El Problema de Asignación

Carlos Castro

UTFSM

Noviembre 2020

Outline

El Problema de Asignación

- Considera n demandas a satisfacer y n recursos para satisfacerlas
- Cada demanda debe ser satisfecha por un sólo recurso y un recurso no se puede utilizar para satisfacer más de una sóla demanda
- Se tiene una matriz de asignación $n \times n$ siendo cada elemento c_{ij} el costo de satisfacer la demanda j con el recurso i.
- El problema de aisgnación consiste en hallar aquella comnbinación de recursos y demandas que minimizan el costo total de asignación.

Ejemplo

Una compañía debe asignar tres jefes de proyecto a tres clientes que requieren un estudio de investigación de mercados. El tiempo requerido para realizar cada estudio depende de la experiencia y habilidad del jefe asignado a dicho estudio. Se dispone de datos históricos que permiten estimar el tiempo que cada jefe de proyecto demoraría en realizar cada estudio:

	Estudio		
Jefe de proyecto	A	B	C
X	10	15	9
Y	9	18	5
Z	6	14	3

Como los tres proyectos tienen la misma prioridad, la compañía debe asignar los jefes de manera que la cantidad total de días requeridos para completar los tres proyectos sea minimizada.

Modelo de programación lineal extendido

- Variables:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{si el jefe de proyecto } i \text{ es asignado al estudio } j \\ 0, \text{si el jefe de proyecto } i \text{ no es asignado al estudio } j \\ \quad \forall i = 1, \ldots, 3; j = 1, \ldots, 3 \end{cases}$$

- Función objetivo:

$$Min \;\; z = 10x_{11} + 15x_{12} + 9x_{13} +$$

$$9x_{21} + 18x_{22} + 5x_{23} +$$

$$6x_{31} + 14x_{32} + 3x_{33}$$

Modelo de programación lineal extendido

- Restricciones:
  - Un jefe de proyecto debe ser asignado a un sólo estudio:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1$$

  - Un estudio debe ser asignado a un sólo jefe de proyecto:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$$

  - Valores posibles para las variables:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}; \quad \forall i = 1, \ldots, 3; j = 1, \ldots, 3$$

Modelo de programación lineal general

- Variables:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{si el recurso } i \text{ es asignado a la demanda } j \\ 0, \text{si el recurso } i \text{ no es asignado a la demanda } j \\ \quad \forall i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

- Función objetivo:

$$Min \;\; z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \times x_{ij}$$

Modelo de programación lineal general

- Restricciones:
  - Un recurso debe ser asignado a una sóla demanda:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \;\; \forall i = 1, \ldots, n$$

  - Una demanda debe ser asignada a un sólo recurso:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \;\; \forall j = 1, \ldots, m$$

  - Valores posibles para las variables:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}; \;\; \forall i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, n$$

Búsqueda exhaustiva

	Estudio		
Jefe de proyecto	A	B	C
X	10	15	9
Y	9	18	5
Z	6	14	3

Analizando todas las combinaciones posibles:

$X \rightarrow$ $Y \rightarrow$ $Z \rightarrow$	A: 10 B: 18 C: 3	A: 10 C: 5 B: 14	B: 15 A: 9 C: 3	B: 15 C: 5 A: 6	C: 9 A: 9 B: 14	C: 9 B: 18 A: 6
Costo	31	29	27	26	32	33

Solución óptima: $X \rightarrow B$; $Y \rightarrow C$; $Z \rightarrow A$; Costo mínimo: 26

Búsqueda exhaustiva

- La resolución del problema de asignación utilizando búsqueda exhaustiva requiere analizar $n!$ soluciones posibles:

$$
\begin{aligned}
3! &= 6 \\
8! &= 40{,}320 \\
10! &= 3{,}628{,}800
\end{aligned}
$$

- Esta forma de resolver el problema es muy ineficiente para problemas grandes.

Principio fundamental

Si una matriz de asignación es modificada sumando o restando una constante a todos los elementos de una fila o columna, la asignación óptima en la matriz modificada es la misma que la asignación óptima en la matriz original

Minimización de asignaciones

- Si se resta la constante k a cada elemento de la primera fila y, como uno y sólo uno de los elementos de la primera fila puede aparecer en una matriz solución, el valor de todas las soluciones se ha disminuido de valor exactamente lo mismo que las otras soluciones y todavía debe ser óptima para el problema modificado.
- Esta manipulación se puede hacer en varias filas y columnas simultáneamente y se obtiene la misma conclusión por inducción.

Paso 1

Reducir la matriz substrayendo el elemento más pequeño en cada fila de cada elemento en esa fila (reducción por filas) y luego substraer el elemento más pequeño en cada columna de cada elemento en esa columna (reducción por columnas).

Paso 1: Reducción por filas

$$\begin{array}{cccc} 10 & 15 & 9 & (-9) \\ 9 & 18 & 5 & (-5) \\ 6 & 14 & 3 & (-3) \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 6 & 0 \\ 4 & 13 & 0 \\ 3 & 11 & 0 \end{array}$$

- En cada fila aparece un cero.
- Se han restado $9 + 5 + 3 = 17$ unidades a cada solución de la matriz original, puesto que en cada solución habrá un término de cada fila.

Paso 1: Reducción por columnas

$$\begin{array}{ccc} 1 & 6 & 0 \\ 4 & 13 & 0 \\ 3 & 11 & 0 \\ (-1) & (-6) & (0) \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{array}$$

- En cada columna aparece un cero.
- Se han restado $1 + 6 + 0 = 7$ unidades a cada solución de la matriz original, puesto que en cada solución habrá un término de cada columna.

Paso 1: Resumen

$$\begin{matrix} 10 & 15 & 9 \\ 9 & 18 & 5 \\ 6 & 14 & 3 \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{matrix}$$

- En cada fila aparece un cero.
- En cada columna aparece un cero.
- Se ha restado un total de $9 + 5 + 3 + 1 + 6 + 0 = 24$ unidades a cada solución de la matriz original.

Paso 2

1. Encontrar la cantidad mínima de líneas horizontales y verticales (filas o columnas) necesarias para cubrir todos los cero de la matriz.
2.
   - Si la cantidad es n (cantidad de filas o columnas), se puede determinar una solución óptima de valor cero
   - Si no se debe seguir con el paso 3

Paso 2: Cubrir asignaciones de costo cero

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{matrix}$$

Cantidad mínima de líneas: 2

Paso 2: Explicación

- El trazado de líneas a través de los cero de la matriz de asignación intenta comprobar si es posible formar una matriz de asignación posible.
- En una matriz de asignación posible se tiene una asignación en cada fila y una asignación en cada columna.
- No importa cuántas líneas se tracen en filas o columnas o en ambas, nunca se cubre más de una asignación por línea.
- Así, siempre se necesita un mínimo de n líneas para cubrir todas las asignaciones. Pero si se puede cubrir los ceros con menos de n líneas, no es posible formar tal solución.

Paso 3

1. Substraer el valor más pequeño, no cubierto por líneas, de cada elemento no cubierto por líneas y sumar ese valor en cada elemento en la intersección de dos líneas.
2. Ir al paso 2.

Paso 3

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \end{array}$$

Menor elemento: 2

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0{+}2 \\ 3{-}2 & 7{-}2 & 0 \\ 2{-}2 & 5{-}2 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}$$

Paso 3: Explicación

Suponiendo que el elemento menor no cubierto por líneas es k:

- Restar k de todas las filas del problema
- Sumar k a todos los elementos cubiertos por líneas horizontales
- Sumar k a todos los elementos cubiertos por líneas verticales

Paso 3: Explicación

El resultado es:

- Todos los elementos no cubiertos por línea han sido disminuidos en k
- Todos los elementos que están en la intersección de dos líneas han aumentado en k
- Todos los elementos cubiertos por líneas pero que no están en la intersección de dos líneas no han sido modificados.

Estas operaciones de sumas y restas de constantes a columnas y filas transforman el problema original en uno equivalente.

Paso 3: Explicación

En el ejemplo:

- Se han restado $-2 + -2 + -2 = -6$ unidades a cada solución de la matriz original.
- Se han sumado $2 + 2 = 4$ unidades a cada solución de la matriz original.
- En términos netos, en el Paso 3 se han restado $-6 + 4 = -2$ unidades.
- En total, considerando las 24 unidades restadas en el Paso 1, se han restado $24 + 2 = 26$ unidades.

Nueva iteración

Paso 2:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}$$

Cantidad mínima de líneas: 3

Por lo tanto, existe una asignación óptima de costo cero.

Identificación de asignación óptima

Si la mínima cantidad de líneas es *n*, reemplazando los cero independientes con los valores originales en dichas posicones y todos los otros elementos con ceros, se tiene una matriz de asignación posible.

Identificación de asignación óptima

Para determinar la asignación óptima:

1. Buscar filas o columnas con un sólo 0
2. Asignar la posición en la cual se encuentra dicho 0 y tarjar la fila y columna en que se encuentra
3. Repetir pasos 1 y 2 hasta asignar todo

Identificación de asignación óptima

$$
\begin{matrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{matrix}
\Rightarrow
\begin{matrix} \cancel{0} & \boxed{\cancel{0}} & \cancel{2} \\ 1 & \cancel{5} & 0 \\ 0 & \cancel{3} & 0 \end{matrix}
\Rightarrow
\begin{matrix} \cancel{0} & \boxed{\cancel{0}} & \cancel{2} \\ \cancel{1} & \cancel{5} & \boxed{\cancel{0}} \\ 0 & \cancel{3} & \cancel{0} \end{matrix}
\Rightarrow
\begin{matrix} \cancel{0} & \boxed{\cancel{0}} & \cancel{2} \\ \cancel{1} & \cancel{5} & \boxed{\cancel{0}} \\ \boxed{\cancel{0}} & \cancel{3} & \cancel{0} \end{matrix}
$$

Identificación de asignación óptima

Solución óptima:

$$\begin{array}{cccc} & A & B & C \\ X & 0 & \boxed{0} & 2 \\ Y & 1 & 5 & \boxed{0} \\ Z & \boxed{0} & 3 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} X \rightarrow B \\ Y \rightarrow C \\ Z \rightarrow A \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & A & B & C \\ X & 10 & \boxed{15} & 9 \\ Y & 9 & 18 & \boxed{5} \\ Z & \boxed{6} & 14 & 3 \end{array}$$

- Costo mínimo: $15 + 5 + 6 = 26$
- El costo mínimo es igual a la cantidad de unidades restadas durante el proceso de resolución

Maximización de asignaciones

Para resolver un problema de maximización existen dos procedimientos alternativos:

- Convertir el problema de maximización en un problema de minimización equivalente
- Trasladar la escala del problema

Convertir problema de maximización en uno de minimización

- Convertir todos los elementos de la matriz de ganancias en costos de oportunidad: restar cada elemento en cada columna del mayor elemento en esa columna
- Aplicar el método Húngaro para minimizar los costos de oportunidad

Matriz de costos de oportunidad

Matriz de ganancias:

$$\begin{matrix} 10 & 15 & 9 \\ 9 & 18 & 5 \\ 6 & 14 & 3 \end{matrix}$$

Matriz de costos de oportunidad:

$$\begin{matrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{matrix}$$

Minimizando la matriz de costos de oportunidad

Matriz de costos de oportunidad:

$$\begin{matrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

- Paso 1: Ya existe un cero en cada fila y cada columna.
- Paso 3: Cantidad de líneas = 3, por lo tanto, existe una asignación óptima de costo cero.

Identificando la solución óptima

Asignación óptima:

$$\begin{matrix} 0 & 3 & \color{red}{0} \\ 1 & \color{red}{0} & 4 \\ \color{red}{0} & 0 & 2 \end{matrix}$$

En la matriz de ganancias:

$$\begin{matrix} 10 & 15 & \color{red}{9} \\ 9 & \color{red}{18} & 5 \\ \color{red}{6} & 14 & 3 \end{matrix}$$

Ganancia máxima: $9 + 18 + 6 = 33$

Trasladando la escala

- Cambiar el signo de todos los elementos de la matriz de ganancias.
- Restar el elemento más pequeño (más negativo) de todos los elementos de la matriz modificada.
- Aplicar el método Húngaro para minimizar la matriz modificada

Trasladando la escala

Matriz de ganancias:

10	15	9
9	18	5
6	14	3

Cambiando signo a todos los elementos:

-10	-15	-9
-9	-18	-5
-6	-14	-3

Restando menor elemento (-18) a todos los elementos:

8	3	9
9	0	13
12	4	15

Trasladando la escala: Explicación

Estos pasos son válidos pues sumar una constante a las filas o columnas de la matriz no cambia la naturaleza del problema.

Minimizando con el método húngaro

Paso 1:

8	3	9
9	0	13
12	4	15
(-8)	(0)	(-9)

0	3	0	(0)
1	0	4	(0)
4	4	6	(-4)

0	3	0
1	0	4
0	0	2

Paso 2: Cantidad de líneas = 3, por lo tanto, existe una asignación óptima de costo cero.

Identificando la solución óptima

Asignación óptima:

$$\begin{matrix} 0 & 3 & \color{red}{0} \\ 1 & \color{red}{0} & 4 \\ \color{red}{0} & 0 & 2 \end{matrix}$$

En la matriz de ganancias:

$$\begin{matrix} 10 & 15 & \color{red}{9} \\ 9 & \color{red}{18} & 5 \\ \color{red}{6} & 14 & 3 \end{matrix}$$

Ganancia máxima: $9 + 18 + 6 = 33$

Casos desbalanceados

- El método húngaro requiere igual cantidad de filas que de columnas.
- Cuando la cantidad de filas es distinta que la cantidad de columnas, se agregan filas o columnas artificiales, según corresponda, para igualar dichas cantidades.
- Todos los elementos de las filas o columnas artificiales son 0 pues no generan costos ni ganancias.
- Este balance de la matriz debe realizarse antes de aplicar cualquier operación sobre ésta.

Casos desbalanceados

Matriz original:

	A	B	C
X	10	15	9
Y	9	18	5
Z	6	14	3
W	8	16	6

$$\Downarrow$$

Matriz balanceada:

	A	B	C	D
X	10	15	9	0
Y	9	18	5	0
Z	6	14	3	0
W	8	16	6	0

La demanda *D* no existe, el recurso que se le asigne realmente no desarrollará nada, el recurso no será asignado.

Óptimos alternativos

Si aparece un 0 en filas o columnas no tarjadas, existen óptimos alternativos.

Manejo de asignaciones imposibles

Cuando exactamente se desea que un método no sea asignado a una exigencia, y viceversa, se denomina una asignación imposible. En la matriz se representa por:

- $+M$ si el problema es de minimización
- $-M$ si el problema es de maximización

con $M \to +\infty$

Manejo de asignaciones obligatorias

Simplemente se realiza la asignación y se eliminan la fila y la columna involucradas de la matriz original.

Manejo de coeficientes negativos en la matriz

Añadir el valor absoluto del mínimo elemento en la fila a todos los elementos de esa fila.

Ejemplo

Maximizar:

	1	2	3	4
A	10	6	12	8
B	15	18	5	11
C	17	10	13	16
D	14	12	13	10
E	14	16	6	12

$$\Downarrow$$

Matriz balanceada:

10	6	12	8	0
15	18	5	11	0
17	10	13	16	0
14	12	13	10	0
14	16	6	12	0

El método húngaro:

Matriz balanceada:

$$\begin{matrix} 10 & 6 & 12 & 8 & 0 \\ 15 & 18 & 5 & 11 & 0 \\ 17 & 10 & 13 & 16 & 0 \\ 14 & 12 & 13 & 10 & 0 \\ 14 & 16 & 6 & 12 & 0 \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

Matriz de costos de oportunidad:

$$\begin{matrix} 7 & 12 & 1 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 0 \end{matrix}$$

Minimizando la matriz de costos de oportunidad

$$\begin{array}{ccccc} 7 & 12 & 1 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 6 & 11 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 8 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 10 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 9 & 5 & 2 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 4 & 10 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{array}$$

Identificando solución óptima

Solución óptima:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 10 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 9 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc} 10 & 6 & 12 & 8 & 0 \\ 15 & 18 & 5 & 11 & 0 \\ 17 & 10 & 13 & 16 & 0 \\ 14 & 12 & 13 & 10 & 0 \\ 14 & 16 & 6 & 12 & 0 \end{array}$$

Asignación	Ganancia
A $\rightarrow \emptyset$	-
B $\rightarrow$ 2	18
C $\rightarrow$ 4	16
D $\rightarrow$ 3	13
E $\rightarrow$ 1	14
Total	61

El Problema de Asignación

Carlos Castro

UTFSM

Noviembre 2020