Engenharia

Cálculo Numérico

Profa.: Danielle Teixeira, D.sc
danielle.teixeira@professores.ibmec.edu.br

Capítulo 3 – Raízes de Equações ou Zero de Funções

Sumário

Introdução

Definição 1:

Dizemos que x_0 é uma raiz ou zero de f(x) se $f(x_0) = 0$.

Exemplo 01:

Seja $f(x) = x^2 - 7$ as raízes dessa equação são: A = -2,6458 e B = 2,6458. A figura 1 apresenta o gráfico relativo a essa função.

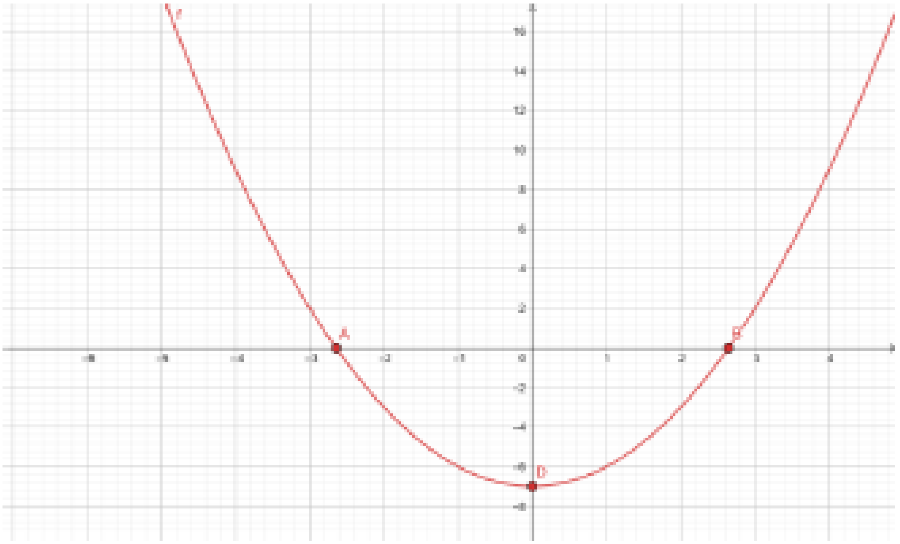


Figura 1: Gráfico da função $f(x) = x^2 - 7$

Para resolver equações do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, conforme Exemplo 01, usamos a fórmula quadrática $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$ e assim, obtemos a solução analítica.

Contudo, existem várias equações (algébricas e transcendentais) que não podem ser resolvidas analiticamente.

Exemplo 02:

A função $f(x) = e^{-x} - x$ não tem solução analítica, ou seja, não existe uma fórmula ou um procedimento de solução. O gráfico de $f(x) = e^{-x} - x$ é apresentado na figura 2.

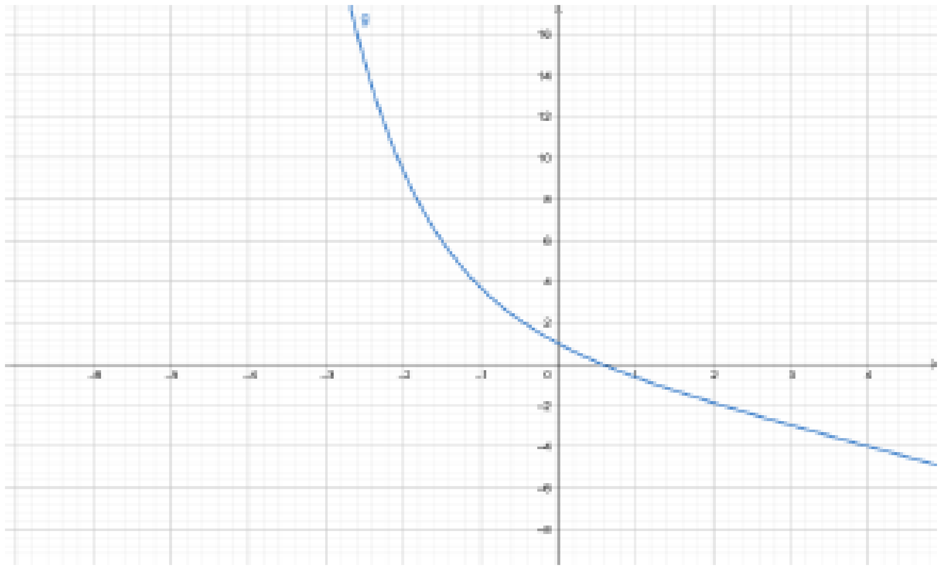


Figura 2: Gráfico da função $f(x) = e^{-x} - x$

Exemplo 03: Exemplos de funções transcendentes:

a) $f(x) = e^{-x} - x$

b) $f(x) = \ln x^2 - 1$

c) $f(x) = e^{-0,2} sen(3x - 0,5)$

Os métodos padrão para localizar as raízes se dividem em dois tipos:

1. Determinação de raízes reais de equações algébricas e transcendentes

   Essas técnicas são desenvolvidas para determinar o valor de uma única raiz com base no conhecimento prévio da sua localização aproximada.

2. Determinação de todas as raízes reais e complexas de polinômios

   Esses métodos são desenvolvidos especificamente para polinômios. Determinam todas as raízes do polinômio ao invés de uma única raiz a partir de uma posição aproximada.

Neste curso de Cálculo Numérico iremos estudar os principais métodos do tipo 1 que se dividem em dois subtipos:

- Método gráfico
- Métodos intervalares
  - Método da Bisseção
  - Método da Falsa Posição
- Métodos Abertos
  - Método de Newton-Raphson
  - Método da Secante

2.1 Métodos Gráficos e Métodos Intervalares

Teorema 1: Se uma função contínua f(x) assume valores de sinais opostos nos extremos do intervalo $[a,b]$, isto é, $f(a).f(b)<0$, então existe pelo menos um ponto $x_0 \in [a,b]$, tal que $f(x_0)=0$

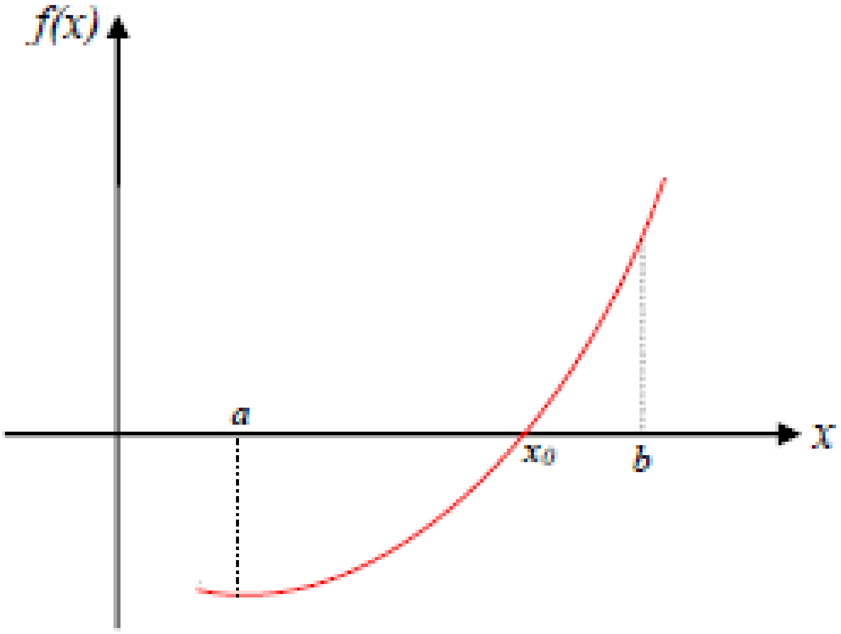


Figura 3: Gráfico da função contínua f(x)

A obtenção dos zeros da função f(x) é dividida bem duas fases:

Parte 1: Isolamento das raízes - obter um intervalo que contém uma raiz. Isto pode se feito através do método gráfico.

Parte 2: Refinamento – refinar a aproximação inicial até obter uma aproximação para a raiz dentro de uma certa precisão prefixada. Isto pode ser feito pelos métodos iterativos (métodos intervalares e métodos abertos)

2.1.1 Métodos Gráficos

Neste método é feita uma análise teórica e gráfica da função f(x) (vide o exemplo 02).

As raízes de uma função podem ser obtidas através do método gráfico a partir de três procedimentos.

1- O primeiro é esboçar o gráfico de f(x) e localizar os pontos onde a curva intercepta o eixo x seguindo os 9 passos de elaboração aprendido no Cálculo I.

2- O segundo, é usar programas que traçam gráficos de funções (Excel, Maple, Matlab, Geogebra etc...).

Observação:

O Geogebra (https://www.geogebra.org/graphing) é um software livre e de fácil interface. Todo os gráficos aqui apresentados foram elaborados com esse software.

Exercício 01:

Trace no Geogebra os gráficos das funções apresentados no exemplo 03.

3- O terceiro método consiste a partir de f(x), obter g(x) = h(x) esboçar os seus gráficos e localizar os pontos onde g e h se interceptam.

Exemplo 04:

Seja $f(x) = x^2 - 2x - 3$ ache as suas raízes através do terceiro método gráfico.

Solução:

Seja $f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 2x + 3$, dividimos em 2 funções:

$$g(x) = x^2 \text{ e } \mathrm{h(x)} = 2x + 3$$

Vamos plotar os gráficos g(x) e h(x) e as raízes são os pontos onde esses gráficos se interceptam.

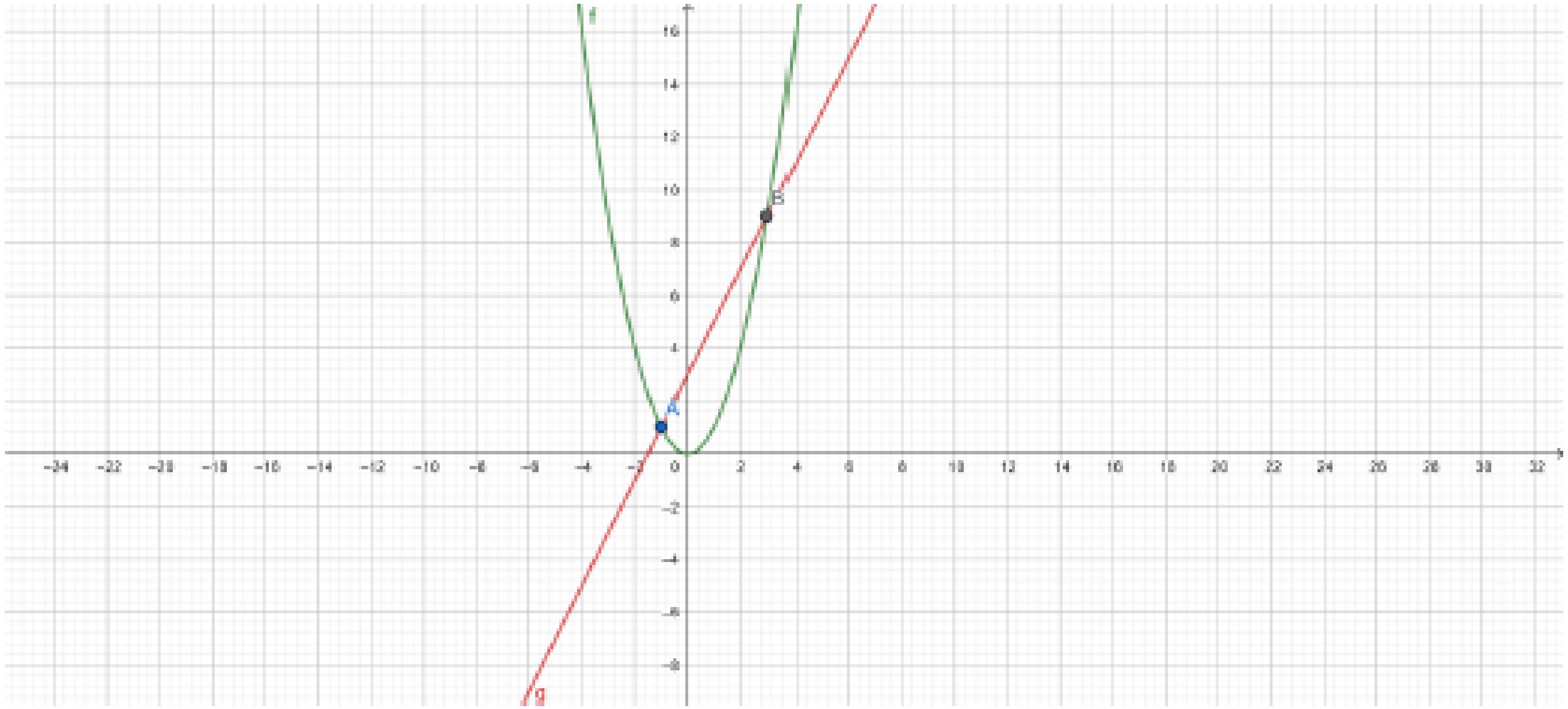


Figura 4: Gráfico das funções g(x) e h(x)

Os pontos de interseção entre as funções g e h estão marcados nos pontos

A = (-1,1) e ponto B = (3,9), conforme o gráfico da figura 4. Portanto, as raízes da função $f(x) = x^2 - 2x - 3$ são x = -1 e x = 3.

Observação:

Os métodos de refinamento de raiz pertencem à classe dos métodos iterativos.

Definição 2: Um método iterativo consiste em uma sequência de instruções que são executados, passo a passo. Algumas das quais são repetidas em ciclos. A execução de um ciclo recebe o nome de iteração.

- Método iterativo = Sequência de ciclos
- Iterativo = um ciclo (loop)
- Iteração k depende da iteração anterior k-1
- Teste ou critérios de paradas verificam se o resultado da iteração k atingiu o resultado esperado

Os métodos iterativos podem ser representados por um diagrama de fluxo, conforme figura 5.

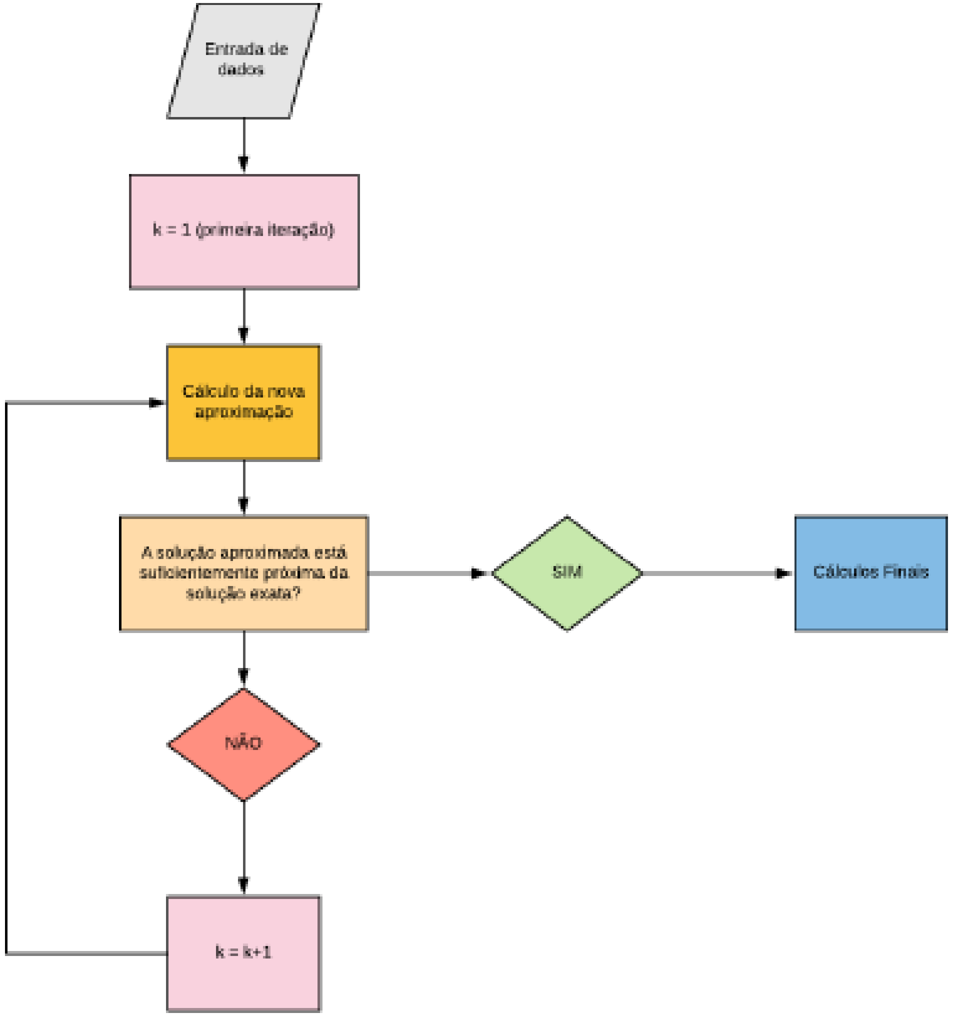


Figura 5: Diagrama de fluxo representando os métodos iterativos

Critério de parada:

O valor aproximado da raiz x_k está suficientemente próximo do valor da raiz exata x_0?

Para responder essa pergunta temos que verificar se valor aproximado da raiz x_k está suficientemente próxima da raiz exata x_0, com precisão ε, se:

I. $|x_k - x_0| < \varepsilon$

II. $|f(x_k)| < \varepsilon$

O valor da raiz exata x_0 não é conhecido.

Nem sempre é possível satisfazer simultaneamente (I) e (II), conforme visto nos casos 1 e 2 a seguir.

Caso 1: Neste caso $\left|f(x_k)\right| < \varepsilon$ mas $\left|x_k - x_0\right| >> \varepsilon$

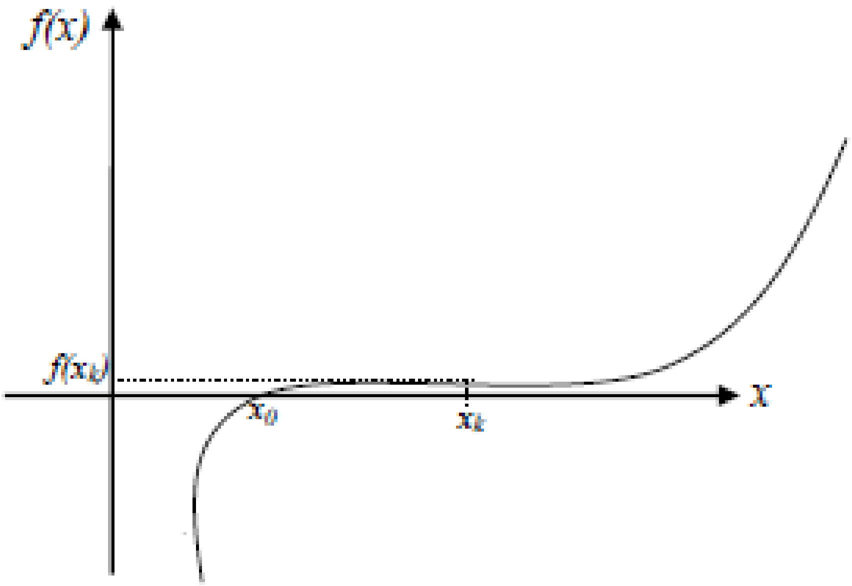


Figura 6: Gráfico da função do caso 1.

Observação: Neste caso é melhor considerar o erro relativo percentual

$$\left|\frac{x_k - x_0}{x_0}\right| x100\%$$

Caso 2: Neste caso $\left|f(x_k)\right| >> \varepsilon$ mas $\left|x_k - x_0\right| < \varepsilon$

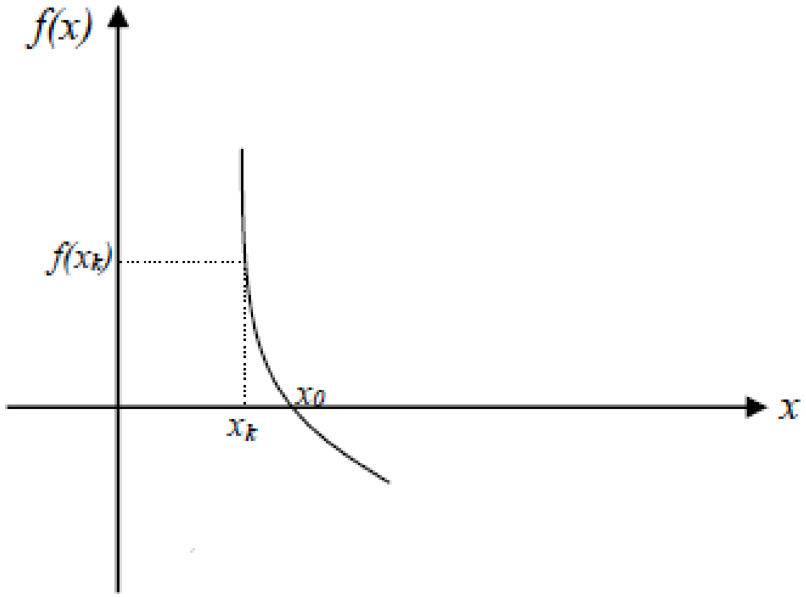


Figura 7: Gráfico da função do caso 2.

Observações:

Observe que o item (I) do critério de parada não implica no item (II) e vice versa.

Métodos numéricos devem satisfazer os dois critérios, preferencialmente.

No item (I) do critério de parada, devemos reduzir o intervalo que contém a raiz a cada iteração, conforme Figura 8.

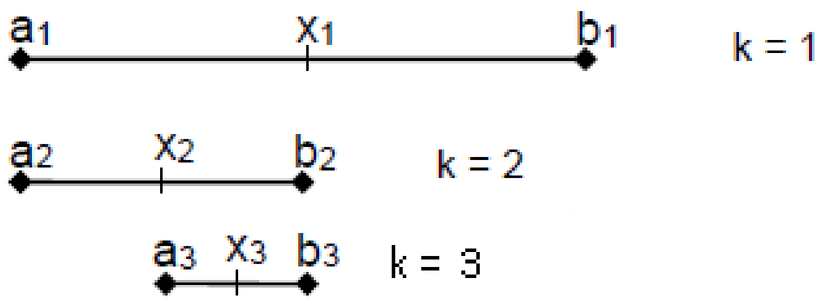


Figura 8: Esquema de redução do intervalo a cada iteração

Métodos Intervalares

Os métodos intervalares têm como ideia principal obter uma aproximação inicial para a raiz que está contida em um intervalo [a, b] e, em seguida, refinar essa aproximação através de um processo iterativo, conforme figura 8. Vermos a seguir os métodos de Bisseção e o Método da Falsa-Posição.

2.1.2 Método da Bisseção

Seja a função f(x) contínua no intervalo fechado [a,b] e tal que f(a).f(b)<0. Suponha que o intervalo aberto (a,b) contenha apenas raiz da equação $f(x_0) = 0$

Objetivo: reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz até que $(b-a)<\varepsilon$, dividindo [a,b] ao meio sucessivamente, conforme a figura 9.

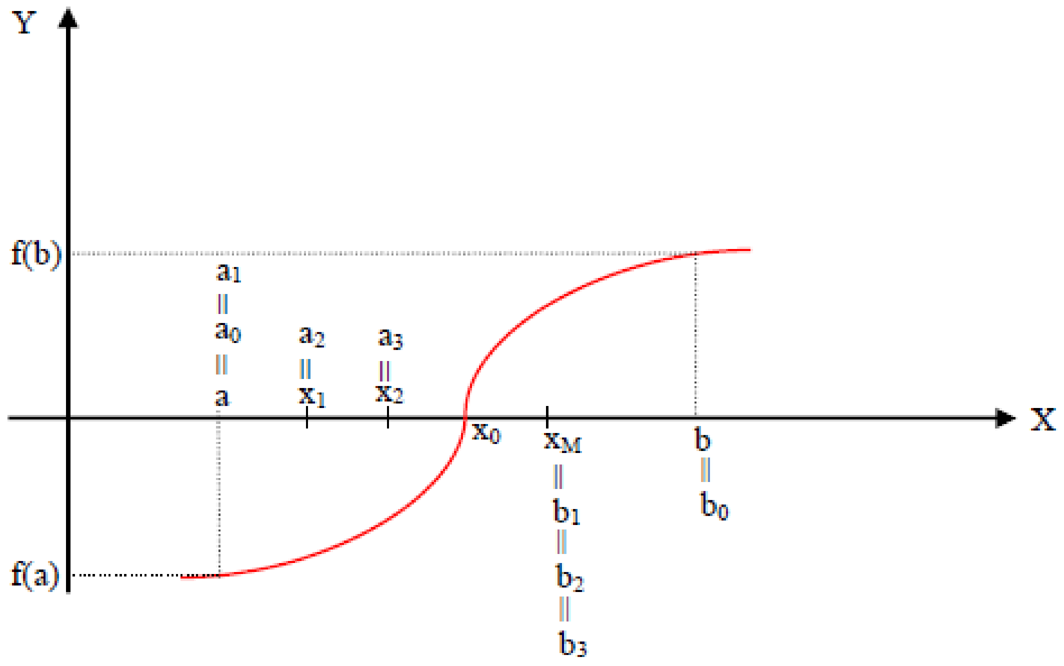


Figura 9: Método da Bisseção

Desenvolvimento do método da bisseção

- i = 0 (primeira iteração)

$a_0 = a$ e $b_0 = b$ (extremos do intervalo de interesse)

cálculo do valor médio no intervalo

$$x_M = \frac{a_0 + b_0}{2}$$

verificação do sinal da função

$$\begin{cases} f(a_0) < 0 \\ f(b_0) > 0 \\ f(x_M) > 0 \end{cases}$$

sinal da função: negativo

sinal da função: positivo

Ibmec

a partir do sinal da função
obtemos os novos extremos do intervalo

$a_1 = a_0$, $b_1 = x_M$ e $x_0 \in (a_0, x_M)$ (novos extremos)

- i = 1 (segunda iteração)

$a_1 = a$ e $b_1 = x_M$ (extremos do intervalo de interesse)

cálculo do valor médio no intervalo

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

verificação do sinal da função

$$\begin{cases} f(a_1) < 0 \\ f(b_1) > 0 \longleftarrow \text{sinal da função: positivo} \\ f(x_1) < 0 \longleftarrow \text{sinal da função: negativo} \end{cases}$$

$\Downarrow$ a partir do sinal da função obtemos os novos extremos do intervalo

$a_2 = x_1$, $b_2 = b_1$ e $x_0 \in (x_1, b_1)$ (novos extremos)

- i = 2 (terceira iteração)

$a_2 = x_1$, $b_2 = b_1$ (extremos do intervalo de interesse)

$\Downarrow$ cálculo do valor médio no intervalo

$\Downarrow$

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

$\Downarrow$ verificação do sinal da função

$$\begin{cases} f(a_2) < 0 \\ f(b_2) > 0 \\ f(x_2) < 0 \end{cases}$$

$f(b_2) > 0 \leftarrow$ sinal da função: positivo

$f(x_2) < 0 \leftarrow$ sinal da função: negativo

$\Downarrow$ a partir do sinal da função obtemos os novos extremos do intervalo

$a_3 = x_2$, $b_3 = b_2$ e $x_0 \in (x_2, b_2)$ (novos extremos)

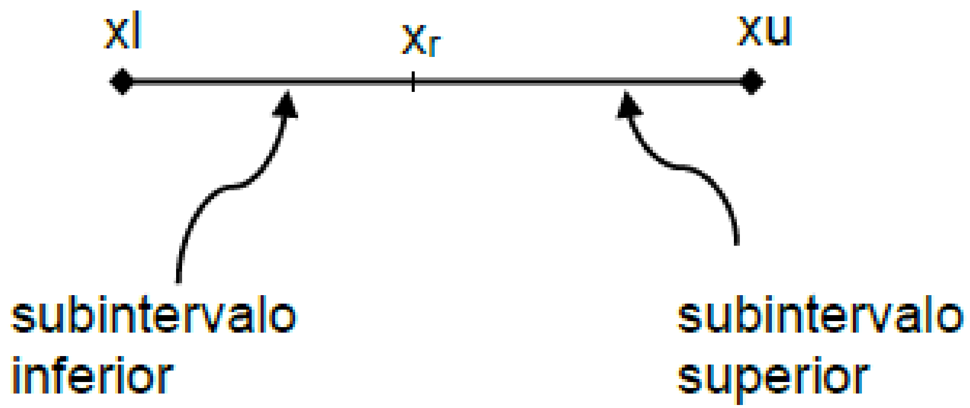
$\vdots$

O processo continua até que $b_i - a_i < \varepsilon$ ou i = K onde K representa o número máximo de iterações. Tanto ε quanto K são dados conhecidos do problema a ser tratado.

Resumo do método:

1º. Passo: Escolha o limite inferior (xl) e o limite superior (xu) de modo que f(xl)f(xu)<0

2º. Passo: Uma estimativa da raiz é determinada por



3º. Passo: Faça os seguintes cálculos para determinar em qual subintervalo está a raiz.

a) Se $f(xl)f(x_r)<0$, a raiz está no subintervalo inferior. Portanto faça $xu = x_r$ e volte ao 2º. Passo.

b) Se $f(xl)f(x_r)>0$, a raiz está no subintervalo superior. Portanto faça $xl = x_r$ e volte ao 2º. Passo.

c) Se $f(xl)f(x_r)=0$ a raiz é igual a x_r e pare os cálculos.

Exemplo 05

Seja $f(x)=x^3-9x+3$ com I = [0,1], $\varepsilon=10^{-2}$ e k = 10 encontre a raiz de f(x) pelo método da bisseção.

Solução

Sendo f(0) = 3 > 0 e f(1) = - 5 < 0 temos que a raiz está em (0,1).

	a	b	x_i	f(a)	f(b)	f(xi)	
1	0	1	0,5	3	-5	-1,375	$\lvert xi+1-xi \rvert /xi+1$
2	0	0,5	0,25	3	-1,375	0,765625	1
3	0,25	0,5	0,375	0,765625	-1,375	-0,32227	0,333333
4	0,25	0,375	0,3125	0,765625	-0,32227	0,218018	0,2
5	0,3125	0,375	0,34375	0,218018	-0,32227	-0,05313	0,090909
6	0,3125	0,34375	0,328125	0,218018	-0,05313	0,082203	0,047619
7	0,328125	0,34375	0,335938	0,082203	-0,05313	0,014474	0,023256
8	0,335938	0,34375	0,339844	0,014474	-0,05313	-0,01934	0,011494
9	0,335938	0,339844	0,337891	0,014474	-0,01934	-0,00244	0,00578
10	0,335938	0,337891	0,336914	0,014474	-0,00244	0,006017	0,002899

Na 9ª. Iteração o erro é menor que o critério de parada $0,00578 < 0,01$

O cálculo de estimativa de erro e critério de parada usado no exemplo 05 será apresentada a seguir

Estimativa de Erro e Critério de Parada

É necessária uma estimativa de erro que não dependa do conhecimento prévio do valor da raiz exata.

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_r^{novo} - x_r^{velho}}{x_r^{novo}} \right| \times 100\%$$

$x_r^{novo} \rightarrow$ raiz da iteração atual

$x_r^{velho} \rightarrow$ raiz da iteração anterior

A cada iteração a estimativa de erro deve ser calculada.

Quando $\varepsilon_a \leq \varepsilon$ podemos parar os cálculos, onde ε é o critério de parada pré especificado.

Estimativa do número de iterações

Dada a precisão ε e um intervalo inicial [a,b], qual será o iterações k para que $b_k - a_k < \varepsilon$.

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^k} < \varepsilon \Rightarrow \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} < 2^k$$

Tomando o logaritmo da equação

$$\Rightarrow \log\left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon}\right) < \log(2^k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon}{\log 2}$$

Ibmec

Exercício: Para a função $f(x) = x \log x - 1$ use o software Geogebra (https://www.geogebra.org/graphing) para determinar o intervalo [a,b]. Além disso, considere o $\varepsilon = 5x10^{-4}$, $k = 15$ e o intervalo [a,b] obtido para determinar o zero da função usando o método da bisseção.

```
FUNCTION Bissecção(xl, xu, es, imax, xr, iter, ea)
  iter = 0
  DO
    xrold = xr
    xr = (xl + xu) / 2
    iter = iter + 1
    IF xr ≠ 0 THEN
       ea = ABS((xr − xrold) / xr) * 100
    END IF
    test = f(xl) * f(xr)
    IF test < 0 THEN
       xu = xr
    ELSE IF test > 0 THEN
       xl = xr
    ELSE
       ea = 0
    END IF
    IF ea < es OR iter ≥ imax EXIT
  END DO
  Bissecção = xr
END Bissecção
```

2.1.3 Método de Falsa Posição

Seja a função f(x) contínua no intervalo fechado [a,b] e tal que f(a).f(b)<0. Suponha que o intervalo aberto (a,b) contenha apenas raiz da equação f(x_r) = 0

Objetivo: reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz x_r até que $(b-a)<\varepsilon$, dividindo [a,b] por meio de uma média aritmética ponderada que leva em consideração o valor da função no ponto.

Desenvolvimento do método da Falsa - Posição

- i = 0 (primeira iteração)

$a_0 = a$ e $b_0 = b$ (extremos do intervalo de interesse)

$\Downarrow$ cálculo do valor da raiz

$$x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$$

$\Downarrow$ verificação do sinal da função

$$\begin{cases} f(a_0) < 0 \\ f(b_0) > 0 \\ f(x_0) > 0 \end{cases}$$

$f(a_0) < 0 \leftarrow$ sinal da função: negativo

$f(x_0) > 0 \leftarrow$ sinal da função: positivo

$\Downarrow$ a partir do sinal da função obtemos os novos extremos do intervalo

$a_1 = a_0$, $b_1 = x_0$ e $x_r \in (a_0, x_0)$ (novos extremos)

- i = 1 (segunda iteração)

$a_1 = a$ e $b_1 = x_0$ (extremos do intervalo de interesse)

$\Downarrow$ cálculo do valor médio no intervalo

$$x_1 = \frac{a_1 f(b_1) - b_1 f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}$$

verificação do sinal da função

$$\begin{cases} f(a_1) < 0 \\ f(b_1) > 0 \\ f(x_1) < 0 \end{cases}$$

sinal da função: positivo

sinal da função: negativo

a partir do sinal da função
obtemos os novos extremos do intervalo

$a_2 = x_1$, $b_2 = b_1$ e $x_r \in (x_1, b_1)$ (novos extremos)

$\vdots$

Ibmec

O processo continua até que $b_i - a_i < \varepsilon$ ou i = k onde k representa o número máximo de iterações. Tanto ε quanto k são dados conhecidos do problema a ser tratado.

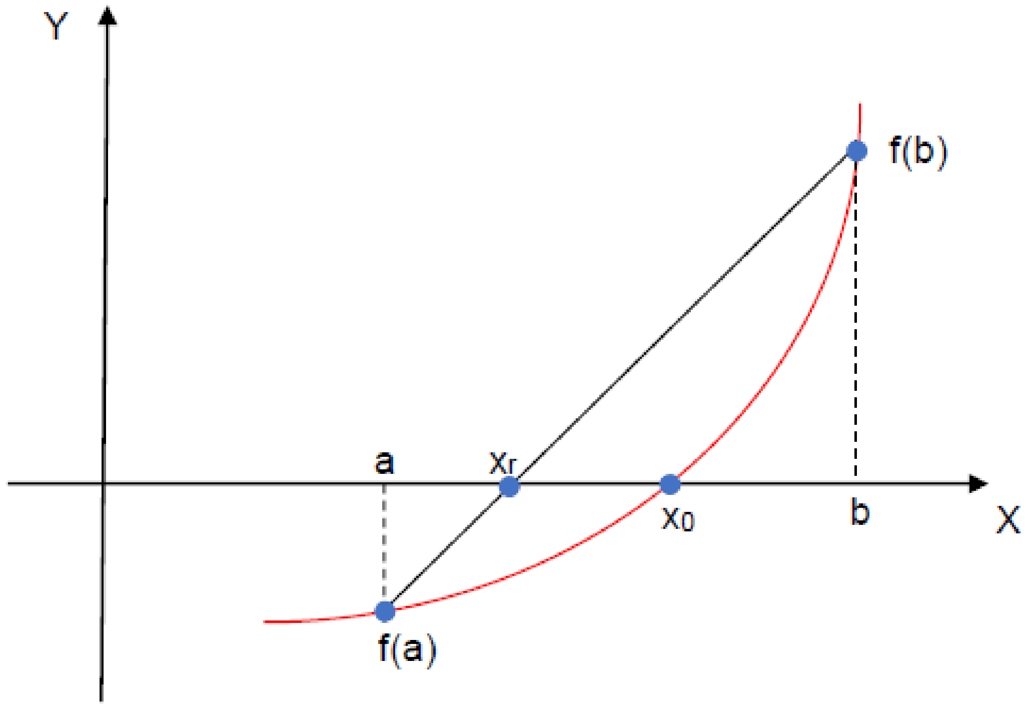


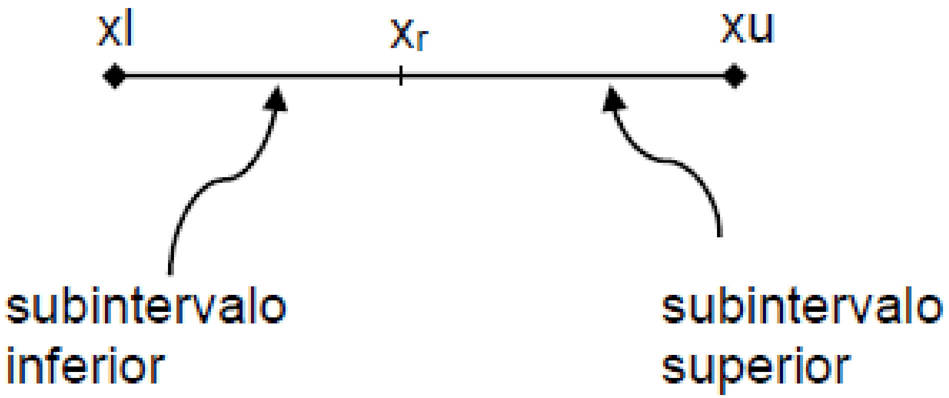
Figura 11: Descrição gráfica do método da falsa posição

Resumo do método:

1º. Passo: Escolha o limite inferior (xl) e o limite superior (xu) de modo que f(xl)f(xu)<0

2º. Passo: Uma estimativa da raiz é determinada por

$$x_r = \frac{xlf(xu) - xuf(xl)}{f(xu) - f(xl)}$$



3º. Passo: Faça os seguintes cálculos para determinar em qual subintervalo está a raiz.

a) Se $f(xl)f(x_r)<0$, a raiz está no subintervalo inferior. Portanto faça $xu = x_r$ e volte ao 2º. Passo.

b) Se $f(xl)f(x_r)>0$, a raiz está no subintervalo superior. Portanto faça $xl = x_r$ e volte ao 2º. Passo.

c) Se $f(xl)f(x_r)=0$ a raiz é igual a x_r e pare os cálculos.

Exemplo 06

Seja $f(x)=x^3-9x+3$ com I = [0,1], $\varepsilon=10^{-2}$ e k = 10 encontre a raiz de f(x) pelo método da falsa-posição

Solução

Sendo f(0) = 3 > 0 e f(1) = - 5 < 0 temos que a raiz está em (0,1).

i	a	b	x_i	f(a)	f(b)	f(xi)	
1	0	1	0,375	3	-5	-0,32227	$\lvert x_{i+1}-x_i \rvert / x_{i+1}$
2	0	0,375	0,338624	3	-0,32227	-0,00879	0,107422
3	0	0,338624	0,337635	3	-0,00879	-0,00023	0,00293
4	0	0,337635	0,33761	3	-0,00023	-5,8E-06	7,53E-05

Na 4ª. Iteração o erro é menor que o critério de parada $7,53x10^{-5} < 10^{-2}$.

Comparando o método da falsa posição com o método da bisseção observamos que o primeiro converge mais rápido e com o resultado melhor do que o método da bisseção.

Atenção:

O algoritmo do método da falsa posição difere do algoritmo do método da bisseção apenas no cálculo da raiz (2º. passo). Além disso, o método de bisseção tem uma convergência linear (ordem de convergência p =1), já o método de falsa-posição tem uma ordem de convergência p = 1,618 e que mostra que o método da falsa-posição converge mais rápido do que o método da bisseção.

2.2 Exercícios Propostos

Exercícios da lista 4

Referências Bibliográficas

1. SPERANDIO, D.; MENDES, J.T.; SILVA, L.H.M.E. "Cálculo Numérico". São Paulo: Prentice Hall, 2003.
2. BURIAN, R.; LIMA, A.C. "Cálculo Numérico". Rio de Janeiro: LTC, 2013.
3. RUGGIERO, M.A.G.; LOPES, V.L.R. "Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais". São Paulo: Makron Books, 1996.
4. BURDEN, R.L.; FAIRES, D. "Análise Numérica". São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2013.
5. CHAPRA, S.C.; CANALE, R.P. "Métodos Numéricos para Engenharia". São Paulo: McGraw-Hill, 2008.
6. CUNHA, M.C. "Métodos Numéricos". Campinas: Editora da Unicamp, 2000.
7. FRANCO, N.M.B. "Cálculo Numérico". São Paulo: Prentice Hall, 2006.
8. ARENALES, S.; DAREZZO, A. "Cálculo Numérico: Aprendizagem com Apoio de Software". São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2010.

Capítulo 3 – Raízes de Equações

Introdução

No capítulo 2, vimos os métodos intervalares, onde a raiz está localizada dentro de um intervalo. Aplicações repetidas desse método sempre resultam em estimativas mais próximas do valor da raiz. Tais métodos são ditos convergentes por que se aproximam do resultado à medida que os cálculos prosseguem, conforme figura 1.

Figura 1: Método intervalar

Os métodos abertos são baseados em fórmulas que exigem apenas um único valor inicial de x ou dois valores iniciais que não delimitam, necessariamente, a raiz. Como tal, eles algumas vezes divergem, ou seja, se afastam da raiz verdadeira à medida que os cálculos prosseguem, conforme figura 2.

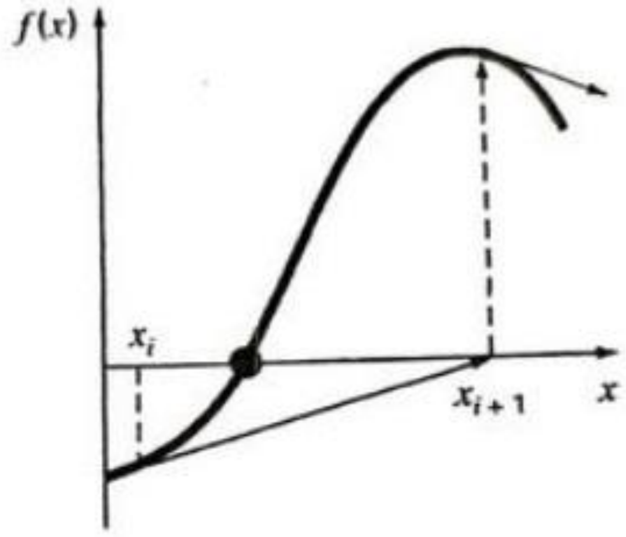


Figura 2: Método aberto - neste caso ele está divergindo

Entretanto, quando os métodos abertos convergem, conforme figura 3, eles, em geral o fazem mais rápidos que os métodos intervalares.

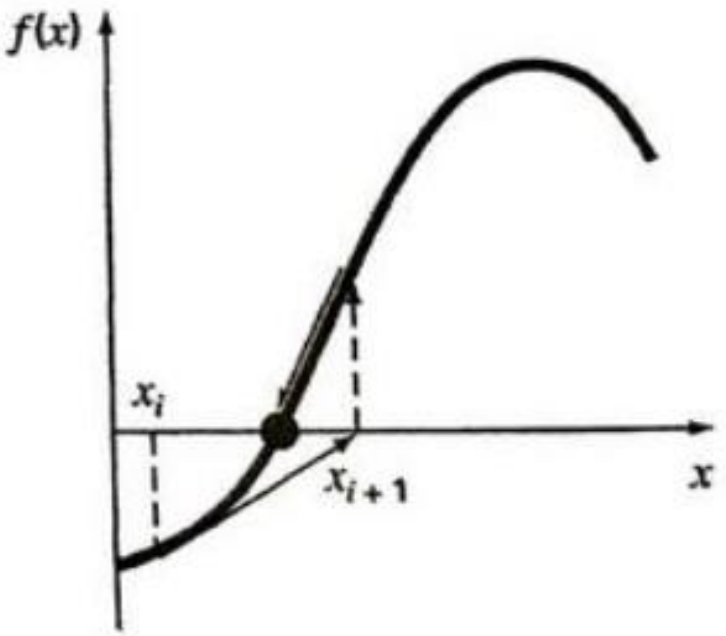


Figura 3: Método aberto - neste caso ele converge com poucas iterações.

As figuras 1, 2 e 3 são a descrição gráfica da diferença fundamental entre os métodos intervalares, figura 1, e os métodos abertos, figura 2 e figura 3, para a localização de raízes. Na figura 1, que é o método da bisseção, a raiz está restrita ao interior do intervalo definido por x_l e x_u. Em contraste, para o método aberto descrito na figura 2 e na figura 3, é usada uma fórmula para avançar de x_i para x_{i+1} de forma iterativa. Assim, o método pode divergir (figura 2), ou convergir rapidamente (figura 3), dependendo do valor da aproximação inicial.

Dos métodos abertos, os principais que iremos estudar são:

1. Iteração de Ponto Fixo Simples
2. Método de Newton-Raphson
3. Método da Secante

Os métodos abertos usam uma fórmula para prever a raiz, ou também podemos usar um método gráfico, conforme visto no capítulo 2, para fazer tal estimativa.

Exemplo 1

Separe a equação $e^{-x} - x = 0$ em duas partes $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = x$ e determine as suas raízes graficamente.

X	g(x) = x	f(x) = e^{-x}
0	0	1
0,2	0,2	0,818731
0,4	0,4	0,67032
0,6	0,6	0,548812
0,8	0,8	0,449329
1	1	0,367879

A partir dos dados fornecido na tabela construímos o gráfico

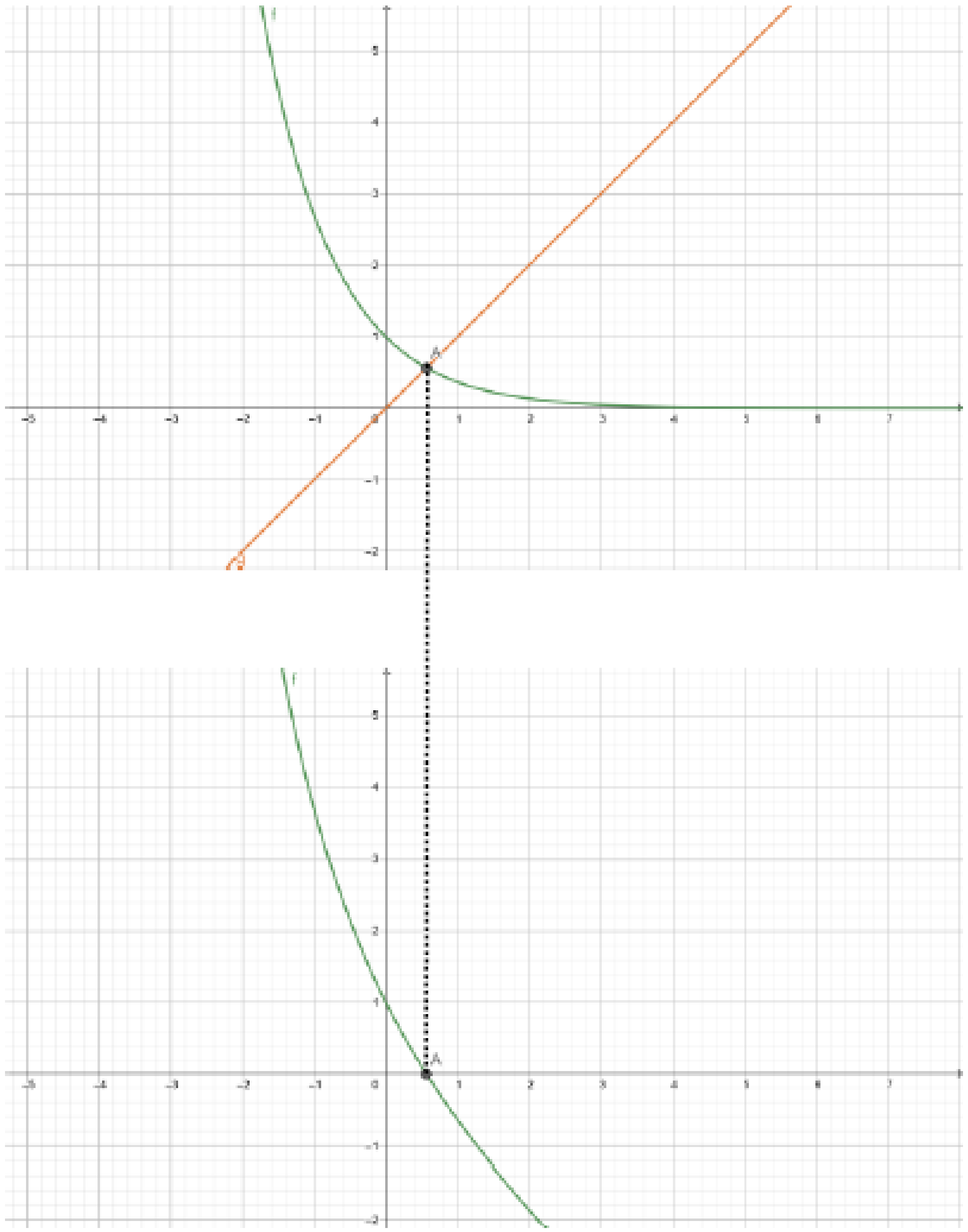


Figura 4: Gráfico das funções $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = x$; $h(x) = e^{-x} - x$

A interseção das duas curvas indica uma raiz em aproximadamente x =0,5

3.1 Iteração de Ponto Fixo Simples

O método de iteração do ponto fixo é obtido reescrevendo a equação f(x) = 0 de modo que s esteja isolado no lado esquerdo da equação,

$$x = g(x) \qquad \mathbf{1}$$

Pode-se conseguir essa transformação por manipulação algébrica ou simplesmente somando x em ambos os lados da equação original.

Exemplo 2

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow x = \dfrac{x^2 + 3}{2}$

b) $f(x) = senx = 0 \Rightarrow x = senx + x$

A equação (1) fornece uma fórmula para prever um novo valor de função de um valor anterior de x.

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

Estimador de erro: $$E_{r\%} = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| x100\%$$

Exemplo 3

Use a iteração do ponto fixo para localizar a raiz de $f(x) = e^{-x} - x$.

Solução

A função pode ser escrita da forma: $x_{i+1} = e^{-x_i}$

i	Xi	xi+1 = e(-xi)	
0	0	1	[(xi+1-xi)/xi+1]x100%
1	1	0,367879441	171,8281828
2	0,367879441	0,692200628	46,85363946
3	0,692200628	0,500473501	38,30914659
4	0,500473501	0,606243535	17,44678968
5	0,606243535	0,545395786	11,15662253
6	0,545395786	0,579612336	5,903350814
7	0,579612336	0,560115461	3,48086698
8	0,560115461	0,571143115	1,930803931
9	0,571143115	0,564879347	1,108868242

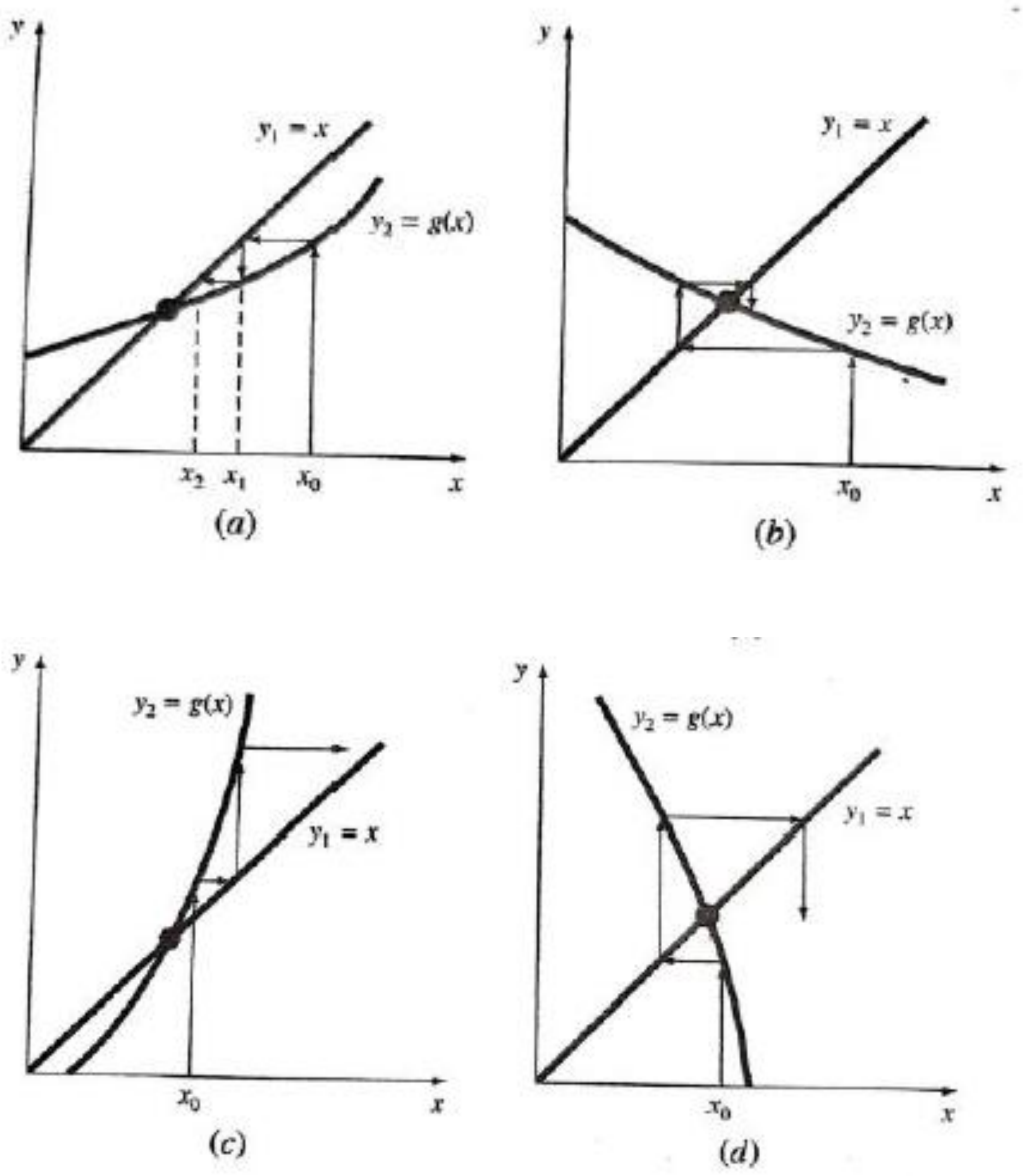


Figura 5: Descrição gráfica da convergência (a) e (b) e divergência (c) e (d) da iteração de ponto fixo simples. Os gráficos (a) e (c) são chamados padrões monótonos, enquanto (b) e (d) são chamados padrões oscilantes ou espirais.

Ibmec

Teorema 1

A iteração do ponto fixo converge se, na região de interesse, $|g'(x)| < 1$

Exemplo 4

$$x = e^{-x} \Rightarrow g(x_0) = e^{-x_0} \Rightarrow g'(x_0) = -e^{-x_0}$$

Para $x_0 = 0,5$ temos, $\left|-e^{-0,5}\right| = 0,60 < 1$

Vantagens

- Rapidez no processo de convergência
- Desempenho regular e previsível

Desvantagens

- Um inconveniente é a necessidade da obtenção de uma função de iteração $g(x)$
- Difícil sua implementação

- Algoritmo do ponto fixo

```
FUNCTION Fixpt(x0, es, imax, iter, ea)
  xr = x0
  iter = 0
  DO
    xrold = xr
    xr = g(xrold)
    iter = iter + 1
    IF xr ≠ 0 THEN
```

$$ea = \left| \frac{xr - xrold}{xr} \right| \cdot 100$$

```
    END IF
    IF ea < es OR iter ≥ imax EXIT
  END DO
  Fixpt = xr
END Fixpt
```

3.2 Método de Newton-Raphson

O método de Newton-Raphson é um método baseado na série de Taylor. E pode ser deduzido com base em sua interpretação geométrica

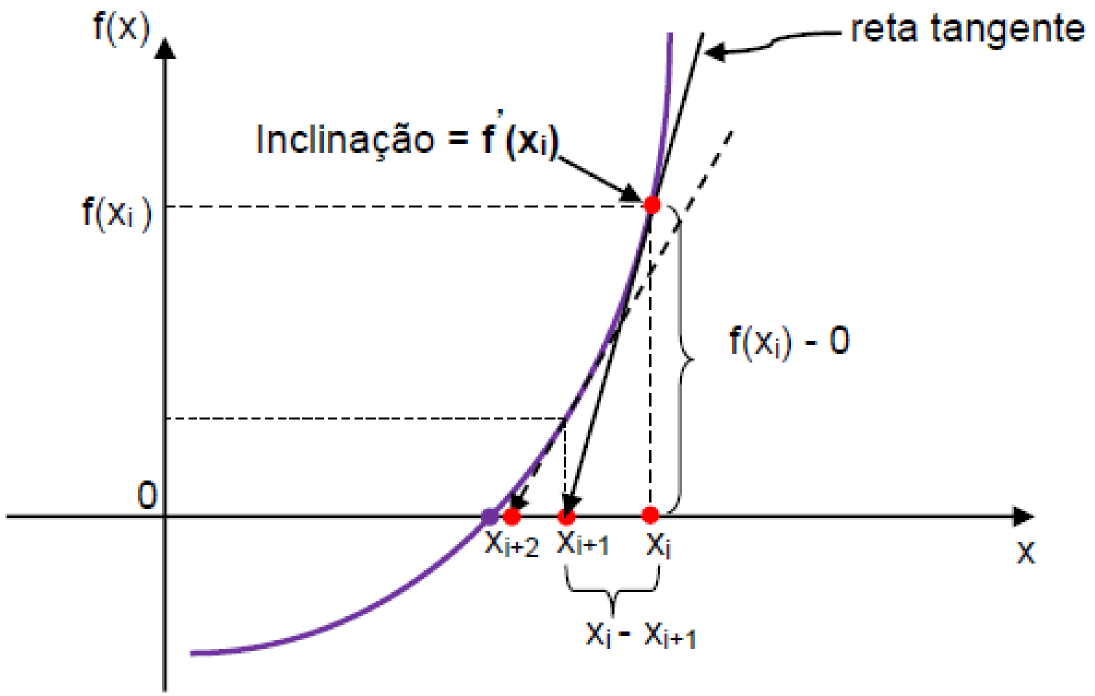


Figura 6: Descrição gráfica do método de Newton-Raphson

A figura 6 é uma descrição gráfica do método de Newton-Raphson. A tangente à função em x_i [isto é, $f'(x_i)$] é prolongada até o eixo x para fornecer uma estimativa da raiz em x_{i+1}. A partir do x_{i+1} o processo continua obtendo o ponto x_{i+2} pelo prolongamento da segunda reta tangente e assim até obter a raiz da função.

Pela equação da reta tangente no ponto x_i temos,

$$f(x_i) - 0 = f'(x_i)(x_i - x_{i+1})$$

Temos que a primeira derivada em x_i (que é equivalente à inclinação) é dada por:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{(x_i - x_{i+1})}$$

Reorganizando a equação obtemos

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (2)$$

A equação (2) é chamada de fórmula de Newton-Raphson

Exemplo 5

Use o método de Newton-Raphson para fazer uma estimativa da raiz de $f(x) = e^{-x} - x$ com $x_0 = 0$

Solução

Seja $f'(x) = -e^{-x} - 1$, temos que

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$$

i	xi	xi+1 = xi-[e$^{(-xi)}$ - xi/ -e$^{(-xi)}$ -1]	
0	0	0,5	[(xi+1-xi)/xi+1]x100%
1	0,5	0,566311003	11,70929098
2	0,566311003	0,567143165	0,146728708
3	0,567143165	0,56714329	2,21064E-05
4	0,56714329	0,56714329	5,08968E-13
5	0,56714329	0,56714329	1,95757E-14
6	0,56714329	0,56714329	0

O método convergiu na terceira iteração.

Observação

A convergência do método de Newton-Raphson é chamada de convergência quadrática.

Desvantagens do método de Newton-Raphson

Algumas vezes o método de Nenton-Raphson não converge, oscilam indefinidamente

1. A função não tem raiz real;
2. $f'(x_r) = 0$ (desastre!)
3. x_0 = não é suficientemente próximo de x_r
4. Um ponto de inflexão ($f''(x) = 0$) na vizinhança da raiz
5. Convergência muita lenta

Exemplo 6

$$f(x) = x^{10} - 1, \quad x_0 = 0$$

i	Xi	xi+1 = xi-[xi^10 - 1/ 10xi^9]	
0	0,5	51,65	[(xi+1-xi)/xi+1]x100%
1	51,65	46,485	11,11111111
2	46,485	41,8365	11,11111111
3	41,8365	37,65285	11,11111111
4	37,65285	33,887565	11,11111111
5	33,887565	30,4988085	11,11111111
6	30,4988085	27,44892765	11,11111111
7	27,44892765	24,70403489	11,11111111
8	24,70403489	22,2336314	11,11111111
9	22,2336314	20,01026826	11,11111111
10	20,01026826	18,00924143	11,11111111
11	18,00924143	16,20831729	11,11111111
12	16,20831729	14,58748556	11,11111111
13	14,58748556	13,128737	11,11111111
14	13,128737	11,8158633	11,11111111
15	11,8158633	10,63427697	11,11111111
16	10,63427697	9,570849276	11,11111111
17	9,570849276	8,613764348	11,11111111
18	8,613764348	7,752387914	11,11111111

Este é um exemplo de convergência muito lenta.

Algoritmo

```
FUNCTION Fixpt(x0, es, imax, iter, ea)
  xr = x0
  iter = 0
  DO
    xrold = xr
    xr = Xrold – f(Xrold)/ f'(Xrold)
    iter = iter + 1
    IF xr ≠ 0 THEN
```

$$ea = \left| \frac{xr - xrold}{xr} \right| \cdot 100$$

```
    END IF
    IF ea < es OR iter ≥ imax EXIT
  END DO
  Fixpt = xr
END Fixpt
```

Recomendações para o método de Newton-Raphson

Para evitar os problemas mencionados, o programa seria melhorado pela incorporação de diversas características adicionais:

1. Uma rotina de gráficos deveria ser incluída no programa;

2. No final dos cálculos, a estimativa final da raiz deve ser substituída na função original para calcular se o resultado está próximo de zero. Essa verificação nos resguardar parcialmente daqueles casos nos quais a convergência oscilante ou lenta pode levar a valores pequenos de erro relativo enquanto a solução ainda está longe da raiz;

3. O programa deve incluir um limite superior no número de iterações;

4. O programa deve alertar o usuário e levar em conta a possibilidade de que $f'(x)=0$ em qualquer instante de cálculo.

3.3 Método da Secante

O problema da implementação do Newton-Raphson é o cálculo da derivada que dependendo da função pode ser extremamente difícil. Além disso, devemos tomar cuidado que em algum ponto tenhamos f'(x) = 0.

Neste caso, a derivada pode ser aproximada por diferença finita regressiva

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Utilizando a aproximação por diferenças finitas na equação (2) temos

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \Rightarrow x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \qquad \mathbf{3}$$

A equação (3) é conhecida como o método de Secante. Note que são necessárias duas aproximações para iniciar o método da Secante.

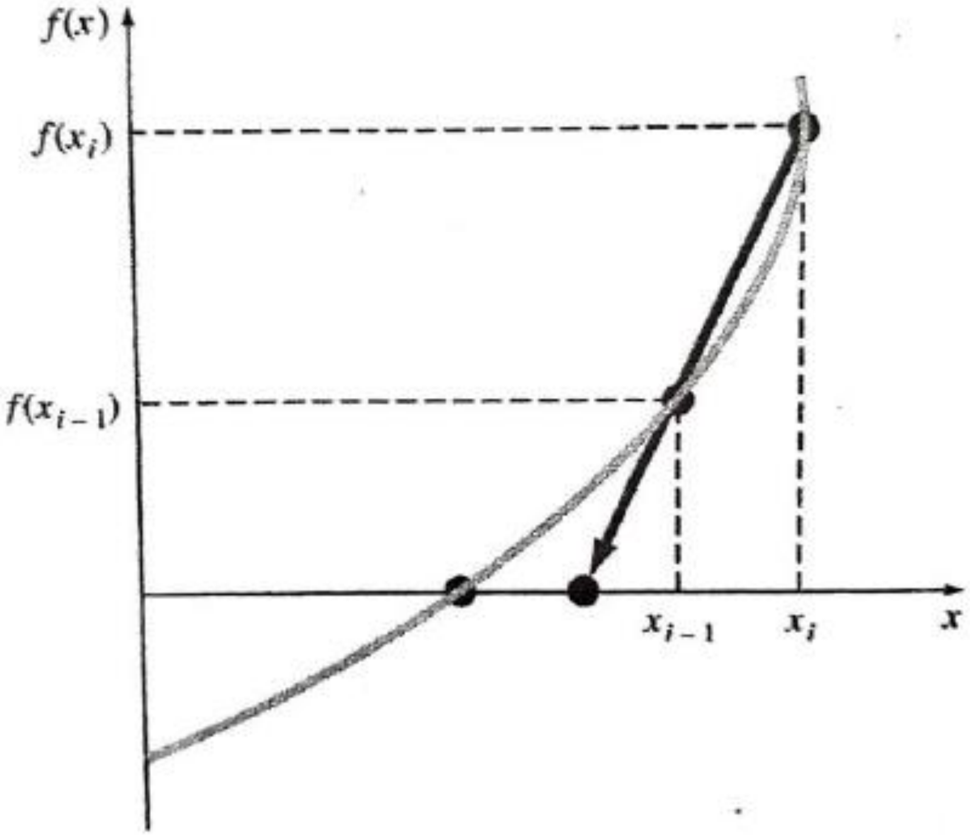


Figura 7: Descrição gráfica do método da secante. Essa técnica é parecida com a técnica de Newton-Raphson no sentido que uma estimativa da raiz é prevista extrapolando-se uma tangente da função até o eixo x. Entretanto, o método da secante usa uma diferença em vez de uma derivada para fazer uma estimativa da inclinação.

Exemplo 7

Exemplo 06: Use o método da secante para fazer uma estimativa da raiz de $f(x) = e^{-x} - x$ com $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$.

i	xi-1	xi	f(xi-1)	f(xi)	xi+1	ER%
1	0	1	1	-0,632120559	0,612699837	63,21206
2	1	0,612699837	-0,632120559	-0,070813948	0,563838389	8,66586
3	0,612699837	0,563838389	-0,070813948	0,005182355	0,567170358	0,587472
4	0,563838389	0,567170358	0,005182355	-4,24192E-05	0,567143307	0,00477
5	0,567170358	0,567143307	-4,24192E-05	-2,53802E-08	0,56714329	2,86E-06
6	0,567143307	0,56714329	-2,53802E-08	1,24234E-13	0,56714329	1,4E-11
7	0,56714329	0,56714329	1,24234E-13	0	0,56714329	0

O algoritmo do método da Secante é semelhante ao de Newton-Raphson.

O método da secante é similar ao método da falsa-posição. A ordem de convergência do Método da Secante é maior que aquela do método do ponto fixo (p=1) e menor que aquela do método de Newton-Raphson (p=2). Verifica-se que a ordem de convergência do Método da Secante é p=1,618 ...

O método do ponto fixo, Newton-Raphson e método da secante têm convergência mais rápida que os Métodos da Bisseção e da Posição Falsa, considerando apenas o número de iterações. Por outro lado, o Newton-Raphson é aquele que efetua o maior de operações, pois calcula o valor da derivada de f(x) a cada iteração. O esforço computacional depende do número de operações efetuadas a cada iteração, a complexidade destas operações, de número de decisões lógicas, do número de avaliações de funções a cada iteração e do número de iterações.

No caso geral, não há método melhor. Observa-se que se o cálculo da derivada de f(x) não for muito elaborado, o método de Newton-Raphson é indicado, caso contrário o método da secante é aconselhável.

Referências Bibliográficas

1. SPERANDIO, D.; MENDES, J.T.; SILVA, L.H.M.E. “Cálculo Numérico”. São Paulo: Prentice Hall, 2003.
2. BURIAN, R.; LIMA, A.C. “Cálculo Numérico”. Rio de Janeiro: LTC, 2013.
3. RUGGIERO, M.A.G.; LOPES, V.L.R. “Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais”. São Paulo: Makron Books, 1996.
4. BURDEN, R.L.; FAIRES, D. “Análise Numérica”. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2013.
5. CHAPRA, S.C.; CANALE, R.P. “Métodos Numéricos para Engenharia”. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.
6. CUNHA, M.C. “Métodos Numéricos”. Campinas: Editora da Unicamp, 2000.
7. FRANCO, N.M.B. “Cálculo Numérico”. São Paulo: Prentice Hall, 2006.
8. ARENALES, S.; DAREZZO, A. “Cálculo Numérico: Aprendizagem com Apoio de Software”. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2010.

3.4 Exercícios Propostos

Exercícios da lista 5