Primer parcial Señales y Sistemas.

① Datos:

$x_1(t) = Ae^{-jnw_0t}$; $x_2(t) = Be^{jmw_0t}$; $w_0 = \frac{2\pi}{T}$

$A, B > 0$; $n, m \in \mathbb{Z}$

$$d^2(x_1,x_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |x_1(t) - x_2(t)|^2\, dt$$

$|x_1|^2 = A^2$, $|x_2|^2 = B^2$

$x_1 x_2^* = AB\, e^{-j(n+m)w_0t}$

$x_1^* x_2 = AB\, e^{j(n+m)w_0t}$

$$|x_1 - x_2|^2 = A^2 + B^2 - AB\left(e^{-j(n+m)w_0t} + e^{j(n+m)w_0t}\right)$$
$$= A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)w_0t)$$

Ortogonalidad de exponenciales

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos(kw_0t)\,dt = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k\neq 0 \end{cases} \qquad k = n+m$$

- Si $n+m \neq 0 \rightarrow$ promedio del coseno es cero
- Si $n+m = 0 \rightarrow m = -n \longrightarrow \cos(0) = 1$

$d^2(x_1, x_2) = A^2 + B^2 - 2AB\,\delta_{n+m,0} \rightarrow \delta_{n+m} = 1$

$\searrow \delta_{n+m} = 0$

Armónicos distintos $\rightarrow n+m \neq 0 : d^2 = A^2 + B^2$

- Frecuencias Opuestas $\rightarrow n = -m : d^2 = (A-B)^2$
- Si $n = m = 0 : d^2 = (A-B)^2$

En phyton se realizó verificación.

② $x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\,\text{Sen}(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$

Primero vamos a verificar que la señal sea cuasiperiódica

$\left.\begin{array}{l} \omega_1 = 1000\pi \\ \omega_2 = 3000\pi \\ \omega_3 = 11000\pi \end{array}\right\}$ $\frac{w_1}{w_2} = \frac{1000\pi}{3000\pi} = \frac{1}{3}$; $\frac{w_1}{\omega_3} = \frac{1000\pi}{11000\pi} = \frac{1}{11}$

$\frac{w_2}{\omega_3} = \frac{3000\pi}{11000\pi} = \frac{3}{11}$

Como todas las combinaciones dan como resultado un número racional, es cuasiperiódica.

Ahora vamos a discretizar la señal.

$t = nt_s = \frac{n}{F_s} \rightarrow x(t) \Rightarrow x(n)\quad n \in \mathbb{Z}$

Con $F_s = 5\,kHz$

Verificamos Nyquist con $F_s = 5\,kHz$

$W_{max} = 11000\pi \longrightarrow F_{max} = \frac{W_{max}}{2\pi} = \frac{11000\pi}{2\pi} = 5500\,Hz$

Según Nyquist la frecuencia de muestreo, debe ser 2 veces la frecuencia máxima de mi señal cuasiperiódica

F_s debe ser mayor a $2F(max) = (2)(5500) = 11000\,Hz$

$F_s \geq 11000 \longrightarrow$ Por lo tanto la frecuencia de muestreo dada en el ejercicio no es apta.

Para que la digitalización sea apropiada, vamos a cambiar la frecuencia de muestreo a

$4f(max) = 4(5.500) = 22.000\,Hz$

Ahora vamos a calcular el periodo de la señal.

$\left.\begin{array}{l} W_1 = 1000\pi \\ W_2 = 3000\pi \\ W_3 = 11000\pi \end{array}\right\}$ $T_1 = \frac{2\pi}{1000\pi} = \frac{1}{500}$, $T_2 = \frac{2\pi}{3000\pi} = \frac{1}{1500}$; $T_3 = \frac{2\pi}{11000\pi} = \frac{1}{5500}$

$T = kT_1 = rT_2 = \ell T_3$

$T = \frac{k(1)}{500} = \frac{r(1)}{1500} = \frac{\ell(1)}{5500}$ multiplicamos por 11000

$T = \frac{1}{500}$

③ $C_n = \frac{1}{T}\int_{t_i}^{t_f} x(t)\,e^{-jw_0nt}\,dt \longrightarrow x(t) = \sum_n C_n e^{jnw_0t}$

$x'(t) = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}\left\{\sum_n C_n e^{jnw_0t}\right\} = \sum_n C_n e^{jnw_0t}\, jnw_0$

$x''(t) = \frac{d}{dt}\left\{\sum_n C_n e^{jnw_0t}(jnw_0)\right\} = \sum_n C_n e^{jnw_0t}(jnw_0)^2$

$\tilde{C}_n = \frac{\langle x''(t), e^{jnw_0t}\rangle}{\| e^{jnw_0t}\|^2} = \int_{t_i}^{t_f} x''(t)\,e^{-jnw_0t}\,dt$; $t = t_f - t_i$

$$\tilde{C}_n = C_n (jn\omega_0)^2 = \frac{\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt}{T}$$

$$C_n = \frac{1}{(t_f - t_i)(jn\omega_0)^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)\, n^2\omega_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{Cos}(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{Sen}(n\omega_0 t)$$

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n(-n\omega_0) \operatorname{Sen}(n\omega_0 t) + b_n(n\omega_0)\operatorname{Cos}(n\omega_0 t)$$

$$x''(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n(-n\omega_0)(n\omega_0)\operatorname{Cos}(n\omega_0 t) + b_n(n\omega_0)(-n\omega_0)\operatorname{Sen}(n\omega_0 t)$$

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{T}\int_{t_i}^{t_f} x''(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt \;;\; \tilde{b}_n = \frac{2}{T}\int_{t_i}^{t_f} x''(t) \operatorname{Sen}(n\omega_0 t)\, dt$$

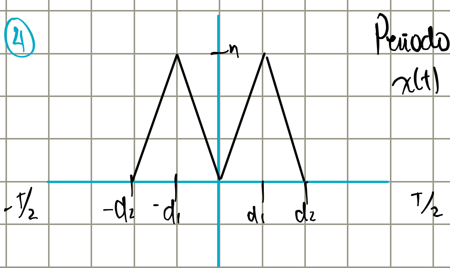
$$a_n(-n^2\omega_0^2) = \frac{2}{T}\int_{t_i}^{t_f} x''(t) \operatorname{Cos}(n\omega_0 t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{-T n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t) \operatorname{Cos}(n\omega_0 t)\, dt$$

$$b_n(-n^2\omega_0^2) = \frac{2}{T}\int_{t_i}^{t_f} x''(t) \operatorname{Sen}(n\omega_0 t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{-T n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t) \operatorname{Sen}(n\omega_0 t)\, dt$$

4



Periodo: $(-T/2, T/2)$

$x(t) = 0$ fuera de $[-d_2, d_2]$

$$m_1 = \frac{A}{d_2 - d_1} \;;\; m_2 = \frac{-A}{d_1} \;;\; m_3 = \frac{A}{d_1} \;;\; m_4 = \frac{-A}{d_2 - d_1}$$

$$J_{-d_2} = m_1 - 0 = \frac{A}{d_2 - d_1}$$

$$J_{-d_1} = m_2 - m_1 = \frac{-A}{d_1} - \frac{A}{d_2 - d_1}$$

$$J_0 = m_3 - m_2 = \frac{2A}{d_1}$$

$$J_{d_1} = m_4 - m_3 = \frac{-A}{d_2 - d_1} - \frac{A}{d_1}$$

$$J_{d_2} = 0 - m_4 = \frac{A}{d_2 - d_1}$$

En un periodo:

$$x''(t) = \sum_k J_{t_k}\, \delta(t - t_k)$$

Coeficientes desde $x''(t)$

$$x''(t) = \sum (jn\omega_0)^2 C_n e^{jn\omega_0 t} = -\sum n^2\omega_0^2 C_n e^{jn\omega_0 t}$$

Por ortogonalidad

$$C_n'' = \frac{1}{T}\int_0^T x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt = -n^2\omega_0^2 C_n$$

$$C_n = \frac{-1}{n^2\omega_0^2 T} \sum_k J_{t_k} e^{-jn\omega_0 t_k} \;;\; n \neq 0 \rightarrow x''(t) \text{ Es suma de deltas.}$$

Por simetria par:

$$C_n = \frac{-2A}{n^2\omega_0^2 T}\left[\frac{\operatorname{Cos}(n\omega_0 d_2)}{d_2 - d_1} - \left(\frac{1}{d_2 - d_1} + \frac{1}{d_1}\right)\right] \;;\; n \neq 0$$

Para C_0 el promedio por periodo. El area en $[0, d_2]$ es $\frac{1}{2} A d_2$ por paridad

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\, dt = \frac{A d_2}{T}$$