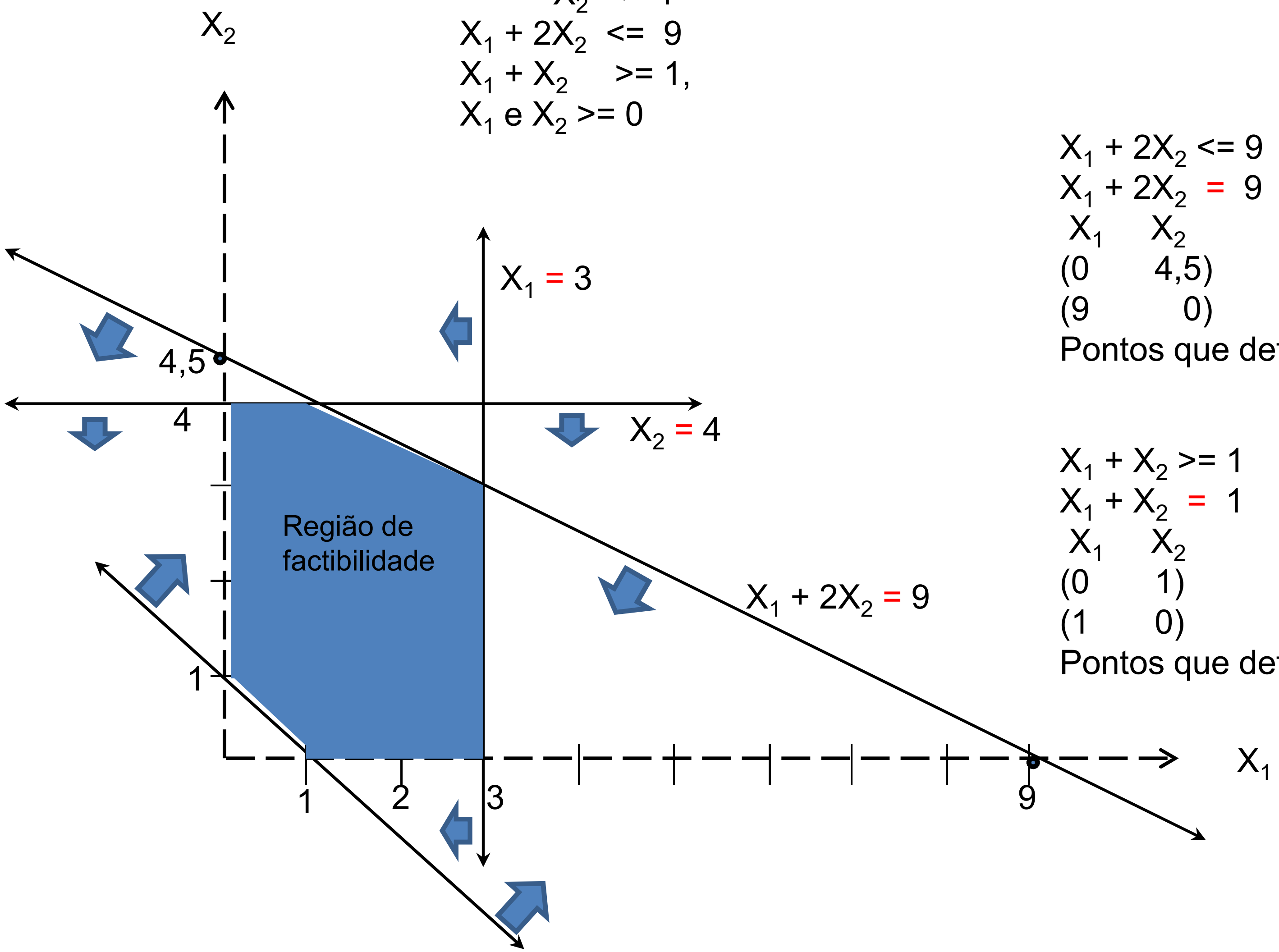
RESOLUÇÃO GRÁFICA

Aula 4

Prof. Gustavo Peixoto Silva
Departamento de Computação
Univ. Federal de Ouro Preto

Max $Z = 5X_1 + 2X_2$ s.a

$$
\begin{aligned}
X_1 & & \le 3\\
& X_2 & \le 4\\
X_1 + 2X_2 & & \le 9\\
X_1 + X_2 & & \ge 1,\\
X_1 \text{ e } X_2 & & \ge 0
\end{aligned}
$$



$X_1 + 2X_2 \le 9$

$X_1 + 2X_2 = 9$

X_1	X_2
(0	4,5)
(9	0)

Pontos que definem a reta

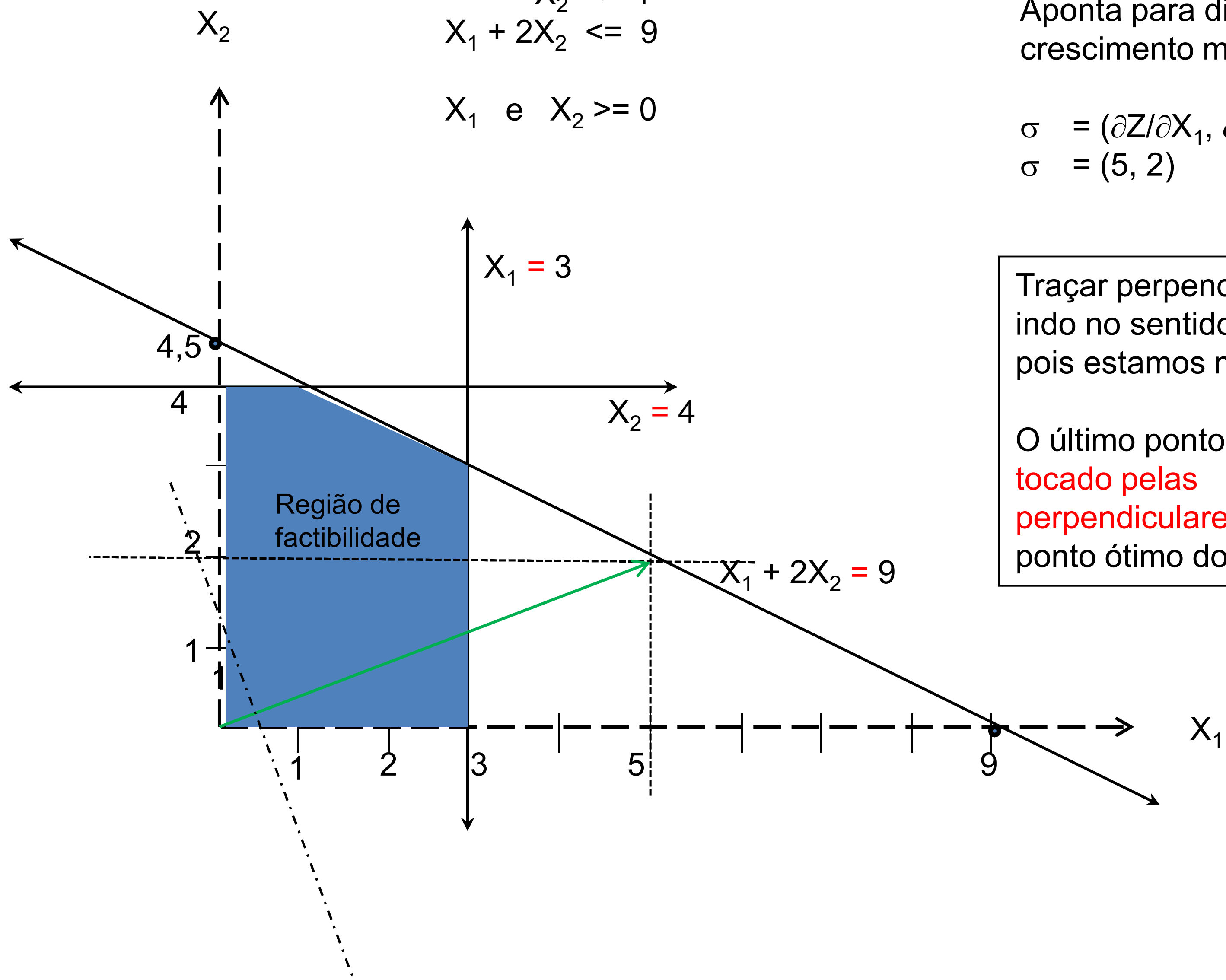
$X_1 + X_2 \ge 1$

$X_1 + X_2 = 1$

X_1	X_2
(0	1)
(1	0)

Pontos que definem a reta

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } Z = 5X_1 + 2X_2 \text{ s.a} \\
&X_1 \leq 3 \\
&X_2 \leq 4 \\
&X_1 + 2X_2 \leq 9 \\
&X_1 \text{ e } X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Vetor Gradiente de Z
Aponta para direção de crescimento máximo de Z.

$\sigma = (\partial Z/\partial X_1, \partial Z/\partial X_2)$

$\sigma = (5, 2)$

Traçar perpendiculares a σ indo no sentido do vetor, pois estamos maximizando.

O último ponto da RF a ser tocado pelas perpendiculares será o ponto ótimo do problema.

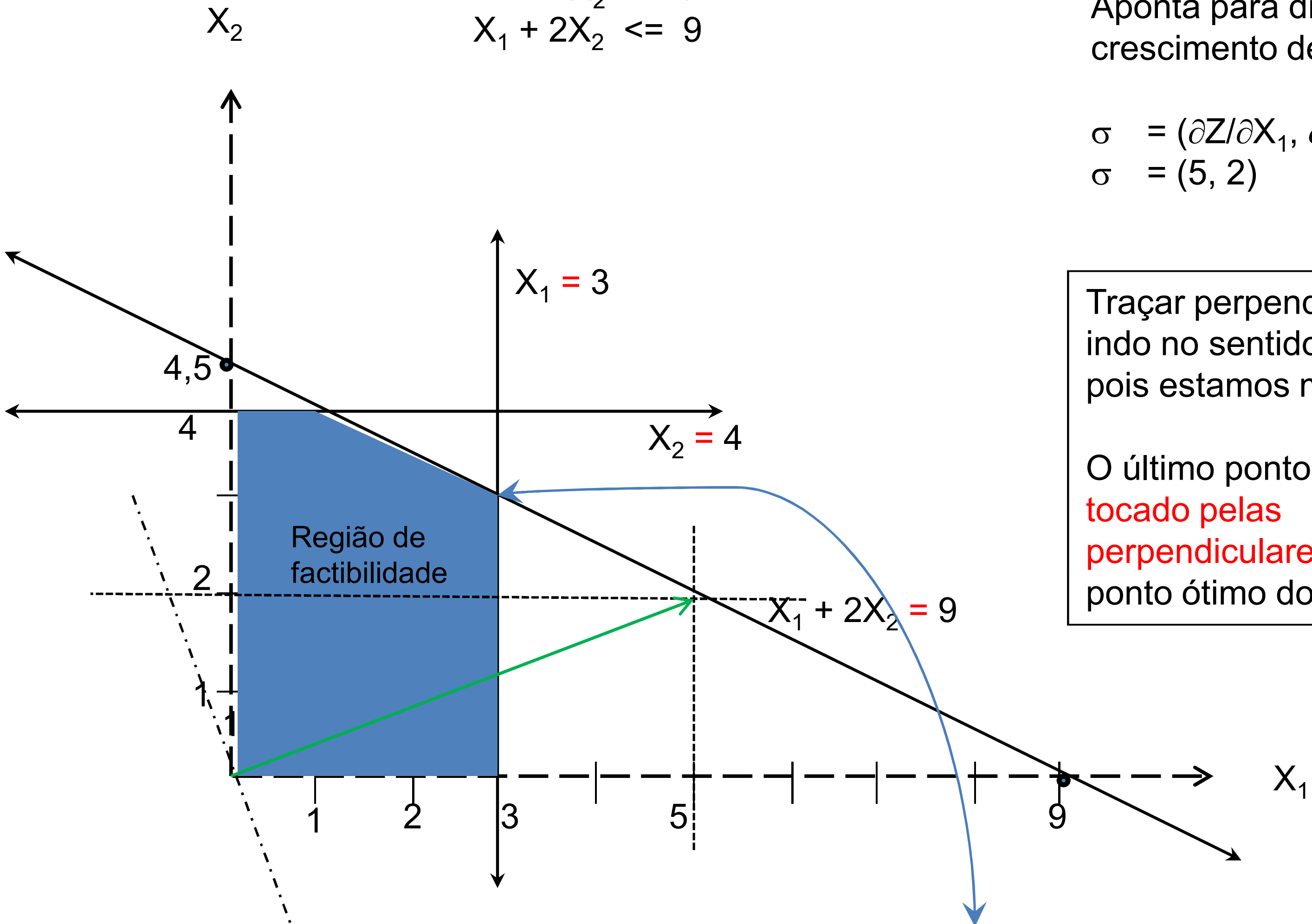
$$\text{Max } Z = 5X_1 + 2X_2 \text{ s.a}$$

$$\begin{aligned} X_1 \quad &\leq 3 \\ X_2 \quad &\leq 4 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 9 \end{aligned}$$

Vetor Gradiente de Z
Aponta para direção de crescimento de Z.

$\sigma = (\partial Z/\partial X_1, \partial Z/\partial X_2)$

$\sigma = (5, 2)$



Traçar perpendiculares a σ indo no sentido do vetor, pois estamos maximizando.

O último ponto da RF a ser tocado pelas perpendiculares será o ponto ótimo do problema.

Portanto o ponto ótimo é obtido pelo sistema:

$$\left.\begin{aligned} X_1 \quad &= 3 \\ X_1 + 2X_2 &= 9 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &X^* = (3, 3) \text{ e} \\ &Z(X^*) = 5*3 + 2*3 = 21 \end{aligned}$$

Max $Z = 5X_1 + 2X_2$ s.a

$X_1 \qquad\quad <= 3$

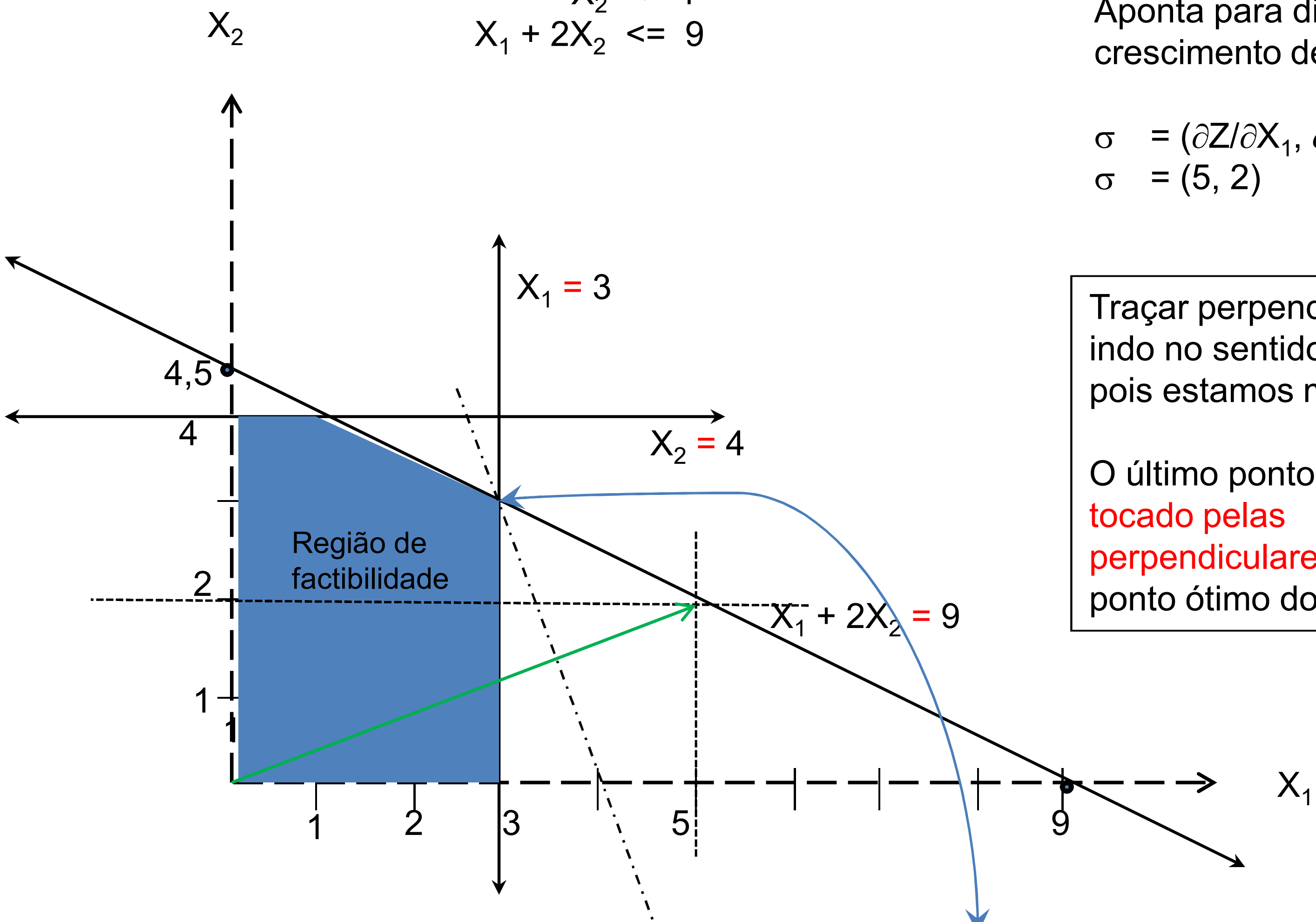
$\qquad\quad X_2 \; <= 4$

$X_1 + 2X_2 \; <= \; 9$

Vetor Gradiente de Z
Aponta para direção de
crescimento de Z.

$\sigma \;\; = (\partial Z/\partial X_1, \partial Z/\partial X_2)$

$\sigma \;\; = (5, 2)$



Traçar perpendiculares a σ indo no sentido do vetor, pois estamos maximizando.

O último ponto da RF a ser tocado pelas perpendiculares será o ponto ótimo do problema.

Portanto o ponto ótimo é obtido pelo sistema:

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \qquad\; = 3 \\ X_1 + 2X_2 = 9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} X^* = (3, 3) \text{ e} \\ Z(X^*) = 5*3 + 2*3 = 21 \end{array}$$

Exercício 2.Resolva graficamente

Min $Z = x_1 + 2x_2$

$$
\begin{aligned}
-x_1 + 3x_2 &<= 9 \\
x_1 - 2x_2 &<= 1 \\
2x_1 + x_2 &<= 10 \\
2x_1 + x_2 &>= 5 \\
x_1 >= 0,\ x_2 &>= 0
\end{aligned}
$$

Planejamento da Produção Multiperíodo

Aula 4.1

Planejamento da produção com múltiplos períodos

Nos exemplos anteriores tratamos de modelos estáticos ou mono-período. Neste exemplo veremos um modelo de PL para determinar a melhor decisão para vários períodos de produção. Modelos dinâmicos surgem quando são tomadas decisões para mais de um período e as decisões de um período influenciam as decisões dos períodos posteriores.

Por exemplo, considere uma empresa que deve determinar quanto produzir em cada mês. Se ela produz uma grande quantidade de produtos em um mês, ela pode reduzir sua produção no mês seguinte. Eventualmente, pode ser mais interessante produzir antes e guardar o excedente em estoque do que produzir toda a demanda no período demandado. Sazonalidade!!!

M2.3 - Planejamento da produção com múltiplos períodos (Wayne L. Winston)

Uma fábrica deve determinar quantos botes produzir nos próximos 4 trimestres. A demanda mínima durante cada um dos próximos trimestres é de 40, 60, 75 e 25 botes. A fábrica deve atender à demanda sem atrasos. No início de cada trimestre, a fábrica deve definir quantos botes produzir no trimestre.

Vamos considerar que os botes produzidos em um trimestre podem ser usados para atender à demanda daquele trimestre ou de qualquer trimestre posterior. Em cada trimestre a fábrica pode produzir até 55 botes com um custo de $400,00 por bote.

Ao final de cada trimestre, depois que ocorreu a produção e satisfeita a demanda do trimestre, incorre um custo por estocagem de $45,00 por unidade. Faça um modelo de PL para planejar a produção minimizando o custo de produção e de estocagem nos próximos 4 trimestres. Considere que o estoque inicial é de 10 botes e o final de 5.

Planejamento da produção com múltiplos períodos (Wayne L. Winston)

X_i = num de botes produzidos no trimestre i

Variável auxiliar E_i = num de botes no estoque no final do trimestre i

Custo = $400(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + 45(E_1 + E_2 + E_3 + E_4)$

Equação de transição de estoque:

Estoque no final do trimestre i = estoque final do trimestre i -1

+ produção no trimestre i - demanda no trimestre i

Se a demanda no trimestre i for D_i, a equação de transição de estoque fica da seguinte forma:

$$E_i = E_{i-1} + X_i - D_i$$

A demanda no trimestre i será atendida se $E_i >= 0$ pois

$E_{i-1} + X_i >= D_i$ ou seja, $E_i = E_{i-1} + X_i - D_i >= 0$

Portanto o modelo fica da seguinte forma:

Planejamento da produção com múltiplos períodos (Wayne L. Winston)

X_i = num de botes produzidos no trimestre i

E_i = num de botes no estoque no final do trimestre i

$$Min = 400(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + 45(E_1 + E_2 + E_3 + E_4)$$

$X_1 <= 55;$ $X_2 <= 55;$ $X_3 <= 55;$ $X_4 <= 55;$

$E_1 = 10 + X_1 – 40;$ $E_2 = E_1 + X_2 – 60;$

$E_3 = E_2 + X_3 – 75;$ $E_4 = E_3 + X_4 – 25;$

$E_1 >= 0;$ $E_2 >= 0;$ $E_3 >= 0;$ $E_4 = 5;$

$X_1 >= 0;$ $X_2 >= 0;$ $X_3 >= 0;$ $X_4 >= 0;$ e inteiros

M2.4 - Planejamento da produção com múltiplos períodos (Wayne L. Winston)

Uma fábrica deve determinar quantos botes produzir nos próximos 4 trimestres. A demanda durante cada um dos próximos trimestres é de 40, 60, 75 e 25 botes. A fábrica deve atender à demanda sem atrasos. No início de cada trimestre, a fábrica deve definir quantos botes produzir no trimestre.

Vamos considerar que os botes produzidos em um trimestre podem ser usados para atender à demanda daquele trimestre ou de qualquer trimestre posterior. Em cada trimestre a fábrica pode produzir até 55 botes com um custo de $400,00 por bote. Com a contratação de empregados extras, eles podem produzir até 30 botes adicionais por trimestre a um custo total de $450,00 por bote.

Ao final de cada trimestre, depois que ocorreu a produção e satisfeita a demanda do trimestre, incorre um custo por estocagem de $45,00 por unidade. Faça um modelo de PL para planejar a produção minimizando o custo de produção e de estocagem nos próximos 4 trimestres. Considere que o estoque inicial é de 10 botes e o final igual a 20.

Planejamento da produção com múltiplos períodos (Wayne L. Winston)

X_i = num de botes produzidos por trabalhadores regulares no trimestre i

Y_i = num de botes produzidos por trabalhadores extras no trimestre i

E_i = num de botes no estoque no final do trimestre i

Custo = $400(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + 450(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + 45(E_1 + E_2 + E_3 + E_4)$

Equação de transição de estoque:

Estoque no final do trimestre i = estoque final do trimestre i -1

+ produção no trimestre i - demanda no trimestre i

Esta equação é a chave para a maioria dos modelos de planejamento da produção com múltiplos períodos. Se a demanda no trimestre i for D_i, a equação de transição de estoque fica da seguinte forma:

$E_i = E_{i-1} + X_i + Y_i – D_i$

A demanda no trimestre i será atendida se $E_i >= 0$ pois

$E_{i-1} + X_i + Y_i >= D_i$ ou seja, $E_i = E_{i-1} + X_i + Y_i – D_i >= 0$

Portanto o modelo fica da seguinte forma:

Planejamento da produção com múltiplos períodos (Wayne L. Winston)

X_i = num de botes produzidos por trabalhadores regulares no trimestre i

Y_i = num de botes produzidos por trabalhadores extras no trimestre i

E_i = num de botes no estoque no final do trimestre i

$$\text{Min} = 400(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + 450(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + 45(E_1 + E_2 + E_3 + E_4)$$

$X_1 <= 55;$	$X_2 <= 55;$	$X_3 <= 55;$	$X_4 <= 55;$
$Y_1 <= 30;$	$Y_2 <= 30;$	$Y_3 <= 30\ ;$	$Y_4 <= 30;$

$E_1 = 10 + X_1 + Y_1 – 40;$ $\quad$ $E_2 = E_1 + X_2 + Y_2 – 60;$

$E_3 = E_2 + X_3 + Y_3 – 75;$ $\quad$ $E_4 = E_3 + X_4 + Y_4 – 25;$

$E_1 >= 0;$	$E_2 >= 0;$	$E_3 >= 0;$	$E_4 = 20;$
$X_1 >= 0;$	$X_2 >= 0;$	$X_3 >= 0;$	$X_4 >= 0;$
$Y_1 >= 0;$	$Y_2 >= 0;$	$Y_3 >= 0;$	$Y_4 >= 0;$

M2.5 - Programação da produção – Exerc. 4 pag 23 – ver Winston 99

A demanda de sorvete durante os meses de dezembro janeiro e fevereiro de uma sorveteria é de no mínimo 500, 600 e 400 caixas respectivamente. Dois atacadistas, 1 e 2 fornecem o sorvete. O número máximo de caixas que cada fornecedor pode entregar são 400 por mês e os preços são dados na tabela. A sorveteria pode comprar o necessário para um mês e armazenar para usar nos meses seguintes. O custo de estocagem de cada caixa é de $5 por mês e deve ser calculado pelo número de caixas em estoque no final o mês. Faça um modelo de PL para a compra ótima de sorvete dos fornecedores. Considere o estoque inicial igual a zero e final igual a 10.

	Preço ($) por caixa no mês		
	Dezembro	Janeiro	Fevereiro
Fornecedor1	100	110	120
Fornecedor2	115	108	125

Planejamento da produção com múltiplos períodos (Wayne L. Winston)

$F1_j$ = cxs de sorvete adquiridas do fornecedor 1 no mês j, j = dez, jan, fev

$F2_j$ = cxs de sorvete adquiridas do fornecedor 2 no mês j, j = dez, jan, fev

E_j = cxs de sorvete em estoque no final do mês j, j = dez, jan, fev

$$\text{Min} = 100F1_{dez}+110F1_{jan}+120F1_{fev}+115F2_{dez}+108F2_{jan}+125F2_{fev} + 5(E_{dez} + E_{jan} + E_{fev})$$

$F1j <= 400$, j = dez, jan, fev;

$F2_j <= 400$, j = dez, jan, fev;

$F1_{dez} + F2_{dez} >= 500;$

$F1_{jan} + F2_{jan} + E_{dez} >= 600;$

$F1_{fev} + F2_{fev} + E_{jan} >= 400;$

$E_{dez} = F1_{dez} + F2_{dez} - 500;$

$E_{jan} = F1_{jan} + F2_{jan} + E_{dez} – 600;$

$E_{fev} = F1_{fev} + F2_{fev} + E_{jan} – 400;$

$E_{fev} = 10;$

$F1_j >= 0$ e inteiro para j = dez, jan, fev;

$F2_j >= 0$ e inteiro para j = dez, jan, fev

$E_j >= 0$ e inteiro para j = dez, jan, fev

EXERCÍCIOS

M3.3 - Problema da Dieta - Puccini 72

Uma pessoa é forçada a fazer uma dieta alimentar que fornece, diariamente, pelo menos as seguintes quantidades, em mg, de vitaminas: 80 de A, 70 de B, 100 de C e 60 de D.

A dieta deverá incluir leite, arroz, feijão e carne, que contém os seguintes miligramas de vitaminas em cada uma de suas unidades de medida:

Vitaminas	Leite (l)	Arroz (kg)	Feijão (kg)	Carne (kg)
A	10	5	9	10
B	8	7	6	6
C	15	3	4	7
D	20	2	3	9
Custo unitário	1,85	2,00	3,40	12,00

Deseja-se saber o consumo diário de cada alimento de tal maneira que a dieta seja satisfeita com o menor custo possível.

É preciso programar a produção agrícola alocando as atividades para 3 regiões (fazendas). Os dados técnicas são:

Regiões	Área total em alqueires	Disp. de água (m^3)
A	400	600
B	600	800
C	300	380

Produtos	Área máxima –alq	Consumo de água -m^3/alq	Lucro por área - $/alq
Trigo	600	3	400
Algodão	500	2	300
Soja	325	1,5	100

Formule o problema para a alocação das atividades nas respectivas áreas. Apresentar apenas na forma explícita.