Algumas distribuições importantes

1. **Distribuições Discretas**
   - Distribuição Hipergeométrica,
   - Distribuição Binomial;
   - Distribuição de Poisson.

Exemplo

Num aquário existem $N = 9$ peixes, dos quais $M = 5$ estão **saudáveis** *e os restantes $N - M = 4$ estão* **doentes**. *Considere-se a experiência aleatória: extracção ao acaso e sem reposição de $n = 3$ peixes e registo do seu estado de saúde. Associada a esta experiência, considere-se a v.a.*

$$X = \text{ nº de peixes saudáveis na amostra extraída de 3 peixes.}$$

Pretendemos então caracterizar a função de probabilidade, ou massa de probabilidade, da v.a. X, i.e., caracterizar

$$P(X = k), \qquad k \in D_X.$$

Distribuição Hipergeométrica

- Começamos por observar que o suporte da nossa v.a. X é dado por $D_X = \{0, 1, 2, 3\}$
- Temos portanto para cada um dos elementos do suporte D_X

$$P(X = 0) = \frac{C_0^5 \times C_3^4}{C_3^9}, \; P(X = 1) = \frac{C_1^5 \times C_2^4}{C_3^9}, \; P(X = 2) = \frac{C_2^5 \times C_1^4}{C_3^9}, \; P(X = 3) = \frac{C_3^5 \times C_0^4}{C_3^9}.$$

- Nestas condições podemos então escrever a f.m.p. de forma mais compacta como

$$P(X = k) = \frac{C_k^5 \times C_{3-k}^4}{C_3^9} = \frac{C_k^M \times C_{n-k}^{N-M}}{C_n^N}, \qquad k = 0, 1, 2, 3.$$

Na verdade, acabámos de descrever a f.m.p. da **distribuição Hipergeométrica** de parâmetros $N = 9$, $M = 5$ e $n = 3$, i.e., $H(9, 5, 3)$!!

Distribuição Hipergeométrica

Definição (Distribuição Hipergeométrica)

*Considere-se uma população de N elementos, dos quais M possuem determinada característica e os restantes $(N - M)$ não a possuem (**dicotomia**). Considere-se a experiência aleatória que consiste em seleccionar ao acaso e sem reposição n elementos (amostra) dessa população.*

Associada a esta experiência aleatória, defina-se a v.a.

$X -$nº de elementos com a característica, na amostra seleccionada sem reposição.

Nestas condições, a v.a. X tem então função de probabilidade (ou massa de probabilidade) dada por

$$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad max(0, M + n - N) \leq k \leq min(M, n).$$

e diz-se ter distribuição Hipergeométrica de parâmetros (N, M, n). De forma abreviada, é usual escrever-se

$$X \sim H(N, M, n).$$

PROPOSIÇÃO

Seja a v.a. $X \sim H(N, M, n)$. *Então:*

- $E(X) = n\frac{M}{N}$ *(momento de ordem 1)*
- $V(X) = n\frac{M}{N^2(N-1)}(N-M)(N-n)$ *(momento centrado de ordem 2)*

Voltando ao exemplo do aquário temos então para a nossa v.a. $X \sim H(9, 5, 3)$

$$E(X) = 3\frac{5}{9} = \frac{5}{3} \qquad \& \qquad V(X) = 3\frac{5}{9^2(9-1)}(9-5)(9-3) = \frac{5}{9}.$$

Definição (Prova de Bernoulli)

Experiência aleatória com dois possíveis resultados ("Sucesso" ou "Insucesso").

Exemplos:

- No lançamento ao ar de uma moeda em que o sucesso é por exemplo sair "Cara", o insucesso será então sair "Coroa"
- No tiro ao alvo, o sucesso pode ser por exemplo "Acertar no alvo", caso em que o insucesso é "Falhar o alvo"

Distribuição de Bernoulli

Definição (Distribuição de Bernoulli)

É sempre possível definir uma variável aleatória (v.a.) X que toma o valor 1 se o resultado da experiência é "Sucesso" e 0 se é "Insucesso", traduzindo a **dicotomia** *dos resultados. Denotando $p = P(\text{"}Sucesso\text{"}) > 0$, então a função de probabilidade de X é dada por:*

$$X \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{array} \right. , \qquad 0 < p < 1$$

Nestas condições, dizemos que a v.a. X segue uma **distribuição de Bernoulli** *de parâmetro p e escrevemos $X \sim Ber(p)$.*

Proposição

Seja a v.a. $X \sim Ber(p)$. *Então:* $E(X) = p$ *e* $V(X) = p(1-p)$.

Dem.

Sendo X uma v.a. discreta e dada a sua f.m.p. temos então que

- $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$ **c.q.d.**

Analogamente, temos que

- $E(X^2) = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p = p$

Pelo que, vem finalmente também que

- $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = p - p^2 = p(1-p)$ **c.q.d.**

Exemplo

Um aluno conhece bem 60% da matéria dada. Num exame com cinco perguntas, sorteadas ao acaso, sobre toda a matéria, qual a probabilidade de vir a responder correctamente a duas perguntas?

Começamos por definir a v.a.

$$X = \text{ nº perguntas correctas em } n = 5 \text{ perguntas respondidas por um aluno,}$$
$$\text{sendo } p = 0.6 \text{ a probabilidade de um aluno acertar uma pergunta}$$

De seguida observamos que

- se um aluno acerta uma pergunta com probabilidade $p = 0.6$ então o mesmo erra uma pergunta com probabilidade $1 - p = 0.4$
- um aluno pode acertar 2 perguntas em 5 de $\binom{5}{2}$ formas distintas
- $P(X = 2) =$
  $= \binom{5}{2} P(\text{acertar 1 perg.} \wedge \text{acertar outra} \wedge \text{falhar 1 perg.} \wedge \text{falhar outra} \wedge \text{falhar outra})$
  $\underset{ind.}{=} \binom{5}{2} P(\text{acertar 1 perg.})^2 \times P(\text{falhar 1 perg.})^3 = \binom{5}{2} 0.6^2 0.4^3 = 0.2304$

Usando o mesmo raciocínio, facilmente deduzimos a f.m.p. de X

$$P(X = k) = \binom{5}{k} 0.6^k 0.4^{5-k}, \qquad k = 0, \ldots, 5$$

Na verdade, acabámos de descrever a f.m.p. da **distribuição Binomial** de parâmetros $n = 5$ e $p = 0.6$, i.e.,
$Bin(5, 0.6)$!!

Distribuição Binomial

Definição (Distribuição Binomial)

Considere-se uma sucessão de provas de Bernoulli independentes, onde em cada prova a probabilidade de "sucesso", p, é constante. A v.a. $X=$ "número de sucessos em n provas de Bernoulli" segue uma **distribuição Binomial** *de parâmetros n e p, e escrevemos $X \sim Bin(n,p)$. A função de probabilidade é:*

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n \qquad 0 < p < 1$$

Proposição

Considere a v.a. $X \sim Bin(n,p)$. Então, $E(X) = np$ e $V(X) = np(1-p)$.

Voltando ao exemplo do aluno temos então para a nossa v.a. $X \sim Binom(5, 0.6)$

$$E(X) = 5 \times 0.6 = 3 \qquad \& \qquad V(X) = 5 \times 0.6 \times 0.4 = 1.2.$$

Distribuição Binomial

Teorema (Propriedade aditiva da distribuição Binomial)

Sejam $X_i,\ i=1,\ldots,m$, m v. a.'s independentes tais que $X_i \sim Bin(n_i,p)$. Então a sua soma tem também distribuição Binomial, isto é,

$$S_m = \sum_{i=1}^{m} X_i \ \sim \ Bin(n_1+\ldots+n_m,p).$$

Seja

$X_i =$ nº perguntas correctas em $n=5$ perguntas respondidas pelo aluno i,
sendo $p=0.6$ a probabilidade de um aluno acertar uma pergunta

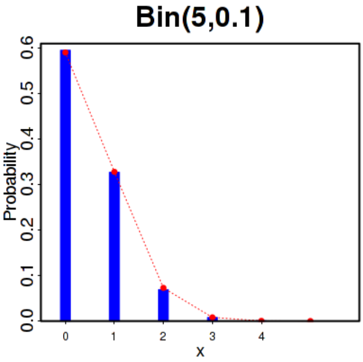
onde $i=1,2$. Qual a probabilidade de entre os dois alunos, 7 respostas estarem correctas?

$(\simeq 0.2150)$

Diferença entre as distribuições Hipergeométrica e Binomial

Hipergeométrica	**Binomial**
População finita constituída por N elementos	*População infinita*
Extracção sem reposição	*Extracção com reposição*
Sucessivas extracções não são independentes	*Sucessivas extracções são indep.*

Apresentamos agora o histograma discreto animado referente a uma amostra de tamanho 10000 da distribuição $Bin(5,p)$ com p a variar entre $0.1 - 0.9$ com passo 0.1 (para a correcta visualização do mesmo é necessário abrir este pdf com recurso ao software Adobe Reader).



Distribuição de Poisson

Definição (Distribuição de Poisson)

Seja X a v.a. que conta o número de ocorrências de um acontecimento num dado intervalo de tempo[a] de duração t sendo λ a taxa de ocorrências por unidade de tempo t.

Dizemos que a variável aleatória X segue uma distribuição de Poisson de parâmetro λ, e escrevemos $X \sim P(\lambda)$, se a função de probabilidade de X é:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda > 0.$$

[a] Note que podemos também considerar uma área, um volume, etc.

Nota: A v.a. X com distribuição de Poisson obedece aos seguintes critérios:

1. a probabilidade de um acontecimento ocorrer num intervalo (de tempo ou de espaço) de amplitude arbitrariamente pequena é proporcional à dimensão do intervalo e independente de ocorrências verificadas em intervalos anteriores;
2. A probabilidade de ocorrer mais do que um acontecimento num intervalo de amplitude arbitrariamente pequena é aproximadamente igual a zero;
3. O número de acontecimentos que ocorrem em dois intervalos disjuntos são independentes;
4. O número de ocorrências em dois intervalos com a mesma duração, têm a mesma distribuição.

Proposição (Valor médio e Variância)

Seja X uma v.a. com distribuição $P(\lambda)$. Então, $E(X)=\lambda$ e $V(X)=\lambda$.

Dem.
Sendo X uma v.a. discreta e dada a sua f.m.p. temos então que

- $$E(X)=\sum_{x\in D_X} xP(X=x)=\sum_{x=0}^{\infty} x\times\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\sum_{x=1}^{\infty} x\times\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}=\sum_{x=1}^{\infty} x\times\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x\times(x-1)!}$$
$$=e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1+1}}{(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x-1=0}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!}=\lambda e^{-\lambda}\times e^{\lambda}=\lambda$$

c.q.d.

Demonstra-se que

- $E(X(X-1))=\lambda^2$

e que

- $E(X(X-1))=\lambda^2 \Leftrightarrow E(X^2)=\lambda^2+\lambda$

Finalmente, temos

- $V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$

c.q.d.

Distribuição de Poisson

Teorema (Aditividade)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_m$ *variáveis aleatórias independentes com* $X_i \sim P(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, m$. *Então,*

$$S_m = \sum_{i=1}^{m} X_i \sim P(\lambda_1 + \ldots + \lambda_m).$$

Exemplo

Admita que a chegada de automóveis a um parque se processa a uma taxa de 180 *automóveis por hora e tem distribuição de Poisson. Caracterize a distribuição do nº de automóveis que chegam ao parque em* 15 *minutos.*

De acordo com a observação acima e a definição de processo de Poisson, sendo a v.a. discreta

$X =$ nº de automóveis que chega a um parque de estacionamento **numa hora** $\sim P(\lambda_{\mathrm{x}})$

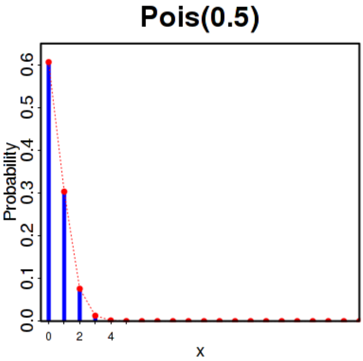
com $\lambda_{\mathrm{x}} = 180$ automóveis por hora, então a v.a. discreta

$Y =$ nº de automóveis que chega a um parque de estacionamento **em 15 mins** $\sim P(\lambda_{\mathrm{y}})$

com $\lambda_{\mathrm{y}} = 180/4 = 45$ automóveis por 15 minutos.

Distribuição de Poisson

Apresentamos agora o histograma discreto animado referente a uma amostra de tamanho 10000 da distribuição $P(\lambda)$ com λ a variar entre $0.5 - 10$ com passo 0.5 (para a correcta visualização do mesmo é necessário abrir este pdf com recurso ao software Adobe Reader).



1. **Distribuições Absolutamente Continuas**
    - Distribuição Exponencial;
    - Distribuição Normal;
    - Distribuição Chi-quadrado;
    - Distribuição t-Student.

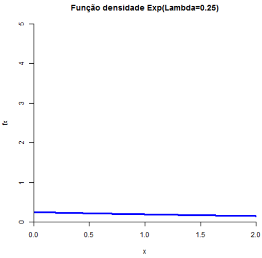
Distribuição Exponencial

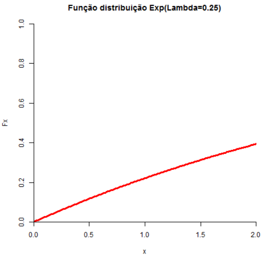
Definição (Distribuição Exponencial)

Uma variável aleatória X diz-se seguir uma **distribuição Exponencial** *de parâmetro λ, e escrevemos $X \sim Exp(\lambda)$, se a sua função densidade probabilidade for dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0\,, & x \leq 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0$$

Apresentamos abaixo os gráficos animados das funções densidade de probabilidade (esquerda) e distribuição (direita) da distribuição $Exp(\lambda)$ com λ a variar entre $0.25 - 5$ com passo 0.25. (para a correcta visualização do mesmo é necessário abrir este pdf com recurso ao software Adobe Reader).





Proposição (Valor médio e Variância)

Seja a v.a. $X \sim Exp(\lambda)$. *Então,* $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ *e* $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Dem.

Sendo X uma v.a. contínua e dada a sua f.d.p. temos então que

- $$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x \times \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \underset{i.p.p.}{=} \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x} \mathrm{d}x =$$
  $$= 0 - \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{\lambda}(e^{-\infty} - 1) = \frac{1}{\lambda}$$ **c.q.d.**

Use novamente a regra de integração por partes (*i.p.p.*) para mostrar que

- $$E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$ **TPC**

Neste seguimento vem finalmente que

- $$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$ **c.q.d.**

Função de Distribuição

Seja a v.a. $X \sim Exp(\lambda)$. *Então, a sua função de distribuição é dada por*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Dem.

Temos pela definição de função distribuição e pelo facto de X ser v.a. contínua que

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{d}u.$$

Ora, no caso em que $x \leq 0$ a f.d.p. $f(x) = 0$ de modo que $F(x) = 0$ para $x \leq 0$. No caso em que $x > 0$ temos então que

$$\int_{-\infty}^{x} f(u)\mathrm{d}u = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda u}\mathrm{d}u = \left[-e^{-\lambda u}\right]_0^x = -e^{-\lambda x} + 1$$

pelo que escrevemos finalmente

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}.$$

c.q.d.

Teorema (Propriedade da falta de memória da distribuição exponencial)

Seja $X \sim Exp(\lambda)$. *Então:* $P(X \geq s+t|X \geq s) = P(X \geq t) \quad \forall t, s > 0$.

Dem.

Comecemos por observar que, sendo X uma v.a. contínua se tem

$$P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - P(X \leq x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Assim,

$$P(X \geq s+t|X \geq s) \underset{def.}{=} \frac{P(X \geq s+t)}{P(X \geq s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X \geq t)$$

c.q.d.

Exemplo

Num dia de semana, o tempo de espera de um aluno da FCT pelo autocarro que faz o trajecto até à Praça de Espanha segue uma distribuição exponencial. Supondo que o tempo médio de espera pelo autocarro é de 15*mins, calcule a probabilidade de*

- *uma vez chegado à paragem, o aluno esperar mais de* 10*mins;*
- *estando o aluno à espera do autocarro já há* 10*mins, ter de esperar ainda mais de* 5*mins.*

Começamos por observar que

$$T = \text{ tempo de espera pelo autocarro } \sim Exp(1/15)$$

já que nos é dito que $T \sim Exp(\lambda)$ e que $E(T) = 1/\lambda = 15$*mins*. Assim temos,

- $P(T > 10) \underset{v.a.cont.}{=} P(T \geq 10) = e^{-1/15*10} = e^{-\frac{2}{3}} \simeq 0.5134$
- $P(T > 10 + 5 | T > 10) \underset{prop.}{=} P(T > 5) \underset{v.a.cont.}{=} P(T \geq 5) = e^{-1/15*5} = e^{-\frac{1}{3}} \simeq 0.7165$

Distribuição Exponencial

Proposição (Relação entre a distribuição Exponencial e Poisson)

Considere um acontecimento que ocorre de acordo com um Processo de Poisson de parâmetro λ, por unidade de tempo. Então, o tempo até à primeira ocorrência e o tempo entre duas ocorrências consecutivas tem distribuição $Exp(\lambda)$.

Exemplo

Voltemos ao exemplo anterior onde

$X =$ *nº de automóveis que chega a um parque de estacionamento* **numa hora** $\sim P(180)$.

Caracterize a v.a. que representa o tempo que decorre entre chegadas consecutivas de dois automóveis ao parque. Calcule a probabilidade de decorrer 1 minuto ou mais entre chegadas consecutivas de dois automóveis.

Pela proposição temos então que

$$T = \text{tempo que decorre entre chegadas consecutivas de 2 automóveis} \sim Exp(180)$$

pelo que a f.d.p. de T vem $f(t) = 180e^{-180t}, t > 0$. Ainda, dado que 1min $\equiv 1/60$h

$$P(T \geq 1/60) = 1 - P(T < 1/60) = 1 - P(T \leq 1/60) = 1 - F(1/60) = e^{-180/60} \simeq 0.04979$$

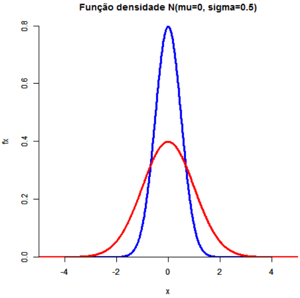
Distribuição Normal

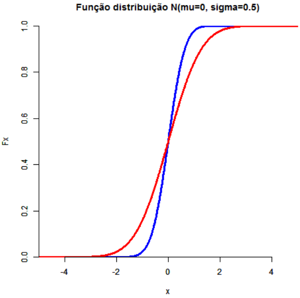
Definição (Distribuição Normal)

Uma variável aleatória X diz-se seguir uma **distribuição Normal** *de parâmetros μ e σ^2, e escrevemos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se a sua função densidade de probabilidade for dada por:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$$

Apresentamos abaixo os gráficos animados das funções densidade de probabilidade (esquerda) e distribuição (direita) da distribuição $N(0, \sigma^2)$ com σ^2 a variar entre $0.5 - 2$ com passo 0.05. (para a correcta visualização do mesmo é necessário abrir este pdf com recurso ao software Adobe Reader).





Proposição

Seja a v.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. *Então* $E(X) = \mu$ *e* $V(X) = \sigma^2$.

Teorema

Seja $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. *Então,* $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Demonstramos apenas que $E(Z) = 0$ e $V(Z) = 1$ usando as propriedades do valor esperado e da variância:

- $E(Z) = E\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right) = \dfrac{1}{\sigma}\Big(E(X) - \mu\Big) = \dfrac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0$
- $V(Z) = V\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right) = \dfrac{1}{\sigma^2}V(X) = \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$

Teorema

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variáveis aleatórias independentes com distribuições $X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Considerando as constantes reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$, com algum $a_i \neq 0$, temos que:

$$Y = a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n \sim N\left(a_1\mu_1 + \ldots + a_n\mu_n, a_1^2\sigma_1^2 + \ldots + a_n^2\sigma_n^2\right)$$

Note que, usando as propriedades do valor esperado e da variância, facilmente verificamos que:

$$\begin{aligned} E\left(Y\right) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E\left(X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i \\ V\left(Y\right) &= V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) \overset{X_i's\ ind.}{=} \sum_{i=1}^{n} V\left(a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V\left(X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 \end{aligned}$$