros descritivos.

Variáveis aleatórias

Exemplo

Considere-se a experiência aleatória que consiste no lançamento de 2 moedas equilibradas, e registo da face voltada para cima. O espaço de resultados é $\Omega = \{(Ca, Ca), (Ca, Co), (Co, Ca), (Co, Co)\}$. *Podemos,* ***por exemplo****, atribuir*

ω	(Ca,Ca)	(Ca,Co)	(Co,Ca)	(Co,Co)
$X(\omega)$	2	1	1	0

Definição (Variável aleatória)

Uma **variável aleatória** X *(v.a.) é uma função real e finita, tal que* $A_x = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ *com* $x \in \mathbb{R}$ *é um acontecimento.*

Observação: Relativamente à experiência aleatória anterior, X é a aplicação que atribui a cada acontecimento de Ω o número de caras. Repare-se que:

$$X^{-1}(-\infty; x] = \begin{cases} \emptyset, & x < 0 \\ \{(Co, Co)\} & 0 \leq x < 1 \\ \{(Co, Co), (Ca, Co), (Co, Ca)\} & 1 \leq x < 2 \\ \Omega & 2 \leq x \end{cases}$$

Variáveis aleatórias

Proposição

Se $X_1, X_2, \ldots, X_m$ são m variáveis aleatórias e $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então $Y = h\left(X_1, X_2, \ldots, X_m\right)$ é uma v.a..

Definição (Função de distribuição)

Define-se **função de distribuição** *da v.a. X como:*

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Teorema

A qualquer v.a. X corresponde uma função de distribuição e vice-versa.

Propriedades da função de distribuição:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
2. F é contínua à direita;
3. F é não decrescente, isto é, se $x \leq y$, $F(x) \leq F(y)$.

Variável aleatória discreta

Definição (Variável aleatória discreta)

Uma v.a. X diz-se do **tipo discreto** *ou simplesmente* **discreta** *se o conjunto $D=\{a\in\mathbb{R}:\ P(X=a)>0\}$, é quanto muito numerável, e $P(X\in D)=1$.*

Definição

Seja X uma v.a. discreta. Chama-se **função de probabilidade (f.p.)** *de X à função definida pelo conjunto dos valores de X que são observados com probabilidade não nula, $D=\{x_1,x_2,\ldots\}$ (suporte), e pelas respectivas probabilidades, p_i, $i=1,2,\ldots$.*

Propriedades da função de probabilidade:

1. $P(X=x_i)=f(x_i)=p_i\geq 0$;
2. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Uma representação usual para a função de probabilidade da v.a. X, é:

$$X\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_i & \ldots \\ P(X=x_1) & P(X=x_2) & \ldots & P(X=x_i) & \ldots \end{array}\right.$$

Exemplo (Variável aleatória discreta)

Considere-se novamente a experiência aleatória que consiste no lançamento de 2 moedas equilibradas, e registo da face voltada para cima. Se X for a variável aleatória que conta o número de caras obtidas no lançamento das 2 moedas, então X tem função de probabilidade dada por

$$X \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Calculemos então $P(X \geq 1)$ usando a função massa de probabilidade de X:

Variável aleatória discreta

Exemplo (Variável aleatória discreta)

Considere-se novamente a experiência aleatória que consiste no lançamento de 2 moedas equilibradas, e registo da face voltada para cima. Se X for a variável aleatória que conta o número de caras obtidas no lançamento das 2 moedas, então X tem função de probabilidade dada por

$$X \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Calculemos então $P(X \geq 1)$ usando a função massa de probabilidade de X:

$$P(X \geq 1) = P(X \in \{1, 2\}) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{3}{4}$$

Exemplo (Variável aleatória discreta)

Considere-se novamente a experiência aleatória que consiste no lançamento de 2 moedas equilibradas, e registo da face voltada para cima. Se X for a variável aleatória que conta o número de caras obtidas no lançamento das 2 moedas, então X tem função de probabilidade dada por

$$X \begin{cases} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{cases}$$

Calculemos então $P(X \geq 1)$ usando a função massa de probabilidade de X:

$$P(X \geq 1) = P(X \in \{1,2\}) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{3}{4}$$

ou equivalentemente

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 1/4 = 3/4$$

Exemplo (Variável aleatória discreta)

Considere-se novamente a experiência aleatória que consiste no lançamento de 2 moedas equilibradas, e registo da face voltada para cima. Se X for a variável aleatória que conta o número de caras obtidas no lançamento das 2 moedas, então X tem função de probabilidade dada por

$$X \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Calculemos então $P(X \geq 1)$ usando a função massa de probabilidade de X:

$$P(X \geq 1) = P(X \in \{1, 2\}) = P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{3}{4}$$

ou equivalentemente

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 1/4 = 3/4$$

Observação: $P\left(X \in I\right) = \sum_{x_i \in I \cap D} P(X = x_i)$.

Variável aleatória continua

Definição (Variável aleatória contínua)

Uma v.a. X *diz-se do* **tipo contínuo** *ou simplesmente* **contínua** *se*

$$D = \{a \in \mathbb{R} : \ P(X = a) > 0\} = \emptyset,$$

e se existe uma função não negativa, f*, tal que para* $I \subseteq \mathbb{R}$*,*

$$P(X \in I) = \int_I f(x)dx$$

À função f *chamamos* **função densidade probabilidade** *ou* **função densidade***.*

Propriedades da função densidade probabilidade:

1. $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R};$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ dx = 1$

Observação: Como $\int_I f(x)dx$ se trata do integral de uma função não negativa e é sempre convergente, então a $P(X \in I)$, corresponde ao valor da área entre o eixo das abcissas e o gráfico da função f no intervalo I considerado. Consequentemente

$$P(X = x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

e ainda

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2), \quad \forall \, x_1 \leq x_2.$$

EXEMPLO (VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA)

A proporção de ratos, de uma população, infectada com Leptospirose é uma variável aleatória com função densidade:

$$f(x) = \begin{cases} k(1-x) & 0 < x < 1; \\ 0, & \textit{outros valores de } x. \end{cases}$$

1. *Mostre que* $k = 2$.
2. *Sabendo que menos de metade de uma população de ratos está infectada com Leptospirose, qual a probabilidade da proporção de ratos infectados ser superior a 0.3?*
3. *Determine o valor* t *que verifica a equação* $P(X < t) = 0.5$.

Momentos

Definição (Valor médio)

Define-se **valor médio** *ou* **valor esperado** *ou* **média** *de uma v.a.* X *como:*

$$\mu = E(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i) & \text{se } X \text{ é uma v.a. discreta;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx & \text{se } X \text{ é uma v.a. contínua;} \end{cases}$$

Vamos então calcular agora $E(X)$ para o caso da v.a. discreta que conta o número de caras no lançamento de duas moedas equilibradas e ainda para o caso da v.a. contínua que indica a proporção de ratos infectados com leptospirose uma dada população

Definição

Seja X uma v.a. e g uma função real de variável real contínua quase em toda a parte (isto é, se tiver pontos de descontinuidade eles formam quanto muito um conjunto numerável). Então o **valor médio** *de $g(X)$ é dado por:*

$$E(g(X)) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)P(X = x_i) & \text{se } X \text{ é uma v.a. discreta;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx & \text{se } X \text{ é uma v.a. contínua;} \end{cases}$$

desde que os lados direitos das igualdades anteriores convirjam absolutamente.

Teorema (Linearidade)

Caso exista valor médio de X, $E(aX+b) = aE(X) + b$.

Nota: Sendo X e Y duas v.a.'s então tem-se ainda que $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$.

Definição

Definem-se **momentos de ordem k (em torno da origem)** *da v.a. X por:*

$$m_k = E[X^k] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k P(X = x_i) & \text{se } X \text{ é uma v.a. discreta;} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx & \text{se } X \text{ é uma v.a. contínua;} \end{cases}$$

Vamos então calcular agora $E(X^2)$ para o caso da v.a. discreta que conta o número de caras no lançamento de duas moedas equilibradas e ainda para o caso da v.a. contínua que indica a proporção de ratos infectados com leptospirose uma dada população

Momentos

Definição

Seja X uma v.a.. Definem-se **momentos centrais de ordem** k *da v.a.* X *por:*

$$\mu_k = E((X-\mu)^k), \quad \textit{desde que o lado direito da igualdade exista.}$$

Momentos

Definição (Variância)

Define-se a variância da v.a. X *por* $\sigma^2 = V(X) = E((X-\mu)^2)$, *desde que o lado direito da igualdade exista. A* $\sigma = \sqrt{V(X)}$ *chamamos* **desvio padrão** *da v.a.* X.

Proposição

Se X *é uma v.a., para a qual existe variância,* $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

Proposição

Seja X *uma v.a.,* a *e* b *constantes reais. Então:*

(I) $V(b) = 0$;

(II) $V(aX+b) = a^2 V(X)$.

Breve nota sobre independência de variáveis aleatórios

Teorema

As variáveis aleatórias X e Y são independentes se e só se

$$P(X \leq x \cap Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) = F_X(x)F_Y(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

onde

$$P(X \leq x \cap Y \leq y) = P(X \leq x, Y \leq y) = F(x, y)$$

se diz a **função distribuição de probabilidade conjunta** do par aleatório (X, Y).

Propriedades

Se X e Y são duas variáveis aleatórias independentes, então

- $E(XY) = E(X)E(Y)$
- $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$

Outros parâmetros descritivos das distribuições

- **Mediana** da v.a. X, designada por m_e, e definida como o valor que satisfaz as condições $P(X \leq m_e) \geq 0.5$ e $P(X \geq m_e) \geq 0.5$. Existe sempre.
- **Moda**, designada por m_o, e definida como o valor que maximiza a função de probabilidade ou a função densidade probabilidade, desde que seja único. Nem sempre existe.
- **Coeficiente de variação**, definido quando existem a média μ - que tem de ser positiva - e o desvio padrão σ, por $c.v. = \frac{\sigma}{\mu} \times 100$.
- **Coeficiente de simetria**, definido como $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$.
- Define-se o **coeficiente de achatamento** ou **kurtosis** como $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$.