Gradiente

Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$, $A \in \mathrm{int}(D)$ e $f : D \to \mathbb{R}$. Se as derivadas parciais de 1ª ordem de f existem no ponto A, chama-se gradiente de f em A ao vetor

$$\nabla f(A) \overset{def}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right).$$

Chama-se campo vetorial gradiente de f à função

$$(x_1, \ldots, x_n) \to \nabla f(x_1, \ldots, x_n).$$

Exemplos

Exemplo

Considere a função

$$f(x, y) = e^{2x-y}.$$

(a) *Calcule o campo vetorial gradiente.*

(b) *Determine as derivadas parciais de 2ª ordem da função.*

Resolução:

Exemplos

Exemplo

Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & se \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & se \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Calcule o gradiente de f *em todos os pontos de* $\mathbb{R}^2$.

Exemplo - Resolução

Resolução:

Teorema de Schwarz

Teorema

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$, $(a, b) \in \text{int}(D)$ *e* $f : D \to \mathbb{R}$. *Se as derivadas*

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}$$

estiverem definidas numa bola aberta $B(a, b) \subset D$ *e*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} \quad \text{for contínua em } (a, b), \text{então}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(a, b)$ *existe e*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x}(a, b).$$

Classes $C^k(D)$

Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $k \in \mathbb{N}$. Diz-se que

$$f : D \to \mathbb{R}$$

é de classe C^k em D e escreve-se $f \in C^k(D)$, se todas as derivadas parciais de ordem menor ou igual k forem contínuas em D.

Observação

$C^0(D) = C(D)$.

Então para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$C^{k+1}(A) \subset C^k(A).$$

Diz-se que $f : D \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞ em D e escreve-se $f \in C^\infty(D)$ se

$$f \in C^k(D) \quad \text{para cada} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Corolário do teorema de Schwarz

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ *um conjunto aberto e* $f \in C^2(D)$, *então*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y)$$

em D.

Teorema

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto aberto e* $f \in C^2(D)$, *então para cada par* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)$$

em D.

Diferenciabilidade de uma função de uma variável

Sejam $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int}(D)$ e $f : D \to \mathbb{R}$. Diz-se que f é diferenciável em a se existir e for finito o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = c$$

A c chama-se a derivada de f em a e escreve-se $f'(a) = c$.
Seja $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a aplicação linear definida por

$$\lambda(h) = f'(a)h \quad (h \in \mathbb{R}).$$

Então a definição anterior é equivalente a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - \lambda(h)}{h} = 0$$

ou a

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)|}{|h|} = 0.$$

Diferenciabilidade de uma função real de duas variáveis

Definição

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$, $(a, b) \in \mathrm{int}(D)$ *e*

$$f : D \to \mathbb{R}.$$

Diz-se que f *é* *diferenciável* *em* (a, b) *se existir uma aplicação linear*

$$\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

tal que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(a+h, b+k) - f(a, b) - \lambda(h, k)|}{\|(h, k)\|} = 0.$$

Derivada

À aplicação linear λ chama-se derivada de f em (a, b) e representa-se por $Df(a, b)$.

Existência das derivadas parciais

Teorema

Sejam $D \subset \mathbb{R}^2$ *e* $f : D \to \mathbb{R}$. *Se* f *for diferenciável em* (a, b), *então*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

existem e fixando a base canónica em $\mathbb{R}^2$, $Df(a, b)$ *é representada pela matriz jacobiana de* f *no ponto* (a, b)

$$Jf(a, b) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right]$$