AM3C – Teste 2024.1 Resolução

Felipe B. Pinto 71951 – EQB

2 de janeiro de 2025

Conteúdo

Grupo I

Questão 1

A equação diferencial linear de primeira ordem

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,y = -x; \quad x \in\,]0, \pi[}$$

Tem como solução geral

- ☐ $y = \frac{c}{\sin x} - x\,\frac{\cos x}{\sin x} + 1$
- ☐ $y = \frac{c}{\sin x} + x\,\frac{\sin x}{\cos x} - 1$
- ☐ $y = \frac{c}{\sin x} - x\,\frac{\cos x}{\sin x}$
- ☐ $y = \frac{c}{\cos x} - x\,\frac{\cos x}{\sin x} + 1$
- ☐ $y = \frac{c}{\cos x} + x\,\frac{\cos x}{\sin x} - 1$
- ☐ $y = \frac{c}{\cos x} + x\,\frac{\sin x}{\cos x}$

Resposta

$$y = \frac{c_0}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int (-x)\,\varphi(x)\;\mathrm{d}x =$$

Using (1.1)

$$= \frac{c_0}{C_2\,\sin x} + \frac{1}{C_2\,\sin x} \int (-x)\,C_2\,\sin x\;\mathrm{d}x =$$

Using (1.2)

$$= \frac{c_0}{C_2\,\sin x} + \frac{1}{C_2\,\sin x}\,C_2\,(x\,\cos x - \sin x - C_3) =$$

$$= \frac{C_4}{\sin x} + x\,\frac{\cos x}{\sin x} - 1 - \frac{C_3}{\sin x} = \frac{C_5}{\sin x} + x\,\frac{\cos x}{\sin x} - 1$$

$$\varphi(x) = \exp\left(\int \frac{\cos x}{\sin x}\;\mathrm{d}x\right) = \exp\left(\int \frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\sin x}\right) = \exp\left(\ln\left(\sin x\right) + C_1\right) = C_2\,\sin x \tag{1.1}$$

$$P(-x\,C_2\,\sin x) = C_2\,P(x\,(-\sin x)) = C_2\,P(x\;\mathrm{d}\cos x) =$$

using $P(u\,v') = u\,v - P(u'\,v)$

$$= C_2\,(x\,\cos(x) - P(\cos x)) = C_2\,(x\,\cos(x) - \sin x - C_3) \tag{1.2}$$

Questão 2

A solução da equação de Bernoulli

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y}}$$

que satisfaz a condição $y(0) = 2$, é:

- ☐ $y = \sqrt{e^{+2\,x} + 3}$
- ☐ $y = \sqrt{3\,e^{+2\,x} + 1}$
- ☐ $y = \sqrt{2\,e^{+2\,x} + 2}$
- ☐ $y = \sqrt{e^{-2\,x} + 3}$
- ■ $y = \sqrt{3\,e^{-2\,x} + 1}$
- ☐ $y = \sqrt{2\,e^{-2\,x} + 2}$

Resposta

$$y = \sqrt{z} = \tag{1.3}$$

Using (1.7)

$$= \sqrt{c_6\,e^{-2\,x} + 1} = \tag{1.4}$$

Using (1.5)

$$= \sqrt{3\,e^{-2\,x} + 1}$$

Using (1.4)

$$y(0) = \sqrt{c_6\,e^{-2*0} + 1} = \sqrt{c_6 + 1} = 2 \implies c_6 = 3 \tag{1.5}$$

$$y' + y = \frac{1}{y} \implies$$

Using (1.3)

$$\implies z' + 2\,z = 2 \tag{1.6}$$

Solving z

Using (1.6)

$$z = \frac{c_0}{\varphi(x)} + \frac{1}{\varphi(x)} \int 2\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x =$$

Using (1.8)

$$= \frac{c_0}{c_2\,e^{2\,x}} + \frac{1}{c_2\,e^{2\,x}} \int 2\,c_2\,e^{2\,x}\,\mathrm{d}x = c_4\,e^{-2\,x} + \frac{1}{c_2\,e^{2\,x}} \int 2\,c_2\,e^{2\,x}\,\mathrm{d}x =$$

Using (1.9)

$$= c_4\,e^{-2\,x} + \frac{1}{c_2\,e^{2\,x}}\,c_2\,(e^{2\,x} + c_3) = c_4\,e^{-2\,x} + 1 + c_5\,e^{-2\,x} = c_6\,e^{-2\,x} + 1 \tag{1.7}$$

$$\varphi(x) = \exp\left(\int 2\,\mathrm{d}x\right) = \exp 2\,(x + c_1) = c_2\,e^{2\,x} \tag{1.8}$$

$$P(2\,\varphi(x))$$

Using (1.8)

$$= P\big(2\,c_2\,e^{2\,x}\big) = c_2\,(e^{2\,x} + c_3) \tag{1.9}$$

Questão 3

A equação differencial

$$\boldsymbol{(5\,x\,y^2 - 2\,y)\ \mathrm{d}x + (3\,x^2\,y - x)\ \mathrm{d}y = 0}$$

Admite um fator integrante na forma $\phi(x, y) = x^m\, y^n$, com $m, n \in \mathbb{N}$. Então:

☐ $m = 3, n = 2$	☐ $m = 2, n = 2$	☐ $m = 1, n = 3$
☐ $m = 1, n = 1$	☐ $m = 2, n = 1$	☐ $m = 3, n = 1$

Resposta

$$\boldsymbol{m = 3, n = 2}$$

Resposta

$$(5\,x\,y^2 - 2\,y)\ \mathrm{d}x + (3\,x^2\,y - x)\ \mathrm{d}y = 0; \quad \varphi(x, y) = x^m\, y^n \implies$$

$$\implies (x^m\, y^n)\big(5\,x\,y^2 - 2\,y\big)\ \mathrm{d}x + (x^m\, y^n)\big(3\,x^2\,y - x\big)\ \mathrm{d}y = 0 \implies$$

$$\implies \frac{\partial}{\partial y}(x^m\, y^n)\big(5\,x\,y^2 - 2\,y\big) = (x^m\, y^{n-1}\, n)\big(5\,x\,y^2 - 2\,y\big) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^m\, y^n)\big(3\,x^2\,y - x\big) = (m\,x^{m-1}\, y^n)\big(3\,x^2\,y - x\big)$$

Questão 4

A equação diferencial linear homogénea

$$\boldsymbol{x\, y'' + x^2\, y' + 4\, y = 0, \quad x > 0}$$

Tem como solução geral a função $y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$. Então a equação não homogénea

$$\boldsymbol{x\, y'' + x^2\, y' + 4\, y = x^3}$$

admite como solução geral a função $y(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)$, onde as funções $c_1(x), c_2(x)$ são determinadas a partir do sistema

- ■ $\begin{cases} c_1'(x)\, y_1 + c_2'(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x)\, y_1' + c_2'(x) y_2' = x^2 \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} c_1(x)\, y_1 + c_2(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x)\, y_1' + c_2'(x) y_2' = x^2 \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} c_1'(x)\, y_1 + c_2'(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x)\, y_1' + c_2'(x) y_2' = x \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} c_1(x)\, y_1 + c_2(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x)\, y_1' + c_2'(x) y_2' = x \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} c_1'(x)\, y_1 + c_2'(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x)\, y_1' + c_2'(x) y_2' = 1 \end{cases}$
- ☐ $\begin{cases} c_1(x)\, y_1 + c_2(x) y_2 = 0 \\ c_1'(x)\, y_1' + c_2'(x) y_2' = 1 \end{cases}$

Resposta

$$y : \begin{pmatrix} 4 \\ +x^2\ \mathrm{D}_x \\ +x\ \mathrm{D}_x^2 \end{pmatrix} y = x^3$$

$$\left\{ \begin{array}{c} c_1'(x)\ \mathrm{D}_x^0 y_1(x) + c_2'(x)\ \mathrm{D}_x^0 y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)\ \mathrm{D}_x\, y_1(x) + c_2'(x)\ \mathrm{D}_x\, y_2(x) = \frac{x^3}{x} = x^2 \end{array} \right\}$$

Questão 5

Acerca de uma função $f(x)$ definida e com derivadas até à segunda ordem em $\mathbb{R}_0^+$ sabe-se que admite transformada de Laplace $F(s)$, que $f(0) = 1$, $f'(0) = -2$. Então a trasnformada de Laplace da função

$$\boldsymbol{e^{-t}\, f''(t) + t\, f'(t)}$$

é:

- ☐ $(s+1)^2\, F(s+1) - s + 2 + s\, F'(s)$
- ☐ $s^2\, F(s) - s + 1 + s\, F'(s) - F(s)$
- ☐ $(s+1)^2\, F(s+1) - s + 1 - s\, F'(s) - F(s)$
- ☐ $s^2\, F(s) - s + 1 + s\, F'(s+1) - F(s+1)$
- ☐ $(s+1)^2\, F(s+1) - s + 1 + s\, F'(s) + F(s)$
- ☐ $s^2\, F(s) - s + 1 + s\, F'(s+1) + F(s+1)$

Resposta

$$\boldsymbol{(s+1)^2\, F(s+1) - s + 1 - s\, F'(s) - F(s)}$$

Grupo II

Determine a solução geral da equação diferencial linear homogénea e de coeficientes constantes

$$\boldsymbol{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\,6 = 0}$$

Resposta

$$P\,y = \left(\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_x - 6\right)y = 0;$$

$$y = \varphi(x)\,\int z(x)\;\mathrm{d}x = \varphi(x)\,\int z(x)\;\mathrm{d}x;$$

$$P\,y = \left(\mathrm{D}_x^2 + \mathrm{D}_x - 6\right)\left(\varphi(x)\,\int z(x)\;\mathrm{d}x\right) = 0;$$

$$\mathrm{D}_x y = \mathrm{D}_x\left(\varphi(x)\,\int z(x)\;\mathrm{d}x\right);$$

$$\mathrm{D}_x^2 y = \mathrm{D}_x^2\left(\varphi(x)\,\int z(x)\;\mathrm{d}x\right)$$

met ver const arb

Utilizando o método da variação das constantes arbitrárias, determine a solução geral da equação não homogénea

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y\,6 = -5\,e^{2\,x}\ \cos x$$

Resposta

$$y : \begin{pmatrix} -6 \\ +1\ \mathrm{D}_x \\ +1\ \mathrm{D}_x^2 \end{pmatrix} y = \left(-5\,e^{2\,x}\ \cos(x)\right)$$

$$y = c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x);$$

$$c_1(x) = \int c_1'(x)\ \mathrm{d}x;$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x)\ \mathrm{d}x$$

$$c_1'(x) = \frac{1}{W(y_1(x), y_2(x))} \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{D}_x^0 y_2(x) \\ -5\,e^{2\,x}\ \cos(x) & \mathrm{D}_x y_2(x) \end{vmatrix}$$

$$c_2'(x) = \frac{1}{W(y_1(x), y_2(x))} \begin{vmatrix} \mathrm{D}_x^0 y_1(x) & 0 \\ \mathrm{D}_x y_1(x) & -5\,e^{2\,x}\ \cos(x) \end{vmatrix}$$

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \det \begin{bmatrix} \mathrm{D}_x^0\,y_1(x) & \mathrm{D}_x^0\,y_2(x) \\ \mathrm{D}_x\,y_1(x) & \mathrm{D}_x\,y_2(x) \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} c_1'(x)\ \mathrm{D}_x^0 y_1(x) + c_2'(x)\ \mathrm{D}_x^0 y_2(x) & = & 0 \\ c_1'(x)\ \mathrm{D}_x\,y_1(x) + c_2'(x)\ \mathrm{D}_x\,y_2(x) & = & -5\,e^{2\,x}\ \cos(x) \end{Bmatrix};$$

$$\mathrm{D}_x\,y_1(x) = \mathrm{D}_x\,y_1(x);$$

$$\mathrm{D}_x\,y_2(x) = \mathrm{D}_x\,y_2(x)$$

Grupo III

Q1 a.

Determine todas as soluções da equação de Clairaut

$$y = x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{3}$$

Q1 b.

Utilizando a mudança de variável definida por $x = 1/t$, resolva a equação

$$y = -x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^6\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3, \quad x > 0$$

Sug: Após a mudança de variável utilize (Q1 a.).

Grupo IV

Utilize a transformada de Laplace para resolver o problema de valores iniciais

$$\boldsymbol{y'' + y' + y\,5/2 = \delta(t-2), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1}$$

Sug: tenha em contra que $s^2 + s + 5/2 = (s + 1/2)^2 + 9/4.$

Grupo V

Considere a equação diferencial lienar de ordem n e coeficientes constantes

$$\left(\mathrm{D}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{n}} + \sum_{\boldsymbol{k=0}}^{\boldsymbol{n-1}} \boldsymbol{\alpha_k}\ \mathrm{D}_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{k}}\right) \boldsymbol{y} = \boldsymbol{e^{\alpha\, x}}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R} \tag{5.10}$$

Seja $P(r) = r_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, r^k.$ admitimos que $r = \alpha$ é raiz da equação $P(r) = 0$ com grau de multiplicidade um. Justifique $P'(\alpha) = 0$.

A equação (5.10) tem uma solução particular da forma

$$\bar{y} = \frac{c}{2\,P'(\alpha)}\,x\,e^{\alpha\,x}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Sabendo que

$$\mathrm{D}_x^k\,(x\,e^{\alpha\,x}) = k\,\alpha^{k-1}\,e^{\alpha\,x} + \alpha^k\,x\,e^{\alpha\,x}, \quad \forall\,k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{D}_x^k = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}$$

Determine, justificando detalhadamente, o valor de c.