Equações com derivadas parciais

Pode dizer-se que uma parte significativa de problemas em mecânica de fluidos e de sólidos, teoria eletromagnética, mecânica quântica e outras áreas da física são modelados por equações que envolvem funções de duas ou mais variáveis e suas derivadas parciais.
Uma equação envolvendo derivadas parciais de uma função desconhecida de duas ou mais variáveis é chamada *equação com derivadas parciais* (EDP). À semelhança das equações diferenciais ordinárias, chama-se *ordem* de uma equação diferencial com derivadas parciais à ordem da derivada parcial mais elevada que aparece na equação. Diz-se que uma equação com derivadas parciais é *linear* se for linear na função incógnita e nas suas derivadas parciais. Se cada termo da equação contiver ou a função incógnita ou uma das suas derivadas parciais diz-se que a equação é *homogénea*; caso contrário diz-se não homogénea.

Exemplo

As equações

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y, \tag{0.1}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cos(2x + y), \tag{0.2}$$

e

$$\left(3x - \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)^2 - y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \left(1 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right), \tag{0.3}$$

são exemplos de equações com derivadas parciais.

As equações com derivadas parciais (**??**), (**??**) e (**??**) são, respectivamente, de ordens dois, três e quatro.

Exemplo

As equações com derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{0.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x \frac{\partial u}{\partial y} = ye^x \tag{0.5}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3xy \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0 \tag{0.6}$$

são exemplos de equações lineares de segunda ordem.

Exemplo (continuação)

A equação

$$\frac{\partial u}{\partial x} + xy^2 u \frac{\partial u}{\partial y} = \cos x \tag{0.7}$$

*é uma equação diferencial de primeira ordem, não linear. As equações (**??**) e (**??**) são homogénea e as equações (**??**) e (**??**) são não homogéneas.*

Neste capítulo vamos estudar equações com derivadas parciais lineares de segunda ordem. Atendendo à sua importância prática serão dados métodos que permitirão resolver a *equação da corda vibrante*, a *equação do calor* e a *equação de Laplace*.

Uma equação com derivadas parciais linear de segunda ordem, na função incógnita $u(x, y)$ é uma equação da forma

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + \\ E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + F(x,y)u = G(x,y),$$

onde A, B, C, D, E, F e G são funções de x e y, com A, B, C não simultaneamente identicamente nulas.

Uma função $u(x, y)$ diz-se uma solução da equação considerada se possuir derivadas parciais contínuas até à segunda ordem e satisfizer a equação em alguma região R do plano XOY.
As EDP's lineares de segunda ordem classificam-se de acordo com os valores que $\Delta = B^2 - 4AC$ toma. Assim a equação dir-se-á *elíptica*, *parabólica* ou *hiperbólica* se $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta > 0$, respetivamente (uma mesma equação pode ser de tipos diferentes em diferentes regiões do plano).

Exemplo

1. *A equação da corda vibrante*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c \quad \textit{constante não nula.}$$

   Como $\Delta = B^2 - 4AC = 4c^2 > 0$ *a equação é hiperbólica em* $\mathbb{R}^2$.

2. *A equação do calor*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

   com c *constante é parabólica em* $\mathbb{R}^2$ *[verifique].*

3. *A equação de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

   é elíptica em $\mathbb{R}^2$ *[verifique].*

Exemplo

A equação de Tricomi

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

é uma equação linear de segunda ordem homogénea. Trata-se de uma equação elíptica se $y > 0$ *e hiperbólica se* $y < 0$.

Em geral a totalidade das soluções de uma equação com derivadas parciais é um conjunto extremamente vasto, com soluções completamente distintas umas das outras.

Exemplo

A equação de Laplace bidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

tem, para além de outras, as seguintes soluções:

$$u_1(x, y) = e^x cosy, \quad u_2(x, y) = x^2 - y^2, \quad u_3(x, y) = log(x^2 + y^2).$$

Com efeito, considerando por exemplo a função $u_1(x, y) = e^x \cos y$, *tem-se que*

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + \frac{\partial}{\partial y}(-e^x \sin y) = e^x \cos y - e^x \cos y = 0.$$

$\square$

Em geral para que uma solução de uma dada equação de derivadas parciais descreva um fenómeno físico específico é necessário acrescentar alguma informação adicional.
Por vezes pretende-se que a solução seja válida num certo domínio verificando certas condições particulares na fronteira desse domínio. Neste caso diz-se que temos um problema com *condições de fronteira*.
Noutros casos, por exemplo, envolvendo a variável temporal t, é usual impor condições na solução pretendida relativas ao início do fenómeno a descrever, isto é, quando $t = 0$. Neste caso diz-se que temos um problema com *condições iniciais*.

Método de separação de variáveis

De entre os vários métodos que permitem resolver EDP's lineares iremos utilizar o que é conhecido por *método de separação de variáveis*, o qual assume que, sendo $u(x, y)$ a função incógnita, esta pode ser escrita na forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Admitindo soluções desta forma, veremos que em certos casos é possível reduzir uma EDP linear de duas variáveis a duas equações diferenciais lineares ordinárias.

Exemplo

Considere-se a equação diferencial com derivadas parciais

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

Procuremos uma solução da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$. *Calculando* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ *e substituíndo na equação obtém-se*

$$X'(x)Y(y) + X(x)Y'(y) = X(x)Y(y),$$

ou ainda (omitindo as variáveis x *e* y*)*

$$\frac{X'}{X} = 1 - \frac{Y'}{Y}.$$

Exemplo (continuação)

O membro esquerdo desta última equação é função apenas da variável x enquanto que o direito depende apenas da variável y; este facto implica que cada um dos termos tenha de ser constante. Designando esta constante por K obtêm-se as duas equações diferenciais lineares ordinárias de primeira ordem

$$X' - KX = 0 \quad e \quad Y' + (K-1)Y = 0.$$

Estas equações têm por solução $X(x) = c_1 e^{Kx}$ e $Y(y) = c_2 e^{(1-K)y}$, respetivamente. O método de separação de variáveis permitiu assim obter a solução

$$u(x, y) = ce^{K(x-y)+y},$$

em que c é uma constante arbitrária. $\square$

Princípio da sobreposição de soluções

Suponhamos que $u_1, u_2, \cdots, u_n$ são n soluções de uma equação com derivadas parciais linear homogénea, e com condições de fronteira também homogéneas. Então a função

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i,$$

com c_1, c_2,...,u_n constantes arbitrárias, também é solução da equação e verifica as condições de fronteira consideradas.
Se $u_1, u_2, \cdots, u_n, \ldots$ são uma infinidade numerável de soluções de uma equação com derivadas parciais linear homogénea, e com condições de fronteira também homogéneas assumiremos "formalmente" que a equação admite uma solução da forma

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i.$$

Equação das ondas unidimensional (corda vibrante)

A equação usualmente designada por equação das ondas é uma equação que ocorre frequentemente em fenómenos envolvendo a propagação de ondas em meio contínuo (ondas acústicas, ondas eletromagnéticas, ondas sísmicas...). Provavelmente o caso mais simples de visualizar é o das ondas mecânicas. Considere-se uma corda perfeitamente elástica de comprimento L com massa homogénea, fixa sob tensão em dois pontos do eixo dos xx - digamos $x = 0$ e $x = L$. Suponhamos que a corda só descreve movimentos transversais no plano vertical de pequena amplitude, que a tensão a que está sujeita tem magnitude constante e é tal que permite desprezar a força da gravidade. Suponhamos que no instante $t = 0$ é exercida uma distorção na corda e, em seguida, esta é deixada a vibrar livremente. Seja $u(x, t)$ o deslocamento (deflexão) na vertical de cada ponto da corda medido a partir do eixo dos xx num instante $t > 0$.

A equação a que $u(x,t)$ obedece é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \;\; t > 0$$

com $c^2 = T/\rho$ constante; T designa a magnitude da tensão e ρ a massa por unidade de comprimento.
Tendo em conta que a corda está fixa nos extremos têm-se as condições de fronteira:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Supondo que a função $f(x)$ que define a deflexão inicial é uma função contínua em $[0,L]$, que $f(0) = f(L) = 0$ e que a velocidade inicial é definida pela função $g(x) = 0$ para $x \in [0,L]$, obtêm-se as condições iniciais:

$$u(x,0) = f(x) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Iremos resolver esta equação seguindo o *Método de Fourier*, que pode ser esquematizado nos três seguintes passos:

1. Utilizando o método de separação das variáveis, isto é, admitindo-se que a equação tem soluções da forma $u(x, y) = X(x)Y(y)$ obtêm-se duas equações diferenciais lineares ordinárias.
2. Resolvem-se as equações obtidas no ponto anterior com as condições resultantes das condições homogéneas do problema inicial.
3. Aplicando o princípio da sobreposição de soluções obtém-se uma solução "formal" da equação satisfazendo também as condições não homogéneas.

Passemos à resolução da equação seguindo os passos indicados:

1. Admitindo que $u(x,t) = X(x)T(t)$ obtém-se por substituição na equação que

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t).$$

Esta equação pode ser escrita na forma

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = k, \quad k \ \text{ constante}$$

uma vez que $\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ é apenas função de x, e $\dfrac{T''(t)}{T(t)}$ é apenas função de t. Obtém-se as duas equações diferenciais homogéneas de segunda ordem

$$X''(x) - kX(x) = 0 \quad \text{e} \quad T''(t) - c^2 kT(t) = 0.$$

2. Pretende-se, em seguida, determinar soluções das equações diferenciais anteriores com as condições que resultam das condições homogéneas

$$u(0,t) = 0 \ \text{ e } \ u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L$$

e que não conduzam à solucão trivial $u(x,t) \equiv 0$.
A condição $u(0,t) = 0, \ t \geq 0$ conduz a

$$X(0)T(t) = 0, \ t \geq 0$$

o que permite concluir que

$$X(0) = 0$$

uma vez que $T(t) = 0$, para todo o $t \geq 0$ conduz à solução trivial $u(x,t) \equiv 0$. De forma análoga se deduz que $X(L) = 0$ e $T'(0) = 0$.

Sendo assim pretende-se resolver o problema

$$X''(x) - kX(x) = 0, \quad X(0) = 0, \; X(L) = 0.$$

Trata-se de uma equação diferencial linear de segunda ordem de coeficientes constantes de equação característica

$$\alpha^2 - k = 0.$$

As soluções da equação vão ser distintas conforme a constante k seja zero, positiva ou negativa. Assim iremos resolver a equação considerando cada um destes casos.

Se $k = 0$ então $\alpha = 0$ é raiz dupla da equação característica e a equação tem como solução

$$X(x) = c_0 + c_1 x.$$

A condição $X(0) = 0$ implica que $c_0 = 0$ pelo que

$$X(x) = c_1 x;$$

como $X(L) = 0$ conclui-se que $c_1 = 0$. Então

$$X(x) \equiv 0$$

e $u(x,t)$ é a solução trivial.

Se $k > 0$ então $k = \omega^2$ e $\alpha = \pm\omega$. A equação tem por solução

$$X(x) = c_0 e^{\omega x} + c_1 e^{-\omega x}.$$

De $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ vem que

$$\begin{cases} c_0 + c_1 = 0 \\ c_0 e^{\omega L} + c_1 e^{-\omega L} = 0. \end{cases}$$

O determinante da matriz simples associada ao sistema é diferente de zero pelo que o sistema é possível e determinado. Assim admite apenas a solução $c_1 = c_2 = 0$ que conduz a $X(x) \equiv 0$ e consequentemente à solução trivial.

Se $k < 0$ então $k = -\omega^2$ e $\alpha = \pm\omega i$. A solução da equação é dada por

$$X(x) = c_0 \cos(\omega x) + c_1 \sin(\omega x).$$

De $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ vem que

$$\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_0 \cos(\omega L) + c_1 \sin(\omega L) = 0, \end{cases}$$

ou equivalentemente

$$c_1 \sin(\omega L) = 0.$$

Se $c_1 = 0$ obter-se-ia, de novo, a solução trivial, pelo que

$$\sin(\omega L) = 0,$$

isto é

$$\omega = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Tendo em conta a imparidade da função seno basta considerar apenas as soluções

$$X_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), n \in \mathbb{N}.$$

Considere-se agora o problema

$$T''(t) - c^2 k T(t) = 0, \quad T'(0) = 0$$

que com $k = -\omega^2$ toma a forma

$$T''(t) + c^2 w^2 T(t) = 0.$$

A sua equação característica é

$$\alpha^2 + c^2 w^2 = 0$$

cujas soluções são

$$\alpha = \pm c\,\omega i.$$

A equação diferencial tem por solução

$$T(t) = A\cos(c\,\omega t) + B\sin(c\,\omega t).$$

Da condição $T'(0) = 0$ conclui-se que $B = 0$, pelo que

$$T(t) = A\cos(c\,\omega t).$$

Tendo em conta que $\omega = \dfrac{n\pi}{L}$,

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{c\,n\pi}{L}t\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Assim são soluções da equação inicial e satisfazem as condições homogéneas as funções

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)\,T_n(t) \\ &= A_n^* \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{c\,n\pi}{L}t\right) \end{aligned}$$

onde $A_n^* = c_n A_n$.

3. É evidente que as funções $u_n(x,t)$ não satisfarão, em geral, a condição não homogénea $u(x,0) = f(x)$. Utilizando o princípio da sobreposição de soluções considere-se a solução formal

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\cos\left(\frac{cn\pi}{L}t\right), \qquad (0.8)$$

e determinem-se as constantes A_n^* de forma a que a condição não homogénea $u(x,0) = f(x)$ também seja verificada. A verificar-se a condição $u(x,0) = f(x)$ ter-se-á que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin(\frac{n\pi}{L}x) = f(x).$$

Esta última igualdade verifica-se se

$$A_n^* = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx, \tag{0.9}$$

ou seja, se as constantes A_n^* forem os coeficientes de Fourier da extensão ímpar e de período $2L$ da função $f(x)$, isto é, da função

$$F(x) = \begin{cases} -f(-x), & -L \leq x \leq 0 \\ f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad \text{e } F(x) = F(x + 2L) \tag{0.10}$$

(supondo que $F(x)$ é soma da sua série de Fourier em senos, o que sucede, por exemplo, se para além da continuidade de $f(x)$ já anteriormente exigida, $f'(x)$ for pelo menos seccionalmente contínua em $[0, L]$).
A solução formal do problema considerado é assim dada por (**??**) com os coeficientes dados por (**??**).

Exemplo

Pretende-se determinar a solução da equação da corda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

com as condições de fronteira $u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0$ *e com velocidade e deflexão iniciais dadas respetivamente pelas funções* $g(x) = 0$ *e*

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq L/2 \\ L - x, & L/2 \leq x \leq L. \end{cases}$$

Foi visto atrás que a série de Fourier em senos, de $f(x)$*, é*

$$\frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right),$$

e portanto

Exemplo (continuação)

$$A^*_{2n} = b_{2n} = 0 \quad e \quad A^*_{2n-1} = b_{2n-1} = \frac{4L}{\pi^2}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}.$$

Conclui-se que, neste caso, a solução do problema é dada por

$$u(x,t) = \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{c(2n-1)\pi t}{L}\right).$$

A equação do calor (unidimensional)

Considere-se um fio (ou uma barra estreita) de comprimento $L > 0$ e forma cilíndrica de um material homogéneo e de secção constante, orientada segundo o eixo dos XX. Suponhamos que se encontra lateralmente isolada (isto é, não há trocas de calor com o exterior) excepto nas extremidades. Suponhamos ainda que o calor se propaga apenas na direcção do eixo dos XX e é constante em cada secção circular. A função $u(x, t)$ que descreve a propagação do calor ao longo da barra, isto é que dá o valor da temperatura no ponto de abcissa x no instante t, obedece à equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

em que c é uma constante não nula, que depende da condutividade térmica, do calor específico e da massa específica do material que constitui a barra.

Pretendem-se soluções não triviais da equação supondo que os extremos da barra se encontram à temperatura zero, isto é, com as condições de fronteira

$$u(0,t)=0, u(L,t)=0, \ \ t>0.$$

Supõe-se também que a temperatura em cada ponto de abcissa x no instante $t=0$ é dada pela função $f(x)$ isto é, considera-se a condição inicial

$$u(x,0)=f(x), \ \ x \in]\,0, L\,[.$$

Tal como na equação das ondas, iremos resolver esta equação seguindo o *Método de Fourier*.

1. Aplicando o método de separação de variáveis, admitem-se soluções da forma

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

que conduzem à equação

$$X(x)T'(t) = c^2 X''(x)T(t).$$

Separando as variáveis nesta última equação vem

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = k$$

(k constante) obtendo-se as equações

$$X''(x) - kX(x) = 0 \;\text{ e }\; T'(t) - c^2 kT(t) = 0.$$

2. Procedendo de forma análoga à efetuada no segundo passo da resolução da equação das ondas, as condições de fronteira

$$u(0,t) = 0 \ \text{ e } \ u(L,t) = 0, \ t > 0$$

conduzem às condições

$$X(0) = 0 \ \text{ e } \ X(L) = 0.$$

A solução do problema

$$X''(x) - kX(x) = 0, \quad X(0) = 0 \ \text{ e } \ X(L) = 0$$

já foi determinada durante a resolução da equação da corda vibrante. Foi então visto que apenas para volores de k negativos se obtinham soluções não triviais. Fazendo $k = -\omega^2$, foi visto que $\omega = \dfrac{n\pi}{L}$ e foram obtidas as soluções

$$X_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), n \in \mathbb{N}.$$

Tendo em conta que $k = -\omega^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 < 0$, a segunda equação a resolver é

$$T'(t) + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 T(t) = 0.$$

Esta equação tem como equação característica

$$\alpha + \left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 = 0$$

donde

$$\alpha = -\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2,$$

pelo que

$$T_n(t) = a_n e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}.$$

Assim, com $c_n = a_n b_n$, obtêm-se as funções

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{cn\pi}{L}\right)^2 t}.$$

3. Tal como na equação da corda vibrante as funções $u_n(x,t)$ satisfazem a equação diferencial e as condições homogéneas mas não satisfarão, em geral, a condição $u(x,0) = f(x)$. Utilizando uma vez mais o princípio da sobreposição de soluções considere-se a solução formal

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(c\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

e determinem-se as constantes c_n de forma a que a condição inicial

$$u(x,0) = f(x)$$

seja verificada, isto é

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=f(x).$$

Esta última igualdade verifica-se se as constantes c_n forem os coeficientes de Fourier da extensão ímpar e de período $2L$ da função $f(x)$, isto é, da função $F(x)$ definida por

$$F(x)=\begin{cases} -f(-x), & -L\leq x\leq 0\\ f(x), & 0\leq x\leq L\end{cases} \quad \text{e } F(x)=F(x+2L)$$

(admitindo que $F(x)$ é soma da sua série de Fourier em senos, o que sucede, por exemplo, se em $[-L,L]$ a função $f(x)$ for contínua e $f'(x)$ seccionalmente contínua), isto é

$$c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$$

A função $u(x,t)$ determinada é "a priori", e tal como foi dito, apenas uma solução formal da equação. É no entanto possível mostrar que $u(x,t)$ possui derivadas em ordem quer a x, quer a t de todas as ordens, contínuas, e que $u(x,t)$ é, de facto, a solução da equação do calor com as condições de fronteira e inicial consideradas.

A equação de Laplace

Uma das equações com derivadas parciais com mais relevância em física é a equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

que simbolicamente se representa por $\nabla^2 u = \Delta u = 0$ constituindo simultaneamente um dos exemplos mais simples de equações com derivadas parciais elíptica.

As soluções da equação de Laplace com segundas derivadas contínuas são designadas por funções harmónicas e assumem papel importante em muitas áreas da ciência, tais como eletromagnetismo, astronomia e dinâmica de fluidos. Permitem descrever o comportamento de fluido e de potenciais elétricos e gravíticos. No estudo da condução do calor as soluções da equação de Laplace modelam a propagação do calor num processo estacionário.

O problema da determinação da temperatura $u(x, y)$ numa região limitada do plano em que a temperatura na fronteira obedece a condições previamente estabelecidas é usualmente designado por *Problema de Dirichlet*.

A solução do problema de Dirichlet para a região rectangular $[0, a] \times [0, b]$ supondo que os lados $x = 0$ e $x = a$ $(0 \leq y \leq b)$ e $y = 0$ $(0 \leq x \leq a)$ se encontram à temperatura zero e que a temperatura no lado $y = b$ $(0 \leq x \leq a)$ é dada pela função $f(x)$ $(0 \leq x \leq a)$ é a função $u(x, y)$ que satisfaz o problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x) \quad \text{se} \quad x \in [0, a]$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad \text{se} \quad y \in [0, b].$$

Tal como nas equações anteriores, iremos resolver este problema seguindo o *Método de Fourier*.

1. Supondo $u(x, y) = X(x)Y(y)$ e separando as variáveis, obtém-se

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = k$$

que conduz às duas equações diferenciais ordinárias

$$X''(x) - kX(x) = 0, \quad Y''(y) + kY(y) = 0.$$

em que k é constante.

2. As condições

$$u(0, y) = 0 \quad \text{e} \quad u(a, y) = 0$$

permitem concluir que

$$X(0) = X(a) = 0$$

conduzindo ao problema

$$X''(x) - kX(x) = 0, \quad X(0) = 0 \ \text{ e } \ X(a) = 0.$$

Trata-se de um problema que já surgiu anteriormente quer na resolução da equação da corda vibrante quer na resolução da equação do calor. Uma vez mais as soluções da equação vão ser distintas conforme a constante k seja zero, positiva ou negativa. Tal como sucedeu na resolução das equações da corda vibrante e do calor, o problema de Dirichlet apenas admite soluções não triviais para valores negativos da constante k. Fazendo $k = -\omega^2$, foi visto que $\omega = \dfrac{n\pi}{a}$ conduzindo às soluções

$$X_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right), n \in \mathbb{N}.$$

Tendo em conta que $k = -\omega^2 < 0$ e que a condição $u(x, 0) = 0$ conduz a $Y(0) = 0$, chega-se ao problema

$$Y''(y) - \omega^2 Y(y) = 0, \quad Y(0) = 0$$

que tem por solução

$$Y(y) = a_0 e^{\omega y} - a_0 e^{-\omega y} = 2a_0 \sinh(\omega y), \quad \text{[verifique]}$$

mas como $\omega = \dfrac{n\pi}{a}$ vem que

$$Y_n(y) = a_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Assim, as funções

$$u_n(x, y) = X_n(x) Y_n(y) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)$$

são soluções da equação de Laplace e satisfazem as condições de fronteira homogéneas consideradas.

3. É óbvio que, em geral, as funções $u_n(x,y)$ determinadas em 2. não satisfarão a condição $u(x,b) = f(x)$, $(0 \leq x \leq a)$. Aplicando o princípio da sobreposição de soluções define-se a solução formal

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right).$$

A condição $u(x,b) = f(x)$, $(0 \leq x \leq a)$ será verificada se

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = f(x).$$

Esta última igualdade verifica-se se as constantes $c_n \sinh\left(\dfrac{n\pi b}{a}\right)$ forem os coeficientes de Fourier da extensão ímpar e de período $2a$ da função $f(x)$, isto é, da função $F(x)$ definida por

$$F(x) = \begin{cases} -f(-x), & -L \leq x \leq 0 \\ f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases} \quad \text{e } F(x) = F(x+2a)$$

(admitindo que $F(x)$ é soma da sua série de Fourier em senos, o que sucede, por exemplo, se $f(x)$ e $f'(x)$ forem contínuas em $[-a, a]$), ou seja se

$$c_n = \frac{2 \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) dx}{a \sinh\left(\frac{n\pi}{a} b\right)}.$$

Se para além da continuidade de $f(x)$ e $f'(x)$ a função $f''(x)$ for seccionalmente contínua em $[-a, a]$, é possível mostrar que a função $u(x, y)$ tem derivadas de segunda ordem contínuas e é a única solução do problema de Dirichlet.