Problema Dual

Modelo **Primal**, na forma padrão com os coeficientes c_j, a_{ij} e b_i.

$$
\begin{array}{|lcccccccl|}
\hline
Max\ Z = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \dots & + & c_nx_n & \text{sujeito a} \\
\hline
 & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq b_1 \quad (y_1) \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \leq b_2 \quad (y_2) \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq b_m \quad (y_m) \\
\hline
\end{array}
$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1 \dots n$$

Associando-se a cada restrição *i* do primal uma variável y_i, o seu **Dual** é dado por:

$$
\begin{array}{|lcccccccl|}
\hline
Min\ D = & b_1y_1 & + & b_2y_2 & + & \dots & + & b_my_m & \text{sujeito a} \\
\hline
 & a_{11}y_1 & + & a_{21}y_2 & + & \dots & + & a_{m1}y_m & \geq c_1 \\
 & a_{12}y_1 & + & a_{22}y_2 & + & \dots & + & a_{m2}y_m & \geq c_2 \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots \\
 & a_{1n}y_1 & + & a_{2n}y_2 & + & \dots & + & a_{mn}y_m & \geq c_n \\
\hline
\end{array}
$$

$$y_i \geq 0,\ i = 1 \dots m$$

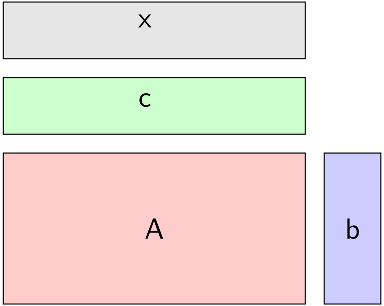
Características do Problema Dual

Relações entre o Primal e o Dual:

a) Se o primal for um problema de Maximização, então o dual será de Minimização
b) Os termos independentes das restrições do dual são os coeficientes da FO do primal (c_j)
c) Os coeficientes da FO do dual são os termos independentes do primal (b_i)
d) As restrições do dual são do tipo $\geq$, ao passo que as do primal são do tipo $\leq$
e) O número de incógnitas do dual (y_i) é igual ao número de restrições do primal
f) O número de restrições do dual é igual ao número de incógnitas do primal
g) A matriz dos coeficientes do dual é a transposta da matriz dos coeficientes do primal

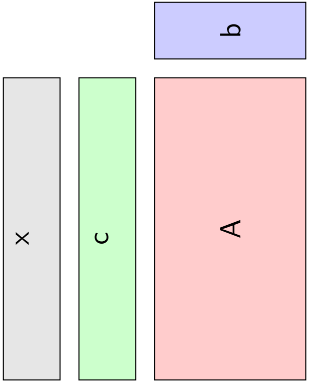
Relação Primal × Dual

Problema Primal



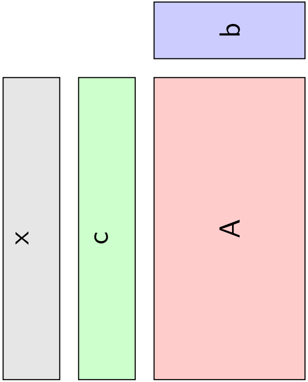
$$Max\ Z = cx$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

Problema Dual

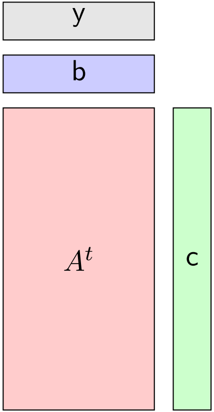


Transpondo o sistema anterior

O Problema Dual



Sistema transposto



$$Min\ D = by$$
$$A^t y \geq c$$
$$y \geq 0$$

Problema Dual

Exemplo

Modelo primal na forma padrão

$$
\begin{array}{|lrcrll|}
\hline
Max\ Z = & 2x_1 & + & 3x_2 & \text{sujeito a} & \\
\hline
 & -x_1 & + & x_2 & \leq 4 & (y_1) \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq 6 & (y_2) \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq 8 & (y_3) \\
\hline
\end{array}
$$

$$x_1,\quad x_2 \geq 0$$

Modelo dual

$$
\begin{array}{|lrcrcrl|}
\hline
Min\ D = & 4y_1 & + & 6y_2 & + & 8y_3 & \text{sujeito a} \\
\hline
 & -y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & \geq 2 \\
 & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & \geq 3 \\
\hline
\end{array}
$$

$$y_1,\quad y_2,\quad y_3 \geq 0$$

Teorema básico da dualidade

Temos a seguinte notação:

- $Z =$ valor da função objetivo primal e Z^* seu valor ótimo
- $x_j^* =$ ponto ótimo de x_j
- $D =$ valor da função objetivo dual e D^* seu valor ótimo
- $y_i^* =$ ponto ótimo de y_i

O Teorema da Dualidade nos garante que se existirem soluções viáveis para o primal e para o dual, então:

a) $Z \leq D$ para quaisquer solução compatível do primal e do dual

b) Existe uma solução ótima finita para cada problema, tal que $Z^* = D^*$

c) Se o primal Z tende para o infinito, então o dual não tem solução viável

d) Se o primal não tem solução viável, então o dual D tende para menos infinito

Teorema das folgas complementares

Não é apenas o valor ótimo das FOs que estão associadas, mas também as suas soluções x_j e y_i. Resolvido o problema, primal ou dual, o outro estará automaticamente resolvido, sem esforço adicional.

a) O valor ótimo de y_i do dual é igual ao coeficiente na linha da FO ótima, da variável de folga x_{n+i}

b) O valor ótimo da variável de folga y_{m+j} é igual ao coeficiente na linha da FO ótima, da variável original x_j do primal

O teorema tem este nome pelo fato das variáveis do primal estarem ligadas às variáveis de folga do dual e das variáveis de folga do primal estarem ligadas às variáveis do dual. Portanto diz-se que as soluções do primal e do dual são complementares.

Interpretação econômica do dual

Temos que:

$$c_j = \frac{\$}{\text{unidade do produto } j}, \qquad a_{ij} = \frac{\text{unidade do recurso } i}{\text{unidade do produto } j}$$

Pelas restrições do dual, conclui-se que:

$$y_i = \frac{\$}{\text{unidade do recurso } i}$$

A variável y_i representa um "valor implícito" do recurso i, válido somente para o problema de otimização.

$y_i^* =$ a taxa de variação de Z^* se a quantidade disponível do recurso i aumentar, dentro de um certo intervalo.

Às **variáveis duais** y_i também são dadas diferentes denominações, tais como:

a) *shadow price*
b) valor implícito
c) *incremental value*
d) *internal price*
e) *eficienty price*, entre outros

Problema Dual

Exemplo

Considere como primal problema da maximização, na forma padrão:
Max $Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$ sujeito a

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 12 \\ 2x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 16 \\ x_1 & + & 4x_2 & & & \leq & 10 \\ x_1, & & x_2 & e & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

O modelo primal fica da seguinte forma:
Min $D = 12y_1 + 16y_2 + 10x_3$ sujeito a

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & \geq & 4 \\ 2y_1 & & & + & 4y_3 & \geq & 2 \\ y_1 & + & 2y_2 & & & \geq & 3 \\ y_1, & & y_2 & e & y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Modelo compacto do Dual usando a estrutura do Primal

```
#conjuntos de índices
param m;
param n;

set MP:= {1..m};          # conjunto das matérias primas
set Ligas:= {1..n};       # conjunto das ligas

#parâmetros do problema
param PV{ Ligas };        # vetor com o preço de venda de cada liga
param disp{ MP };         # vetor com a disponibilidade de cada matéria prima
param matriz{ MP, Ligas  };     # matriz de consumo de materia prima por liga
#variáveis de decisão do DUAL
var y{ MP }, >=0; #, integer;    # variável de decisão: quantidade de matéria prima utilizada na  produção

#função objetivo
minimize Custo: sum{i in MP} disp[i] * y[i];

#restrições
s.t. Mat_Prima{j in Ligas}: sum{i in MP} matriz[i, j] * y[i] >= PV[j];

solve;
```

Modelo compacto do Dual usando a estrutura do Primal

```
#entrada de dados
data;
param m := 3;
param n := 2;

param PV :=
    1 30
    2 50;
param disp :=
    1 15
    2 11
    3 14;
param matriz:   1   2:=
            1   2   1
            2   1   2
            3   1   3;
end;
```