Introdução ao Cálculo Numérico

Primeira Lista de Exercícios

Prof. Ricardo Chicalé Lemes

1. Converta os seguintes números decimais para sua forma binária com, no máximo, 10 dígitos na parte fracionária:

   a) $x = 25$ b) $x = 1789$

   c) $x = 0.2$ d) $x = 0.31$

2. Converta os seguintes números binários para sua forma decimal:

   a) $x = (10111011)_2$ b) $x = (1011110111011101)_2$

   c) $x = (0.110110101)_2$ d) $x = (0.100101110)_2$

3. Considere o sistema $S[10, 5, -2, 4]$ de aritmética de ponto flutuante. Escreva, se possível, os números abaixo nesse sistema, adotando aproximações por trucamento ou arredondamento, quando necessário. Se o número não pertecer ao sistema, indique se é um underflow ou overflow, justificando a afirmativa.

   a) $x = 79.1954$ b) $x = 12762.58$

   c) $x = 0.023157$ d) $x = 137.98$

   e) $x = 0.000324955$

4. Sejam $x = 739.034$, $y = 19.3304$, $z = 0.96514$ e considere o sistema de aritmética de ponto flutuante $S[10, 3, -5, 5]$. Realize as operações aritméricas abaixo nesse sistema, fazendo aproximações por arredondamento, quando necessário.

   a) $x + y$ b) $x \cdot z - y$

   c) $x + y \cdot z$ d) $y^2 - x$

5. Determine os erros absoluto $|EA_x|$ e relativo $|ER_x|$ na aproximação de x por $\overline{x}$ nos seguintes casos:

   a) $x = 3.7215$ e $\overline{x} = 3.72$ b) $x = 1478.7309$ e $\overline{x} = 1479$

   c) $x = 0.0026487$ e $\overline{x} = 0.003$

6. Determine estimativas para os erros de arredondamento e truncamento na aproximação dos seguintes números no sistema $S[10, 3, -8, 8]$:

   a) $x = 0.0032783$ b) $x = 13452.5087$

   c) $x = 12.39076$

7. Sejam x e y com aproximações $\overline{x}$ e $\overline{y}$, e erros absolutos $EA_x = 0.02$ e $EA_y = -0.12$, respectivamente. Determine os erros absolutos, $EA_{(x+y)}$ e $EA_{(x-y)}$, e relativos, $ER_{(x+y)}$ e $ER_{(x-y)}$, na aproximação de $x+y$ por $\overline{x}+\overline{y}$ e de $x-y$ por $\overline{x}-\overline{y}$ nos seguintes casos:

   a) $\overline{x} = 13.6$ e $\overline{y} = 9.65$ b) $\overline{x} = 1.27$ e $\overline{y} = 1.25$

   c) $\overline{x} = 1456.1$ e $\overline{y} = 12.5$

8. Considere números x_1, x_2 e x_3 com aproximações $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ e $\tilde{x}_3$, respectivamente. Sabendo que os erros nas aproximações são $EA_{x_1} = 0.12$, $EA_{x_2} = -0.045$ e $EA_{x_3} = 0.27$, determine o erro absoluto cometido quando aproximamos $x_1+x_2+x_3$ por $\tilde{x}_1+\tilde{x}_2+\tilde{x}_3$.

9. (*) Considere números x, y e z com aproximações $\tilde{x} = 1.103$, $\tilde{y} = -3.09$ e $\tilde{z} = 5.77$ e erros absolutos $EA_x = 0.003$, $EA_y = 0.2$ e $EA_z = 0.33$, respectivamente. Determine os erros absoluto e relativo totais cometidos no cálculo da expressão $x \cdot y - 2z$, quando aproximamos por $\tilde{x} \cdot \tilde{y} - 2\tilde{z}$.

10. (**) Considere três números x_1, x_2 e x_3 com aproximações $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ e $\tilde{x}_3$, respectivamente. Sabendo que todos esses números pertencem ao intervalo $I = [1.28,\ 1.30]$, determine estimativas para os erros absoluto e relativo quando aproximamos $x_1 + x_2 + x_3$ por $\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3$.

11. (**) Considere n números reais $x_1, \ldots, x_n$ que foram aproximados, respectivamente, por $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n$ com erros absolutos $EA_{x_1}, \ldots, EA_{x_n}$. Mostre que o erro absoluto que se comete quando aproximamos $x_1 + \ldots + x_n$ por $\tilde{x}_1 + \ldots + \tilde{x}_n$ é

$$EA_{x_1+\ldots+x_n} = \sum_{j=1}^{n} EA_{x_j}$$

e escreva uma fórmula para o erro relativo $ER_{x_1+\ldots+x_n}$ em função dos erros relativos $ER_{x_1}, \ldots, ER_{x_n}$.

12. (**)Dada uma função $(n+1)$ vezes derivável $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, a fórmula de Taylor com resto de Lagrange de f em torno de $x_0 \in (a, b)$ é dada por

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

onde $f^{(j)}$ representa a derivada de ordem j de f e $\xi \in (x_0, x)$. O termo

$$R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

é o resto (ou erro) de ordem n na aproximação da função $f(x)$ pelo polinômio de Taylor de grau n:

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x - x_0)^j.$$

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$.

a) Escreva o polinômio de Taylor de grau 4 de $f(x)$ em torno de $x_0 = 0$.

b) Calcule o valor aproximado de $e^{0.82}$ utilizando o polinômio de Taylor do item a). Faça uma aproximação por arredondamento em 4 casas decimais.

c) Determine uma estimativa para os erros absoluto $|EA|$ e relativo $|ER|$ na aproximação de $e^{0.82}$ feita no item b), ignorando o erro de arredondamento. (Dica: utilize o fato de que $e < 2.72$ e $0 < \xi < 0.82 < 1$.)