FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

2º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C- REPETIÇÃO 2020/2021
28 DE JANEIRO DE 2021

VERSÃO 1

PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES DO GRUPO I ESCOLHA A LETRA CORRESPONDENTE À ÚNICA ALTERNATIVA CORRECTA (de A a F).

GRUPO I

[*1,5 valores*] 1. O integral repetido

$$\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-9x^2}} \cos(xy)\ dy \right) dx,$$

utilizando a ordem de integração inversa da apresentada, pode ser calculado a partir de:

A. $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}} \cos(xy)\ dx \right) dy + \int_1^3 \left(\int_0^{\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}} \cos(xy)\ dx \right) dy,$

B. $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{9-9y^2}} \cos(xy)\ dx \right) dy + \int_1^3 \left(\int_0^{3\sqrt{1-y^2}} \cos(xy)\ dx \right) dy,$

C. $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}} \cos(xy)\ dx \right) dy + \int_1^3 \left(\int_0^{\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}} \cos(xy)\ dx \right) dy,$

D. $\int_0^1 \left(\int_0^{3\sqrt{1-y^2}} \cos(xy)\ dx \right) dy + \int_1^3 \left(\int_0^{3\sqrt{1-y^2}} \cos(xy)\ dx \right) dy,$

E. $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}} \cos(xy)\ dx \right) dy + \int_1^3 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}} \cos(xy)\ dx \right) dy,$

F. $\int_0^1 \left(\int_0^{3\sqrt{1-y^2}} \cos(xy)\ dx \right) dy + \int_1^3 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{9-9y^2}} \cos(xy)\ dx \right) dy,$

[*1,5 valores*] 2. Seja $D \subset \mathbb{R}^3$ o domínio fechado, limitado superiormente pelo parabolóide $z = 1 - (x^2 + y^2)$ e inferiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$. O volume do domínio D pode ser calculado a partir do seguinte integral triplo:

A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\int_{-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} (\int_{1-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} dz)dy)dx$

B. $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\int_{-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} (\int_{x^2+y^2}^{1-(x^2+y^2)} dz)dy)dx$

C. $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\int_{-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} (\int_{x^2+y^2}^{1-(x^2+y^2)} (1-2(x^2+y^2))\, dz)dy)dx$

D. $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} (\int_{x^2+y^2}^{1-(x^2+y^2)} dz)dy)dx$

E. $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\int_{-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} (\int_{x^2+y^2}^{1-(x^2+y^2)} (2(x^2+y^2)-1)\, dz)dy)dx$

F. $\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\int_{-\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2}-x^2}} (\int_{1-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} dz)dy)dx$

[*1,5 valores*] 3. Seja L uma linha admitindo a representação paramétrica regular

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \qquad\qquad 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2} \\ z = log(1+t) \end{cases}$$

percorrida no sentido crescente do parâmetro t, $\varphi(x,y,z) = e^{xy+yz+zx}$ e

$$\vec{u} = u_1(x,y,z)\vec{i} + u_2(x,y,z)\vec{j} + u_3(x,y,z)\vec{k} = \nabla\varphi(x,y,z).$$

Seja

$$I = \int_L u_1(x,y,z)dx + u_2(x,y,z)dy + u_3(x,y,z)dz.$$

Então:

A. $I = -\dfrac{\pi}{2}$ **B.** $I = 0$ **C.** $I = \dfrac{\pi}{2}$ **D.** $I = \pi$ **E.** $I = \dfrac{3}{2}\pi$ **F.** $I = 2\pi$

[*1,5 valores*] 4. Seja $g(x,y,z)$ um campo escalar, definido e admitindo derivadas parciais contínuas até à segunda ordem num subconjunto aberto A de $\mathbb{R}^3$. Uma expressão de $\nabla \cdot \nabla g^2$ em função de g, $\|\nabla g\|$ e $\nabla^2 g$, é:

A. $2\|\nabla g\| + 2\nabla^2 g$ **B.** $2g\|\nabla g\| + 2\nabla^2 g$ **C.** $2g\|\nabla g\| + 2g\nabla^2 g$

D. $2\|\nabla g\|^2 + 2g\nabla^2 g$ **E.** $2g\|\nabla g\|^2 + 2g\nabla^2 g$ **F.** $2\|\nabla g\|^2 + 2\nabla^2 g$

2º TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II-C- REPETIÇÃO 2020/2021
28 DE JANEIRO DE 2021

VERSÃO 1

GRUPO II

[*3 valores*] 1. Considere o conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} \geq 1 \wedge \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \wedge y \geq 0\}$ e seja L a fronteira de A percorrida no sentido direto. Determine

$$\int_L e^{x^2} dx + x^2 y \, dy$$

a partir do cálculo de um integral duplo. (Sug: Utilize coordenadas elípticas.)

[*3 valores*] 2. Determine o volume do domínio $D \subset \mathbb{R}^3$ fechado, limitado lateralmente pela superfície cónica $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ e compreendido entre os planos $z = 2$ e $z = 3$, utilizando as coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z. \end{cases}$$

GRUPO III

[*3 valores*] 1. Determine a área da superfície de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = \sin u \cos v, & \frac{\pi}{6} \leq u \leq \frac{\pi}{3} \\ y = \sin u \sin v, & 0 \leq v \leq 2\pi \\ z = \cos u. & \end{cases}$$

Identifique a superfície.

[*3 valores*] 2. Determine $\displaystyle\iint_S \nabla \times (y\vec{i} + z\vec{j}) \,.\, \vec{n} dS$,

na face "exterior"da porção da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ com $-1 \leq z \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, **através do cálculo de um integral curvilíneo**.

[*2 valores*] 3. Determine e caracterize os pontos de estacionaridade da função

$$f(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2) - \int_0^x \frac{2t}{1+t^4} dt.$$