Projeto e Análise de Algoritmos

Aula 15: Classes de Complexidade P, NP (GPV 8.1,8.2)

DECOM/UFOP
2020
Anderson Almeida Ferreira
Adaptado do material elaborado por:
Andréa Iabrudi Tavares

Objetivos

- Saber definir o que é um problema de busca e um problema de decisão
- Saber definir classes de complexidade P e NP
- Entender a pergunta P≠NP
- Bibliografia
  - DPV 8.1,8.2

Melhor Rota: Meu primeiro emprego

- Você foi contratado por uma empresa de distribuição de produtos de limpeza. Você será responsável pelo sistema que gera as rotas para os 10 estabelecimentos atendidos.
- Seu chefe espera que você gere uma rota que passe uma única vez por cada um dos estabelecimentos, com a menor distância possível.

Melhor Rota: Modelagem

- O modelo de seu problema é um grafo $G=(V,E)$:
  - cada cidade é um nó v, $n = |V|$
  - cada aresta $e = (i,j)$ tem um peso $w(e)$, a distância entre os estabelecimentos.
- O **problema de busca** é:
  - Encontre um ciclo C em G que passe por cada nó exatamente uma vez e tenha tamanho mínimo.

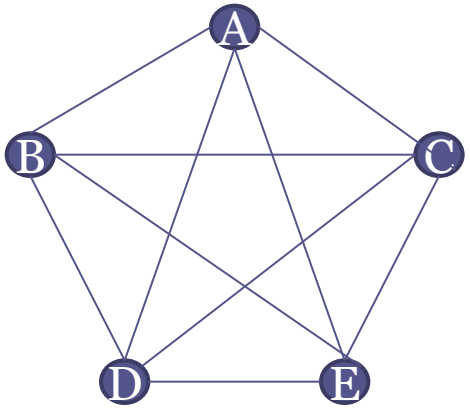
$$\min w(C) = \sum_{i=1}^{n-1} w(v_i, v_{i+1}) + w(v_n, v_1)$$

onde são válidos

$$C = (v_1, \cdots, v_n) \mid \forall i, j \; i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j (v_n, v_1) \in E, \quad \forall 1 \leq i < n (v_i, v_{i+1}) \in E$$

Exemplo com 5 estabelecimentos

	Aurora	Bacanão	Camarada	Dasdona	Enlevo
Aurora	0	5	2	1	3
Bacanão		0	2	3	4
Camarada			0	2	2
Dasdona				0	1
Enlevo					0



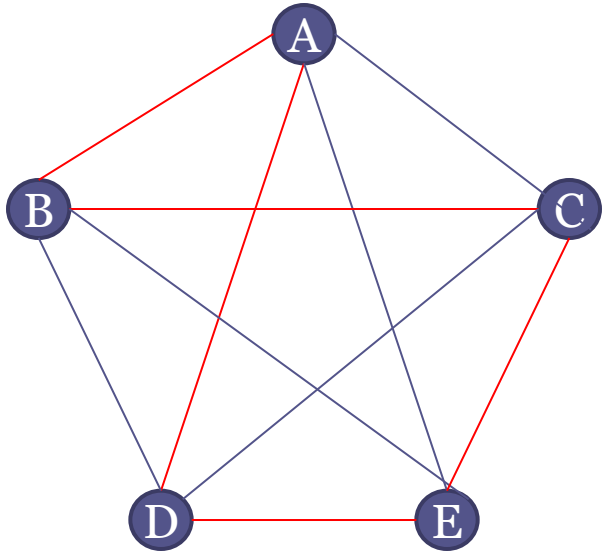
Melhor Rota: Solução Gulosa

- Usando seus conhecimentos até o momento, você tenta uma abordagem gulosa para achar a solução para o problema.
- Como no algoritmo de Prim para menor árvore, seu algoritmo sempre escolhe um novo vértice para entrar no ciclo baseado no peso das arestas para o último vértice inserido.

Exemplo com 5 estabelecimentos

	A	B	C	D	E
A	0	5	2	1	3
B	5	0	2	3	4
C	2	2	0	2	2
D	1	3	2	0	1
E	3	4	2	2	0

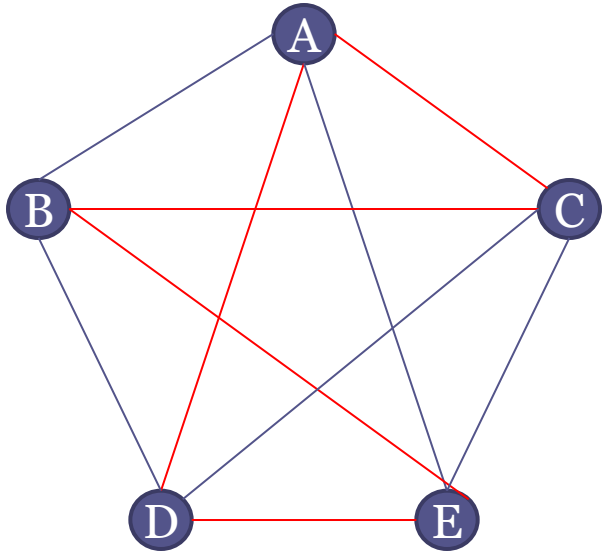
Tamanho = 11



Infelizmente, há uma solução melhor

	A	B	C	D	E
A	0	5	2	1	3
B	5	0	2	3	4
C	2	2	0	2	2
D	1	3	2	0	1
E	3	4	2	2	0

Tamanho = 10



Melhor Rota: Solução Ótima Exaustiva

- Após várias tentativas, você se entrega e decide inspecionar todos os ciclos possíveis.
- Como existem 9! ciclos diferentes (todas as permutações de estabelecimentos), seu algoritmo é O(n!). Mas, garantidamente, a menor rota será identificada.
- Você implementa seu algoritmo e encontra a rota num tempo bastante razoável. Seu chefe e você ficam felizes.

Melhor Rota: A empresa se expande...

- **Boas notícias**: seu algoritmo gerou economia e, com os novos investimentos, o negócio está se expandindo e 20 novos estabelecimentos serão atendidos.

- **Péssimas notícias**: seu algoritmo, tão rápido para os 10 estabelecimentos, está executando há dois dias com o novo grafo de 30 estabelecimentos e até agora nada! Por quê?????

Crescimento de funções de complexidade

Função de complexidade	Tamanho da Instância do Problema					
	10	20	30	40	50	60
n	0,00001 segundos	0,00002 segundos	0,00003 segundos	0,00004 segundos	0,00005 segundos	0,00006 segundos
n^2	0,0001 segundos	0,0004 segundos	0,0009 segundos	0,0016 segundos	0,0025 segundos	0,0036 segundos
n^3	0,001 segundos	0,008 segundos	0,027 segundos	0,064 segundos	0,125 segundos	0,216 segundos
n^5	0,1 segundos	3,2 segundos	24,3 segundos	1,7 minutos	5,2 minutos	13,0 minutos
2^n	0,001 segundos	1,0 segundos	17,9 minutos	12,7 dias	35,7 anos	366 séculos
3^n	0,059 segundos	58 minutos	6,5 anos	3855 séculos	2×10^8 séculos	$1,3 \times 10^{13}$ séculos

Será que a solução é comprar um computador melhor?

Maior instância que um computador resolve em 1 hora			
Função de complexidade	Computador Atual	Computador 100x mais rápido	Computador 1000x mais rápido
n	N	100 N	1000 N
n^2	M	10 M	31,6 M
n^3	Z	4,64 Z	10 Z
n^5	W	2,5 W	3,98 W
2^n	X	X + 6,64	X + 9,97
3^n	Y	Y + 4,19	Y + 6,29

Tabelas tiradas de Garey & Johnson 1979

É possível resolver Melhor Rota?

- Você acha que não pode obter uma solução ótima em tempo razoável. Como você pode convencer seu chefe disso?

Problemas de busca

- É uma relação R entre instâncias e soluções.
- **Verificação**
  - Dadas uma instância x e uma solução y do problema, deve-se **verificar** se $(x,y) \in R$.
  - Algoritmo C_R

$$C_R(x,y) = \begin{cases} \text{sim} & (x,y) \in R \\ \text{não} & (x,y) \notin R \end{cases}$$

- **Busca**
  - Dada uma instância x do problema, deve-se **encontrar** uma solução y tal que $(x,y) \in R$.
  - Algoritmo F_R

$$F_R(x) = \begin{cases} y & (x,y) \in R \\ \perp & \nexists y \mid (x,y) \in R \end{cases}$$

decom
departamento de computação

Exemplos de Problemas de Busca

- Satisfabilidade, Horn, 2-SAT
- Caixeiro Viajante, Árvore Geradora Mínima
- Maior caminho entre dois vértices, Menor caminho entre dois vértices
- Caminho de Rudrata (Hamiltoniano), Caminho Euleriano

Exemplos de problemas de busca

- Satisfabilidade ou SAT
  - Aplicações variam desde teste de chip e projeto de computadores a análise de imagens e engenharia de software.
  - Dada uma fórmula booleana na forma normal conjuntiva, encontre uma atribuição satisfatória ou então declare que nenhuma existe.
- O problema do caixeiro-viajante (tsp-traveling salesman problem)
  - Dado um conjunto de n vértices e todas as n(n-1)/2 distâncias entre eles, bem como um orçamento b, temos de encontrar um circuito, um ciclo que passe por todos os vértices exatamente uma vez, de custo total b ou menos – ou declarar que nenhum circuito desse tipo existe.

Exemplos de problemas de busca

- Euler e Rudrata (Hamilton)
  - Caminho Euleriano: Dado um grafo, encontre um caminho que contenha cada aresta exatamente uma vez – ou afirme que não existe tal caminho.
  - Caminho de Rudrata (Hamiltoniano): Dado um grafo, encontre um ciclo que visita cada vértice exatamente uma vez – ou afirme que não existe tal ciclo.

Exemplos de problemas de busca

- Conjunto independente, cobertura de vértices e clique
  - Conjunto independente – dado um grafo e um inteiro *g*, o objetivo é encontrar *g* vértices independentes, isto é, não existe aresta entre nenhum par deles.
  - Cobertura de vértices – dado um grafo e um orçamento *b*, encontre *b* vértices que cubram (toquem) cada aresta.
  - Clique – Dado um grafo e um objetivo *g*, encontre um conjunto de g vértices tal que todas as possíveis arestas entre eles estejam presentes.

Exemplos de problemas de busca

- Caminho mais longo – Dado um grafo G com pesos de arestas não-negativos e dois vértices s e t determinados e peso total de pelo menos g, encontre um caminho de s para t com peso total de pelo menos g.
- Mochila – Dados pesos inteiros $w_1, ..., w_n$ e valores inteiros $v_1, ..., v_n$ para n itens, além de uma capacidade W e um objetivo g, encontre um conjunto de itens cujo peso total é no máximo W e cujo valor total é pelo menos g.
- Soma de subconjuntos – Dado um conjunto de valores inteiros e um valor W, encontre um subconjunto desses valores que some exatamente W.

Otimização x Decisão

- Problema de **otimização**

$$\min w(C) = \sum_{i=1}^{n-1} w(v_i, v_{i+1}) + w(v_n, v_1)$$

$$C = (v_1, \cdots, v_n) \mid \forall i, j \; i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j (v_n, v_1) \in E, \quad \forall 1 \leq i < n (v_i, v_{i+1}) \in E$$

- Problema de **decisão** (sim/não)

$$\exists C \mid w(C) = \sum_{i=1}^{n-1} w(v_i, v_{i+1}) + w(v_n, v_1) \leq b ?$$

$$C = (v_1, \cdots, v_n) \mid \forall i, j \; i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j (v_n, v_1) \in E, \quad \forall 1 \leq i < n (v_i, v_{i+1}) \in E$$

- São equivalentes, então só problemas de decisão

Classe NP

- Classe de problemas para os quais se conhece um algoritmo de tempo polinomial para C_R.
  - Por que classe?
    - Conjunto, nenhum específico
  - Por que algoritmo?
    - Equivalência polinomial dos modelos (tese de Church-Turing)
  - Por que tempo?
    - Análise assintótica
    - Pior caso
  - Por que polinomial?
    - Aceitável na prática
    - Fechada sob várias operações

Definição de C_R para ordenação

- Instância: um vetor *A* de *n* elementos inteiros
- Solução: uma permutação *P* dos indíces (1 a *n)*
  - Representação através de um vetor P de *n* posições

- Algoritmo C_R
  - Recebe A e P como parâmetros,
  - Verifica se é permutação (lembre-se do linear...)
  - Verifica se essa permutação resulta em uma sequência ordenada (A[P[i]] <= A[P[i+1]])

Problema de Satisfabilidade

- *n* variáveis lógicas (falso/verdadeiro)
- uma fórmula lógica com and, or e not
  - Conjunção de disjunções
- Existe uma atribuição para as variáveis que torna a fórmula verdadeira?

$$(x \vee y \vee z)\ (x \vee \overline{y})\ (y \vee \overline{z})\ (z \vee \overline{x})\ (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$$

O problema de decisão da Melhor Rota pertence a NP?

- Existe um algoritmo polinomial que, dados o grafo, um limite e uma permutação dos nós de entrada, verifica se é uma solução?

- Quem não pertence a NP? Problemas de otimização!

Melhor Rota: Pertence a NP

- Algoritmo verifica se uma seqüência de vértices é solução para problema de decisão com limite k.
- O algoritmo é simples. Dada a seqüência de nós da rota proposta : $s = (v_1, \cdots, v_n)$
  1. É uma permutação . $v_i \neq v_j, \forall i \neq j$
  2. Existe aresta entre nós consecutivos.

     $$\forall i < n, e(v_i, v_{i+1}) \in E, e(v_n, v_1) \in E$$

  3. A soma dos pesos das arestas tem que ser menor ou igual ao limite. $k \leq \sum_{i=1}^{n-1} w(e(v_i, v_{i+1})) + w(e(v_n, v_1))$

Classe P

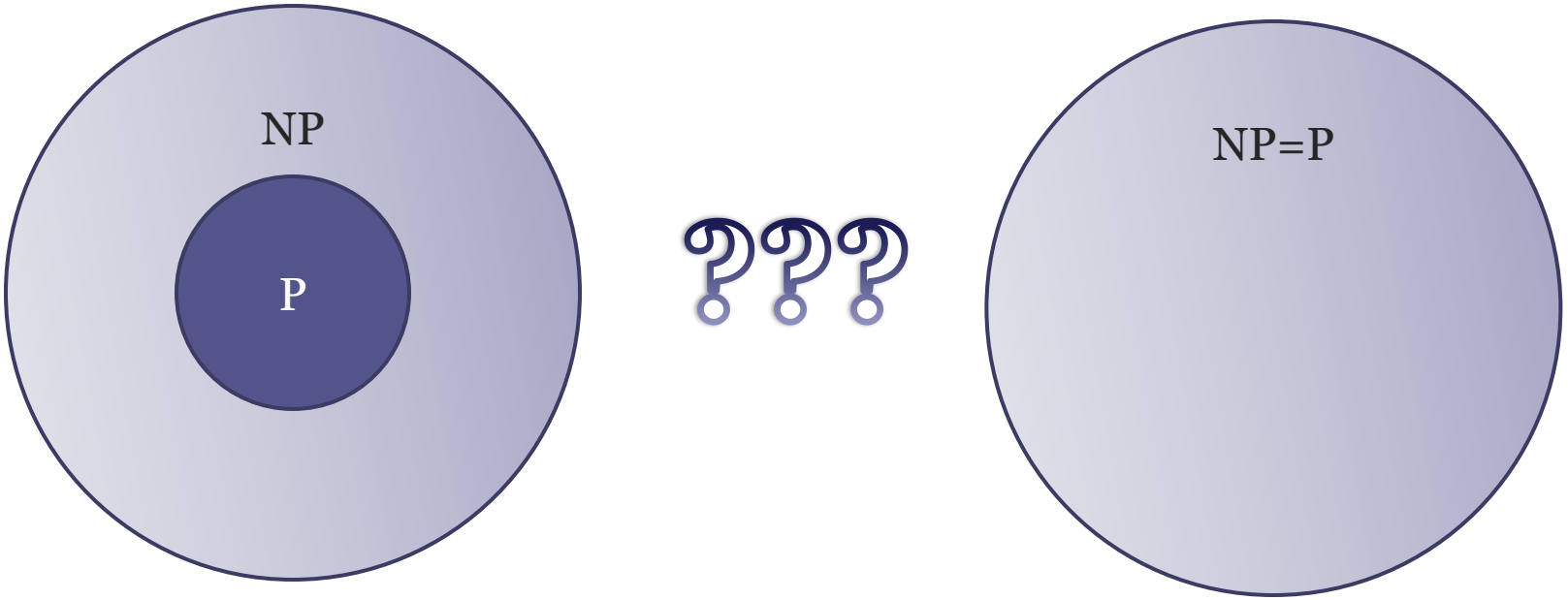
- Classe de problemas para os quais se conhece um algoritmo de tempo polinomial para F_R

Melhor rota pertence a P?

- Aparentemente não, pois você (que é quase um gênio) não conseguiu nem projetar um algoritmo nem reduzir seu problema a outro que você conhece que tenha solução polinomial...

- E daí???????

Relação de P e NP



Achar a solução de qualquer problema
é tão fácil quanto verificar se ela existe?

Relação de P, NP e SAT

- Cook(1971) mostrou que o SAT é o problema mais difícil dentro dos NP, ou seja, todo problema em NP pode ser "transformado" no SAT.
- Então, se o SAT pode ser resolvido em tempo polinomial, P = NP...
- Agora, vamos definir os problemas tão difíceis quanto o SAT, ou seja, transformar o SAT em outro problema.

P = NP?

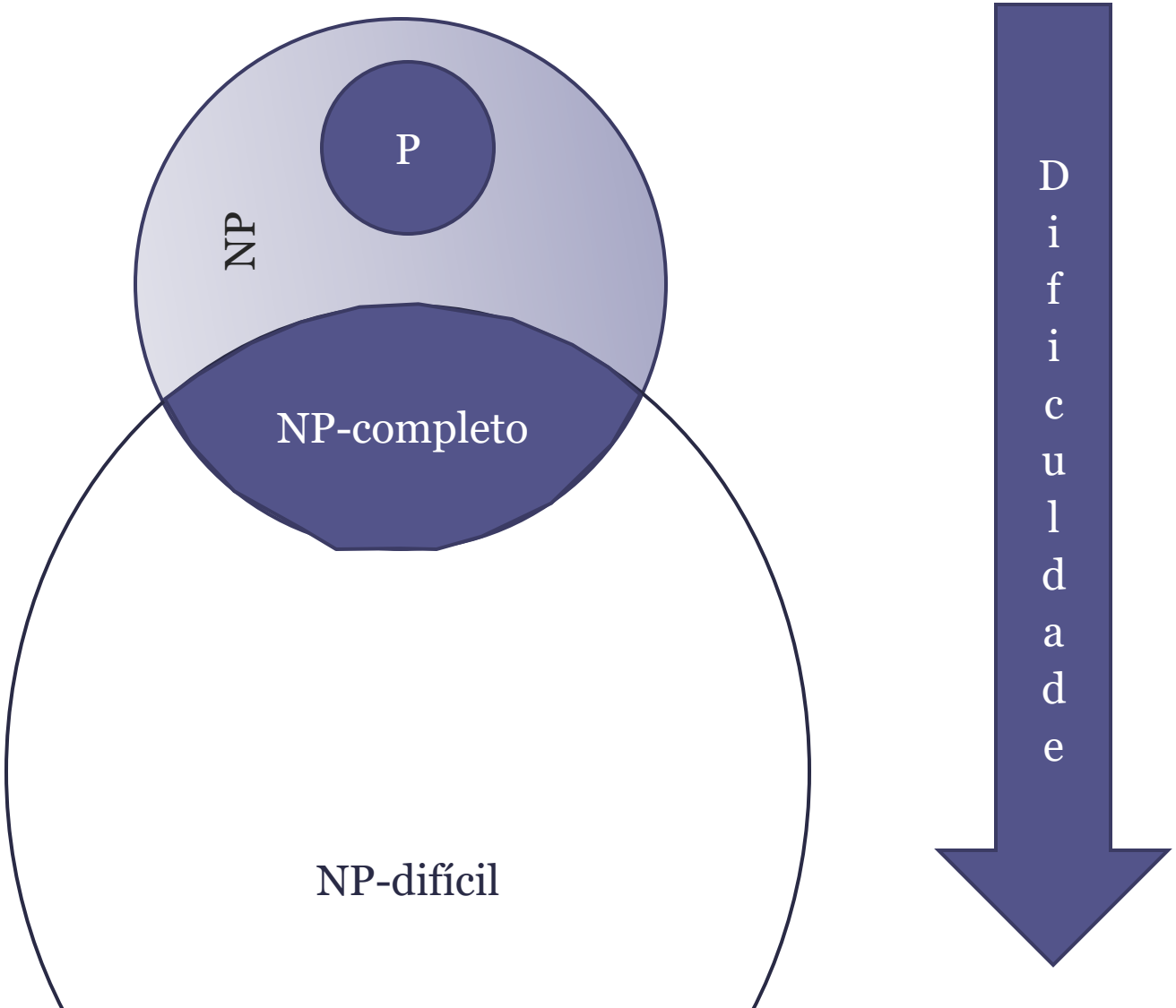
- Como formular esse problema?
  - Achar uma classe de problemas tais que todos os problemas de NP podem ser polinomialmente reduzidos a eles.

NP-difícil: tão ou mais difíceis que qualquer um em NP

  - Achar uma classe de problemas em NP onde todos os problemas de NP podem ser polinomialmente reduzidos a eles.

NP-completo: em NP, tão ou mais difíceis que qualquer outro em NP

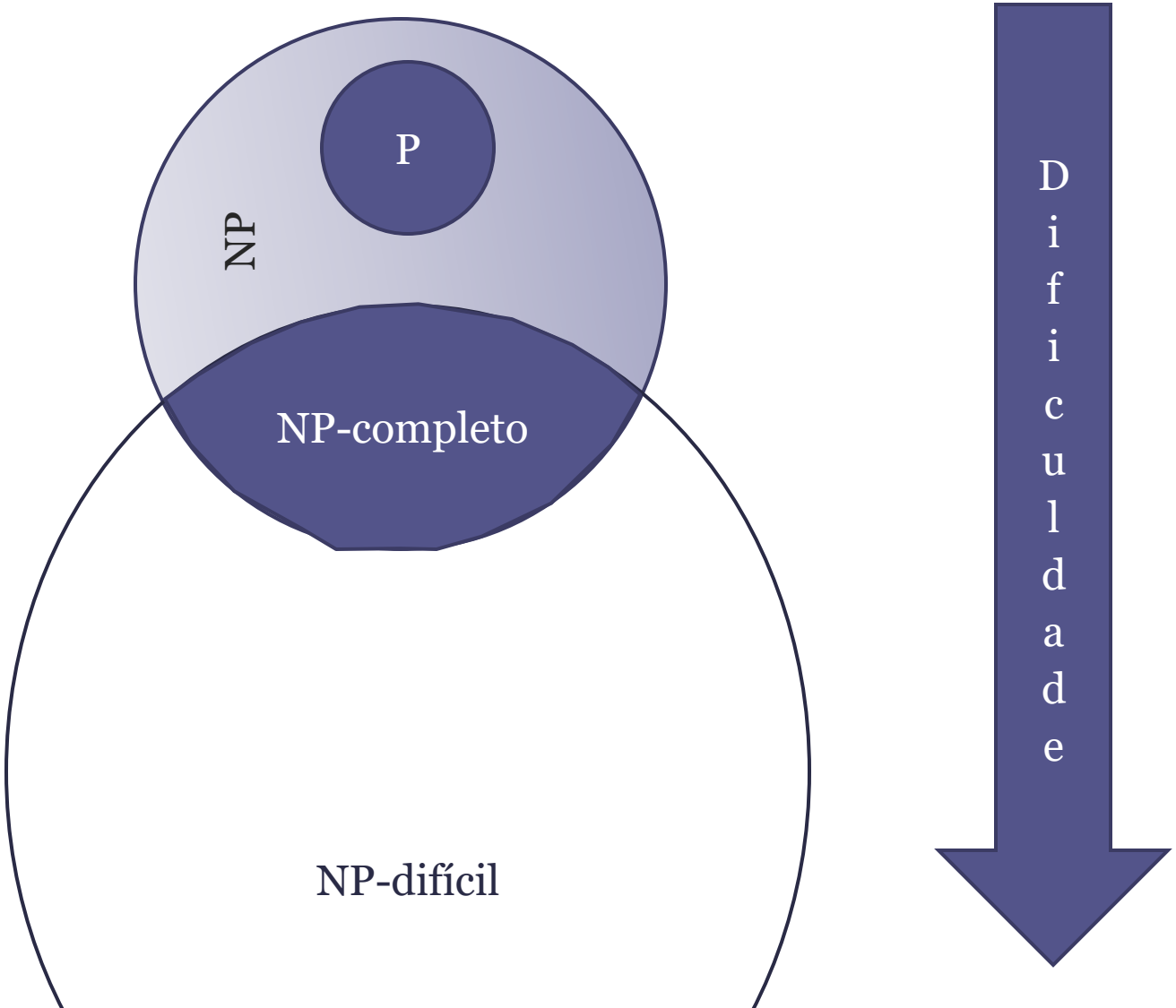
P, NP, NP-difícil e NP-completo



Classe NP-completo

- Os problemas **de busca na versão decisão** MAIS **difíceis**: todos se reduzem a eles
  - todos são o mesmo problema disfarçado...
- Subconjunto de NP e **nenhum** NPC possui solução **polinomial conhecida**
  - parece **intratável**.
- Seu problema está NPC, então
  - ou você não conseguirá um algoritmo polinomial
  - ou você ganhará o Prêmio Turing!

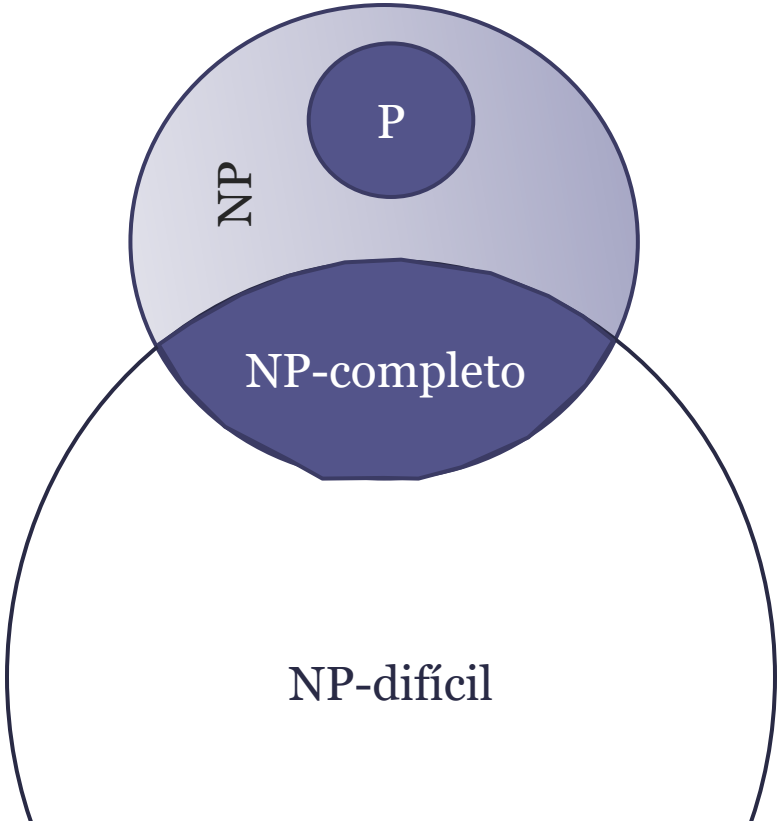
P, NP, NP-difícil e NP-completo

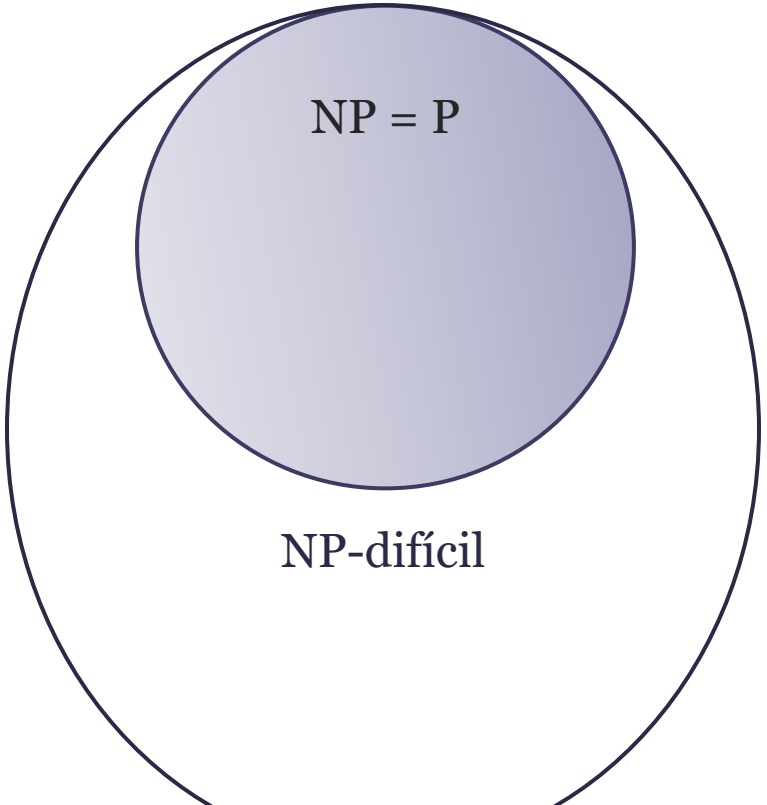


P = NP?

$$D \in \text{NPC tem solução polinomial} \Leftrightarrow \text{P} = \text{NP}$$

- Se P ≠ NP, então todo D em NPC é intratável.
- Se *D* em NPC tem solução polinomial, então P = NP.





Existe algum problema em NP-completo (intratável)?

- Cook mostrou que SAT é NP-completo, ou seja, que todos os problemas em NP podem ser reduzidos polinomialmente ao SAT. Logo, há fortes evidências de que SAT é intratável...
  - Isso foi feito utilizando a máquina de Turing não-determinística, então não vamos ver a prova...
  - No livro-texto há uma outra versão, transformando todos NP para Circuito-SAT. Também não veremos.

Redução polinomial de problemas

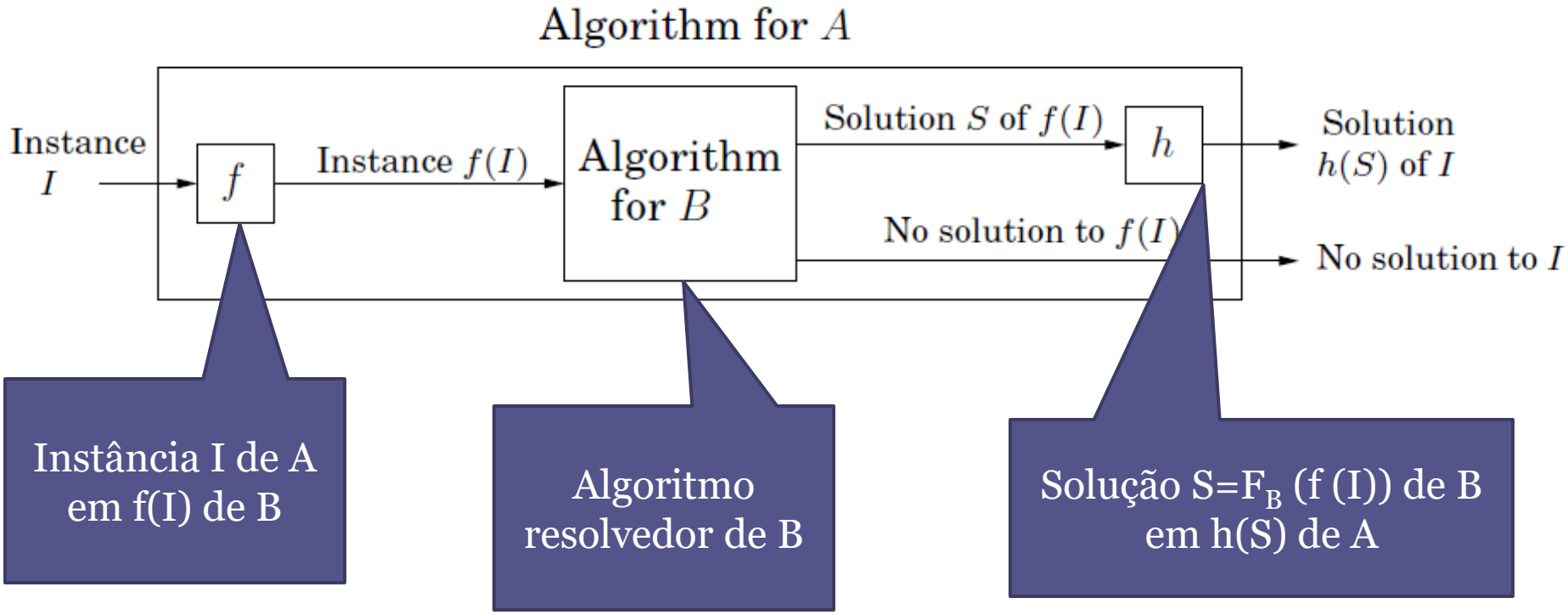
- f e h são polinomiais

- Se A pode ser reduzido polinomialmente a B , B é tão (ou mais) difícil quanto A. $A \leq_P B$

  O que não pode acontecer é A ser exponencial e B polinomial, por exemplo... (Por quê?)

Redução de Problemas

- Transforma um problema A em outro B



$$T(A) = T(f) + T(B) + T(h)$$

Como mostrar problema A é P por redução?

1. Um algoritmo resolvedor polinomial para B
2. Uma redução polinomial (f e h) de A para B

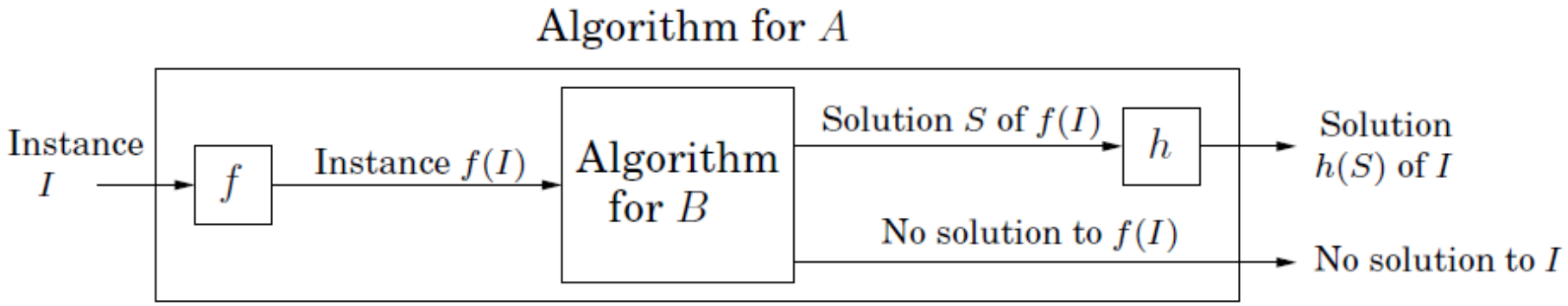
$$\text{Se } B \in P \text{ e } A \leq_p B \text{ então } A \in P$$

$$\Theta(A) = \Theta(B) + \Theta(f) + \Theta(h)$$

$$\Theta(A) = \max(\Theta(B) + \Theta(f) + \Theta(h))$$

Máximo $\leq_P$ Ordenação

- Máximo (A):
  - Instância: vetor V
  - Solução: máximo m
- Ordenação (B):
  - Instância: vetor V_2
  - Solução: vetor ordenado V_2



- Função f: Instância de A em Instância de B
  - Identidade V_2 = V
- Função h: Solução de B em Solução de A
  - M = V_2[n]

É possível resolver Melhor Rota?

- Não sabemos, mas se mostrarmos que ele pertence à classe dos problemas NP-completos há forte evidência de que não existe um algoritmo polinomial para resolvê-lo...

- Então, como mostrar que é NP-completo?

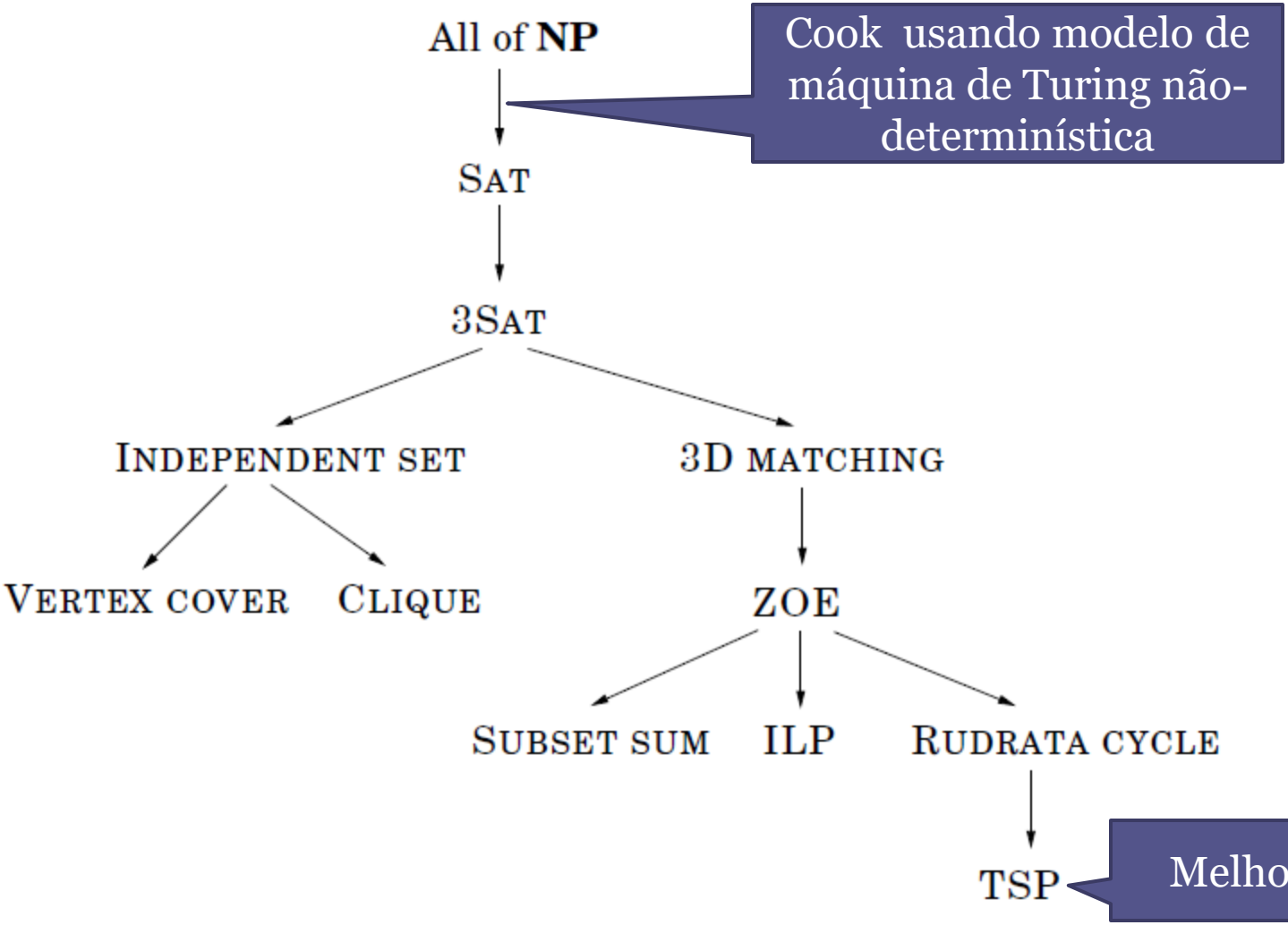
Como mostrar problema é NP-Completo?

- O problema B é NPC e quero mostrar que A também é NPC.

  Se $B \in NPC$, $A \in NP$ e $B \leq_p A$ então $A \in NPC$

- Para um problema de busca versão decisão:
  1. Um algoritmo polinomial para verificação
  2. Uma redução polinomial (f e h) de um problema NPC a ele

Algumas Reduções Importantes



Melhor Rota: Provando que é NPC

- Vamos provar que Melhor Rota é NPC:
  - Mostrando que ele é NP.
  - Reduzindo polinomialmente o problema do ciclo hamiltoniano, que é NPC, a ele.

- Melhor Rota é uma instância do conhecido problema do Caixeiro Viajante (*Travelling Salesman Problem – TSP)*, que tem inspirado o desenvolvimento de inúmeras abordagens exatas e aproximadas.

Melhor Rota Decisão é NP

- Algoritmo checa se uma seqüência de vértices é solução para problema de decisão com limite *b*.
- O algoritmo é simples. Dada a seqüência de nós da rota proposta : $s = (v_1, \cdots, v_n)$
  1. É uma permutação . $v_i \neq v_j, \forall i \neq j$
  2. Existe aresta entre nós consecutivos.

     $$\forall i < n, e(v_i, v_{i+1}) \in E, e(v_n, v_1) \in E$$
  3. A soma dos pesos das arestas tem que ser menor ou igual ao limite.

     $$k = \sum_{i=1}^{n-1} w(e(v_i, v_{i+1})) + w(e(v_n, v_1))$$

Melhor Rota Decisão é NP

Encontrando um problema NPC para ser reduzido a Melhor Rota...

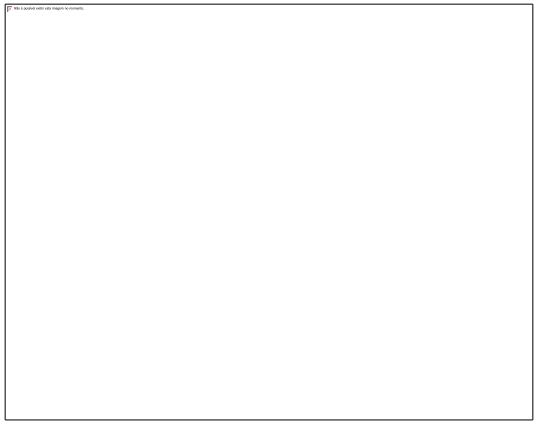
Existem vários problemas NP-completos...

http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_NP-complete_problems

Caminho euleriano é P

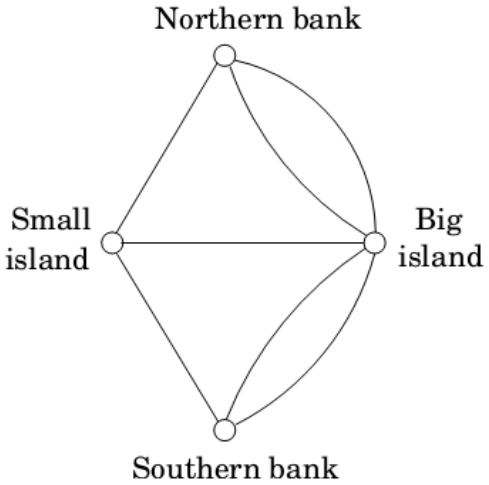
- Leonhard Euler (1735) – nascimento de teoria dos grafos

Possível percorrer todas as pontes sem repetir?



Existe caminho que passe por cada **aresta** exatamente uma vez?

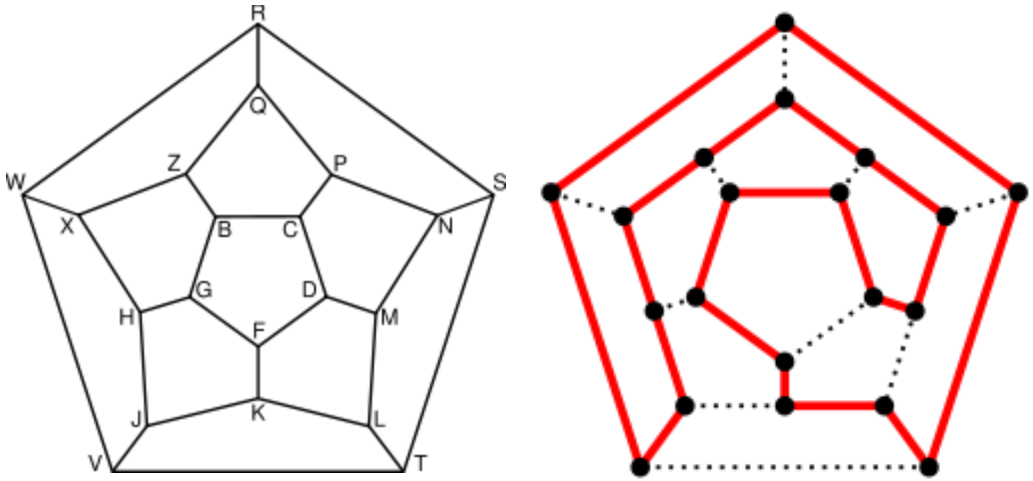
Basta testar cardinalidade dos vértices!



Ciclo Hamiltoniano ou de Rudrata é NP-Completo

Redescoberto por William Hamilton (1857), físico, astrônomo e matemático.

Dado um grafo G=(V,E), existe um ciclo que passa por cada **vértice** exatamente uma vez? (CH)



Ciclo Hamiltoniano -> Melhor Rota

- A partir do grafo *G=(V,E)* do CH, montamos o grafo da Melhor Rota da seguinte forma:

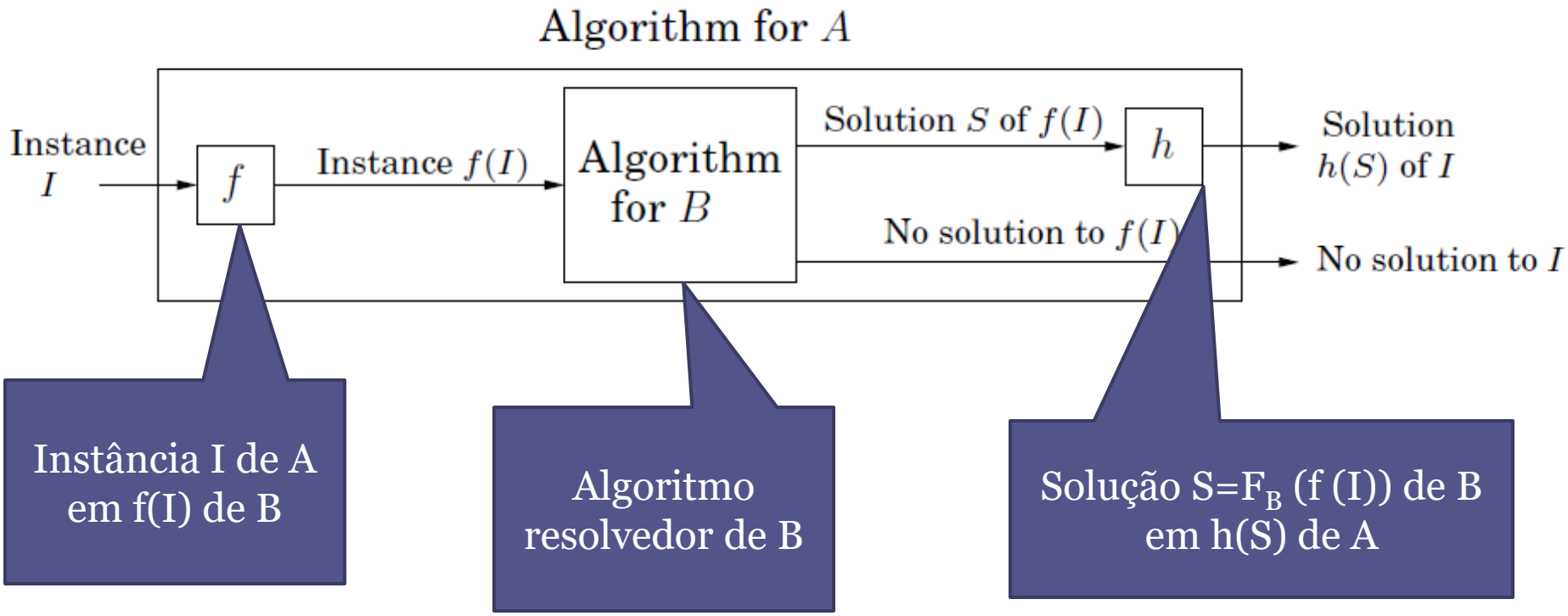
$$G^{MR} = (V, E^{MR}), \text{ grafo completo com}$$

$$w(v_i, v_j) = \begin{cases} 1, (v_i, v_j) \in E \\ 2, (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

- Existe um CH em *G* se e somente se a melhor rota em G^{MR} tem tamanho *n*, pois nesse caso todas as arestas estavam originalmente em G.

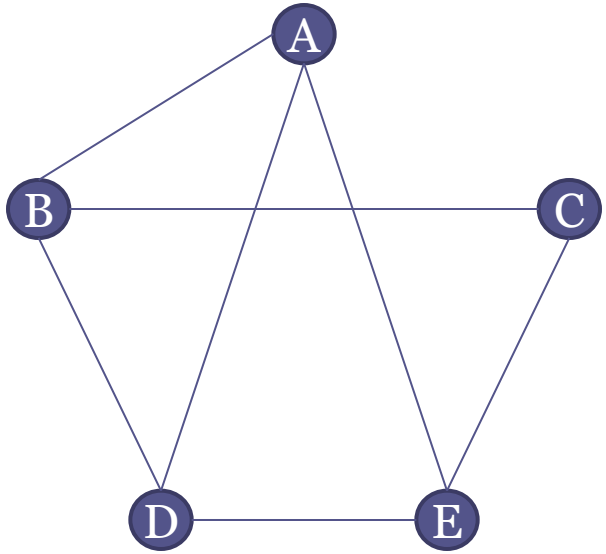
CH -> Melhor Rota

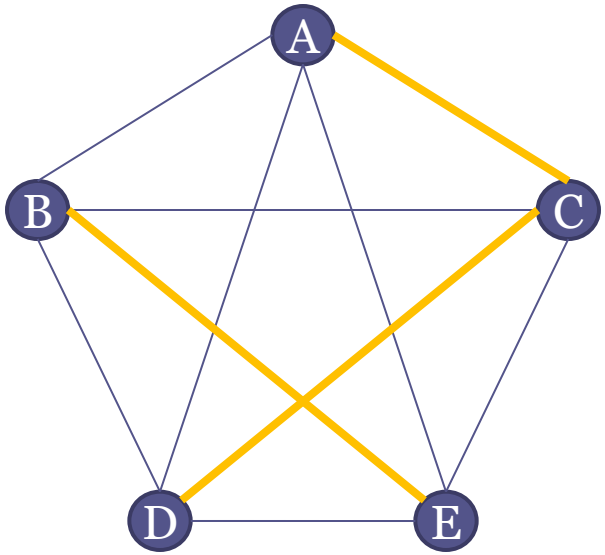
- CH (A) se reduz polinomialmente a MR (B)



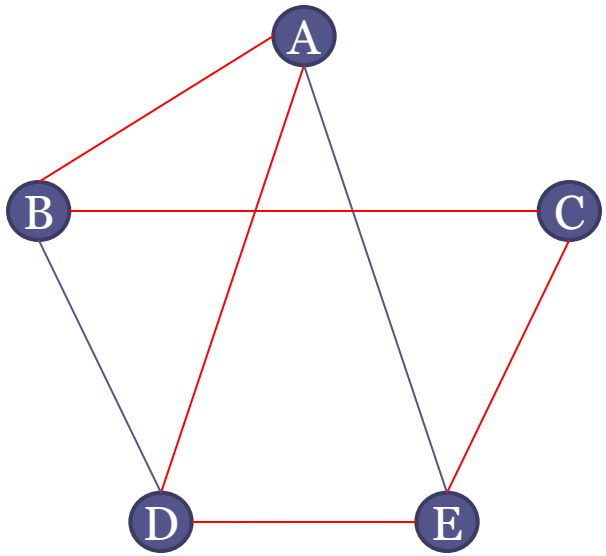
$$T(A) = T(f) + T(B) + T(h)$$

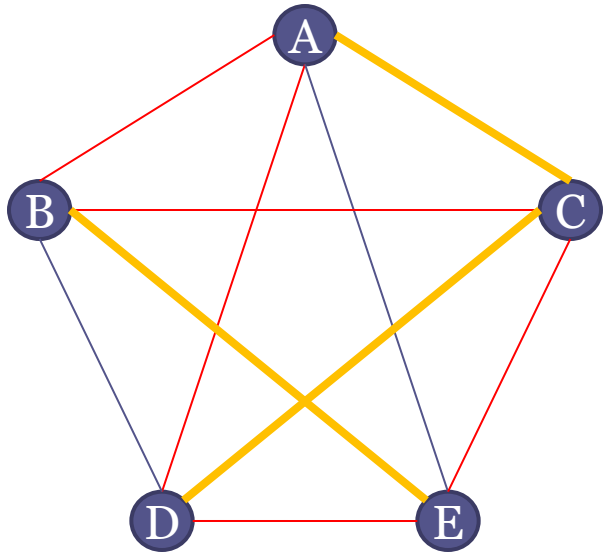
Transformando CH em MR





Solucionando MR e CH





Melhor rota é intratável!

- Muito bem, você pode mostrar para seu chefe que é bastante improvável que algum algoritmo ofereça a solução ótima de roteamento.

- Contudo, como você agora sabe que esse é um conhecido problema TSP, é hora de procurar boas estratégias de exploração do espaço de solução ou soluções aproximadas...

Resumo

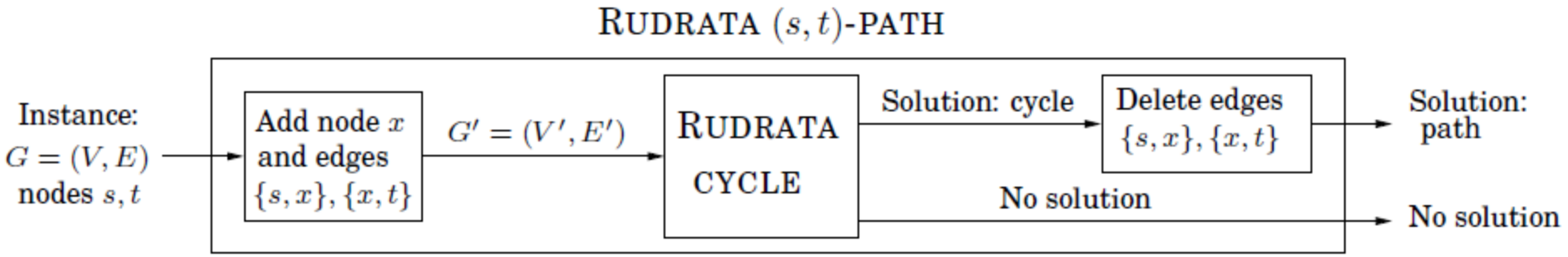
- Problemas que pertencem a P têm solução polinomial.
- Problemas que pertencem a NP têm verificação de solução polinomial.
- Problemas NP-Completos são os mais difíceis em NP. NP e NP-Difícil.
- Há fortes evidências de que um NPC é intratável.
- Para provar que um problema é intratável:

  Algoritmo verificador polinomial de solução do problema na versão decisão.

  Redução polinomial de um NPC conhecido ao novo problema.

Algumas Reduções

- Caminho (s,t) de Rudrata $\leq_p$ Cliclo de Rudrata



Algumas Reduções

- 3SAT $\leq_p$ Conjunto Independente

The graph corresponding to $(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})\ (x \vee \overline{y} \vee z)\ (x \vee y \vee z)\ (\overline{x} \vee \overline{y})$.