Transformações Geométricas

Visão Computacional em Robótica (BLU3040)

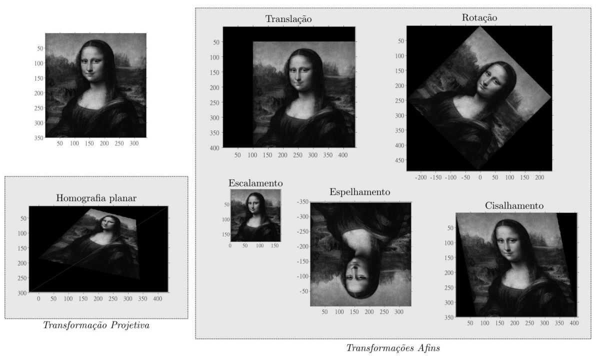
Prof. Marcos Matsuo (marcos.matsuo@ufsc.br)

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

1. Transformações Geométricas
   - Mapeamento direto
   - Mapeamento inverso
   - Interpolação
2. Coordenadas Homogêneas
3. Transformações Geométricas Afins
   - Escalamento
   - Translação
   - Rotação
   - Cisalhamento
   - Espelhamento
   - Composição de transformações
4. Transformação projetiva
   - Homografia planar

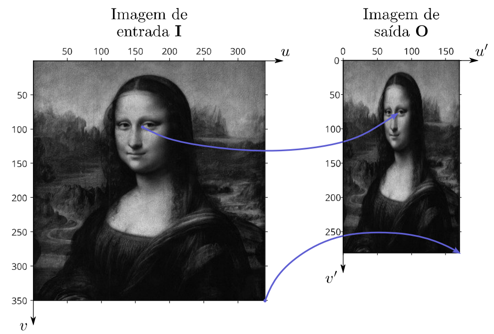
Transformações Geométricas

Exemplos de transformações geométricas



Transformações Geométricas

De forma simplificada, uma **transformação geométrica** consiste em mapear os pixels com coordenada (v, u) de uma imagem de entrada $\mathbf{I}$ para uma outra coordenada (v', u') em uma imagem de saída $\mathbf{O}$.



Transformações Geométricas

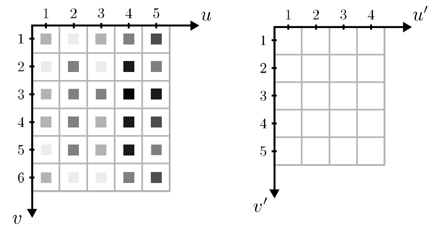
Etapas básicas de uma transformação geométrica:

1. **Mapeamento**
   - mapeamento direto;
   - mapeamento inverso.
2. **Interpolação**
   - média;
   - bilinear;
   - bicúbica.

1. Transformações Geométricas
   - Mapeamento direto
   - Mapeamento inverso
   - Interpolação
2. Coordenadas Homogêneas
3. Transformações Geométricas Afins
   - Escalamento
   - Translação
   - Rotação
   - Cisalhamento
   - Espelhamento
   - Composição de transformações
4. Transformação projetiva
   - Homografia planar

Mapeamento direto
Transformações Geométricas

Considere um caso onde deseja-se **reduzir** as dimensões de uma imagem de entrada $\mathbf{I}$ de 6 linhas e 5 colunas para uma imagem de saída $\mathbf{O}$ com 5 linhas e 4 colunas.



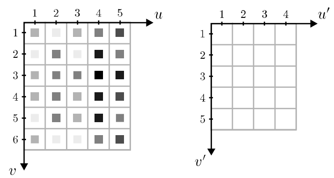
Transformação geométrica de **escalamento**.

Mapeamento direto
Transformações Geométricas

É necessário obter equações para **mapear** as coordenadas (v, u) da imagem de entrada para novas posições (v', u') na imagem de saída. (Mapeamento Direto)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$$

Para o exemplo em questão,



$$u' = \frac{4}{5}u$$

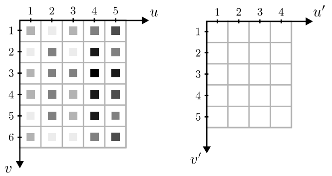
$$v' = \frac{5}{6}v$$

Mapeamento direto
Transformações Geométricas

É necessário obter equações para **mapear** as coordenadas (v, u) da imagem de entrada para novas posições (v', u') na imagem de saída. (Mapeamento Direto)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$$

Para o exemplo em questão,



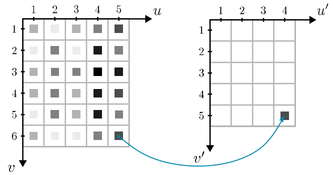
$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} (4/5) & 0 \\ 0 & (5/6) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{A}$ é conhecida como **matriz de mapeamento** ou **transformação**.

Mapeamento direto
Transformações Geométricas

Verificação

- Mapeamento da coordenada $(v, u) = (6, 5)$.

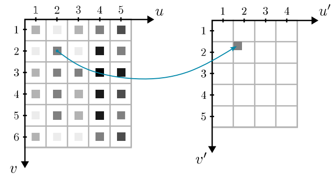


$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4/5) & 0 \\ 0 & (5/6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Mapeamento direto
Transformações Geométricas

Verificação

- Mapeamento da coordenada $(v, u) = (2, 2)$.



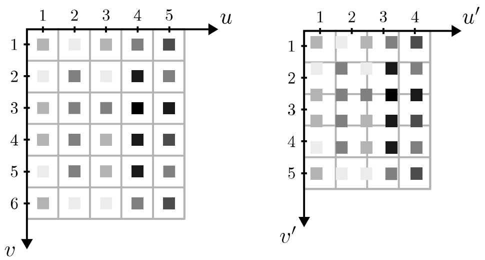
$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4/5) & 0 \\ 0 & (5/6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1,6 \\ 1,67 \end{bmatrix}$$

Não é coordenada válida para a imagem de saída!

O que fazer nesses casos?

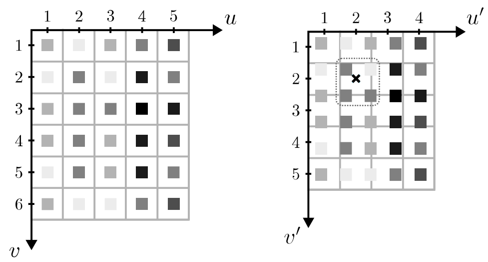
Mapeamento direto
Transformações Geométricas

Em geral, os pixels da imagem de entrada **não** são mapeados para coordenadas válidas na imagem de saída.



Mapeamento direto
Transformações Geométricas

Após o mapeamento de **todos** os pixel da imagem de entrada, realiza-se um procedimento de **interpolação** para determinar os valores de cada pixel na imagem de saída.



Mapeamento direto
Transformações Geométricas

- Na abordagem de **mapeamento direto** é necessário primeiro mapear todos os pixels da imagem de entrada, para depois realizar a interpolação.
- A implementação dessa abordagem não é muito simples na prática!
- Uma abordagem mais simples é o **mapeamento inverso**.

Mapeamento inverso
Transformações Geométricas

Mapeamento inverso

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$$

Partindo do mapeamento direto,

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Multiplicando ambos os lados pela inversa da matriz de transformação,

$$\mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Utilizando a relação $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, obtemos

$$\mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Portanto,

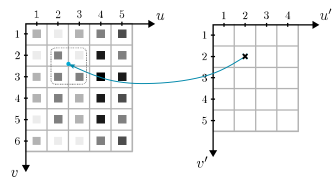
$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$$

Mapeamento inverso
Transformações Geométricas

Para o exemplo em questão, temos

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5/4) & 0 \\ 0 & (6/5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$$

- Mapeamento da coordenada $(v', u') = (2, 2)$



$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5/4) & 0 \\ 0 & (6/5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 2,4 \end{bmatrix}$$

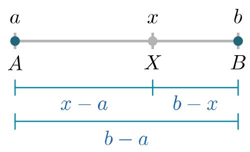
A identificação dos pixels vizinhos na imagem de entrada pode ser facilmente realizada!

Interpolação
Transformações Geométricas

Após o **mapeamento**, deve-se definir um valor de intensidade para o pixel de coordenada (v', u') na imagem de saída.

Dentre as diversas abordagens existentes, uma muito utilizada é a **interpolação bilinear**.

Considere o caso mais simples mostrado abaixo,



Assuma dois pontos em um linha reta com coordenadas a e b, e que esses pontos têm valores A e B associados.

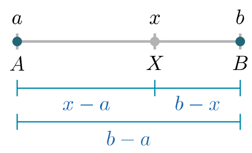
Se tivermos um terceiro ponto com coordenada x (onde $a \leq x \leq b$), qual deve ser o valor X associado?

Interpolação
Transformações Geométricas

Após o **mapeamento**, deve-se definir um valor de intensidade para o pixel de coordenada (v', u') na imagem de saída.

Dentre as diversas abordagens existentes, uma muito utilizada é a **interpolação bilinear**.

Considere o caso mais simples mostrado abaixo,



Realizando uma interpolação linear,

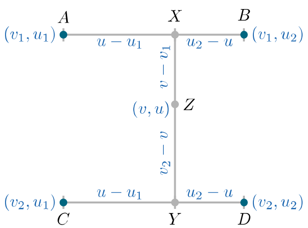
$$X = \frac{b-x}{b-a}A + \frac{x-a}{b-a}B$$

O valor de X é calculado como uma média ponderada entre os valores A e B.

Interpolação
Transformações Geométricas

Agora, assuma que possuímos quatro pontos com coordenadas (v_1, u_1), (v_1, u_2), (v_2, u_1) e (v_2, u_2) com valores A, B, C e D.

Considere um ponto com coordenadas (v, u). Como podemos determinar o valor Z desse ponto? **(Interpolação Bilinear)**



$$X = \frac{u_2-u}{u_2-u_1}A + \frac{u-u_1}{u_2-u_1}B$$

$$Y = \frac{u_2-u}{u_2-u_1}C + \frac{u-u_1}{u_2-u_1}D$$

e

$$Z = \frac{v_2-v}{v_2-v_1}X + \frac{v-v_1}{v_2-v_1}Y$$

Transformações Geométricas

Procedimento para realização de uma **Transformação Geométrica**:

1. Obter a matriz de mapeamento $\mathbf{A}$;
2. Calcular a matriz de mapeamento inversa $\mathbf{A}^{-1}$;
3. Para cada pixel (v', u') da imagem de saída:
   - 3.1 Calcular a coordenada (v, u) correspondente na imagem de entrada;
   - 3.2 Encontrar os pixels vizinhos;
   - 3.3 Realizar a interpolação e atribuir o valor calculado para pixel (v', u') da imagem de saída.

Exercício 1: escalamento de imagem

Enunciado: crie no Matlab uma função para realizar a alteração de escala de uma imagem.

Argumentos de entrada:

- $\mathbf{I}$: imagem de entrada em escala de cinza (do tipo `double`);
- M: número de linhas da imagem da saída;
- N: número de colunas da imagem de saída;

Argumento de saída:

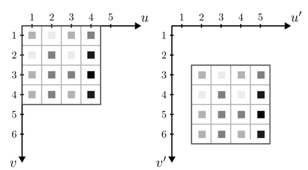
- $\mathbf{O}$: imagem de saída transformada (matriz de dimensão $M \times N$);

Coordenadas Homogêneas

Nos slides anteriores as **equações de mapeamento** foram apresentadas utilizando **coordenadas cartesianas** (v, u) ou (v', u').

Entretanto, para representação de **transformações geométricas** é comum se utilizar **coordenadas homogêneas**.

Para entender um dos motivos disso, considere a transformação geométrica de translação mostrada abaixo.



Equações de mapeamento:

$$u' = u + 1$$
$$v' = v + 2$$

Não é possível representar essas equações no formato matricial utilizando as coordenadas cartesianas (v, u) e (v', u').

Coordenadas Homogêneas

Considere um ponto $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ expresso em **coordenadas cartesianas** como

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

O mesmo ponto $\mathbf{p}$ pode ser expresso em **coordenadas homogêneas** como

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \alpha u \\ \alpha v \\ \alpha \end{bmatrix}$$

onde dizemos que $\tilde{\mathbf{p}} \in \mathbb{P}^2$.

Exercício 1: Coordenadas homogêneas

Enunciado: Para o ponto

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\in \mathbb{R}^2$ obtenha três representações no $\mathbb{P}^2$ (utilizando coordenandas homogêneas).

Coordenadas Homogêneas

Considere um ponto $\tilde{\mathbf{p}} \in \mathbb{P}^2$, expresso em **coordenadas homogêneas**),

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{bmatrix}$$

O mesmo ponto ponde ser expresso em **coordenadas cartesianas** como

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \tilde{u}/\tilde{w} \\ \tilde{v}/\tilde{w} \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$.

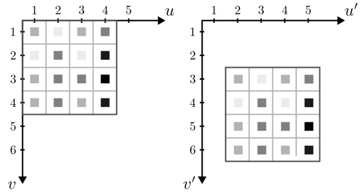
Exercício 2: Coordenadas homogêneas

Enunciado: para os pontos listados abaixo pertencentes ao $\mathbb{P}^2$, obtenha a correspondente representação no $\mathbb{R}^2$.

$$\text{a) } \tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} \qquad \text{b) } \tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

Para o exemplo, da transformação geométrica de **translação**



Equações de mapeamento:

$$u' = u + 1$$

$$v' = v + 2$$

Utilizando **coordenadas homogêneas**

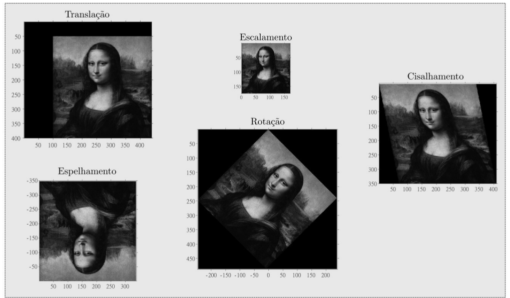
$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

Note que utilizando **coordenadas homogêneas** é possível representar o mapeamento da transformação geométrica de translação através de uma **equação matricial**.

Transformações Geométricas Afins

Nas **transformações geométricas afins**:

- Retas são mapeadas em retas;
- Retas paralelas permanecem paralelas após a transformação.



Transformações Geométricas Afins

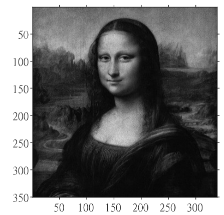
A **equação de mapeamento** de uma **transformação geométrica afim** possui o seguinte formato:

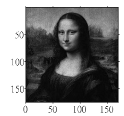
$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde a transformação geométrica realizada depende dos valores dos elementos a_{ij} da matriz de mapeamento $\mathbf{A}$.

Escalemento

Transformações Geométricas Afins





Equações de mapeamento:

Coordenadas cartesianas

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_u & 0 \\ 0 & s_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

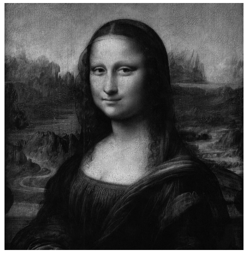
Coordenadas homogêneas

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_u & 0 & 0 \\ 0 & s_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde s_u e s_v são os **fatores** de alteração de escala largura e altura, respectivamente.

Exemplo 1: Escalamento
Transformações Geométricas Afins

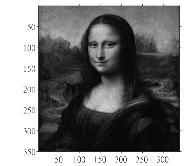
Enunciado: crie um código no Matlab para alterar as dimensões da imagem `Monalisa2.png` (mostrada abaixo e disponível no Moodle). Aumente a largura da imagem em 50% e reduza sua altura pela metade.

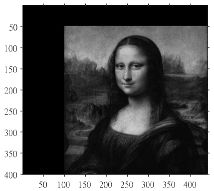


Exemplo 1: Escalamento
Transformações Geométricas Afins

```
I = imread('monalisa2.png');

% Fatores de alteração de escala
ru = 1.5;
rv = 0.5;

% Matriz de transformação
A = [ru 0 0; 0 rv 0; 0 0 1];

% Aplicação da transformação
tform = affine2d(A.');
[I2, ref] = imwarp(I,tform);

figure;
imshow(I2, ref);
axis on;
```


Translação
Transformações Geométricas Afins





Equações de mapeamento:

Coordenadas cartesianas

$$u' = u + u_o$$

$$v' = v + v_o$$

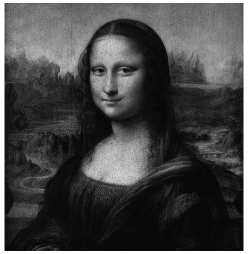
Coordenadas homogêneas

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u_0 \\ 0 & 1 & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde u_0 e v_0 são os valores de deslocamento no eixo horizontal e vertical, respectivamente.

Exemplo 2: Translação
Transformações Geométricas Afins

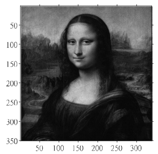
Enunciado: crie um código no Matlab para transladar a imagem `Monalisa2.png` (mostrada abaixo e disponível no Moodle). Desloque a imagem 50 pixels no eixo horizontal e 100 pixels no eixo vertical.

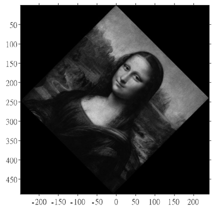


Exemplo 2: Translação
Transformações Geométricas Afins

```
I = imread('monalisa2.png');

% Translação
u0 = 50;
v0 = 100;

A = [1, 0, u0; 0, 1, v0; 0, 0, 1];
tform = affine2d(A.');
[I2, ref] = imwarp(I, tform);

figure; imshow(I2, ref);

ref.XWorldLimits(1) = ref.XWorldLimits(1) - u0;
ref.YWorldLimits(1) = ref.YWorldLimits(1) - v0;
[I3, ref] = imwarp(I, tform, 'OutputView', ref);

figure; imshow(I3, ref);
```


Rotação
Transformações Geométricas Afins





Equações de mapeamento:

Coordenadas cartesianas

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

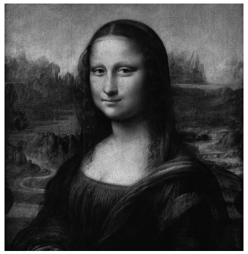
Coordenadas homogêneas

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

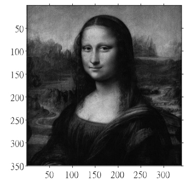
onde θ denota o ângulo de rotação.

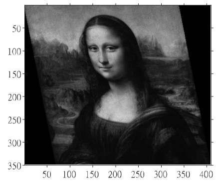
Exercício 2: Rotação
Transformações Geométricas Afins

Enunciado: crie um código no Matlab para rotacionar a imagem `Monalisa2.png` (mostrada abaixo e disponível no Moodle), em um ângulo de 45.



Cisalhamento





Equações de mapeamento:

Coordenadas cartesianas

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_u \\ s_v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

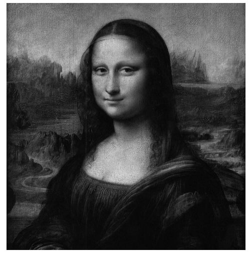
Coordenadas homogêneas

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_u & 0 \\ s_v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

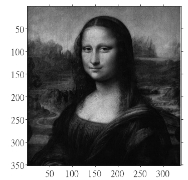
onde s_u e s_v são, respectivamente, os parâmetros relacionados com a distorção horizontal e vertical da imagem.

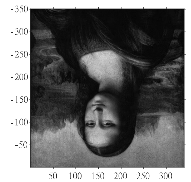
Exercício 2: Cisalhamento

Enunciado: crie um código no Matlab para distorcer a imagem `Monalisa2.png` (mostrada abaixo e disponível no Moodle), conforme um efeito de cisalhamento. Utilize $s_u = 0$ e $s_v = 20$.



Espelhamento vertical





Equações de mapeamento:

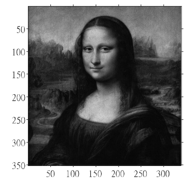
Coordenadas cartesianas

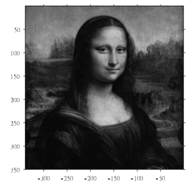
$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Coordenadas homogêneas

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

Espelhamento horizontal





Equações de mapeamento:

Coordenadas cartesianas

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

Coordenadas homogêneas

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

Composição de transformações

É possível realizar uma **sequência** de transformações geométricas em apenas uma etapa, por meio da **multiplicação** das matrizes de transformação.

Exemplo: escalamento → rotação

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_u & 0 & 0 \\ 0 & s_v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_u cos(\theta) & -s_v sin(\theta) & 0 \\ s_u sin(\theta) & s_v cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 3: Composição de transformações

Enunciado: Note que quando utilizamos coordenadas homogêneas todas as transformações geométricas mostradas anteriormente são expressas em um mesmo formato, isto é, através de uma multiplicação matricial (de uma matriz com um vetor de coordenadas). Esta representação comum entre as transformações nos permite combiná-las com o objetivo de gerar uma transformação composta. Por exemplo, imagine que gostaríamos de aplicar em sequência duas transformações geométricas em uma dada imagem; digamos que desejamos primeiro realizar um escalamento e, na sequência, uma rotação. Ao invés de aplicar separadamente essas transformações, podemos combiná-las por meio da multiplicação de suas matrizes de mapeamento.

Exercício 3: Composição de transformações
Transformações Geométricas Afins

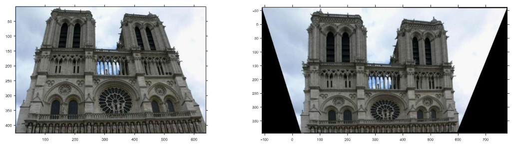
Assim, se utilizarmos a matriz de mapeamento resultante, teremos o mesmo resultado que seria obtido caso realizássemos primeiro o escalamento e, depois, a rotação.

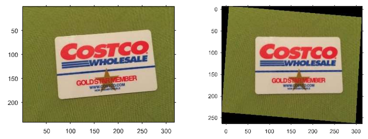
Portanto, tendo em vista a discussão apresentada no slide anterior, pede-se:

1. Carregue uma imagem no Matlab.
2. Aplique, de forma separada e em sequência, as transformações de escalamento e rotação (nessa ordem).
3. Agora, realize essas transformações em apenas uma etapa utilizando a matriz de transformação composta, que combina as duas transformações geométricas.
4. Verifique se os resultados obtidos nas etapas 2 e 3 são idênticos.

Homografia planar
Transformação projetiva

- Também conhecida como transformação de perspectiva.





Homografia planar
Transformação projetiva

Relação entre as posições dos *pixels* da imagem transformada e da imagem original.

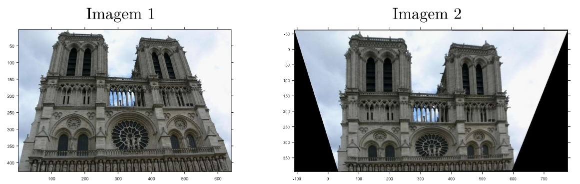
$$\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} \\ h_{3,1} & h_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde as coordenadas da imagem transformada são dadas por $u' = \tilde{u}/\tilde{w}$ e $v' = \tilde{v}/\tilde{w}$.

Alterando-se os valores dos coeficientes $h_{i,j}$, são obtidas diferentes transformações de perspectiva.

Homografia planar
Transformação projetiva

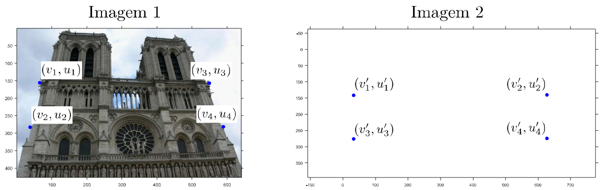
- Considere que se deseja realizar uma operação de homografia planar sobre a Imagem 1 para que se obtenha a Imagem 2.



- Como determinar os valores dos coeficientes $h_{i,j}$?

Homografia planar
Transformação projetiva

- Note que na matriz de transformação de homografia há 8 coeficientes que devem ser determinados.
- Assim, devem ser definidos pelo menos 4 pares de pontos correspondentes entre a imagem original e a desejada.



Homografia planar
Transformação projetiva

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{v}_i \\ \tilde{w}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & h_{1,3} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & h_{2,3} \\ h_{3,1} & h_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_i' = \frac{\tilde{u}_i}{\tilde{w}_i} = \frac{h_{1,1}u_i + h_{1,2}v_i + h_{1,3}}{h_{3,1}u_i + h_{3,2}v_i + 1}$$

$$v_i' = \frac{\tilde{u}_i}{\tilde{w}_i} = \frac{h_{2,1}u_i + h_{2,2}v_i + h_{2,3}}{h_{3,1}u_i + h_{3,2}v_i + 1}$$

Homografia planar
Transformação projetiva

$$u_i' = \frac{\tilde{u}_i}{\tilde{w}_i} = \frac{h_{1,1}u_i + h_{1,2}v_i + h_{1,3}}{h_{3,1}u_i + h_{3,2}v_i + 1}$$

$$v_i' = \frac{\tilde{u}_i}{\tilde{w}_i} = \frac{h_{2,1}u_i + h_{2,2}v_i + h_{2,3}}{h_{3,1}u_i + h_{3,2}v_i + 1}$$

Note que as equações podem ser reescritas como

$$h_{1,1}u_i + h_{1,2}v_i + h_{1,3} - h_{3,1}u_i'u_i - h_{3,2}u_i'v_i = u_i'$$

$$h_{2,1}u_i + h_{2,2}v_i + h_{2,3} - h_{3,1}v_i'u_i - h_{3,2}v_i'v_i = v_i'$$

Homografia planar
Transformação projetiva

Para os 4 pares de pontos correspondentes, pode-se montar o seguinte sistema de equações lineares:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_1'u_1 & -u_1'v_1 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & v_1 & 1 & -v_1'u_1 & -v_1'v_1 \\ u_2 & v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_2'u_2 & -u_2'v_2 \\ 0 & 0 & 0 & u_2 & v_2 & 1 & -v_2'u_2 & -v_2'v_2 \\ u_3 & v_3 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_3'u_3 & -u_3'v_3 \\ 0 & 0 & 0 & u_3 & v_3 & 1 & -v_3'u_3 & -v_3'v_3 \\ u_4 & v_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & -u_4'u_4 & -u_4'v_4 \\ 0 & 0 & 0 & u_4 & v_4 & 1 & -v_4'u_4 & -v_4'v_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} h_{1,1} \\ h_{1,2} \\ h_{1,3} \\ h_{2,1} \\ h_{2,2} \\ h_{2,3} \\ h_{3,1} \\ h_{3,2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1' \\ v_1' \\ u_2' \\ v_2' \\ u_3' \\ v_3' \\ u_4' \\ v_4' \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Homografia planar

Transformação projetiva

- Onde $\mathbf{A}$ é uma matriz 8×8, $\mathbf{h}$ é o vetor de incógnitas e $\mathbf{b}$ denota o vetor de variáveis independentes do sistema linear.
- Note que o sistema linear $\mathbf{Ah} = \mathbf{b}$, pode ser resolvido como

$$\mathbf{h} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

- Uma vez determinando $\mathbf{h}$, pode-se construir a matriz de homografia planar.

Exercício 4: homografia planar

Transformações projetiva

Enunciado: `https://youtu.be/nDXurKryaOs`