BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

(baseado nas notas de aula do prof. Haroldo Gambini Santos)
Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

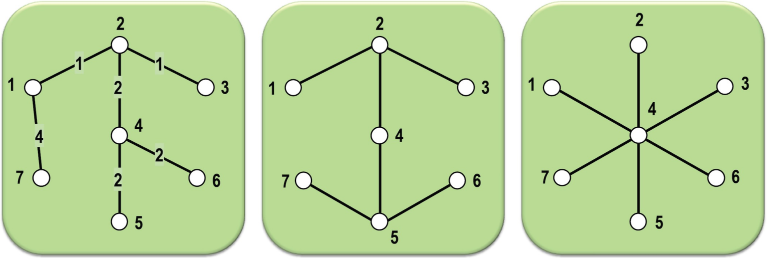
Conteúdo

Árvores

Definição

Grafo conexo e sem ciclos em que há somente um caminho entre qualquer par de vértices.

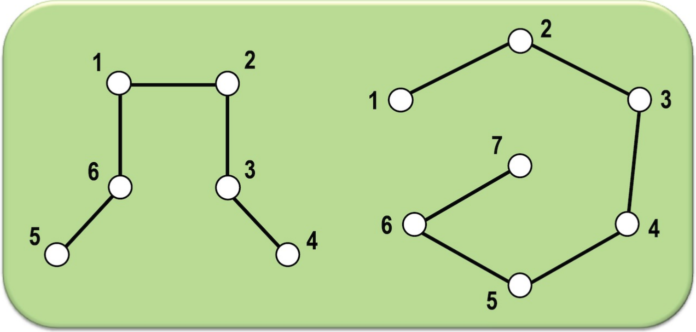
Um subgrafo conexo e acíclico de uma árvore é denominado subárvore.



Árvore ponderada, árvore não ponderada e grafo estrela.

Definição

Um grafo caminho (ou grafo linha) é um caso especial de árvore em que todos os vértices têm grau 2 ou 1, havendo apenas dois vértices com grau 1.



Grafos caminho.

Características

Seja T uma árvore com n vértices, então:

1. T é conexo e sem ciclos;
2. T possui $n - 1$ arestas;
3. Cada aresta de T é uma ponte;
4. T é um grafo planar;
5. Se $n>1$, então T possui pelo menos dois vértices folhas (ou terminais).

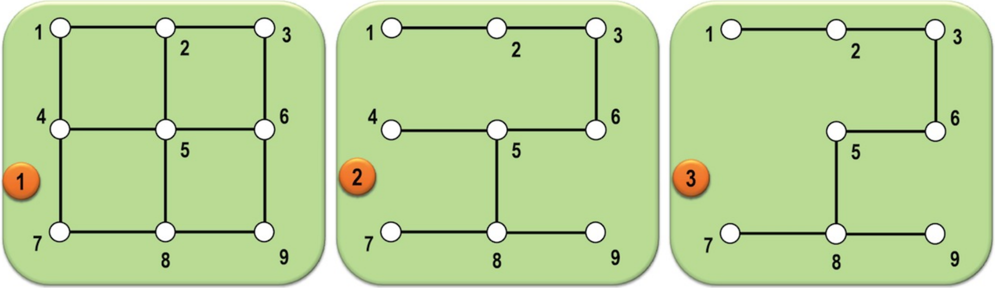
Definição

Todo grafo G conexo possui pelo menos uma árvore que contém todos os seus vértices.

Uma árvore geradora de um grafo G é um subgrafo conexo e acíclico que possui todos os vértices originais de G e um subconjunto das arestas originais de G.

Como consequência das propriedades de uma árvore, todo grafo conexo possui pelo menos uma árvore geradora.

Árvores Geradoras



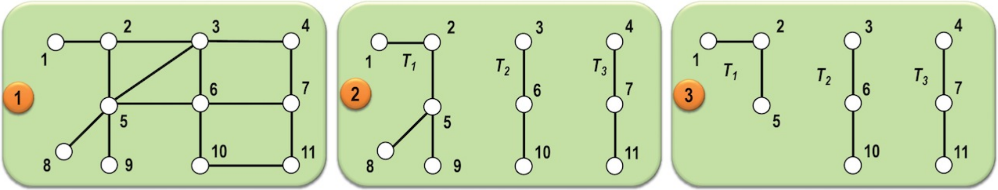
Grafo de exemplo, árvore geradora e uma árvore não geradora.

Florestas

Definições

Uma floresta é um conjunto de árvores sem vértices em comum.

Uma floresta geradora é uma floresta que contém todos os vértices de um grafo.



Grafo de exemplo e florestas. A primeira floresta é geradora.

Árvore Geradora de Custo Mínimo e Máximo

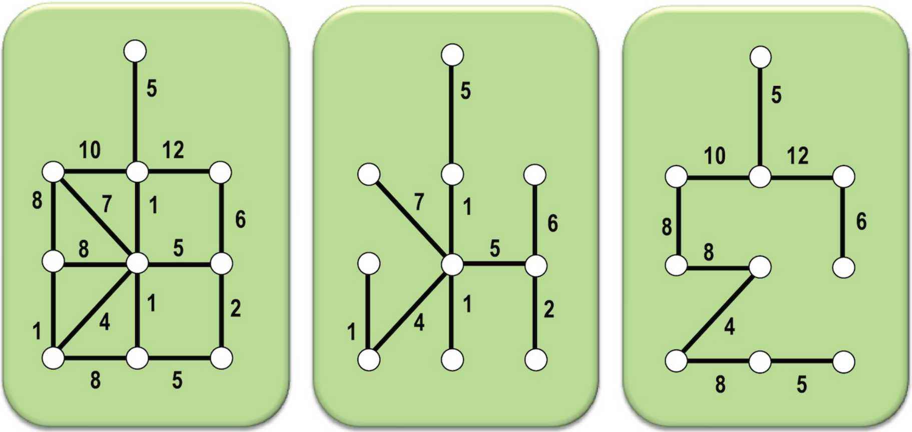
Definição

A árvore geradora de custo mínimo é a árvore geradora de menor custo dentre todas as possíveis em um grafo.

Analogamente, árvore geradora de custo máximo é a árvore geradora de maior custo dentre todas as possíveis em um grafo.

A determinação de ambas as árvores descritas pode ser feita em tempo **determinístico polinomial** por algoritmos gulosos.

Árvore Geradora de Custo Mínimo e Máximo



Grafo de exemplo, árvore geradora de custo mínimo e árvore geradora de custo máximo.

Evolução da Complexidade

Um dos primeiros algoritmos para determinação de árvores geradoras mínimas data do ano de 1928.

De lá para cá, a complexidade dos algoritmos evoluiu de $O(m \log n)$ para $O(m)$, cuja implementação data de 2008.

Os Básicos

Dois dos algoritmos mais populares para determinação de árvores geradoras mínimas, ambos gulosos, remetem ao final da década de 50: o algoritmo de **Prim** e o Algoritmo de **Kruskal**.

O Algoritmo de Prim

Princípio

Incluir, de forma gulosa, um a um, os vértices da árvore geradora mínima.

O algoritmo parte de qualquer vértice do grafo e, a cada passo, acrescenta a aresta de menor peso incidente ao conjunto de vértices que já foram selecionados e que possui uma extremidade em vértices no conjunto de não selecionados.

Terminologia

- T_{min}: Conjunto de arestas que define a árvore geradora mínima;
- T: Conjunto dos vértices já selecionados pelo algoritmo;
- N: Conjunto dos vértices não selecionados pelo algoritmo;
- $\setminus$: subtração em conjuntos.

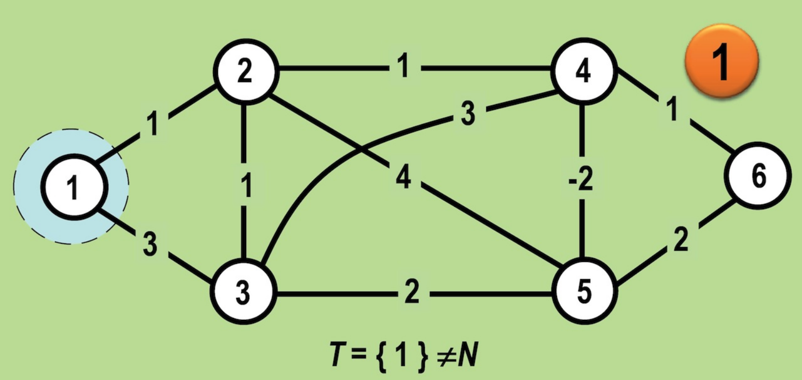
Entrada: Grafo $G = (V, A)$ e matriz de pesos D=$\{d_{ij}\}$ para todas as arestas $\{i, j\}$

Escolha qualquer vértice $i \in V$;
$T \leftarrow \{i\}$;
$N \leftarrow V \setminus i$;
$T_{min} \leftarrow \emptyset$;
enquanto $|T| \neq n$ **faça**
    Encontre a aresta $\{j, k\} \in A$ tal que $j \in T$, $k \in N$ e d_{jk} é mínimo;
    $T \leftarrow T \cup \{k\}$;
    $N \leftarrow N \setminus \{k\}$;
    $T_{min} \leftarrow T_{min} \cup \{j, k\}$;
fim

Complexidade

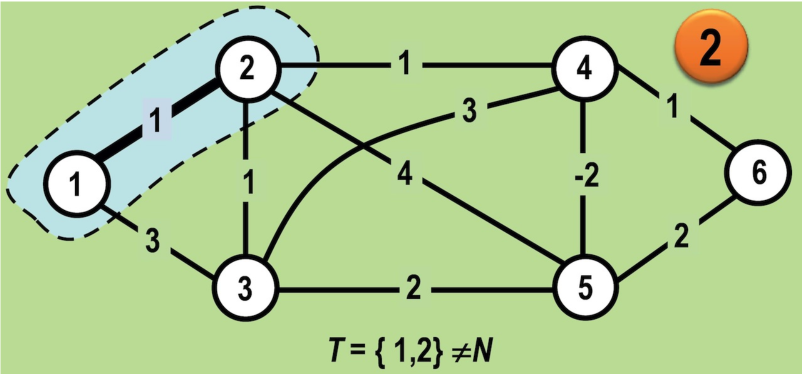
- Utilizando-se uma matriz de adjacências e uma busca linear na mesma, a complexidade é $O(n^2)$, por conta da aplicação repetidas vezes do procedimento que encontra a aresta de peso mínimo;
- Usando heaps binárias, o algoritmo pode ser implementado em $O(m \log n)$;
- Usando heaps de Fibonacci, o algoritmo pode ser implementado em $O(n \log n + m)$.

Exemplo



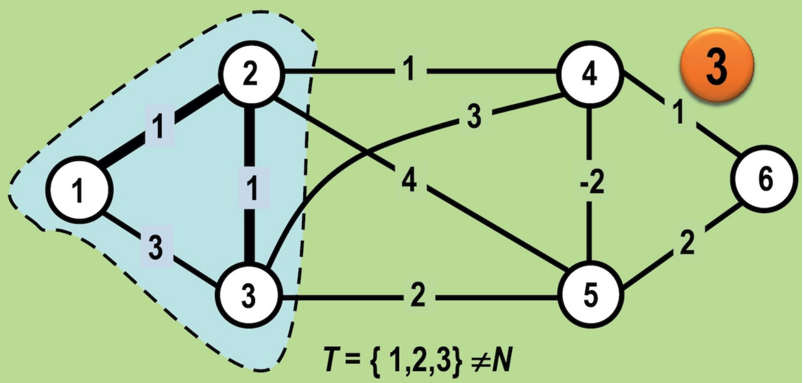
Grafo de exemplo. O vértice 1 é o primeiro a ser escolhido.

Exemplo



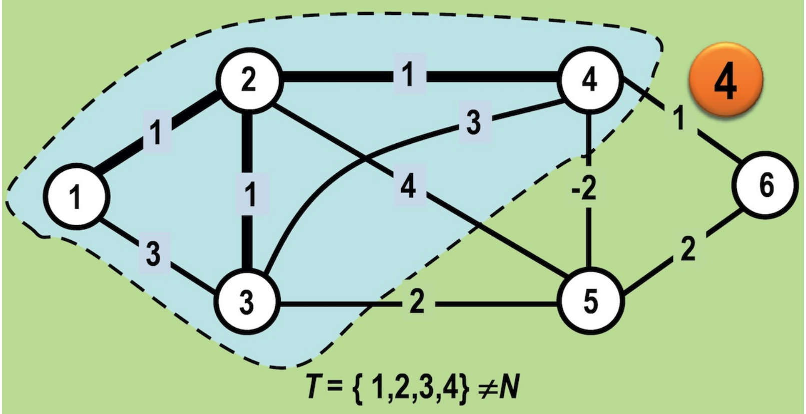
Inserção do vértice 2 e da aresta {1, 2}.
A região em azul indica os vértices escolhidos.

Exemplo



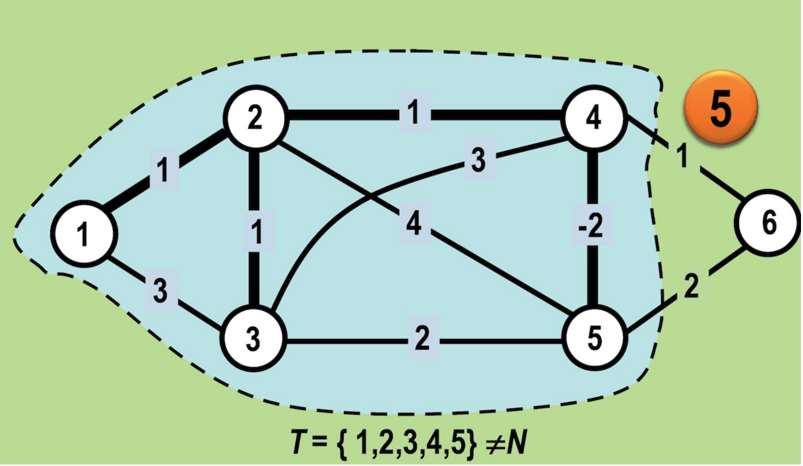
Inserção do vértice 3 e da aresta {2, 3}.

Exemplo



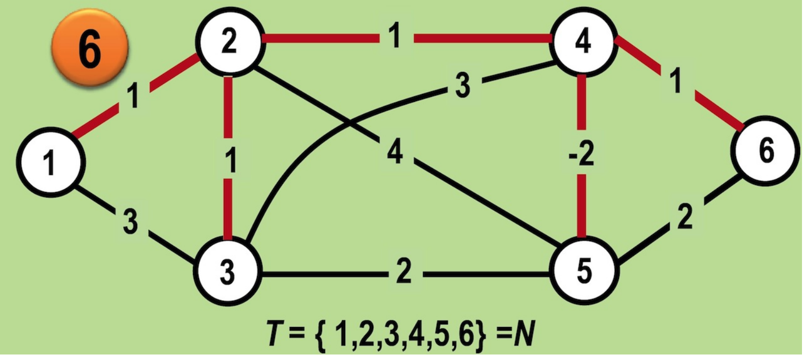
Inserção do vértice 4 e da aresta {2, 4}.

Exemplo



Inserção do vértice 5 e da aresta {4, 5}.

Exemplo



Inserção do vértice 6 e da aresta {4, 6}.
A árvore geradora mínima foi determinada.

O Algoritmo de Kruskal

Princípio

Incluir na árvore, a cada iteração, a aresta de menor custo que não formar ciclo.

Consequemente, processar $n - 1$ iterações;

O raciocínio está voltado para a formação da árvore a partir da inclusão de arestas, e não de vértices, como no algoritmo de Prim.

Terminologia

- H: Vetor de arestas, ordenadas de acordo com os pesos;
- T: Conjunto de arestas que define a árvore geradora mínima;
- $\cup$: união em conjuntos.

Algoritmo de Kruskal

Entrada: Grafo $G = (V, A)$ e matriz de pesos D=$\{d_{ij}\}$ para todas as arestas $\{i, j\}$

Ordene as arestas em ordem não decrescente de pesos d_{ij} no vetor H;

$T \leftarrow h_1$;

$i \leftarrow 2$;

enquanto $j < n - 1$ **faça**

    se $T \cup h_i$ *é um grafo acíclico* **então**

        $T \leftarrow T \cup h_i$;

        $j \leftarrow j + 1$;

    fim

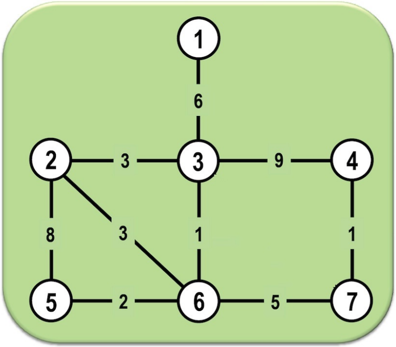
    $i \leftarrow i + 1$;

fim

Algoritmo de Kruskal

Complexidade

- A ordenação das arestas pode ser feita em $O(m\log m)$;
- A escolha das arestas é realizada $O(m)$ vezes;
- A verificação se o grafo é acíclico exige complexidade $O(m)$;
- Logo, em problemas sem características particulares, a complexidade é $O(m\log m)$.

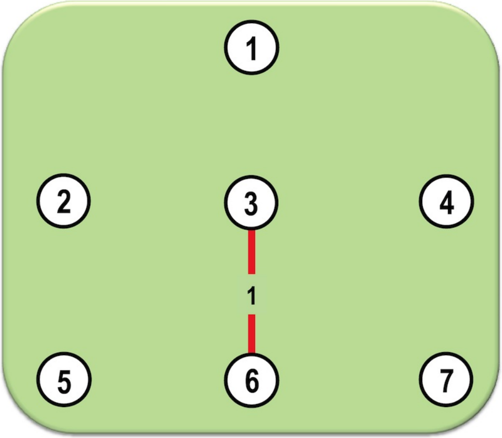


Vetor *H*

h_1 - (3,6) = 1; h_2 - (4,7) = 1; h_3 - (5,6) = 2;
h_4 - (2,3) = 3; h_5 - (2,6) = 3; h_6 - (6,7) = 5
h_7 - (1,3) = 6; h_8 - (2,5) = 8; h_9 - (3,4) = 9

Grafo de exemplo e vetor *H* desordenado.

Exemplo

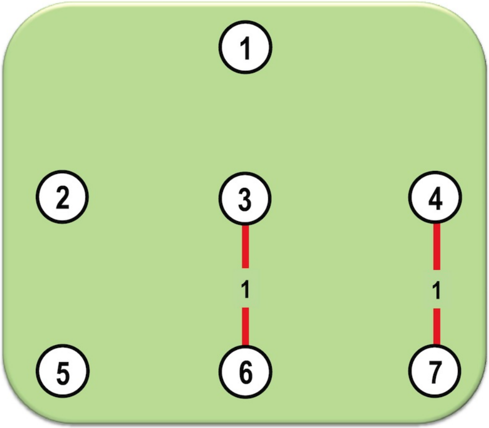


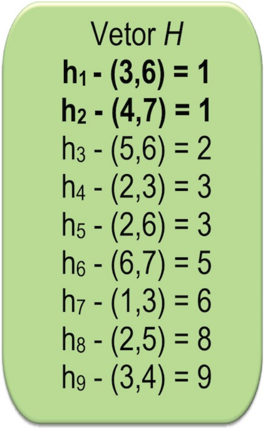
Vetor H

h_1 - (3,6) = 1
h_2 - (4,7) = 1
h_3 - (5,6) = 2
h_4 - (2,3) = 3
h_6 - (6,7) = 5
h_7 - (1,3) = 6
h_8 - (2,5) = 8
h_9 - (3,4) = 9

Inserção da primeira aresta em T.

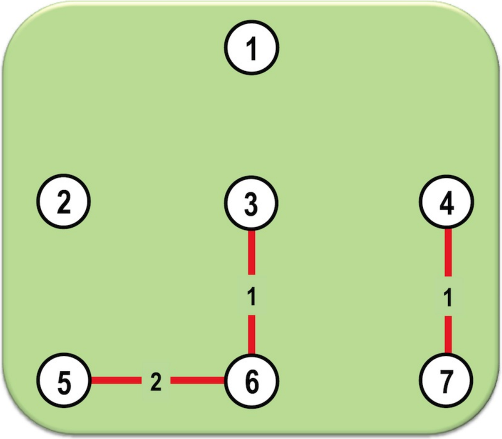
Exemplo





Inserção da segunda aresta em T.

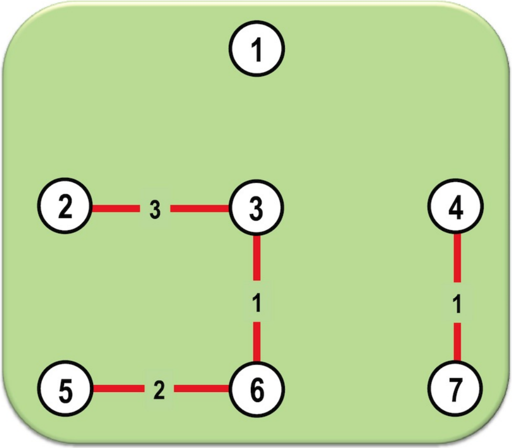
Exemplo



Vetor H

h_1 - (3,6) = 1
h_2 - (4,7) = 1
h_3 - (5,6) = 2
h_4 - (2,3) = 3
h_5 - (2,6) = 3
h_6 - (6,7) = 5
h_7 - (1,3) = 6
h_8 - (2,5) = 8
h_9 - (3,4) = 9

Inserção da terceira aresta em T.

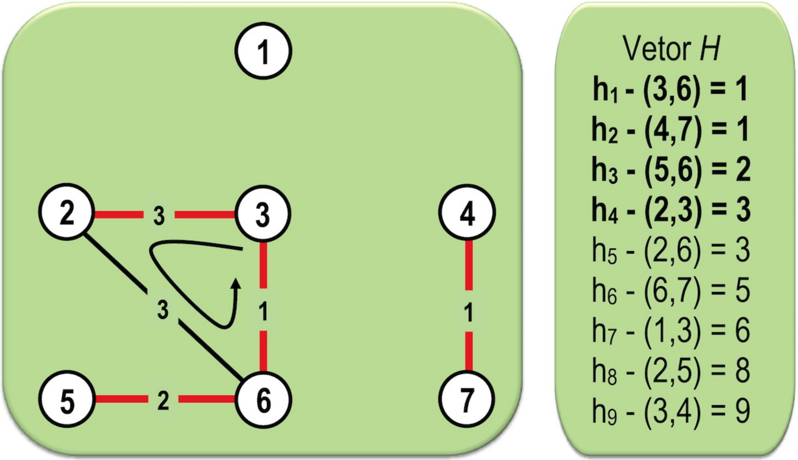


Vetor H

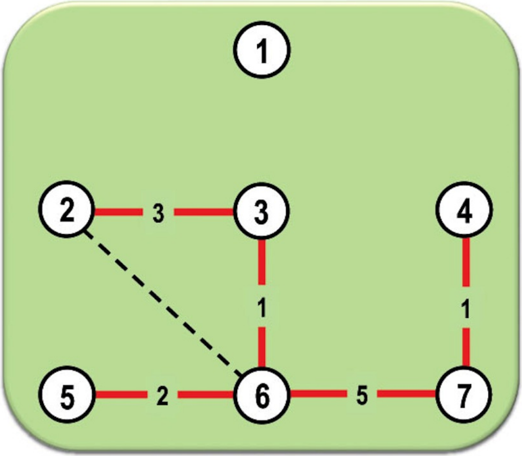
h_1 - (3,6) = 1
h_2 - (4,7) = 1
h_3 - (5,6) = 2
h_4 - (2,3) = 3
h_5 - (2,6) = 3
h_6 - (6,7) = 5
h_7 - (1,3) = 6
h_8 - (2,5) = 8
h_9 - (3,4) = 9

Inserção da quarta aresta em T.

Exemplo



Tentativa de inserção da quinta aresta em T.



Vetor H

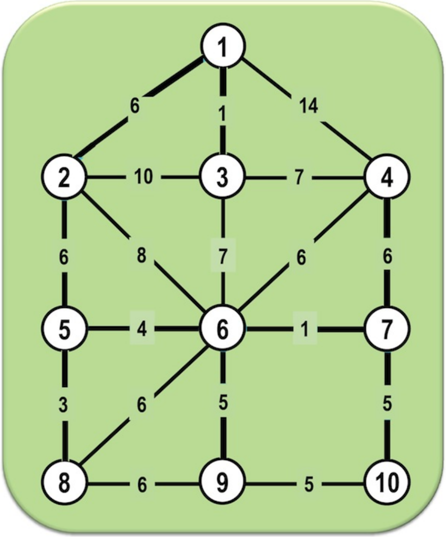
h_1 - (3,6) = 1
h_2 - (4,7) = 1
h_3 - (5,6) = 2
h_4 - (2,3) = 3
~~h_5 - (2,6) = 3~~
h_6 - (6,7) = 5
h_7 - (1,3) = 6
h_8 - (2,5) = 8
h_9 - (3,4) = 9

Inserção da quinta aresta em T.

Discussão

Algoritmo de Prim vs. Algoritmo de Kruskal

Os algoritmos de Prim e Kruskal, quando aplicados a um mesmo grafo, produzem a mesma árvore geradora mínima?



Dúvidas?