Lista de Exercícios 2: Amostragem de sinais

Felipe Andrade Garcia Tommaselli- 11800910

- Slide Aula 2: https://marofe.github.io/controle-digital/2024/aula2.html

In [ ]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy.signal import butter, freqz, filtfilt
from scipy.signal import cheby1, lfilter
```

Objetivo:

O objetivo desta prática é simular a discretização de um sinal contínuo com diferentes períodos de amostragem. Para isso, considere o sinal:

$$y(t) = 1 + \cos(\omega_n t) + \sin(2\omega_n t), \text{ onde } \omega_n = 10\pi$$

Passos:

1. **Plotagem do sinal:**
   Mostre o sinal (y(t)) para o intervalo (t = [0, 2]) usando um gráfico.

2. **Espectro de frequência:**
   Obtenha o espectro de frequência de (y(t)) utilizando a Transformada de Fourier (FFT). Qual é a frequência máxima do sinal?
   (Dica: Consulte a documentação da função `fft` para mais detalhes.)

3. **Amostragem na frequência de Nyquist:**
   Faça a amostragem do sinal na frequência de Nyquist ((\hat{f_s} = 2f_M)) e mostre o resultado utilizando a função `stem`. Compare com o sinal contínuo. Usando apenas as amostras do sinal, é possível reconstruir de forma única o sinal contínuo? Justifique.

4. **Amostragem abaixo da frequência de Nyquist:**
   Faça a amostragem do sinal em uma frequência abaixo da de Nyquist ((\hat{f_s} < 2f_M)) e mostre o resultado utilizando `stem`. Compare com o sinal contínuo. Obtenha também o sinal com aliasing ((\omega_b = \omega_n - \omega_s)) e compare.

5. **Amostragem acima da frequência de Nyquist:**
   Faça a amostragem do sinal em uma frequência acima da de Nyquist ((\hat{f_s} > 2f_M)) e mostre o resultado utilizando `stem`.

   (Dica: Consulte a documentação da função `fft` para mais detalhes.)

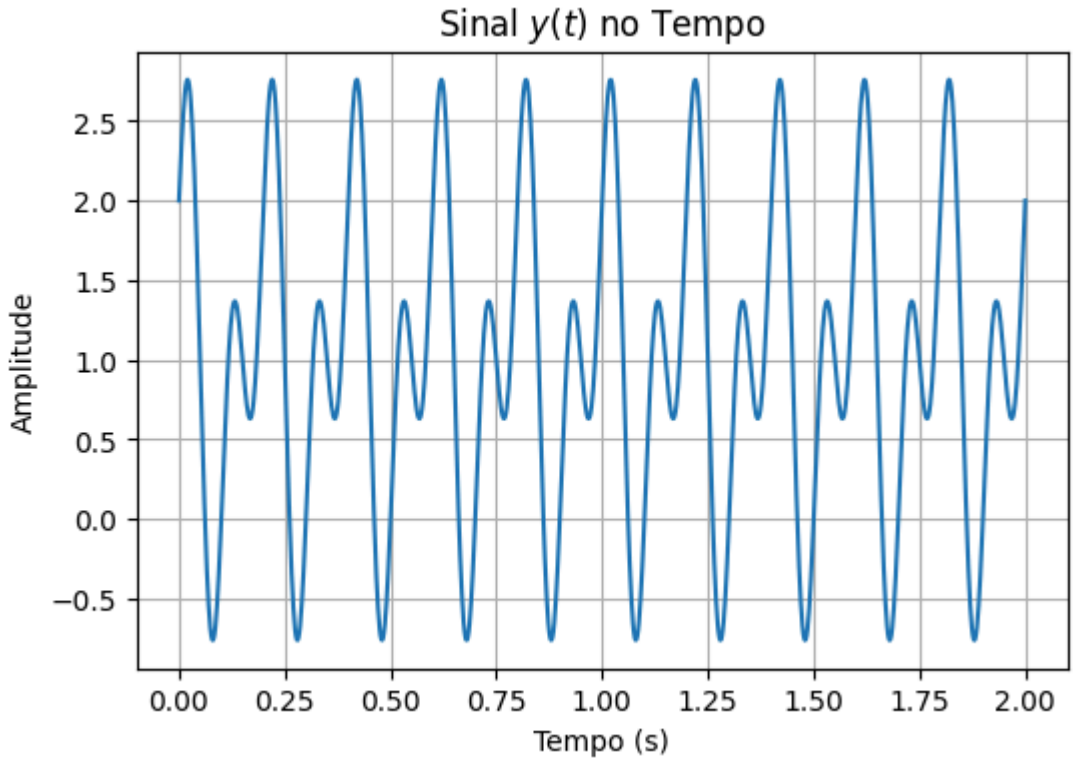
Exemplo de código em MATLAB:

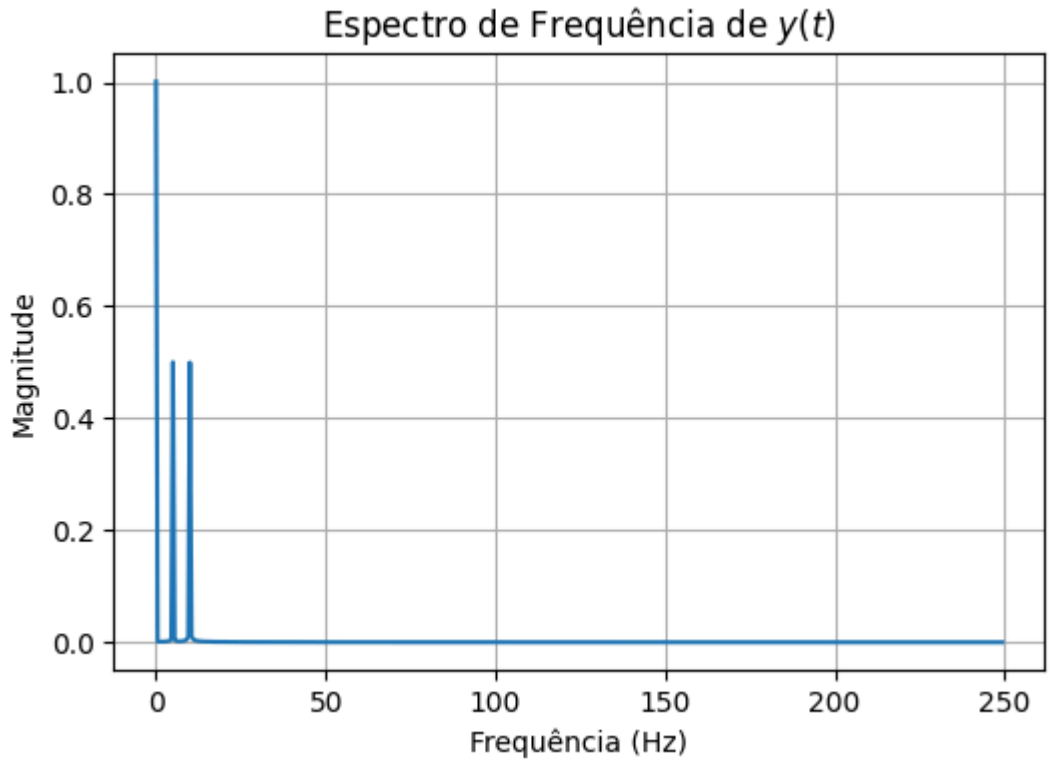
```
n = numel(y); % Obtém o tamanho do vetor sinal
Y = fft(y); % Calcula a FFT (Transformada de Fourier bilateral)
Y = abs(fftshift(Y) / n); % Obtém a magnitude da FFT
f = fa / n * (-floor(n/2):floor(n/2)); % Vetor de frequências
figure; % Cria uma nova figura
plot(f, Y); % Plota o espectro de y
```

In [ ]:
```
# Definindo os parâmetros
omega_n = 10 * np.pi
t = np.linspace(0, 2, 1000)  # Vetor de tempo de 0 a 2 segundos

# Definindo o sinal y(t)
y_t = 1 + np.cos(omega_n * t) + np.sin(2 * omega_n * t)

# Calculando a FFT
n = len(y_t)
Y = np.fft.fft(y_t)  # FFT de y(t)
#Y = np.fft.fftshift(Y)  # Shift da FFT para centralizar no zero
Y = np.abs(Y) / n  # Normaliza a FFT

# Definindo o vetor de frequências
fa = 1 / (t[1] - t[0])  # Frequência de amostragem
f = np.fft.fftfreq(n, d=(t[1] - t[0]))  # Vetor de frequências

half = len(f) // 2
f = f[:half]
Y = Y[:half]

# calcular o valor max
max_index = np.argmax(Y[1:])
max_freq = f[max_index]

print(f'max_freq: {max_freq}')
```

```
max_freq: 4.4955
```

In [ ]:
```
# Plotando o sinal no tempo
plt.figure(figsize=(6,4))
plt.plot(t, y_t)
plt.title('Sinal $y(t)$ no Tempo')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.grid(True)
plt.show()

# Plotando o espectro de frequência
plt.figure(figsize=(6,4))
plt.plot(f, Y)
plt.title('Espectro de Frequência de $y(t)$')
plt.xlabel('Frequência (Hz)')
plt.ylabel('Magnitude')
plt.grid(True)
plt.show()
```



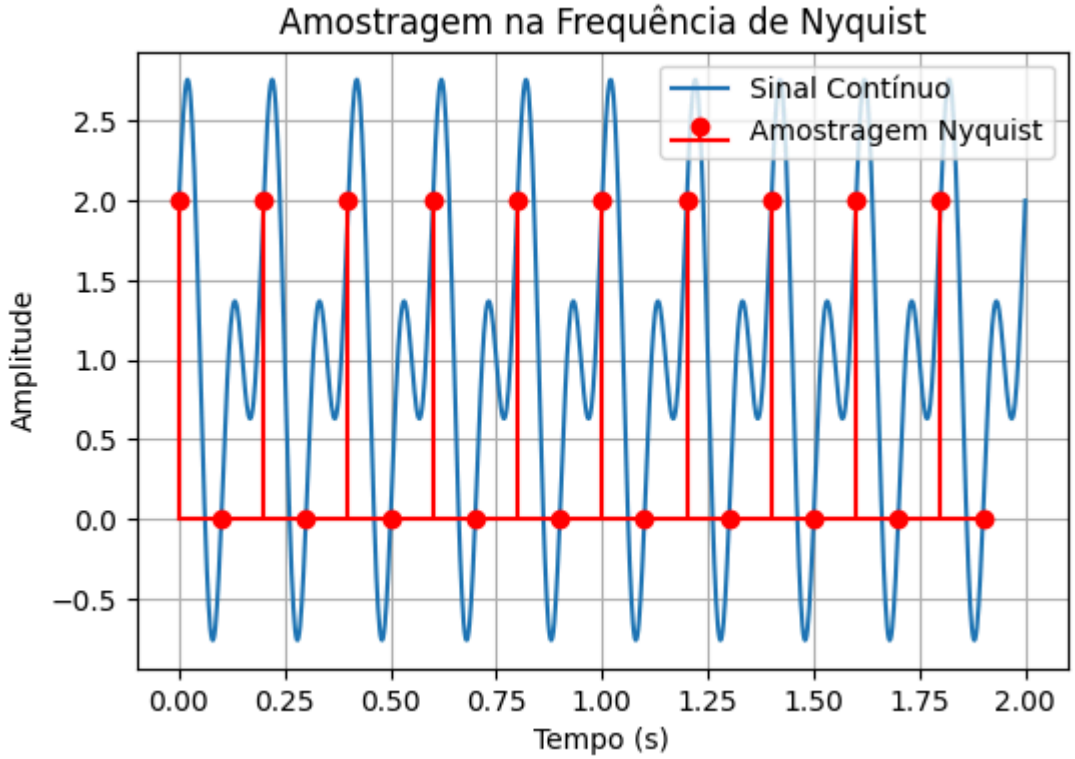


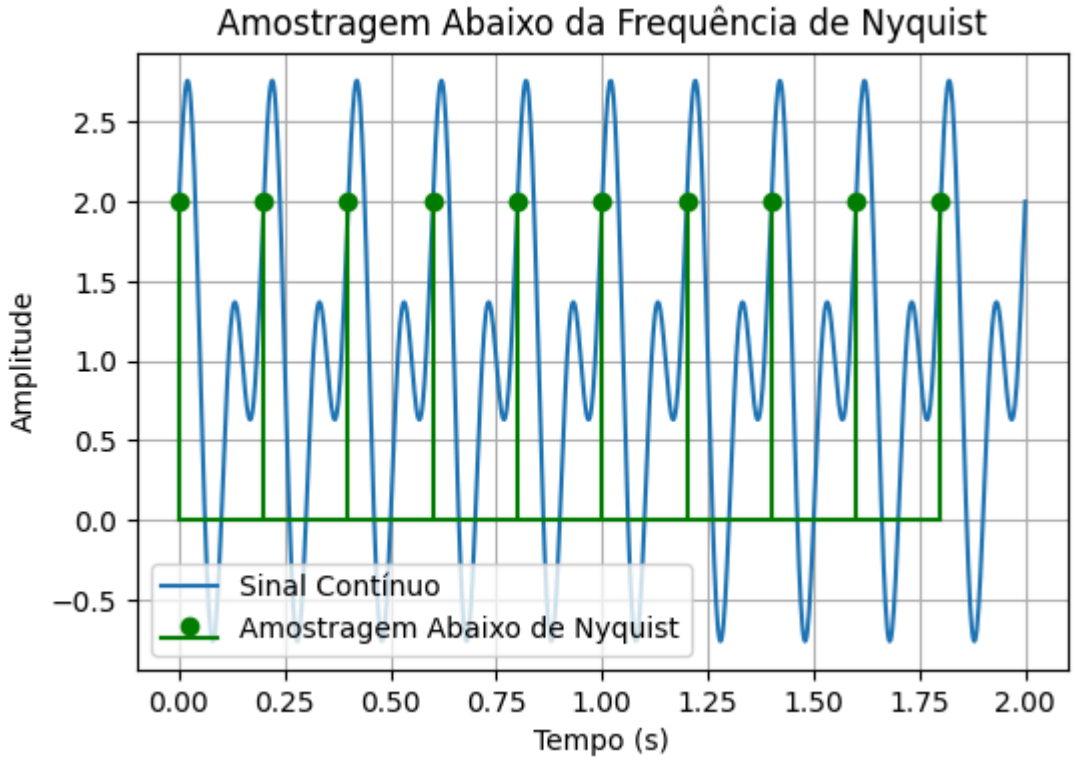
In [ ]:
```
# Parâmetros do sinal
omega_n = 10 * np.pi
t_continuous = np.linspace(0, 2, 1000)  # Sinal contínuo de 0 a 2 segundo
y_continuous = 1 + np.cos(omega_n * t_continuous) + np.sin(2 * omega_n *

# Frequência de Nyquist
fM = omega_n / (2 * np.pi)  # Frequência máxima do sinal
fs_nyquist = 2 * fM  # Frequência de Nyquist

# Amostragem na frequência de Nyquist
t_nyquist = np.arange(0, 2, 1/fs_nyquist)
y_nyquist = 1 + np.cos(omega_n * t_nyquist) + np.sin(2 * omega_n * t_nyqu
```

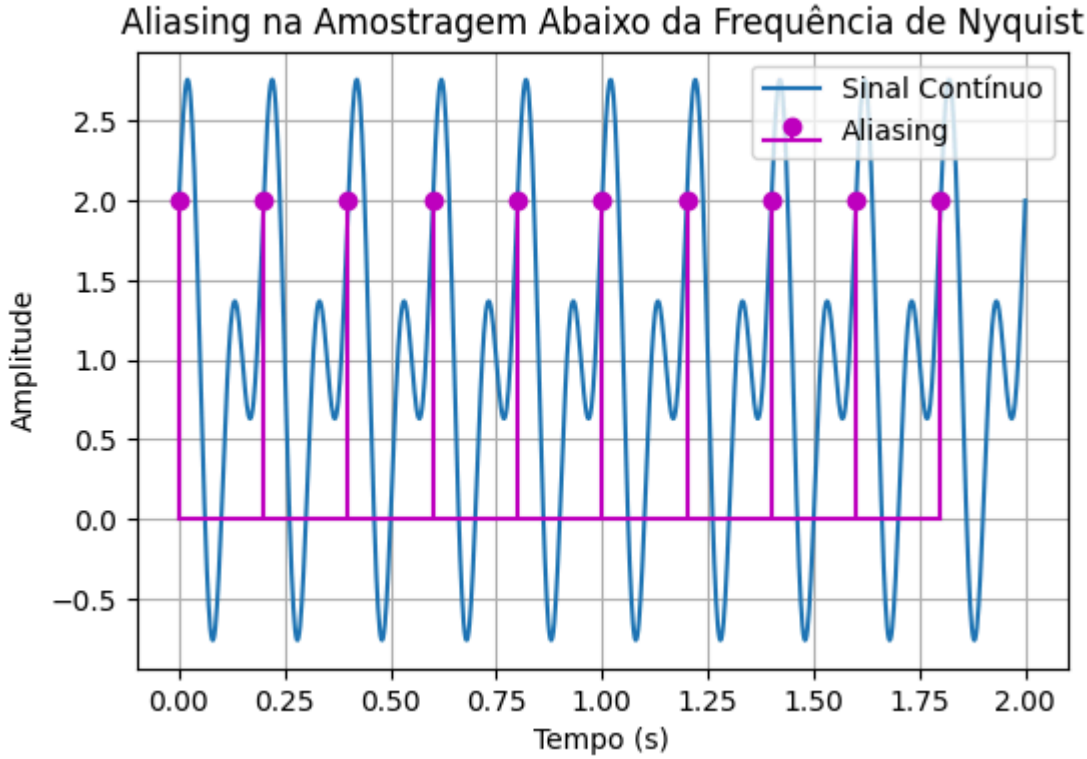
```
# Amostragem abaixo da frequência de Nyquist (fs < 2fM)
fs_below_nyquist = fM  # Frequência abaixo da de Nyquist
t_below_nyquist = np.arange(0, 2, 1/fs_below_nyquist)
y_below_nyquist = 1 + np.cos(omega_n * t_below_nyquist) + np.sin(2 * omeg

# Amostragem acima da frequência de Nyquist (fs > 2fM)
fs_above_nyquist = 10 * fM  # Frequência acima da de Nyquist
t_above_nyquist = np.arange(0, 2, 1/fs_above_nyquist)
y_above_nyquist = 1 + np.cos(omega_n * t_above_nyquist) + np.sin(2 * omeg

# Calculando o aliasing (ωb = ωn - ωs) para a amostragem abaixo da de Nyq
omega_s_below_nyquist = 2 * np.pi * fs_below_nyquist
omega_b = omega_n - omega_s_below_nyquist
y_aliasing = 1 + np.cos(omega_b * t_below_nyquist) + np.sin(2 * omega_b *
```

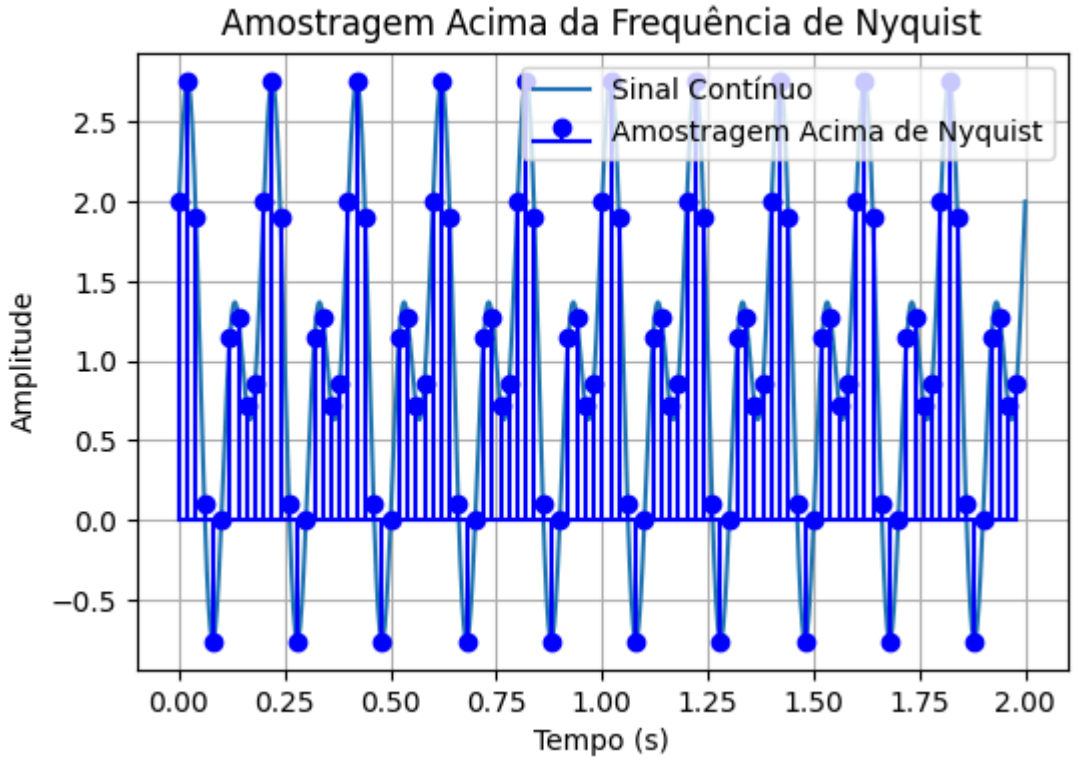
In [ ]:

```
# Plotando o sinal contínuo e a amostragem na frequência de Nyquist
plt.figure(figsize=(6, 4))
plt.plot(t_continuous, y_continuous, label='Sinal Contínuo')
plt.stem(t_nyquist, y_nyquist, linefmt='r-', markerfmt='ro', basefmt='r-'
plt.title('Amostragem na Frequência de Nyquist')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Plotando o sinal contínuo e a amostragem abaixo da frequência de Nyquis
plt.figure(figsize=(6, 4))
plt.plot(t_continuous, y_continuous, label='Sinal Contínuo')
plt.stem(t_below_nyquist, y_below_nyquist, linefmt='g-', markerfmt='go',
plt.title('Amostragem Abaixo da Frequência de Nyquist')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Plotando o sinal de aliasing gerado pela amostragem abaixo de Nyquist
plt.figure(figsize=(6, 4))
plt.plot(t_continuous, y_continuous, label='Sinal Contínuo')
plt.stem(t_below_nyquist, y_aliasing, linefmt='m-', markerfmt='mo', basef
plt.title('Aliasing na Amostragem Abaixo da Frequência de Nyquist')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# Plotando o sinal contínuo e a amostragem acima da frequência de Nyquist
plt.figure(figsize=(6, 4))
plt.plot(t_continuous, y_continuous, label='Sinal Contínuo')
plt.stem(t_above_nyquist, y_above_nyquist, linefmt='b-', markerfmt='bo',
plt.title('Amostragem Acima da Frequência de Nyquist')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```


Amostragem na Frequência de Nyquist
Sinal Contínuo
Amostragem Nyquist
Amplitude
Tempo (s)
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00


Amostragem Abaixo da Frequência de Nyquist
Sinal Contínuo
Amostragem Abaixo de Nyquist
Amplitude
Tempo (s)
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00





Exercício 2:

Considere o sinal:

$$y(t) = \cos(2\pi t)$$

Passos:

(a) Mostre o sinal em tempo contínuo no intervalo ([0, 3]) usando `plot`.

(b) Obtenha o espectro de frequência usando `fft`.

(c) Faça a amostragem do sinal usando a frequência de Nyquist para obter (y_a[k]) e mostre usando `stem`.

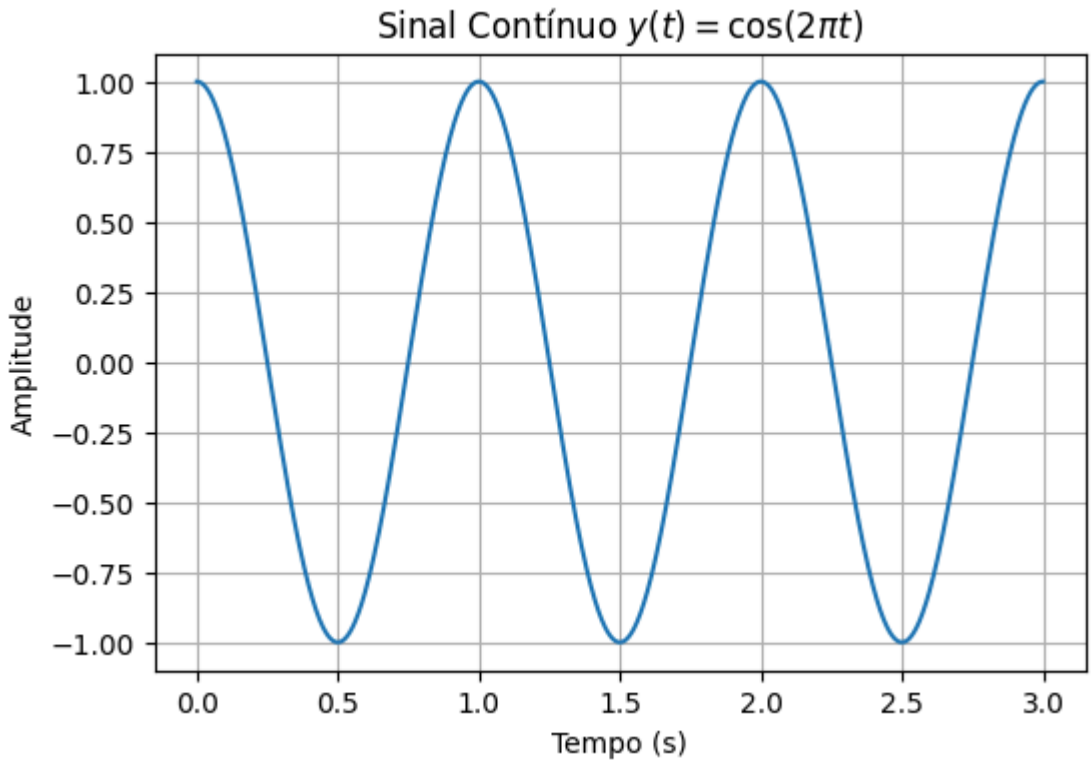
(d) Construa o sinal (y_a^*(t)) (usando trem de impulsos) e mostre usando `stem`.

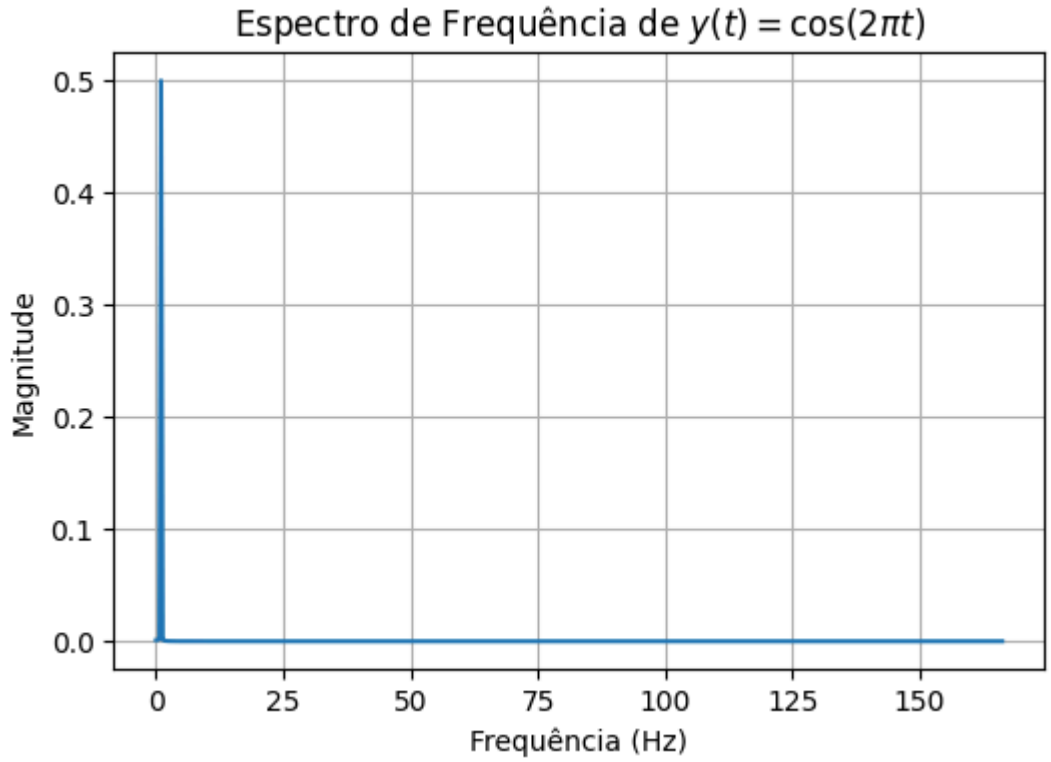
(e) Obtenha o espectro de (y_a^*(t)) usando `fft`. O que pode-se concluir com o espectro do sinal amostrado na frequência de Nyquist?

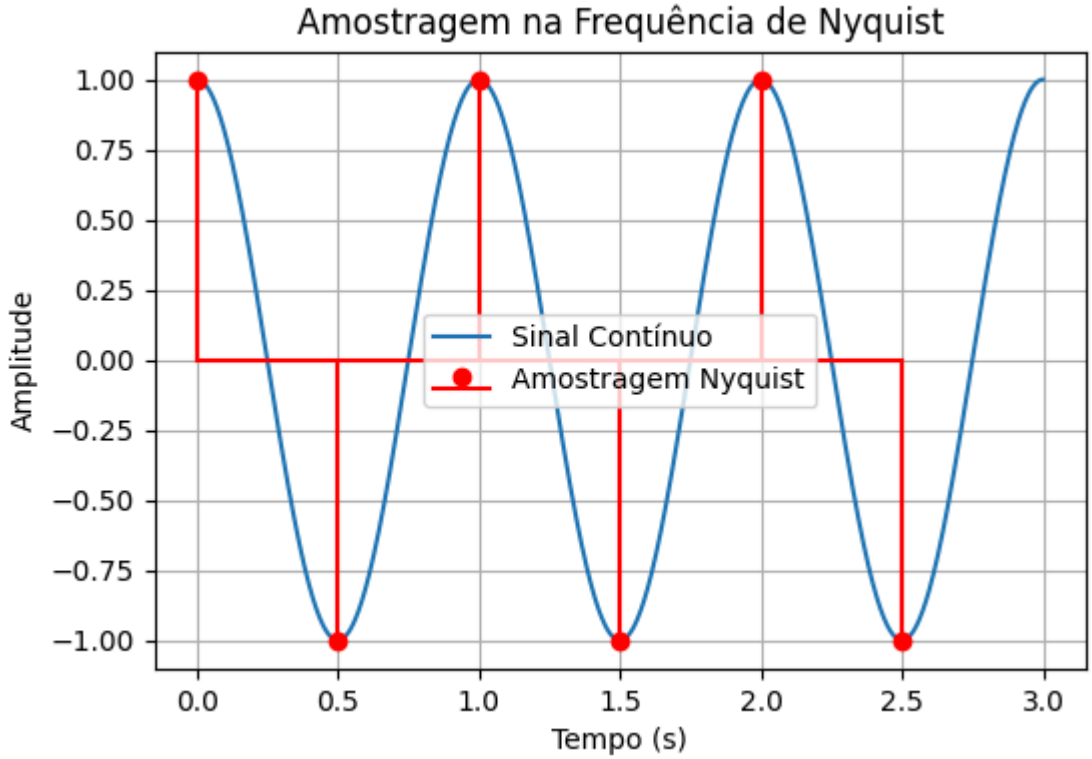
(f) Repita o item anterior, porém, com 10x a frequência máxima do sinal. O que pode-se concluir com o espectro do sinal amostrado nessa nova frequência de amostragem?

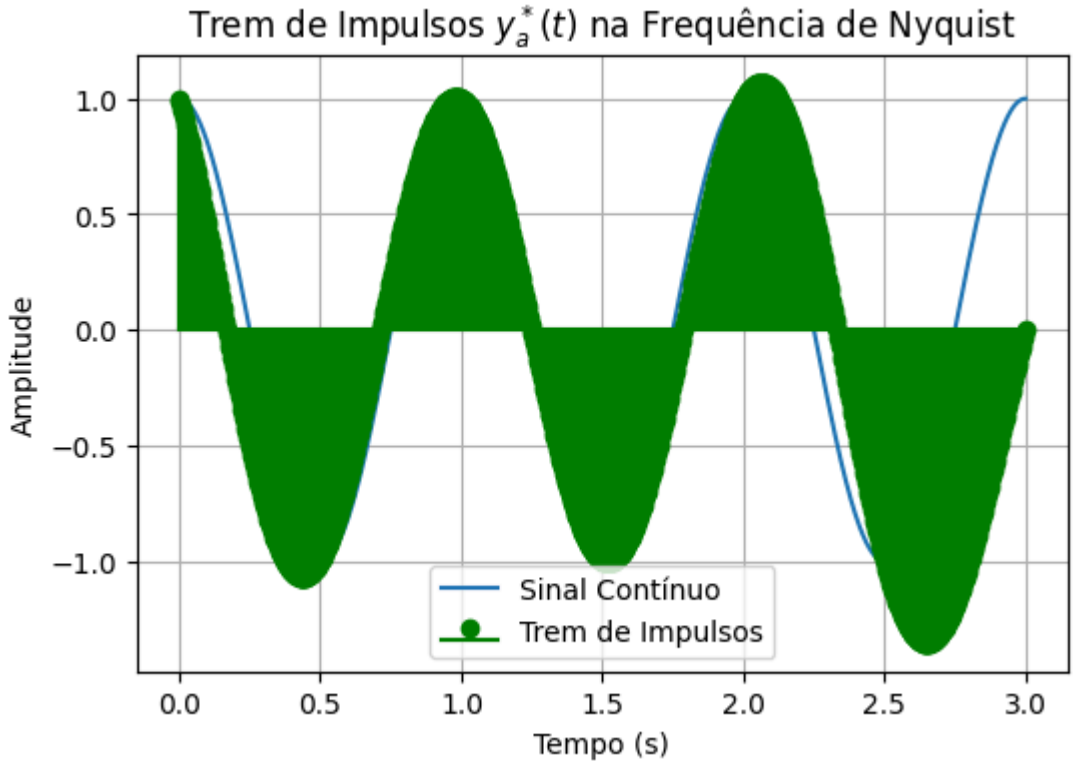
In [ ]:
```python
# (a) Definindo o sinal y(t) no intervalo [0, 3]
t_continuous = np.linspace(0, 3, 1000)
y_continuous = np.cos(2 * np.pi * t_continuous)

# (b) Obtendo o espectro de frequência usando FFT
n = len(y_continuous)
Y = np.fft.fft(y_continuous)  # Calcula a FFT de y(t)
Y = np.fft.fftshift(Y)  # Centraliza o espectro em torno de zero
Y = np.abs(Y) / n  # Normaliza a magnitude da FFT

# Definindo o vetor de frequências
fa = 1 / (t_continuous[1] - t_continuous[0])  # Frequência de amostragem
f = np.fft.fftfreq(n, d=(t_continuous[1] - t_continuous[0]))
f = np.fft.fftshift(f)  # Centraliza as frequências

# (c) Amostragem do sinal usando a frequência de Nyquist
fs_nyquist = 2 * 1  # Frequência de Nyquist (2 vezes a frequência máxima
t_nyquist = np.arange(0, 3, 1 / fs_nyquist)
y_nyquist = np.cos(2 * np.pi * t_nyquist)

# (d) Construção do sinal y_a*(t) usando trem de impulsos
T = t_nyquist[1] - t_nyquist[0]
sinc = np.sinc((t_continuous[:, np.newaxis] - t_nyquist[np.newaxis, :]) /
y_impulse_train = np.dot(sinc, y_nyquist)


# (e) Espectro de y_a*(t) usando FFT
Y_impulse = np.fft.fft(y_impulse_train)
Y_impulse = np.fft.fftshift(Y_impulse)
Y_impulse = np.abs(Y_impulse) / len(y_impulse_train)

# (f) Amostragem do sinal com 10x a frequência máxima do sinal
fs_high = 10 * 2 * 1  # 10 vezes a frequência de Nyquist
t_high = np.arange(0, 3, 1 / fs_high)
y_high = np.cos(2 * np.pi * t_high)

# Construção do sinal y_a* (t) para a nova frequência de amostragem
y_impulse_train_high = np.zeros_like(y_continuous)
for i in range(len(t_high)):
    idx = np.argmin(np.abs(t_continuous - t_high[i]))
    y_impulse_train_high[idx] = y_high[i]

# Espectro do sinal amostrado com alta frequência usando FFT
Y_high_impulse = np.fft.fft(y_impulse_train_high)
Y_high_impulse = np.fft.fftshift(Y_high_impulse)
Y_high_impulse = np.abs(Y_high_impulse) / len(y_impulse_train_high)
```

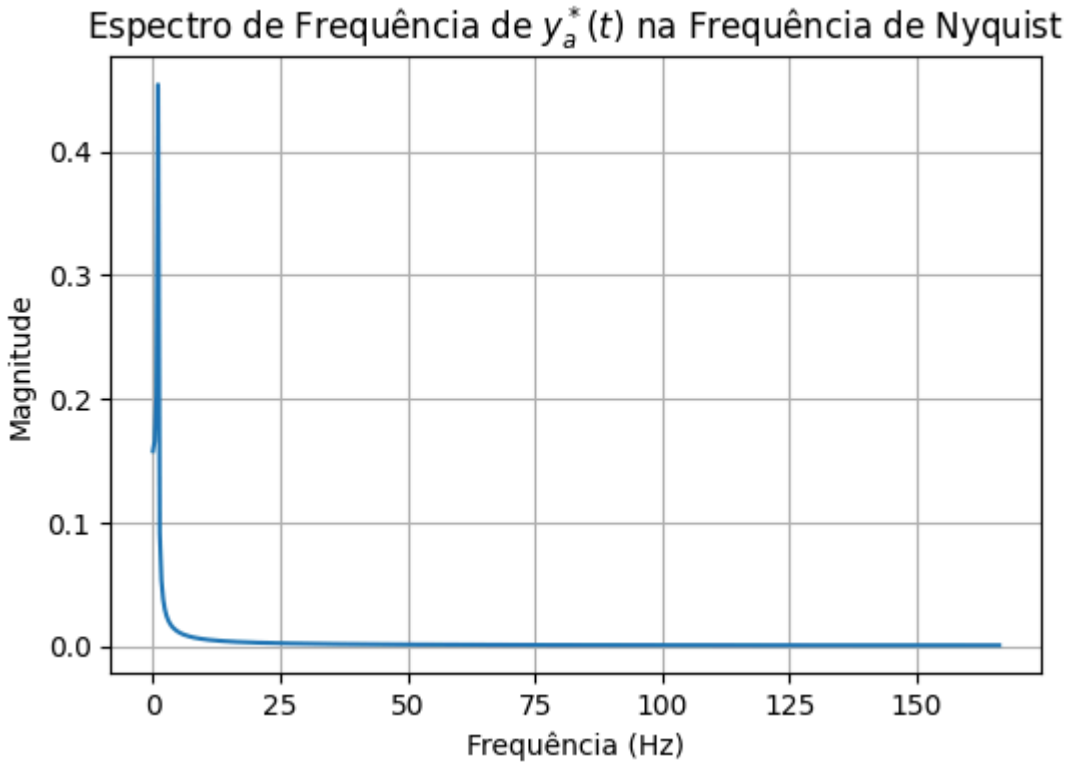
In [ ]:
```
# (a) Plot do sinal contínuo no intervalo [0, 3]
plt.figure(figsize=[6,4])
plt.plot(t_continuous, y_continuous)
plt.title('Sinal Contínuo $y(t) = \cos(2\pi t)$')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.grid(True)
plt.show()

# (b) Plot do espectro de frequência do sinal contínuo
plt.figure(figsize=[6,4])
plt.plot(f[len(f)//2:], Y[len(f)//2:])
plt.title('Espectro de Frequência de $y(t) = \cos(2\pi t)$')
plt.xlabel('Frequência (Hz)')
plt.ylabel('Magnitude')
plt.grid(True)
plt.show()

# (c) Plot da amostragem do sinal usando a frequência de Nyquist
plt.figure(figsize=[6,4])
plt.plot(t_continuous, y_continuous, label='Sinal Contínuo')
plt.stem(t_nyquist, y_nyquist, linefmt='r-', markerfmt='ro', basefmt='r-'
plt.title('Amostragem na Frequência de Nyquist')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# (d) Plot do sinal y_a*(t) usando trem de impulsos
plt.figure(figsize=[6,4])
plt.plot(t_continuous, y_continuous, label='Sinal Contínuo')
plt.stem(t_continuous, y_impulse_train, linefmt='g-', markerfmt='go', bas
plt.title('Trem de Impulsos $y_a^*(t)$ na Frequência de Nyquist')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

# (e) Plot do espectro de y_a*(t) usando FFT
plt.figure(figsize=[6,4])
plt.plot(f[len(f)//2:], Y_impulse[len(f)//2:])
plt.title('Espectro de Frequência de $y_a^*(t)$ na Frequência de Nyquist'
plt.xlabel('Frequência (Hz)')
plt.ylabel('Magnitude')
plt.grid(True)
plt.show()

# (f) Plot do espectro do sinal amostrado com alta frequência
# plt.figure(figsize=[6,4])
# plt.plot(f, Y_high_impulse)
# plt.title('Espectro de Frequência de $y_a^*(t)$ com Alta Frequência de
# plt.xlabel('Frequência (Hz)')
# plt.ylabel('Magnitude')
# plt.grid(True)
# plt.show()
```


Sinal Contínuo $y(t) = \cos(2\pi t)$
Amplitude
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
Tempo (s)


Espectro de Frequência de $y(t) = \cos(2\pi t)$
Magnitude
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0
25
50
75
100
125
150
Frequência (Hz)


Amostragem na Frequência de Nyquist
Amplitude
Tempo (s)
Sinal Contínuo
Amostragem Nyquist
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0


Trem de Impulsos $y_a^*(t)$ na Frequência de Nyquist
Amplitude
Tempo (s)
Sinal Contínuo
Trem de Impulsos
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0



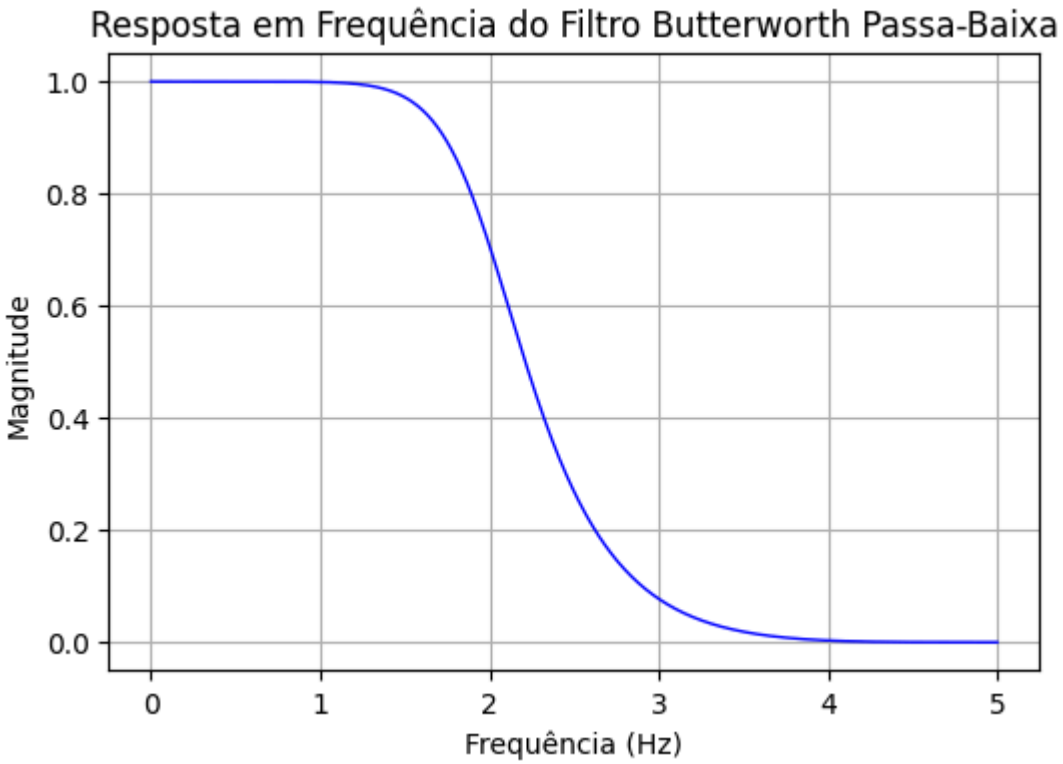
3. Obtenha a funcao de transferência de um filtro passa-baixa do tipo Butterworth com ˆfc = 2Hz e mostre a resposta em frequencia

In [ ]:
```
# Definindo os parâmetros do filtro
fc = 2  # Frequência de corte em Hz
fs = 10  # Frequência de amostragem em Hz
order = 4  # Ordem do filtro

# Calculando a frequência normalizada
Wn = fc / (0.5 * fs)

# Projetando o filtro Butterworth
b, a = butter(order, Wn, btype='low', analog=False)

# Obtendo a resposta em frequência do filtro
w, h = freqz(b, a, worN=8000, fs=fs)

# (c) Exibindo os coeficientes do filtro
print("Coeficientes do filtro Butterworth:")
print("b:", b)
print("a:", a)
```

```
Coeficientes do filtro Butterworth:
b: [0.04658291 0.18633163 0.27949744 0.18633163 0.04658291]
a: [ 1.         -0.7820952   0.67997853 -0.1826757   0.03011888]
```

In [ ]:
```
# (a) Resposta em frequência do filtro
plt.figure(figsize=(6, 4))
plt.plot(w, np.abs(h), 'b-', lw=1)
plt.title('Resposta em Frequência do Filtro Butterworth Passa-Baixa')
plt.xlabel('Frequência (Hz)')
plt.ylabel('Magnitude')
```

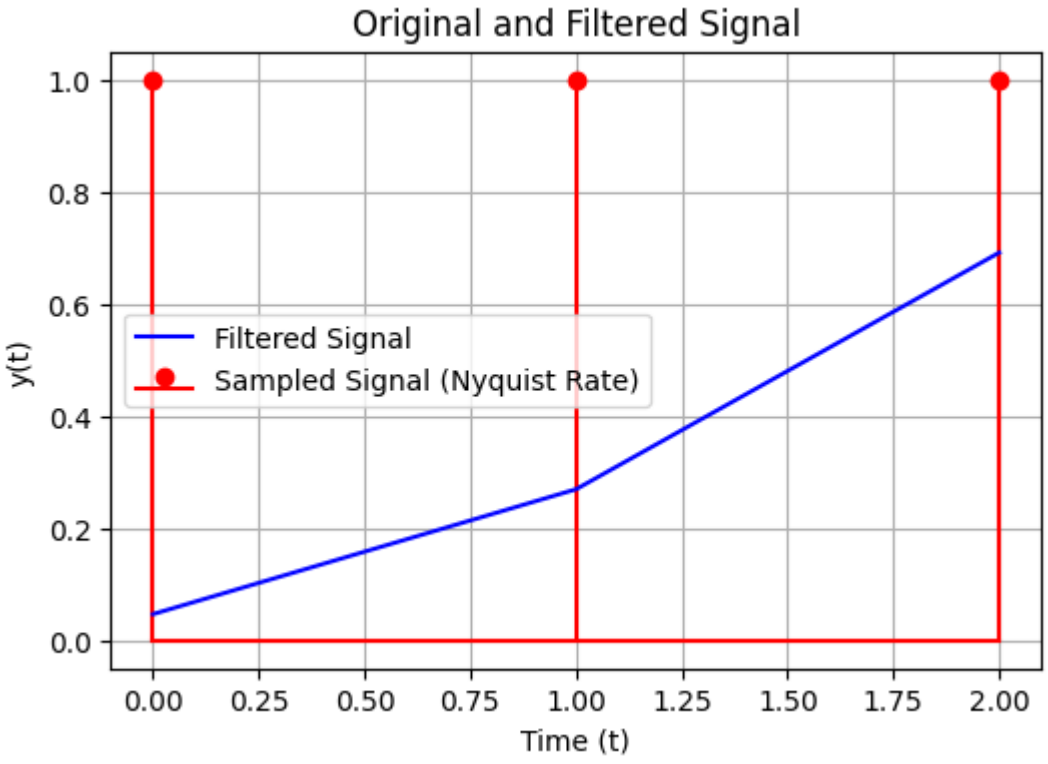
```
plt.grid(True)
plt.show()
```

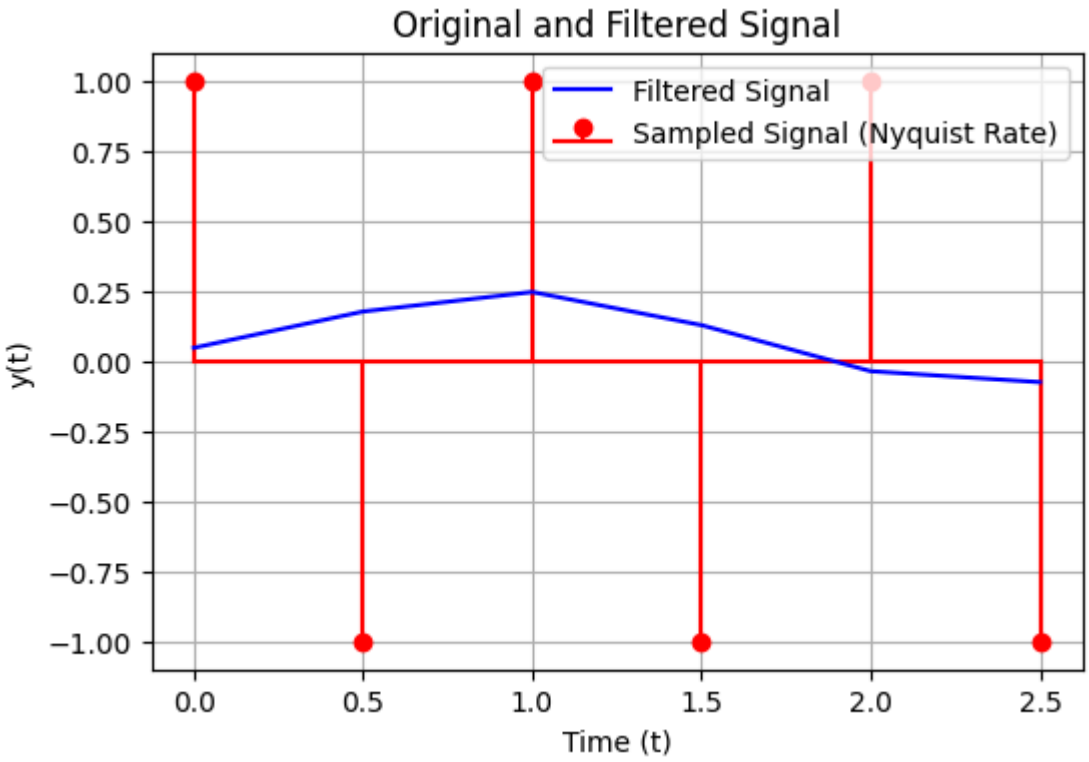


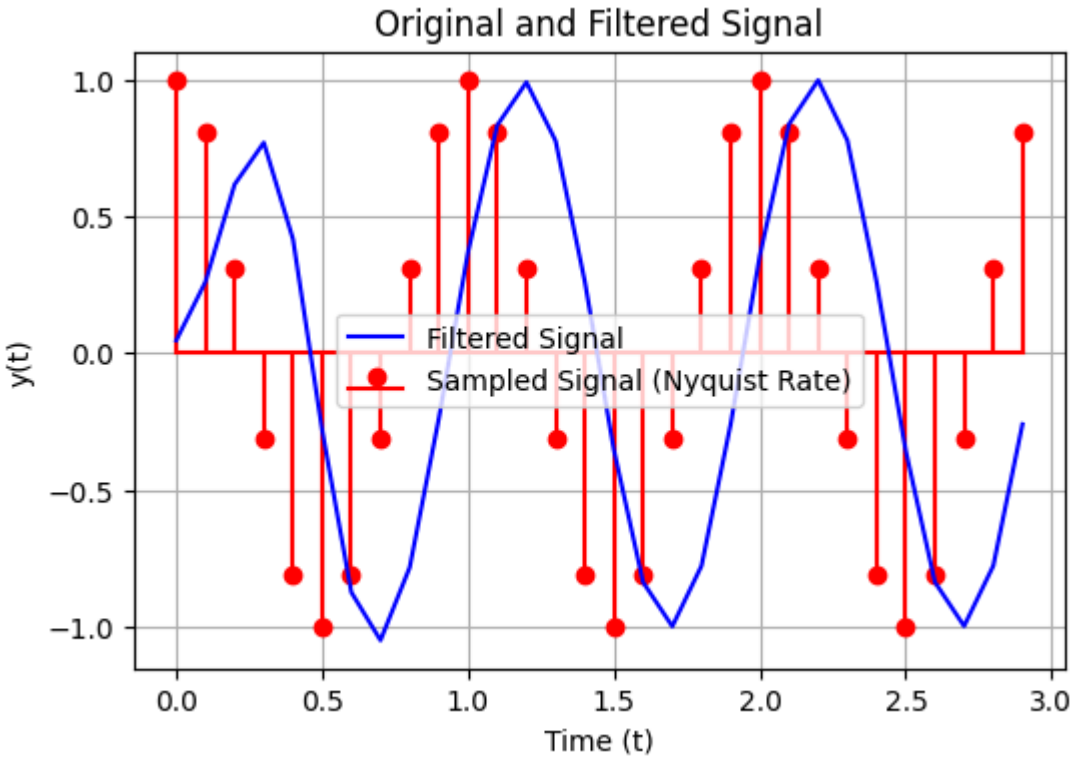
4. Aplique o filtro passa-baixa Butterworth do item anterior (usando comando filter) no sinal amostrado no exercìicio 2 com frequencia fs = fM, fs = 2fM e depois com fs = 10fM. Mostre os resultados usando stem e plot. Em qual situação foi possıvel recuperar o sinal com qualidade razoavel? Justifique.

In [ ]:
```
sampling_freq = 1
sampling_period = 1 / sampling_freq

t_sampled_fm = np.arange(0, 3, sampling_period)
y_sampled_fm = np.cos(2 * np.pi * t_sampled_fm)

# Nyquist frequency and sampling period
sampling_freq = 2
sampling_period = 1 / sampling_freq

# Sampled signal at Nyquist frequency
t_sampled_2fm = np.arange(0, 3, sampling_period)
y_sampled_2fm = np.cos(2 * np.pi * t_sampled_2fm)

sampling_freq = 10
sampling_period = 1 / sampling_freq

t_sampled_10fm = np.arange(0, 3, sampling_period)
y_sampled_10fm = np.cos(2 * np.pi * t_sampled_10fm)

y_filtered_fm = lfilter(b, a, y_sampled_fm)
y_filtered_2fm = lfilter(b, a, y_sampled_2fm)
y_filtered_10fm = lfilter(b, a, y_sampled_10fm)
```

In [ ]:
```
plt.figure(figsize=(6,4))
plt.stem(t_sampled_fm, y_sampled_fm, linefmt='r-', markerfmt='ro', basefm
plt.plot(t_sampled_fm, y_filtered_fm, label='Filtered Signal', linestyle=
plt.xlabel('Time (t)')
plt.ylabel('y(t)')
plt.title('Original and Filtered Signal')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()


plt.figure(figsize=(6,4))
plt.stem(t_sampled_2fm, y_sampled_2fm, linefmt='r-', markerfmt='ro', base
plt.plot(t_sampled_2fm, y_filtered_2fm, label='Filtered Signal', linestyl
plt.xlabel('Time (t)')
plt.ylabel('y(t)')
plt.title('Original and Filtered Signal')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()


plt.figure(figsize=(6,4))
plt.stem(t_sampled_10fm, y_sampled_10fm, linefmt='r-', markerfmt='ro', ba
plt.plot(t_sampled_10fm, y_filtered_10fm, label='Filtered Signal', linest
plt.xlabel('Time (t)')
plt.ylabel('y(t)')
plt.title('Original and Filtered Signal')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```







5. Repita o exercıicio anterior com o sinal do exercıcio 1. Explore diferentes estruturas de filtros passa-baixa (sera necessario fazer sintonia do filtro)

> dica: acesse Comparison of Analog IIR Lowpass Filters no site do Matlab e escolha uma estrutura de filtro que voce ache mais interessante. ˆ

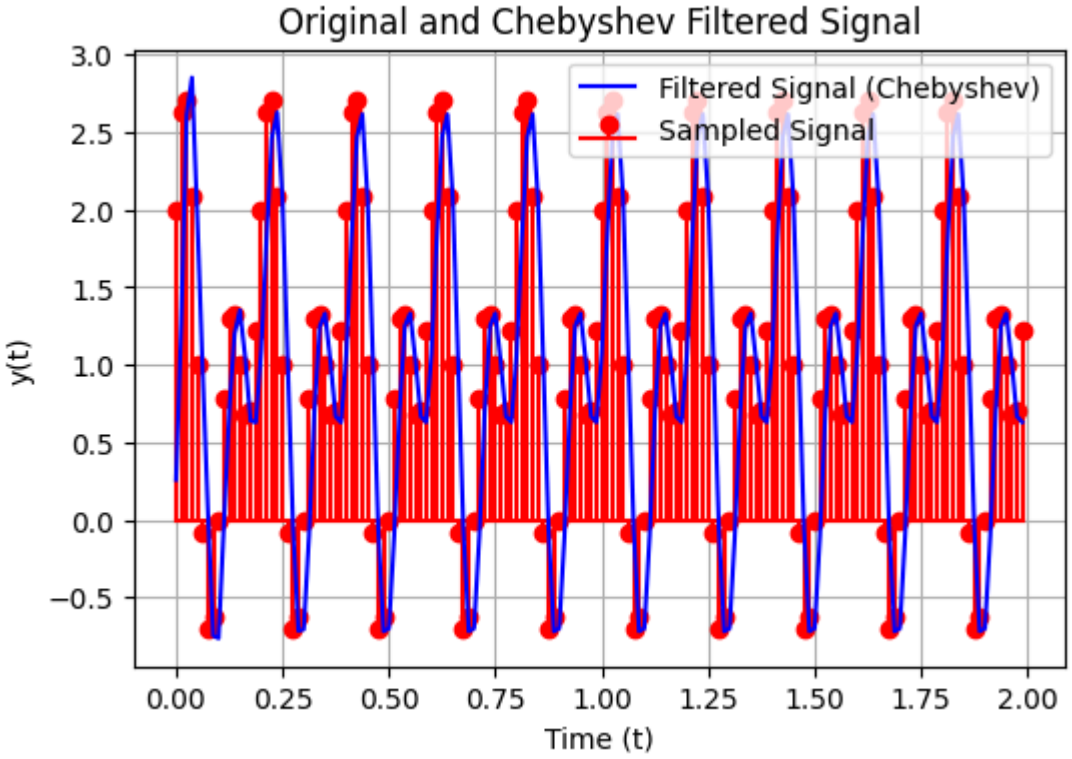
Exemplo:

```
1 fa=1e4; %10kHz para o sinal continuo
2 fc =0.6*fs; %frequencia de corte abaixo da fs
3 [b,a] = cheby1(6,10,fc/(fa/2));
```

```
4 yrec=filter(b,a,ya trem);
5 figure
6 plot(t,y/max(y),LineWidth=1.5) %plot normalizado
7 hold on
8 stem(t,ya trem/max(ya trem))%plot normalizado
9 plot(t,yrec/max(yrec(2000:end)),LineWidth=1.5)%plot normalizado
10 legend('original','y a^*(t)','y r(t)')
```

In [ ]:
```
omega_n = 10 * np.pi
t_continuous = np.linspace(0, 2, 1000)  # Continuous time
y_continuous = 1 + np.cos(omega_n * t_continuous) + np.sin(2 * omega_n *

# Nyquist frequency and sampling period
sampling_freq = 80
sampling_period = 1 / sampling_freq

# Sampled signal
t_sampled = np.arange(0, 2, sampling_period)
y_sampled = 1 + np.cos(omega_n * t_sampled) + np.sin(2 * omega_n * t_samp

# Filter design parameters
fc = 15
order = 4
ripple = 0.5
fs = 50

# Normalized cutoff frequency for digital filter
Wn = fc / (fs / 2)

# Design the Chebyshev Type I low-pass filter (digital)
b, a = cheby1(order, ripple, Wn, btype='low', analog=False)

# Apply the Chebyshev filter to the sampled signal
y_filtered = lfilter(b, a, y_sampled)
```

In [ ]:
```
plt.figure(figsize=(6,4))
plt.stem(t_sampled, y_sampled, linefmt='r-', markerfmt='ro', basefmt='r-'
plt.plot(t_sampled, y_filtered, label='Filtered Signal (Chebyshev)', line
plt.xlabel('Time (t)')
plt.ylabel('y(t)')
plt.title('Original and Chebyshev Filtered Signal')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```


Original and Chebyshev Filtered Signal
Filtered Signal (Chebyshev)
Sampled Signal
y(t)
Time (t)
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
1.25
1.50
1.75
2.00