

# **PROJECT WORK**

Disciplina: Introdução aos Sistemas de Controle.

Aluno: Felipe Sousa Nogueira; Daniel Chaves Alcantara;

Matrícula: 509109; 536359;

Professora: Michela Mulas.

# Contents

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Partes do Project Work</b>	<b>1</b>
2.1	PARTE 1 . . . . .	1
2.2	PARTE 2 . . . . .	7
2.3	PARTE 3 . . . . .	10

## 1 Introdução

Inicialmente, a medida que fomos aprendendo acerca do assunto, nos foi proposto a resolução de questões computacionais, com os assuntos aprendidos durante o semestre na disciplina de Sistemas de Controle. Neste relatório iremos descrever os passos de um sistema de controle, desde a parte de modelar, até a parte de controle em sí.

## 2 Partes do Project Work

### 2.1 PARTE 1

Inicialmente, a primeira parte do projeto baseia-se na modelação do sistema. Temos um sistema com dois tanques, e nos é pedido algumas informações sobre o modelo em sí. Como entrada do sistema temos as vazões dos dois tanques, enquanto a variável de saída é o nível de fluido do segundo tanque. Primeiramente, temos as equações diferenciais de cada tanque:

A dinâmica do sistema é regida pela variação dos níveis de fluido em cada tanque, descrita pelas seguintes equações diferenciais, baseadas na Lei de Torricelli:

$$\dot{h}_1 = \frac{1}{A_1} \left( Q_{\text{in},1} - a_1 \sqrt{2gh_1} \right) \quad (1)$$

$$\dot{h}_2 = \frac{1}{A_2} \left( a_1 \sqrt{2gh_1} + Q_{\text{in},2} - a_2 \sqrt{2gh_2} \right) \quad (2)$$

Onde:

- $h_1$  e  $h_2$ : níveis de fluido nos tanques 1 e 2, respectivamente (m).

- $A_1$  e  $A_2$ : áreas das seções transversais dos tanques ( $\text{m}^2$ ).
- $Q_{\text{in},1}$  e  $Q_{\text{in},2}$ : vazões de entrada nos tanques 1 e 2, respectivamente ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).
- $a_1$  e  $a_2$ : áreas dos orifícios de saída de cada tanque ( $\text{m}^2$ ).
- $g$ : aceleração da gravidade ( $\text{m}/\text{s}^2$ ).

Substituindo  $h_1(t) = x_1(t)$  e  $h_2(t) = x_2(t)$ , as equações podem ser reescritas em termos das variáveis de estado  $x_1$  e  $x_2$ :

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{A_1} \left( u_1 - a_1 \sqrt{2gx_1} \right) \quad (3)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{A_2} \left( a_1 \sqrt{2gx_1} + u_2 - a_2 \sqrt{2gx_2} \right) \quad (4)$$

Assim, a representação do sistema no espaço de estados é dada pela forma matricial:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1 \sqrt{2g}}{2A_1 \sqrt{x_1}} & 0 \\ \frac{a_1 \sqrt{2g}}{2A_2 \sqrt{x_1}} & -\frac{a_2 \sqrt{2g}}{2A_2 \sqrt{x_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

A saída do sistema, considerando que estamos interessados apenas no nível do segundo tanque, é dada por:

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \quad (6)$$

Para encontrar os pontos de equilíbrio do sistema, podemos atribuir a zero as taxas de variação. Em outras palavras, podemos igualar as duas EDOs a zero, e substituir os parâmetros que nos foram dados. Dado:

$$a_1 = a_2 = 0,1 \text{ m}^2, \quad A_1 = A_2 = 20 \text{ m}^2, \quad g \approx 10 \text{ m}/\text{s}^2$$

Entrada constante:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{\text{in},1} = 1 \text{ m}^3/\text{s}, \quad Q_{\text{in},2} = 0 \text{ m}^3/\text{s}$$

A equação de equilíbrio para o tanque 1 é dada por:

$$Q_{\text{in},1} = a_1 \sqrt{2gh_1}$$

Substituindo os valores fornecidos:

$$1 = 0,1\sqrt{2 \times 10 \times h_1}$$

Simplificando:

$$1 = 0,1\sqrt{20h_1}$$

$$10 = \sqrt{20h_1}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados:

$$100 = 20h_1$$

$$h_1 = \frac{100}{20}$$

$$h_1 = 5 \text{ m}$$

A equação de equilíbrio para o tanque 2 é dada por:

$$Q_{in,2} + a_1\sqrt{2gh_1} = a_2\sqrt{2gh_2}$$

Como  $Q_{in,2} = 0$ , temos:

$$0 + 0,1\sqrt{2 \times 10 \times 5} = 0,1\sqrt{2 \times 10 \times h_2}$$

$$0,1\sqrt{100} = 0,1\sqrt{20h_2}$$

$$1 = 0,1\sqrt{20h_2}$$

$$10 = \sqrt{20h_2}$$

Elevando ao quadrado ambos os lados:

$$100 = 20h_2$$

$$h_2 = \frac{100}{20}$$

$$h_2 = 5 \text{ m}$$

Esses valores representam as alturas de equilíbrio dos fluidos nos tanques 1 e 2. Assim, podemos plotar o gráfico equivalente ao equilíbrio do sistema.

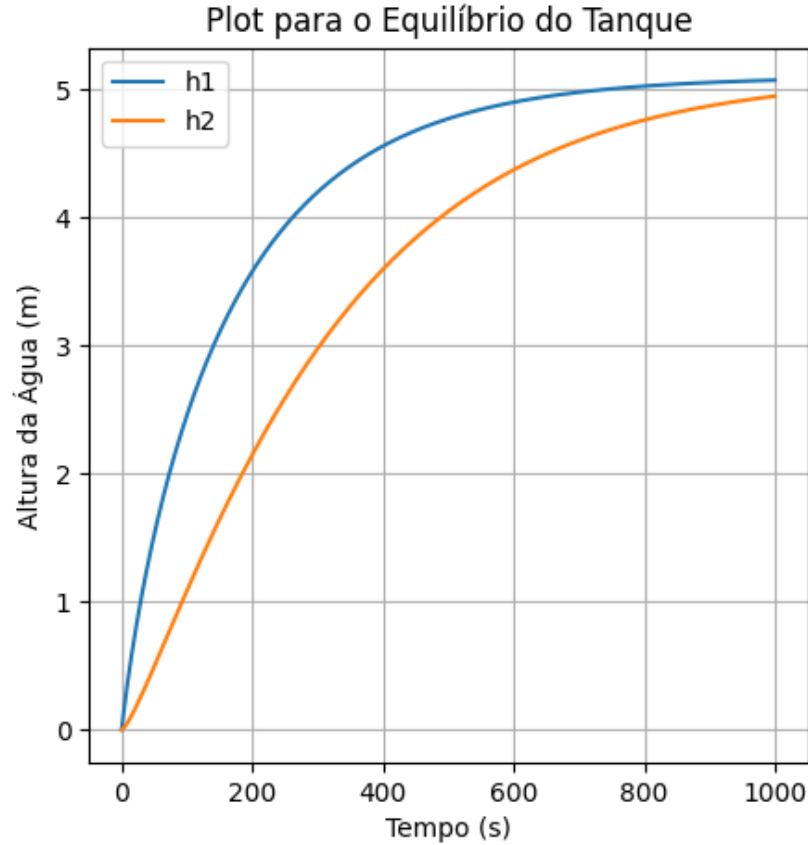


Figure 1: Altura do fluido em equilíbrio nos tanques 1 e 2 ao longo do tempo.

Além disso, podemos encontrar as matrizes de espaço de estado do sistema, e com elas, encontrar a função de transferência do sistema. Com base nisso, a partir da linearização das equações diferenciais não lineares, encontramos as matrizes de espaço de estado abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} -0.00495 & 0 \\ 0.00495 & -0.00495 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nisso, e utilizando a equação

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Podemos encontrar a função de transferência do sistema. O cálculo de  $(sI - A)^{-1}$  resulta em:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s + 0.00495)^2} \begin{bmatrix} s + 0.00495 & 0 \\ 0.00495 & s + 0.00495 \end{bmatrix}$$

Multiplicando as matrizes  $C$ ,  $(sI - A)^{-1}$ , e  $B$ :

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{0.0002475}{(s + 0.00495)^2}$$

Portanto, a função de transferência do sistema é:

$$G(s) = \frac{0.0002475}{(s + 0.00495)^2}$$

Além disso, abaixo segue o plot comparativo entre os modelos lineares e não lineares para cada tanque a resposta ao degrau.

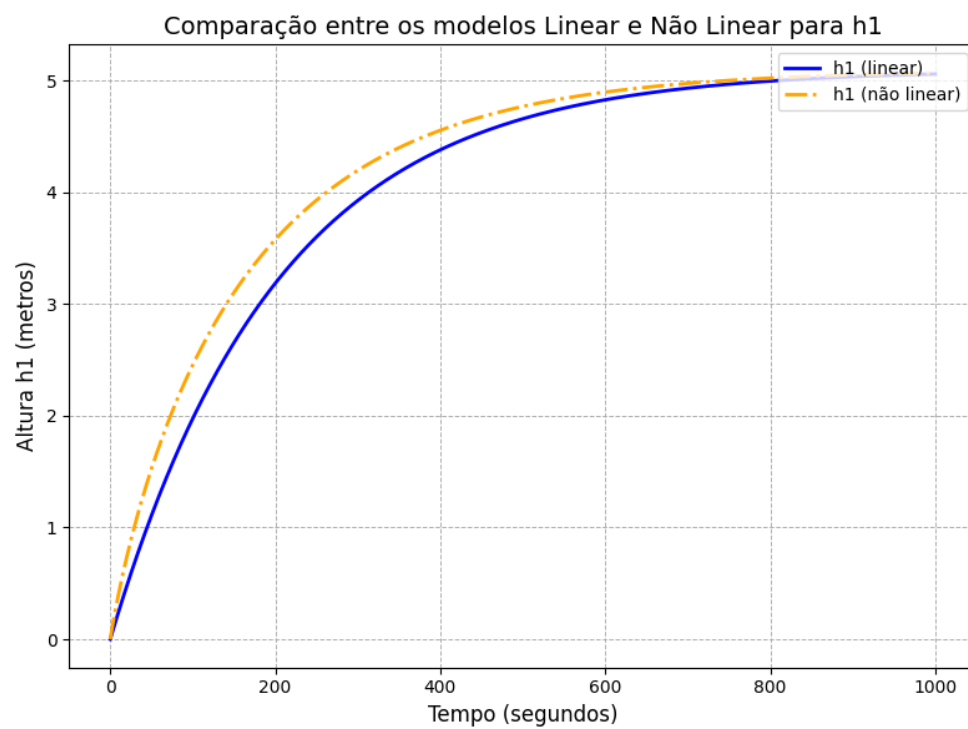


Figure 2: Modelo Linear e Não Linear - H1

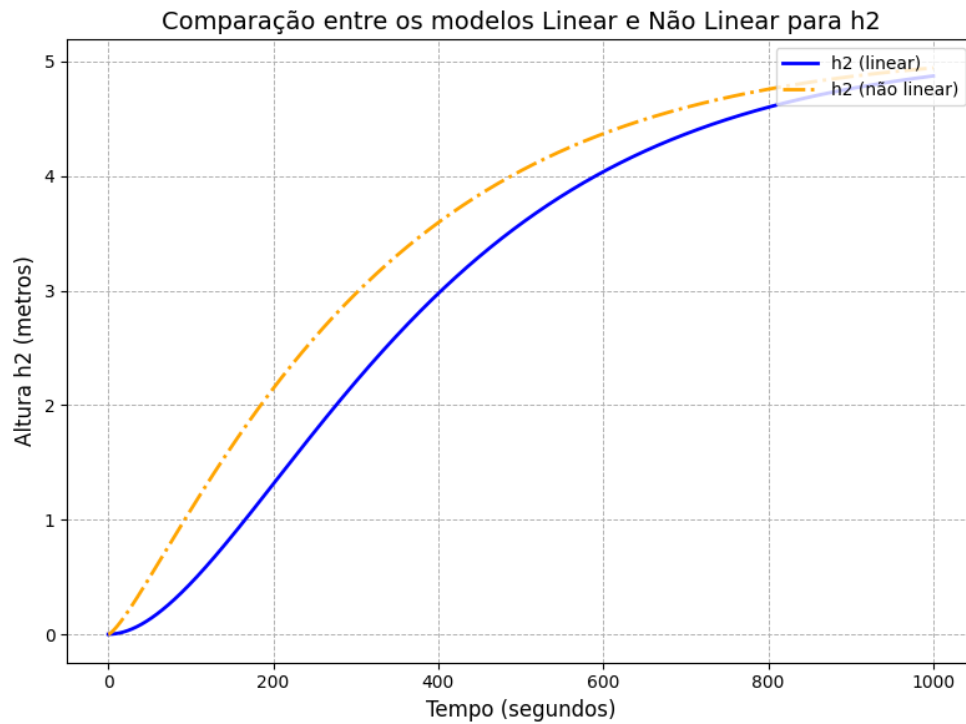


Figure 3: Modelo Linear e Não Linear -  $H_2$

## 2.2 PARTE 2

Na segunda parte do projeto, nosso objetivo era analisar o sistema no qual nós modelamos na primeira parte. Com base na função de transferência, plotamos a resposta a um degrau de amplitude  $A$ , escolhido por nós. Abaixo segue o gráfico gerado.



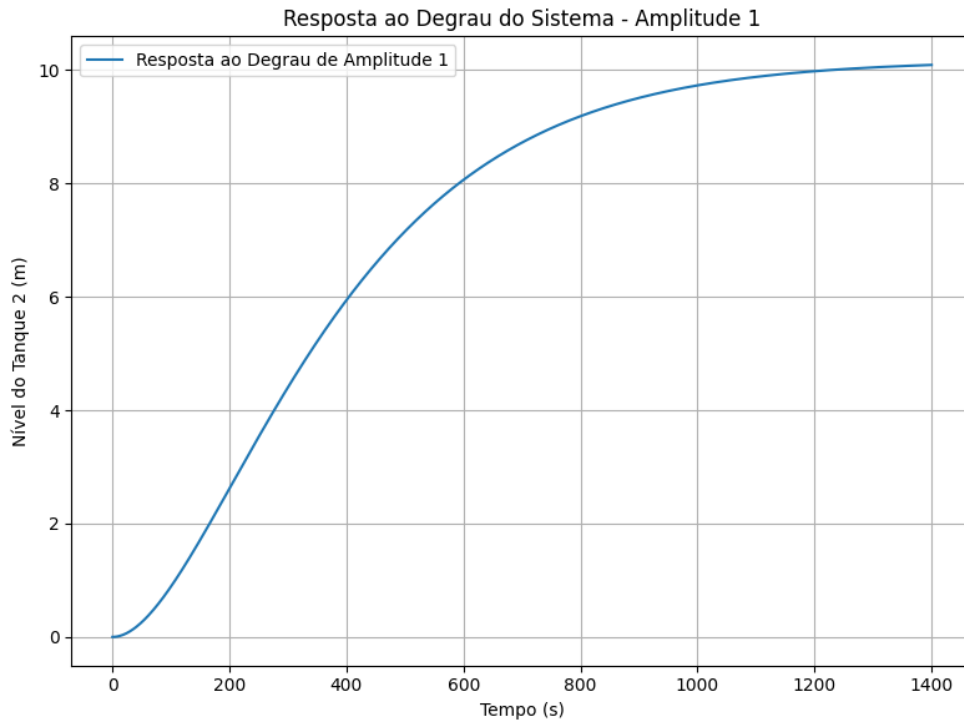


Figure 4: Resposta ao Degrau do Sistema.

A partir do gráfico gerado acima, podemos descobrir alguns parâmetros provenientes da curva gerada. Como por exemplo, a porcentagem de overshoot, tempo de subida, dentre outros.

- **Valor de Estado Estacionário:**

O valor final alcançado pelo nível do tanque 2 após a transição causada pelo degrau é de:

$$h_{2,\text{final}} = 10.0901 \text{ m}$$

Esse valor representa a altura do fluido no segundo tanque após o sistema se estabilizar.

- **Overshoot:**

A porcentagem de overshoot, que representa o quanto o valor máximo ultrapassa o valor de estado estacionário, é de:

$$\text{Overshoot} = 0\%$$

Um overshoot baixo indica que o sistema é bem amortecido e não oscila significativamente antes de estabilizar.

- **Tempo de Subida:**

O tempo que o sistema leva para a resposta subir de 10% a 90% do valor final é dado por:

$$T_{\text{subida}} = 665.67 \text{ s}$$

Esse valor fornece uma medida da rapidez com que o sistema responde inicialmente ao degrau aplicado.

- **Tempo de Estabilização:**

O tempo de estabilização, definido como o tempo necessário para que a resposta permaneça dentro de 2% do valor final, é:

$$T_{\text{estabilização}} = 1108.51 \text{ s}$$

Esse parâmetro indica o tempo que o sistema leva para praticamente atingir o estado estacionário sem oscilações significativas. Por fim, com base na função de transferência descoberta, podemos encontrar o mapa de polos e zeros e tomar informações importantes dela. Os polos do sistema são:

$$P_1 = -0.00491 + 0.00000j \quad (7)$$

$$P_2 = -0.00491 - 0.00000j \quad (8)$$

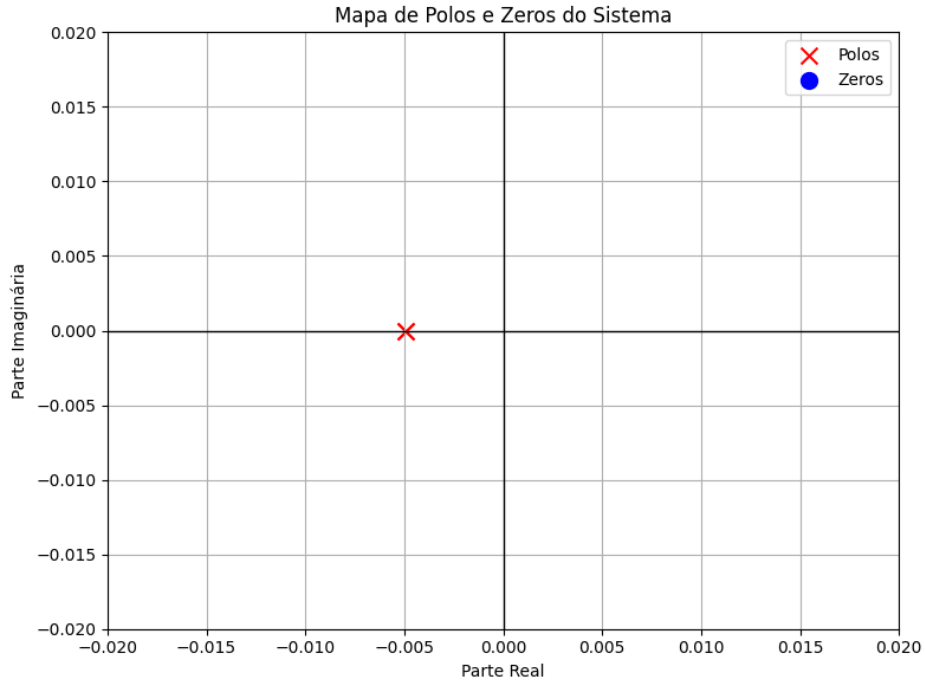


Figure 5: Mapa de Polos e Zeros.

Como visto no mapa, os dois polos iguais estão na metade esquerda do plano complexo. Isso significa que o sistema é estável. A estabilidade é de suma importância para garantir que a resposta do sistema se estabilize sem oscilações persistentes ou divergência.

As variáveis manipuladas são aquelas que podem ser alteradas, e com isso, influenciar o comportamento do sistema. Para esse sistema de tanques, as vazões  $Q_{in,1}$  e  $Q_{in,2}$  são as manipuladas. Já as variáveis controladas, são aquelas que, como o próprio nome diz, podem e devem ser controlada com base na entrada. Para nosso caso, seria o  $h_2$ .

## 2.3 PARTE 3

- Para a terceira parte do projeto, fomos solicitados primeiramente a definir o diagrama de blocos simplificado para o sistema de controle de nível, identificando os blocos para o transmissor de nível, o atuador e o sistema a ser controlado.

Assim temos:

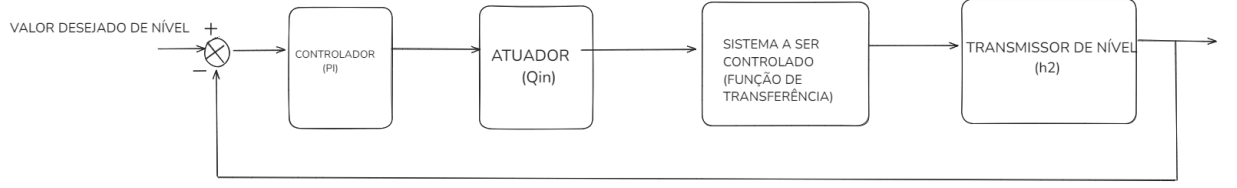


Figure 6: Diagrama de blocos simplificado do modelo.

O diagrama começa com um comparador de erro que calcula a diferença entre o valor desejado de nível e o valor medido. O erro resultante é enviado ao controlador PI, que ajusta o sinal de controle com base nos ganhos proporcional e integral a fim de minimizar o erro.

Após isso, o sinal de controle é então enviado ao atuador, que converte a ação de controle em uma variação na vazão de entrada do tanque, que então passa para o sistema a ser controlado, representado pela função de transferência  $G(s)$  (calculado anteriormente), mostrando como a dinâmica do nível do tanque responde a essa vazão de entrada. Já o transmissor de nível mede o valor atual do nível do tanque e o envia de volta ao comparador de erro, formando uma realimentação negativa.

- Para a segundo item, fomos propostos a montar um controlador para obter um erro de estado estacionário de resposta ao degrau de 10% sem afetar a resposta transitória do sistema.

Primeiramente calculamos o ganho  $K_p$  que é dado por:  $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)$

Assim, temos:

$$K_{po} = G(0) = \frac{0.00024525}{0.000024059} = 10.19 \quad (9)$$

O ganho integrativo do controlador PI pode ser calculado da seguinte forma:

$$K_{pi} = \frac{1 - \text{erro}}{\text{erro} \cdot K_{po}} \cdot \frac{1}{2} \quad (10)$$

Substituindo os valores:

$$K_{pi} = \frac{1 - 0.1}{0.1 \cdot 10.19} \cdot \frac{1}{2} \approx 0.44 \quad (11)$$

Precisamos calcular a constante de tempo do integrador ( $T_i$ ) para diminuir a oscilação do sistema.

Assim temos:

$$T_i = \frac{2}{Polos} \rightarrow \frac{2}{0.00491} = 407.33 \quad (12)$$

Sendo a função de transferência do controlador PI é dada por:

$$PI(s) = \frac{K_{pi} \cdot T_i \cdot s + K_{pi}}{T_i \cdot s} \quad (13)$$

Substituimos os valores:

$$PI(s) = \frac{0.44 \cdot 400 \cdot s + 0.44}{400 \cdot s} \quad (14)$$

Simplificando:

$$PI(s) = \frac{176s + 0.44}{400s} \quad (15)$$

A partir dos cálculos acima, já temos o nosso controlador, apenas precisamos aplicar ele no sistema e analisar sua resposta final.

Obtivemos os seguintes resultados:

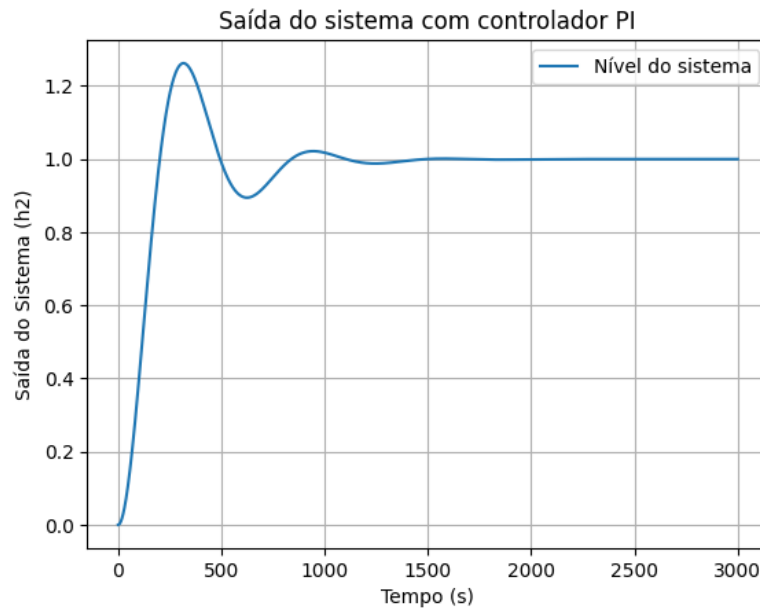


Figure 7: Sistema com controlador.

Podemos observar que sistema controlado atingiu uma estabilização em torno do valor desejado, demonstrando que o controlador PI foi capaz de ajustar a saída do sistema de maneira eficaz.

- Para o terceiro item, fui solicitado a plotar a resposta do sistema com e sem controlador, fechei a malha do sistema original e obtive o seguinte resultado:

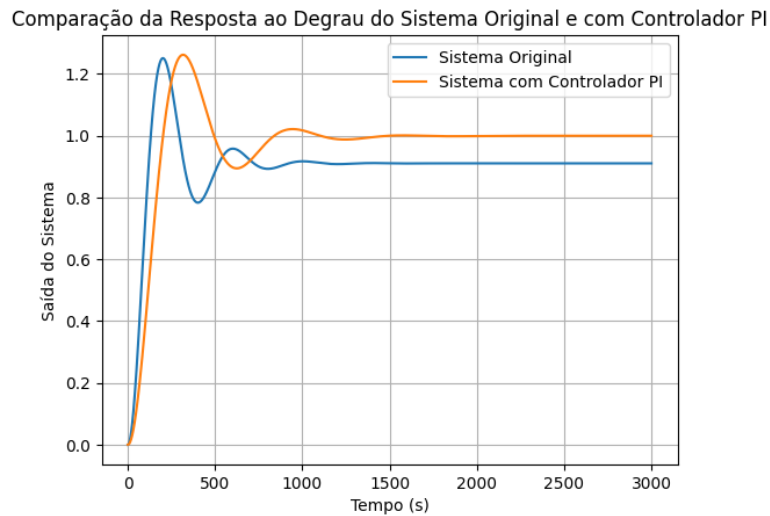


Figure 8: Sistema com e sem controlador

Podemos observar que o controlador foi eficaz em diminuir o comportamento oscilatório do sistema, o que era o esperado.

Também conseguimos observar que ele projetou um erro de 10% no estado estacionário, tendo em vista que o sistema original se estabiliza com, aproximadamente, 0.91 e com o controlado se estabiliza com, aproximadamente 1.

O que nos mostra que nosso controlador foi eficaz.