SLC0607 - Cálculo 1

A Derivada

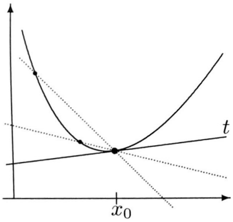
Introdução

Do ponto de vista geométrico, a noção de derivada é a de tangência. Ao passo que na visão análitica, a derivada é entendida como taxa de variação. Por exemplo, a velocidade e a aceleração são exemplos de derivada. A velocidade é a taxa de variação do espaço com relação ao tempo e a aceleração é a taxa de variação da velocidade com relação ao tempo.

O Conceito de Derivada

Dada uma função $y = f(X)$ definida numa vizinhança de um ponto x_0, o que vem a ser a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$?

Tomemos a reta secante ao gráfico de f passando pelos pontos $(x, f(x))$ e $(x_0, f(x_0))$ e deixemos o ponto $(x, f(x))$ deslizar ao longo do gráfico de f, tendendo a $(x_0, f(x_0))$. Veja as Figuras 1. Neste processo,a secante pode tender a uma posição limite, isto é, uma reta limite. Se isto de fato ocorrer, dizemos que o gráfico de $y = f(x)$ tem uma reta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$.



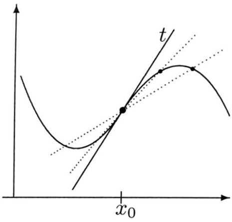


Figure: 1. A reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ como limite de secantes

Tomemos uma reta secante pelos pontos $(x, f(x))$ e $(x_0, f(x_0))$ e consideremos seu coeficiente angular

$$m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

O significado de existir a reta tangente (não vertical) ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é que exista o limite dos coeficientes angulares, com $x \to x_0$, isto é, que exista $m_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} m(x) = m_0,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m_0.$$

Segundo a definição a seguir, o coefiente angular m_0 nada mais é do que a derivada de f em x_0.

Definição 1. Dada $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, uma função e dado $x_0 \in A$ um ponto de acumulação de A, dizemos que f é *diferenciável ou derivável* em x_0 se existe o limite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1}$$

Neste caso, o número real $f'(x_0)$ é chamado *derivada* de f em x_0.

Às vezes é conveniente escrever (1) na forma:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Definição 2. Dizemos que $f : A \to \mathbb{R}$ é diferenciável no conjunto A, ou simplesmente diferenciável, se f for diferenciável em todo ponto de acumulação $x \in A$.

As notações mais comuns de derivada de $y = f(x)$ são

$$f', \quad y', \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{dy}{dx}$$

e, quando for preciso especificar o ponto x_0 onde a derivada é calculada,

$$f'(x_0), \quad y'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}.$$

A notação $\frac{dy}{dx}$ é devido a Leibniz. A notação $f'(x)$ é atribuída a Lagrange. Quando a variável independente representa o tempo, também se usa para a derivada de $y = f(t)$ a notação $\dot{y}$, atribuída a Newton.

Exemplos

1. Se $f(x) = C$ (constante), então $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

2. Se $f(x) = x$, então $f'(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

3. Se $f(x) = x^2$, então $f'(1) = 2$. De fato,

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2.$$

4. Se $f(x) = x^2$, então $f'(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x. \end{aligned}$$

5. Generalizando os itens (2) e (4), para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

De fato, usando o desenvolvimento do binômio,

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-1}h + \cdots + h^{n-1}\right] \\
&= \binom{n}{1}x^{n-1} \\
&= nx^{n-1},
\end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. Se $f(x) = \frac{1}{x}$, então $f'(3) = -\frac{1}{9}$. De fato,

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x-3}$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{\frac{3-x}{3x}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{-1}{3x} = -\frac{1}{9}.$$

Mais geral, se $f(x) = \frac{1}{x}$, então $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ para todo $x \neq 0$. De fato,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

7. $\cos' x = -\sin x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De fato,

$$\begin{aligned}\cos' x &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}\right]\end{aligned}$$

Usando o Primeiro Limite Fundamental, temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

e, portanto,

$$\cos' x = \lim_{h\to 0} \left[\cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}\right] = -\sin x.$$

8. $\sin' x = \cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A demonstração do item (8) é análoga à do item (7) e é deixada como exercício.

Definição 3. Sendo $y = f(x)$ derivável em x_0, a reta tangente ao seu gráfico em (x_0, y_0), $y_0 = f(x_0)$), é a reta

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Se o gráfico de uma função f tem reta tangente r num ponto $P = (x_0, y_0)$, $y_0 = f(x_0)$), então a reta n passando por P, perpendicular a r, é chamada reta normal ao gráfico de f em P.

Se o coeficiente angular de r é $m_0 \neq 0$ (portanto r não é horizontal), o coeficiente angular da reta n é

$$m_1 = -\frac{1}{m_0} = -\frac{1}{f'(x_0)},$$

pois, $\tan\theta_n = -\cot\theta$ (veja Figura 2). Portanto, a equação da reta normal ao gráfico de f no ponto $P = (x_0, y_0)$ é

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

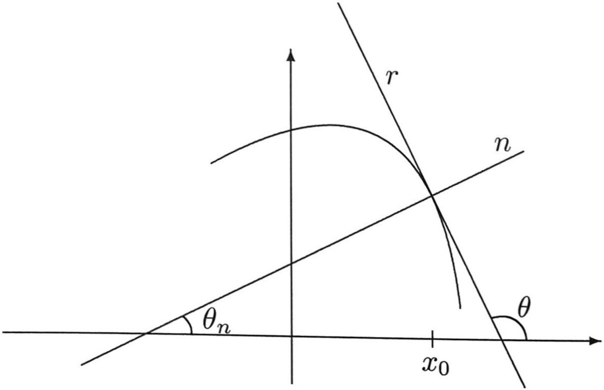


Figure: 2. $m_1 = \tan\theta_n = -\cot\theta = -1/f'(x_0)$.

Exemplo 9. Como a derivada de $f(x) = x^3$ em $x = 1$ é 3, a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3$ no ponto $(1, 1)$ é

$$y - 1 = 3(x - 1), \quad \text{ou seja,} \quad 3x - y - 2 = 0,$$

e da reta tangente no mesmo ponto é

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1), \quad \text{ou seja,} \quad x + 3y - 4 = 0.$$

Exemplo 10. A função $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$. De fato,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Assim,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$$

logo, $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ não existe. Portanto, $f(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$. Como $f'(0)$ não existe, o gráfico de $f(x) = |x|$ não admite reta tangente em $(0, f(0))$.

Exemplo 11. A função $f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $x = 0$. De fato,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Assim,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

logo, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ não existe. Portanto, $f(x) = \sqrt{x}$ não é derivável em $x = 0$.

Definição 4. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ contínua em x_0. Se ocorrer

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty,$$

dizemos que o gráfico de uma função f tem reta tangente vertical no ponto $(x_0, f(x_0))$. Por exemplo, o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ tem uma tangente vertical no ponto $(0, 0)$.

Observação 1. Nas considerações sobre tangente vertical, foi suposto que a função f era contínua em $x_0 \in (a, b)$. Para a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

tem-se

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = \infty,$$

mas não se diz que o gráfico de f tem uma tangente vertical em $(0, 0)$.

Diferenciabilidade e Continuidade

Proposição 1. Se uma função é diferenciável em um ponto x_0, então f é contínua em x_0.

Demonstração.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

implicando $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ou seja, f é contínua em x_0.

Observamos que a reciproca da Proposição 1 não é válida. De fato, a função $f(x) = |x|$ é contínua em no ponto $x = 0$, mas não é diferenciável nesse ponto como mostra o Exemplo 10.

Derivadas Laterais

Definição 5. Se $x_0 \in A$ é ponto de acumulação à esquerda para A e existe o limite

$$f'(x_0-) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

diz-se que o número $f'(x_0-)$ é a derivada lateral à esquerda de f em x_0.

Se $x_0 \in A$ é ponto de acumulação à direita para A e existe o limite

$$f'(x_0+) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

diz-se que o número $f'(x_0+)$ é a derivada lateral à direita de f em x_0.

Proposição 2. $x_0 \in A$ é ponto de acumulação à direita e à esquerda para A, então $f : A \to \mathbb{R}$ é diferenciável em um ponto x_0 se e somente se suas derivadas laterais em x_0 existem e coincidem. Neste caso, $f(x_0) = f'(x_0-) = f'(x_0+)$.

Exemplo 12. A função $f(x) = \min\{x^2, x^4\}$ é contínua (exercício), mas não é diferenciável nos pontos 1 e -1. De fato, primeiramente note que

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{se } |x| \leq 1 \\ x^2 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

Donde,

$$f'(1-) = 4 \neq 2 = f'(1+)$$

e

$$f'((-1)-) = -2 \neq -4 = f'((-1)+).$$

Exemplo 13. Este é um exemplo interessante em que a função é contínua, mas não diferenciável, num ponto e não existe as derivadas laterais no ponto em questão.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

A função f é contínua em $x = 0$ e as derivadas lateriais $f'(0\pm)$, que seriam dadas pelos limites

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^{\pm}} \sin \frac{1}{x},$$

não existem. Observe que a reta secante por $(x, f(x))$ e $(0, 0)$ não tende a uma reta limite quando $x \to 0$. Ela fica oscilando entre as posições das retas $y = x$ e $y = -x$.

Exemplo 14. A função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

é diferenciável em $x = 0$ e $f'(0) = 0$. De fato,

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin(1/x) = 0.$$

Portanto, a reta $y = 0$ é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 0)$.

Regras de Derivação

Proposição. Se f e g são duas funções diferenciáveis em x, então $f + g$, fg e, se $g(x) \neq 0$, f/g também diferenciáveis em x. Nesses casos, valem as segintes fórmulas:

1. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$,
2. $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,
3. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

Demonstração de 1. Exercício.

Demonstração de 2. Subtraindo-se e somando-se o termo $f(x)g(x+h)$ ao numerador do quociente abaixo temos

$$
\begin{aligned}
[f(x)g(x)]' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{[f(x+h) - f(x)]}{h} g(x+h) + f(x) \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} \right] \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x),
\end{aligned}
$$

onde na última igualdade usamos $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$, pois g é contínua em x visto que g é diferenciável em x.

Demonstração de 3. Subtraindo-se e somando-se o termo $g(x)f(x)$ ao numerador do quociente abaixo temos

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)] - f(x)[g(x+h) - g(x)]}{g(x+h)g(x)h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\left[\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] - f(x)\left[\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}{g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}
\end{aligned}
$$

Exemplos

(1) $(x^3 \cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x, \ \forall\, x \in \mathbb{R}$. De fato,

$$(x^3 \cos x)' = (x^3)' \cos x + x^3 (\cos x)' = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$$

(2) $(1/x)' = -1/x^2, \ \forall\, x \in \mathbb{R}, x \neq 0$. De fato,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1'x - 1.x'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

(3) Mais geralmente, se u é diferenciável e $u(x) \neq 0$, os mesmos cálculos de (2) levam à fórmula:

$$\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2}.$$

Se tivermos $u(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, esta fórmula fornece

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

O que mostra que a regra de derivação $(x^n)' = nx^{n-1}$ vale inclusive para expoentes inteiros negativos.

Exemplos

(4) $(\tan x)' = \sec^2 x$. De fato,

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

(5) Seguindo os mesmos passos de (4), $(\cot x)' = -\csc^2 x$.

(6) $(\sec x)' = \sec x \tan x$. De fato,

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right) = -\frac{(\cos x)'}{[\cos x]^2} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x.$$

(7) Analogamente, $(\csc x)' = -\csc x \cot x$.

Exemplos

(8) Se f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, são funções diferenciáveis, então

$$\begin{aligned}[f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)]' &= f_1'(x)f_2(x)\ldots f_n(x) \\ &+ f_1(x)f_2'(x)\ldots f_n(x) \\ &\vdots \\ &+ f_1(x)f_2(x)\ldots f_n'(x)\end{aligned}$$

(9) Em particular, se $f_i(x) = u(x)$ para $i = 1, \ldots, n$, obtém-se a fórmula

$$[u^n(x)]' = nu^{n-1}(x)u'(x).$$

Regra da Cadeia

Exemplo. Considere um ponto se movendo no plano xy sobre a curva $y = \cos x$ tal que a sua abscissa é dada em cada instante t por $x = \phi(t) = t^3 + 2t + 1$. Assim, a abscissa x é crescente com o tempo enquanto a ordenada y descreve um movimento oscilatório regido pela lei $y = \cos(\phi(t)) = \cos(t^3 + 2t + 1)$. Qual é a velocidade $v(t)$ da ordenada y num instante t?

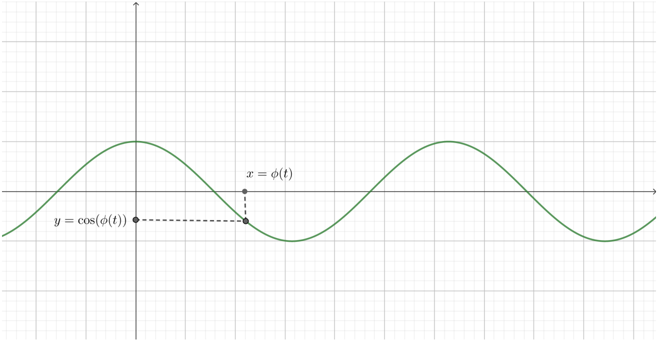


Figure: 3. Ponto movendo-se na curva $y = \cos x$

Como $v(t) = \frac{dy}{dt}$, precisamos calcular a derivada da composição do cosseno com a função $\phi(t) = t^3 + 2t + 1$. Isto é, queremos a derivada da função $\cos \phi(t)$. A proposição a seguir trata dessa questão de uma forma geral.

Proposição (Regra da Cadeia). Seja $y = f(x)$ diferenciável em x_0 e $z = g(y)$ diferenciável em $y_0 = f(x_0)$, então $z = g(f(x))$ é diferenciável em x_0, ou seja, a composta $g \circ f$ é diferenciável em x_0, e

$$[g(f(x))]'_{x=x_0} = g'(f(x_0))f'(x_0). \tag{2}$$

Observação. Na notação de Leibniz, a equação (2) pode ser escrita:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Demonstração. Defina a função auxiliar h por

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0), & \text{se } y \neq y_0 \\ 0, & \text{se } y = y_0. \end{cases}$$

Assim, $g(y) - g(y_0) = [h(y) + g'(y_0)]\,(y - y_0)$.
Usando que $y = f(x)$ e $y_0 = f(x_0)$, temos

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = \left[h(f(x)) + g'(y_0)\right](f(x) - f(x_0)).$$

Dividindo por $x - x_0$, temos

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \left[h(f(x)) + g'(y_0)\right]\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Fazendo $x \to x_0$, temos $f(x) \to f(x_0) = y_0$. Como $\lim_{x\to x_0} h(f(x)) = \lim_{y \to y_0} h(y) = h(y_0) = 0$, temos

$$\begin{aligned} [g(f(x))]'_{x=x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \left[h(f(x)) + g'(y_0)\right]\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0)f'(x_0). \end{aligned}$$

Exemplos

(1) $(\sqrt{x^2+1})' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De fato, sejam

$$y = (x^2+1)^{1/2} \quad \text{e} \quad u = x^2+1.$$

Assim, $y = u^{1/2}$ e

$$\frac{dy}{du} = (1/2)u^{-1/2} \quad \text{e} \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (1/2)u^{-1/2}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Exemplos

(2) Se $y = (2x+1)^3$ então $y'(0) = 6$.

De fato, se $u = 2x+1$, vem $y = u^3$, $\dfrac{dy}{du} = 3u^2$, $\dfrac{du}{dx} = 2$ e

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 3u^2 2 = 3(2x+1)^2 2 = 6(2x+1)^2.$$

Donde, $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=0} = 6$.

(3) Dada $y = [1 + \sin(x^2 - x)]^2$, calcule $\dfrac{dy}{dx}$.

Fazendo

$$u = 1 + \sin v \quad \text{e} \quad v = x^2 - x,$$

temos

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \\
&= \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx} \\
&= 2u \cos v(2x - 1) \\
&= 2[1 + \sin v] \cos(x^2 - x)(2x - 1) \\
&= 2[1 + sin(x^2 - x)] \cos(x^2 - x)(2x - 1) \\
&= [2\cos(x^2 - x) + \sin 2(x^2 - x)](2x - 1).
\end{aligned}$$

Velocidade

A velocidade instantânea, como taxa de variação do espaço em relação ao tempo, pode ser vista como uma derivada segundo a definição:

Definição. Se a equação de um movimento retílineo é $x = s(t)$, onde s é uma função diferenciável da variável tempo t, a *velocidade média* de x entre as posições $s(t_0)$ e $s(t)$ é

$$w(t) = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

A *velocidade instantânea* em t_0 é o limite da velocidade média $w(t)$, com $t \to t_0$,

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0).$$

Exemplos

(1) Um objeto desliza num plano inclinado de modo que a distância que ele percorre em t segundos é $s(t)$ metros, onde $s(t) = t^2 + 1/2$. Qual a sua velocidade depois de 2 segundos? Em que instante ele tem uma velocidade de 7 metros por segundo?

A velocidade num instante t é $v(t) = s'(t) = 2t$. Assim, a velocidade no instante $t = 2$ é $v(2) = 4$ m/s. A velocidade será 7 m/s quando t satisfizer $v(t) = 2t = 7$, isto é, $t = 7/2$ segundos. Neste momento, o objeto terá percorrido $s(7/2) = (7/2)^2 + 1/2 = 12,75$ metros.

Exemplos

(2) Um projétil é lançado verticalmente para cima a partir do chão com uma velocidade de 30 m/s. A altura $h(t)$ atingida em t segundos é dada por $h(t) = 30t - 5t^2$. Quando e com velocidade o projétil atinge o chão?

O projétil atingirá o chão no instante $t > 0$ tal que $h(t) = 30t - 5t^2 = 0$, ou seja, $t = 6$ segundos. A velocidade num instante t é $v(t) = s'(t) = 30 - 10t$. Assim, a velocidade no instante $t = 6$ é $v(6) = -30$ m/s.

Exemplos

(3) Num certo momento, a profundidade da água de um reservatório é 28 metros. Suponha que, por razões de consumo, o nível baixe de modo que depois de t horas a profundidade é $h(t) = 28 - t^2/4$ metros. Queremos saber com que velocidade o nível estará baixando no momento em a profundidade é 24 metros.

O instante t em que a profundidade é 24 metros é dado por

$$24 = 28 - t^2/4,$$

portanto, $t = 4$ horas. Como a velocidade com que o nível baixa é $h'(t) = -t/2$, a velocidade procurada é $h'(4) = -2$ m/h.

Exemplos

(4) Podemos agora resolver o exemplo que motivou a regra da cadeia: Considere um ponto se movendo no plano xy sobre a curva $y = \cos x$ tal que a sua abscissa é dada em cada instante t por $x = \phi(t) = t^3 + 2t + 1$. Assim, a abscissa x é crescente com o tempo enquanto a ordenada y descreve um movimento oscilatório regido pela lei $y = \cos(\phi(t)) = \cos(t^3 + 2t + 1)$. Qual é a velocidade $v(t)$ da ordenada y num instante t?

$$v(t) = \left[\cos(t^3 + 2t + 1)\right]' = -\sin(t^3 + 2t + 1)(3t^2 + 2).$$

Exemplos

(5) A extremidade de uma mola está engastada em uma parede e à sua outra extremidade está preso um corpo de massa m, de dimensões tão pequenas que pode ser identificado a um ponto, apoiado sobre um plano horizontal. A partir da posição de equilíbrio do sistema, isto é quando a abscissa do corpo é $x = 0$, comprime-se ou distende-se a mola até uma posição da de equilíbrio e solta-se, Considerando-se que a superfície é lisa a ponto de se desprezar o atrito e que não há dissipação de energia pela mola, o corpo realiza um movimento oscilatório, de modo que sua abscissa $x(t)$ em cada instante t é dado por

$$x(t) = r\cos(\omega t - \delta),$$

onde r, δ e ω são constantes positivas chamadas, resp., *amplitude*, *fase* e *frequência* do movimento. Calculemos a velocidade do corpo em cada instante t e determinemos os instantes em que o módulo da velocidade é máximo.

Se $h(t) = \omega t - \delta$, pela regra da cadeia, obtemos que a velocidade, $v(t) = x'(t)$, em cada instante t é dada por

$$v(t) = (r \cosh(t))' = -rh'(t) \sin h(t) = -r\omega \sin(\omega t - \delta).$$

Assim, o módulo da velocidade será máximo quando

$$\sin(\omega t - \delta) = \pm 1,$$

ou seja, quando

$$t = \frac{1}{\omega}\left(\delta + \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Nesses instantes, $x(t) = 0$, ou seja, o módulo da velocidade será máximo quando o corpo passar pela posição de equilíbrio do sistema ao realizar o movimento oscilatório.

Derivada da Função Inversa

Motivação geométrica. Seja f uma função contínua e invertível num intervalo I. O gráfico de f^{-1} é

$$G(f^{-1}) = \left\{ \left(f^{-1}(y), y \right) \mid y \in f(I) \right\} \tag{3}$$

Dessa forma os gráficos $G(f)$ de f e $G(f^{-1})$ de f^{-1} são o mesmo subconjunto do plano xy, pois se $y \in f(I)$ tem-se que $y = f(x)$ com $x \in I$. Substituindo em (3), temos

$$G(f^{-1}) = \left\{ \left(f^{-1}(y), y \right) \mid y \in f(I) \right\} = \{(x, f(x)) \mid x \in I\} = G(f).$$

Portanto, se f é diferenciável em $x_0 \in I$, com $f'(x_0) \neq 0$ e se $y = f(x_0)$, então existe a reta t tangente a $G(f)$ em (x_0, y_0). Logo a reta tangente a $G(f^{-1})$ em (y_0, x_0) existe e é a própria t.

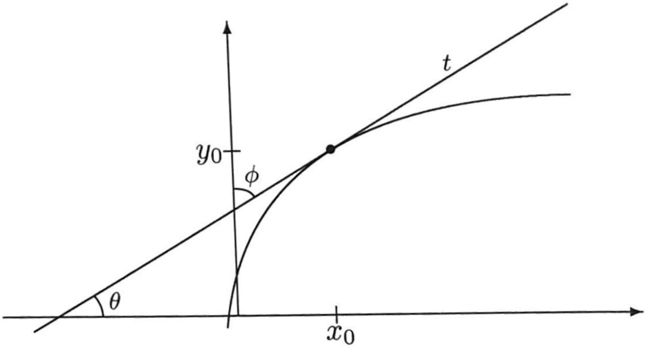


Figure: 4. $(f^{-1})'(y_0) = \tan\phi = \cot\theta = \frac{1}{f'(x_0)}$

Mas a declividade de t como tangente a $G(f^{-1})$ é $\tan\phi$, onde ϕ é o ãngulo que ela faz com o eixo y, enquanto como tangente a $G(y)$ é $\tan\theta$, onde θ é ângulo que ela faz com o eixo x, veja Figura 4. Como $\tan\phi = \cot\theta$, temos

$$(f^{-1})'(y_0) = \tan\phi = \cot\theta = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Proposição. Se f é uma função contínua e estritamente crescente (ou estritamente decrescente) num intervalo I derivável num ponto $x_0 \in I$, com $f'(x_0) \neq 0$, então a função inversa f^{-1} é derivável em $y_0 = f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \tag{4}$$

Observação 1. Em termos da notação de Leibniz, a relação (4) fica

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Demonstração. Como f^{-1} também é contínua, temos $x \to x_0$ se e somente se $y \to y_0$. Logo,

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Observação 2. A condição $f'(x_0) \neq 0$ é essencial para a validade dessa proposição. De fato, seja $f(x) = x^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. A função f é estritamente crescente e contínua em $\mathbb{R}$ e derivável em $\mathbb{R}$. Mas $f'(x) = 3x^2$ é zero para $x = 0$. A função inversa f^{-1} é definida por $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$, a qual **não** é derivável para $y = 0$.

Exemplo 1. Seja $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(y) = \sqrt{y}$. É fácil ver que g é a inversa da função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Como f é contínua, estritamente crescente e $f'(x) = 2x \neq 0$ para todo $x \in (0, \infty)$, segue da proposição anterior que g é diferenciável no intervalo $(0, \infty)$ e para todo $y \in (0, \infty)$

$$\left(y^{\frac{1}{2}}\right)' = g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{2g(y)} = \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1}$$

Exemplo 2 (generalização do Exemplo 1). Seja n um inteiro positivo par e seja $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(y) = \sqrt[n]{y}$. É fácil ver que g é a inversa da função $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$. Como f é contínua, estritamente crescente e $f'(x) = nx^{n-1} \neq 0$ para todo $x \in (0, \infty)$, segue da proposição anterior que g é diferenciável no intervalo $(0, \infty)$ e para todo $y \in (0, \infty)$

$$\left(y^{\frac{1}{n}}\right)' = g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{ng(y)^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{y^{n-1}}} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}$$

Exemplo 3. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(y) = \sqrt[3]{y}$. É fácil ver que g é a inversa da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$. Como f é contínua, estritamente crescente e $f'(x) = 3x^2 \neq 0$ para todo $x \neq 0$, segue da proposição anterior que g é diferenciável para $y \neq 0$ e

$$\left(y^{\frac{1}{3}}\right)' = g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{3g(y)^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} = \frac{1}{3}y^{\frac{1}{3}-1}$$

Exemplo 4 (generalização do Exemplo 3). Seja n um inteiro positivo ímpar e seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(y) = \sqrt[n]{y}$. É fácil ver que g é a inversa da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$. Como f é contínua, estritamente crescente e $f'(x) = nx^{n-1} \neq 0$ para todo $x \neq 0$, segue da proposição anterior que g é diferenciável para $y \neq 0$ e

$$\left(y^{\frac{1}{n}}\right)' = g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{ng(y)^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{y^{n-1}}} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}$$

Exemplo 5. Para um número racional $r = m/n$ vale a fórmula

$$(x^r)' = rx^{r-1}.$$

Se $r = m/n$, supomos $x > 0$ para n par, ou $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ para n ímpar. De fato, seja $u(x) = x^{1/n}$. Então

$$x^r = x^{m/n} = [x^{1/n}]^m = [u(x)]^m.$$

Pela regra da cadeia,

$$(x^r)' = m[u(x)]^{m-1}u'(x) = m[x^{1/n}]^{m-1}\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} = rx^{r-1}.$$

Exemplo 6 (Funções trigonmétricas inversas).

(a) $y = \arcsin x$. Para entender arcsin como uma função é preciso restringir o **contradomínio**. É usual tomá-lo como $(-\pi/2, \pi/2)$. Assim, temos uma função estritamente crescente, inversa de $x = \sin y$. Logo

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(b) $y = \arccos x$. Neste caso é usual tomar $(0, \pi)$ como contradomínio e $(-1, 1)$ como domínio. Assim, temos uma função estritamente decrescente, inversa de $x = \cos y$. Logo

$$\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(c) $y = \arctan x$. Tomando $(-\pi/2, \pi/2)$ como contradomínio e $\mathbb{R}$ como domínio, temos uma função estritamente decrescente, inversa de $x = \tan y$. Logo

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Exercício. Preencha os detalhes dos seguintes exemplos:

(a)

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in (0, \pi).$$

(b)

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1].$$

(c)

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccsc} x = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1].$$

Derivadas de Ordem Superior

Se $f : A \to \mathbb{R}$ é diferenciável, fica definida a função

$$\begin{aligned} f' : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

Definição. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ se diz duas vezes diferenciável se a função f' é diferenciável em A. Neste caso, a derivada de f' em $x \in A$ é chamada derivada segunda, ou derivada de ordem dois de f em x e é denotada por $f''(x)$, ou ainda por

$$f^{(2)}(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x).$$

Exemplo. Se $f(x) = x^2 + \sin x$, então $f''(0) = 2$. De fato,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + \cos x, \\ f''(x) &= 2 - \sin x, \end{aligned}$$

donde $f''(0) = 2$.

Definição. Para $n \geq 3$ um inteiro, suponhamos que esteja definida o que vem a ser uma função $(n-1)$ vezes diferenciável, $f : A \to \mathbb{R}$, com derivada de ordem $(n-1)$ denotada por $f^{(n-1)}$. Diz-se que f é n vezes diferenciável em A se $f^{(n-1)}$ é diferenciável em A. Neste caso,

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}]'(x).$$

é a chamada derivada de ordem n de f. Também se usam as seguintes notações para a derivada de ordem n de f:

$$\frac{d^n y}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n} f(x).$$

Exemplo. Se $f(x) = x^4 - 5x^2 + 3$, f tem derivadas de todas as ordem e

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 10x, \\ f''(x) &= 12x^2 - 10, \\ f^{(3)}(x) &= 24x, \\ f^{(n)}(x) &= 0, \ n = 5, 6, \ldots \end{aligned}$$

Exemplo. Voltando ao exemplo do sistema massa-mola dado na seção da Regra da Cadeia, lembremos que a aceleração é a variação da velocidade, isto é, em cada instante t, a aceleração do corpo é

$$a(t) = v'(t) = x''(t).$$

Assim,

$$a(t) = [r\cos(\omega t + \delta)]'' = -r\omega^2 \cos(\omega t + \delta).$$

Observe que quando o módulo da velocidade é máximo a aceleração é nula.

Definição. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é chamada de classe C^n, denota-se $f \in C^n$, $n \geq 1$ inteiro, se f é n vezes diferenciável e a derivada $f^{(n)}$ é uma função contínua. Se f possui derivadas de todas as ordens, diz se que f é de classe C^∞ e denota-se $f \in C^\infty$. A notação $f \in C`0$ indica que a função f é contínua.

Exemplos.

(1) Se $P(x)$ é um polinômio, então $P \in C^\infty$.

(2) Se $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$, então $f, g \in C^\infty$. De fato, suas derivadas de qualquer ordem são $\pm \sin x$ ou $\pm \cos x$.

(3) Se $f(x) = |x|$, então $f \in C^0$, mas $f \notin C^1$.

(4) Se $f(x) = x|x|$, então $f \in C^1$, mas $f \notin C^2$. De fato, $f(x) = x^2$ se $x \geq 0$ e $f(x) = -x^2$ se $x \leq 0$. Assim,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ -2x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

Portanto, $f'(x) = 2|x|$ que é contínua, mas não é diferenciável. Portanto, $f \in C^1$, mas $f \notin C^2$.

(5) Seja a função f dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

sua derivada é

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Vemos que f é diferenciável, mas $f \notin C^1$ porque f' não é contínua.

Derivadas de funções definidas implicitamente

A maioria das funções que lidamos até agora foi da forma $y = f(x)$, em que y se expressa diretamente, ou explicitamente, em termos de x. Por exemplo, $y = \cos x$. Por outro lado, acontece com frequência que y é definida como uma função de x por meio de uma equação

$$F(x, y) = 0. \tag{5}$$

Nesse caso, dizemos que a equação (5) define y como uma ou mais funções implícitas de x.

Exemplo. A equação $x^2 + y^2 = 25$ determina implicitamente duas funções de x, que podem ser escritas explicitamente como

$$y = \sqrt{25 - x^2} \quad \text{ou} \quad y = -\sqrt{25 - x^2}$$

para $-5 \leq x \leq 5$.

Quando y é definido implicitamente como função de x, nem sempre se pode explicitar a função, isto é, tirar y em função de x como fizemos no exemplo acima. Por exemplo, a equação

$$\cos(xy) - y = 0 \tag{6}$$

está satisfeita com $x = 0$ e $y = 1$. Além disso, pode-se provar que (6) define y como uma função de x, para x numa vizinhança de 0. Isto é, existem uma vizinhança U de 0 e uma função $g : U \to \mathbb{R}$ de modo que $y = g(x)$ e

$$\cos(xg(x)) - g(x) = 0, \quad \forall\, x \in U,$$

sem que se apresente uma expressão explícita para g.

É muito surpreendente podermos, muitas vezes, calcularmos a derivada dy/dx de uma função implícita sem resolver (explicitar) primeiro a dada equação para y. Iniciamos o processo derivando com relação a x a equação dada e admitindo que y como uma função diferenciável de x sempre que aparecer. Assim, por exemplo, se aparecer y^3, o termo y^3 é tratdo como o cubo de uma função de x e sua derivada com relação a x é pela regra da cadeia dada por

$$\frac{d}{dx}y^3 = 3y^2\frac{dy}{dx}.$$

Para completar o processo, resolvemos a equação resultante para dy/dx como a incógnita. Esse método chama-se derivação implícita.

Exemplo. Da equação $x^2 + y^2 = 25$, obtemos

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \text{ desde que } y \neq 0.$$

Isso nos dá o resultado correto para qualquer das duas funções implícitas em que estamos pensando. Logo, no ponto $(4, 3)$ da curva dada por $x^2 + y^2 = 25$, o valor de dy/dx é $-4/3$ e em $(4-, 3)$ o seu valor é $4/3$.

Exemplo. Notando que a equação $\cos(xy) - y = 0$ está satisfeita com $x = 0$ e $y = 1$, ou seja, para o par $(0, 1)$, admitamos que ela define y como função diferenciável de x para x numa vizinhança de 0, calculemos y' pelo métoda da derivada implicita:

$$0 = 0' = (\cos(xy)-y)' = -(xy)'\sin(xy)-y' = -(y+xy')\sin(xy)-y'$$

Logo

$$y' = -\frac{y\sin xy}{x\sin xy + 1}$$

No ponto $x = 0$, $y = 1$ e então $y'(0) = -\sin 0/1 = 0$.

Máximos e mínimos relativos

Definição. Seja f uma função definida num intervalo I.

- Diz-se que $x_0 \in I$ é ponto de máximo relativo ou local de f, se existe uma vizinhança V de x_0 tal que
$$f(x) \leq f(x_0), \quad \forall x \in V \cap I.$$
Neste caso, $f(x_0)$ é chamado valor máximo relativo ou local.
- Diz-se que $x_0 \in I$ é ponto de mínimo relativo ou local de f, se existe uma vizinhança V de x_0 tal que
$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \in V \cap I.$$
Neste caso, $f(x_0)$ é chamado valor mínimo relativo ou local.

Exemplo 1. O gráfico de $f(x) = x^3 - 3x$ está representado na Figura 6. A função $f(x) = x^3 - 3x$ tem um ponto de máximo relativo em $x_0 = -1$ com valor máximo 2 um ponto de mínimo relativo em $x = 1$ com valor mínimo -2.

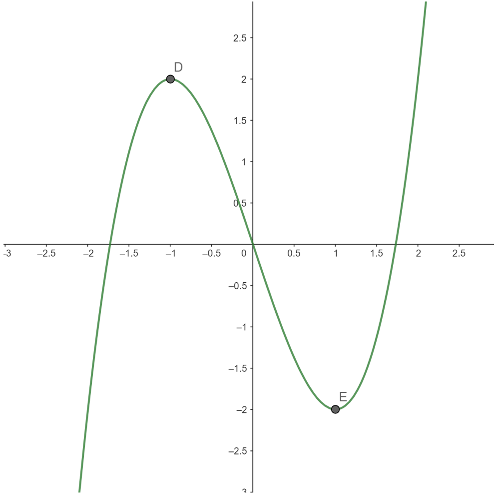


Figure: 6. Pontos de máximo e de mínimo relativos

Definição. Os pontos de máximo ou de mínimo relativos de uma função f são chamados pontos extremos de f.

Proposição. Se $f : I \to \mathbb{R}$ for diferenciável no intervalo aberto I e $c \in I$ for um ponto extremo de f, então $f'(c) = 0$.

Demonstração. Suponha que c é um ponto de máximo relativo de f. Para $|h|$ suficientemente pequeno,

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0, \quad \text{se } h < 0,$$
$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0, \quad \text{se } h > 0,$$

Como f é diferenciável, temos

$$0 \leq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Logo, $f'(c) = 0$.

Observação 1. A última proposição não vale se o intervalo I não for aberto. De fato, se $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x$. Os pontos $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ são respectivamente mínimo e máximo de f, mas $f'(1) = f'(2) = 1 \neq 0$.

Observação 2. A recíproca da última proposição é falsa. De fato, se $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x^3$, temos $f'(0) = 0$, mas $x_0 = 0$ não é ponto extremo de f.

Teorema de Rolle. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) com $f(a) = f(b)$. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

O Teorema de Rolle tem a seguinte interpretação dinâmica: "*Se num movimento retilíneo, um ponto retorna à posição inicial, então há um instante em que sua velocidade é nula.*"

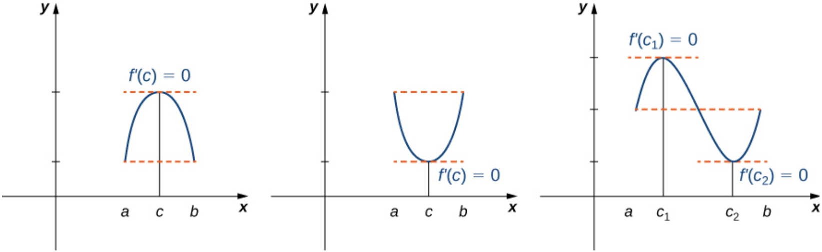


Figure: 7. Teorema de Rolle

Demonstração. Como f é contínua no intervalo fechado e limitado $[a, b]$, a função f assume seus valores máximo e mínimo M e m respectivamente. Se ambos os valores M e m são assumidos nos extremos de $[a, b]$, como $f(a) = f(b)$, segue que $m = M$. Logo, f é constante, donde $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Assim, qualquer $c \in (a, b)$ nos serve. A outra possibilidade é a de que pelo menos um dos extremos M ou m seja assumido em um ponto $c \in (a, b)$. Pela proposição anterior, $f'(c) = 0$.

Exemplo 1. A função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ definida em $[-1,1]$, satisfaz as hipóteses no Teorema de Rolle. A semicircunferência superior de raio 1 e centro na origem é o gráfico de f. Observe que f não é diferenciável em $[-1,1]$. Sua derivada $f'(x) = -x/\sqrt{1-x^2}$, se anula no ponto $x = 0$.

Observação. Um ponto importante sobre o Teorema de Rolle é que a diferenciabilidade da função f é essencial. Se f não é diferenciável, mesmo em um único ponto, o resultado pode não ser válido. Por exemplo, a função $f(x) = |x| - 1$ é contínua em $[-1,1]$ e $f(-1) = 0 = f(1)$, mas $f'(c) \neq 0$ para qualquer $c \in (-1,1)$.

Definição. Seja I um intervalo aberto. Diz-se que $c \in I$ é um ponto crítico de $f : I \to \mathbb{R}$ se $f'(c) = 0$ ou se $f'(c)$ não existe.

Exemplo 1. A função $f(x) = x^3 - 3x$ tem exatamente dois pontos críticos e estes estão no intervalo $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. De fato, f é diferenciável, logo seus pontos críticos são só aqueles c tais que $f'(c) = 0$. Como $f(-\sqrt{3}) = f(0) = 0$, o Teorema de Rolle garante que existe $c_1 \in (-\sqrt{3}, 0)$ tal que $f'(c_1) = 0$. Como $f(0) = f(\sqrt{3}) = 0$, o Teorema de Rolle garante que existe $c_2 \in (0, \sqrt{3})$ tal que $f'(c_2) = 0$. Esses são os únicos pontos críticos de f, pois $f'(x)$ é um polinômio de segundo grau e como tal pode ter no máximo duas raízes. Resolvendo a equação $f'(x) = 0$, obtemos $c_1 = -1$ e $c_2 = 1$.

Exemplo 2. O ponto $c = 0$ é o único ponto crítico da função $f(x) = |x| - 1$ no intervalo $[-1, 1]$, porque f não é diferenciável em $c = 0$ e $f'(x) \neq 0$ para $x \neq 0$.

Teorema do Valor Médio

Teorema do Valor Médio. Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

O Teorema do Valor Médio pode ser reformulado como:

> *Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que a reta tangente ao gráfico de f em $(c, f(c))$ é paralela à reta por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.*

O Teorema do Valor Médio tem a seguinte interpretação dinâmica:

> *Num movimento retilíneo há um instante em que a velocidade instantânea é igual a velocidade média.*

A Figura 8 mostra que o ponto c não necessariamente é único.

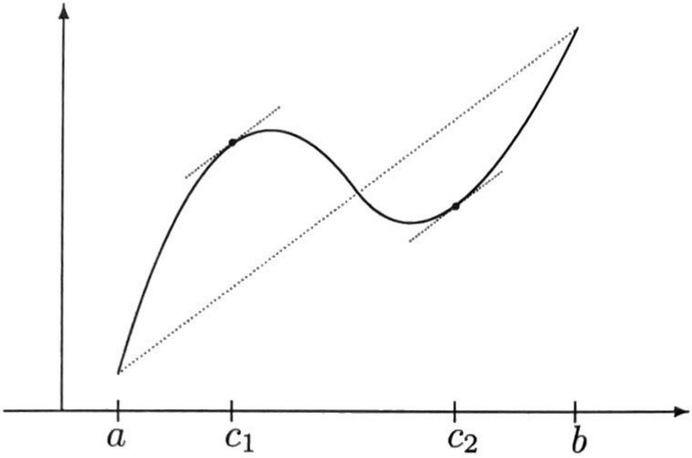


Figure: 8. Teorema do Valor Médio

Demonstração. Considere $K = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ e defina a função

$$g(x) = f(x) - [K(x - a) + f(a)].$$

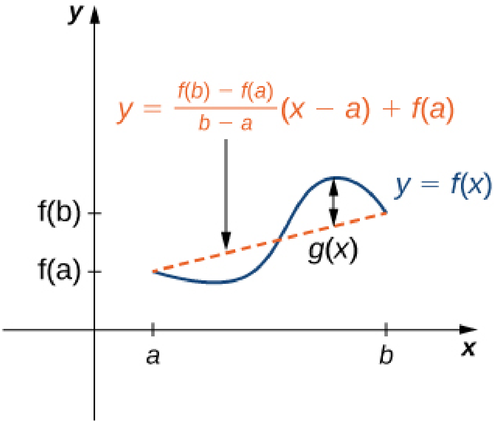


Figure: 9. Teorema do Valor Médio

Note que

$$g(x) = f(x) - [K(x - a) + f(a)].$$

é uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e $g(a) = g(b) = 0$. Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$g'(c) = f'(c) - K = 0.$$

Portanto, $f'(c) = K$, isto é, $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Exemplo. Se $f; [0,1] \to \mathbb{R}$ é diferenciável, $f(0) = 0$ e $f'(x) \leq C$ para todo $x \in (0,1)$, então $f(1) \leq C$.

De fato, pelo teorema do valor médio, existe $c \in (0,1)$ tal que

$$f(1) - f(0) = f'(c)(1-0),$$

ou seja, $f(1) = f'(c) \leq C$.

Pensando na variável independente como o tempo, este exemplo diz que se a velocidade de um carro não supera C km/h, após uma hora ele não estará a mais de C km do ponto de partida.

Corolário 1. Se f é uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$.

Demonstração. Suponhamos $x_1 < x_2$ com $x_1, x_2 \in [a, b]$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como $f'(c) > 0$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$.

O Corolário 1 tem uma versão para funções estritamente decrescente.

Uma demonstração análoga leva também à seguinte versão para monotonicidade não estrita: " Se f é uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$."

Corolário 2. Se f é uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é constante.

Demonstração. Seja $K = f(a)$. Dado $x \in (a, b]$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (a, x)$ tal que

$$f(x) - K = f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0,$$

logo $f(x) = K$.

Observação. É essencial que o domínio de f seja um intervalo no Corolário 2. De fato, a função $f(x) = x/|x|$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tem derivada nula, mas f não é constante.

Corolário 3. Se f e g são contínuas em $[a, b]$, diferenciáveis em (a, b) e $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, então existe uma constante C tal que $f = g + C$.

Demonstração. Se $h = f - g$, então h é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e $h'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Pelo Corolário 2, $h(x) = C$ para todo $x \in [a, b]$, isto é, $f = g + C$.

Teorema de Cauchy. Se f e g são contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c).$$

Demonstração. Seja

$$r(x) = [f(b) - f(a)]\, g(x) = [g(b) - g(a)]\, f(x).$$

Logo r é uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e

$$r(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = r(b).$$

Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $r'(c) = 0$, ou seja,

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) - [g(b) - g(a)]\, f'(c).$$

Notemos que o Teorema do Valor Médio é o caso especial do Teorema de Cauchy em que $g(x) = x$.

Regra de L'Hôpital

Teorema (Regra de L'Hôpital). Sejam f e g funções diferenciáveis em (a, b), exceto eventualmente em $c \in (a, b)$, com $g'(x) \neq 0$, para $x \neq c$, e

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}. \tag{7}$$

Se

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to c} g(x) = 0 \tag{8}$$

ou

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to c} g(x) = \infty, \tag{9}$$

então

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L. \tag{10}$$

Demonstração. Provaremos apenas o caso (8) que é mais simples. Como $f(c)$ e $g(c)$ não influem no limite (7), podemos admitir $f(c) = g(c) = 0$, ou seja, as funções f e g são contínuas em c, portanto, são contínuas em (a, b). Para todo $x \in (c, b)$, o Teorema de Cauchy assegura a existência de s, com $c < s < b$, tal que

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - \frac{f'(s)}{g'(s)},$$

ou seja,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(s)}{g'(s)},$$

e, como $s \to c^+$ quando $x \to c^+$, temos

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c^+} \frac{f'(s)}{g'(s)} = \lim_{s \to c^+} \frac{f'(s)}{g'(s)} = L.$$

A prova do limite à esqeurda é análoga.

Observação. A regra de L'Hôpital vale também para os casos $c = \pm\infty$, como se pode verificar fazendo a mudança de variável $y = 1/x$. Por exemplo, se f e g estão definidas na semireta (a, ∞), $a > 0$, e as condições (7)-(9) estão satisfeitas com $c = \infty$, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)}.$$

As funções $\phi(y) = f(1/y)$ e $\psi(y) = g(1/y)$ estão definidas em $(0, 1/a)$, são diferenciáveis e $\phi'(y) = -\frac{-1}{y^2} g'(1/y) \neq 0$ em $(0, 1/a)$. As condições (8) em f e g implicam que ϕ e ψ satisfazem as condições (7). A mesma conclusão com referência a (9). Portanto, pela Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\phi(y)}{\psi(y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\phi'(y)}{\psi'(y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplo 1. Na função $h(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, definida para $x \neq 0$, faça $f(x) = 1 - \cos x$ e $g(x) = x^2$ e observe que ela satisfazem as hipóteses (8) da Regra de L'Hôpital. Logo,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x},$$

pois este último limite existe e vale $1/2$ (uma consequência do primeiro limite fundamental, ou mesmo utilizando a Regra de L'Hôpital pois $\sin x$ e $2x$ satisfazem as hipóteses (8)). Daí,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Exemplo 2. $\displaystyle\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{4\tan x}{1+\sec x}$ leva à indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$.
Aplicando a Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{4\tan x}{1+\sec x} = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{4\sec x}{\tan x} = \lim_{x \to \pi/2^-} \frac{4}{\sin x} = 4.$$

Exemplo 3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ leva à indeterminação $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

Exemplo 4. $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$ leva à indeterminação $\infty - \infty$.

Observando que

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{x^2}{\sin x}\right)$$

e que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\cos x} = 0,$$

segue que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{x^2}{\sin x}\right) = \infty \cdot 1 = \infty.$$

Exemplo 5. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ também leva à indeterminação $\infty-\infty$. Observamos que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x},$$

leva à indeterminação $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Funções Convexas e Pontos de Inflexão

As funções convexas estão relacionadas ao conceito de conjunto convexo. Por isso vamos definir o que vem a ser um subconjunto convexo do plano.

Definição. Dados pois pontos P, Q do palno xy, $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$, o segmento PQ é o conjunto dos pontos X tais que

$$X = (1 - \lambda)P + \lambda Q, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Em coordenadas, se $X = (x, y)$, então

$$(x, y) = ((1 - \lambda)p_1 + \lambda q_1, (1 - \lambda)p_2 + \lambda q_2), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Definição. Um subconunto C do plano xy é convexo se, para quaisquer pontos $P, Q \in C$, o segmento PQ está contido em C.

Exemplo 1. Um semiplano é o conjunto S dos pontos (x, y) tais que $ax + by \geq c$, para alguma terna de números reais a, b e c com $(a, b) \neq (0, 0)$. Todo semiplano é um conjunto convexo.

De fato, sejam $P = (p_1, p_2)$ e $Q = (q_1, q_2)$ do semiplano S, isto é, $ap_1 + bp_2 \geq c$ e $aq_1 + bq_2 \geq c$. Seja $X = (x, y) \in PQ$,

$$(x, y) = \big((1-\lambda)p_1 + \lambda q_1, (1-\lambda)p_2 + \lambda q_2\big), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Como λ e $1 - \lambda$ são não negativos,

$$\begin{aligned} ax + by &= a((1-\lambda)p_1 + \lambda q_1) + b((1-\lambda)p_2 + \lambda q_2) \\ &= (1-\lambda)(ap_1 + bp_2) + \lambda(aq_1 + bq_2) \\ &\geq (1-\lambda)c + \lambda c \\ &= c. \end{aligned}$$

Ou seja, $X \in S$. Assim, o segmento PQ está contido no semiplano S, logo S é convexo.

Exemplo 2. O conjunto $C = \{(x, y) \mid 0 \leq x,\ y \leq 1,\ xy = 0\}$ não é convexo. De fato, considere os pontos $P = (1, 0)$ e $Q = (0, 1)$. Ambos pertencem a C, mas o ponto $X = (1 - \lambda)P + \lambda Q$ do segmento PQ, com $\lambda = 1/2$, é $X = (1/2, 1/2)$ que não pertence a C. Portanto o segmento PQ não está contido em C.

Exemplo 3. Qualquer interseção de conjuntos convexos do palno é um conjunto convexo.

Exemplo 4. Toda região triangular, bem como os polígonos regulares, é um conjunto convexo, uma vez que esses conjuntos são interseções de semiplanos.

Exemplo 5. O disco $D = \left\{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq \delta\right\}$, $\delta > 0$, é convexo, pois $D = \cap_{p \in C} \Gamma_p$, onde C é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = \delta^2$ e Γ_p é o semiplano definido pela reta tangente a C em p contendo o disco D.

Definição. Seja $f : I \to \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Diz-se que f é convexa se o conjunto

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I,\ y \geq f(x)\right\}$$

é convexo.

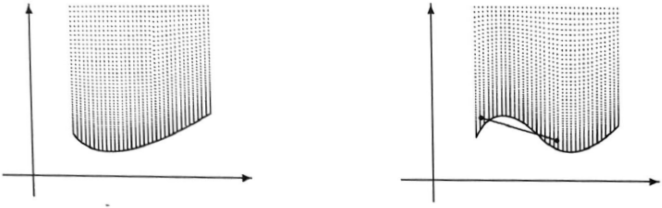


Figure: 10. Uma função convexa e uma não convexa

Exemplo. A função $f(x) = \max\{-2x+5, x/2, x-2\}$, definida em $[-1, 7]$ é um exemplo de função convexa.

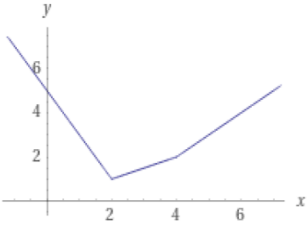


Figure: 11. $f(x) = \max\{-2x+5, x/2, x-2\}$, $x \in [-1, 7]$

A função f é convexa, pois o conjunto

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 7],\ y \geq f(x)\right\}$$

é a interseção dos seguintes semiplanos:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq -1\}, \\
\Gamma_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 7\}, \\
\Gamma_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -2x + 5\}, \\
\Gamma_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x/2\}, \\
\Gamma_5 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x - 2\}.
\end{aligned}
$$

Funções Convexas Diferenciáveis

Se $f : I \to \mathbb{R}$ for uma função diferenciável num intervalo I, o fato dela ser convexa significa que as retas tangentes a seu gráfico estão sempre abaixo dele. Mais ainda, o coeficiente angular da reta tangente cresce quando a abscissa do ponto de tangência cresce. Veja Figura 12.

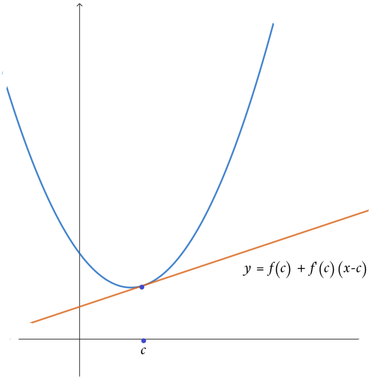


Figure: 12. Retas tangentes ao gráfico de uma função convexa

Explorando a diferenciabilidade, a proposição a seguir apresenta duas caracterização das funções convexas.

Proposição (Caracterização das funções convexas). Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável no intervalo I, então as seguintes são equivalentes.

1. f é convexa.
2. A derivada f' é uma função crescente em I.
3. Para todos $c, x \in I \;\Rightarrow\; f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$.

A proposição a seguir é um corolário desta proposição.

Proposição. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função duas vezes diferenciável no intervalo I e se $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é convexa.

Demonstração. Como $f''(x) > 0$ em I, a função f' é crescente. Pela proposição anterior, f é convexa.

Exemplo. A função $f(x) = x^2$ é convexa em qualquer intervalo, pois $f''(x) = 2 > 0$ em qualquer intervalo.

Definição. Se I é um intervalo, uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é côncava se $-f$ é convexa.

Todas os resultados das funções convexas têm um análogo para as funções côncavas. Observamos que convexidade e concavidade não são características complementares. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ não é côncava nem convexa no intervalo $[-1, 1]$. As funções $f(x) = ax + b$ são côncavas e convexas ao mesmo tempo.

Definição. Dados um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua, diz-se que f é estritamente convexa se é convexa e seu gráfico não contém segmentos de reta. Analogamente, uma função contínua f é estritamente côncava se é côncava e seu gráfico não contém segmentos de reta.

Exemplo. A função $f(x) = x^2$ é estritamente convexa em qualquer intervalo.

Observação. Se f é diferenciável em um intervalo I, f é estritamente convexa se a derivada f' é estritamente crescente. Um exemplo disso é a função $f(x) = x^2$ em qualquer intervalo.

Definição. Diz-se que $c \in (a, b)$ é ponto de inflexão de uma função contínua $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, se existir $\delta > 0$ tal que f é estritamente convexa em $(c - \delta, c]$ e estritamente côncava em $[c, c + \delta)$ ou vice-versa.

Exemplo. O ponto 0 é um ponto de inflexão da função $f(x) = x^3$ em qualquer intervalo aberto contendo 0. De fato, $f'(x) = 3x^2$ é estritamente decrescente em $(-\delta, 0]$ e estritamentemente crescente em $[0, \delta)$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Logo f é estritamente côncava em $(-\delta, 0]$ e estritamentemente convexa em $[0, \delta)$,

Exemplo. Se $f(x) = x^{2n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, então 0 é o único ponto de inflexão de f.

Proposição. Sejam I um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Se $c \in I$ é um ponto de inflexão de f, então $f''(c) = 0$.

Demonstração. Suponha por contradição que $f''(c) \neq 0$. Sem perda de generalidade, suponha que $f''(c) > 0$. Como f'' é contínua, o Teorema de Conservação de Sinal implica a existência de um intervalo $(c - \delta, c + \delta)$ onde f'' é positiva. Logo f' é estritamente crescente em $(c - \delta, c + \delta)$ e, portanto f é estritamente convexa em $(c - \delta, c + \delta)$, contrariando que c é um ponto de inflexão.

Observação. A recíproca desta proposição é falsa. Para ver isso, considere a função $f(x) = x^4$ definida num intervalo aberto contendo 0. Tem-se, $f''(0) = 0$, mas $c = 0$ não é ponto de inflexão. Na verdade, f é estritamente convexa pois $f'(x) = 4x^3$ é estritamente crescente.

Resumindo: Dada uma função f, os pontos c onde $f''(c) = 0$ ou não existe $f''(c)$ são candidatos a ponto de inflexão de f.

Exemplo. Se $f(x) = \sqrt[3]{x}$, então $f''(x) = -2x^{-5/2}/9 \neq 0$ para todo $x \neq 0$. Neste $f''(x) > 0$ para todo $x < 0$ e $f''(x) < 0$ para todo $x > 0$. Ainda que $f''(0)$ não exista, podemos afirmar que 0 é o único ponto de inflexão de f, pois f é estritamente convexa para $x < 0$ e estritamente côncava para $x > 0$.

A próxima proposição fornece uma informação adicional sobre pontos de inflexão.

Proposição. Sejam I um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^3. Se $c \in I$ é tal que $f''(c) = 0$ e $f^{(3)}(c) \neq 0$, então c é um ponto de inflexão de f.

Demonstração. Suponhamos que $f^{(3)}(c) > 0$. Como $f^{(3)}$ é contínua, o Teorema de Conservação de Sinal implica a existência de um intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ onde $f^{(3)}$ é positiva. Logo f'' é estritamente crescente em $(c-\delta, c+\delta)$. Da hipótese que $f''(c) = 0$ decorre então que $f''(x) < 0$ para $x \in (c-\delta, c)$ e $f''(x) > 0$ para $x \in (c, c+\delta)$. Assim, f é estritamente côncava em $(c-\delta, c)$ e estritamente convexa em $(c, c+\delta)$. Portanto c é um ponto de inflexão de f.

Exemplo. Um dos pontos de inflexão de $f(x) = \cos x$ é $x = \pi/2$. De fato,

$$f''(\pi/2) = -\cos(\pi/2) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(3)}(\pi/2) = \sin(\pi/2) = 1 \neq 0.$$

Portanto, segue desta última proposição que $\pi/2$ é um ponto de inflexão de f.

Exemplo. Para a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 30$, determine os intervalos onde f é convexa e os intervalos onde f é côncava. Liste todos os pontos de inflexão de f.

Resolução.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9, \quad f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2).$$

Intervalo	Sinal de $f''(x)$	Conclusão
$(-\infty, 2)$	$-$	f é côncava
$(2, \infty)$	$+$	f é convexa

$c = 2$ é o único ponto de inflexão de f.

Máximos e Mínimos

Teorema (Teste da derivada primeira). Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $[a, b] \subset A$, exceto eventualmente em um ponto $c \in (a, b)$, onde é contínua.

1. Se $f'(x) > 0$ para $x \in (a, c)$, e $f'(x) < 0$ para $x \in (c, b)$, então c é um ponto de máximo local de f.
2. Se $f'(x) < 0$ para $x \in (a, c)$, e $f'(x) > 0$ para $x \in (c, b)$, então c é um ponto de mínimo local de f.

Demonstração.

1. Pelo Corolário 1 do Teorema do Valor Médio, f é estritamente crescente em $[a, c]$ e estritamente decrescente em $[c, b]$. Assim, $f(x) < f(c)$ para $x \in [a, c)$ ou $x \in (c, b]$. Logo c é um ponto de máximo.

2. A demonstração do item 2 é análoga.

Exemplo. Se $f(x) = \sqrt{|x|}$, segue do item 2 que 0 é um ponto de mínimo de f. De fato, se $x < 0$, então $f(x) = \sqrt{-x}$ e a regra da cadeia implica $f'(x) = -1/[2\sqrt{-x}] < 0$. Se $x > 0$, então $f(x) = \sqrt{x}$ e $f'(x) = 1/[2\sqrt{x}] > 0$.

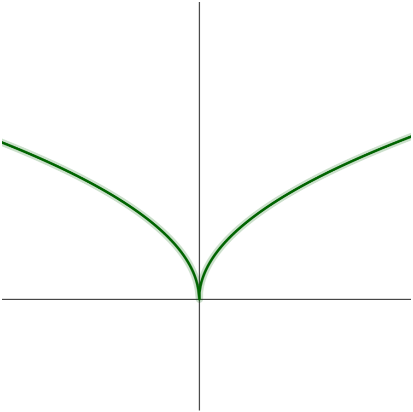


Figure: 13. $y = \sqrt{|x|}$

O teorema a seguir é o critério mais frequente no estudo de máximos e mínimos de funções de classe C^2.

Teorema (Teste da derivada segunda). Seja f uma função de classe C^2 num intervalo aberto (a, b). Seja $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

1. Se $f''(c) > 0$, então c é um ponto de mínimo local de f.
2. Se $f''(c) < 0$, então c é um ponto de máximo local de f.

Demonstração. Se $f''(c) > 0$, sendo f de classe C^2, a função f'' é contínua e, portanto o Teorema da Conservação do Sinal garante que f'' é positiva em $(c - \delta, c + \delta)$ para algum $\delta > 0$. Logo é convexa em $(c - \delta, c + \delta)$. Pela Proposição (Caracterização das funções convexas),

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c) = f(c) \quad \forall\, x \in (c - \delta, c + \delta),$$

implicando que c é um ponto de mínimo local de f e a prova do item 1 está competa. A prova do item 2 é análoga.

Exemplo 1. Temos agora os elementos necessários para justificar a descrição do gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x$ dada no Exemplo 1 de Máximos e Mínimos Relativos. Veja Figura 14.

Como f é de classe C^2 em $\mathbb{R}$ e $x = \pm 1$ são as raízes de $f'(x) = 3x^2 - 3$, concluímos que $c = \pm 1$ são os únicos pontos críticos de f. Além disso, $f''(1) = 6 > 0$ e $f''(-1) = -6 < 0$. Pelo teste da derivada segunda, o ponto -1 é máximo local e 1 é um ponto mínimo local de f. Os valores extremos são $f(-1) = 2$ e $f(-1) = -2$. Notemos que $f''(x) = 6x = 0$ se e somente se $x = 0$. Como $f''(x) < 0$ para $x < 0$ e $f''(x) > 0$ para $x > 0$, f é estritamente côncava em $(-\infty, 0)$ e estritamente convexa em $(0, \infty)$ e portanto $x = 0$ é o único ponto de inflexão de f.

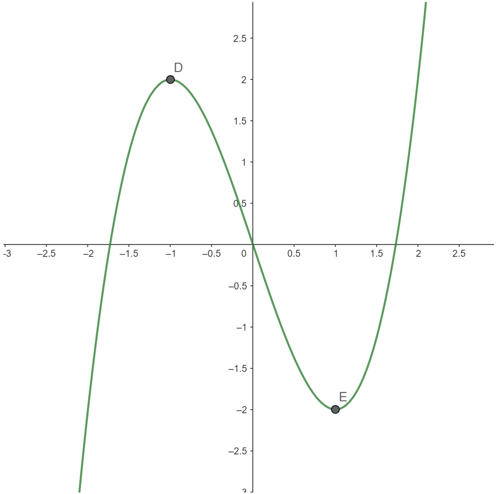


Figure: 14. $f'(1) = 0,\ f''(1) > 0,\ f'(-1) = 0,\ f''(-1) < 0$

Exemplo 2. A orla marítima de uma região é retilínea e tem a direção norte e sul. Um homem está np mar, num barco em frente a um ponto O da praia, a dois quilômetros de O. Sabe-se que sua velocidade remando é $3/5$ de sua sua velocidade correndo. Se ele deseja ir a um ponto, seis quilômetros ao norte de O, determine a trajetória a ser seguida para fazê-lo em tempo mínimo.

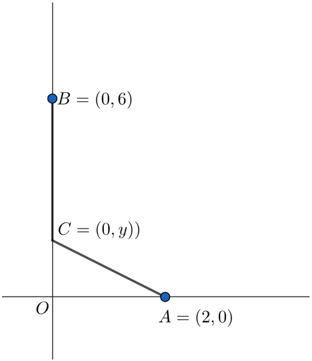


Figure: 15.

Resolução. Como o problema não depende do valor das velocidades, mas da razão entre elas, podemos supor que a velocidade do homem correndo é $v = 1$. Logo sua velocidade remando é $3/5$. Pela Figura 15, o tempo T_{AC} para ir do ponto $A = (2, 0)$ ao ponto $C = (0, y)$ satisfaz a equação

$$\frac{3}{5} T_{AC} = \sqrt{2^2 + y^2}$$

e o tempo para ir do ponto de C ao ponto desejado $B = (0, 6)$ satisfaz

$$T_{CB} = 6 - y.$$

Portanto o tempo gasto no percurso é

$$T(y) = T_{AC} + T_{CB} = \frac{5}{3}\sqrt{2^2 + y^2} + 6 - y, \quad y \in [0, 6],$$

e o problema é determinar os pontos de mínimo da função T. Como T é contínua e $[0, 6]$ é fechado e limitado, o Teorema de Weiestrass garante a existência dos pontos de mínimo da função T, resta apenas localizá-los.

Como o Teste da derivada segunda só se aplicada para intervalos abertos, consideremos $y \in (0,6)$ e deixemos para analisar os casos $y = 0$ e $y = 6$ separadamente. Sendo

$$T'(y) = \frac{5y}{3\sqrt{4+y^2}} - 1,$$

$$T'(y) = 0 \iff 5y = 3\sqrt{4+y^2}.$$

A unica raiz dessa equação é $\overline{y} = 3/2$.Como para todo y,

$$T''(y) = \frac{5}{3\sqrt{4+y^2}}\left(1 - \frac{y^2}{4+y^2}\right) > 0,$$

concluímos que $\overline{y} = 3/2$ é o único ponto de mínimo em $(0,6)$ e o correspondente valor é $T(3/2) = 26/3$.
Como $T(0) = 28/3 > T(3/2)$ e $T(6) = 10\sqrt{10}/3 > 10 > T(3/2)$, temos que $\overline{y} = 3/2$ é o único ponto de mínimo em $[0,6]$. Assim, a trajetória procurada é a indicada na Figura 15 com C a $3/2$ quilômetros ao norte do ponto O.

Exemplo 3. Determine o triângulo isósceles de área máxima inscrito em uma circunferência de raio R.

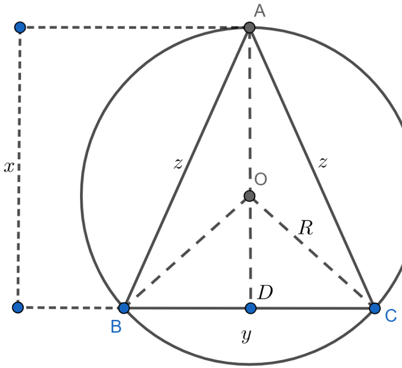


Figure: 16.

Resolução. Consideremos um trângulo isósceles ABC inscrito numa circunferência de raio R e centro O. A área do triângulo é $A = xy$, onde $x \in (0, 2R]$ e $y \in (0, 2R]$. Do triângulo retângulo ODC, temos

$$(x - R)^2 + (y/2)^2 = R^2,$$

portanto $y = 2\sqrt{2Rx - x^2}$. Assim,

$$A(x) = x\sqrt{2Rx - x^2}, \quad x \in (0, 2R),$$

Para se obter a área máxima impõe-se

$$A'(x) = \frac{3Rx - 2x^2}{\sqrt{2Rx - 2x^2}} = \frac{(3R - 2x)x}{\sqrt{2Rx - x^2}}.$$

Ou seja, $x = 3R/2$ é o único ponto crítico de A em $(0, 2R)$. Como $A'(x) < 0$ em $(0, 3R/2)$ e $A'(x) > 0$ em $(3R/2, 2R)$, pelo Teste da derivada primeira, $x = 3R/2$ é ponto de máximo. Sua área é $A(3R/2) = 3\sqrt{3}R^2/4$. Substituindo $x = 3R/2$, a base do triângulo $y = \sqrt{3}R$ e pelo Teorema de Pitágoras, $z = \sqrt{3}R$. Portanto, o triângulo procurado é equilátero.

Esboço do gráfico de funções

- O estudo do sinal da derivada de uma função permite determinar os intervalos onde ela é decrescente ou decrescente.
- O sinal da derivada segunda determina onde ela é convexa ou côncava epor consequência pode definir seus pontos de inflexão.
- A existência dos limites em $\pm\infty$ determina assíntotas horizontais e os limites infinitos caracterizam comportamentos especiais da função.
- Se, além disso, conhecermos as raízes, os pontos extremos e os valores extremos da função, temos um conjunto de informação que em geral permitem fazer um bom esboço do gráfico da função.

Exemplo 1. Esboce o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

(a) f é ímpar, portanto, basta analisar para $x \in [0, \infty)$.

(b) f é contínua em $(0, \infty)$ e positiva em $[0, \infty)$.

(c) $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, portanto, $f'(x) > 0$ para $x \in (0, 1)$ e $f'(x) < 0$ para $x \in (1, \infty)$. Assim, f é crescente em $(0, 1)$ e decrescente em $(1, \infty)$. Pelo teste da derivada primeira, $x = 1$ é um ponto de máximo global e $f(1) = 1/2$ é um valor máximo.

(d) Como $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$, a reta diagonal $y = x$ é tangente ao gráfico de f no ponto $(0, f(0))$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$, logo a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal.

(f) $f''(x) = \dfrac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$, portanto, $f''(\sqrt{3}) = 0$, $f''(x) < 0$ para $x \in (0, \sqrt{3})$ e $f''(x) > 0$ para $x \in (\sqrt{3}, \infty)$. Assim, $x = \sqrt{3}$ é um ponto de inflexão, sendo f é côncava em $(0, \sqrt{3})$ e convexa em $(\sqrt{3}, \infty)$. O ponto $x = 0$ também é um ponto de inflexão porque f é ímpar.

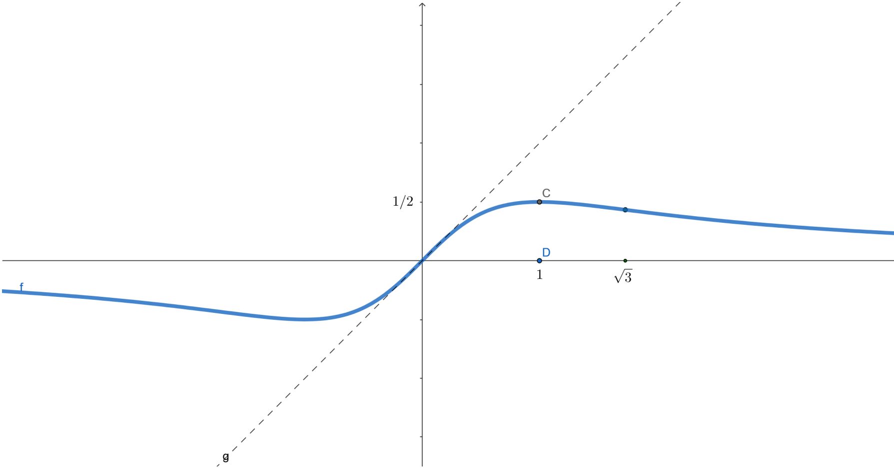


Figure: 17. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Exemplo 1. Esboce o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

(a) f é ímpar, portanto, basta analisar para $x \in [0, \infty)$.

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = -\infty$ e $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \infty$, portanto $x = 1$ é uma assíntota vertical.

(c) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \infty$.

(d) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$, portanto, $f'(x) > 0$ para $x \in (\sqrt{3}, \infty)$ e $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$. Assim, f é decrescente em $(0, 1) \cup (1, \sqrt{3})$ e crescente em $(\sqrt{3}, \infty)$. Pelo teste da derivada primeira, $x = \sqrt{3}$ é um ponto de mínimo relativo.

(e) $f''(x) = \dfrac{2x(9 - x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2 - 1)^7}}$, portanto, $f''(x) < 0$ para $x \in (0, 1) \cup (3, \infty)$ e $f''(x) > 0$ para $x \in (1, 3)$. Assim, $x = 1$ e $x = 3$ são pontos de inflexão, sendo f é côncava em $(0, 1) \cup (3, \infty)$ e convexa em $(1, 3)$. O ponto $x = 0$ também é um ponto de inflexão porque f é ímpar.

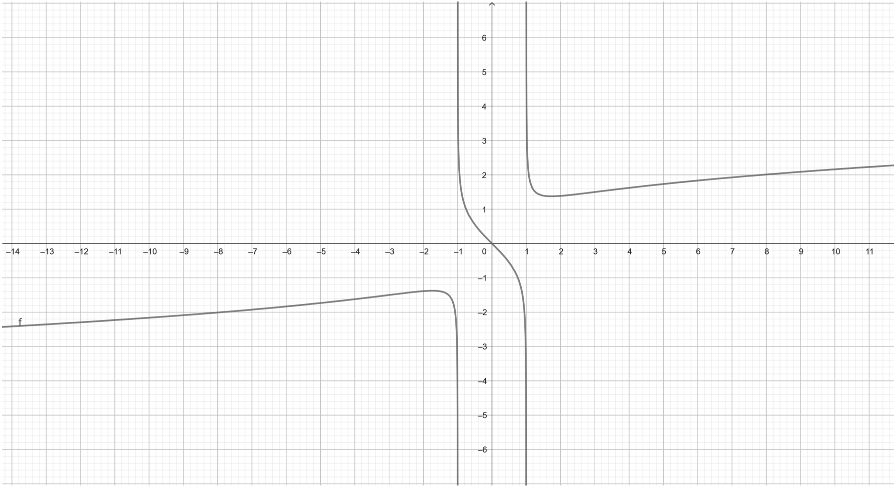
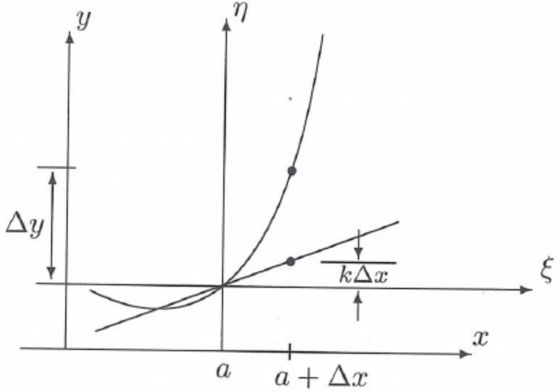


Figure: 18. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$. Que aspecto geométrico relevante esse desenho preciso esconde?

Aproximação Linear e Diferencial

Questão. Dada uma função $f : I \to \mathbb{R}$ definida num intervalo aberto I e diferenciável num ponto $a \in I$, determinar a melhor aproximação linear de f numa vizinhança de a.

Solução.



Uma condição necessária para uma função linear L seja uma aproximação de f numa vizinhaça de a é que $L(a) = f(a)$. Assim, $L(x) = f(a) + k(x - a)$, onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Um incremento Δx da variável x em a produz um incremento Δy da variável y em $f(a)$. Assim, nosso procedimento consiste em aproximar $f(a + \Delta x)$ por $L(a + \Delta x) = f(a) + k\Delta x$.

Ao fazer essa aproximação, o erro absoluto E é

$$E = |f(a + \Delta x) - (f(a) + k\Delta x)|$$

A melhor aproximação linear $L(x) = f(a) + k(x - a)$ na vizinhança de a é a que produz o menor erro relativo:

$$E_r := \frac{E}{|\Delta x|},$$

para Δx pequeno.

Ou seja, é a que produz um erro relativo E_r que tende para zero quando Δx tende para zero,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{E}{|\Delta x|} = 0 \iff \lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{f(a+\Delta x) - (f(a) + k\Delta x)}{\Delta x} \right| = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} - k \right| = 0.$$

Assim,

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a).$$

Em outras palavras, a melhor aproximação linear de f numa vizinhança de a é $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$. Assim, a melhor aproximação linear produz a melhor aproximação

$$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a) \approx f'(a)\Delta x.$$

Diferencial

Definição. A diferencial de f em a é a função linear $df(a)$ definida por $df(a)(\Delta x) = f'(a)\Delta x$. Indicando por dy o incremento de y calculado pela diferencial, temos

$$dy = f'(a)\Delta x.$$

Denotando o incremento Δx por dx, tem-se

$$dy = f'(a)dx.$$

Dessa forma, o incremento $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ é aproximando pelo incremento linear dy, isto é,

$$f(a + dx) \approx f(a) + f'(a)dx.$$

A Figura 20 corresponde à Figura 19 com a melhor aproximação, a diferencial de f em a no lugar da função kdx.

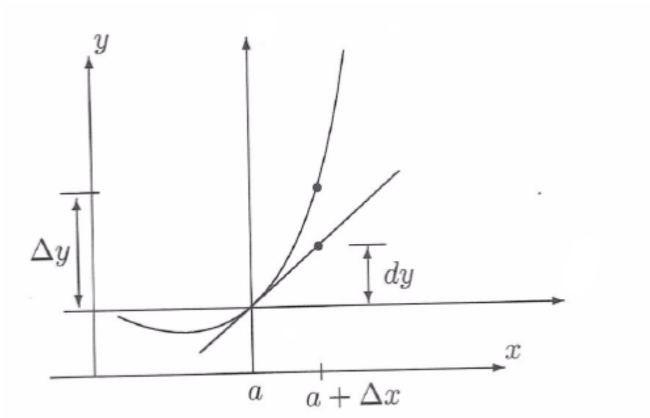


Figure: 20. A diferencial $dy = f'(a)dx$

Exemplo 1. Seja $y = x^2$. Relacione Δy com dy.

Resolução.

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^2\right)^2 = 2x.$$

A diferencial de $y = x^2$ é

$$dy = 2xdx.$$

Por outro lado,

$$\Delta y = (y + dx)^2 - x^2 = 2xdx - (dx)^2.$$

Portanto

$$\Delta y - dy = (dx)^2.$$

Observe que, quanto menor for dx, mais próximo está dy de Δy.

Exemplo 2. O volume de uma esfera de raio x é $V(x) = 4\pi x^3/3$. Estimemos o volume da esfera de raio $12,05$ cm considerando-se em torno de $x = 12$ cm, tomando $dx = 0,05$ cm como incremento.

Resolução. Usaremos a aproximação linear

$$V(12,05) \approx V(12) + V'(12)dx.$$

Sendo $V'(x) = 4\pi x^2$ e $dx = 0,05$, temos

$$V(12,05) \approx V(12) + V'(12)dx = 4\pi(12)^3/3 + 4\pi(12)^2(0,05).$$

Ou seja, $V(12,05) \approx 2332,8\pi$ cm^3.

Exemplo 3. Uma caixa cúbica tem a aresta de $x = 4cm$, com erro máximo de $0,05$ cm. Estimemos o erro máximo no volume V da caixa.

Resolução. Usaremos a aproximação $\Delta V \approx dV$. Sendo $V(x) = x^3$, onde x é a medida da aresta, $dV = V'(x)dX$ para $x = 4$ e $dx = \pm 0,05$. Ou seja,

$$\Delta V \approx dV = V'(4)(\pm 0,05) = 3(4)2(\pm 0,05) = \pm 2,4.$$

Portanto $E \approx |dV| = 2,4$ cm^3 é o erro máximo no volume.

COMENTÁRIO. Embora o erro possa parecer muito grande, uma ideia melhor é dada pelo erro relativo:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{3x^2 dx}{x^3} = 3\frac{dx}{x},$$

ou seja o erro relativo no volume é cercade três vezes o erro relativo na aresta. No exemplo, o erro relativo na aresta é $dx/x = 0,05/4 = 0,0125$ e produz um erro relativo de cerca de $0,0375$ no volume. Os erros em termos percentuais são de $1,25\%$ na aresta e $3,75\%$ no volume.

Exemplo 4. Quando o sangue flui ao longo de uma vaso sanguíneo, o fluxo F (o volume de sangue por unidade de tempo passando por um dado ponto) é proporcional à quarta potência do raio r do vaso:

$$F = kr^4.$$

Isso é conhecido como a Lei de Poiseuille (1830). Uma artéria parcialmente obstruída pode ser alargada por uma operação chamada angioplastia, na qual um cateter do tipo balão é inflado dentro da artéria a fim de aumentá-la e restaurar o fluxo normal do sangue. Mostre que a variação relativa em F é quatro vezes a variação relativa em r. Como um aumento de 5% no raio afeta o fluxo de sangue?

Solução. As diferenciais de r e F estão relacionadas pela equação $dF = F'(r)dr = 4kr^3dr$. A variação relativa em F é aproximadamente

$$\frac{dF}{F} = \frac{4kr^3dr}{kr^4} = 4\frac{dr}{r}.$$

Assim, um aumento de 5% no raio resultará em 20% de aumento no fluxo.

Fórmula de Taylor

Se f é diferenciável em a, a diferencial de f em a fornece uma aproximação por um polinômio de ordem 1 em $x - a$ dado por

$$\boxed{P_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

com

$$P_1(a) = f(a), \quad P_1'(a) = f'(a),$$

mas $P_1''(a) = 0$ e, em geral, não coincide com $f''(a)$, quando esta existe.

Se f for diferenciável até ordem 2 em a, podemos aproximar f por um polinômio de ordem 2 em $x - a$ tal que

$$P_2(a) = f(a), \quad P_2'(a) = f'(a), \quad P_2''(a) = f''(a).$$

Impondo essas considerações a

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - 2)^2,$$

concluímos que P_2 é

$$\boxed{P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x - a)^2}$$

Em geral, para qualquer $n = 1, 2, 3, \ldots$, se f tiver todas as derivadas até ordem n em a, o polinômio em $x - a$, de ordem n, coincidindo com f em a, juntamente com suas derivadas até ordem n é da forma

$$\boxed{P_n(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n}$$

O polinômio P_n, $n = 1, 2, \ldots$, é chamado Polinômio de Taylor de ordem n de f em torno de a.

Exemplo 1. Encontre os polinômios de Taylor de $f(x) = \cos x$ em torno de 0.

O cosseno e suas derivadas são

$$\begin{array}{ll} f(x) = \cos x & f^{(1)}(x) = -\sin x \\ f^{(2)}(x) = -\cos x & f^{(3)}(x) = \sin x \\ f^{(4)}(x) = \cos x & f^{(5)}(x) = -\sin x \\ \vdots & \vdots \\ f^{(2n)}(x) = (-1)^n \cos x & f^{(2n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \sin x \end{array}$$

Em $x = 0$, os cossenos são 1 e os senos são 0, assim

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n, \qquad f^{(2n+1)}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Como $f^{(2n+1)}(0) = 0$, os polinômios de Taylor de ordem $2n$ e $2n+1$ são idênticos:

$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

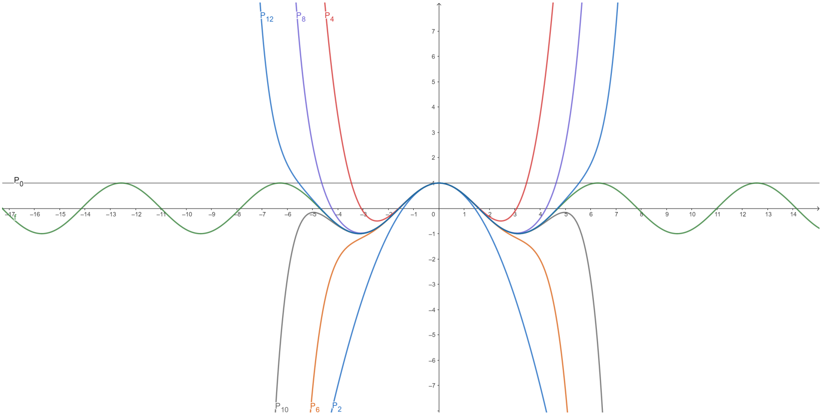


Figure: 21. Polinômios de Taylor de $f(x) = \cos x$

Sejam $f \in C^{n+1}$ num intervalo aberto I e $a \in I$. Ao aproximarmos f por seu polinômio de Taylor P_n, o correspondente erro $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$, para x numa vizinhança $V(a)$ de a satisfaz

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x).$$

Vamos estimar $E_n(x)$. Temos $E_n \in C^{n+1}$ e para $x \in V(a)$, temos

$$E_n(a) = E_n'(a) = \cdots = E_n^{(n)}(a) = 0 \quad \text{e} \quad E_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

Definindo $h(x) = (x-a)^{n+1}$, observamos

$$h(a) = h'(a) = \cdots = h^{(n)}(a) = 0 \quad \text{e} \quad h^{(n+1)}(x) = (n+1)!.$$

Como $E_n(a) = h(a) = 0$, temos

$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E_n(x) - E_n(a)}{h(x) - h(a)}, \quad x \neq a,$$

e pelo Teorema de Cauchy, existe σ_1 entre x e a tal que

$$[E_n(x) - E_n(a)]\, h'(\sigma_1) = [h(x) - h(a)]\, E_n'(\sigma_1).$$

Portanto,
$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E_n'(\sigma_1)}{h'(\sigma_1)}.$$
Como $E_n'(a) = h'(a) = 0$, temos
$$\frac{E_n'(\sigma_1)}{h'(\sigma_1)} = \frac{E_n'(\sigma_1) - E_n'(a)}{h'(\sigma_1) - h'(a)}.$$
Pelo Teorema de Cauchy, existe σ_2 entre σ_1 e a, logo entre x e a, tal que
$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E_n''(\sigma_2)}{h''(\sigma_2)}.$$
Procedendo assim sucessivamente chegamos por fim à existência de um σ entre x e a tal que
$$\frac{E_n(x)}{h(x)} = \frac{E_n^{(n+1)}(\sigma)}{h^{(n+1)}(\sigma)}.$$

Substituindo

$$h(x) = (x-a)^{n+1}, \quad h^{(n+1)}(x) = (n+1, \; E_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x),$$

obtemos

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\sigma)(x-a)^{n+1}.$$

Como $V(a)$ é aberto e $a \in V(a)$, existe $\delta > 0$ tal que $J = [a-\delta, a+\delta] \subset V(a)$. Como $f^{(n+1)}$ é contínua e J é um intervalo fechado e limitado, pelo Teorema de Weierstrass existe uma constante L_n tal que $|f^{(n+1)}(x)| \leq L_n$ para todo $x \in J$. Assim,

$$|E_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} L_n |x-a|^{n+1},$$

portanto,

$$\lim_{x \to a} \frac{E_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

O significado desse limite é que o erro $E_n(x)$ tende a zero quando $x \to a$ mais rapidamente que $(x-a)^n$.

Fórmula de Taylor

A discussão precedente é a demonstração do seguinte teorema:

Teorema (Fórmula de Taylor). Suponhamos que $f : I \to \mathbb{R}$ seja uma função de C^{n+1} num intervalo aberto I e seja $a \in I$. Então existe uma vizinha V de a tal que, para todo $x \in V$,

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x), \tag{11}$$

onde

$$P_n(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

e

$$E_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\sigma)(x-a)^{n+1}$$

para algum σ entre x e a.

A identidade (11) é conhecida como Fórmula de Taylor com resto de Lagrange, e $E_n(x)$ é chamado de resto de Lagrange.

Exemplo 2. Vamos estimar $\cos 61^\circ$ usando o polinômio de Taylor de $f(x) = \cos x$ de ordem 2 em torno de $\pi/3$.

Sendo $f(x) = \cos x$, temos

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},$$

o polinômio da Taylor P_2 em torno de $\pi/3$ é

$$P_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{(1/2)}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2.$$

Fazendo $x = \pi/3 + \pi/180$, que corresponde a 61°, obtemos a estimativa

$$\cos 61^\circ \approx P_2(\pi/3+\pi/180) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \approx 0,48480.$$

Além disso, como $f^{(3)}(x) = \sin x$, o resto de Lagrande é

$$E(x) = \frac{1}{3!}\sin(\sigma)\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3,$$

para algum σ entre $\pi/3$ e $\pi/3 + \pi/180$. Como $x = \pi/3 + \pi/180$ e $|\sin\sigma| \leq 1$, temos a seguinte estimativa do erro de Lagrange:

$$|E(61^\circ)| \leq \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 < 10^{-6}.$$

Portanto, $\cos 61^\circ \approx 0,48480$, com precisão de cinco casas decimais.