BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

(baseado nas notas de aula do prof. Haroldo Gambini Santos)
Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto

Conteúdo

Fonte

Este material é baseado no livro

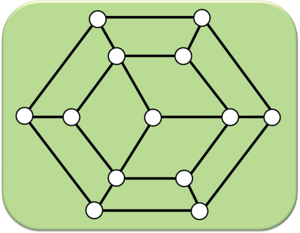
- Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.

Licença

Histórico

Em 1856, Thomas Penyngton Kirkman, listado entre os dez mais importantes matemáticos britânicos do séc. 19, escreveu um trabalho que examinava as condições de existência de ciclos que não repetissem vértices ou arestas, desenvolvidos sobre certos tipos de sólidos.

Especificamente, seu trabalho se concentrava em poliedros simples e examinava um caso semelhante ao apresentado na figura.



Histórico

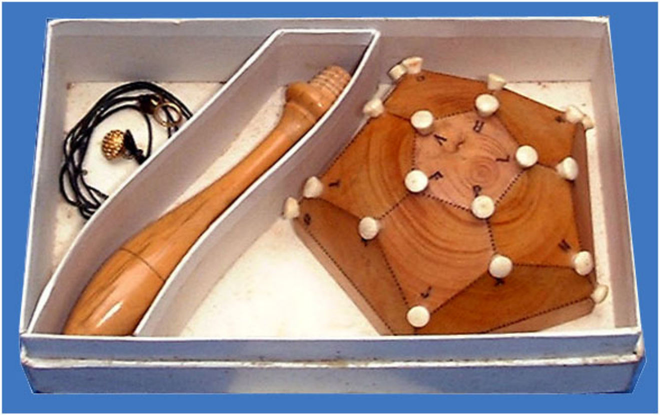
Kirkman havia se deparado com o problema de encontrar um ciclo em um grafo que passasse por todos os vértices sem admitir vértices repetidos.

Dentre os diversos tipos possíveis ciclos em grafos, este é um dos de maior importância, tanto sob o aspecto teórico quanto sob o aspecto da aplicação em problemas reais.

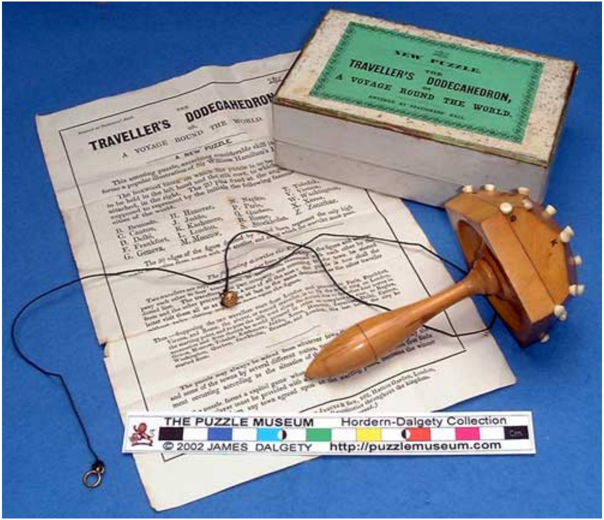
Histórico v2

Historicamente, estes ciclos são denominados Hamiltonianos, devido a William Rowan Hamilton (matemático, físico e astrônomo irlandês), que, em 1957 propôs um jogo que denominou *Around the World*.

O jogo era feito sobre um dodecaedro, em que cada vértice estava associado a uma cidade importante na época. O desafio consistia em encontrar uma rota através dos vértices do dodecaedro que iniciasse e terminasse na mesma cidade, sem repetir uma cidade sequer.

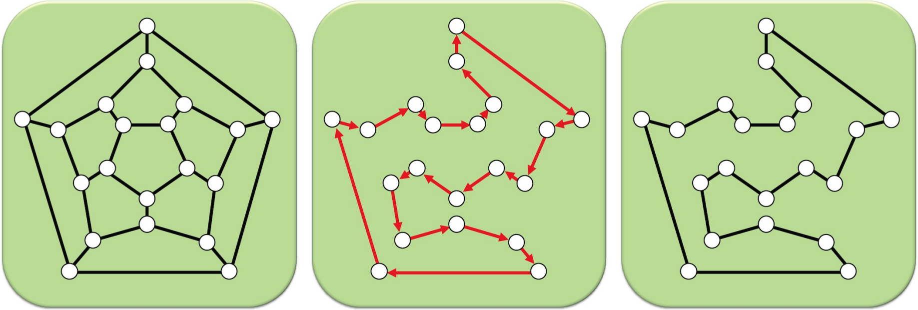


Around the World



Around the World

Caminhos e Ciclos Hamiltonianos



Grafo que representa o jogo, uma solução e um ciclo hamiltoniano.

Grafos Hamiltoniano e Semi-Hamiltoniano

Caminho Hamiltoniano

Um caminho hamiltoniano é um caminho que passa por cada vértice de um grafo exatamente uma vez.

Ciclo Hamiltoniano

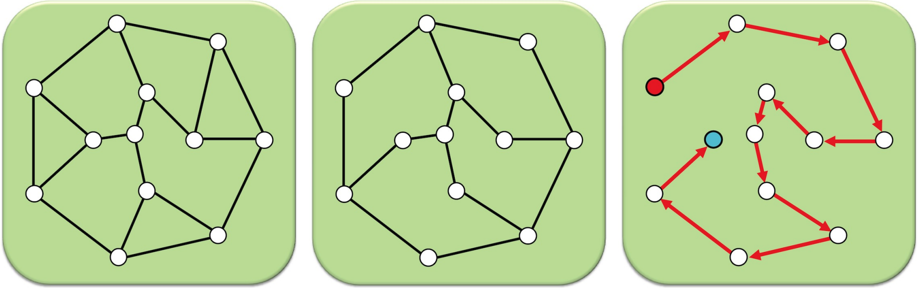
Um ciclo hamiltoniano é um caminho hamiltoniano que retorna ao vértice inicial.

Grafo Hamiltoniano

Um grafo é dito hamiltoniano se possui um ciclo hamiltoniano.

Grafo Semi-Hamiltoniano

Um grafo é dito semi-hamiltoniano se possui um caminho hamiltoniano. Claramente, um grafo hamiltoniano é também semi-hamiltoniano.



Grafo hamiltoniano, grafo não hamiltoniano e caminho hamiltoniano.

Caracterização

Insuficiente

Não se conhece uma condição necessária e suficiente trivial para a existência de um ciclo hamiltoniano em um grafo.

Teorema de Dirac, 1952

Um grafo $G = (V, A)$ com $n \geq 3$ e $\mathrm{d}(x) \geq n/2$ para todo $x \in V$ é hamiltoniano.

Teorema de Ore, 1961

Uma condição suficiente para que um grafo seja hamiltoniano é que a soma dos graus de cada par de vértices não adjacentes seja no mínimo n.

Teorema de Bondy & Chvátal, 1976

Se o Fecho Hamiltoniano de G for um grafo completo, então G será hamiltoniano.

O Fecho Hamiltoniano - $\Phi(G)$

Construção

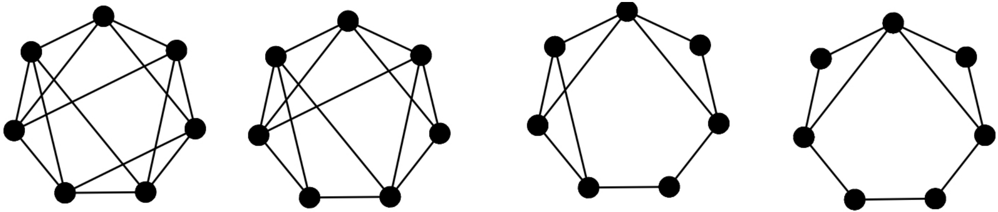
O Fecho Hamiltoniano de um grafo G, $\Phi(G)$, é o grafo obtido a partir de G do seguinte modo:

Sucessivamente são adicionadas arestas entre pares de vértice u e v não adjacentes cuja soma dos graus seja pelo menos n, até que em algum momento tais pares não existam mais.

Exercício

Tente usar usar o teorema de Bondy & Chvátal para o grafo C_4.

Ciclos Hamiltonianos: Uso dos Teoremas



Indique quais grafos satisfazem Dirac, Ore e Bondy & Chvátal

Recapitulando...

- Dirac: $n \geq 3$ e $\mathrm{d}(x) \geq n/2 \; \forall x \in V$;
- Ore: $\mathrm{d}(u) + \mathrm{d}(v) \geq n \; \forall \{u, v\} \notin A$;
- Bondy & Chvátal: $\Phi(G) = K_n$.

Caracterização

Karp, 1972

O problema de decisão associado à determinação de ciclos e caminhos em grafos sem propriedades peculiares é NP-Completo.

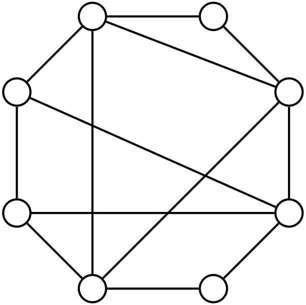
Mais Resultados

Decidir de se um grafo é hamiltoniano é NP-Completo mesmo que o grafo:

- Seja planar (Garey et al, 1976);
- Possua um caminho hamiltoniano conhecido (Papadimitriou & Steiglitz, 1976).

Propriedade

Todo grafo Hamiltoniano com n-vértices é constituído por um C_n e mais algumas arestas.



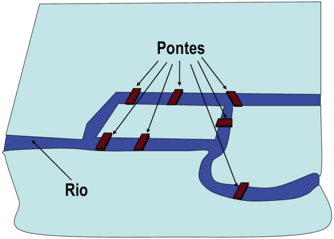
Histórico

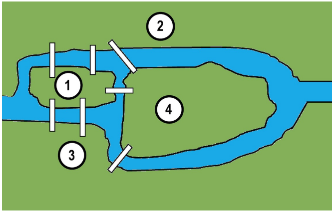
Supostamente, a teoria dos grafos nasceu associada à solução e modelagem de um problema de ciclos.

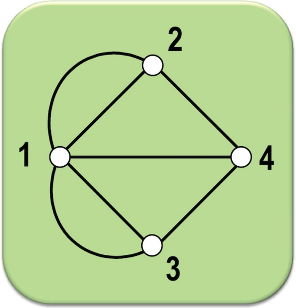
Diz-se que Euler, por ocasião de uma visita à cidade de Königsberg, durante o século XVIII, foi apresentado a um desafio não resolvido por ninguém. Durante a solução do problema, Euler teria lançado os fundamentos da teoria dos grafos.

O problema tratava de um rio (Pregolya) que atravessava a cidade de Königsberg (atual Kaliningrado), formando duas ilhas. As ilhas e as margens eram ligadas por sete pontes.

Caminhos e Ciclos Eulerianos







Questão

A partir de algum ponto da cidade de Königsberg é possível fazer uma caminhada que **atravesse todas as pontes da cidade uma única vez e retorna ao ponto inicial**?

Euler

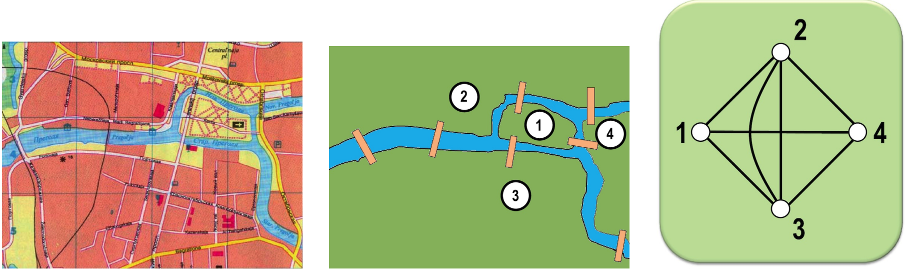
Estudando este problema, Euler demonstrou, com o auxílio do grafo da figura anterior, que o percurso pretendido é impossível.

Em virtude do resultado obtido por Euler, os percursos que passam por todas as arestas de um grafo, sem repetí-las, são denominados Eulerianos.

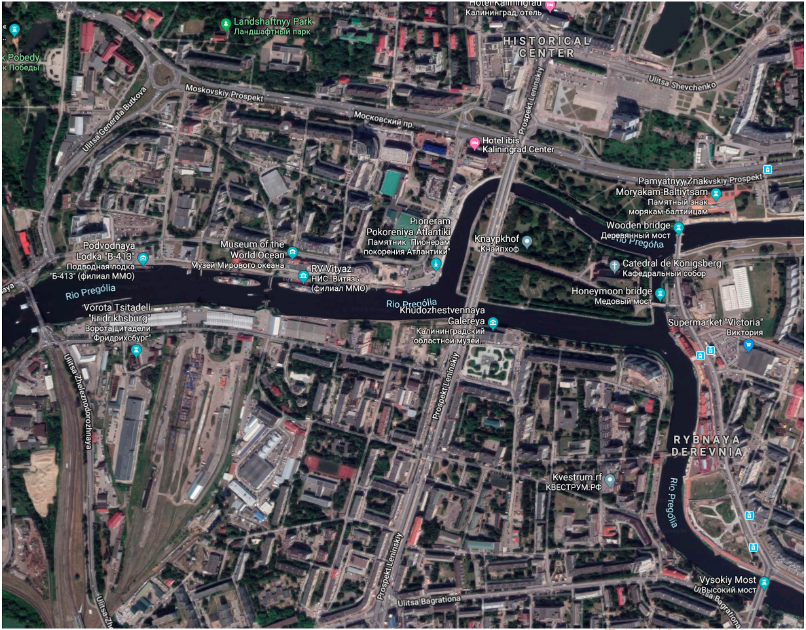
Curiosidade

Desde os tempos de Euler (portanto, há mais de três séculos), Königsberg passou por várias transformações, entre elas, duas modificações na disposição de suas sete pontes.

Ainda assim, o percurso continua impossível.



Plano de Kaliningrado (séc. XXI), modelo e grafo associado.


Hotel Kaliningrad
Калининград, отель
Landshaftnyy Park
Ландшафтный парк
HISTORICAL CENTER
Pobedy
Победы
Moskovskiy Prospekt
Московский пр.
Ulitsa Shevchenko
Ulitsa Generala Butkova
Prospekt Leninskiy
Hotel ibis Kaliningrad Center
Pamyatnyy Znak Moryakam-Baltiytsam
Памятный знак морякам-балтийцам
Pioneram Pokoreniya Atlantiki
Памятник "Пионерам покорения Атлантики"
Museum of the World Ocean
Музей Мирового океана
Podvodnaya Lodka "B-413"
Подводная лодка "Б-413" (филиал ММО)
RV Vityaz
НИС "Витязь" (филиал ММО)
Knaypkhof
Кнайпхоф
Wooden bridge
Деревянный мост
Rio Prególia
Catedral de Königsberg
Кафедральный собор
Honeymoon bridge
Медовый мост
Rio Prególia
Khudozhestvennaya Galereya
Калининградский областной музей...
Vorota Tsitadeli "Fridrikhsburg"
Ворота цитадели "Фридрихсбург"
Supermarket "Victoria"
Виктория
Ulitsa Zheleznodorozhnaya
Prospekt Leninskiy
RYBNAYA DEREVNIA
Kvestrum.rf
КВЕСТРУМ.РФ
Rio Prególia
Vysokiy Most
Высокий мост
Ulitsa Bagrationa
Prospekt Leninskiy

Grafos Euleriano e Semi-Euleriano

Caminho Euleriano

Um caminho euleriano é um caminho que passa por cada aresta de um grafo exatamente uma vez.

Ciclo Euleriano

Um ciclo euleriano é um caminho euleriano que começa e termina no mesmo vértice.

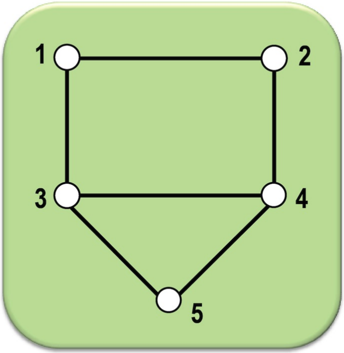
Grafo Euleriano

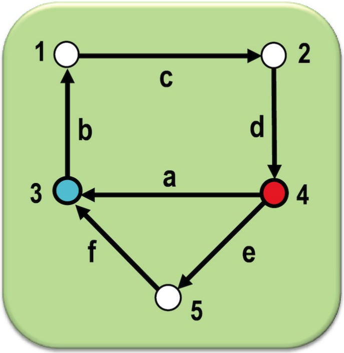
Um grafo é dito euleriano se possui um ciclo euleriano.

Grafo Semi-Euleriano

Um grafo é dito semi-euleriano se possui um caminho euleriano.

Claramente, um grafo euleriano é também semi-euleriano.





Grafo semi-euleriano e caminho associado.

Caracterização

Suficiente

Considerando G um grafo conectado, então:

- (Teorema de Euler) G é euleriano se e somente se **todos os seus vértices** possuírem grau par;
- G não é euleriano se e somente se **existem dois ou mais vértices** de grau ímpar;
- G é semi-euleriano se e somente se **existem exatamente dois vértices** de grau ímpar.

Caracterização

Demonstração

Seja $G = (V, E)$ euleriano e seja um ciclo euleriano em G.

Ao percorremos esse ciclo a partir de um vértice dado, cada vez que atravessarmos um vértice utilizaremos duas arestas, uma na chegada e outra na saída.

Logo, o grau de cada vértice deve ser obrigatoriamente par.

Por indução, sobre o número de arestas o teorema é válido, por vacuidade, quando $m = 0$.

Dúvidas?