BFS(G,s)

$\boxed{1-4}$ $O(|V|)$

$\boxed{5-9}$ $O(1)$ $\Rightarrow$ $O(|V| + |E|)$

$\boxed{10-18}$ $O(|E|)$

Correção da BFS

- Para
- Produz uma árvore enraizada em s que inclui todos os vértices alcançáveis a partir de s
- Os caminhos na árvore são mínimos

- O algoritmo para porque nenhum vértice é enfileirado mais de uma vez e as listas de adjacências são finitas

Caminho mínimo de s a v, $s, v \in V$

$$\delta(s,v) = \begin{cases} \min\{|P_{sv}| : P_{sv} \text{ é um caminho entre s e v}\} \\ \infty \text{ se } \nexists \text{ caminho entre s e v em G} \end{cases}$$

Lema 22.1: $G = (V, E)$ grafo ou digrafo, s e V

Então: $\forall uv \in E$, $\delta(s,v) \leq \delta(s,u) + 1$

Demonstração 22.1

2 casos

$\delta(s,u) = \infty$

$\delta(s,v) \leq \infty + 1$ ✓

$\delta(s,u) \neq \infty$

$\delta(s,u) \neq \infty$

- P_{su} um caminho tal que $|P_{su}| = \delta(s,u)$
- P_{sv} um caminho tal que $|P_{sv}| = \delta(s,v)$
- $P_{sv} = P_{su} + uv$

$$\delta(s,v) = |P_{sv}| \leq |P'_{sv}| = |P_{su}| + 1 = \delta(s,u) + 1$$

Lema 22.2: $G=(V,E)$ $s \in V$, $d(\cdot)$ computado pelo BFS
Então: $\forall v \in V$, $d(v) \geq \delta(s,v)$

Demonstração 22.2

Indução no # de operações de enqueue

$P(k)$ = "na k-ésima operação de enfileirar
imediatamente após
$d(v) \geq \delta(s,v), \forall v \in V$"

$K=1$ $d(s)=0=\delta(s,s)$
$d(v)=\infty \geq \delta(s,v), \forall v \in V \setminus \{s\}$

Hipótese de indução: vale para k operações de enfileirar

(u) -> sendo explorado (estou explorando a vizinhança)

(v) -> acabou de ser descoberto

$d(v) = d(u)+1$

$\geq \delta(s,u)+1$ pela HI

$\geq \delta(s,v)$ pelo lema 22.1

Lema 22.3: $G=(V,E)$, $BFS(G,1)$, $Q = [v_1, v_2, \cdots, v_r]$

Então: $d(v_r) \leq d(v_1)+1$

$d(v_i) \leq d(v_{i+1}),\ 1 \leq i < r$

Demonstração 22.3

\# op da fila

$\boxed{K=1}$ $Q = \langle s]$ ✓

$\boxed{HI}$ valem para k operações de fila

$k+1$ pode ser $\begin{cases} \text{desenfileirar} \\ \text{enfileirar} \end{cases}$

Desenfileirar

$Q = \langle v_1, v_2, \cdots, v_r]$

$\downarrow$

$Q = \langle v_2, \cdots, v_r]$

Por HI: $d(v_r) \leq d(v_1)+1$

$d(v_i) \leq d(v_{i+1})\ \forall i$

$\overline{\qquad\qquad}$

$d(v_1) < d(v_2)$

$d(v_r) \leq d(v_1)+1 \leq d(v_2)+1$

MC558

13/04

$Q = \langle d_1, d_2, d_3, d_4, d_5]$

① $d(v_5) \leq d(v_1) + 1$

② $d(v_1) \leq d(v_2)$
$d(v_2) \leq d(v_3)$
$d(v_3) \leq d(v_4)$
$d(v_4) \leq d(v_5)$

$Q = \langle v_2, v_3, v_4, v_5]$

$d(v_5) \leq d(v_2) + 1$ ①

$d(v_2) \leq d(v_3)$
$d(v_3) \leq d(v_4)$
$d(v_4) \leq d(v_5)$
②