Espaço de estados - Parte 2

> Felipe Andrade Garcia Tommaselli- 11800910

> Gianluca Capezzuto Sardinha - 11876900

> Kaique Lima dos Santos - 12701898

[Slides da aula]

Questão 1

Nessa atividade, o objetivo --- explorar os recursos computacionais do Matlab para avaliar controlabilidade e observabilidade de modelos em espaço de estados em tempo discreto. Para isso, considere o modelo em espaço de estados a seguir

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x_k$$

O código Matlab a seguir avalia o rank da matriz de controlabilidade e observabilidade do sistema.

```
close all
clear all
clc
%%
A = [3 -1; 0 2];
B = [1; 2];
H = [0 1];
%% controlabilidade
C = ctrb(A, B);
disp(['rank(C)=' num2str(rank(C))])
if rank(C) == size(A, 1)
    disp('Sistema controlavel')
else
    disp('Sistema parcialmente controlavel')
end
%% observabilidade
O = obsv(A, H);
disp(['rank(O)=' num2str(rank(O))])
if rank(O) == size(A, 1)
    disp('Sistema observavel')
else
    disp('Sistema parcialmente observavel')
end
```

Usando a mesma lógica, avalie a controlabilidade e observabilidade do sistema:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x_k$$

Caso seja não controlável, proponha uma modificação estrutural no sistema para torná-lo controlável. Da mesma forma, caso seja não-observável, proponha uma modificação estrutural do sistema para torná-lo observável.

In [66]:

```
import numpy as np
from scipy.linalg import eigvals
import matplotlib.pyplot as plt

# Definição das matrizes para o sistema
A = np.array([[3, -1], [0, 2]])
B = np.array([[1], [2]])
H = np.array([[0, 1]])

# Matriz de controlabilidade
n = A.shape[0]
controlabilidade_matrix = np.hstack([np.linalg.matrix_power(A, i) @ B for i

# Matriz de observabilidade
observabilidade_matrix = np.vstack([H @ np.linalg.matrix_power(A, i) for i i

# Avaliação dos ranks para determinar controlabilidade e observabilidade
rank_controlabilidade = np.linalg.matrix_rank(controlabilidade_matrix)
rank_observabilidade = np.linalg.matrix_rank(observabilidade_matrix)
```

In [67]:

```
# Impressão dos resultados
print("Matriz de Controlabilidade (C):\n", controlabilidade_matrix)
print("Rank da Matriz de Controlabilidade:", rank_controlabilidade)
if rank_controlabilidade == n:
    print("O sistema é completamente controlável.")
else:
    print("O sistema é parcialmente controlável.")

print("\nMatriz de Observabilidade (O):\n", observabilidade_matrix)
print("Rank da Matriz de Observabilidade:", rank_observabilidade)
if rank_observabilidade == n:
    print("O sistema é completamente observável.")
else:
    print("O sistema é parcialmente observável.")
```

```
Matriz de Controlabilidade (C):
 [[1 1]
 [2 4]]
Rank da Matriz de Controlabilidade: 2
O sistema é completamente controlável.

Matriz de Observabilidade (O):
 [[0 1]
 [0 2]]
Rank da Matriz de Observabilidade: 1
O sistema é parcialmente observável.
```

In [68]:
```
# Nova definição de H para tornar o sistema completamente observável
H = np.array([[1, 1]])

# Matriz de observabilidade com a nova H
observabilidade_matrix = np.vstack([H @ np.linalg.matrix_power(A, i) for i i

# Avaliação do rank da nova matriz de observabilidade
rank_observabilidade = np.linalg.matrix_rank(observabilidade_matrix)

# Impressão dos resultados
print("\nNova Matriz de Observabilidade (O):\n", observabilidade_matrix)
print("Rank da Nova Matriz de Observabilidade:", rank_observabilidade)
if rank_observabilidade == n:
    print("Com a modificação, o sistema é completamente observável.")
else:
    print("O sistema ainda é parcialmente observável.")
```

```
Nova Matriz de Observabilidade (O):
 [[1 1]
 [3 1]]
Rank da Nova Matriz de Observabilidade: 2
Com a modificação, o sistema é completamente observável.
```

Questão 2

Nessa atividade, o objetivo é explorar os recursos computacionais do Matlab para projetar controladores por realimentação de estados em tempo discreto.
Para isso, considere o seguinte sistema como exemplo:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

Suponha uma lei de controle na forma de realimentação de estados:

$$u_k = -Kx_k$$

Deseja-se que o sistema em malha fechada tenha os polos em posições especificadas. Ou seja, o polinômio característico do sistema em malha-fechada deve satisfazer

$$\det(zI - (A - BK)) = (z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_n)$$

em que ($p_1, p_2, ..., p_n$) são os polos desejados em malha fechada.
Se o sistema for completamente controlável, então existe um ganho (K) que faz com que os polos em malha fechada fiquem nas posições desejadas!
Para sistemas SISO, pode-se usar a equação de Ackermann para obter o ganho de realimentação:

$$K = [\,0 \cdots 1\,]\,C^{-1}\gamma(A),$$

em que ($\gamma(A)$) é a equação característica desejada em malha fechada avaliada na própria matriz de dinâmica.
No Matlab, pode-se utilizar o comando `acker`. Já para sistemas MIMO, sem polos com multiplicidade, pode-se usar o comando `place`.
O código Matlab a seguir obtém o ganho de realimentação de estados para alocar os polos do sistema em ($p_1 = 0.8$) e ($p_2 = 0.9$) usando a equação de Ackermann, o comando `acker` e o comando `place`.

```
close all
clear all
clc
%%
Ad=[1 -2;2 1];
Bd=[1;1];
rank(ctrb(Ad,Bd))
beta=poly([0.8 0.9]) %coef. da eq. caracteristica
%% Eq. Ackermann (SISO)
K=[0 1]*inv(ctrb(Ad,Bd))*polyvalm(beta,Ad)
%% Comando do matlab acker
K=acker(Ad,Bd,[0.8 0.9])
%% Comando do matlab place (MIMO)
K=place(Ad,Bd,[0.8 0.9])
%% verifica autovalores da dinamica em malha fechada
eig(Ad-Bd*K)
```

Usando a mesma lógica, obtenha o ganho de realimentacão de estados que aloca os polos de malha fechada em ($p_1 = 0.5$), ($p_2 = 0.8$), ($p_3 = 0.7$) para o sistema a seguir:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 & 4 \\ 2.25 & -0.75 & 0 \\ -0.375 & 0.125 & 3.5 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

In [69]:
```python
# Definir matrizes do sistema
A = np.array([[0.75, -0.25, 4],
              [2.25, -0.75, 0],
              [-0.375, 0.125, 3.5]])

B = np.array([[0], [0], [1]])

# Verificar controlabilidade
n = A.shape[0]
controlabilidade_matrix = np.hstack([np.linalg.matrix_power(A, i) @ B for i
```

```
rank_controlabilidade = np.linalg.matrix_rank(controlabilidade_matrix)

# Definir os pólos desejados
poles_desejados = [0.5, 0.8, 0.7]

# Coeficientes do polinômio característico desejado
beta = np.poly(poles_desejados)  # Calcula os coeficientes de (z - p1)(z - p

# Avaliar o polinômio matricial gamma(A) usando os coeficientes de beta
gamma_A = sum(beta[i] * np.linalg.matrix_power(A, len(beta) - i - 1) for i i

# Calcular o ganho K usando a equação de Ackermann
K = (np.array([0, 0, 1]) @ np.linalg.inv(controlabilidade_matrix) @ gamma_A)

# Impressão dos resultados
print("Rank da Matriz de Controlabilidade:", rank_controlabilidade)
if rank_controlabilidade == n:
    print("O sistema é completamente controlável.")
else:
    print("O sistema é parcialmente controlável.")

print("\nGanho de Realimentação K calculado:")
print("K =", K.flatten())

# Verificar autovalores da matriz dinâmica em malha fechada
A_cl = A - B @ K  # Produto B @ K é de dimensão 3x3
autovalores_malha_fechada = eigvals(A_cl)

print("\nAutovalores do Sistema em Malha Fechada:", autovalores_malha_fechac
```

```
Rank da Matriz de Controlabilidade: 3
O sistema é completamente controlável.

Ganho de Realimentação K calculado:
K = [-0.0475     -0.01527778  1.5       ]

Autovalores do Sistema em Malha Fechada: [0.5+0.j 0.7+0.j 0.8+0.j]
```

Questão 3

Nessa atividade, o objetivo é explorar os recursos computacionais do Matlab para obter e simular observadores de estados em tempo discreto.
Considere o sistema dado por

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.7143 & 0.3571 \\ -1.0714 & -0.3571 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k$$

Uma estratégia para obter o ganho de realimentação para um observador de estados é tratar o problema de observação como dual ao problema de controle!
Assim, pode-se usar o mesmo processo de cálculo do ganho de realimentação de estados

para calcular o ganho do observador.
Para isso, adota-se o modelo dual do sistema fazendo as seguintes equivalências:

1. $A_d \rightarrow A_d^\top$
2. $B_d \rightarrow H^\top$

O seguinte código em Matlab obtém um observador de estados para esse sistema e faz a simulação com uma entrada senoidal.

```
close all
clear all
clc
%%
Ad=[0.7143 0.3571;...
-1.0714 -0.3571];
Bd=[1;1];
H=[1 0];
rank(obsv(Ad,H))
L=place(Ad',H',[0.5 0.6])'
eig(Ad-L*H)
%%
N=100;
x=zeros(2,N);
hx=zeros(2,N);
y=zeros(1,N);
u=zeros(1,N);
%% cond. inicial real
x(:,1)=[10 10]';
%% cond. inicial do observador
hx(:,1)=[20 -20]';
for k=1:N
%% sistema real
u(k)=sin(k);
x(:,k+1)=Ad*x(:,k)+Bd*u(k);
y(k)=H*x(:,k);
%% observador
hx(:,k+1)=Ad*hx(:,k)+Bd*u(k)+L*(y(k)-H*hx(:,k));
end
%%
figure
subplot(2,1,1)
stairs(x(1,:),'LineWidth',1.5)
hold on
stairs(hx(1,:),'-','LineWidth',1)
xlim([0 50])
grid on
legend('x 1','hx 1')
subplot(2,1,2)
stairs(x(2,:),'LineWidth',1.5)
hold on
stairs(hx(2,:),'-','LineWidth',1)
```

```
xlim([0 50])
grid on
legend('x 2','hx 2')
suptitle('Observador de Estados')
```

Seguindo a mesma lógica, obtenha um observador de estados e simule o sistema a seguir com entrada senoidal. Considere ($x_0 = [10, 15, -5]^\top$) e ($\hat{x}_0 = [0, 0, 0]^\top$). Escolha os polos do observador em malha fechada de forma que ele seja mais rápido que o sistema original.

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.25 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & -0.75 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k$$

In [70]:

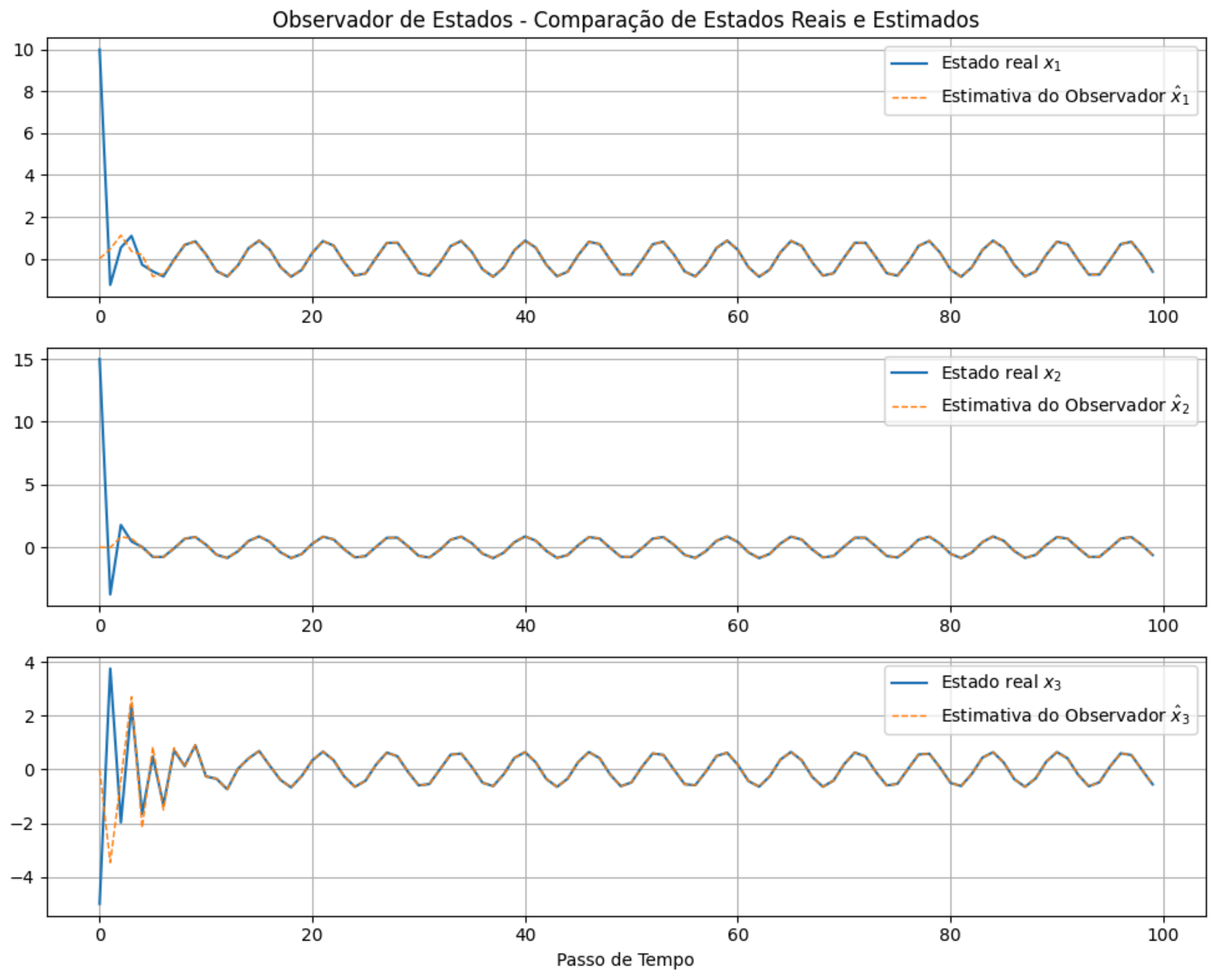
```python
from scipy.signal import place_poles

# Definindo as matrizes do sistema
A = np.array([[-0.5, 0.25, 0],
              [0, -0.25, 0],
              [0, 0, -0.75]])

B = np.array([[1], [1], [1]])
H = np.array([[1, 0, 1]])

# Verificando observabilidade
n = A.shape[0]
observabilidade_matrix = np.vstack([H @ np.linalg.matrix_power(A, i) for i i
rank_observabilidade = np.linalg.matrix_rank(observabilidade_matrix)

# Definindo os polos do observador para garantir que seja mais rápido que o
# Calculamos os autovalores de A para ter uma referência de rapidez
autovalores_sistema = eigvals(A)
# Polos do observador com valores menores para garantir estabilidade
polos_observador = [-0.2, -0.3, -0.4]


# Calculando o ganho L para o observador usando alocação de polos
place_result = place_poles(A.T, H.T, polos_observador)
L = place_result.gain_matrix.T

# Parâmetros da simulação
N = 100  # número de passos de simulação
x = np.zeros((3, N))  # estado real
hx = np.zeros((3, N))  # estado estimado (observador)
y = np.zeros(N)  # saída
u = np.zeros(N)  # entrada aplicada

# Condições iniciais
x[:, 0] = [10, 15, -5]  # estado inicial real
hx[:, 0] = [0, 0, 0]    # estado inicial do observador

# Simulação do sistema e do observador
```

```
for k in range(N - 1):
    # Entrada como uma função senoidal
    u[k] = np.sin(k)

    # Sistema real
    x[:, k + 1] = A @ x[:, k] + B.flatten() * u[k]
    y[k] = H @ x[:, k]

    # Observador de estados
    hx[:, k + 1] = A @ hx[:, k] + B.flatten() * u[k] + L @ (y[k] - H @ hx[:,

# Último valor de y para completar a simulação
y[-1] = H @ x[:, -1]
```

In [71]:

```
# Impressão dos resultados de observabilidade e ganho L
print("Matriz de Observabilidade (O):\n", observabilidade_matrix)
print("Rank da Matriz de Observabilidade:", rank_observabilidade)
if rank_observabilidade == n:
    print("O sistema é completamente observável.")
else:
    print("O sistema é parcialmente observável.")

print("\nGanho de Observador L calculado:")
print("L =\n", L)

print("\nAutovalores do Sistema:", autovalores_sistema)
print("Polos do Observador:", polos_observador)

# Plots dos estados reais e estimados pelo observador
plt.figure(figsize=(10, 8))
plt.subplot(3, 1, 1)
plt.plot(range(N), x[0, :], label="Estado real $x_1$", linewidth=1.5)
plt.plot(range(N), hx[0, :], '--', label="Estimativa do Observador $\hat{x}_
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.title("Observador de Estados - Comparação de Estados Reais e Estimados")

plt.subplot(3, 1, 2)
plt.plot(range(N), x[1, :], label="Estado real $x_2$", linewidth=1.5)
plt.plot(range(N), hx[1, :], '--', label="Estimativa do Observador $\hat{x}_
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.subplot(3, 1, 3)
plt.plot(range(N), x[2, :], label="Estado real $x_3$", linewidth=1.5)
plt.plot(range(N), hx[2, :], '--', label="Estimativa do Observador $\hat{x}_
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.xlabel("Passo de Tempo")
plt.tight_layout()
plt.show()
```

```
Matriz de Observabilidade (O):
 [[ 1.      0.      1.    ]
 [-0.5     0.25   -0.75  ]
 [ 0.25   -0.1875  0.5625]]
Rank da Matriz de Observabilidade: 3
O sistema é completamente observável.

Ganho de Observador L calculado:
L =
 [[ 0.093]
 [-0.003]
 [-0.693]]

Autovalores do Sistema: [-0.5 +0.j -0.25+0.j -0.75+0.j]
Polos do Observador: [-0.2, -0.3, -0.4]
```



Questão 4

Nessa atividade, o objetivo é projetar um controlador de realimentação de estados usando um observador de estados.
Nesse exemplo, será utilizado o modelo do *self-balanced robot* conforme ilustrado na Figura 1. As EDO que descrevem o comportamento dessa planta são dadas a seguir:

Figura 1: Self-balanced robot.

$$(M+m)\ddot{x} - ml\cos(\theta)\ddot{\theta} + ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) + \alpha_1\dot{x} = u, \tag{3}$$

$$\frac{l}{2}m\ddot{\theta} - ml\cos(\theta)\ddot{x} - gml\sin(\theta) + \alpha_2\dot{\theta} = 0. \tag{4}$$

O vetor de estados é dado por

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix},$$

onde:

- x → posição
- $\dot{x}$ → velocidade
- θ → posição angular
- $\dot{\theta}$ → velocidade angular

e o sinal de entrada é o torque que atua na roda. Suponha que estejam disponíveis medições da posição x e da posição angular θ. Assim, a equação de saída desse sistema é dada por

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Adotando,

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_0 = 0,$$

como ponto de operação do sistema (posição vertical com velocidade zero), pode-se obter um modelo linearizado na forma

$$\dot{x} = A(x_0, u_0)x + B(x_0, u_0)u,$$

válido para regiões próximas do ponto (x_0, u_0). Após obter o modelo linearizado, pode-se utilizar o comando `c2d` para obter o equivalente em tempo discreto.
O código Matlab a seguir obtém as matrizes $A(x_0, u_0)$ e $B(x_0, u_0)$ do modelo linearizado para esse sistema e as respectivas matrizes em tempo discreto para $T_s = 0.1s$.

```
close all
clear all
clc
%%
syms m M l u g alpha1 alpha2
syms th th d th dd
```

```
syms x x d x dd

eq1=(M+m)*x dd-m*l*th dd*cos(th)+m*l*th d^2*sin(th)+alpha1*x d-u;
eq2=l^2*m*th dd-x dd*m*l*cos(th)-g*m*l*sin(th)+alpha2*th d;
S=solve(eq1==0, eq2==0, x dd, th dd)
%%
x vet=[x;x d;th;th d];
x vet dot=[x d; S.x dd; th d; S.th dd];

A=simplify(jacobian(x vet dot,x vet))
B=simplify(jacobian(x vet dot,u))

%% ponto de operacao
x=0;
x d=0;
th=0;
th d=0;
u=0;
%%
A0=simplify(subs(A)) %matriz dinamica
B0=simplify(subs(B)) %matriz de entrada
%%
M=1.5;
m=0.5;
l=1;
g=9.81;
alpha1=0.01;
alpha2=0.01;
A0=double(simplify(subs(A))) %matriz dinamica
B0=double(simplify(subs(B))) %matriz de entrada
%%
Ts=0.1; %tempo de amostragem
[Ad,Bd]=c2d(A0,B0,Ts)
```

Considere a condição inicial do sistema real como $x_0 = \left[2, 0, \frac{10\pi}{180}, 0\right]^\top$.

1. Avalie a controlabilidade e a observabilidade do sistema. Ele é completamente controlável e observável no ponto de operação escolhido?

2. Projete um controle de realimentação de estados de forma a trazer o sistema para a origem $(x_k = [0\ 0\ 0\ 0]^\top)$ em menos de 5s. Assuma que os estados são acessíveis diretamente (não há necessidade de um observador).

3. Considere agora que apenas medições de posição x e de posição angular θ estão disponíveis e, então, utilize um observador de estados para fazer o controle do item anterior.

4. Ao final, apresente um comparativo dos estados verdadeiros do sistema e dos estados estimados pelo observador e também um comparativo do controle com acesso direto aos estados e do controle usando os estados do observador. Comente com suas

palavras as diferenças que são percebidas ao utilizar o observador de estado para fazer o controle.

Dica: Use o código de exemplo disponível no e-disciplina (arquivo *self-balanced-robot.zip*) como ponto de partida (script *controle-self-balanced-robot2.m*). Defina os polos de malha fechada tanto para o sistema quanto para o observador de estados. Lembre-se que os polos do observador precisam ser mais rápidos que os polos do sistema em malha fechada. Para obter os ganhos de realimentação, pode-se utilizar o comando `place`.

In [72]:

```
import sympy as sp

# Definir variáveis simbólicas
M, m, l, g, alpha1, alpha2 = sp.symbols('M m l g alpha1 alpha2')
x, x_dot, theta, theta_dot = sp.symbols('x x_dot theta theta_dot')
x_ddot, theta_ddot = sp.symbols('x_ddot theta_ddot')
u = sp.symbols('u')

# Equações de movimento do sistema (modelo não linear)
eq1 = (M + m) * x_ddot - m * l * sp.cos(theta) * theta_ddot + m * l * theta_
eq2 = l**2 * m * theta_ddot - m * l * sp.cos(theta) * x_ddot - g * m * l * s

# Resolver as equações para x_ddot e theta_ddot
sol = sp.solve([eq1, eq2], (x_ddot, theta_ddot))
x_ddot_expr = sol[x_ddot]
theta_ddot_expr = sol[theta_ddot]

# Vetor de estados e suas derivadas
x_vec = sp.Matrix([x, x_dot, theta, theta_dot])
x_vec_dot = sp.Matrix([x_dot, x_ddot_expr, theta_dot, theta_ddot_expr])

# Derivar as matrizes A e B
A = x_vec_dot.jacobian(x_vec)
B = x_vec_dot.jacobian([u])

# Substituir o ponto de operação
A_lin = A.subs({x: 0, x_dot: 0, theta: 0, theta_dot: 0, u: 0})
B_lin = B.subs({x: 0, x_dot: 0, theta: 0, theta_dot: 0, u: 0})
```

In [73]:

```
# Impressão das Matrizes Linearizadas
print("Matriz A (linearizada no ponto de operação):")
sp.pprint(A_lin)

print("\nMatriz B (linearizada no ponto de operação):")
sp.pprint(B_lin)
```

Matriz A (linearizada no ponto de operação):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\alpha_1}{M} & \frac{g \cdot m}{M} & \frac{-\alpha_2}{M \cdot l} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-\alpha_1}{M \cdot l} & \frac{g}{l} + \frac{g \cdot m}{M \cdot l} & -\frac{\alpha_2}{l^2 \cdot m} - \frac{\alpha_2}{M \cdot l^2} \end{bmatrix}$$

Matriz B (linearizada no ponto de operação):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{M \cdot l} \end{bmatrix}$$

In [74]:

```python
from scipy.signal import cont2discrete

# Tempo de amostragem
T_s = 0.1

# Substituir valores numéricos para os parâmetros do sistema
params = {M: 1.5, m: 0.5, l: 1.0, g: 9.81, alpha1: 0.01, alpha2: 0.01}
A_num = A_lin.subs(params)
B_num = B_lin.subs(params)

# Converter as matrizes para numpy arrays
A_cont = np.array(A_num).astype(float)
B_cont = np.array(B_num).astype(float)

# Obter o modelo discreto usando cont2discrete
system_discrete = cont2discrete((A_cont, B_cont, np.eye(4), np.zeros((4, 1))
A_d = system_discrete[0]
B_d = system_discrete[1]
```

In [75]:

```python
# Impressão das Matrizes Discretizadas
print("Matriz A_d (discreta):")
print(A_d)

print("\nMatriz B_d (discreta):")
print(B_d)
```

```
Matriz A_d (discreta):
[[ 1.00000000e+00  9.99665904e-02  1.65106198e-02  5.14457052e-04]
 [ 0.00000000e+00  9.99330126e-01  3.33619849e-01  1.58304571e-02]
 [ 0.00000000e+00 -3.36607948e-05  1.06605344e+00  1.02058079e-01]
 [ 0.00000000e+00 -6.80162790e-04  1.33480961e+00  1.06333212e+00]]

Matriz B_d (discreta):
[[0.00334096]
 [0.06698736]
 [0.00336608]
 [0.06801628]]
```

In [76]:

```
# Definir as matrizes A_d e B_d do sistema discreto (obtidas anteriormente)
A_d = np.array([
    [1.00000000e+00, 9.99665904e-02, 1.65106198e-02, 5.14457052e-04],
    [0.00000000e+00, 9.99330126e-01, 3.33619849e-01, 1.58304571e-02],
    [0.00000000e+00, -3.36607948e-05, 1.06605344e+00, 1.02058079e-01],
    [0.00000000e+00, -6.80162790e-04, 1.33480961e+00, 1.06333212e+00]
])

B_d = np.array([
    [0.00334096],
    [0.06698736],
    [0.00336608],
    [0.06801628]
])

# Definir a matriz de saída H com base no modelo (assumindo que mede posição
H = np.array([[1, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0]])

# Número de estados
n = A_d.shape[0]

# Calcular a matriz de controlabilidade C
controlabilidade_matrix = B_d
for i in range(1, n):
    controlabilidade_matrix = np.hstack((controlabilidade_matrix, np.linalg.

# Calcular a matriz de observabilidade O
observabilidade_matrix = H
for i in range(1, n):
    observabilidade_matrix = np.vstack((observabilidade_matrix, H @ np.linal

# Calcular os ranks das matrizes de controlabilidade e observabilidade
rank_controlabilidade = np.linalg.matrix_rank(controlabilidade_matrix)
rank_observabilidade = np.linalg.matrix_rank(observabilidade_matrix)
```

In [77]:

```
# Impressão dos resultados
print("Matriz de Controlabilidade (C):")
print(controlabilidade_matrix)
print("\nRank da Matriz de Controlabilidade:", rank_controlabilidade)
if rank_controlabilidade == n:
    print("O sistema é completamente controlável.")
else:
    print("O sistema é parcialmente controlável.")
```

```
print("\nMatriz de Observabilidade (O):")
print(observabilidade_matrix)
print("\nRank da Matriz de Observabilidade:", rank_observabilidade)
if rank_observabilidade == n:
    print("O sistema é completamente observável.")
else:
    print("O sistema é parcialmente observável.")
```

```
Matriz de Controlabilidade (C):
[[0.00334096 0.01012803 0.01725325 0.02499696]
 [0.06698736 0.06914221 0.07382349 0.08164551]
 [0.00336608 0.01052778 0.01905599 0.03007296]
 [0.06801628 0.07677141 0.09563906 0.12708198]]

Rank da Matriz de Controlabilidade: 4
O sistema é completamente controlável.

Matriz de Observabilidade (O):
[[ 1.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00  0.00000000e+00]
 [ 0.00000000e+00  0.00000000e+00  1.00000000e+00  0.00000000e+00]
 [ 1.00000000e+00  9.99665904e-02  1.65106198e-02  5.14457052e-04]
 [ 0.00000000e+00 -3.36607948e-05  1.06605344e+00  1.02058079e-01]
 [ 1.00000000e+00  1.99865310e-01  6.81493638e-02  4.32905472e-03]
 [ 0.00000000e+00 -1.38938560e-04  1.27268681e+00  2.17320467e-01]
 [ 1.00000000e+00  2.99692778e-01  1.61618982e-01  1.52368324e-02]
 [ 0.00000000e+00 -3.29498433e-04  1.64678725e+00  3.60969604e-01]]

Rank da Matriz de Observabilidade: 4
O sistema é completamente observável.
```

In [78]:
```
# Matrizes A_d e B_d do sistema discreto, conforme obtidas anteriormente
A_d = np.array([
    [1.00000000e+00, 9.99665904e-02, 1.65106198e-02, 5.14457052e-04],
    [0.00000000e+00, 9.99330126e-01, 3.33619849e-01, 1.58304571e-02],
    [0.00000000e+00, -3.36607948e-05, 1.06605344e+00, 1.02058079e-01],
    [0.00000000e+00, -6.80162790e-04, 1.33480961e+00, 1.06333212e+00]
])

B_d = np.array([
    [0.00334096],
    [0.06698736],
    [0.00336608],
    [0.06801628]
])

# Definir os polos desejados em malha fechada para estabilizar o sistema
polos_desejados = [0.5, 0.6, 0.7, 0.8]

# Calcular o ganho K para o controlador usando alocação de polos
place_result = place_poles(A_d, B_d, polos_desejados)
K = place_result.gain_matrix
```

In [79]:
```
# Imprimir o ganho de realimentação de estados K e verificar os polos do sis
print("Ganho de Realimentação de Estados K calculado:")
print(K)
```

```python
# Verificar os autovalores do sistema em malha fechada (A_d - B_d @ K)
A_cl = A_d - B_d @ K
autovalores_malha_fechada = np.linalg.eigvals(A_cl)

print("\nAutovalores do Sistema em Malha Fechada:")
print(autovalores_malha_fechada)
```

```
Ganho de Realimentação de Estados K calculado:
[[-18.18019573 -20.65078544 122.48166029  37.64559785]]

Autovalores do Sistema em Malha Fechada:
[0.5 0.6 0.7 0.8]
```

In [80]:

```python
# Matrizes do sistema discreto (obtidas anteriormente)
A_d = np.array([
    [1.00000000e+00, 9.99665904e-02, 1.65106198e-02, 5.14457052e-04],
    [0.00000000e+00, 9.99330126e-01, 3.33619849e-01, 1.58304571e-02],
    [0.00000000e+00, -3.36607948e-05, 1.06605344e+00, 1.02058079e-01],
    [0.00000000e+00, -6.80162790e-04, 1.33480961e+00, 1.06333212e+00]
])

B_d = np.array([
    [0.00334096],
    [0.06698736],
    [0.00336608],
    [0.06801628]
])

# Definir a matriz de saída H (mede posição x e ângulo θ)
H = np.array([[1, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0]])

# Polos desejados para o controlador (conforme item anterior)
polos_controlador = [0.5, 0.6, 0.7, 0.8]
place_result = place_poles(A_d, B_d, polos_controlador)
K = place_result.gain_matrix

# Polos do observador para garantir que ele seja mais rápido que o controlac
polos_observador = [0.3, 0.4, 0.45, 0.5]
place_result_observador = place_poles(A_d.T, H.T, polos_observador)
L = place_result_observador.gain_matrix.T
```

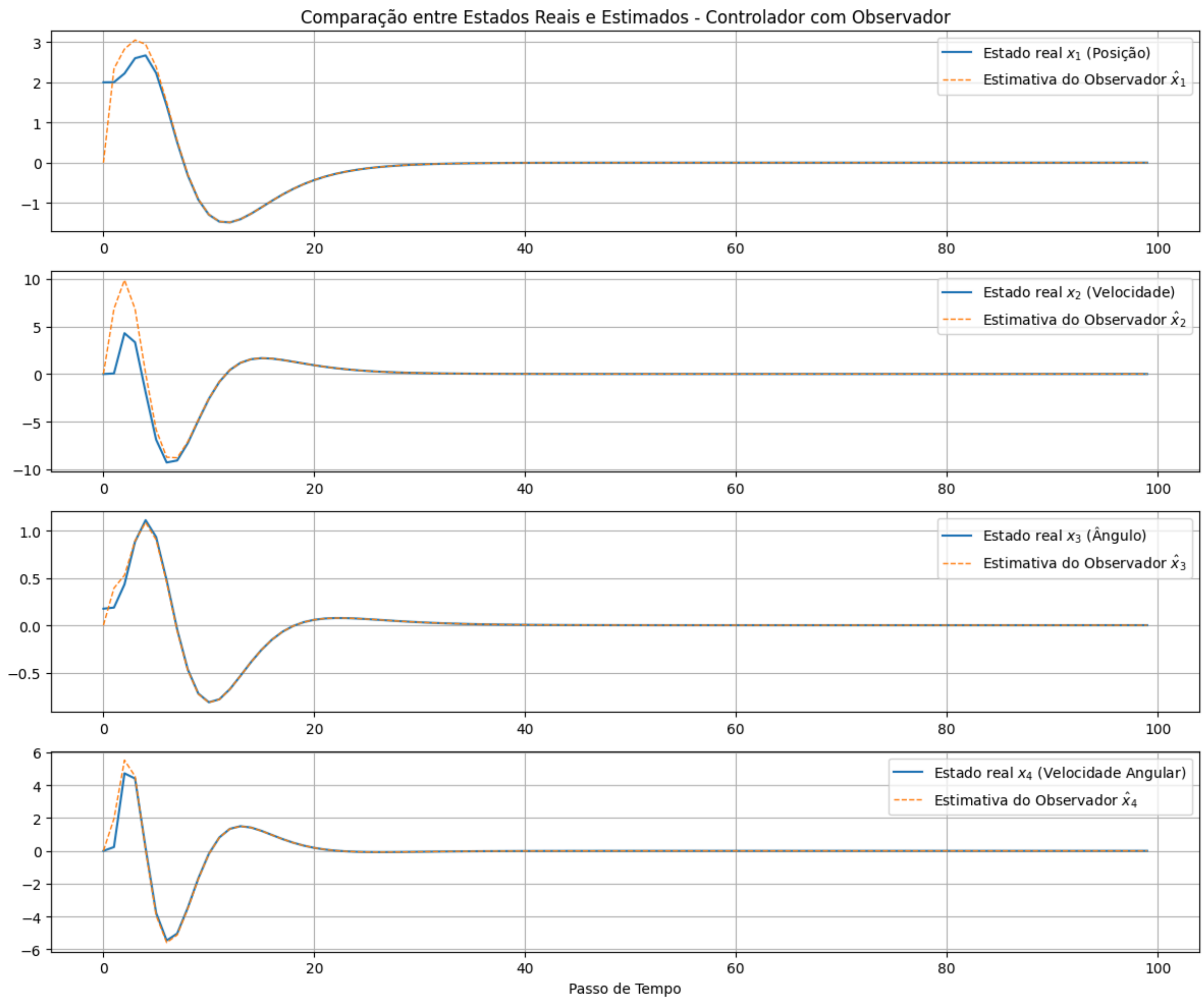
In [81]:

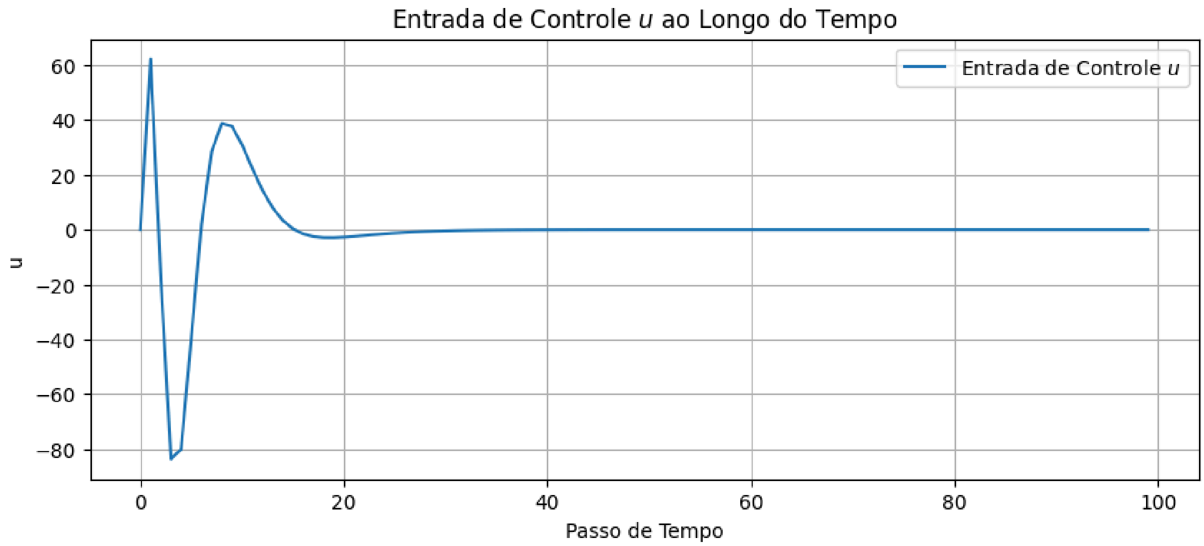
```python
# Imprimir os ganhos de realimentação de estados K e do observador L
print("Ganho de Realimentação de Estados K:")
print(K)

print("\nGanho do Observador L:")
print(L)

# Parâmetros de simulação
N = 100  # número de passos de simulação
x = np.zeros((4, N))  # estados reais do sistema
hx = np.zeros((4, N))  # estados estimados pelo observador
y = np.zeros((2, N))  # saídas medidas (x e θ)
u = np.zeros(N)  # entrada aplicada

# Condições iniciais
```

```
x[:, 0] = [2, 0, np.radians(10), 0]  # estado inicial real (10 graus = 10π/1
hx[:, 0] = [0, 0, 0, 0]  # estado inicial do observador (tudo em zero)

# Simulação do sistema e do observador com realimentação de estados
for k in range(N - 1):
    # Entrada de controle baseada na estimativa do observador
    u[k] = -K @ hx[:, k]

    # Sistema real
    x[:, k + 1] = A_d @ x[:, k] + B_d.flatten() * u[k]
    y[:, k] = H @ x[:, k]

    # Observador de estados
    hx[:, k + 1] = A_d @ hx[:, k] + B_d.flatten() * u[k] + L @ (y[:, k] - H

# Último valor de y para completar a simulação
y[:, -1] = H @ x[:, -1]

# Plotagem dos resultados
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure(figsize=(12, 10))
plt.subplot(4, 1, 1)
plt.plot(range(N), x[0, :], label="Estado real $x_1$ (Posição)", linewidth=1
plt.plot(range(N), hx[0, :], '--', label="Estimativa do Observador $\hat{x}_
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.title("Comparação entre Estados Reais e Estimados - Controlador com Obse

plt.subplot(4, 1, 2)
plt.plot(range(N), x[1, :], label="Estado real $x_2$ (Velocidade)", linewidt
plt.plot(range(N), hx[1, :], '--', label="Estimativa do Observador $\hat{x}_
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.subplot(4, 1, 3)
plt.plot(range(N), x[2, :], label="Estado real $x_3$ (Ângulo)", linewidth=1.
plt.plot(range(N), hx[2, :], '--', label="Estimativa do Observador $\hat{x}_
plt.grid(True)
plt.legend()

plt.subplot(4, 1, 4)
plt.plot(range(N), x[3, :], label="Estado real $x_4$ (Velocidade Angular)",
plt.plot(range(N), hx[3, :], '--', label="Estimativa do Observador $\hat{x}_
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.xlabel("Passo de Tempo")

plt.tight_layout()
plt.show()

# Plot da entrada de controle
plt.figure(figsize=(10, 4))
plt.plot(range(N), u, label="Entrada de Controle $u$", linewidth=1.5)
plt.grid(True)
plt.legend()
```

```
plt.title("Entrada de Controle $u$ ao Longo do Tempo")
plt.xlabel("Passo de Tempo")
plt.ylabel("u")
plt.show()
```

```
Ganho de Realimentação de Estados K:
[[-18.18019573 -20.65078544 122.48166029  37.64559785]]

Ganho do Observador L:
[[1.15998096 0.09893372]
 [3.34719756 0.88692028]
 [0.08070809 1.31873473]
 [0.49574247 5.54746897]]
```



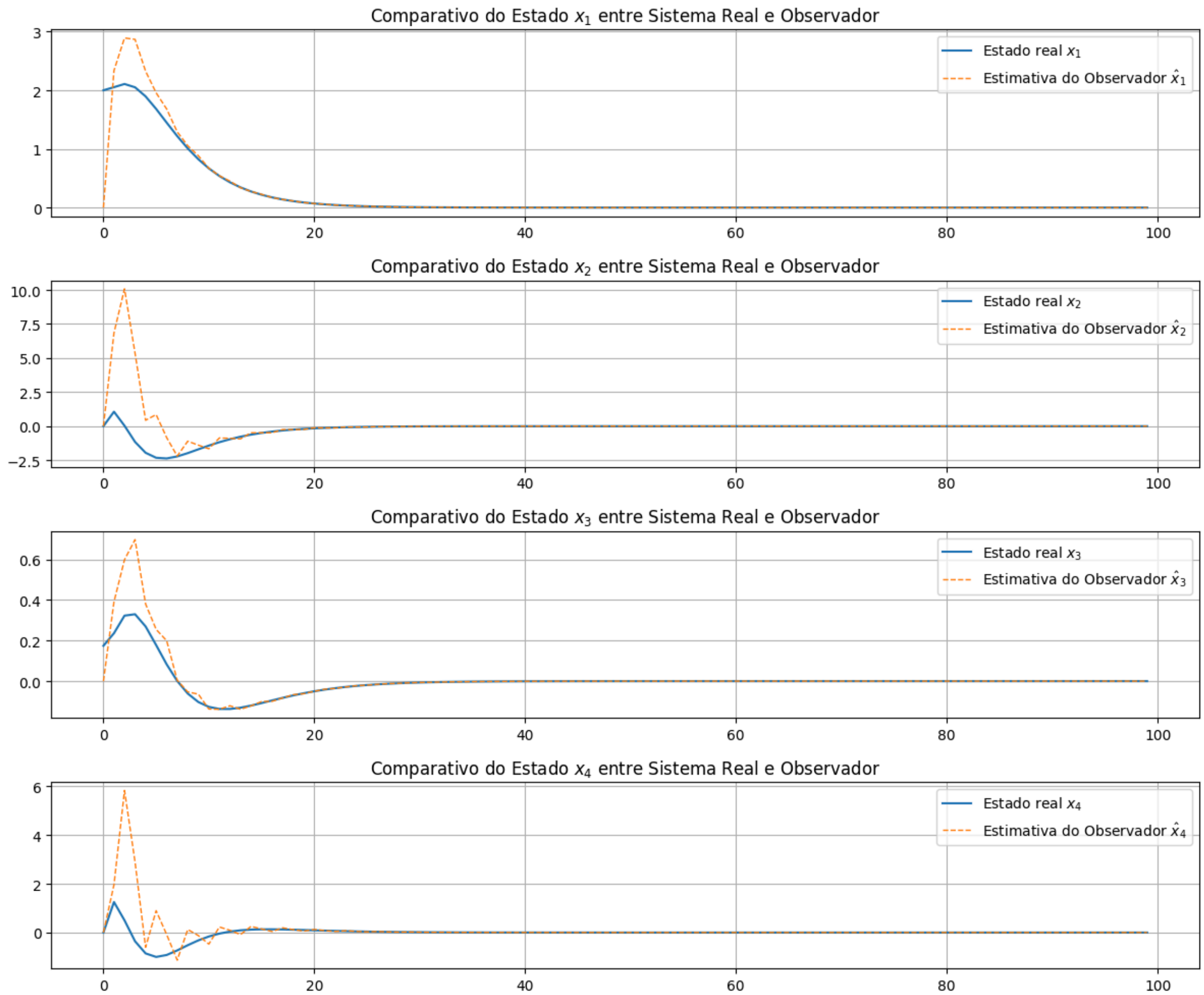


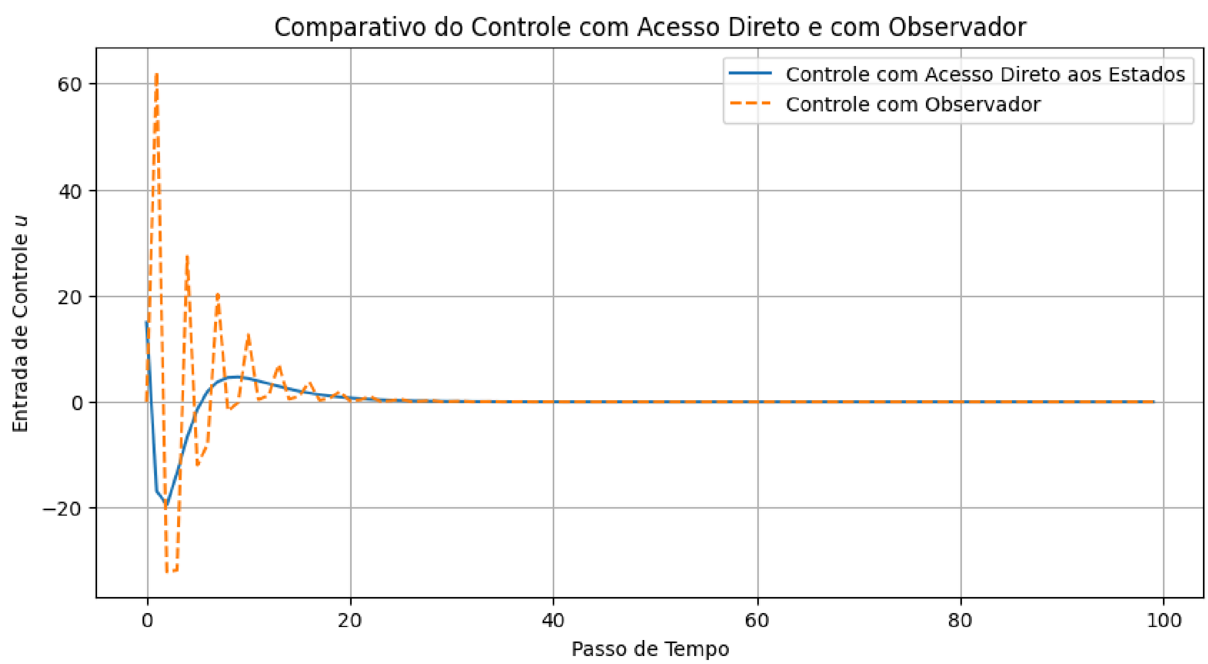
In [82]:
```
# Matrizes do sistema
A_d = np.array([
    [1.00000000e+00, 9.99665904e-02, 1.65106198e-02, 5.14457052e-04],
    [0.00000000e+00, 9.99330126e-01, 3.33619849e-01, 1.58304571e-02],
    [0.00000000e+00, -3.36607948e-05, 1.06605344e+00, 1.02058079e-01],
    [0.00000000e+00, -6.80162790e-04, 1.33480961e+00, 1.06333212e+00]
])

B_d = np.array([
    [0.00334096],
    [0.06698736],
    [0.00336608],
    [0.06801628]
])

H = np.array([[1, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 0]])

# Polos desejados e ganhos do controlador e do observador (obtidos anteriorm
polos_controlador = [0.5, 0.6, 0.7, 0.8]
place_result = place_poles(A_d, B_d, polos_controlador)
K = place_result.gain_matrix

polos_observador = [0.3, 0.4, 0.45, 0.5]
place_result_observador = place_poles(A_d.T, H.T, polos_observador)
L = place_result_observador.gain_matrix.T

# Parâmetros de simulação
N = 100  # número de passos de simulação
x_real = np.zeros((4, N))  # estados reais do sistema
hx = np.zeros((4, N))  # estados estimados pelo observador
y = np.zeros((2, N))  # saídas medidas (x e θ)
u_direto = np.zeros(N)  # controle com acesso direto aos estados
u_observador = np.zeros(N)  # controle usando o observador

# Condições iniciais
x_real[:, 0] = [2, 0, np.radians(10), 0]  # estado inicial real
hx[:, 0] = [0, 0, 0, 0]  # estado inicial do observador (tudo em zero)
```

```python
# Simulação do sistema
for k in range(N - 1):
    # Controle com acesso direto aos estados reais
    u_direto[k] = -K @ x_real[:, k]

    # Controle com estimativas do observador
    u_observador[k] = -K @ hx[:, k]

    # Dinâmica do sistema real
    x_real[:, k + 1] = A_d @ x_real[:, k] + B_d.flatten() * u_direto[k]
    y[:, k] = H @ x_real[:, k]

    # Observador de estados
    hx[:, k + 1] = A_d @ hx[:, k] + B_d.flatten() * u_observador[k] + L @ (y

# Último valor de y e controle
y[:, -1] = H @ x_real[:, -1]
u_direto[-1] = -K @ x_real[:, -1]
u_observador[-1] = -K @ hx[:, -1]
```

In [83]:

```python
# Comparativo entre Estados Reais e Estados Estimados pelo Observador
plt.figure(figsize=(12, 10))
for i in range(4):
    plt.subplot(4, 1, i+1)
    plt.plot(range(N), x_real[i, :], label=f"Estado real $x_{i+1}$", linewic
    plt.plot(range(N), hx[i, :], '--', label=f"Estimativa do Observador $\ha
    plt.grid(True)
    plt.legend()
    plt.title(f"Comparativo do Estado $x_{i+1}$ entre Sistema Real e Observa

plt.tight_layout()
plt.show()

# Comparativo entre Controle com Acesso Direto aos Estados e Controle com Ob
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(range(N), u_direto, label="Controle com Acesso Direto aos Estados",
plt.plot(range(N), u_observador, '--', label="Controle com Observador", line
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.title("Comparativo do Controle com Acesso Direto e com Observador")
plt.xlabel("Passo de Tempo")
plt.ylabel("Entrada de Controle $u$")
plt.show()
```





Questão 5

Nessa atividade, o objetivo é projetar um controlador com rastreamento para modelos em espaço de estados em tempo discreto.

Nesse exemplo, será utilizado o modelo simplificado de um quadricóptero restrito a movimentos em um plano conforme ilustrado na Figura 2. As EDO que descrevem o comportamento dessa planta são dadas a seguir:

Figura 2: Quadricóptero.

$$\ddot{z} = \frac{1}{M}(F_1 + F_2)\cos(\theta) - g \tag{5}$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{M}(F_1 + F_2)\sin(\theta) \tag{6}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{l}{I_{xx}}(F_1 - F_2) \tag{7}$$

O vetor de estados é dado por

$$x = \begin{bmatrix} z \\ y \\ \dot{z} \\ \dot{y} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix},$$

onde:

- z → posição na direção z
- y → posição na direção y
- $\dot{z}$ → velocidade na direção z
- $\dot{y}$ → velocidade na direção y
- θ → posição angular (roll)
- $\dot{\theta}$ → velocidade angular

e o sinal de entrada são as forças de empuxo F_1 e F_2 geradas pelos motores:

$$u = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Adotando,

$$x_0 = \begin{bmatrix} z_{ref} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}gM \\ \frac{1}{2}gM \end{bmatrix},$$

como ponto de operação do sistema (altura z_{ref} com velocidade zero e roll zero), pode-se obter um modelo linearizado na forma

$$\delta\dot{x} = A(x_0, u_0)\delta x + B(x_0, u_0)\delta u,$$

válido para regiões próximas do ponto (x_0, u_0). Após obter o modelo linearizado, pode-se utilizar o comando `c2d` para obter o equivalente em tempo discreto.
O código Matlab a seguir obtém as matrizes $A(x_0, u_0)$ e $B(x_0, u_0)$ do modelo linearizado para esse sistema e as respectivas matrizes em tempo discreto para $T_s = 0.1s$.

```
close all
clear all
clc
%%
syms M F1 F2 th g l Ixx
syms th th d
syms z z d y d y
l=0.3;
M=0.5;
Ixx=0.1;
g=9.81;
z dd=1/M*(F1+F2)*cos(th)-g
y dd=1/M*(F1+F2)*sin(th)
th dd=l/Ixx*(F1-F2)
%%
x vet=[z;y;z d;y d;th;th d];
x vet dot=[z d;y d;z dd;y dd;th d;th dd];
u=[F1;F2];
A=simplify(jacobian(x vet dot,x vet))
B=simplify(jacobian(x vet dot,u))
%%
ref=[5;0;0;0;0;0];
%% ponto de operacao
z=ref(1);
y=ref(2);
th=ref(5);
F1=1/2*g*M;
F2=F1;
x0=[z;y;0;0;th;0];
u0=[F1;F2];
A0=double(subs(A)); %matriz dinamica
B0=double(subs(B)); %matriz de entrada
%%
Ts=0.1; %tempo de amostragem
[Ad,Bd]=c2d(A0,B0,Ts);
```

Considere a condição inicial do sistema real como $x_0 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^\top$.

1. Avalie a controlabilidade e a observabilidade do sistema linearizado.

2. Verifique se o sistema atende à condição para rastreamento. Ou seja, verifique se a matriz a seguir é de posto completo:

$$\begin{bmatrix} I - A_d & -B_d \\ H & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Assuma que os estados do sistema estão disponíveis e, então, projete um controlador de realimentação de estados que estabilize o quadricóptero na posição $z = 5$ e $y = 0$ durante 5s e depois leve o quadricóptero para $z = 3$. Use o código exemplo disponível no site e-disciplina (*controle-quadcopter2d.zip*) como ponto de partida.

In [84]:
```
from scipy import signal

# Definir parâmetros
M = 1.0       # Massa do quadricóptero (kg)
g = 9.81      # Aceleração devido à gravidade (m/s^2)
l = 0.25      # Distância do centro ao motor (m)
I = 0.005     # Momento de inércia em torno do eixo de rotação (kg*m^2)

# Ponto de operação
x0 = np.array([5.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0])   # [z_ref, y, z_dot, y_dot, t
u0 = np.array([0.5 * M * g, 0.5 * M * g])      # [F1, F2]

# Matrizes do sistema em tempo contínuo
A = np.zeros((6,6))
B = np.zeros((6,2))

# Matriz A
A[0,2] = 1.0      # ∂f_1 / ∂x_3 = 1
A[2,3] = 1.0      # ∂f_3 / ∂x_4 = 1
A[4,5] = 1.0      # ∂f_5 / ∂x_6 = 1
A[3,4] = g        # ∂f_4 / ∂x_5 = g

# Matriz B
B[1,0] = 1.0 / M           # ∂f_2 / ∂u_1 = 1/M
B[1,1] = 1.0 / M           # ∂f_2 / ∂u_2 = 1/M
B[5,0] = l / I             # ∂f_6 / ∂u_1 = l/I
B[5,1] = -l / I            # ∂f_6 / ∂u_2 = -l/I

# Discretização
T_s = 0.1    # Tempo de amostragem (s)
system_continuous = signal.StateSpace(A, B, np.eye(6), np.zeros((6,2)))
system_discrete = system_continuous.to_discrete(T_s)
A_d = system_discrete.A
B_d = system_discrete.B
```

In [85]:
```
# Bloco de Impressões e Gráficos
print("Matriz A em tempo discreto (A_d):")
print(A_d)
print("\nMatriz B em tempo discreto (B_d):")
print(B_d)
```

```
Matriz A em tempo discreto (A_d):
[[1.0000e+00 0.0000e+00 1.0000e-01 5.0000e-03 1.6350e-03 4.0875e-05]
 [0.0000e+00 1.0000e+00 0.0000e+00 0.0000e+00 0.0000e+00 0.0000e+00]
 [0.0000e+00 0.0000e+00 1.0000e+00 1.0000e-01 4.9050e-02 1.6350e-03]
 [0.0000e+00 0.0000e+00 0.0000e+00 1.0000e+00 9.8100e-01 4.9050e-02]
 [0.0000e+00 0.0000e+00 0.0000e+00 0.0000e+00 1.0000e+00 1.0000e-01]
 [0.0000e+00 0.0000e+00 0.0000e+00 0.0000e+00 0.0000e+00 1.0000e+00]]

Matriz B em tempo discreto (B_d):
[[ 4.08750e-05 -4.08750e-05]
 [ 1.00000e-01  1.00000e-01]
 [ 2.04375e-03 -2.04375e-03]
 [ 8.17500e-02 -8.17500e-02]
 [ 2.50000e-01 -2.50000e-01]
 [ 5.00000e+00 -5.00000e+00]]
```

In [86]:

```
# Matriz de controlabilidade
n = A_d.shape[0]
controllability_matrix = B_d
for i in range(1, n):
    controllability_matrix = np.hstack((controllability_matrix, np.linalg.ma

rank_controllability = np.linalg.matrix_rank(controllability_matrix)

# Matriz de observabilidade
H = np.eye(n)
observability_matrix = H
for i in range(1, n):
    observability_matrix = np.vstack((observability_matrix, H @ np.linalg.ma

rank_observability = np.linalg.matrix_rank(observability_matrix)
```

In [87]:

```
print("Rank da Matriz de Controlabilidade:", rank_controllability)
if rank_controllability == n:
    print("O sistema é completamente controlável.")
else:
    print("O sistema não é completamente controlável.")

print("\nRank da Matriz de Observabilidade:", rank_observability)
if rank_observability == n:
    print("O sistema é completamente observável.")
else:
    print("O sistema não é completamente observável.")
```

```
Rank da Matriz de Controlabilidade: 6
O sistema é completamente controlável.

Rank da Matriz de Observabilidade: 6
O sistema é completamente observável.
```

In [88]:

```
# Definir a matriz identidade I
n = A_d.shape[0]
I = np.eye(n)

# Definir a matriz de saída H (assumindo que medimos a posição vertical z)
H = np.array([[1, 0, 0, 0, 0, 0]])
```

```
# Construir a matriz M
# Bloco superior: [I - A_d   |  -B_d]
upper_block = np.hstack((I - A_d, -B_d))

# Bloco inferior: [H          |   0 ]
zero_block = np.zeros((H.shape[0], B_d.shape[1]))
lower_block = np.hstack((H, zero_block))

# Combinar blocos superior e inferior
M = np.vstack((upper_block, lower_block))

# Calcular o posto de M
rank_M = np.linalg.matrix_rank(M)
total_rows = M.shape[0]
```

In [89]:

```
print("Matriz M:")
print(M)

print("\nRank da Matriz M:", rank_M)
print("Número total de linhas em M:", total_rows)

if rank_M == total_rows:
    print("A matriz M é de posto completo. O sistema satisfaz a condição par
else:
    print("A matriz M não é de posto completo. O sistema não satisfaz a conc
```

```
Matriz M:
[[ 0.00000e+00  0.00000e+00 -1.00000e-01 -5.00000e-03 -1.63500e-03
  -4.08750e-05 -4.08750e-05  4.08750e-05]
 [ 0.00000e+00  0.00000e+00  0.00000e+00  0.00000e+00  0.00000e+00
   0.00000e+00 -1.00000e-01 -1.00000e-01]
 [ 0.00000e+00  0.00000e+00  0.00000e+00 -1.00000e-01 -4.90500e-02
  -1.63500e-03 -2.04375e-03  2.04375e-03]
 [ 0.00000e+00  0.00000e+00  0.00000e+00  0.00000e+00 -9.81000e-01
  -4.90500e-02 -8.17500e-02  8.17500e-02]
 [ 0.00000e+00  0.00000e+00  0.00000e+00  0.00000e+00  0.00000e+00
  -1.00000e-01 -2.50000e-01  2.50000e-01]
 [ 0.00000e+00  0.00000e+00  0.00000e+00  0.00000e+00  0.00000e+00
   0.00000e+00 -5.00000e+00  5.00000e+00]
 [ 1.00000e+00  0.00000e+00  0.00000e+00  0.00000e+00  0.00000e+00
   0.00000e+00  0.00000e+00  0.00000e+00]]

Rank da Matriz M: 7
Número total de linhas em M: 7
A matriz M é de posto completo. O sistema satisfaz a condição para rastreame
nto.
```

In [90]:

```
# Constantes físicas
M = 0.5      # Massa (kg)
g = 9.81     # Gravidade (m/s^2)
l = 0.3      # Distância entre o centro e o motor (m)
Ixx = 0.1    # Momento de inércia (kg*m^2)

# Matriz A em tempo discreto (A_d)
A_d = np.array([[1.0000e+00, 0.0000e+00, 1.0000e-01, 5.0000e-03, 1.6350e-03,
```

```
                 [0.0000e+00, 1.0000e+00, 0.0000e+00, 0.0000e+00, 0.0000e+00,
                 [0.0000e+00, 0.0000e+00, 1.0000e+00, 1.0000e-01, 4.9050e-02,
                 [0.0000e+00, 0.0000e+00, 0.0000e+00, 1.0000e+00, 9.8100e-01,
                 [0.0000e+00, 0.0000e+00, 0.0000e+00, 0.0000e+00, 1.0000e+00,
                 [0.0000e+00, 0.0000e+00, 0.0000e+00, 0.0000e+00, 0.0000e+00,

# Matriz B em tempo discreto (B_d)
B_d = np.array([[ 4.08750e-05, -4.08750e-05],
                 [ 1.00000e-01,  1.00000e-01],
                 [ 2.04375e-03, -2.04375e-03],
                 [ 8.17500e-02, -8.17500e-02],
                 [ 2.50000e-01, -2.50000e-01],
                 [ 5.00000e+00, -5.00000e+00]])

# Matriz de saída H
H = np.array([[1, 0, 0, 0, 0, 0],  # Medindo z (altitude)
               [0, 1, 0, 0, 0, 0]])  # Medindo y (posição horizontal)

# Dimensões do sistema
n = A_d.shape[0]
p = H.shape[0]

# Matriz de controlabilidade
Co = B_d
for i in range(1, n):
    Co = np.hstack((Co, np.linalg.matrix_power(A_d, i) @ B_d))
rank_ctrb = np.linalg.matrix_rank(Co)

# Matriz de observabilidade
Ob = H
for i in range(1, n):
    Ob = np.vstack((Ob, H @ np.linalg.matrix_power(A_d, i)))
rank_obsv = np.linalg.matrix_rank(Ob)

# Condição para rastreamento
I = np.eye(n)
M_tracking = np.vstack((np.hstack((I - A_d, -B_d)), np.hstack((H, np.zeros((
rank_tracking = np.linalg.matrix_rank(M_tracking)

# Sistema aumentado para rastreamento
Acal = np.vstack((np.hstack((A_d, np.zeros((n, p)))), np.hstack((-H, np.eye(
Bcal = np.vstack((B_d, np.zeros((p, B_d.shape[1]))))

# Polos desejados para o sistema aumentado
desired_poles = np.array([0.9 + 0.1j, 0.9 - 0.1j, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9,

# Projeto do controlador usando alocação de polos
place_obj = place_poles(Acal, Bcal, desired_poles)
Kcal = place_obj.gain_matrix
K = Kcal[:, :n]
Ki = Kcal[:, n:]

# Ponto de operação do controle de entrada
F1_op = 0.5 * g * M
F2_op = F1_op
u0 = np.array([F1_op, F2_op])
```

```python
# Parâmetros de simulação
Ts = 0.1    # Tempo de amostragem (s)
T = 15      # Tempo total de simulação (s)
dt = 0.0001 # Passo de integração (s)
t = np.arange(0, T + dt, dt)
Nc = len(t)
td = np.arange(0, T + Ts, Ts)
Nd = len(td)

# Inicializar variáveis
x = np.zeros((n, Nc))      # Vetor de estado
ym = np.zeros((p, Nc))     # Vetor de saída
u = np.zeros((2, Nd))      # Vetor de entrada de controle
m = np.zeros((p, Nd))      # Estado do integrador
r = np.zeros((p, Nd))      # Sinal de referência

# Sinal de referência
r[0, :50] = 5   # Primeiros 5 segundos: z_ref = 5
r[0, 50:] = 3   # Após 5 segundos: z_ref = 3
# Referência de y permanece zero (já inicializado para zero)

# Parâmetros de atualização do controle discreto
Nr = int(Ts / dt)
kd = 0  # Índice de tempo discreto

# Estado inicial (todos zeros)
x[:, 0] = np.array([0,    # z
                    0,    # y
                    0,    # z_dot
                    0,    # y_dot
                    0,    # theta (ângulo de rotação)
                    0])   # theta_dot

# Loop de simulação
for k in range(Nc - 1):
    # Estado atual
    z = x[0, k]
    y_pos = x[1, k]
    z_dot = x[2, k]
    y_dot = x[3, k]
    theta = x[4, k]
    theta_dot = x[5, k]

    # Entradas de controle
    F1 = u[0, kd]
    F2 = u[1, kd]

    # Dinâmica não linear
    total_thrust = F1 + F2
    z_ddot = (1 / M) * total_thrust * np.cos(theta) - g
    y_ddot = (1 / M) * total_thrust * np.sin(theta)
    theta_ddot = (l / Ixx) * (F1 - F2)

    # Atualização do estado usando integração de Euler
    x[0, k+1] = x[0, k] + z_dot * dt
```

```
    x[1, k+1] = x[1, k] + y_dot * dt
    x[2, k+1] = x[2, k] + z_ddot * dt
    x[3, k+1] = x[3, k] + y_ddot * dt
    x[4, k+1] = x[4, k] + theta_dot * dt
    x[5, k+1] = x[5, k] + theta_ddot * dt

    # Medição de saída
    ym[:, k] = H @ x[:, k]

    # Atualização do controle em intervalos discretos
    if (k % Nr == 0 or k == 0) and kd < Nd - 1:
        # Atualização do integrador
        if kd == 0:
            m[:, kd] = r[:, kd] - ym[:, k]
        else:
            m[:, kd] = m[:, kd - 1] + r[:, kd - 1] - ym[:, k]

        # Lei de controle
        u[:, kd] = u0 - K @ x[:, k] - Ki @ m[:, kd]

        # Garantir que as entradas de controle sejam não-negativas (forças n
        u[:, kd] = np.maximum(u[:, kd], 0)

        # Incrementar índice de tempo discreto
        kd += 1

    # Verificação de segurança para evitar que o quadricóptero saia dos limi
    if x[0, k] < -0.1 or x[0, k] > 10 or abs(x[1, k]) > 10:
        print("Simulação parada: Quadricóptero saiu dos limites.")
        break
```

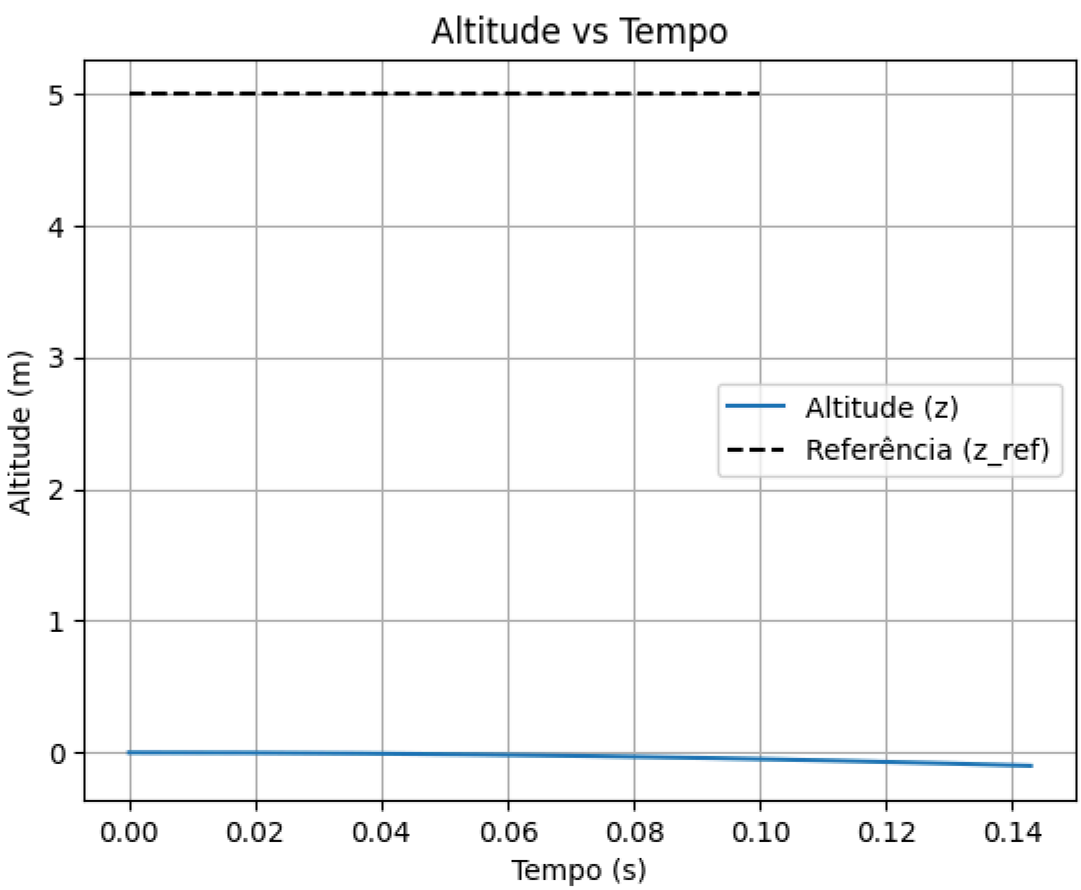
```
Simulação parada: Quadricóptero saiu dos limites.
```

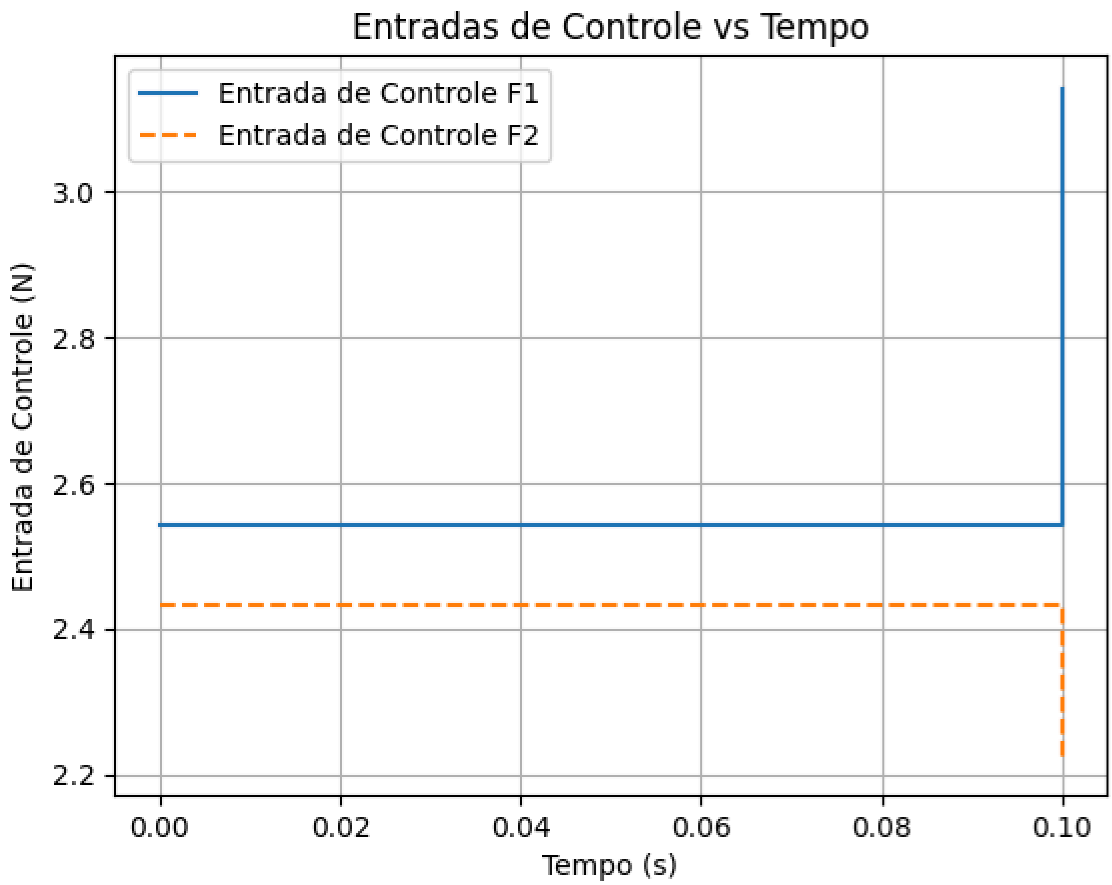
In [91]:

```
# Controlabilidade e Observabilidade
print("Rank da Matriz de Controlabilidade:", rank_ctrb)
if rank_ctrb == n:
    print("O sistema é completamente controlável.")
else:
    print("O sistema não é completamente controlável.")

print("\nRank da Matriz de Observabilidade:", rank_obsv)
if rank_obsv == n:
    print("O sistema é completamente observável.")
else:
    print("O sistema não é completamente observável.")

# Condição para rastreamento
print("\nRank da Matriz de Rastreamento:", rank_tracking)
if rank_tracking == M_tracking.shape[0]:
    print("O sistema satisfaz a condição para rastreamento.")
else:
    print("O sistema não satisfaz a condição para rastreamento.")

# Plotando Altitude vs Tempo
plt.figure()
plt.plot(t[:k+1], x[0, :k+1], label='Altitude (z)')
```

```
plt.step(td[:kd], r[0, :kd], 'k--', where='post', label='Referência (z_ref)'
plt.title('Altitude vs Tempo')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Altitude (m)')
plt.legend()
plt.grid()

# Plotando Entradas de Controle vs Tempo
plt.figure()
plt.step(td[:kd], u[0, :kd], label='Entrada de Controle F1', where='post')
plt.step(td[:kd], u[1, :kd], '--', label='Entrada de Controle F2', where='pc
plt.title('Entradas de Controle vs Tempo')
plt.xlabel('Tempo (s)')
plt.ylabel('Entrada de Controle (N)')
plt.legend()
plt.grid()

plt.show()
```

```
Rank da Matriz de Controlabilidade: 6
O sistema é completamente controlável.

Rank da Matriz de Observabilidade: 6
O sistema é completamente observável.

Rank da Matriz de Rastreamento: 8
O sistema satisfaz a condição para rastreamento.
```




Entradas de Controle vs Tempo
Entrada de Controle F1
Entrada de Controle F2
Entrada de Controle (N)
3.0
2.8
2.6
2.4
2.2
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
Tempo (s)