AM1-Programa de estudo para a semana de 12/4 a 16/4

1 Turnos Teóricos

Concluimos esta semana o estudo das sucessões com a introdução da noção fundamental de **sucessão de Cauchy**. Como veremos, esta noção constitui uma caracterização alternativa da noção de convergência que não faz menção explícita do limite L. Este aspecto torna-a muito útil no estudo de sucessões definidas por recorrência em que o limite não é facilmente intuído. No final da semana, entramos na matéria das funções reais de variável real, onde as sucessões continuarão a ter um papel muito importante, nomeadamente na definição do conceito de **limite de uma função real de variável real num ponto**.

- **1º Turno. Sucessão de Cauchy.**

  (a) Iremos introduzir a definição de sucessão de Cauchy (ver página 26 do Texto de Apoio).

  Responda às seguintes questões:

  (i) Uma sucessão constante é de Cauchy?

  (ii) A sucessão $u_n = \frac{1}{n}$ é de Cauchy?

  (iii) A sucessão $v_n = (-1)^n$ é de Cauchy?

(iv) Qual a diferença que observa entre a definição de sucessão de Cauchy e a noção de sucessão convergente?

(b) Demonstraremos que o conceito de convergência segundo Cauchy é equivalente ao conceito de convergência para um limite.
O argumento segue em três etapas:

etapa 1: Toda a sucessão de Cauchy é limitada.

etapa 2: Toda a sucessão de Cauchy possui uma subsucessão convergente para um certo limite L.

etapa 3: Qualquer subsucessão da sucessão de Cauchy terá de convergir para L.

- **2º Turno. Estudo da convergência de sucessões definidas por recorrência.**

Será dado o Lema 1.15, que estabelece uma condição suficiente para uma sucessão ser de Cauchy (e por isso convergente).

Será realizado o seguinte exercício:

Mostrar que a sucessão definida por recorrência por

$$u_1 = 1 \qquad u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

converge para 4. Para tal verificaremos que é uma sucessão que está nas condições do Lema 1.15 . Depois justificaremos quo o limite l é solução da equação

$$l = \frac{3}{4} \cdot l + 1$$

- **3º Turno. O conceito de limite.**

Iniciamos agora um novo tema na disciplina de Análise. No entanto, importa frisar que as noções que iremos estudar baseiam-se nos conceitos já estudados de sucessão e das suas propriedades. A Matemática não conhece divisões estanques entre os seus conteúdos. Quando falamos a "língua matemática", exercemos um domínio simultâneo sobre todos os conceitos aprendidos. Este facto permite, ao mesmo tempo, explicar a primazia do "compreender" sobre o "decorar": apenas a compreensão permite integrar os conceitos de modo funcional.

(a) Iniciaremos a secção 1.3 do texto de apoio dando a noção de limite de uma função num ponto a.

Exercício: Seja f uma função definida numa vizinhança do ponto a. Verifique que a expressão

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

tem sentido.

(b) Estudaremos o exemplo 1.16.

(c) Estudaremos a noção de limite lateral à direita e esquerda de um ponto.

Daremos exemplos de funções tais que:

(i) f tem limites laterais à direita e à esquerda em $a = 0$, porém estes limites não são iguais ($\arctan(1/x)$).

(ii) f é limitada mas não tenha limites laterais em $x = 0$ ($\sin(1/x)$; observe o gráfico desta função num intervalo centrado em 0).

(d) Serão referidas as propriedades aritméticas dos limites que decorrem de propriedades aritméticas análogas dos limites de sucessões convergentes.

2 Turnos práticos

- 1º Turno prático. O professor poderá concluir a resolução do exercício 3 da ficha 4.

Será referido –sem demonstração– o Lema 1.15 do Texto de Apoio:

Se u_n é uma sucessão tal que, para um certo $0 < \alpha < 1$, tem-se

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq \alpha |u_{n+1} - u_n| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

então u_n é convergente (este resultado será leccionado nos turnos teóricos).

Será realizado o exercício 4 da Ficha 4. Como trabalho autónomo, o aluno poderá justificar a convergência da sucessão

$$u_1 = 0 \qquad u_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot u_n + 1$$

indicando o seu limite.

- 2º Turno prático. O professor poderá, se considerar necessário, realizar um exercício sobre convergência de uma sucessão definida por recorrência da ficha 4 ou do Texto de Apoio. O professor seleccionará alguns dos seguintes exercícios da Ficha 5: 1 (a), (c), (d), (g) e (h); 2 (a), (c) e (d). Estes exercícios constituem revisões do ensino secundário. Recomenda-se a resolução de forma autónoma das restantes alíneas.