Universidade Federal da Bahia
UFBA

Departamento de Ciência da Computação

MAT174
Cálculo Numérico

Trabalho Final

Autores - T05
Felipe Guimarães Izidoro Freire
Thiago Silva Guedes
Alexandre Magno

Professora
Michelle Larissa Luciano Carvalho

Salvador-BA, Novembro de 2021

Conteúdo

1 Introdução

Neste relatório sera apresentado como foi confeccionado a resolução de sistemas de equações lineares por métodos numéricos. Esse sistemas trabalhados são conhecidos como Métodos de Gauss-Jacobi e Métodos de Gauss-Seidel.

As resoluções serão baseadas no sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 3 \\ 3x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \tag{1}$$

2 Sistemas

Nesta sessão será ilustrada a composição e os passos seguidos para o encontro do resultado do sistemas com seus respectivos métodos. O erro escolhido pelos integrantes foi de: $\epsilon = 0,05$.

2.1 Métodos de Gauss-Jacobi

Para que o método seja efetivo e nos levar ao resultado, temos que permutar a linhas do sistema de tal forma que em cada linha n, o termo que acompanha x_n seja o maior da parte direita da equação (Critério das linhas). Logo o sistema (1) fica da seguinte maneira:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 = 3 \end{cases} \tag{2}$$

Assim sendo o sistema acima consegue ser permutado para que matriz derivada fica diagonalmente dominante.

Portanto, após o sistema ser diagonalmente dominante, isolamos os x_n, para sua respectivas n linhas, obtendo:

$$\begin{cases} fx_1 = \dfrac{2 - x_2}{3} \\ fx_2 = \dfrac{-3 - 2x_1}{5} \end{cases} \tag{3}$$

Por fim, para obtermos o resultado do sistema (2), seguiremos os seguintes passos:

1. Obtemos o caso inicial (x_1^0, x_2^0) atribuindo "0"a todas variáveis de (3).

2. Após conseguirmos o resultado inicial, atribuímos novamente as variáveis de (3), onde encontramos x_1^1, e x_2^1.

3. Encontramos o erro ϵ correspondente a: $\epsilon_n = x_n^i - x_n^{i-1}$.

4. Redefinimos valores para a próxima iteração, ou seja, o x_1^i, x_2^i serão os "casos iniciais".

5. Encontramos o máximo entre os *erros*, e o máximo entre os x_n^i, e definimos uma variável qualquer "dr"da seguinte forma:

$$dr = \frac{\text{máximo dos erros}}{\text{máximo dos } x_n^i}$$

6. Se "dr"for menor que o erro, paramos o processo, caso não, retornamos ao passo 2.

Resultados obtidos pelo processo acima: (It. = 0, corresponde aos casos iniciais)

It.	x_1	x_2	dr	e_1	e_2
0	0.666667	-0.600000		0.666667	0.600000
1	0.866667	-0.866667	0,30769230	0.200000	0.266667
2	0.955556	-0.946667	0,09302325	0.088889	0.080000
3	0.982222	-0.982222	0,00000	0.026667	0.035556

A solução do sistema (2) é : $x_1 = 0.982222, x_2 = -0.982222$

2.2 Métodos de Gauss-Seidel

O método de Gauss-Seidel é uma modificação do método de Jacobi, criado com o objetivo de acelerar a convergência, ou seja utilizar menos iterações para chegar mais próximo à resposta.

Para que o método seja efetivo e nos levar ao resultado, temos que permutar a linhas do sistema de tal forma que em cada linha n, o termo que acompanha x_n seja o maior da parte direita da equação (Critério das linhas). Logo o sistema (1) fica da seguinte maneira:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 = 3 \end{cases} \tag{4}$$

Assim sendo o sistema acima consegue ser permutado para que matriz derivada fica diagonalmente dominante.

Portanto, após o sistema ser diagonalmente dominante, isolamos os x_n, para sua respectivas n linhas, obtendo:

$$\begin{cases} fx_1 = \dfrac{2 - x_2}{3} \\ fx_2 = \dfrac{-3 - 2x_1}{5} \end{cases} \tag{5}$$

Agora, verificamos o Critério de Sassenfeld (Critério de convergência adicional):

$$\text{Sejam } \beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + ... + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$
$$\text{e } \beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1 + |a_{j2}|\beta_2 + ... + |a_{jj-1}|\beta_{j-1}}{|a_{jj}|}$$

Seja $\beta = \max_{1 \leq j \leq n}\{\beta_j\}$. Se $\beta < 1$, então o método de Gauus-Seidel gera uma sequência convergente qualquer que seja x^0. Além disso, quanto menor for β, mais rápida será a convergência.

Por fim, para obtermos o resultado do sistema (2), seguiremos os seguintes passos:

1. Obtemos o caso inicial (x_1^0, x_2^0) atribuindo "0"a todas variáveis de (3).

2. Após conseguirmos o resultado inicial, atribuímos novamente nas variáveis de (3), onde encontramos x_1^1, e diferentemente de Jacobi, x_2^1 sera obtido através de x_1^1. Ou seja, x_n^1 é dependente de x_{n-1}^1(para equações de duas incógnitas).

3. Encontramos o erro ϵ correspondente a: $\epsilon_n = x_n^i - x_n^{i-1}$.

4. Redefinimos valores para a próxima iteração, ou seja, o x_1^i, x_2^i serão os "casos iniciais".

5. Encontramos o máximo entre os *erros*, e o máximo entre os x_n^i, e definimos uma variável qualquer "dr"da seguinte forma:

$$dr = \frac{\text{máximo dos erros}}{\text{máximo dos } x_n^i}$$

6. Se "dr"for menor que o erro, paramos o processo, caso não, retornamos ao passo 2.

Resultados obtidos pelo processo acima: (It. = 0, corresponde aos casos iniciais)
Aplicando o Critério de Sassenfeld

B1	B2	Máximo	Convergência
0.33333	0,13333	0,33333	SIM

It.	x_1	x_2	dr	e_1	e_2
0	0.666667	-0.600000		0.666667	0.600000
1	0.866667	-0.946667	0,3661972	0.200000	0.346667
2	0.98222	-0.99289	0,1163832	0.1156	0.0462
3	0.9976	-0.99905	0,0154220	0.01541	0.0062

A solução do sistema (2) é : $x_1 = 0.9976, x_2 = -0.99905$

3 Resultados Finais

No caso estudado ambos os métodos iterativos necessitaram do mesmo número de iterações, apesar do "dr", valor que indica erro acumulado pelas truncamentos e arredondamentos, ser menor no método de Gauss-Jacobi, já que ficou mais próximo de zero.

Contudo, o resultado quando usado o Gauss-Seidel garante a convergência do resultado obtido, por meio do Critério de Sanssenfeld, além de se ter mais informações sobre a convergencia antes mesmo de se fizer a operações, o que não ocorre no Gauss-Jacobi.