Partição de uma curva

Sejam $n = 2$ ou $n = 3$ e

$$\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

uma parametrização regular de uma curva $\mathcal{C}$. Seja P uma partição do intervalo $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1} = b.$$

Denotemos por Δs_k o comprimento do troço de $\mathcal{C}$ delimitado por $\vec{r}(t_k)$ e $\vec{r}(t_{k+1})$:

$$\Delta s_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt \quad (k = 0, \ldots, m).$$

Somas de Darboux

Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C} \subset D$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Definimos a soma superior de Darboux por

$$S_P(f) = \sum_{k=0}^{m} \sup_{t \in [t_k, t_{k+1}]} f(\vec{r}(t)) \Delta s_k,$$

e a soma inferior de Darboux por

$$s_P(f) = \sum_{k=0}^{m} \inf_{t \in [t_k, t_{k+1}]} f(\vec{r}(t)) \Delta s_k.$$

Integral curvilíneo

Seja $\mathcal{P}$ o conjunto das partições da linha $\mathcal{C}$. Se

$$\inf_{P\in\mathcal{P}} S_P(f) = \sup_{P\in\mathcal{P}} s_P(f),$$

dizemos que f é integrável ao longo da curva $\mathcal{C}$ e denotamos

$$\int_{(\mathcal{C},\vec{r})} f(x,y)\,ds = \inf_{P\in\mathcal{P}} S_P(f) = \sup_{P\in\mathcal{P}} s_P(f) \quad (n=2)$$

ou

$$\int_{(\mathcal{C},\vec{r})} f(x,y,z)\,ds = \inf_{P\in\mathcal{P}} S_P(f) = \sup_{P\in\mathcal{P}} s_P(f) \quad (n=3).$$

Independência da parametrização

Teorema

Sejam $D \subset \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função limitada, e* $\mathcal{C} \subset D$ *uma curva regular parametrizada por* $\vec{r}_1 : [a, b] \to \mathcal{C}, \quad \vec{r}_2 : [c, d] \to \mathcal{C}$.
Então

$$\int_{(\mathcal{C},\vec{r}_1)} f(x, y)\, ds = \int_{(\mathcal{C},\vec{r}_2)} f(x, y)\, ds \quad (n = 2)$$

ou

$$\int_{(\mathcal{C},\vec{r}_1)} f(x, y, z)\, ds = \int_{(\mathcal{C},\vec{r}_2)} f(x, y, z)\, ds \quad (n = 3).$$

O teorema permite-nos escrever

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y)\, ds = \int_{(\mathcal{C},\vec{r})} f(x, y)\, ds, \quad \int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\, ds = \int_{(\mathcal{C},\vec{r})} f(x, y, z)\, ds,$$

independentemente da parametrização $\vec{r}$.

Integrabilidade de funções contínuas $(n = 2)$

Teorema

Sejam $\mathcal{C}$ *uma curva regular em* $\mathbb{R}^2$ *parametrizada por*

$$\vec{r} : [a, b] \to \mathcal{C}, \quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t)),$$

e

$$f : D \to \mathbb{R}$$

uma função limitada, com $\mathcal{C} \subset D$*. Se* f *for contínua em* $\mathcal{C}$ *então* f *é integrável ao longo de* $\mathcal{C}$ *e*

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} f(x, y)\, ds &= \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt \\ &= \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt.\end{aligned}$$

Integrabilidade de funções contínuas $(n = 3)$

Teorema

Sejam $\mathcal{C}$ *uma curva regular em* $\mathbb{R}^3$ *parametrizada por*

$$\vec{r} : [a, b] \to \mathcal{C}, \quad \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

e

$$f : D \to \mathbb{R}$$

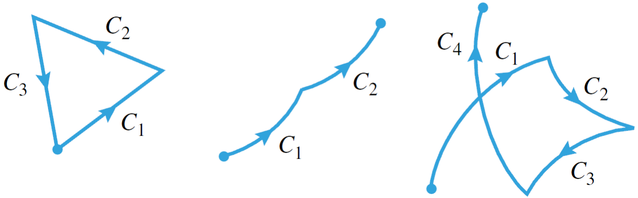
uma função limitada, com $\mathcal{C} \subset D$*. Se* f *for contínua em* $\mathcal{C}$ *então* f *é integrável ao longo de* $\mathcal{C}$ *e*

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\, ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt.$$

Integrais ao longo de curvas seccionalmente regulares

Seja $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_n$ uma curva seccionalmente regular tal que $\mathcal{C}_i$ são regulares e o ponto inicial de C_{i+1} é o ponto terminal de C_i. Então



$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y)\,ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{C}_i} f(x,y)\,ds \quad (n=2),$$

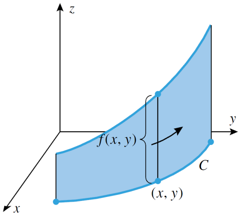
$$\int_{\mathcal{C}} f(x,y,z)\,ds = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{C}_i} f(x,y,z)\,ds \quad (n=3).$$

Interpretação geométrica $(n = 2)$

Seja $\vec{r} : [a, b] \to \mathcal{C}$ e $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva. Então

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y)\, ds$$

representa a área da superfície delimitada por:



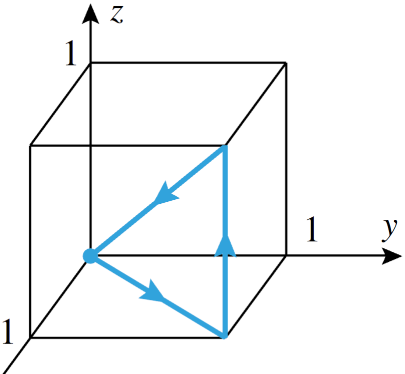
- recta que une o ponto $(x, y) = \vec{r}(a)$ ao ponto $(x, y, f(x, y))$;
- recta que une o ponto $(x, y) = \vec{r}(b)$ ao ponto $(x, y, f(x, y))$;
- curva $\mathcal{C}$;
- gráfico de f.

Exemplo

Calcule o integral

$$\int_C (x - y + 2z)\, ds$$

ao longo da curva C *mostrada na figura:*



Resolução

Resolução:

Campos vetoriais

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ou $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto.

Um campo vetorial em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é uma função contínua

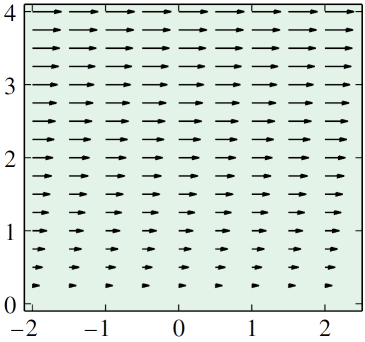
$$\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

Um campo vetorial em $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é uma função contínua

$$\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3.$$

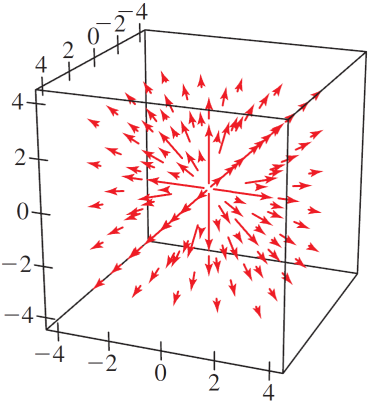
"Em cada ponto uma seta".

Exemplo 1



$$\vec{F}(x,y) = \frac{1}{5}\sqrt{y}\,\vec{i}.$$

Exemplo 2



$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Integração de um campo vetorial ao longo de uma curva regular

Sejam $n = 2$ ou $n = 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto,

$$\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

um campo vetorial e $\mathcal{C} \subset \Omega$ uma curva regular parametrizada por

$$\vec{r} : [a, b] \to \mathcal{C}.$$

Então o integral de linha de $\vec{F}$ ao longo de $\mathcal{C}$ é definido por

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\, dt.$$

Integração de um campo vetorial $(n = 2)$

Se $n = 2$,

$$\vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j}, \quad \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j},$$

então

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\mathcal{C}} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy \\ &= \int_a^b \left[F_1(x(t),y(t))x'(t) + F_2(x(t),y(t))y'(t)\right] dt.\end{aligned}$$

Integração de um campo vetorial ($n = 3$)

Se $n = 3$,

$$\vec{F}(x,y,z) = F_1(x,y,z)\vec{i} + F_2(x,y,z)\vec{j} + F_3(x,y,z)\vec{k},$$

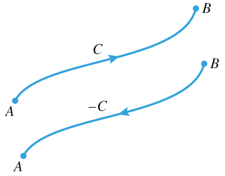
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

então

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C F_1(x,y,z)\,dx + F_2(x,y,z)\,dy + F_3(x,y,z)\,dz \\ &= \int_a^b \Big[F_1(x(t),y(t),z(t))x'(t) \\ &\quad + F_2(x(t),y(t),z(t))y'(t) \\ &\quad + F_3(x(t),y(t),z(t))z'(t)\Big]\,dt.\end{aligned}$$

Invertendo a orientação

Se $\mathcal{C}$ for uma curva regular orientada, denotamos por $-\mathcal{C}$ a curva orientada que consiste nos mesmos pontos de $\mathcal{C}$ mas com a orientação oposta:

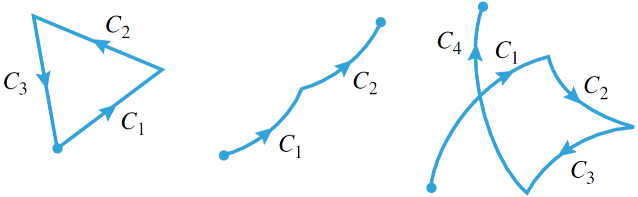


$$\int_{-\mathcal{C}} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = -\int_{\mathcal{C}} F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy,$$

$$\begin{aligned}&\int_{-\mathcal{C}} F_1(x,y,z)\,dx + F_2(x,y,z)\,dy + F_3(x,y,z)\,dz\\ &= -\int_{\mathcal{C}} F_1(x,y,z)\,dx + F_2(x,y,z)\,dy + F_3(x,y,z)\,dz.\end{aligned}$$

Integrais ao longo de curvas seccionalmente regulares

Seja $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_n$ uma curva seccionalmente regular tal que $\mathcal{C}_i$ são regulares e o ponto inicial de C_{i+1} é o ponto terminal de C_i. Então



$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathcal{C}_i} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Uma aplicação: trabalho realizado pelo campo de forças

Suponha que uma partícula se mova ao longo de uma curva $\mathcal{C}$ regular sob o efeito de um campo de forças contínuo e que $\mathcal{C}$ esteja orientada no sentido do movimento da partícula. Então o trabalho realizado pelo campo de forças na partícula é dado por

$$W = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Exemplo

Exemplo

Calcule o trabalho realizado pelo campo

$$\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$$

ao longo da circunferência unitária C no plano xOy, orientada no sentido anti-horário.

Resolução:

Independência do caminho

Sejam $n = 2$ ou $n = 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto,

$$\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

um campo vetorial e $\mathcal{C} \subset \Omega$ uma curva paramétrica com extremidades $A, B \in \Omega$, orientada de A para B. Diz-se que

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

não depende do caminho, se para toda a curva paramétrica $\widetilde{\mathcal{C}}$ de extremidades A, B, orientada de A para B,

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Teorema fundamental dos integrais de linha

Teorema

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *uma região aberta,* $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in \Omega$ *e*

$$F_1, F_2 : \Omega \to \mathbb{R}$$

duas funções contínuas. Se

$$\vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j} = \nabla f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

e se C *for uma curva paramétrica seccionalmente regular em* Ω*, que começa em* (x_0, y_0)*, termina em* (x_1, y_1) *e esteja toda contida em* Ω*, então*

$$\int_C \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f(x,y) \cdot d\vec{r} = f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0).$$

Exemplo

Seja

$$\vec{F}(x,y) = 2xe^{x^2}\sin y\,\vec{i} + e^{x^2}\cos y\,\vec{j}.$$

Determine

$$\int_C \vec{F}(x,y)\cdot d\vec{r}$$

onde C *é o arco da parábola* $y = \frac{\pi}{2}x^2$ *que vai do ponto* $(0,0)$ *ao ponto* $(1,\frac{\pi}{2})$.

Resolução:

Circulação

Chama-se circulação de um campo $\vec{F}$ ao longo de uma curva seccionalmente regular e fechada C ao integral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

e representa-se por

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Integrais de linha ao longo de curvas fechadas

Teorema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *uma região aberta e conexa. Se*

$$F_1, F_2 : \Omega \to \mathbb{R}$$

forem contínuas, então as seguintes afirmações são equivalentes (todas verdadeiras ou todas falsas):

(a) $\vec{F}(x,y) = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j}$ *é um campo vetorial conservativo em* Ω*;*

(b) $\oint_C \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} = 0$ *para cada curva* C *seccionalmente regular e fechada em* Ω*.*

(c) $\int_C \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r}$ *é independente do caminho de qualquer ponto* P *em* Ω *a qualquer ponto* Q *em* Ω *para cada curva* C *seccionalmente regular em* Ω*.*