O Método Simplex

Prof. Gustavo Peixoto Silva
Departamento de Computação
Univ. Federal de Ouro Preto

O Método Simplex para Problemas de Maximização

Max $Z(X) = 2X_1 + 3X_2$ sujeito a

$$-X_1 + X_2 <= 4$$

$$X_1 + X_2 <= 6 \qquad x1 >= 0$$

$$2X_1 + X_2 <= 8 \qquad X_2 >= 0$$

O Método Simplex para Problemas de Maximização

Max $Z(X) = 2X_1 + 3X_2$ sujeito a

$$\left.\begin{array}{ll} \boxed{\begin{array}{rcl} -X_1 + X_2 & \leq & 4 \\ X_1 + X_2 & \leq & 6 \\ 2X_1 + X_2 & \leq & 8 \end{array}} & \begin{array}{l} B \geq 0 \\ X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \end{array} \end{array}\right\}$$

Forma padrão (<=)

Acrescentando as variáveis de folga X_3, X_4 e X_5 às restrições, temos:

$$\underbrace{\boxed{\begin{array}{rcl} -X_1 + X_2 + X_3 & = & 4 \\ X_1 + X_2 + X_4 & = & 6 \\ 2X_1 + X_2 + X_5 & = & 8 \end{array}}}_{}$$

Este é um **sistema linear**

com 5 incógnitas e 3 equações.

Portanto tem infinitas soluções!!!

Forma canônica (base óbvia), solução óbvia?

Queremos encontrar aquela que maximiza a função objetivo Z(X)

O Método Simplex para Problemas de Maximização

Max $Z(X) = 2X_1 + 3X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5$ sujeito a

$$
\begin{array}{rrl}
-X_1 + X_2 & \boxed{\begin{array}{lll} + X_3 & & \\ & + X_4 & \\ & & + X_5 \end{array}} & \begin{array}{l} = 4 \\ = 6 \\ = 8 \end{array} \\
X_1 + X_2 & & \\
2X_1 + X_2 & &
\end{array}
$$

$B >= 0, X_1 >= 0, \ldots, X_5 >= 0$

O problema neste formato é dito estar na forma canônica, e apresenta uma base óbvia e uma solução trivial. Quem é ela?

Solução básica viável:

$X_1 = X_2 = 0$ variáveis não-básicas (VNB): assumem **valor nulo**

$X_3 = 4, X_4 = 6, X_5 = 8$ variáveis básicas (VB): assumem **valor não nulo**

$Z(X) = 2X_1 + 3X_2 = 0$ valor da função objetivo para esta solução!

Resumo do Simplex:

1. Encontrar uma solução básica viável inicial. OK
2. Verificar se a solução atual é ótima. Se for ótima FIM, senão
3. Determinar a VNB que deve entrar na base
4. Determinar a VB que deve sair da base
5. Encontrar a nova solução básica viável e voltar para o passo 2.

O Método Simplex para Problemas de Maximização

1. Solução básica viável trivial: $X_1 = X_2 = 0$ (VNB), $X_3 = 4$, $X_4 = 6$, $X_5 = 8$ (VB), $Z = 0$.

   VERIFICANDO SE A SOLUÇÃO É ÓTIMA

2. Escrever Z(X) em função das vars não básicas (VNB) corrente:

   $Z(X) = 2X_1 + 3X_2$ já está escrito. Se pelo menos uma delas tem **coeficiente > 0 e o problema é de maximização,** então a solução não é ótima!!!

   ENCONTRANDO A VARIÁVEL QUE DEVE ENTRAR NA BASE

3. Entra na base a VNB com **maior coeficiente positivo**. X_2 entra na base e deve assumir o maior valor possível, sem que as variáveis básicas fiquem negativas!

   ENCONTRANDO O VALOR DA VARIÁVEL QUE ENTRA NA BASE

$$X_3 = 4 + X_1 - X_2$$
$$X_4 = 6 - X_1 - X_2$$
$$X_5 = 8 - 2X_1 - X_2$$

temos que $X_1 = 0$ e X_2 deve aumentar o máximo possível. Qual é o valor máximo para X_2?

olhando para X_3, X_2 pode ser no máximo 4 (4/1)

olhando para X_4, X_2 pode ser no máximo 6 (6/1)

olhando para X_5, X_2 pode ser no máximo 8 (8/1) Logo, ⇨

$X_2 = \min\{4, 6, 8\} = 4$

X_2 assumirá valor 4

O Método Simplex para Problemas de Maximização

QUEM DEVE SAIR DA BASE?

4. Sai da base a VB que se anular primeiro com o crescimento da VNB que esta entrando. Lembre-se que $X_1 = 0$

Para $X_2 = 4$ temos

$$\begin{aligned} X_3 &= 4 + X_1 - X_2 &&\Rightarrow X_3 = 4 - 4 = 0 \\ X_4 &= 6 - X_1 - X_2 &&\Rightarrow X_4 = 6 - 4 = 2 \\ X_5 &= 8 - 2X_1 - X_2 &&\Rightarrow X_5 = 8 - 4 = 4 \end{aligned}$$

Logo X_3 sairá da base.

Resumo da iteração:

- ▹ X_2 entra na base com valor 4 e X_3 sai da base pois seu valor foi zerado.
- ▹ A nova solução básica viável será VB = $(X_2, X_4, X_5) = (4, 2, 4)$, VNB = $(X_1, X_3) = (0, 0)$ e $Z(X) = 2*0 + 3*4 = 12$. Melhorou!!!

5. Transformar o sistema considerando a nova base.

	e_1	e_2	e_3	
$-X_1 + X_2$	$+1X_3$			$= 4$
$X_1 + X_2$	0	$+X_4$		$= 6$
$2X_1 + X_2$	0		$+ X_5$	$= 8$

A coluna da base que "aparecia" na var. X_3 agora deve "aparecer" na var. X_2.

Este é um pivoteamento de Gauss (Cálc. Num.)

O Método Simplex para Problemas de Maximização

$$
\begin{array}{cccccc}
 & e_1 & & e_2 & e_3 & \\
-X_1 + & X_2 & +1X_3 & & & = 4 \\
X_1 + & X_2 & 0 & +X_4 & & = 6 \\
2X_1 + & X_2 & 0 & & +X_5 & = 8
\end{array}
$$

A coluna da base que “aparecia” na var. X_3
agora deve “aparecer” na var. X_2.
Este é um pivoteamento de Gauss (Cálc. Num.)

$$
\begin{array}{cccccc}
 & e_1 & & e_2 & e_3 & \\
-X_1 & +1X_2 & +X_3 & & & = 4 \\
2X_1 & 0 & -X_3 & +X_4 & & = 2 \\
3X_1 & 0 & -X_3 & & +X_5 & = 4
\end{array}
$$

(repete)
(linha2 := linha2 -1* linha1)
(linha3 := linha3 -1* linha1)

O Método Simplex para Problemas de Maximização

Final da primeira iteração:

VB = $(X_2, X_4, X_5) = (4, 2, 4)$, VNB = $(X_1, X_3) = (0, 0)$ e $Z(X) = 12$. O sistema transformado é:

$$
\begin{array}{lcccccc}
 & e_1 & & e_2 & e_3 & & \\
-X_1 & +1X_2 & +X_3 & & & = & 4 \\
2X_1 & 0 & -X_3 & +X_4 & & = & 2 \\
3X_1 & 0 & -X_3 & & +X_5 & = & 4
\end{array}
$$

VBásicas são sempre maiores do que zero
VNãoBásicas são sempre iguais a zero...
a não ser em casos especiais!!!

Esta solução é ótima? Se não for, repetir o processo. Para saber, devemos voltar ao Passo 2. Escrever $Z(X) = 2X_1 + 3X_2$ em função das VNB X_1 e X_3.

Da primeira equação temos que $X_2 = 4 + X_1 - X_3$, portanto:

$Z(X) = 2X_1 + 3(4 + X_1 - X_3)$ => $Z(X) = 12 + 5X_1 - 3X_3$.

Logo a solução ainda não é ótima pois tem uma **VNB com coeficiente positivo**.

Passo 3. Como X_1 é a VNB com maior coeficiente positivo, ela entra na base.

Passo 4. Quem sairá da base? Escrever as VBs em função das VNBs e aumentar o valor de X_1. A primeira VB que zerar é a que deve sair da base.

O Método Simplex para Problemas de Maximização

<u>Passo 4</u>. Quem sairá da base? Escrever as VBs em função das VNBs e aumentar o valor de X_1. A primeira VB que zerar é a que deve sair da base.
Lembrar que $X_3 = 0$.

$X_2 = 4 + X_1 - X_3 \quad => \quad X_1 <= \text{infinito}$
$X_4 = 2 – 2X_1 + X_3 \quad => \quad X_1 <= 1$
$X_5 = 4 – 3X_1 + X_3 \quad => \quad X_1 <= 4/3$ Portanto $X_1 = \min\{\infty, 1, 4/3\} = 1$ e
$X_4 = 0$ sai da base.

Ao substituir o valor $X_1 = 1$ no sistema teremos a nova solução básica viável:

VB = $(X_1, X_2, X_5) = (1, 5, 1)$, VNB = $(X_3, X_4) = (0, 0)$ e
$Z(X) = 2*1+ 3*5 = 17$ melhorou!!!

Ou seja, a função objetivo melhorou mais um pouco.

Olhando o sistema pivoteado teremos:

O Método Simplex para Problemas de Maximização

Pivoteamento do sistema

X_1 entra na base e X_4 sai da base. Isso significa que X_1 entra no lugar de X_4 !

$$\begin{array}{llllll} & e_1 & & e_2 & e_3 & \\ -X_1 & +X_2 & +X_3 & 0 & & = 4 \\ 2X_1 & & -X_3 \; + & 1X_4 & & = 2 \\ 3X_1 & & -X_3 & 0 & +X_5 & = 4 \end{array}$$

VBásicas são sempre maiores do que zero
VNãoBásicas são sempre iguais a zero...
a não ser em casos especiais!!!

Final da segunda iteração. O sistema transformado é:

$$\begin{array}{llllll} e_2 & e_1 & & & e_3 & \\ 0 & X_2 & +0.5X_3 & +\;0.5X_4 & & = 5 \\ 1X_1 & & -0.5X_3 & +\;0.5X_4 & & = 1 \\ 0 & & 0.5X_3 & -\;1.5X_4 & +X_5 & = 1 \end{array}$$

Será que esta solução é ótima?

<u>Passo 2</u>. Escrever $Z(X)$ em função de X_3 e X_4.

$Z(X) = 2X_1 + 3X_2 \Rightarrow Z(X) = 2(1+ 0.5X_3 - 0.5X_4) + 3(5 - 0.5X_3 - 0.5X_4) \Rightarrow$

$Z(X) = 2 + X_3 - X_4 + 15 - 1.5X_3 - 1.5X_4 \Rightarrow Z(X) = 17 - 0.5X_3 - 2.5X_4$

Como nenhuma VNB tem coeficiente > 0 a solução
VB = $(X_1, X_2, \underline{X_5}) = (1, 5, \underline{1})$, VNB = $(X_3, X_4) = (0, 0)$ é ótima com $Z(X) = 17$!

O Método Simplex usando Quadros ou Tablôs – Resolução Prática

Acrescentando as variáveis de folga X_3, X_4 e X_5 às restrições e transformando a função objetivo em uma equação temos

$$Z(X) - 2X_1 - 3X_2 = 0$$

$$-X_1 + X_2 + X_3 = 4$$

$$X_1 + X_2 + X_4 = 6$$

$$2X_1 + X_2 + X_5 = 8$$

Temos agora quatro equações representando o problema, sendo que a primeira diz respeito à função objetivo. Na Tablô temos:

	XNB		XB			
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	B
Z	-2	-3	0	0	0	0
X_3	-1	1	1	0	0	4
X_4	1	1	0	1	0	6
X_5	2	1	0	0	1	8

Coeficientes das XBs na FO são nulos

$XB = (X_3, X_4, X_5) = (4, 6, 8)$, $XNB = (X_1, X_2) = (0, 0)$ e $Z(X) = 2*0 + 3*0 = 0$

O Método Simplex usando quadros ou Tablôs

	XNB		XB				TR
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	B	Bi/Aij
Z	-2	-3	0	0	0	0	===
X_3	-1	pivô 1	1	0	0	4	4/1
X_4	1	1	0	1	0	6	6/1
X_5	2	1	0	0	1	8	8/1

Mínimo do Teste da Razão

Obs. nesta representação, os coeficientes estão invertidos na FO e os coeficientes de X_3, X_4 e X_5 já são todos nulos.

Logo, Z(X) já está escrito em função de X_1 e X_2. Como tem XNB com coeficiente < 0 (antes era > 0, mas foi invertido o sinal), a solução NÃO É ÓTIMA, pode melhorar.

X_2 é a VNB com coeficiente mais negativo, portanto é quem entra na base.

Para saber quem deve sair da base devemos fazer o "teste da razão" para j = índice da variável que entra na base, ou seja j = 2.

$$\text{Min } \{ B_i/A_{ij} : i \text{ tal que } A_{ij} > 0\} = \text{Min } \{ 4/1, 6/1, 8/1\} = 4 \Rightarrow i = 1 \text{ é o índice da a sair}$$

$i = 1,...,m$

Assim temos o pivô da iteração que nos dará o próximo quadro.

O Método Simplex usando quadros ou Tablôs

	XNB		XB				
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	B	linhas
Z	-2	-3	0	0	0	0	(0)
X_3	-1	pivô 1	1	0	0	4	(1)
X_4	1	1	0	1	0	6	(2)
X_5	2	1	0	0	1	8	(3)

transformações: a) repetir a linha (1) pois o pivô já é = 1

b) zerando o elemento $A_{22} \Rightarrow (2) := (2) -1*(1)$

c) zerando o elemento $A_{32} \Rightarrow (3) := (3) -1*(1)$

d) zerando o coeficiente $C_2 \Rightarrow (0) := (0) +3*(1)$, teremos o quadro

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	B
Z	-5	0	3	0	0	12
X_2	-1	1	1	0	0	4
X_4	2	0	-1	1	0	2
X_5	3	0	-1	0	1	4

O pivô deve ser transformado em 1.

Os elementos acima e abaixo do pivô devem ser transformados em 0 usando o pivô.

O Método Simplex usando quadros ou Tablôs

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	B	TR	linhas
Z	-5	0	3	0	0	12	==	(0)
X_2	-1	1	1	0	0	4	NA	(1)
X_4	pivô 2	0	-1	1	0	2	2/2	(2)
X_5	3	0	-1	0	1	4	4/3	(3)

Mínimo do Teste da Razão

Solução Corrente XB = (X_2, X_4, X_5) =(4, 2, 4), XNB = (X_1, X_3) = (0, 0) e Z(X) = 12

Obs. que da linha (0) temos que $Z - 5X_1 + 3X_3 = 12 \Rightarrow Z = 5X_1 - 3X_3 + 12$.

Ou seja, a FO já esta escrita em função das variáveis XNB.

Como tem XNB com coeficiente < 0 ⇒ solução não é ótima.

X_1 entra na base.

Teste da razão para j = 1,

Min {NA, 2/2, 4/3} = 2/2 referente à linha 2 portanto X_4 deve sair da base.

Obs. Não se faz o teste da razão para os elementos ≤ 0 da coluna da variável que está entrando na base.

Isso se dá pois isolando X_2 na linha (1) temos: $X_2 = 4 + X_1 – X_3$

Assim, X_1 pode crescer indefinidamente que X_2 também crescerá; não irá para zero. Lembrando que X_3 permanece = 0.

O Método Simplex usando quadros ou Tablôs

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	B	linhas
Z	-5	0	3	0	0	12	(0)
X_2	-1	1	1	0	0	4	(1)
X_4	pivô 2	0	-1	1	0	2	(2)
X_5	3	0	-1	0	1	4	(3)

transformações: a) (2) := (2)/2; b) (0) := (0) + 5*(2); c) (1) := (1) + (2); d) (3) := (3) -3*(2)

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	B
Z	0	0	0.5	2.5	0	17
X_2	0	1	0.5	0.5	0	5
X_1	1	0	-0.5	0.5	0	1
X_5	0	0	0.5	-1.5	1	1

Solução Corrente XB = (X_1, X_2, X_5) =(1, 5, 1), XNB = (X_3, X_4) = (0, 0) e Z(X) = 17

Esta solução é ótima pois todas as XNB: X_3 e X_4 têm coeficientes > 0

O Método Simplex usando quadros ou Tablôs

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	B	linhas
Z	0	0	0.5	2.5	0	17	(0)
X_2	0	1	0.5	0.5	0	5	(1)
X_1	1	0	-0.5	0.5	0	1	(2)
X_5	0	0	0.5	-1.5	1	1	(3)

Solução ótima:

$X^* \Rightarrow XB = (X_1, X_2\ X_5) = (1, 5, 1)\ XNB = (X_3, X_4) = (0, 0)$ e $Z^*(X) = 17$

A variável $X_5 = 1$ mostra que a equação onde ela foi introduzida,

$2X_1 + X_2 + X_5 = 8$ tem uma folga de 1 unidade, como pode ser conferido no sistema original.

Nas demais equações não existe qualquer folga.

Características do Tablô do Método Simplex para Problemas de Maximização

Os coeficientes das VBs na Fo são sempre igual a zero. Assim a FO estará sempre escrita em função das VNBs

Os **coeficientes das VNBs serão sempre diferentes de zero**, podendo ser positivo ou negativo. Dependendo do sinal, a solução será ótima ou não. Entra na base a VNB com coef. **mais negativo p/ maximização**!

O TR é feito dividindo o Bi apenas pelos Aij > 0 da coluna j da var que está entrando na base.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	B	TR
Z	-5	0	3	0	0	12	==
X_2	-1	1	1	0	0	4	NA
X_4	pivô 2	0	-1	1	0	2	2/2
X_5	3	0	-1	0	1	4	4/3

Mínimo do TR indica a var. que vai sair da base

Os valores das VBs na solução são sempre maiores do que zero.

Os valores das VNBs são sempre iguais a zero. Assim as suas colunas são “eliminadas” e temos um sistema “quadrado”

Max $Z = 2X_1 + 3X_2$ s.a

$-X_1 + X_2 \le 4$

$X_1 + X_2 \le 6$

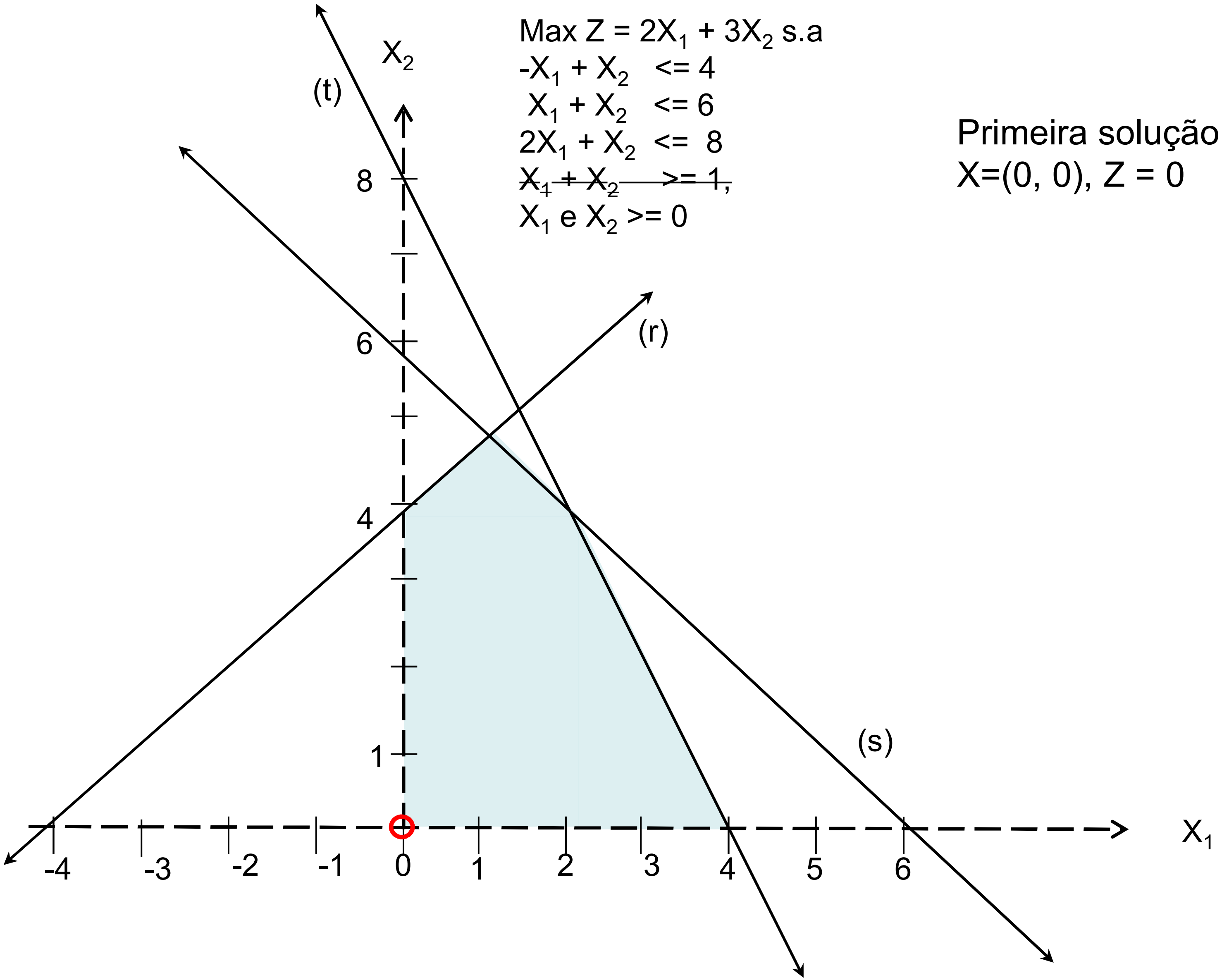
$2X_1 + X_2 \le 8$

$\cancel{X_1 + X_2 \ge 1,}$

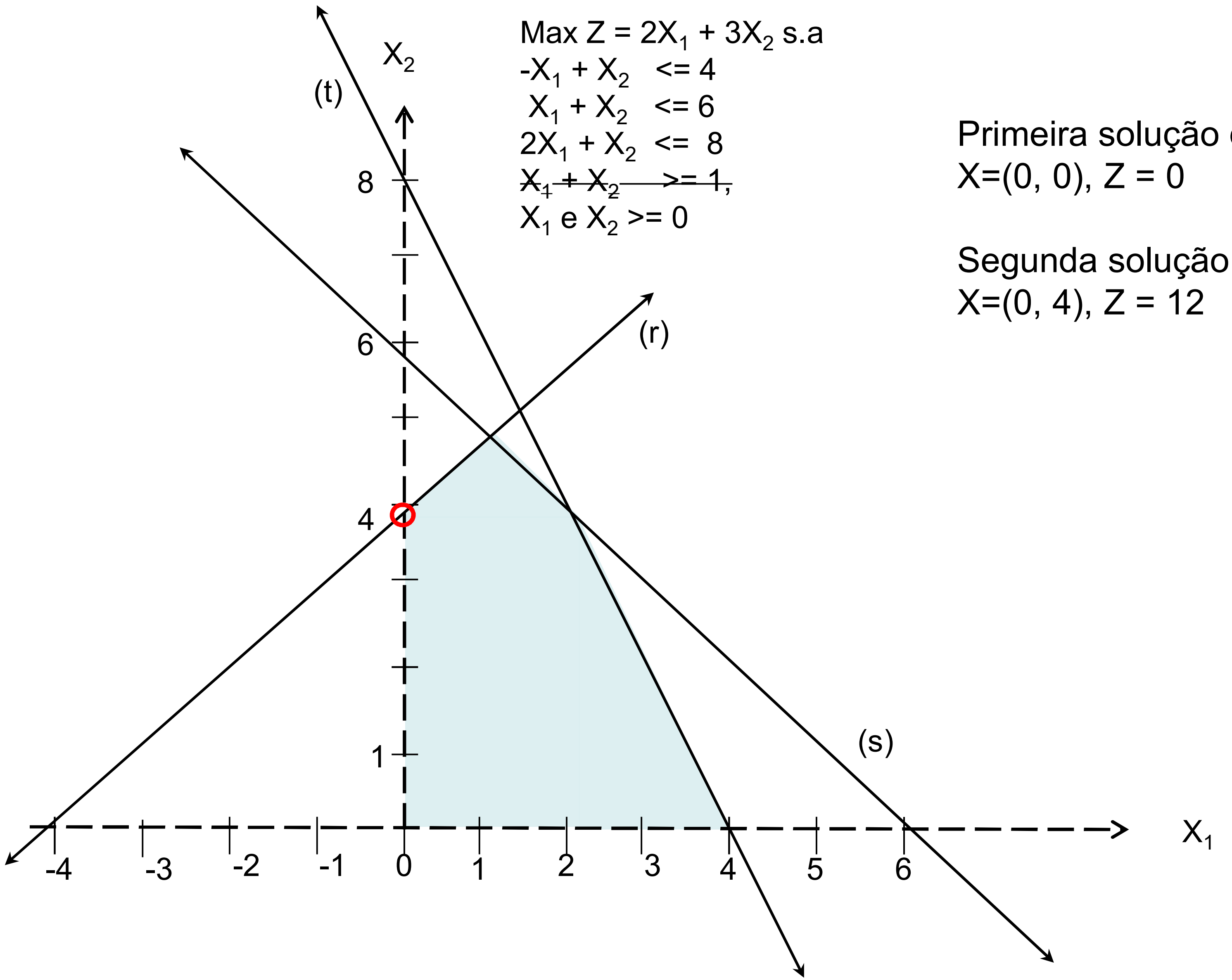
X_1 e $X_2 \ge 0$

Primeira solução do Simplex

X=(0, 0), Z = 0

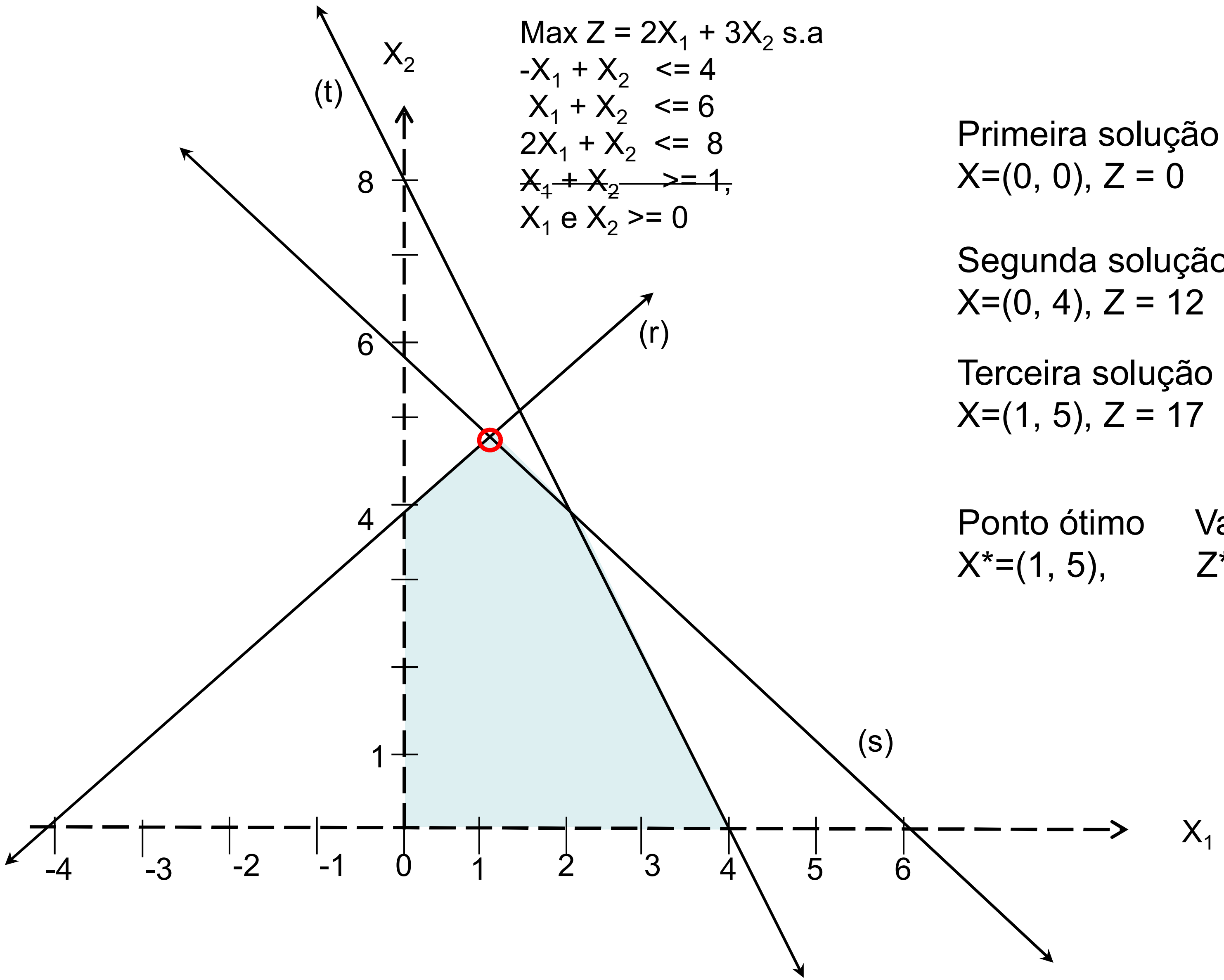


Max $Z = 2X_1 + 3X_2$ s.a
$-X_1 + X_2 \quad <= 4$
$X_1 + X_2 \quad <= 6$
$2X_1 + X_2 \quad <= \ 8$
$\cancel{X_1 + X_2 \quad >= 1,}$
X_1 e $X_2 >= 0$



Primeira solução do Simplex
X=(0, 0), Z = 0

Segunda solução do Simplex
X=(0, 4), Z = 12



Primeira solução do Simplex
X=(0, 0), Z = 0

Segunda solução do Simplex
X=(0, 4), Z = 12

Terceira solução do Simplex
X=(1, 5), Z = 17

Ponto ótimo X*=(1, 5),

Valor ótimo Z* = 17

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 3X_2 \text{ s.a}$$

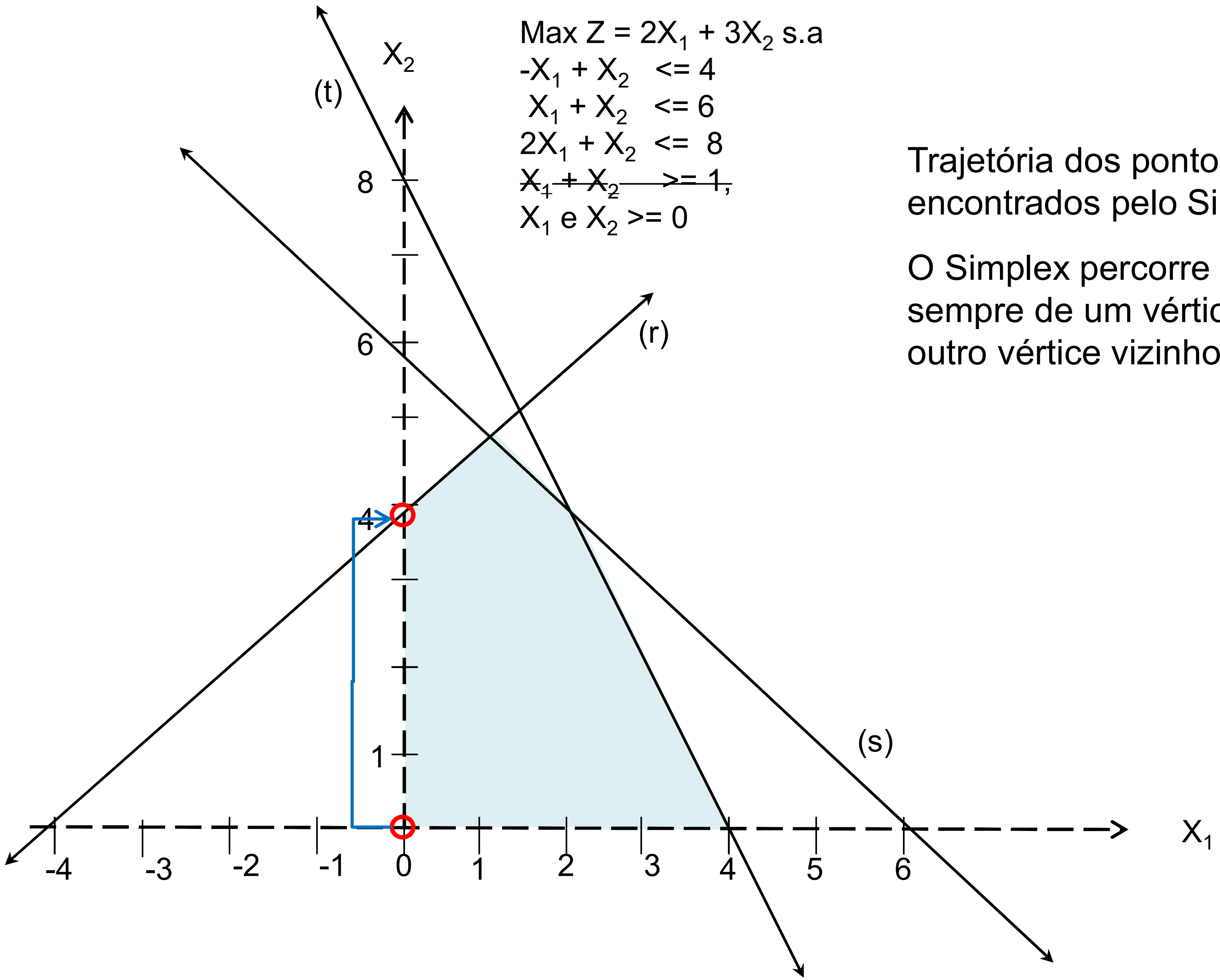
$$-X_1 + X_2 \le 4$$

$$X_1 + X_2 \le 6$$

$$2X_1 + X_2 \le 8$$

$$\cancel{X_1 + X_2 \ge 1,}$$

$$X_1 \text{ e } X_2 \ge 0$$



Trajetória dos pontos encontrados pelo Simplex

O Simplex percorre a RF indo sempre de um vértice para um outro vértice vizinho

Max $Z = 2X_1 + 3X_2$ s.a

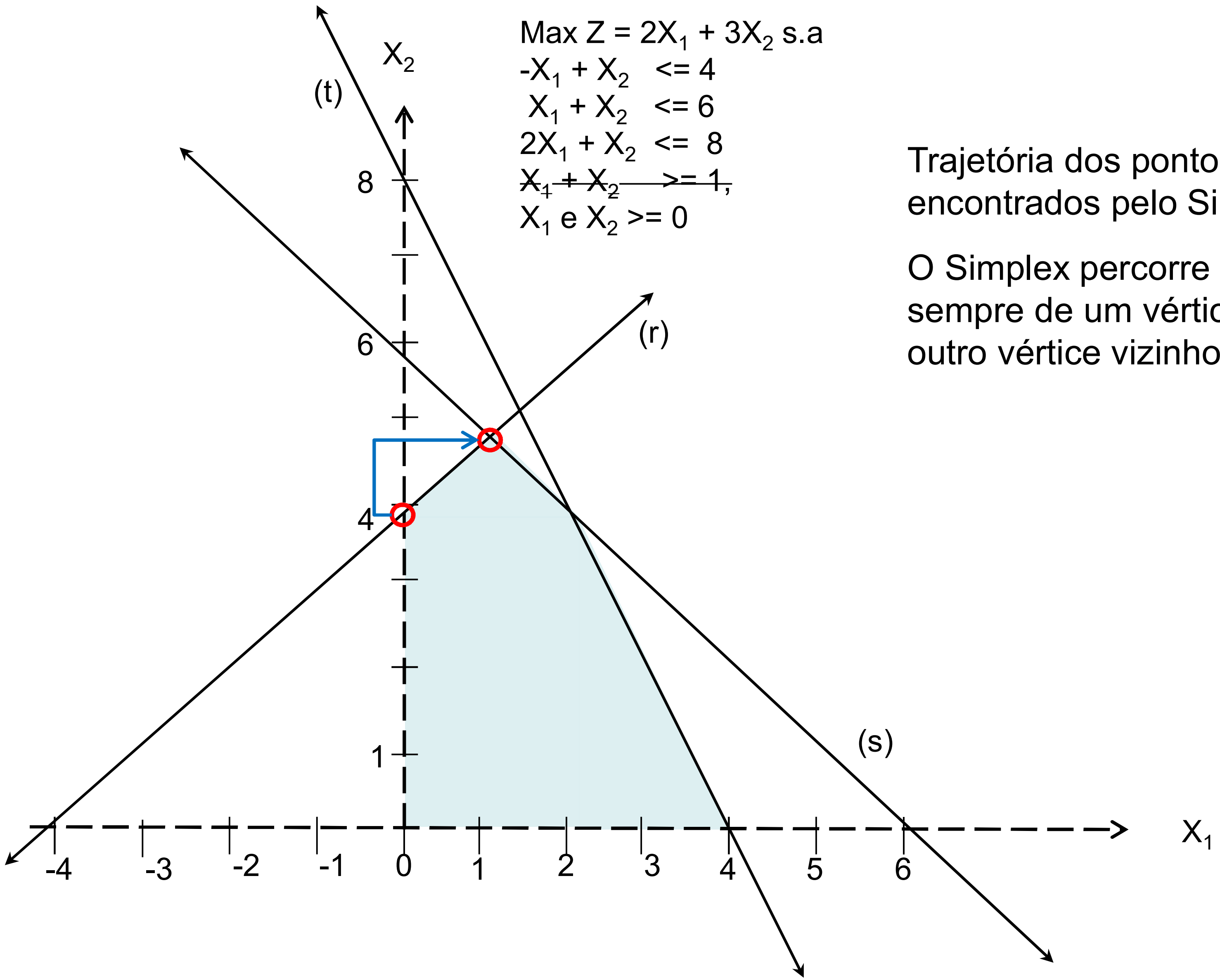
$-X_1 + X_2 \leq 4$

$X_1 + X_2 \leq 6$

$2X_1 + X_2 \leq 8$

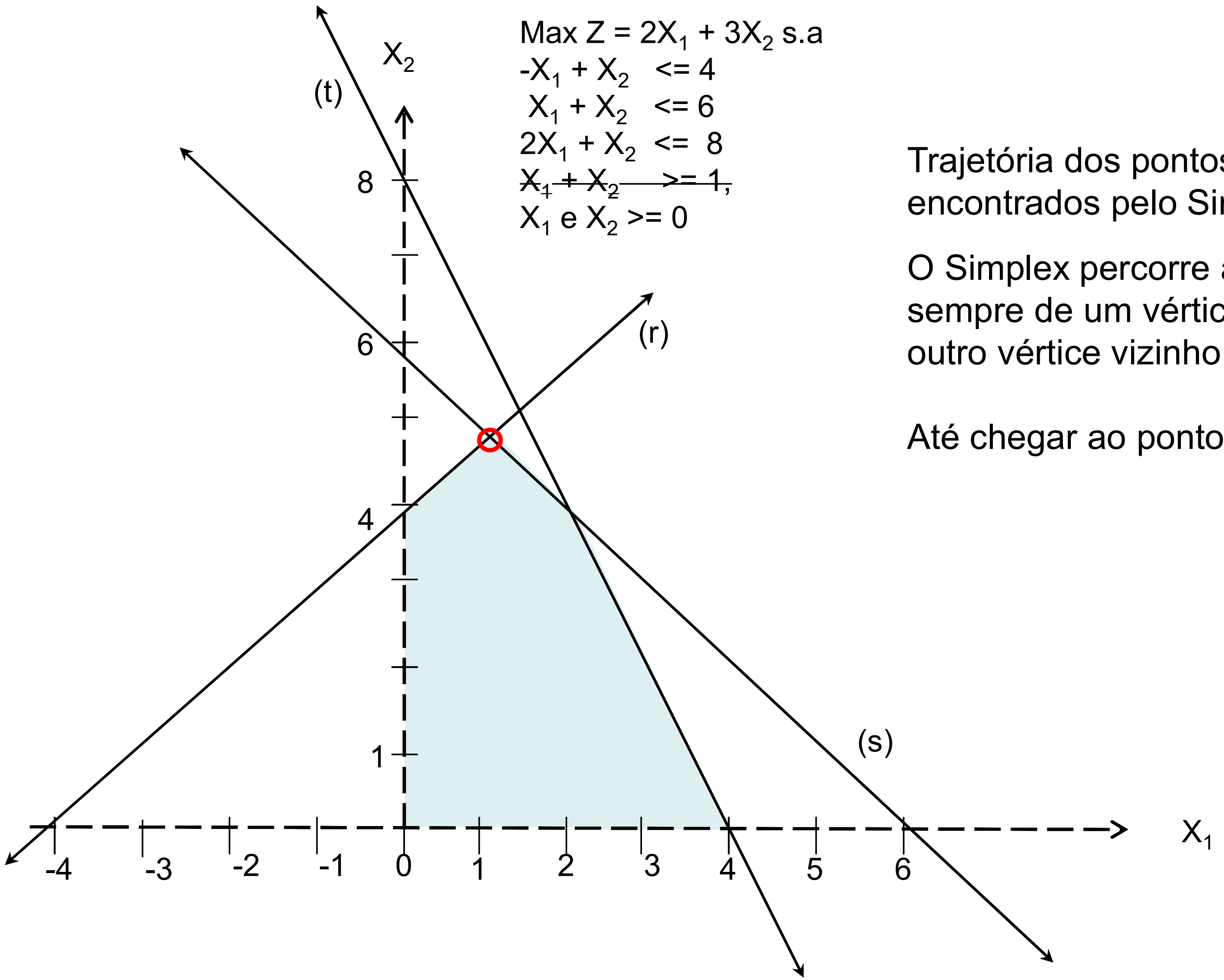
~~$X_1 + X_2 \geq 1$,~~

X_1 e $X_2 \geq 0$



Trajetória dos pontos encontrados pelo Simplex

O Simplex percorre a RF indo sempre de um vértice para um outro vértice vizinho



Trajetória dos pontos encontrados pelo Simplex

O Simplex percorre a RF indo sempre de um vértice para um outro vértice vizinho

Até chegar ao ponto ótimo

Exercícios – Resolver pelo método Simplex utilizando tablôs

Max $Z(X) = 4X_1 + 8X_2$ sujeito a

$$3X_1 + 2X_2 <= 18$$

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$X_1 <= 4$$

$$X_1 , X_2 >= 0$$

Max $Z(X) = 5X_1 + 4X_2 + 3X_3$ sujeito a

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 <= 5$$

$$4X_1 + 2X_2 + 2X_3 <= 11$$

$$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 <= 8$$

$$X_1 , X_2 , X_3 >= 0$$

Exercícios – Resolver pelo método Simplex utilizando tablôs

Max $Z(X) = 4X_1 + 8X_2$ sujeito a

$$3X_1 + 2X_2 <= 18$$

$$X_1 + X_2 <= 5$$

$$X_1 <= 4$$

$$X_1 , X_2 >= 0$$