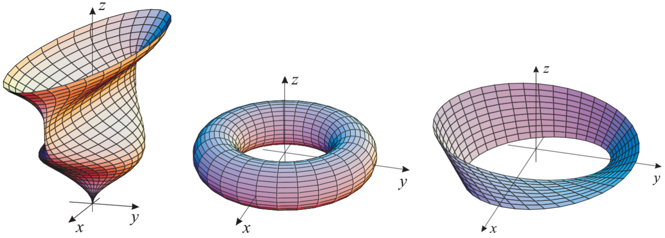
Superfícies

O conjunto $\sigma \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma superfície se existir uma função contínua

$$\vec{r} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (u,v) \mapsto \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

tal que $\sigma = \vec{r}(D)$. Diz-se que $\vec{r}$ é uma parametrização de σ. Se $\vec{r}$ for de classe C^1, diz-se que a superfície σ é de classe C^1.



Exemplo - Gráfico de uma função contínua

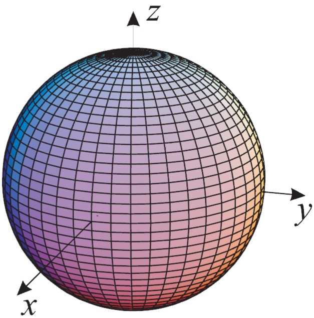
Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e

$$\sigma = G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \wedge z = f(x, y)\}.$$

Esta superfície pode ser parametrizada por

$$\vec{r}(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in D.$$

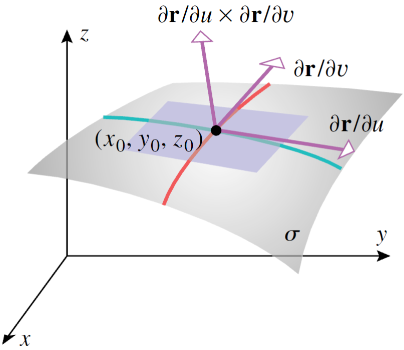
Exemplo - Esfera de raio R



$$\vec{r}(u,v) = (R\sin v\cos u, R\sin v\sin u, R\cos v), \quad (u,v)\in[0,2\pi]\times[0,\pi].$$

Superfícies paramétricas regulares

Diz-se que σ é uma superfície paramétrica regular numa região D do plano uOv se $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) = (\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v))$ e $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) = (\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v))$ forem contínuas (isto é, σ é de classe C^1)



Integrais de superfície

Seja σ uma superfície paramétrica regular cuja equação vetorial é

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

onde (u,v) varia numa região D do plano uOv. Se $f : \sigma \to \mathbb{R}$ for contínua, então o integral de f em σ é definido por

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)\, dS$$

$$= \iint_{D} f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv.$$

Área de uma superfície

A área de uma superfície σ é dada por

$$A(\sigma) = \iint_{\sigma} 1 dS.$$

Exemplo

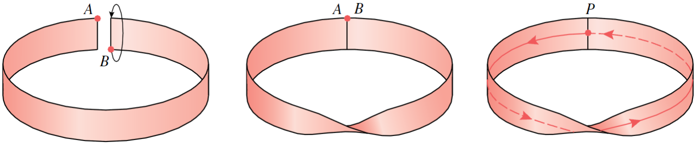
Exemplo

Determine a área da porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *acima do plano* $z = 1$.

Resolução:

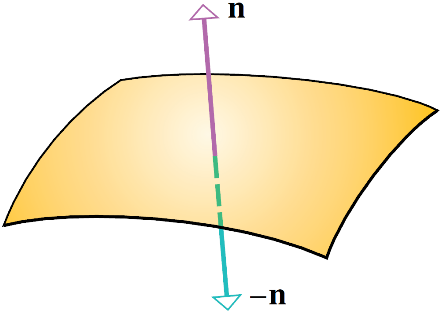
Banda de Möbius

A banda de Möbius e a superfície com apenas um lado:



Superfícies orientáveis

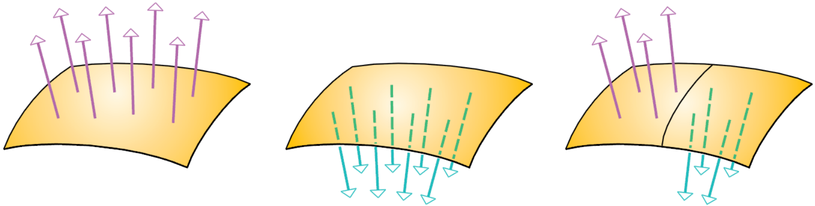
Diz-se que uma superfície de dois lados é orientável e que uma superfície com um único lado é não orientável.



Os vetores normais $\vec{n}$ e $-\vec{n}$ apontam para lados opostos da superfície orientável e, portanto, servem distinguir dois lados.

Superfície orientáveis (continuação)

Pode ser provado que se σ for uma superfície orientável regular, então é sempre possível escolher o sentido de $\vec{n}$ em cada ponto de modo que $\vec{n} = \vec{n}(x, y, z)$ seja contínuo na superfície



Uma superfície orientável regular tem só duas orientações. Entretanto, não podemos criar uma terceira orientação misturando as duas porque isso produz pontos na superfície nos quais há mudança abrupta de sentido.

Fluxo de um campo vetorial

O fluxo de um campo vetorial $\vec{F}$ através de uma superfície σ regular orientada pelo vetor normal $\vec{n}$ à superfície é definido por

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS.$$

O vetor normal unitário principal a uma superfície parametrizada

Se uma superfície paramétrica σ for o gráfico de

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad \text{e se}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) & \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix} \neq \vec{0}$$

num ponto da superfície, então o vetor normal unitário principal à superfície naquele ponto é definido por

$$\vec{n}(u,v) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v)}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right\|}.$$

Fluxos através de superfícies paramétricas orientadas positivamente

Diz-se que uma superfície regular σ parametrizada por

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in D,$$

é orientada positivamente se a sua orientação é definida pelo vetor normal unitário principal $\vec{n}(u,v)$. Neste caso o fluxo de um campo $\vec{F}$ através de σ é dado por

$$\begin{aligned}\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS &= \iint_{D} \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv \\ &= \iint_{D} \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right) du\, dv.\end{aligned}$$

Fluxos através de superfícies paramétricas orientadas negativamente

Diz-se que uma superfície regular σ parametrizada por

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in D,$$

é orientada negativamente se a sua orientação é definida pelo vetor oposto ao normal unitário principal $\vec{n}(u,v)$. Neste caso o fluxo de um campo $\vec{F}$ através de σ é dado por

$$\begin{aligned}\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS &= -\iint_{D} \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \vec{n}(u,v) \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right\| du\, dv \\ &= -\iint_{D} \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \right) du\, dv.\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Considere a superfície

$$\sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 9 - 3x^2 - 3y^2 \wedge z \geq 3\}$$

orientada com a normal dirigida para cima. Determine o fluxo do campo vetorial $\vec{\phi}(x, y, z) = y^2\vec{j} + (1 - 2yz)\vec{k}$ *através da superfície* σ.

Resolução:

$$\iint_\sigma \vec{\phi}\cdot\vec{n}dS = \iint_D (0, v^2, 1-2v(9-3u^2-3v^2))\cdot(6u, 6v, 1)dudv$$
$$\iint_D 6v^3 + 1 - 2v(9-3u^2-3v^2)dudv, \tag{1}$$

onde $D = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : \ u^2+v^2\leq 2\}$.

$$\iint_\sigma \vec{\phi}\cdot\vec{n}dS = 2\pi.$$