UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E COMPUTAÇÃO

SME0300 - Cálculo Numérico

Aplicação de métodos numéricos para aproximação de raízes

Felipe Andrade Garcia Tommaselli (11800910)
Gianluca Capezzuto Sardinha (11876933)
Pedro Cavallini (11801007)

Profa. Dra. Maria Luísa Bambozzi de Oliveira

São Carlos

23 de setembro de 2021

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 Introdução

Refletir a respeito de situações corriqueiras e um tanto quanto banais da vidacotidiana, pode, por muitas vezes conduzir os indivíduos a questionamentos e in-quietações extremamente relevantes e com explicações permeadas por conceitos não tão triviais.

Já interiorizada como comum nas ações diárias, o computador e suas funções são indispensáveis para a vida do ser humano; porém, vale se perguntar como e por que é um item tão útil na nossa vida, afinal é curioso imaginar uma máquina eletrônica capaz de mudar a humanidade.

Dessa forma, é visto que diversas são as aplicações que motivam o estudo de métodos computacionais para encontrar raízes aproximadas de equações polinomiais, o que reforça a importância desse trabalho, o qual relaciona a teoria dos métodos com os resultados práticos. Especificamente neste trabalho, três métodos iterativos (Bissecção, Newton e Secantes) foram aplicados para encontrar as raízes aproximadas nos intervalos pedidos de uma função polinomial de quinto grau dada. Todos os métodos são justamente métodos iterativos implementados na linguagem Python os quais ao encontrar a raiz no intervalo pedido com uma dada precisão interrompem o processo e retornam as informações obtidas.

2 Métodos/Procedimentos

Dada a explanação introdutória tecida anteriormente, na Seção 1, objetiva-se poranto, realizar uma análise mais detalhada a respeito dos métodos computacionais propostos. Assim, pretende-se que, com o evoluir da explanação teórica, cada método implementado esteja de acordo com o que será encontrado na Seção 3, exibindo suas particularidades e apresentando a convergência que se deseja.

Em conjunto a isso, entende-se que cada um dos métodos tem o mesmo intuito, porém formas diferentes de investigar o desenrolar do encontro de raízes, sendo portanto responsáveis por elucidar com aspectos distintos os polinômios para a interpretação dos computadores. Mesmo assim, em raros casos consegue-se obter raízes exatas (polinômios fatoráveis), ou seja, numericamente a solução é obter uma aproximação através de sequências de aproximações, cada uma mais precisa que a anterior.

2.1 Parte teórica

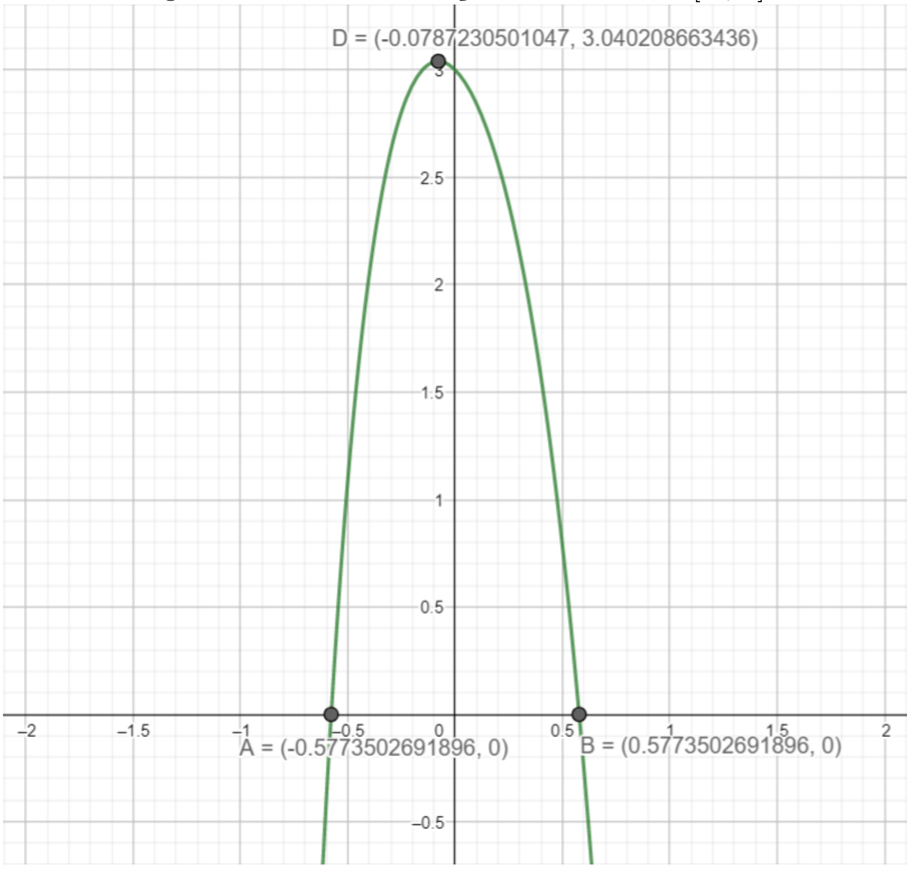
Sendo assim, tomando a Equação 1 como a função que será trabalhada:

$$f(x) = 3x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 6x^2 - x + 3 \tag{1}$$

Sabe-se que será possível a implementação dos métodos iterativos se garantirmos que a Função 1 satisfaz as condições necessárias para todos os teoremas nos intervalos [-1,0] e [0,1].

Dessa forma, se f:[-1,0]$\rightarrow$ $\mathbb{R}$ e f:[0,1]$\rightarrow$ $\mathbb{R}$ são funções dadas, um ponto no extremo desses intervalos é um zero (ou raiz) de f se f($\bar{x}$) = 0 [1]. Nesse sentido, seguindo a ideia anterior, sabe-se que uma função contínua f(x) assumirá os valores de sinais opostos (ou zero) nos pontos extremos do intervalo em que a função será trabalhada, isto é, se f(-1)$\times$ f(0)$\leqslant$ 0 e f(0)$\times$ f(1)$\leqslant$ 0, então existe pelo menos um ponto $\bar{x} \in$ [-1, 0] e [0, 1] tal que f($\bar{x}$) = 0. Portanto, para mostrar que existe uma única raiz real em cada um dos intervalos serão utilizados os auxílios da plataforma Geogebra [2], sendo assim foi desenhado um gráfico da função no intervalo [-3, 3] que será representado a seguir na Figura 1:

Figura 1: Gráfico da Função 1 no intervalo [-2, 2].



Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir do observado na Figura 1, é possível identificar que as raízes se encontram em x = -0,577350 e x = 0,577350, com uso de 6 dígitos significativos. Além disso, outro ponto de interesse, principalmente para o Método de Newton, é o ponto x = -0,078723, representando uma possível restrição ao se tratar do local onde f'(x) = 0

Assim, para encontrarmos as raízes exatas utilizando um procedimento teórico, que convirja com o que foi encontrado no gráfico, é possível usufruir do software oferecido pelo site WolframAlpha [3]. Assim, tem-se que as raízes reais nos intervalos estudados são iguais a x = -$\frac{-1}{\sqrt{3}}$ e x = $\frac{-1}{\sqrt{3}}$. Portanto, pode-se utilizar o que foi encontrado para ser feita uma comparação com os resultados numéricos obtidos pelos métodos na Seção 3.

2.2 Método da bisseção

Sendo f:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ na qual deseja-se calcular uma aproximação a raiz de f(x) em um determinado intervalo fechado I, por exemplo. Dessa forma, desde que I contenha apenas uma raiz e o produto entre a função aplicada nos extremos do intervalo seja, estritamente, negativo é possível repetir o processo para aplicar o método da Bisseção, ou seja, considerando [a_{k-1}, b_{k-1}] onde f(a_{k-1}) $\times f(b_{k-1})<0$ [1]. Além disso, é necessário lembrar que a convergência só é permitida para a raiz que estiver com a precisão menor ou igual a informado pelo usuário, ou seja, deve existir um erro pequeno em relação a raiz real e a encontrada pelo método.

Primeiramente, é importante ressaltar que esse método consiste na decomposição de I em intervalos menores que satisfazem as condições propostas no parágrafo anterior. Em conjunto a isto, o método necessita aplicar a função no ponto médio do intervalo para verificar em qual dos extremos a aplicação ainda é possível de acontecer, indicando aos poucos em quais dos subintervalos a raiz da função está presente. Sendo assim, é utilizada a Equação 2 para calcular o ponto médio:

$$x_k = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2} \tag{2}$$

Por fim, o processo será repetido até que a diferença entre os extremos do intervalo dado seja menor que o erro (indicando que está na precisão desejada pelo usuário), ou a função no ponto dado seja igual a zero (garantindo que foi encontrada a raiz real da função) ou atingiu o máximo de iterações propostas sem que fosse atingido êxito em encontrar a raiz nula da função e tivesse sucesso em convergir. Assim, é importante validar que para os casos em que a raiz está dentro da precisão estabelecida ou é encontrada, o valor retornado é uma aproximação da raiz; caso não haja um desfecho com o máximo de iterações estabelecidas é retornado uma mensagem de "ERROR".

2.3 Método de Newton

O método de Newton, seguindo por um caminho um pouco diferente do Método da Bisseção, é um método iterativo linear (MIL) com o objetivo de obter raízes aproximadas de funções. O primeiro passo para a modelagem, e no geral de um MIL qualquer, é uma manipulação matemática para as iterações lineares, tomando a raiz encontrado na iteração de número "k"como x_k, tem-se que $x_k = 0$, ou melhor, a cada iteração x_k está mais perto da real raiz.

Para continuar o procedimento, toma-se ψ(x) = x uma função a qual será modelada as iterações lineares, de forma que $x_{k+1} = \psi(x_k)$. Ou seja, a cada iteração essa função deverá levar o valor de x_k para mais próximo da real raiz, sendo a precisão querida o critério de parada para o método. Nesse contexto, há o teorema que tomando uma função f com raiz no intervalo I, se $|\psi$(x)'$| < 1$ e f'(x) 0 há a garantia de que esse método convergirá para a raiz desejada a partir dessas iterações lineares [1].

A partir dos conceitos acima, urge o método de newton, o qual indica uma boa opção de (x), dada por:

$$x_{k+1} = \psi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{3}$$

onde, $|\psi$'(x)$| < 1$ será satisfeito a partir dessa escolha e f'(x_k) = 0 se torna uma restrição relevante ao sistema. Essa escolha de função advém da ideia de aproximar em um ponto específico a função por sua reta tangente, e a partir da extensão dessa reta tomar os argumentos que atualizarão o valor de x_k em cada iteração.

O método de Newton garante a convergência de forma mais otimizada comparado com outros MIL, porém, caso a função não tenha um comportamento convencional, o cálculo a cada procedimento da derivada dessa função pode ser uma tarefa custosa.

2.4 Método das Secantes

No contexto descrito no último parágrafo dseção anterior surge o Método das Secantes. O qual é também um método iterativo linear baseado diretamente no método de Newton, buscando trabalhar de forma mais eficiente com funções com comportamentos não convencionais, mesmo que haja uma perda de velocidade de convergência geral.

O método das secantes utiliza o conceito de discretizar a derivada de f(x), sendo f uma função com uma raiz no intervalo I e obedecendo às mesmas condições de contorno do método de newton, em uma subtração de termos diferenciais discretizados da forma:

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{4}$$

onde "a" e "b" são os termos x_k e x_{k-1} para o cálculo de x_{k+1} na aplicação do método. Substituindo a expressão acima na fórmula do método de newton e rearranjando os termos de forma conveniente tem-se:

$$x_{k+1} = \psi(x_k) = \frac{f(x_k)\ x_{k-1} - f(x_{k-1})\ x_k}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{5}$$

O método em si é formado partindo da aproximação tomando a reta que cruza os pontos (x_k, f(x_k)) e (x_{k-1}, f(x_{k-1})) e analisando onde a reta cruza o eixo das abscissas, então esse valor se torna x_{k+1}. Essa aproximação será tão precisa quanto for querido ao aplicar-se o método, de forma que esta é a condição de parada do método para o cálculo da raiz aproximada [1].

A grande vantagem de utilização desse método é o fato de não exigir o cálculo da devariada da função a cada iteração, o que foi suprimido em troca de um pouco de perde de perfomance. Uma vez que é realizada uma aproximação para discretizar a derivação e obter a fórmula final apenas em função de x_k e x_{k-1}, aproximação essa que irá custar algumas iterações a mais para convergir na raiz querida em comparação com o Método de Newton.

2.5 Análise de convergência

Ademais, para garantir que f satisfaça as condições suficiente para convergências nos intervalos propostos para cada um dos métodos, é necessário mostrar que a raiz nula é exclusiva em ambos, ou seja, no intervalo dado haja apenas uma raiz real. Além disso, vale ressaltar a importância da relação $|\psi'(x)| < 1$ que deve ser satisfeita para os métodos de Newton e das Secantes. Sendo assim, tomando os intervalos propostos como A = [-1,0] e B = [0, 1], e verificando a taxa de variação de f na Equação 6 para demonstrar o que foi falado anteriormente, tem-se:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = 15x^4 - 36x^3 + 6x^2 - 12x - 1 \tag{6}$$

Então, como se deseja mostrar que há apenas uma raiz real no intervalo, basta notar que para A e B tem-se que:

- Intervalo A:

$$f(-1) = 3x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 6x^2 - x + 3 = -3 - 9 - 2 - 6 + 1 + 3 = -16 \tag{7}$$

$$f(0) = 3x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 6x^2 - x + 3 = 3 \tag{8}$$

- Intervalo B:

$$f(0) = 3x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 6x^2 - x + 3 = 3 \tag{9}$$

$$f(1) = 3x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 6x^2 - x + 3 = 3 - 9 + 2 - 6 - 1 + 3 = -8 \tag{10}$$

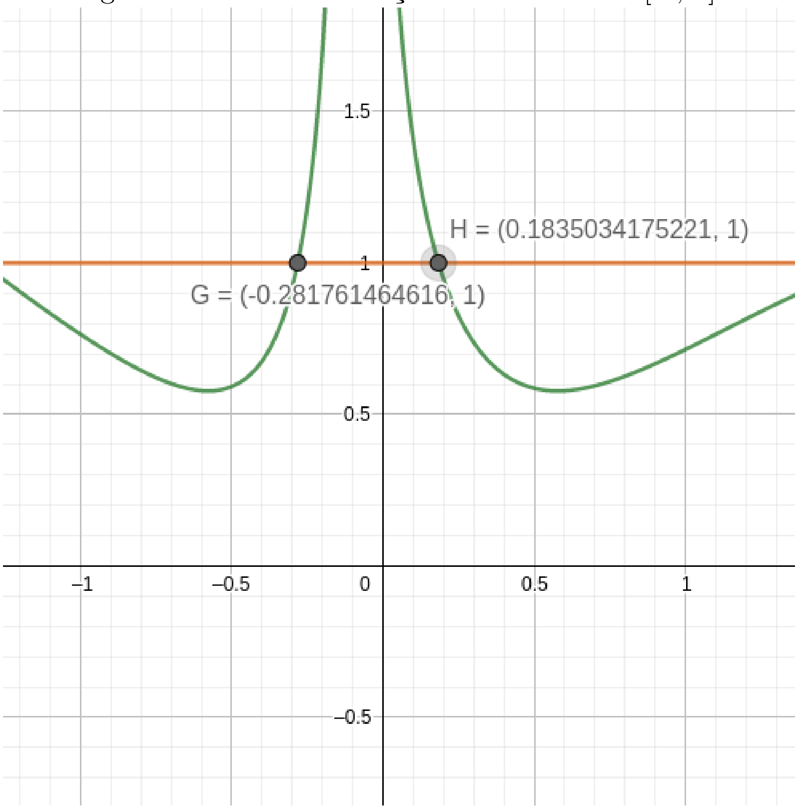
Assim, sabe-se que f(a)$\times$ f(b)$\leq$ 0 em ambos os intervalos, garantindo a existência de pelo menos uma raiz. Agora, basta motrar que $|\psi'(x)| < 1$, da mesma forma que está caracterizada na Equação 3, substituindo f(x) e f'(x), dá-se a Equação 11:

$$\psi(x) = x - \frac{3x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 6x^2 - x + 3}{15x^4 - 36x^3 + 6x^2 - 12x - 1} \tag{11}$$

Simplificando o que foi obtido na Equação 11 para obter a Equação 12 e utilizando a ferramenta Geogebra para analisar a função, tem-se:

$$|\psi(x)| = \left| \frac{12x^5 - 27x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 3}{15x^4 - 36x^3 + 6x^2 - 12x - 1} \right| < 1 \tag{12}$$

Figura 2: Gráfico da Função 12 no intervalo [-1, 1].



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por meio do gráfico apresentado pela Figura 2, pode-se concluir que a Equação 12 é satisfeita, porém não em todo o intervalo [-1, 1]. Nesse sentido, visto que parte do intervalo A e parte do intervalo B têm f'(x) muito próxima a zero nas confinidades do intervalo [-0,2817, 0,1835], é possível caracterizar restrições a aplicação dos métodos de Newton e das Secantes.

Por conseguinte, é importante lembrar que o método da Bisseção pode ser usado à vontade em ambos os intervalos, uma vez que a função possui raiz única em seu interior, além do produto da função calculada em cada extremo ser negativo. Todavia, os métodos de Newton e das Secantes possuem problemas para garantir convergência nos arredores do ponto x = 0, ou seja, não é possível afirmar nada a respeito. Porém, ainda vale ressaltar que tal restrição não indica a não convergência dos métodos no ponto.

Entretanto, ainda é possível garantir a convergência nos intervalos, fazendo apenas uma restrição menor que serão chamadas de C e D, respectivamente. Então, sabendo que é única a raiz em [-1, 0] e em [0, 1], é possível realizar a aplicação do teorema de garantia de raízes e determinar em qual extremo a raiz se encontra. Assim, tomando x_1=-0,2817 e x_2=0,1835, encontra-se para os diferentes intervalos:

- Intervalo A:

$$f(-1) \times f(-0,2817) = -43,1818 \tag{13}$$

$$f(-0,2817) \times f(0) = 8.0965 \tag{14}$$

- Intervalo B:

$$f(0) \times f(0,1835) = 7.8517 \tag{15}$$

$$f(0,1835) \times f(0) = -20.9379 \tag{16}$$

Logo, a raiz se encontra entre [-1, -0,2817] e [0,1835, 1], ou seja, se forem tomados estes intervalos para os métodos serem aplicados é garantido que tenha convergência para o valor esperado.

3 Resultados

Nesta seção, serão tratados os aspectos práticos da teoria vista até o momento. Por meio dos códigos desenvolvidos, será possível analisar o exemplo da aplicação dos métodos em uma função polinomial em dois intervalos diferentes, onde em cada qual a função possui uma raiz. Os resultados obtidos pela análise empírica pelos códigos serão apresentados em forma de tabela e suas respectivas particularidades serão ressaltadas individualmente.

3.1 Método da bisseção

Uma vez aplicado o Método da Bisseção nos intervalos [-1,0] e [0,1] para a Equação 1, pode-se obter a raiz de tal função presente em cada intervalo citado com uma precisão de 10^{-6}. A Tabela 1 apresenta os resultados das iterações realizadas pelo método no intervalo [-1,0], enquanto a Tabela 2 mostra tais resultados para o intervalo [0,1].

Tabela 1: Resultados para o Método da Bisseção para o intervalo [-1,0]

k	a	b	x_k	$f(x_k)$	$erro$
0	-1.00000000	0.00000000	-1.00000000	-16.00000000	0.42264973
1	-1.00000000	-0.50000000	-0.50000000	1.09375000	0.07735027
2	-0.75000000	-0.50000000	-0.75000000	-4.02832031	0.17264973
3	-0.62500000	-0.50000000	-0.62500000	-0.86642456	0.04764973
4	-0.62500000	-0.56250000	-0.56250000	0.23814869	0.01485027
5	-0.59375000	-0.56250000	-0.59375000	-0.28005913	0.01639973
6	-0.57812500	-0.56250000	-0.57812500	-0.01282090	0.00077473
7	-0.57812500	-0.57031250	-0.57031250	0.11465069	0.00703777
8	-0.57812500	-0.57421875	-0.57421875	0.05141738	0.00313152
9	-0.57812500	-0.57617188	-0.57617188	0.01942459	0.00117839
10	-0.57812500	-0.57714844	-0.57714844	0.00333353	0.00020183
11	-0.57763672	-0.57714844	-0.57763672	-0.00473576	0.00028645
12	-0.57739258	-0.57714844	-0.57739258	-0.00069913	0.00004231
13	-0.57739258	-0.57727051	-0.57727051	0.00131769	0.00007976
14	-0.57739258	-0.57733154	-0.57733154	0.00030940	0.00001873
15	-0.57736206	-0.57733154	-0.57736206	-0.00019483	0.00001179
16	-0.57736206	-0.57734680	-0.57734680	0.00005729	0.00000347
17	-0.57735443	-0.57734680	-0.57735443	-0.00006877	0.00000416
18	-0.57735062	-0.57734680	-0.57735062	-0.00000574	0.00000035
19	-0.57735062	-0.57734871	-0.57734871	0.00002578	0.00000156
20	-0.57735062	-0.57734966	-0.57734966	0.00001002	0.00000061

Tabela 2: Resultados para o Método da Bisseção para o intervalo [0,1]

k	a	b	x_k	$f(x_k)$	$erro$
0	0.00000000	1.00000000	0.00000000	3.00000000	0.57735027
1	0.50000000	1.00000000	0.50000000	0.78125000	0.07735027
2	0.50000000	0.75000000	0.75000000	-2.41699219	0.17264973
3	0.50000000	0.62500000	0.62500000	-0.56765747	0.04764973
4	0.56250000	0.62500000	0.56250000	0.16294384	0.01485027
5	0.56250000	0.59375000	0.59375000	-0.18751785	0.01639973
6	0.56250000	0.57812500	0.57812500	-0.00867790	0.00077473
7	0.57031250	0.57812500	0.57031250	0.07802268	0.00703777
8	0.57421875	0.57812500	0.57421875	0.03489639	0.00313152
9	0.57617188	0.57812500	0.57617188	0.01316544	0.00117839
10	0.57714844	0.57812500	0.57714844	0.00225784	0.00020183
11	0.57714844	0.57763672	0.57763672	-0.00320651	0.00028645
12	0.57714844	0.57739258	0.57739258	-0.00047345	0.00004231
13	0.57727051	0.57739258	0.57727051	0.00089242	0.00007976
14	0.57733154	0.57739258	0.57733154	0.00020954	0.00001873
15	0.57733154	0.57736206	0.57736206	-0.00013194	0.00001179
16	0.57734680	0.57736206	0.57734680	0.00003880	0.00000347
17	0.57734680	0.57735443	0.57735443	-0.00004657	0.00000416
18	0.57734680	0.57735062	0.57735062	-0.00000389	0.00000035
19	0.57734871	0.57735062	0.57734871	0.00001746	0.00000156
20	0.57734966	0.57735062	0.57734966	0.00000679	0.00000061

Analisando os dados das Tabelas 1 e 2, pode-se ver que a raiz encontrada no intervalo [-1,0] foi $x = -0.57734966$ e no intervalo [0,1] foi $x = 0.57734966$, ambas com um erro (truncado em 8 casas decimais) de 0.00000061 em relação a raiz real obtida pelo software WolframAlpha [3].

3.2 Método de Newton

Utilizando o Método de Newton, foi possível construir as Tabelas 3 e 4 a partir das iterações necessárias para chegar nas raízes da Equação 1 nos intervalos [-1,0] e [0,1], respectivamente. Foi garantido que tais valores de raízes apresentassem uma precisão de 10^{-6}.

Tabela 3: Resultados para o Método de Newton para o intervalo [-1,0]

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$erro$
0	-1.00000000	-16.000000	68.00000000	0.42264973
1	-0.76470588	-4.500464	32.91306378	0.18735561
2	-0.62796794	-0.925888	20.14915070	0.05061767
3	-0.58201623	-0.077823	16.83539233	0.00466596
4	-0.57739365	-0.000717	16.52595696	0.00004338
5	-0.57735027	-0.000000	16.52307338	0.00000000
6	-0.57735027	0.000000	16.52307313	0.00000000

Tabela 4: Resultados para o Método de Newton para o intervalo [0,1]

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$erro$
0	1.00000000	-8.000000	-28.00000000	0.42264973
1	0.71428571	-1.831618	-15.72511454	0.13693545
2	0.59780848	-0.235176	-11.80480344	0.02045822
3	0.57788642	-0.006004	-11.20557724	0.00053616
4	0.57735065	-0.000004	-11.18975098	0.00000038
5	0.57735027	-0.000000	-11.18973979	0.00000000

Observando os resultados exibidos nas Tabelas 3 e 4, pode-se perceber que a raiz obtida para o intervalo [-1,0] foi $x = -0.57735027$, enquanto para o intervalo [0,1] a raiz foi $x = 0.57735027$. As raízes dos intervalos foram exibidas com um erro nulo em relação ao valor real calculado no WolframAlpha [3], uma vez que os valores dos erros foram truncados em 8 algarismos significativos.

3.3 Método das Secantes

O Método das Secantes foi utilizado para determinar as raízes da Equação 1 nos intervalos [-1,0] e [0,1] de modo a garantir 10^{-6} de precisão nos valores encontrados. As Tabelas 3 e 4 representam as iterações feitas para chegar nos valores das raízes para os intervalos citados.

Tabela 5: Resultados para o Método das Secantes para o intervalo [-1,0]

k	x_k	$f(x_k)$	$erro$
0	-1.00000000	-16.00000000	0.42264973
1	-0.15789474	2.99454909	0.41945553
2	-0.29065522	2.66420740	0.28669505
3	-1.36136921	-56.74623418	0.78401894
4	-0.33867042	2.44102894	0.23867985
5	-0.38084904	2.18670946	0.19650122
6	-0.74351256	-3.82744812	0.16616229
7	-0.51271119	0.93771190	0.06463908
8	-0.55812943	0.30553835	0.01922084
9	-0.58008071	-0.04536369	0.00273044
10	-0.57724290	0.00177361	0.00010736
11	-0.57734968	0.00000972	0.00000059

Tabela 6: Resultados para o Método das Secantes para o intervalo [0,1]

k	x_k	$f(x_k)$	$erro$
0	0.00000000	3.00000000	0.57735027
1	0.27272727	2.27629757	0.30462300
2	1.13055005	-12.07148439	0.55319978
3	0.40882217	1.50787369	0.16852810
4	0.48896399	0.87972237	0.08838628
5	0.60120216	-0.27541424	0.02385189
6	0.57444170	0.03242150	0.00290857
7	0.57726013	0.00100852	0.00009014
8	0.57735062	-0.00000388	0.00000035
9	0.57735027	0.00000000	0.00000000

Pelos resultados apresentados nas Tabelas 3 e 4, é possível notar que a raiz encontrada no intervalo [-1,0] foi $x = -0.57734968$ e no intervalo [0,1] foi $x = 0.57735027$. Os erros (truncados em 8 algarismos significativos) em relação ao valor real das raízes nos intervalos [-1,0] e [0,1] foram, respectivamente 0.00000059 e 0. Os valores reais das raízes utilizados para o calculo do erro foram obtidas pelo site WolframAlpha [3].

3.4 Discussões e Análises

Pela quantidade de iterações (k) que cada algoritmo utilizou para chegar no valor das raízes da Equação 1 nos intervalos [-1,0] e [0,1], pode-se definir a velocidade de convergência de cada método. Um método que converge rapidamente para a raiz da equação é um método que utiliza poucas iterações para este cálculo, enquanto um que converge lentamente para a raiz é tal que precisa de muitas iterações.

No Método da Bisseção, foram necessárias 20 iterações para chegar nos valores de cada raiz com precisão de 10^{-6}, conforme pode ser visto nas Tabelas 1 e 2. Já para o Método de Newton, foram necessárias 6 iterações para o cálculo da raiz presente no intervalo [-1,0] e 5 iterações para a raiz presente no intervalo [0,1], conforme as Tabelas 3 e 4 respectivamente, utilizando também uma precisão de 10^{-6}. Por fim, para o Método das Secantes, foram utilizadas 11 iterações para a raiz em [-1,0] e 9 iterações para a raiz em [0,1], visto nas Tabelas 3 e 4 respectivamente, adotando a mesma precisão de 10^{-6}.

Portanto, é possível afirmar que, em ordem crescente de velocidade de convergência, vem o Método da Bisseção, em seguida o Método das Secantes, e por fim o Método de Newton.

Em questão de aplicação dos algoritmos, o Método de Newton precisa que seja informado também a derivada da função cujas raízes serão encontradas, necessitando assim de um esforço maior de quem o utiliza. Em contrapartida, os Métodos da Bisseção e das Secantes precisam apenas da função que se quer encontrar as raízes, facilitando sua implementação.

É importante ressaltar também que, apesar de ser o algoritmo mais lento, o Método da Bisseção tem como pré-condição apenas que a raiz da função esteja no intervalo informado. Já os Métodos de Newton e das Secantes precisam de pré-condições mais exigentes, como já exemplificado, necessitando por certas vezes restringir os intervalos onde serão aplicados tais algoritmos.

4 Conclusões

Embasado nos conceitos- teóricos e empíricos- abordados ao longo desse trabalho, observa-se a relevância de forma aind mais significante da compreensão e do tratamento correto dos métodos numéricos para cálculo de raízes aproximadas de funções. Nesse contexto, cabe ainda a análise das restrições e particularidades de aplicação de cada um dos três métodos pedidos de forma prática, uma vez que em situações reais cada método pode oferecer vantagens e desvantagens perante um determinado cenário, pertencendo ao desenvolvedor a decisão de qual opção é mais viável para o contexto.

Nesse contexto, além dos resultados obtidos de forma direta, foi possível realizar uma análise comparativa entre os métodos de forma empírica,ressaltando indicadores importantes para a escolha de qual método melhor se adequa em um determinado contexto, como o número de iterações para chegar na raiz aproximada. Nessa análise, verificou-se que o Método de Newton obteve a convergência mais rápida (menor número de iterações) para a raiz no intervalo dado, seguido pelo Método das Secantes e pelo da Bisseção- por último.

Portanto, fica evidente que a aplicação de toda a teoria vista em aula de forma empírica forneceu uma visão mais concreta e objetiva dos objetos de análise, no caso três métodos extremamente importantes para o estudo do Cálculo Numérico e da computação no geral. Ademais, foi possível testar a implementação completa dos métodos em códigos na linguagem python, ação essa que reforça ainda mais o aprendizado e apela para uma maior familiarização com a teoria que muitas vezes pode ser abstrata e obscura quando analisada de forma passiva.

Referências

[1] S. C. C. Raymond P. Canale, ***Métodos Numéricos para Engenharia***. AMGH.

[2] M. Hohenwarter, ***Geogebra***.

[3] W. Research, ***Wolfram Alpha***.