

CN A – Interpolação e Aproximação Polinomial

Felipe B. Pinto 61387 – MIEQB

4 de outubro de 2024

Conteúdo

Questão 8	2	Questão 15	8
Questão 9	5	Questão 19	9
Questão 10	6	Questão 18	10
Questão 14	7	Questão 19	11

Questão 8

Seja f uma função da qual se conhece a seguinte tabela de valores:

x	0.3	0.5	1.1
$f(x)$	0.5917	0.4444	0.2268

Q8 a.

Construa a tabela de diferenças divididas e, a partir dela, determine, por interpolação polinomial quadrática, um valor aproximado de $f(0.65)$.

Resposta

x	$f[\cdot, \cdot]$	$f[\cdot, \cdot, \cdot]$
0.3	-0.7365	
0.5		
1.1	...	

Q8 b.

Sabendo que $|f^n(x)| \leq \frac{(n+1)!}{(1+x)^{n+2}}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0.3, 1.1]$

Resposta

8-

$$b) |f(0.65) - p_2(0.65)| \leq |(*)| \times \frac{\frac{24}{1.3^5}}{6} = 0.0255 \quad 0.02545 \dots$$

Majorante zero relativo

$$\pi_{f(0.65)} = \frac{|f(0.65) - p_2(0.65)|}{|f(0.65)|} \leq \frac{\overbrace{0.0255}}{0.333 \dots} = 0.0766$$

$$\begin{aligned} f(0.65) &\in I = \left[p_2(0.65) - \pi_{f(0.65)}, p_2(0.65) + \pi_{f(0.65)} \right] = \\ &= \left[0.3585 - 0.0255, 0.3585 + 0.0255 \right] = \\ &= \boxed{[0.3330, 0.3840]} \end{aligned}$$

Questão 9

Seja f uma função não negativa da qual se conhece a seguinte tabela de valores:

x		3	6	7
$f(x)$	\parallel	A	21	B

Resposta

x	$f(x)$	$f[\cdot, \cdot]$	$f[\cdot, \cdot, \cdot]$
3	A	$A^2 - 1$	
6	21	$\frac{B-21}{1}$	3
7	B		

$$f[3, 6] = A^2 - 1 = \frac{21 - A}{6 - 3} \implies A = 8/3 \wedge A = -3 \wedge A \in \mathbb{R}_0^+ \implies A = 8/3;$$

$$f[3, 6, 7] = 3 = \frac{(B - 21) - (A^2 - 1)}{4} = \frac{B - 21 - (8/3)^2 + 1}{4} \implies B = 352/9$$

Questão 10

Considere-se uma função real de variável real, g , cujos valores se conhecem nos nodos $x_0 = -2$, $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$:

x	\parallel	-2	-1	1
$g(x)$	\parallel	α	β	γ

Questão 14

Considere a função seccionalmente polinomial, $S(x)$, definida por:

$$\begin{cases} x^2, & -1 \leq x < 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx, & 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Onde a , b e c são constantes reais.

Diga, justificando, se $S(x)$ pode ser um spline cúbico.

Resposta

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} S(x) = 0^2 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} S(x) = a0^3 + b0^2 + c0 = 0;$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) &= a1^3 + b1^2 + c1 = a + b + c = \lim_{x \rightarrow 1^+} S(x) = 2 - 1 = 1 \implies \\ &\implies a + b + c = 1; \end{aligned}$$

$$\frac{dS(x)}{dx} = \begin{cases} 2x, & -1 \leq x < 0 \\ 3ax^2 + 2bx + c, & 0 \leq x < 1 \\ -1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{dS(x)}{dx} = 2 * 0 = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{dS(x)}{dx} = 3a0^2 + 2b0 + c = c \implies c = 0;$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{dS(x)}{dx} &= 3a1^2 + 2b1 + c = 3a + 2b = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{dS(x)}{dx} = -1 \implies \\ &\implies 3a + 2b = -1; \end{aligned}$$

$$\frac{d^2S(x)}{dx^2} = \begin{cases} 2, & -1 \leq x < 0 \\ 6ax + 2b, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{d^2S(x)}{dx^2} = 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{d^2S(x)}{dx^2} = 6a0 + 2b = 2b \implies b = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{d^2S(x)}{dx^2} = 6a1 + 2b = 6a + 2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{d^2S(x)}{dx^2} = 0 \implies a = -1/3$$

$$\therefore \begin{cases} a + b + c = 1 \\ c = 0 \\ b = 1 \\ 6a + 2b = 0 \end{cases} \implies 2 = 0 \implies S(x) \text{ não pode ser spline}$$

Questão 15

Considere a seguinte tabela de valores de uma função g

x	1	2	4	8
$g(x)$	-2	6	2	40

Determine a expressão do spline cúbico natural, $S(x)$, interpolador de $g(x)$ nos pontos tabelados.

Resposta

$$\begin{cases}
 h_0 m_0 + 2(h_0 + h_1) m_1 + h_1 m_2 = 6 \left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \right) \\
 h_1 m_1 + 2(h_1 + h_2) m_2 + h_2 m_3 = 6 \left(\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \right) \\
 m_0 = m_3 = 0; \\
 h_i = x_{i+1} - x_i, \quad i \in [0, 2] \\
 h_0 = 1, h_1 = 2, h_2 = 4 \\
 y_0 = -2, y_1 = 6, y_2 = 2, y_3 = 40
 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases}
 2 * (1 + 2) m_1 + 2 m_2 = 6 \left(\frac{2 - 6}{2} - \frac{6 + 2}{1} \right) \\
 2 m_1 + 2(2 + 4) m_2 = 6 \left(\frac{40 - 2}{4} - \frac{2 - 6}{2} \right)
 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases}
 6 m_1 + 2 m_2 = -60 \\
 2 m_1 + 12 m_2 = 69
 \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 69 \end{bmatrix}$$

$$S_i(x) = -\frac{(x - x_{i+1})^3}{6 h_i} m_i + \frac{(x - x_i)^3}{6 h_i} m_{i+1} +$$

$$+ \left(f_i - \frac{h_i^2}{6} m_i \right) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + \left(f_{i+1} - \frac{h_i^2}{6} m_{i+1} \right) \frac{x - x_i}{h_i};$$

$$\begin{cases}
 h_0 m_0 + 2(h_0 + h_1) m_1 + h_1 m_2 = 6 \left(\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \right) \\
 h_1 m_1 + 2(h_1 + h_2) m_2 + h_2 m_3 = 6 \left(\frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \right)
 \end{cases}$$

Questão 19

Considere a tabela de valores da função f

x_i	-3	0	2
$f(x_i)$	2	4	12

Q19 a.

Determine o polinómio de grau menor ou igual a 1 que melhor aproxima a função tabelada no sentido dos mínimos quadrados, no intervalo $[-3, 2]$

Resposta

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_0 \sum_{i=0}^2 1 + a_1 \sum_{i=0}^2 x_i = \sum_{i=0}^2 y_i \\ a_0 \sum_{i=0}^2 x_i + a_1 \sum_{i=0}^2 x_i^2 = \sum_{i=0}^2 y_i x_i \end{cases} &= \begin{cases} a_0(3) + a_1(-1) = 18 \\ a_0(-1) + a_1(13) = 18 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} a_0 = 126/19 \\ a_1 = 36/19 \end{cases} \implies \\ &\implies p_1(x) = 126/19 + x 36/19 \end{aligned}$$

Q19 b.

Mostre que

$$\sum_{i=0}^2 (f(x_i) - (\gamma_1 x_i + \gamma_0))^2 \geq 200/19, \forall \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$$

Resposta

$$\sum_0^2 (f(x_i) - p_1(x_i))^2 = \dots$$

Q19 c.

Seja $p_2(x)$ o polinomio de grau menor ou igual a 2 interpolador de f nos pontos tabelados.

Justifique que a aproximação quadrática que melhor aproxima o conjunto de pontos $\{(-3, 2), (0, 4), (2, 12)\}$, no sentido dos mínimos quadrados, é o polinómio p_2 .

Resposta

x	$f(x)$	$f[\cdot, \cdot]$	$f[\cdot, \cdot, \cdot]$
-3	2	$\frac{4-2}{0-(-3)} = 2/3$	
0	4	$\frac{12-4}{2-0} = 4$	$\frac{4-2/3}{2-(-3)} = 2/3$
2	12		

$p_2(x) = 2 + (x + 3) 2/3 + (x + 3)(x - 0) 2/3$ é polinómio de 2 grau

Questão 18

A seguinte tabela representa a população da China (em milhares de milhões de habitantes) arredondada a 5 dígitos:

t	1990	2000	2010	2020
$P(t)$	1.1769,	1.2906,	1.3688,	1.4393,

Suponha que há uma relação linear entre a data t (em anos) e a população $P(t)$, isto é, que se verifica a relação $p_1(t) = \alpha t + \beta$, onde α e β são constantes reais ($\alpha \neq 0$). Com base nestes dados, utilize o método dos mínimos quadrados para obter uma estimativa da população chinesa em 2015.

Resposta

$$t \begin{cases} 0 : 1990, \\ 1 : 2000, \\ 2 : 2010, \\ 3 : 2020, \end{cases};$$

$$NC = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^3 t_i^0 & \sum_{i=0}^3 t_i^1 \\ \sum_{i=0}^3 t_i^1 & \sum_{i=0}^3 t_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8020 \\ 8020 & 16080600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ alpha \end{bmatrix} =$$

$$= B = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^3 P(t_i) \\ \sum_{i=0}^3 t_i P(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.2756 \\ 10581.905 \end{bmatrix};$$

$$\therefore \begin{cases} \alpha \approx 0.00865 \\ \beta \approx -16.0324 \end{cases};$$

$$p_1(2015) \approx 1.39735$$

Questão 19

Considere a tabela de valores da função f

x_i	-3	0	2
$f(x_i)$	2	4	12

Q19 a.

Determine o polinómio de grau menor ou igual a 1 que melhor aproxima a função tabelada, no sentido dos mínimos quadrados, no intervalo $[-3, 2]$.

Resposta

$$p_1(x) = c_0 + c_1 x;$$

$$NC = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^2 x_i^0 & \sum_{i=0}^2 x_i^1 \\ \sum_{i=0}^2 x_i^1 & \sum_{i=0}^2 x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \end{bmatrix} =$$

$$= B = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^2 f(x_i) \\ \sum_{i=0}^2 x_i f(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 18 \end{bmatrix} \implies c \begin{cases} 0 : 126/19 \\ 1 : 36/19 \end{cases}$$

$$\therefore p_1(x) = 126/19 + x 36/19$$

Q19 b.

Mostre que

$$\sum_{i=0}^2 (f(x_i) - (\gamma_1 x_i + \gamma_0))^2 \geq 200/19, \quad \forall \gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}$$

Resposta

$$p_1(x) \in \{\gamma_1 x + \gamma_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}\}; \quad p_1 \text{ Minimiza o erro quadrático } E^2$$

$$E^2 = \sum_{i=0}^2 (f(x_i) - p_1(x_i))^2 = \begin{pmatrix} (2 - 0.947\,368)^2 \\ +(4 - 6.631\,579)^2 \\ +(12 - 10.421\,053)^2 \end{pmatrix} \cong 10.526\,316$$

Q19 c.

Seja $p_2(x)$ o polinómio de grau menor ou igual a 2 interpolador de f nos pontos tabelados.

Justifique que a aproximação quadrática que melhor aproxima o conjunto de pontos $\{(-3, 2), (0, 4), (2, 12)\}$, no sentido dos mínimos quadrados, é o polinomio p_2

Resposta

x_i	$f(x_i)$	$f[.]$	$f[..]$
-3	2	2/3	
0	4	4	2/3
2	12		