Nome:

N^{o} de aluno: Curso:

INSTRUÇÕES PARA O 2^{o} TESTE DE REPETIÇÃO DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C

LEIA ATENTAMENTE AS SEGUINTES INSTRUÇÕES ATÉ AO FIM

Hora de início do teste: 13.30 Duração: 2 horas (sem tolerância e sem intervalo)

Todas as respostas são dadas no enunciado que vos será distribuído pelo que não necessitam, nem podem, utilizar outras folhas de resposta.

O teste possui 7 folhas agrafadas, que **não podem** desagrafar, que para além desta primeira folha de instruções, é constituído por quatro grupos e por duas folhas em branco que se destinam a rascunho.

No cabeçalho da página 3 (Grupo I), devem preencher completamente os vossos dados pessoais no espaço para isso reservado: nome completo, curso e n^{o} de aluno. **O não preenchimento dos vossos dados pessoais conduz ao anulamento da prova**.

O Grupo I possui 6 perguntas de escolha múltipla. Devem selecionar de forma inequívoca a opção (única) de resposta. Respostas erradas **não são** penalizadas.

Nos Grupos II,III, IV as perguntas são de resposta aberta e são respondidas no próprio enunciado.

A cotação de cada pergunta está assinalada no início da mesma. Devem ter em atenção o espaço destinado à resposta de cada alínea e gerir esse espaço convenientemente (por exemplo, não utilizar letra ou símbolos matemáticos demasiado grandes). As folhas 6 e 7 estão em branco e destinam-se a ser utilizadas como rascunho e **não serão corrigidas**.

No final da prova, o aluno deverá pedir licença para entregar o teste, em seguida deverá colocar a prova, na mesma mesa onde se encontra a folha de presenças (que deverá assinar neste momento) em cima de outras provas que já tenham sido eventualmente entregues.

COTAÇÕES

Grupo I

Grupo II

1. a)

1. b)

Grupo III

1.

2.

Grupo IV

1.

2.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

2º TESTE DE REPETIÇÃO DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2020/2021
08 DE JULHO DE 2021

Nome:

Nº de aluno: Curso:

PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES DO GRUPO I ASSINALE COM X O QUADRADO CORRESPONDENTE À ALTERNATIVA CORRECTA.

GRUPO I

[*1,5 valores*] 1. O integral repetido

$$\int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} x^2 y \, dy \right) dx,$$

utilizando a ordem de integração inversa da considerada, pode ser escrito na forma:

☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1+\sqrt{1-y^2}} x^2 y \, dx \right) dy$ ☐ $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{1+\sqrt{1-y^2}} x^2 y \, dx \right) dy$

☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} x^2 y \, dx \right) dy$ ☐ $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} x^2 y \, dx \right) dy$

☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} x^2 y \, dx \right) dy$ ☐ $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{1-\sqrt{1-y^2}} x^2 y \, dx \right) dy$

[*1,5 valores*] 2. A área da superfície que admite as equações paramétrica

$$\begin{cases} x = 2\sin u \cos v, & \pi/6 \le u \le \pi/4 \\ y = 2\sin u \sin v, & 0 \le v \le 2\pi \\ z = 2\cos u \end{cases}$$

é:

☐ $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\pi$ ☐ $2(\sqrt{3}-\sqrt{2})\pi$ ☐ $4(\sqrt{3}-\sqrt{2})\pi$

☐ $2\sqrt{3}\pi$ ☐ $4\sqrt{2}\pi$ ☐ $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\pi$

[*1,5 valores*] 3. Considere o integral duplo

$$\int\int_A xy\, dxdy$$

em que $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1 \wedge x^2+(y-1)^2 \leq 1\}$. O integral considerado utilizando coordenadas polares pode ser calculado a partir do integral repetido:

☐ $\displaystyle\int_{-1}^{1}(\int_0^2 \rho^3 \sin\theta\cos\theta\, d\rho)d\theta$ ☐ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(\int_0^2 \rho^3 \sin\theta\cos\theta\, d\rho)d\theta$

☐ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(\int_1^2 \rho^2 \sin\theta\cos\theta\, d\rho)d\theta$ ☐ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(\int_1^2 \rho^3 \sin\theta\cos\theta\, d\rho)d\theta$

☐ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(\int_1^{2\sin\theta} \rho^2 \sin\theta\cos\theta\, d\rho)d\theta$ ☐ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi}(\int_1^{2\sin\theta} \rho^3 \sin\theta\cos\theta\, d\rho)d\theta$

[*1,5 valores*] 4. A porção da superfície cónica $x^2+y^2-4z^2=0$, $-1 \leq z \leq 0$, admite a parametrização, e tem por equação da normal:

☐ $\begin{cases} x = u\cos v,\ 0 \leq u \leq 1 \\ y = u\sin v,\ 0 \leq v \leq 2\pi \\ z = -u. \end{cases}$ e $\vec{N} = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + u\vec{k}.$

☐ $\begin{cases} x = u\cos v,\ 0 \leq u \leq 1 \\ y = u\sin v,\ 0 \leq v \leq 2\pi \\ z = -\frac{1}{2}u. \end{cases}$ e $\vec{N} = \frac{1}{2}u\cos v\vec{i} + \frac{1}{2}u\sin v\vec{j} + u\vec{k}.$

☐ $\begin{cases} x = u\cos v,\ 0 \leq u \leq 2 \\ y = u\sin v,\ 0 \leq v \leq 2\pi \\ z = -u. \end{cases}$ e $\vec{N} = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} - u\vec{k}.$

☐ $\begin{cases} x = u\cos v,\ 0 \leq u \leq 2 \\ y = u\sin v,\ 0 \leq v \leq 2\pi \\ z = -\frac{1}{2}u. \end{cases}$ e $\vec{N} = \frac{1}{2}u\cos v\vec{i} + \frac{1}{2}u\sin v\vec{j} + u\vec{k}.$

☐ $\begin{cases} x = u\cos v,\ 0 \leq u \leq 2 \\ y = u\sin v,\ 0 \leq v \leq 2\pi \\ z = -\frac{1}{2}u. \end{cases}$ e $\vec{N} = \frac{1}{2}u\cos v\vec{i} + \frac{1}{2}u\sin v\vec{j} - u\vec{k}.$

☐ $\begin{cases} x = u\cos v,\ 0 \leq u \leq 1 \\ y = u\sin v,\ 0 \leq v \leq 2\pi \\ z = -u. \end{cases}$ e $\vec{N} = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} - u\vec{k}.$

[*1,5 valores*] 5. O volume do domínio D limitado inferiormente pela superfície parabólica $z = x^2 + y^2$ e superiormente pela porção da superfície cónica $(z-2)^2 = x^2 + y^2$ que verifica $0 \leq z \leq 2$, pode ser calculado a partir do seguinte integral repetido:

$\square \int_{-1}^{1} \Big(\int_{-1}^{1} \Big(\int_{x^2+y^2}^{2-\sqrt{x^2+y^2}} dz \Big)\, dy \Big) dx,$ $\qquad$ $\square \int_{-1}^{1} \Big(\int_{-1}^{1} \Big(\int_{x^2+y^2}^{2-\sqrt{x^2+y^2}} dz \Big)\, dy \Big) dx$

$\square \int_{-1}^{1} \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big(\int_{2-\sqrt{x^2+y^2}}^{x^2+y^2} dz \Big)\, dy \Big) dx$ $\qquad$ $\square \int_{-1}^{1} \Big(\int_{-1}^{1} \Big(\int_{x^2+y^2}^{2+\sqrt{x^2+y^2}} dz \Big)\, dy \Big) dx$

$\square \int_{0}^{1} \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big(\int_{x^2+y^2}^{2+\sqrt{x^2+y^2}} dz \Big)\, dy \Big) dx$ $\qquad$ $\square \int_{-1}^{1} \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \Big(\int_{x^2+y^2}^{2-\sqrt{x^2+y^2}} dz \Big)\, dy \Big) dx$

[*1,5 valores*] 6. Seja L uma linha admitindo a representação paramétrica regular

$$\begin{cases} x = e^{\sin t} \\ y = e^{\cos t} \\ z = log(1+\sin t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

percorrida no sentido crescente do parâmetro t, $\varphi(x,y,z) = xye^{yz} + xyz$ e

$$\vec{u} = u_1(x,y,z)\vec{i} + u_2(x,y,z)\vec{j} + u_3(x,y,z)\vec{k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

Seja

$$I = \int_L u_1(x,y,z)dx + u_2(x,y,z)dy + u_3(x,y,z)dz.$$

Então:

$\square\ I = \frac{1}{e}$ $\quad$ $\square\ I = 0$ $\quad$ $\square\ I = \frac{1}{e} - e$ $\quad$ $\square\ I = -\frac{1}{e} + e$ $\quad$ $\square\ I = e$ $\quad$ $\square\ I = e + \frac{1}{e}$

2ºTESTE DE REPETIÇÃO DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C 2020/2021
08 DE JULHO DE 2021

GRUPO II

1. Considere a linha L fronteira do conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x \ \wedge \ y \leq 2 - x^2 \ \wedge \ y \geq 0\}$$

percorrida no sentido direto.

[*2 valores*] a) Determine o integral $\int_C x^2 dy$, sendo C o arco da linha L pertencente à parábola $y = 2 - x^2$ percorrido no sentido induzido pelo sentido direto de L.

1 a). Resposta:

[*2 valores*] b) O integral $\int_{L^+} x^2 dy$, pode ser determinado a partir do cálculo de um integral duplo. Indique, detalhadamente, o integral repetido que teria de calcular para determinar o integral duplo considerado. (**Não calcule o integral repetido indicado**)

1 b) Resposta:

GRUPO III

[*2 valores*] 1. Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ o domínio fechado, limitado superiormente pela superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(z \geq 0)$ e inferiormente pela superfície cónica $z = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^2+y^2}$. Utilizando as coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = r \sin u \cos v \\ y = r \sin u \sin v \\ z = r \cos u \end{cases}$$

indique o integral repetido que teria de calcular para determinar o volume do domínio D. (**Não calcule o integral repetido indicado**.)

1. Resposta:

[*2 valores*] 2. Mostre que o campo vetorial

$$\vec{u}(x,y,z) = \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\vec{i} + \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\vec{j} + ze^{z^2-1}\vec{k}$$

definido no conjunto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \;\wedge\; y > 0 \;\wedge\; z > 0\}$ é conservativo. Determine a sua função potencial que no ponto $(\sqrt{8}, \sqrt{8}, 1)$ toma o valor zero.

2. Resposta:

GRUPO IV

[*2 valores*] 1. Seja S a superfície que limita o domínio fechado, limitado inferiormente pela superfície parabólica $z = 4(x^2 + \frac{y^2}{2})$ e superiormente pela superfície $x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{8} = 1$. O fluxo do campo $\vec{w} = xz\vec{k}$ na face exterior da superfície S pode ser calculado a partir de um integral triplo. Utilizando a mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z, \end{cases}$$

indique o integral repetido que teria de calcular para determinar o fluxo considerado. (**Não calcule o integral repetido indicado**.)

1. Resposta:

[*1 valor*] 2. Sejam $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e $r = ||\vec{r}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, definidos num conjunto aberto $D \subset \mathbb{R}^3$ que tem a origem como ponto exterior. Determine a expressão geral das funções $f(||\vec{r}||)$ continuamente deriváveis que verificam

$$div(f(||\vec{r}||)\,\vec{r}) = 0.$$

2. Resposta:

.

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*

Folha de rascunho-*não é corrigida*