AM3C – Teste 2024.1 Resolução

Felipe B. Pinto 71951 – EQB

5 de janeiro de 2025

Conteúdo

Grupo I

Questão 1

A equação diferencial linear de primeira ordem

$$\frac{\mathrm{d}y}{} \quad \cos(x)$$

Resposta

$$y = \frac{c_0}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int (-x)\, \varphi(x)\ \mathrm{d}x =$$

Using (1.1)

Questão 2

A solução da equação de Bernoulli

$$\mathrm{d}y \qquad\qquad 1$$

Resposta

$$y = \sqrt{z} = \tag{1.3}$$

Using (1.7)

$$= \sqrt{c_6\, e^{-2\,x} + 1} = \tag{1.4}$$

Solving z

Using (1.6)

$$z = \frac{c_0}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int 2\,\varphi(x)\ \mathrm{d}x =$$

Using (1.8)

$$= \frac{c_0}{c_2\,e^{2\,x}} + \frac{1}{c_2\,e^{2\,x}} \int 2\,c_2\,e^{2\,x}\ \mathrm{d}x = c_4\,e^{-2\,x} + \frac{1}{c_2\,e^{2\,x}} \int 2\,c_2\,e^{2\,x}\ \mathrm{d}x =$$

Using (1.9)

$$= c_4\,e^{-2\,x} + \frac{1}{c_2\,e^{2\,x}}\,c_2\,(e^{2\,x} + c_3) = c_4\,e^{-2\,x} + 1 + c_5\,e^{-2\,x} = c_6\,e^{-2\,x} + 1 \tag{1.7}$$

$$\varphi(x) = \exp\left(\int 2\ \mathrm{d}x\right) = \exp 2\,(x + c_1) = c_2\,e^{2\,x} \tag{1.8}$$

$$P(2\,\varphi(x))$$

Using (1.8)

$$= P\big(2\,c_2\,e^{2\,x}\big) = c_2\,(e^{2\,x} + c_3) \tag{1.9}$$

Questão 3

A equação differencial

$$(5\,x\,y^2 - 2\,y)\;\mathrm{d}x + (3\,x^2\,y - x)\;\mathrm{d}y = 0$$

Resposta

$$m = 3, n = 2$$

Resposta

$$(5\,x\,y^2 - 2\,y)\ \mathrm{d}x + (3\,x^2\,y - x)\ \mathrm{d}y = 0; \quad \varphi(x,y) = x^m\,y^n \ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ (x^m\,y^n)\big(5\,x\,y^2 - 2\,y\big)\ \mathrm{d}x + (x^m\,y^n)\big(3\,x^2\,y - x\big)\ \mathrm{d}y = 0 \ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ \frac{\partial}{\partial y}(x^m\,y^n)\big(5\,x\,y^2 - 2\,y\big) = (x^m\,y^{n-1}\,n)\big(5\,x\,y^2 - 2\,y\big)$$

Questão 4

A equação diferencial linear homogénea

$$x\,y'' + x^2\,y' + 4\,y = 0, \quad x > 0$$

Resposta

$$y : \begin{pmatrix} 4 \\ +x^2 \ \mathrm{D}_x \\ +x \ \mathrm{D}_x^2 \end{pmatrix} y = x^3$$

Questão 5

Acerca de uma função $f(x)$ definida e com derivadas até à segunda ordem em $\mathbb{R}_0^+$ sabe-se que admite transformada de Laplace $F(s)$, que $f(0) = 1$, $f'(0) = -2$. Então a trasnformada

Resposta

$$(s+1)^2\,F(s+1) - s + 1 - s\,F'(s) - F(s)$$

Grupo II

Determine a solução geral da equação diferencial linear homogénea e de coeficientes constantes

Resposta

$$P\,y = \left(\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_x - 6\right) y = 0;$$

$$y = \varphi(x) \int z(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(x) \int z(x)\,\mathrm{d}x;$$

met ver const arb

Utilizando o método da variação das constantes arbitrárias, determine a solução geral da equação não homogénea

Resposta

$$y : \begin{pmatrix} -6 \\ +1 \ \mathrm{D}_x \\ +1 \ \mathrm{D}_x^2 \end{pmatrix} y = \left(-5\, e^{2\,x} \ \cos(x)\right)$$

Grupo III

Q1 a.

Determine todas as soluções da equação de Clairaut

Grupo IV

Utilize a transformada de Laplace para resolver o problema de valores iniciais

$$y'' + y' + y\,5/2 = \delta(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Grupo V

Considere a equação diferencial lienar de ordem n e coeficientes constantes

A equação (5.10) tem uma solução particular da forma

$$\bar{y} = \frac{c}{\quad} x e^{\alpha x}, \quad c \in \mathbb{R}$$