Capítulo 7 - Teste de Hipóteses

Resolução de alguns exercícios

Teste de Hipóteses

7.1 a)

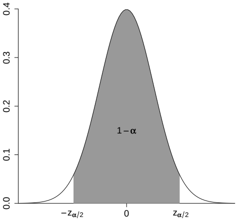
- Informação populacional: População Normal, variância conhecida $\sigma = 40$

  Informação amostral: $n = 10$; $\bar{x} = 216$

- Pretendemos testar, com $\alpha = 0.05$, as hipóteses:

$$H_0 : \mu = 200 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq 200$$

- Estatística de teste: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1)$



- Região critica (ou de rejeição) para $\alpha = 0.05$:

$$R_\alpha =]-\infty, -z_{\alpha/2}[\cup]z_{\alpha/2}, +\infty[$$
$$R_{0.05} =]-\infty, -z_{0.025}[\cup]z_{0.025}, +\infty[$$
$$R_{0.05} =]-\infty, -1.96[\cup]1.96, +\infty[$$

- Regra de decisão do teste:

  rejeitar H_0 ao nível de significância 5% se $z_{obs} \in R_{0.05}$

- Decisão: Para $n = 10$, $\overline{x} = 216$ e $\sigma = 40$ temos

$$z_{obs} = \frac{216 - 200}{\frac{40}{\sqrt{10}}} = 1.26 \notin R_{0.05}$$

  pelo que não rejeitamos H_0 ao nível de significância de 5%.

7.1 b) População Normal com variância conhecida.

- Informação populacional: População Normal, variância conhecida $\sigma = 40$

  Informação amostral: $n = 10$; $\bar{x} = 216$

- Pretendemos testar, com $\alpha = 0.05$, as hipóteses

$$H_0 : \mu \geq 200 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu < 200$$

- Estatística de teste: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} N(0,1)$

- Região de rejeição para $\alpha = 0.05$:

$$\begin{aligned} R_\alpha &=]-\infty, -z_\alpha[\\ R_{0.05} &=]-\infty, -z_{0.05}[=]-\infty, -1.64[\end{aligned}$$

- Regra de decisão do teste:

  rejeitar H_0 *ao nível de significância* 5% se $z_{obs} \in R_{0.05}$

- Decisão: Para $n = 10$, $\overline{x} = 216$ e $\sigma = 40$ temos

$$z_{obs} = \frac{216 - 200}{\frac{40}{\sqrt{10}}} = 1.26 \notin R_{0.05}$$

  pelo que não rejeitamos H_0 ao nível de significância de 5%.

7.1 c) A potência do teste realizado na alínea b) é

$$\begin{aligned} 1-\beta &= 1-P(\text{Erro tipo II}) \\ &= P(\text{ Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ é FALSA}) \\ &= P\left(\frac{\overline{X}-200}{\frac{40}{\sqrt{10}}} < -1.64 \middle| \mu = 190\right) \\ &= P\left(\frac{\overline{X}-190}{\frac{40}{\sqrt{10}}} < -0.85 \middle| \mu = 190\right) \\ &= \Phi(-0.85) = 1-\Phi(0.85) = 0.1977 \end{aligned}$$

d) alínea b) valor-$p = P(Z < 1.26|H_0) = \Phi(1.26) = 0.8962 > 0.05$ pelo que, para um nível de significância $\alpha = 0.05$ não rejeitamos H_0 porque o valor-$p = 0.8962 > 0.05$.

alínea a)
valor-$p = 2P(Z > 1.26|H_0) = 2(1-\Phi(1.26)) = 0.2076 > 0.05$ pelo que, para um nível de significância $\alpha = 0.05$ não rejeitamos H_0 porque o valor-$p = 0.2076 > 0.05$.

Teste de Hipóteses

7.2 a)

- Informação populacional: População Normal, variância desconhecida

  informação amostral: $n = 10$, $\bar{x} = 0.96$ e $s = 0.236643$

- pretendemos testar, com $\alpha = 0.01$, as hipóteses

$$H_0 : \mu = 0.9 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq 0.9$$

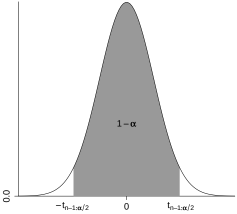
- estatística de teste: $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} t_{n-1}$

- região de rejeição para $\alpha = 0.01$ e $n = 10$:

$$R_\alpha =]-\infty; -t_{n-1,\alpha/2}[\cup]t_{n-1,\alpha/2}; +\infty[$$

$$R_{0.01} =]-\infty; -t_{9,0.005}[\cup]t_{9,0.005}; +\infty[$$

$$R_{0.01} =]-\infty, -3.25[\cup]3.25, +\infty[$$



- regra de decisão do teste:

  rejeitar H_0 ao nível de significância 1% se $t_{obs} \in R_{0.01}$

- decisão: para $n = 10$, $\overline{x} = 0.96$ e $s = 0.236643$ temos

$$t_{obs} = \frac{0.96 - 0.9}{\frac{0.236643}{\sqrt{10}}} = 0.8018 \notin R_{0.01}$$

  pelo que não rejeitamos H_0 ao nível de significância de 1%.

7.2 a) Utilizando o p-valor:

$$\begin{aligned} p - valor &= 2 \times \min\{P(T > t_{obs}|H_0), P(T < t_{obs}|H_0)\} \\ &= 2 \times \min\{P(T > 0.8018|H_0), P(T < 0.8018|H_0)\} \\ &= 2 \times P(T > 0.8018|H_0) \ = \ 2(1 - F_{t_9}(0.8018)) \\ & \quad \text{(usanda o Rstudio ou máquina de calcular)} \\ &\approx 0.44 \end{aligned}$$

dado que p-valor > 0.01 a decisão é não rejeitar H_0 para $\alpha = 0.01$ (seria tomada a mesma decisão, por exemplo, para $\alpha = 0.05$ e $\alpha = 0.1$).

Teste de Hipóteses

7.2 b)

- Informação populacional: População Normal, variância desconhecida

  informação amostral: $n = 10$, $\bar{x} = 0.96$ e $s = 0.236643$

- pretendemos testar, com $\alpha = 0.01$, as hipóteses

$$H_0 : \ \mu \leq 0.9 \quad \text{vs} \quad H_1 : \ \mu > 0.9$$

- estatística de teste: $T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \underset{\text{sob } H_0}{\sim} t_{n-1}$

- região critica (ou de rejeição) para $\alpha = 0.01$ e $n = 10$:

$$\begin{aligned} R_\alpha &= \ ]t_{n-1,\alpha}, +\infty[\\ R_{0.01} &= \ ]t_{9,0.01}; +\infty[=]2.821, +\infty[\end{aligned}$$

- regra de decisão do teste:

  rejeitar H_0 *ao nível de significância* 1% se $t_{obs} \in R_{0.01}$

- decisão: para $n = 10$, $\overline{x} = 0.96$ e $s = 0.236643$ temos

$$t_{obs} = \frac{0.96 - 0.9}{\frac{0.236643}{\sqrt{10}}} = 0.8018 \notin R_{0.01}$$

  pelo que não rejeitamos H_0 ao nível de significância de 1%.

7.2 b) Utilizando o p-valor:

$$\begin{aligned} p - valor &= P(T > t_{obs}|H_0) \\ &= 1 - F_{t_9}(0.8018) \\ &\quad \text{(usando o Rstudio ou máquina de calcular)} \\ &\approx 0.22 \end{aligned}$$

dado que $p - valor > 0.01$ a decisão é não rejeitar H_0 para $\alpha = 0.01$ (seria tomada a mesma decisão, por exemplo, para $\alpha = 0.05$ e $\alpha = 0.1$).

7.5

- Informação populacional: População desconhecida com variância desconhecida

  informação amostral: $n = 100 \geq 30$, $\bar{x} = 5625$ e $s^2 = 6187500/99$

- pretendemos testar, com $\alpha = 0.05$, as hipóteses

$$H_0: \ \mu = 5000 \quad \text{vs} \quad H_1: \ \mu \neq 5000$$

- estatística de teste: $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \underset{\text{sob } H_0}{\overset{a}{\sim}} N(0,1)$

- região critica (ou de rejeição) para $\alpha = 0.05$:

$$R_{0.05} =]-\infty, -1.96[\cup]1.96, +\infty[$$

- regra de decisão do teste:
  rejeitar H_0 ao nível de significância 5% se $z_{obs} \in R_{0.05}$

- decisão: para $n = 100 \geq 30$, $\bar{x} = 5625$ e $s^2 = 6187500/99$ temos

$$z_{obs} = \frac{5625 - 5000}{\frac{\sqrt{6187500/99}}{\sqrt{100}}} = 25 \in R_{0.05}$$

  pelo que a decisão é rejeitar H_0 ao nível de significância de 5%.

7.5 Utilizando o p-valor:

$$\begin{aligned} p - valor &= 2 \times \min\{P(Z > z_{obs}|H_0), P(Z < z_{obs}|H_0)\} \\ &= 2 \times \min\{P(Z > 25|H_0), P(Z < 25|H_0)\} \\ &= 2 \times P(Z > 25|H_0) \;=\; 2(1 - \Phi(25)) \\ &\approx 0 \end{aligned}$$

dado que $p - valor \approx 0 < 0.05$ a decisão é rejeitar H_0 para $\alpha = 0.05$.

7.8

- informação amostral: $n = 120 \geq 30$ e $\hat{p} = \dfrac{42}{120}$
- pretendemos testar, com $\alpha = 0.1$, as hipóteses

$$H_0 : p \leq 0.3 \quad vs \quad H_1 : p > 0.3$$

- estatística de teste:

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} \underset{H_0}{\overset{a}{\sim}} N(0,1)$$

- região critica (ou de rejeição) para $\alpha = 0.1$:

$$R_{0.1} \overset{a}{\simeq}]1.28, +\infty[$$

- regra de decisão do teste:

rejeitar H_0 *ao nível de significância* 10% se $z_{obs} \in R_{0.1}$

- decisão:

$$z_{obs} = \frac{\frac{42}{120} - 0.3}{\sqrt{0.3(1 - 0.3)/120}} = 1.20 \notin R_{0.1}$$

pelo que a decisão é não rejeitar H_0 a 10%.

7.8 Utilizando o p-valor:

$$p - valor \overset{a}{\simeq} P(Z > 1.20|H_0) = 1 - \Phi(1.20) \approx 0.1151$$

dado que $p - valor \simeq 0.1151 \not< 0.1$ a decisão é não rejeitar H_0 para $\alpha = 0.1$ (e também para $\alpha = 0.05$ e $\alpha = 0.01$).

7.10

- informação amostral: $n = 100 \geq 30$ e $\hat{p} = \dfrac{14}{100}$
- pretendemos testar, com $\alpha = 0.05$, as hipóteses

$$H_0 : p \geq 0.1 \quad vs \quad H_1 : p < 0.1$$

- estatística de teste:

$$Z = \frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} \underset{H_0}{\overset{a}{\sim}} N(0,1)$$

- região critica (ou de rejeição) para $\alpha = 0.05$:

$$R_{0.05} \overset{a}{\simeq}]-\infty, -1.64[$$

- regra de decisão do teste:

  rejeitar H_0 ao nível de significância 5% se $z_{obs} \in R_{0.05}$
- decisão:

$$z_{obs} = \frac{\frac{14}{100} - 0.1}{\sqrt{0.1(1 - 0.1)/100}} = 1.33 \notin R_{0.05}$$

  pelo que a decisão é não rejeitar H_0 a 5%.

7.10 Utilizando o p-valor:

$$p - valor \overset{a}{\simeq} P(Z < 1.33|H_0) = \Phi(1.33) \approx 0.9082$$

dado que $p - valor \simeq 0.9082 \not< 0.05$ a decisão é não rejeitar H_0 para $\alpha = 0.05$ (e também para $\alpha = 0.01$ e $\alpha = 0.1$).

7.13

- informação amostral: $n = 6$ e $s^2 = 7.87 \times 10^{-6}$
- pretendemos testar, com $\alpha = 0.1$, as hipóteses

$$H_0 : \sigma^2 \geq 0.01 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 < 0.01$$

- estatística de teste:

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \underset{H_0}{\sim} \chi^2_{n-1}$$

- região critica (ou de rejeição) para $\alpha = 0.1$:

$$R_{0.1} =]0, \chi^2_{n-1,1-\alpha}[=]0, 1.610[$$

- regra de decisão do teste:

rejeitar H_0 *ao nível de significância* 10% se $x^2_{obs} \in R_{0.1}$

- decisão:

$$x^2_{obs} = \frac{(6-1) \times 7.87 \times 10^{-6}}{0.01} = 0.0039 \in R_{0.1}$$

pelo que a decisão é rejeitar H_0 a 10%.

7.13 Utilizando o p-valor:

$$p - valor = P(X^2 < 0.0039|H_0) = F_{\chi^2_5}(0.0039) \approx 0$$

(usando a tabela da distribuição χ^2 ou o software Rstudio para efetuar o cálculo)

dado que $p - valor \approx 0 < 0.1$ a decisão é rejeitar H_0 para $\alpha = 0.1$ (e também para $\alpha = 0.05$ e $\alpha = 0.01$).

7.14 (a)

- <u>informação amostral</u>: $n = 10$ e $s^2 = 1332/9$.
- pretendemos testar, com $\alpha = 0.01$, as hipóteses

$$H_0 : \sigma \geq 20 \quad vs \quad H_1 : \sigma < 20$$

- estatística de teste:

$$X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \underset{H_0}{\sim} \chi^2_{n-1}$$

- região critica (ou de rejeição) para $\alpha = 0.01$:

$$R_{0.01} =]0, 2.088[$$

- regra de decisão do teste:

rejeitar H_0 *ao nível de significância* 1% se $x^2_{obs} \in R_{0.01}$

- decisão:

$$x^2_{obs} = 3.33 \notin R_{0.01}$$

pelo que a decisão é rejeitar H_0 a 1%.

7.14 (b) Utilizando o p-valor:

$$p - valor = P(X^2 < 3.33|H_0) = F_{\chi^2_9}(3.33) \approx 0.05$$

(usando a tabela da distribuição χ^2 ou o software Rstudio para efetuar o cálculo)

dado que $p - valor \approx 0.05 \nless 0.01$ a decisão é não rejeitar H_0 para $\alpha = 0.01$ (a decisão seria contrária, ou seja rejeitar H_0, para $\alpha = 0.1$).