Introdução à Otimização

Aula 3

A Modeling Language for

Mathematical Programming: AMPL

Ambiente de desenvolvimento: GUSEK

Solver: **GLPK**

Modelo de Programação Linear Análise de Atividades Forma compacta

$$Max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \forall i = 1, \dots, m$$

$$x_j \ge 0, \forall j = 1, \dots, n$$

Temos uma matriz A_{mXn} retangular.

Normalmente n >m, ou seja, A tem mais colunas do que linhas.

Modelo Compacto Melhorado

	Liga tipo A	Liga tipo B	Disp. max
Cobre	2	1	16
Zinco	1	2	11
Chumbo	1	3	15
P. de venda	\$30,00	\$50,00	

```
Conjuntos de indices: Ligas:= {A, B}, MP:= {Cobre, Zinco, Chumbo}

Declaração dos parâmetros de entrada:

PV[j], j ∈ Ligas; // preço de venda/unid. da liga j;

Matriz[i,j], i ∈ MP, j ∈ Ligas; // cons. da MP i por unid. da liga j

Disp[i], i ∈ MP; //disponibilidade do material i;
```

```
Conjuntos: Ligas:= {A, B}, MP:= {Cobre, Zinco, Chumbo}
Parâmetros:
PV[j], j ∈ Ligas;
Matriz[i,j], i ∈ MP, j ∈ Ligas;
Disp[i], i ∈ MP;
```

Variáveis de decisão:

```
X[j], j \in Ligas, \geq 0;
```

Função objetivo:

```
Maximize Z: sum\{j \in Ligas\} PV[j]*X[j];
```

Restrições:

```
Restr{i \in MP}: sum{j \in Ligas} Matriz[i,j]*X[j] <= Disp[i];
```

```
Conjuntos: Ligas:= {A, B}, MP:= {Cobre, Zinco, Chumbo}
Parâmetros:
PV[j], j \in Ligas;
Matriz[i,j], i \in MP, j \in Ligas;
Disp[i], i \in MP;
Variáveis de decisão:
X[j], j \in Ligas, >= 0;
Função objetivo:
Max Z = sum\{j \in Ligas\} PV[j]*X[j];
Max Z = PV[A]*X[A] + PV[B]*X[B]
Restrições:
Restr{i \in MP}: sum{j \in Ligas} Matriz[i,j]*X[j] <= Disp[i];
```

```
Conjuntos: Ligas:= {A, B}, MP:= {Cobre, Zinco, Chumbo}
Parâmetros:
PV[j], j \in Ligas;
Matriz[i,j], i \in MP, j \in Ligas;
Disp[i], i \in MP;
Variáveis de decisão:
X[j], j \in Ligas, \geq 0;
Função objetivo:
Max Z = sum\{j \in Ligas\} PV[j]*X[j];
Max Z = PV[A]*X[A] + PV[B]*X[B]
Restrições:
Restr{i \in MP}: sum{j \in Ligas} Matriz[i,j]*X[j] <= Disp[i];
i = Cobre: sum\{j \in \{A, B\}\}
     Matriz[Cobre, A]*X[A] + Matriz[Cobre, B]*X[B] <= Disp[Cobre]</pre>
```

```
Conjuntos: Ligas:= {A, B}, MP:= {Cobre, Zinco, Chumbo}
Parâmetros:
PV[j], j \in Ligas;
Matriz[i,j], i \in MP, j \in Ligas;
Disp[i], i \in MP;
Variáveis de decisão:
X[i], i \in Ligas, >= 0;
Função objetivo:
Max Z = sum\{j \in Ligas\} PV[j]*X[j];
Max Z = PV[A]*X[A] + PV[B]*X[B]
Restrições:
Restr{i \in MP}: sum{j \in Ligas} Matriz[i,j]*X[j] <= Disp[i];
i = Cobre: sum\{j \in \{A, B\}\}
     Matriz[Cobre, A]*X[A] + Matriz[Cobre, B]*X[B] <= Disp[Cobre]</pre>
i = Zinco: sum\{j \in \{A, B\}\}\
     Matriz[Zinco, A]*X[A] + Matriz[Zinco, B]*X[B] <= Disp[Zinco]</pre>
```

```
Conjuntos: Ligas:= {A, B}, MP:= {Cobre, Zinco, Chumbo}
Parâmetros:
PV[j], j \in Ligas;
Matriz[i,j], i \in MP, j \in Ligas;
Disp[i], i \in MP;
Variáveis de decisão:
X[i], i \in Ligas, >= 0;
Função objetivo:
Max Z = sum\{j \in Ligas\} PV[j]*X[j];
Max Z = PV[A]*X[A] + PV[B]*X[B]
Restrições:
Restr{i \in MP}: sum{j \in Ligas} Matriz[i,j]*X[j] <= Disp[i];
i = Cobre: sum\{j \in \{A, B\}\}
     Matriz[Cobre, A]*X[A] + Matriz[Cobre, B]*X[B] <= Disp[Cobre]</pre>
i = Zinco: sum\{j \in \{A, B\}\}
     Matriz[Zinco, A]*X[A] + Matriz[Zinco, B]*X[B] <= Disp[Zinco]</pre>
i = Chumbo: sum\{j \in \{A, B\}\}
     Matriz[Chumbo, A]*X[A] + Matriz[Chumbo, B]*X[B] <= Disp[Chumbo]</pre>
```

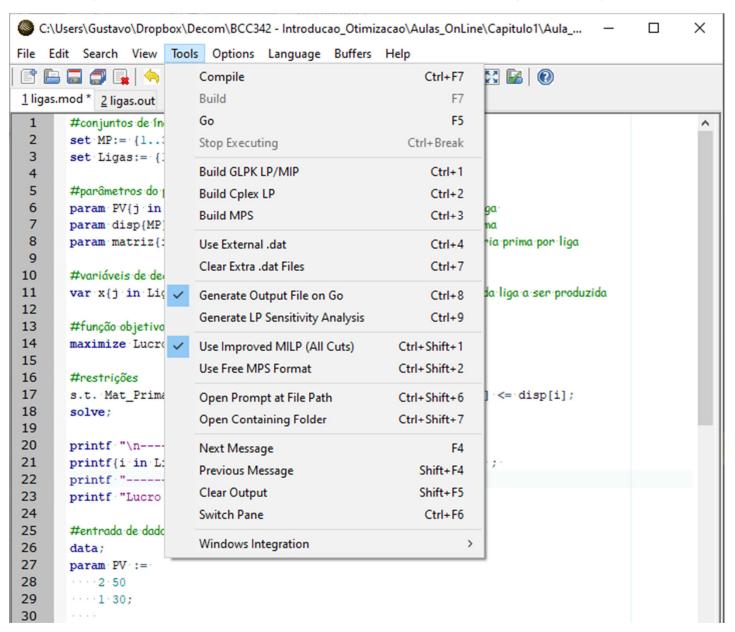
```
Conjuntos: Ligas:= {A, B}, MP:= {Cobre, Zinco, Chumbo}
Parâmetros:
PV[j], j \in Ligas;
Matriz[i,j], i \in MP, j \in Ligas;
Disp[i], i \in MP;
Variáveis de decisão:
X[i], i \in Ligas, >= 0;
Função objetivo:
Max Z = sum\{j \in Ligas\} PV[j]*X[j];
Max Z = PV[A]*X[A] + PV[B]*X[B]
Restrições:
Restr{i \in MP}: sum{j \in Ligas} Matriz[i,j]*X[j] <= Disp[i];
     Matriz[Cobre, A]*X[A] + Matriz[Cobre, B]*X[B] <= Disp[Cobre]</pre>
     Matriz[Zinco, A]*X[A] + Matriz[Zinco, B]*X[B] <= Disp[Zinco]</pre>
     Matriz[Chumbo, A]*X[A] + Matriz[Chumbo, B]*X[B] <= Disp[Chumbo]</pre>
```

```
set MP := {1..3};  # conjunto das matérias primas
set Ligas := {1..2}; # conjunto das ligas
param PV{Ligas};  # preço de venda de cada liga
param disp{i in MP}; # disponibilidade de cada matéria prima
param mat{i in MP, j in Ligas}; # matriz de consumo
var x{j in Ligas}, >=0; # quantidade de liga a ser produzida
maximize Lucro: sum{j in Ligas} x[j] * PV[j];
Disp MP{i in MP}: sum{j in Ligas} mat[i, j] * x[j] <= disp[i];</pre>
solve;
```

```
data;
param PV :=
    1 30
    2 50;
param disp :=
    1 16
    3 15
    2 11;
param mat :
       1
              2:=
       2
1
              1
       1
              2
              3;
3
       1
end;
```

Ativar a opção de geração do arquivo com o resumo da solução

Selecione a opção *Tools* -> *Ġenerate Output File on Go* para que seja gerado o arquivo com o resumo do resultado, ou seja, o arquivo .out



Arquivo *ligas.out* -> relatório da solução obtida ao resolver o modelo em *ligas.mod*.

```
C:\Users\Gustavo\Dropbox\Decom\BCC342 - Introducao_Otimizacao\Aulas_OnLine\Capitulo1\Aula_1_3\ligas.out - Gusek [2 of 2]
                                                                                                          X
File Edit Search View Tools Options Language Buffers Help
   1 ligas.mod 2 ligas.out
                                                                              >C:\gusek_0-2-24\gusek\glpsol.exe --cc
      Problem: ligas
                                                                              GLPSOL: GLPK LP/MIP Solver, v4.65
 2
      Rows: . . . . . 4
                                                                              Parameter(s) specified in the command
                                                                              --cover --clique --gomory --mir -m 1
 3
      Columns: · · · · 2
                                                                              Reading model section from ligas.mod..
                                                                              Reading data section from ligas.mod...
      Non-zeros: 8
                                                                              58 lines were read
 5
      Status: OPTIMAL
                                                                              Generating Lucro...
 6
      Objective: Lucro = 306.6666667 (MAXimum)
                                                                              Generating Mat_Prima...
                                                                              Model has been successfully generated
 7
                                                                              GLPK Simplex Optimizer, v4.65
                                                                              4 rows, 2 columns, 8 non-zeros
 8
      No. Row name St Activity Lower bound Upper bound Marginal
                                                                              Preprocessing...
 9
                                                                              3 rows, 2 columns, 6 non-zeros
                                                                              Scaling...
      ....1 Lucro .... B. .... 306.667 ....
10
                                                                              A: min|aij| = 1.000e+00 max|aij| =
     11
                                                                              Problem data seem to be well scaled
                                                                              Constructing initial basis...
      12
                                                                              Size of triangular part is 3
13
      0: obj = -0.000000000e+00 inf =
                                                                                   3: obj = 3.066666667e+02 inf :
14
                                                                              OPTIMAL LP SOLUTION FOUND
15
      No. Column name St Activity Lower bound Upper bound Marginal
                                                                              Time used: 0.0 secs
                                                                              Memory used: 0.1 Mb (112650 bytes)
16
      ....1.x[1]....B....6.333333.....0....0....
17
                                                                              Liga 1 - Quantidade: 6.3333333
      ....2.x[2]....B....2.33333.....0...0.....
18
                                                                              Liga 2 - Quantidade: 2.3333333
19
                                                                              Lucro Total: 306.6667
20
      Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions:
                                                                              Model has been successfully processed
21
                                                                              Writing basic solution to 'ligas.out'.
      KKT.PE: max.abs.err = 1.78e-15 on row 3
22
                                                                              >Exit code: 0 Time: 4.878
23
      .....max.rel.err = 7.72e-17 on row 3
      ····· High quality
24
25
26
      KKT.PB: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0
27
      .....max.rel.err = 0.00e+00.on.row.0
Cursor: line[17] col[1] Selection: [0]lines [0]chars [INS] [CR+LF] File: ligas.out, 39 lines
```

No arquivo *ligas.out* temos o tamanho do problema, o status da resolução e o valor da Função Objetivo. **Linha 10: pode-se observar a Função Objetivo -> Lucro = 306.6666667 (novamente)** Restrições:

Linha 11: matéria prima 1 -> foram utilizadas 15 (Activity) das 15 tons disponívies (Upper bound) Linha 12: matéria prima 2 -> foram utilizadas 11 (Activity) das 11 tons disponívies (Upper bound) Estas duas restrições são ativas, ou seja, elas restringem a melhora na FO.

Linha 13: matéria prima 3 -> foram utilizadas 13.333 (Activity) das 14 tons disponívies (Upper bound) Esta última restrição não é ativa pois ainda há uma sobra deste recurso. Solução ótima.

Linha 17: x[1] = 6.333 Linha 18: x[2] = 2.333

<u>1</u> ligas.n	nod <u>2</u> ligas.lp <u>3</u> ligas.out
1	Problem: ''ligas
2	Rows: **** 4
3	Columns: · · · · 2
4	Non-zeros: 18
5	Status: OPTIMAL
6	Objective: Lucro = 306.6666667 (MAXimum)
7	
8	No. Row name St Activity Lower bound Upper bound Marginal
9	
10	1 Lucro B 306.667
11	2 Mat_Prima[1] NU 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15 15
12	3 Mat_Prima[2] NU 11 23.3333
13	4 Mat_Prima[3] B13.333314
14	
15	No. Column name St Activity Lower bound Upper bound Marginal
16	
17	·····1·x[1]······B······6.33333·······0
18	····2·x[2]·····B·····2.33333·····0

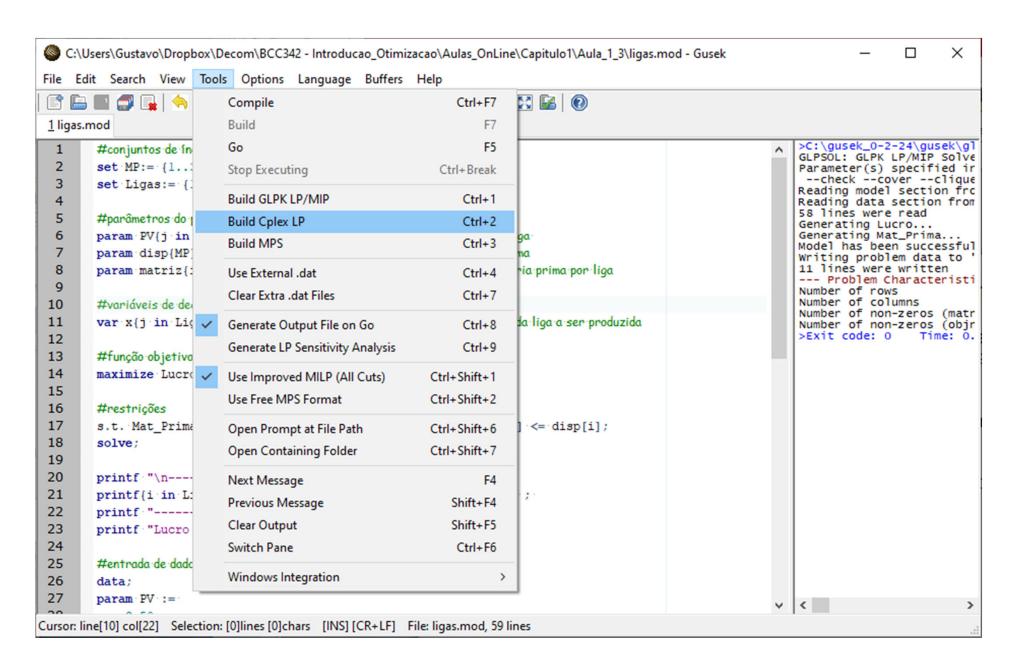
Uma outra funcionalidade do Gusek é a geração do *Modelo Explícito* que será resolvido tendo como base o *Modelo Compacto* e os respectivos dados de entrada.

Esta opção só faz sentido para modelos implementados na *forma compacta*, embora possa ser invocado para modelos explícitos.

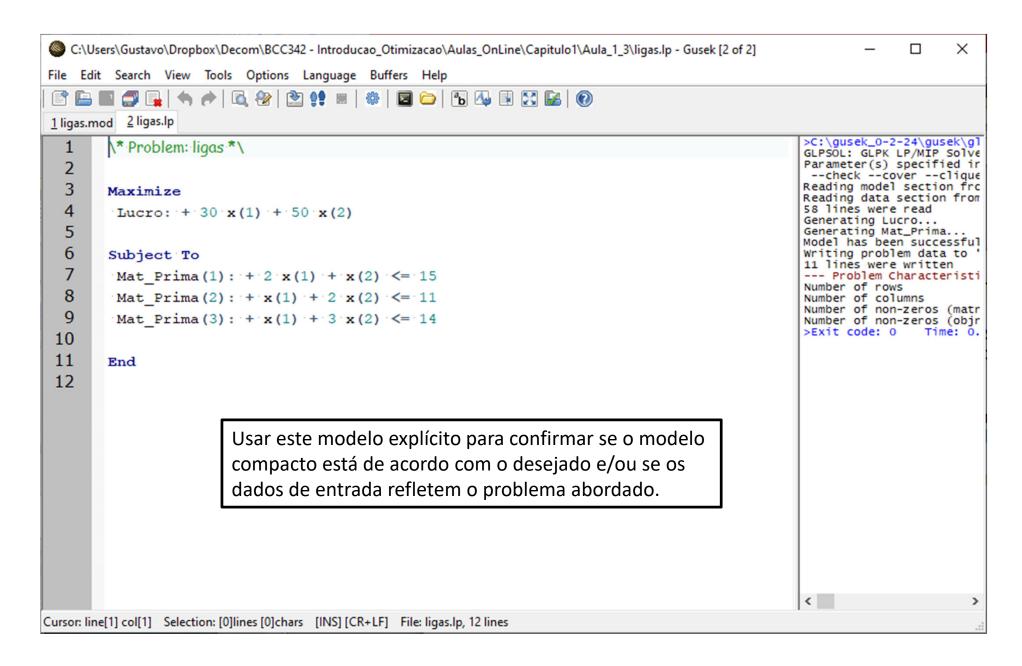
Ao acessar a opção **Tools** -> **Build Cplex LP** será gerado o modelo explícito para os dados de entrada, no <arquivo.lp>

Este modelo pode ser usado para tirar erros de lógica do modelo compacto e dos dados de entrada.

Geração do *Modelo Explícito* a partir dos *dados entrada* + *Modelo Compacto*



Geração do *Modelo Explícito* a partir dos *dados entrada* + *Modelo Compacto*



Fazer o Modelo no Gusek M 3.1 - O Problema da Fábrica de Móveis

	Escrivaninha	Mesa	Armário	Prateleira	Disponibili dade
Tábua	1	2	1	4	250
Prancha	0	1	3	2	600
Painéis	3	2	4	0	500
Valor de revenda	\$100,00	\$80,00	\$120,00	\$20,00	

Tarefa: Desenvolver um modelo no Gusek que maximize a receita com a venda dos móveis utilizando o modelo compacto.

M 3.2 - Empresa de manufatura com 4 produtos Modelo compacto

	Produtos			
	I II III IV			
Potencial máximo de venda (unid/mês)	70	60	40	20
Lucro (\$/unid)	10,0	8,00	9,00	7,00

Máq.	tempo disp. h/mês
M1	80
M2	20
M3	40

Mão de obra	tempo disp. homens-h/mês
MO1	120
MO2	160

número de máq-hora por unidade de cada produto

Máq	Produtos					
	I II III IV					
M1	5	4	8	9		
M2	2	6		8		
М3	3	4	6	2		

número de homens-hora por unidade de cada produto

MDO	Produtos				
	I II III IV				
MO1	2	4	2	8	
MO2	7 3 7				

MODELO "AMIGÁVEL - PORTUGOL"

Conjuntos de índices:

```
Prods := {P1, P2, P3, P4}; Maq := {M1, M2, M3}; Mdo := {M01, M02};
#é possível utilizar literais para os índices das estruturas
Parâmetros:
```

```
L[j], j ∈ Prods; //lucro por unidade do produto j
L := (10, 8, 9, 7);
Vd[j], j ∈ Prods; //potencial de venda do produto j
Vd := (70, 60, 40, 20);
Disp Mq[i], i \in Maq; //disp. da maquina i
Disp Mq := (80, 20, 40);
Disp Md[i], i ∈ Mdo;//disp. da mão de obra i
Disp Md := (120, 160);
Matriz1[i,j], i \in Maq, j \in Prods; //consumo da maq. i por produto j
Matriz2[i,j], i \in Mdo, j \in Prods; //consumo da mdo. i por produto j
Matriz1 = (5, 4, 8, 9,
                       Matriz2 = (2, 4, 2, 8,
          2, 6, 0, 8,
                                           7, 3, 0, 7);
           3, 4, 6, 2);
```

Variáveis de decisão:

X[j], $j \in Prods$, inteiro, >=0; //quantidade produzida do produto j

Variáveis de decisão:

X[j], $j \in Prods$, inteiro, >=0;//quant. produzida do prod. j

Função objetivo:

$$MAX Z = \sum_{j \in Prods} L[j] * X[j];$$

Restrições:

Mqs: $\sum_{j \in Prods} Matriz1[i,j] * X[j] \leq Disp_Mq[i], \forall i \in Maq;$

Mds: $\sum_{i \in Prods} Matriz2[i,j] * X[j] \leq Disp_Md[i], \forall i \in Mdo;$

Vendas: $X[j] \leq Vd[j] \forall j \in Prods;$

A partir de agora, você <u>deve</u> fazer o modelo compacto para todos os problemas apresentados.

M 3.2 - Empresa de manufatura com 4 produtos Modelo compacto

	Produtos			
	I II III IV			
Potencial máximo de venda (unid/mês)	70	60	40	20
Lucro (\$/unid)	10,0	8,00	9,00	7,00

Máq.	tempo disp. h/mês
M1	80
M2	20
M3	40

Mão de obra	tempo disp. homens-h/mês
MO1	120
MO2	160

número de máq-hora por unidade de cada produto

Máq	Produtos					
	I II III IV					
M1	5	4	8	9		
M2	2	6		8		
М3	3	4	6	2		

número de homens-hora por unidade de cada produto

MDO	Produtos						
	I	П	Ш	IV			
MO1	2	4	2	8			
MO2	7	3		7			

```
set P := {1..4};
set Maq := {1..3};
set Mdo := {1..2};
```

```
set P := {1..4};
set Maq := {1..3};
set Mdo := {1..2};

param disp_maq{i in Maq};
param disp_mdo{i in Mdo};
param lucro{j in P};
param pot_vendas{j in P};
```

```
set P := {1..4};
set Maq := {1..3};
set Mdo := {1..2};

param disp_maq{i in Maq};
param disp_mdo{i in Mdo};
param lucro{j in P};
param pot_vendas{j in P};
param matriz1{i in Maq, j in P};
param matriz2{i in Mdo, j in P};
```

```
set P := {1..4};
set Maq := {1..3};
set Mdo := {1..2};

param disp_maq{i in Maq};
param disp_mdo{i in Mdo};
param lucro{j in P};
param pot_vendas{j in P};

param matriz1{i in Maq, j in P};
param matriz2{i in Mdo, j in P};
var x{p in P}, >= 0, integer; # restrição de integralidade de x
```

```
set P := {1..4};
set Maq := {1..3};
set Mdo := {1..2};

param disp_maq{i in Maq};
param disp_mdo{i in Mdo};
param lucro{j in P};
param pot_vendas{j in P};

param matriz1{i in Maq, j in P};
param matriz2{i in Mdo, j in P};

var x{p in P}, >= 0, integer; # restrição de integralidade de x

maximize lucro: sum{p in P} lucro[p] * x[p];
```

```
set P := \{1..4\};
set Maq := {1..3};
set Mdo := {1..2};
param disp maq{i in Maq};
param disp mdo{i in Mdo};
param lucro{j in P};
param pot vendas{j in P};
param matriz1{i in Maq, j in P};
param matriz2{i in Mdo, j in P};
var x{p in P}, >= 0, integer; # restrição de integralidade de x
maximize lucro: sum{p in P} lucro[p] * x[p];
restMaq{m in Maq}: sum{p in P} matriz1[m, p] * x[p] <= disp maq[m];</pre>
```

```
set P := {1..4};
set Maq := {1..3};
set Mdo := {1..2};
param disp maq{i in Maq};
param disp mdo{i in Mdo};
param lucro{j in P};
param pot vendas{j in P};
param matriz1{i in Maq, j in P};
param matriz2{i in Mdo, j in P};
var x{p in P}, >= 0, integer; # restrição de integralidade de x
maximize lucro: sum{p in P} lucro[p] * x[p];
restMaq{m in Maq}: sum{p in P} matriz1[m, p] * x[p] <= disp maq[m];</pre>
restMdO{i in Mdo}: sum{j in P} matriz2[i, j] * x[j] <= disp mdo[i];</pre>
```

```
set P := {1..4};
set Mag := {1..3};
set Mdo := {1..2};
param disp maq{i in Maq};
param disp mdo{i in Mdo};
param lucro{j in P};
param pot vendas{j in P};
param matriz1{i in Maq, j in P};
param matriz2{i in Mdo, j in P};
var x{p in P}, >= 0, integer; # restrição de integralidade de x
maximize lucro: sum{p in P} lucro[p] * x[p];
restMaq{m in Maq}: sum{p in P} matriz1[m, p] * x[p] <= disp maq[m];</pre>
restMdO{i in Mdo}: sum{j in P} matriz2[i, j] * x[j] <= disp mdo[i];</pre>
restProds{j in P}: x[j] <= pot vendas[j];</pre>
```

```
data;
param disp_maq := 1 80 3 40 2 20;
param disp_mdo := 1 120
                   2 160;
param lucro := 1 10
               2 8
               3 9
               47;
param pot vendas := 1 70
                    2 60
                    3 40
                     4 20;
param matriz1: 1
                       2
                               3
                                       4 :=
                               8
                                       9
               2
        2
param matriz2: 1
                                       4 :=
                                       8
7
               2
        1
                               2
        2
```

Fazer o Modelo no Gusek M 3.1 - O Problema da Fábrica de Móveis

	Escrivaninha	Mesa	Armário	Prateleira	Disponibili dade
Tábua	1	2	1	4	250
Prancha	0	1	3	2	600
Painéis	3	2	4	0	500
Valor de revenda	\$100,00	\$80,00	\$120,00	\$20,00	

Tarefa: Desenvolver um modelo no Gusek que maximize a receita com a venda dos móveis utilizando o modelo compacto.