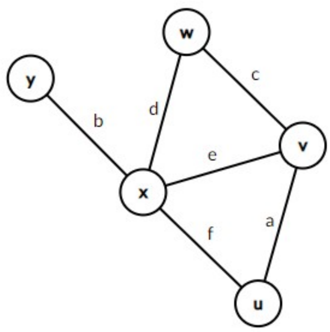
Projeto e Análise de Algoritmos II

1 Grafos

Um grafo $G=(V(G), E(G))$ consiste de um conjunto finito e não vazio $V(G)$ ($|V(G)|\geq 1$), e uma família finita $E(G)$, de pares não ordenados de elementos de $V(G)$. Os elementos de $V(G)$ são chamados de vértices e os de $E(G)$ arestas.



$V(G)=\{u, v, w, x, y\}$

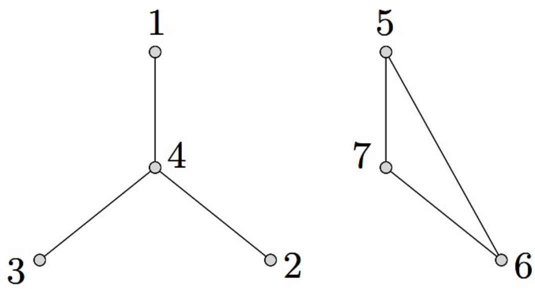
$E(G)=\{a, b, c, d, e, f,\}$

$\Psi_G(a)=uv \quad \Psi_G(b)=yx \quad \Psi_G(c)=wv$
$\Psi_G(d)=xw \quad \Psi_G(e)=xv \quad \Psi_G(f)=xu$

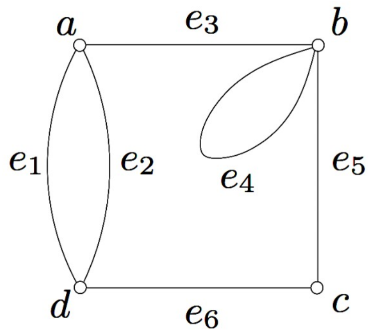
Chamamos o número de arestas de tamanho do grafo e o número de vértices de ordem do grafo.

1.1 Grafo e grafo simples

Um grafo simples não contem laços e nem arestas múltiplas. O grafo simples também pode ser chamado de grafo se o grafo for chamado de multigrafo.



Um grafo simples



Um grafo ou multigrafo

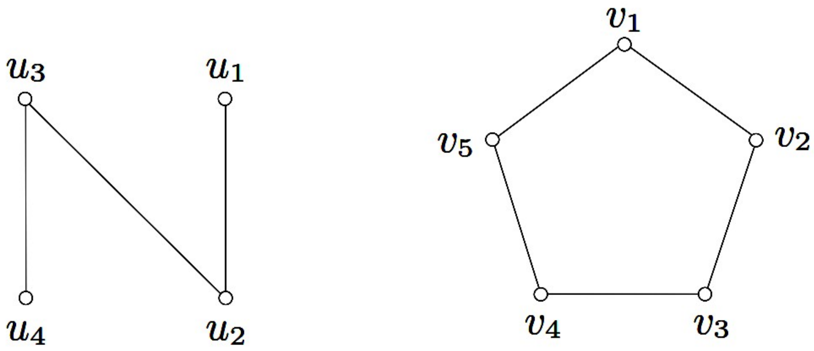
1.2 Passeio, trilha, caminho e ciclo

Um passeio é uma sequência alternada de vértices e arestas que começa e termina em um vértice. Já uma trilha é um passeio que não repete arestas. O caminho é uma trilha que não repete vértices, ou seja, uma sequência alternada de vértices e arestas que não repete nenhum vértice e nenhuma aresta.

Um caminho é um grafo simples que pode ser arranjado como uma sequência linear de arestas e vértices de tal forma que dois vértices são adjacentes se são consecutivos na sequência e não adjacentes caso contrário.

Um ciclo é um caminho fechado de 3 ou mais arestas. Um ciclo de um vértice consiste em um único vértice com uma aresta saindo e voltando para ele mesmo. Um ciclo de dois vértices consiste em dois vértices com um par de arestas.

O tamanho de um caminho ou de um ciclo consiste em seu número de arestas.

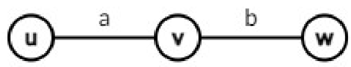


Um caminho de tamanho 3 e um ciclo de tamanho 5

1.3 Grafo conexo e desconexo

Um grafo é dito conexo se existir pelo menos um caminho entre todos os vértices do grafo.

1.4 Incidência e Adjacência



u incide em a e a incide em u;

u e v são adjacentes e a e b são adjacentes;

1.5 Grau dos vértices

$d_G(v)$ - Número de arestas que incide em um vértice v.

$\delta(G)$ - Mínimo grau dos vértices de G.

$\Delta(G)$ - Máximo grau dos vértices de G.

$d(G)=\frac{1}{n}\sum_{v\in V} d(v)$ - Média dos graus dos vértices de G.

Teorema: Para qualquer grafo G, $\sum_{v\in V} d(v)=2m$, onde m é o número de arestas.

Corolário: Em qualquer grafo, o número de vértices de grau ímpar é par.

1.6 Grafo nulo e grafo vazio

Grafo nulo não possui nenhum vértice e nenhuma aresta: $V(G)=E(G)=\emptyset$. Já o grafo vazio pode possuir vértices isolados de grau zero: $V(G)=\emptyset$ e $E(G)=\emptyset$.

1.7 Grafos iguais e isomorfos

Dois grafos são iguais, $G=H$, se $V(G)=V(H)$, $E(G)=E(H)$ e $\Psi_G=\Psi_H$. Se dois grafos são iguais, eles podem ser representados da mesma maneira, mas nem sempre dois grafos representados da mesma maneira são iguais pois o nome de seus vértices e arestas podem mudar. Grafos que são representados da mesma maneira, mas não são iguais, são chamados de isomórficos.

Iguais	$G=H$	$V(G)=V(H)$	$E(G)=E(H)$	$\Psi_G=\Psi_H$
Isomorfos	$G\simeq H$	$\theta: V(G)\rightarrow V(H)$	$\phi: E(G)\rightarrow E(H)$	$\Psi_G(e)=uv\leftrightarrow\Psi_H(\phi(e))=\theta(u)\theta(v)$

Para determinar se dois grafos de n vértices são isomorfos, seria necessário verificar todas as $n!$ bijeções entre $V(G)$ e $E(G)$ até, com sorte, encontrar uma válida. Mas caso não seja isomorfo essa operação pode ser custosa. Uma outra maneira é verificar se alguma propriedade presente em G, não está presente em H. Grafos isomórficos possuem a mesma quantidade de arestas e vértices, e preserva o grau dos vértices.

No caso de grafos simples, se (θ, ϕ) for um isomorfismo entre os grafos G e H, o mapeamento de ϕ é determinado pelo θ. Em outras palavras basta olhar se cada vértice de G preserva a relação de adjacência de H.

1.8 Grafo rotulado e não rotulado

Como em muitos problemas, estamos interessados apenas nas propriedades estruturais do grafo, podemos ignorar os rótulos das arestas e vértices e criar um grafo não-rotulado, para representar uma classe de grafos isomórficos.

1.9 União e Intersecção de grafos

Dois grafos são disjuntos se não possuírem vértices em comum, e são aresta-disjuntos se não possuírem arestas em comum.

A união dos grafos simples G e H é o grafo $G \cup H$, cujo conjunto de vértices é $V(G) \cup V(H)$ e o conjunto de arestas é $E(G) \cup E(H)$.

Se G e H forem disjuntos, então a união é denotada por $G+H$ e é chamada de união disjunta.

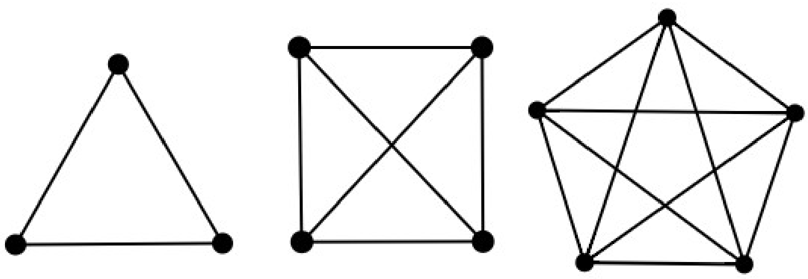
A intersecção $G \cap H$ é definida da mesma forma. Se G e H forem disjuntos então a intersecção será um grafo nulo.

Obs.: Não sei se a tradução certa para disjoint é disjunto.

2 Classes de grafos

2.1 Completos

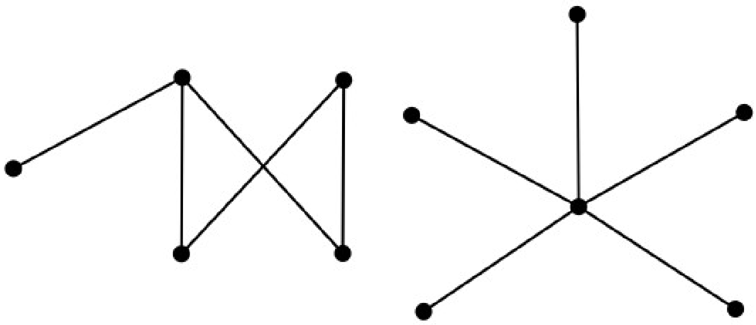
Grafos completos K_n, são grafos onde cada vértice é ligado a todos os outros vértices.



Grafos completos K_3, K_4 e K_5

2.2 Bipartidos

Grafos que possuem uma bipartição de seu conjunto de vértices tal que $\forall e \in E(G)$ os extremos de e estão em partes diferentes de S.

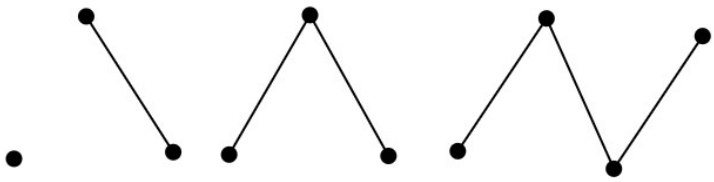


2.3 Bipartido completos

Um grafo bipartido completo, denotado por $K_{m,n}$ é um grafo simples que possui uma partição $\{x, y\}$ de seus vértices tal que $|x|=m$, $|y|=n$ e todo o vértice em x é adjacente a todo vértice em y.

2.4 Caminhos

Um grafo caminho, denotado por P_n, é um grafo que é um caminho.



Caminhos P_1, P_2, P_3 e P_4

2.5 Ciclos

Um ciclo, denotado por C_n, é um grafo que é um ciclo.

2.6 Grafos Planares

Grafos que podem ser desenhados no plano, de maneira que suas arestas se cruzam apenas em seus extremos.

2.7 Grafos Orientados (digrafos)

2.8 Hipergrafo

2.9 Grafos Infinitos

3 Árvores

4 Algoritmos Elementares

4.1 Representação de Grafos

4.2 Busca em largura

4.3 Busca em Profundidade

4.4 Ordenação Topológica

4.5 Componentes Fortemente Conexas

5 Árvores Geradoras Mínimas

5.1 Desenvolvendo uma árvore geradora mínima

5.2 Algoritmos de Kruskal e Prim

6 Caminhos mínimos e fonte única

6.1 O Algoritmo de Bellman-Ford

6.2 Caminhos mínimos de fonte única em grafos acíclicos dirigidos

6.3 Algoritmo de Dijkstra

6.4 Restrição de diferença e caminhos mínimos

6.5 Provas de Propriedades de caminhos mínimos

7 Caminhos mínimos entre todos os pares

7.1 Caminhos mínimos e multiplicação de matrizes

7.2 O algoritmo de Floyd-Warshall

7.3 Algoritmo de Johnson para grafos esparsos

8 Fluxo Máximo

8.1 Redes de Fluxo

8.2 O método Ford-Fulkerson

8.3 Emparelhamento Máximo em grafo bipartido

8.4 Algoritmos Push-relabel

8.5 O algoritmo relabel-to-front

9 Referências

Graph Theory. J.A. Bondy, U.S.R. Murty, 2008, Editora Springer
Algoritmo Teoria e Prática.Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein, 2012, Editora Campus.