Capítulo 3 - Principais Distribuições

Resolução de alguns exercícios

Distribuição Hipergeométrica

3.1 Seja X a variável aleatória que representa o número de latas fora do prazo de validade em 6, então $X \sim H(50,7,6)$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{7}{0}\binom{43}{6}}{\binom{50}{6}} = 0.6164.$$

3.2 Seja X a variável aleatória que representa o número de praias em bom estado em 10, então $X \sim H(100,85,10)$.

a)

$$P(X = 7) = \frac{\binom{85}{7}\binom{15}{3}}{\binom{100}{10}} = 0.1297.$$

b)

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \sum_{i=8}^{10} \frac{\binom{85}{i}\binom{15}{10-i}}{\binom{100}{10}} = 0.8295.$$

c) Seja Y a variável aleatória que representa o número de praias em bom estado em 5, então $Y \sim H(100,85,5)$.

$$P(Y = 5) = \frac{\binom{85}{5}\binom{15}{0}}{\binom{100}{5}} = 0.4357$$

d)

$$E(X) = \frac{10 \times 85}{100} = 8.5 \text{ praias}.$$

3.4 Seja X a variável aleatória que representa o número de pessoas que pedem refeição vegetariana em 10, então $X \sim Bin(10, 0.2)$.

a) $P(X = 0) = \binom{10}{0} \times 0.2^0 \times 0.8^{10} = 0.1074.$

b) $P(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0.2^{10} \times 0.8^0 = 1.024 \times 10^{-7}.$

c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.1074 = 0.8926.$

3.6 Seja X a variável aleatória que representa o número de copos defeituosos em 50, então $X \sim Bin(50, 0.05)$.

a) $P(X = 0) = \binom{50}{0} \times 0.05^0 \times 0.95^{50} = 0.0769.$

b) $P(X = 1) = \binom{50}{1} \times 0.05^1 \times 0.95^{49} = 0.2025.$

c) $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.2794.$

d) $E(X) = 50 \times 0.05 = 2.5 \ \text{ copos}.$

$V(X) = 50 \times 0.05 \times 0.95 = 2.375 \ \text{ copos}^2.$

$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2.375} = 1.5411 \ \text{ copos}.$

Distribuição Poisson

3.8 Seja X a variável aleatória que representa o número de chamadas de emergência que o serviço recebe por dia, então $X \sim Poisson(\lambda)$. Sabe-se que $P(X = 0) = 0.15$ pelo que

$$P(X = 0) = 0.15 \Leftrightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = 0.15 \Leftrightarrow \lambda = -\log 0.15 \approx 1.897.$$

a)

$$P(X = 1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} = 0.2846.$$

b)

$$P(X = 2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} = 0.2699.$$

c)

$$P(X \leq 3) = P(X = 0)+P(X = 1)+P(X = 2)+P(X = 3) = \sum_{i=0}^{3} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = 0.8752.$$

d)

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 0.1248.$$

e)

$$\mu = E(X) = 1.897 \quad , \quad \sigma = \sigma(X) = 1.3774 \quad , \quad CV(X) = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = 72.7\%.$$

Distribuição Poisson

3.13 Seja X a variável aleatória que conta no número de peças quebradas por empregado por mês, sendo a taxa de ocorrências $\lambda = 1.5$ peças por empregado por mês. Temos ainda que $X \sim Poisson(1.5)$.

a) Uma vez que a empresa arca com o prejuízo até um máximo de 3 peças por empregado, então a probabilidade pedida é

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \sum_{k=0}^{3} P(X = k) = 1 - \sum_{k=0}^{3} \frac{e^{-1.5} 1.5^k}{k!} \simeq 0.0656$$

b) Seja agora Y a v.a. que representa o prejuízo da empresa por empregado e por mês. Começamos por identificar a função massa de probabilidade de Y. Ora, como

$$Y : \begin{cases} 0 & 40 & 80 & 120 \\ P(X=0) & P(X=1) & P(X=2) & P(X \geq 3) \end{cases}$$

vem então

$$Y : \begin{cases} 0 & 40 & 80 & 120 \\ 0.2231 & 0.3347 & 0.2510 & 0.1912 \end{cases}$$

pelo que se tem então

- $E(X) = 0 \times 0.2231 + 40 \times 0.3347 + 80 \times 0.2510 + 120 \times 0.1912 = 56.412 \text{ cent} \simeq 0.56$ €
- $E(X^2) = 0^2 \times 0.2231 + 40^2 \times 0.3347 + 80^2 \times 0.2510 + 120^2 \times 0.1912 = 4895.2 \text{ cent}$
- $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 4895.2 - 56.412^2 \simeq 1712.89 \text{ cent}^2$
- $\sigma = \sqrt{V(X)} = 41.39 \text{ cent}$

Distribuição Exponencial

3.14 Sabe-se que o tempo (minutos) que a D. Hermínia demora a atender cada um dos seus clientes é uma v.a. exponencial de valor médio 3 minutos, $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$.

$$E(X) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = 3 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}.$$

a) Para $x \leq 0$, $F(x) = P(X \leq x) = 0$;
Para $x > 0$,

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}\mathrm{d}t \\ &= \left[-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t}\right]_0^x = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} \end{aligned}$$

Pelo que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} & , \quad x > 0\,. \end{cases}$$

b) $P(X > 5) = 1 - F(5) \simeq 0.1889$

c) $P(X > 3) = 1 - F(3) \simeq 0.3679$

d) $P(X > 5 | X \geq 2) = \dfrac{P(X > 5)}{P(X \geq 2)} = \dfrac{1 - F(5)}{1 - F(2)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \simeq 0.3679$

ou, usando a propriedade da falta de memória da distribuição exponencial

$P(X > 5 | X \geq 2) = P(X > 3) \simeq 0.3679$

e) $CV(X) = \dfrac{\sigma}{\mu} \times 100 = \dfrac{\sqrt{1/(1/3)^2}}{3} \times 100 = 100\%$

3.15 Seja X o tempo que decorre entre chegadas consecutivas de 2 clientes, $X \sim Exp(2)$. Na resolução deste exercício vamos considerar a função distribuição de X que pode ser obtida de forma similar à utilizada no exercício anterior.

a) $P(X > 1) = 1 - F(1) = \mathrm{e}^{-2} \simeq 0.1353.$

b) $P(X < 4) = F(4) = 1 - \mathrm{e}^{-8} \simeq 0.9997.$

c) $P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) \simeq 0.1170.$

3.16 Seja X uma variável aleatória com distribuição $X \sim N(100, 20^2)$.

a)

$$\begin{aligned} P(X < 125) &= P\left(\frac{X-100}{20} < \frac{125-100}{20}\right) \\ &= P(Z < 1.25) = \Phi(1.25) \simeq 0.8944\,. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(X > 115) &= 1 - P(X \leq 115) = 1 - P\left(\frac{X-100}{20} \leq \frac{115-100}{20}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.75) \simeq 0.2266\,. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(60 < X < 140) &= P(X \leq 140) - P(X \leq 60) \\ &= P\left(\frac{X-100}{20} \leq \frac{140-100}{20}\right) - P\left(\frac{X-100}{20} \leq \frac{60-100}{20}\right) \\ &= \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) - (1 - \Phi(2)) \simeq 0.9544\,. \end{aligned}$$

3.24 Sabe-se que o peso das pessoas que utilizam o elevador é uma variável aleatória com distribuição Normal de valor médio 70 kg e desvio padrão σ, $X \sim N(70, \sigma^2)$.

a)

$$
\begin{aligned}
P(X < 60) = 0.0228 \quad & \Leftrightarrow \quad P\left(\frac{X-70}{\sigma} < \frac{60-70}{\sigma}\right) = 0.0228 \\
& \Leftrightarrow \quad P\left(Z < -\frac{10}{\sigma}\right) = 0.0228 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(-\frac{10}{\sigma}\right) = 0.0228 \\
& \Leftrightarrow \quad 1 - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0.0228 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) = 0.9772 \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{10}{\sigma} = \Phi^{-1}(0.9772) \Leftrightarrow \frac{10}{\sigma} \simeq 2.0 \Leftrightarrow \sigma = 5\,.
\end{aligned}
$$

b) Seja X_i a variável aleatória que representa o peso da pessoa i, com $X_i \sim N(70, 5^2)$, $i = 1, \ldots, 6\,.$
Assumindo que as variáveis aleatórias X_i são independentes temos que

$$T = X_1 + \cdots + X_6 \sim N(420, 150)\,.$$

Assim,

$$P(T > 450) = P\left(\frac{T-420}{\sqrt{150}} > \frac{450-420}{\sqrt{150}}\right) = P(T > 2.45) = 1 - \Phi(2.45) \simeq 0.0071\,.$$

3.17 Seja X uma variável aleatória com distribuição $X \sim N(12, 2)$.

a)

$$
\begin{aligned}
P(X < c) = 0.1 \quad & \Leftrightarrow \quad P\left(\frac{X-12}{\sqrt{2}} < \frac{c-12}{\sqrt{2}}\right) = 0.1 \\
& \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{c-12}{\sqrt{2}}\right) = 0.1 \;\Leftrightarrow\; 1 - \Phi\left(\frac{12-c}{\sqrt{2}}\right) = 0.1 \\
& \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{12-c}{\sqrt{2}}\right) = 0.9 \;\Leftrightarrow\; \frac{12-c}{\sqrt{2}} = \Phi^{-1}(0.9) \\
& \Leftrightarrow \quad \frac{12-c}{\sqrt{2}} = \Phi^{-1}(0.9) \simeq 1.28 \;\Leftrightarrow c = 10.1898
\end{aligned}
$$

3.17 b)

$$
\begin{aligned}
P(X > c) = 0.25 \quad &\Leftrightarrow \quad P\left(\frac{X-12}{\sqrt{2}} > \frac{c-12}{\sqrt{2}}\right) = 0.25 \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - \Phi\left(\frac{c-12}{\sqrt{2}}\right) = 0.25 \\
&\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{c-12}{\sqrt{2}}\right) = 0.75 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{c-12}{\sqrt{2}} = \Phi^{-1}(0.75) \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{c-12}{\sqrt{2}} \simeq 0.67 \Leftrightarrow \quad c = 12.9475
\end{aligned}
$$

c)

$$P(12 - c < X < 12 + c) = 0.95 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \; P\left(\frac{X-12}{\sqrt{2}} < \frac{12+c-12}{\sqrt{2}}\right) - P\left(\frac{X-12}{\sqrt{2}} \leq \frac{12-c-12}{\sqrt{2}}\right) = 0.95$$

$$\Leftrightarrow \; 2\Phi\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right) - 1 = 0.95 \; \Leftrightarrow \; \Phi\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right) = 0.975 \Leftrightarrow \; \frac{c}{\sqrt{2}} = \Phi^{-1}(0.975)$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{c}{\sqrt{2}} \simeq 1.96 \Leftrightarrow c = 2.7719$$

Distribuição Normal

3.25 Sabe-se que $X \sim N(5,1)$, $Y \sim N(10,2^2)$ e $W \sim N(7,2^2)$ e que X, Y e W são variáveis aleatórias independentes.

a)

$$\begin{aligned} P(3 < X < 7) &= P\left(\frac{X-5}{1} < \frac{7-5}{1}\right) - P\left(\frac{X-5}{1} \leq \frac{3-5}{1}\right) \\ &= 2\Phi(2) - 1 \simeq 0.9544. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(Y > h) = 0.025 &\Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{h-10}{2}\right) = 0.025 \\ &\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{h-10}{2}\right) = 0.975 \\ &\Leftrightarrow \frac{h-10}{2} = \Phi^{-1}(0.975) \\ &\Leftrightarrow \frac{h-10}{2} \simeq 1.96 \\ &\Leftrightarrow h = 13.92 \end{aligned}$$

3.25 c) Pretende-se calcular

$$P(X + W > Y) = P(X + W - Y > 0).$$

Dado que X, Y e W são variáveis aleatórias independentes temos que

$$S = X + W - Y \sim N(2, 9)\,.$$

Assim,

$$P(S > 0) = P\left(\frac{S-2}{3} > \frac{0-2}{3}\right) = P\left(Z < \frac{2}{3}\right) \simeq \Phi(0.67) \simeq 0.7486.$$