

BCC204 - Teoria dos Grafos

Marco Antonio M. Carvalho

Departamento de Computação
Instituto de Ciências Exatas e Biológicas
Universidade Federal de Ouro Preto



Universidade Federal
de Ouro Preto



1 O Problema do Caixeiro Viajante

- Casos Especiais
- Evolução dos Benchmarks
- Algoritmo de Christofides
- Aplicações Práticas

Fonte

Este material é baseado no livro

- ▶ Goldbarg, M., & Goldbarg, E. (2012). *Grafos: conceitos, algoritmos e aplicações*. Elsevier.

Licença

Este material está licenciado sob a Creative Commons BY-NC-SA 4.0. Isto significa que o material pode ser compartilhado e adaptado, desde que seja atribuído o devido crédito, que o material não seja utilizado de forma comercial e que o material resultante seja distribuído de acordo com a mesma licença.

O Problema do Caixeiro Viajante

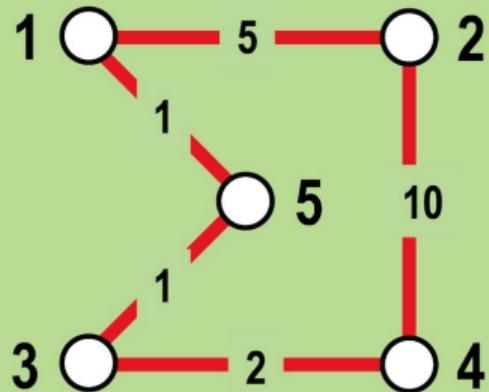
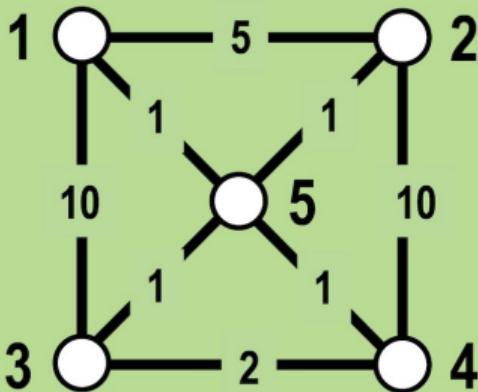
Definição

O **Problema do Caixeiro Viajante** – PCV, consiste em determinar um ciclo hamiltoniano de **custo mínimo** em um grafo ponderado, direcionado ou não.

Complexidade

Encontrar um ciclo hamiltoniano de custo mínimo em um grafo sem propriedades particulares é **NP-Difícil**.

O Problema do Caixeiro Viajante



Grafo de exemplo e solução do PCV.

O Problema do Caixeiro Viajante

Histórico

O Problema do Caixeiro Viajante é um problema clássico de otimização combinatória.

De acordo com o trabalho *On the history of combinatorial optimization*, de 1960, a idéia de um ciclo hamiltoniano de custo mínimo como um problema de aplicação surgiu em 1920 em Viena, atribuído a Karl Menger.

Karl Menger conhece Hassler Whitney, que supostamente, entre 1931 e 1932, teria se referido ao problema como o *Problema do Caixeiro Viajante*.

Obviamente, esta versão da história não está isenta de contestações.

O Problema do Caixeiro Viajante

O Desafio

Em 1962, a *Procter & Gamble* lançou um desafio com um prêmio de US\$10.000,00 (o suficiente para comprar uma casa na época) e 54 prêmios de US\$ 1.000,00 para quem resolvesse um PCV com 33 cidades espalhadas pelos EUA.

A solução ótima é uma rota de ≈ 17480 km de comprimento, e vários participantes a alcançaram, mesmo sem saber que esta era a solução ótima.

O critério de desempate foi a melhor redação sobre produtos da *Procter & Gamble* :(



A Importância do PCV

O problema do caixeiro viajante é um dos problemas de otimização combinatória mais intensamente pesquisados até o momento.

Esta importância é atribuída a três características combinadas:

- ▶ Grande número de aplicações práticas;
- ▶ Relação com vários outros problemas e muitas variantes;
- ▶ Grande dificuldade de solução exata.

O Problema do Caixeiro Viajante

O Filme

Quatro matemáticos descobrem um algoritmo para solução eficiente do PCV e provam que $P=NP$, quando se confrontam com as implicações globais da descoberta.

O departamento de defesa americano oferece US\$10 milhões para cada pelo algoritmo, porém, um dos matemáticos se recusa a vender, sendo forçado a revelar um segredo importante sobre sua parte do algoritmo.

Lançado em 2012.

TRAVELLING SALESMAN

RAVELLINGSALESMANMOVIE.COM @RAVSALEM

Casos Especiais do PCV

PCV Métrico

Também conhecido como Δ -PCV, em que as distâncias entre as cidades obedecem à desigualdade triangular, ou seja, a distância de uma cidade A até uma cidade B nunca é maior do que uma rota que inclui uma cidade intermediária C .

Em outras palavras, $d_{AB} \leq d_{AC} + d_{CB}$.

PCV Euclideano

Também conhecido como PCV planar, em que as distâncias são euclidianas.

PCV Assimétrico

A distância entre dois vértices no grafo depende do sentido em que a aresta está sendo percorrida.

O Problema do Caixeiro Viajante

Evolução dos *Benchmarks*

Ao longo do tempo, a ampla investigação e criação de métodos para solução do PCV resultou em uma grande evolução no tamanho das instâncias não triviais resolvidas à optimalidade:

- ▶ 318 cidades (1980);
- ▶ 7.397 cidades (1990);
- ▶ 24.978 cidades (2004);
- ▶ 85.900 cidades (2006).

Atualmente, a maior instância do PCV não resolvida é conhecida como “World TSP”, contando com 1.904.711 cidades ^a.

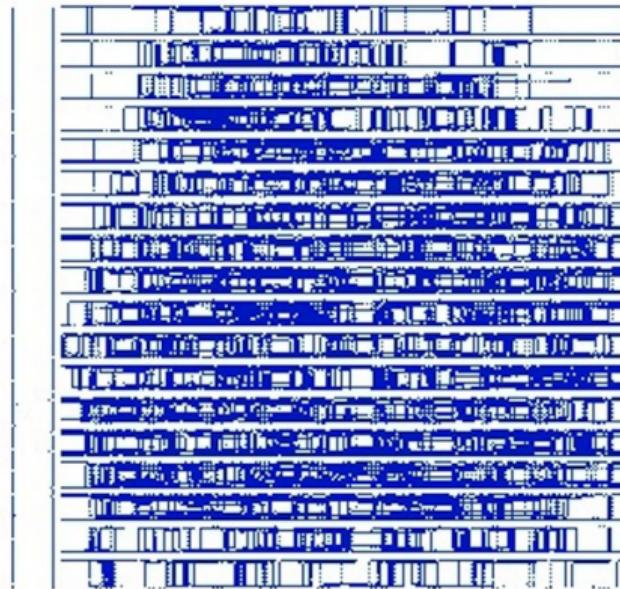
^aDisponível em <http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/world/index.html>

O Problema do Caixeiro Viajante



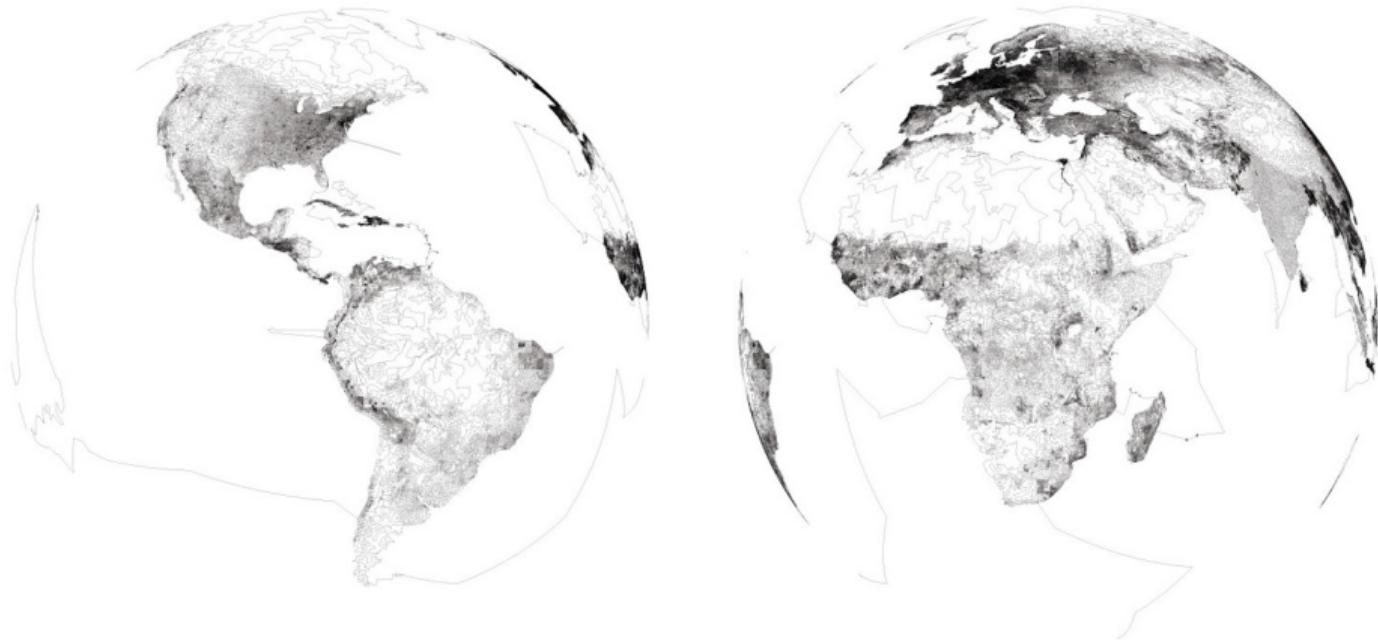
15.112 cidades na Alemanha e 24.978 cidades na Suécia.

O Problema do Caixeiro Viajante



85.900 pontos em um circuito VLSI.

O Problema do Caixeiro Viajante



World TSP: 1.904.711 cidades.

Algoritmo de Christofides

Princípio

O algoritmo de Christofides, proposto em 1976, determina um ciclo hamiltoniano da seguinte forma:

- ▶ Dado um grafo G , determina uma árvore geradora mínima T ;
- ▶ Calcula um casamento perfeito de custo mínimo entre os vértices de grau ímpar de T ;
- ▶ Adiciona as arestas do casamento em T , tornando-a um grafo euleriano;
- ▶ Aplica o procedimento *Twice-Around* para determinar o ciclo hamiltoniano a partir do ciclo euleriano.

Comprovadamente, o algoritmo de Christofides produz soluções que são no máximo 1,5 vezes piores do que as soluções ótimas dos problemas.

Princípio

O algoritmo de Christofides utiliza parte do princípio da heurística *Twice-Around*.

Partindo de uma árvore geradora mínima de um grafo G , um ciclo hamiltoniano é obtido a partir de um ciclo euleriano em G através de um percurso que, utilizando “atalhos” sempre que possível, evita a repetição de vértices no ciclo.

Complexidade

A complexidade desta heurística é dominada pela determinação do casamento perfeito de custo mínimo: $O(n^3)$.

Terminologia

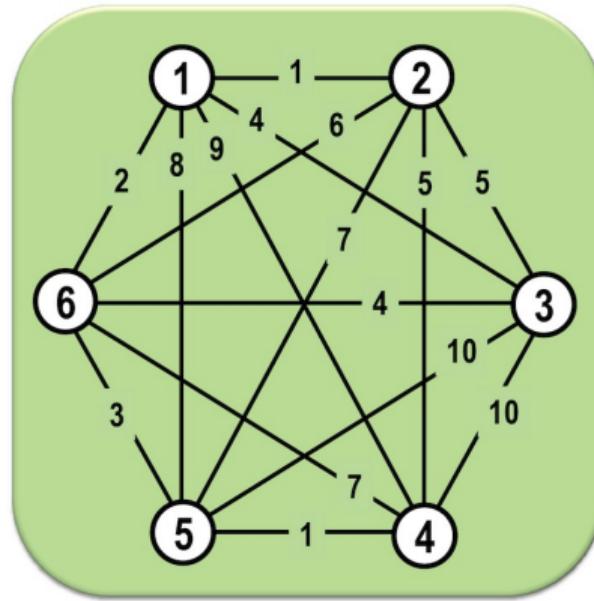
- ▶ H : conjunto de vértices que determinam o ciclo hamiltoniano;
- ▶ T : árvore geradora mínima do grafo da entrada;
- ▶ A_T : conjunto de arestas de T ;
- ▶ $G_0 = (V_0, A_0)$: grafo reduzido que possui os vértices de grau ímpar de T e as arestas de A incidentes aos vértices de T ;
- ▶ E : casamento perfeito de custo mínimo dos vértices de G_0 ;
- ▶ G' : grafo que possui o conjunto de vértices original e o conjunto de arestas de T e E ;
- ▶ L : ciclo euleriano em G' .

Algoritmo de Christofides

Entrada: Grafo $G = (V, A)$

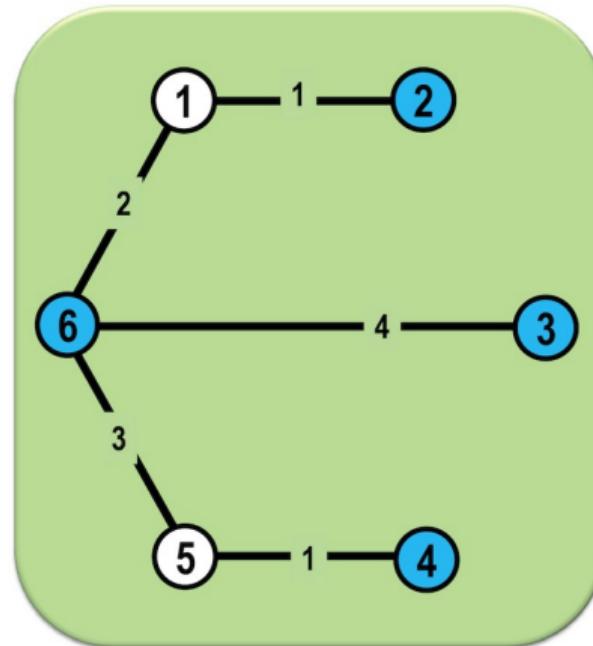
- 1 $H \leftarrow \emptyset;$
- 2 **determine** $T = (V, A_T)$, uma árvore geradora mínima de G ;
- 3 **defina** $G_0 = (V_0, A_0)$, em que V_0 é o conjunto de vértices de T que possuem grau ímpar e $A_0 = \{\{i,j\} \in A | i, j \in V_0\}$;
- 4 **determine** E , o casamento perfeito mínimo em G_0 ;
- 5 **faça** $G' = (V, A_T \cup E)$;
- 6 **determine** um ciclo euleriano L em G' ;
- 7 //Twice-Around
- 8 **enquanto** $L \neq \emptyset$ **faça**
 - 9 **escolher** sequencialmente $I_k \in L$;
 - 10 **se** $I_k \ni H$ **então** $H \leftarrow H \cup \{I_k\}$;
 - 11 $L \leftarrow L \setminus I_k$;
- 12 **fim**

Algoritmo de Christofides



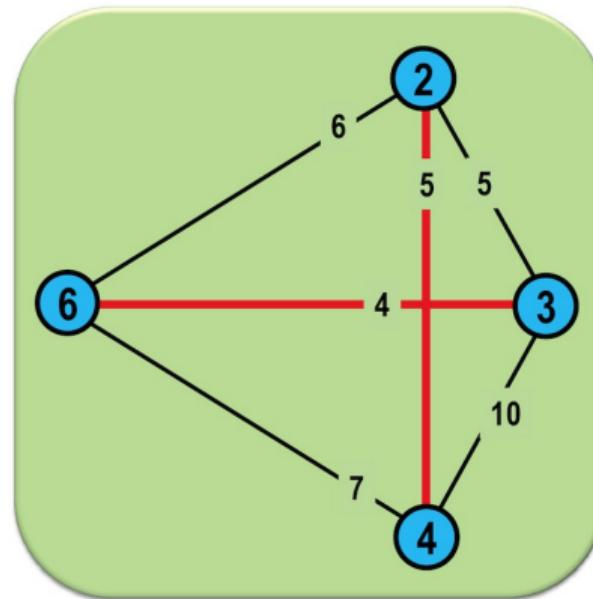
Grafo G .

Algoritmo de Christofides



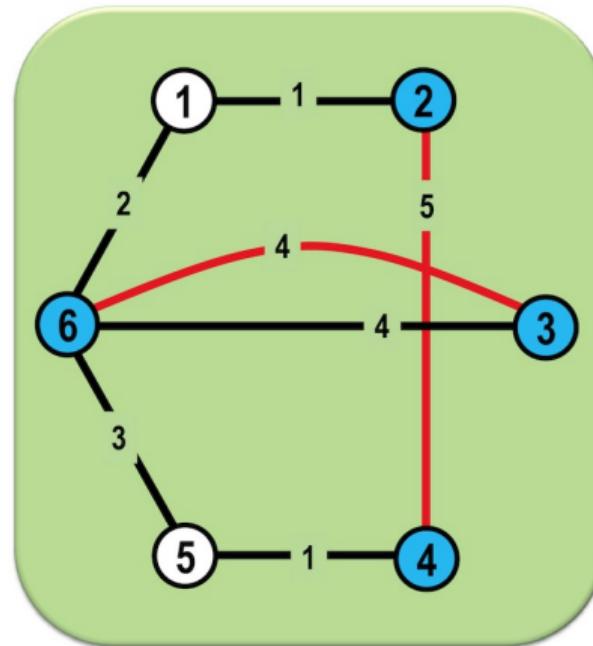
Vértices de grau ímpar na árvore geradora mínima T obtida a partir de G .

Algoritmo de Christofides



Casamento $E = \{(2, 4), (6, 3)\}$ em G .

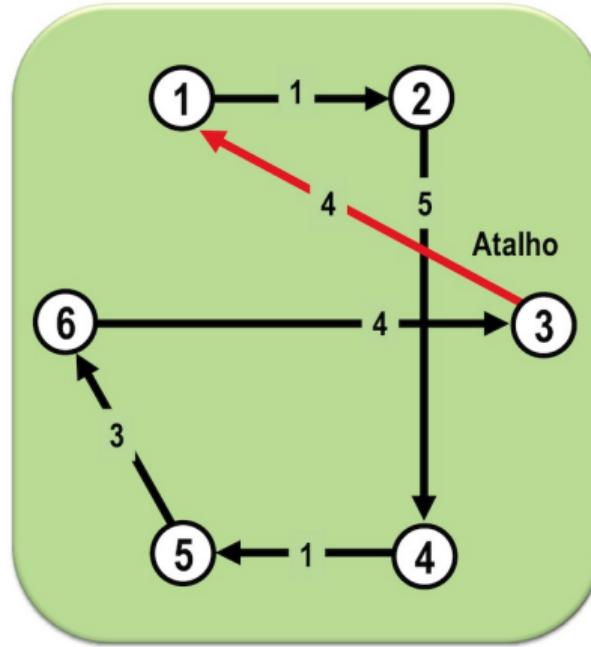
Algoritmo de Christofides



$$G' = (V, A_T \cup E)$$

Grafo cujas arestas são a união das arestas da árvore geradora mínima e do casamento perfeito mínimo.

Algoritmo de Christofides



$L = 6-3-6-1-2-4-5-6$ (possui repetição)

$H = (6, 3, 1, 2, 4, 5, 6).$

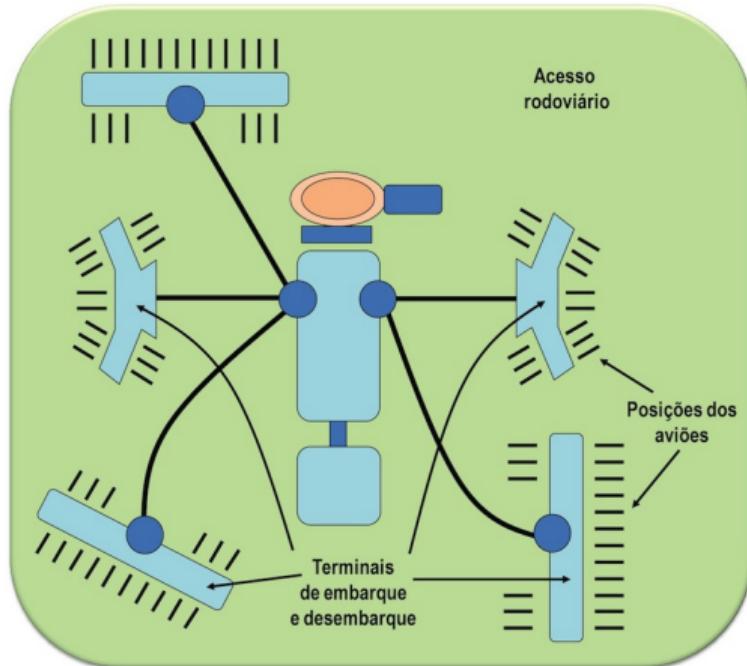
Transporte de Bagagens em Aeroportos

Normalmente, os aeroportos são constituídos de vastos terminais e exigem uma frota de pequenos veículos para carga e descarga de bagagens das aeronaves.

As bagagens são concentradas em um centro de distribuição tanto para carga quanto para descarga dos aviões estacionados, e os veículos seguem rotas pré-estabelecidas no aeroporto.

Este problema pode ser modelado como o m-PCV, em que m veículos executam rotas de recolhimento ou entrega de bagagens, atendendo às diversas posições de estacionamento.

Aplicações Práticas



Planta de um aeroporto com posições de estacionamento e vias de acesso.

O Passeio do Pistoneio

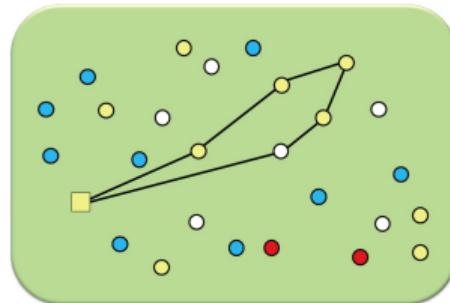
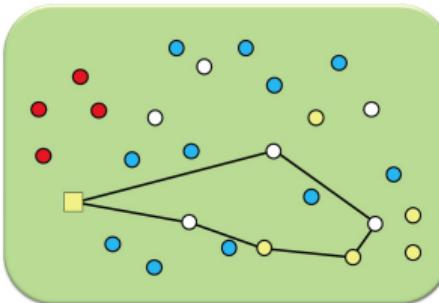
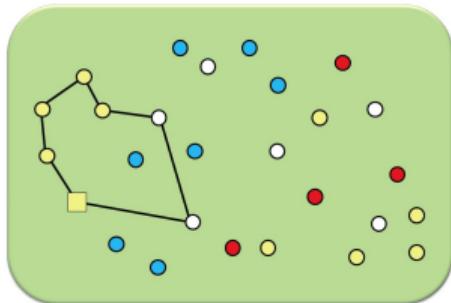
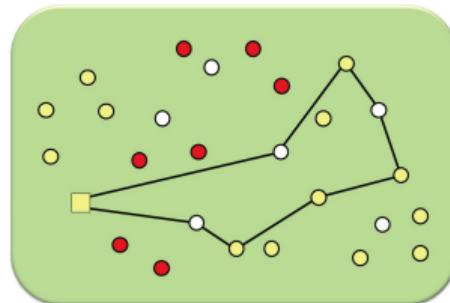
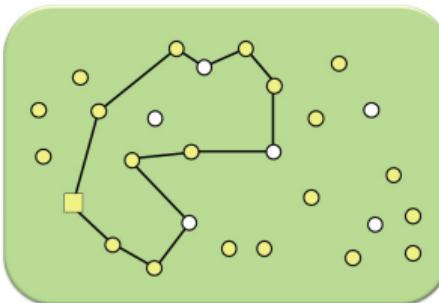
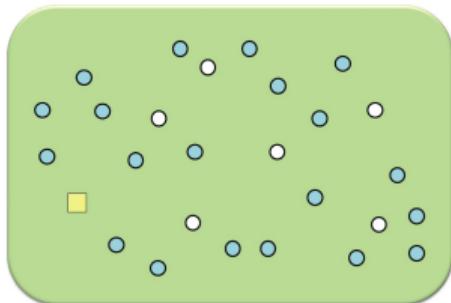
Campos terrestres de petróleo podem não ter pressão suficiente para trazer o petróleo até a superfície, e desta forma, é necessário雇用 uma unidade móvel de pistoneio para a extração.

A unidade móvel de pistoneio diminui o volume de petróleo no poço que temporariamente “esvazia”, até que seu equilíbrio seja recuperado e o poço “encha” novamente.

Cada poço pode levar um tempo diferente para recuperar seu equilíbrio, e enquanto isto ocorre, a unidade móvel de pistoneio extrai petróleo de outros poços.

O objetivo é estabelecer rotas para a unidade móvel de pistoneio extrair petróleo considerando apenas os poços disponíveis, minimizando a distância percorrida.

Aplicações práticas



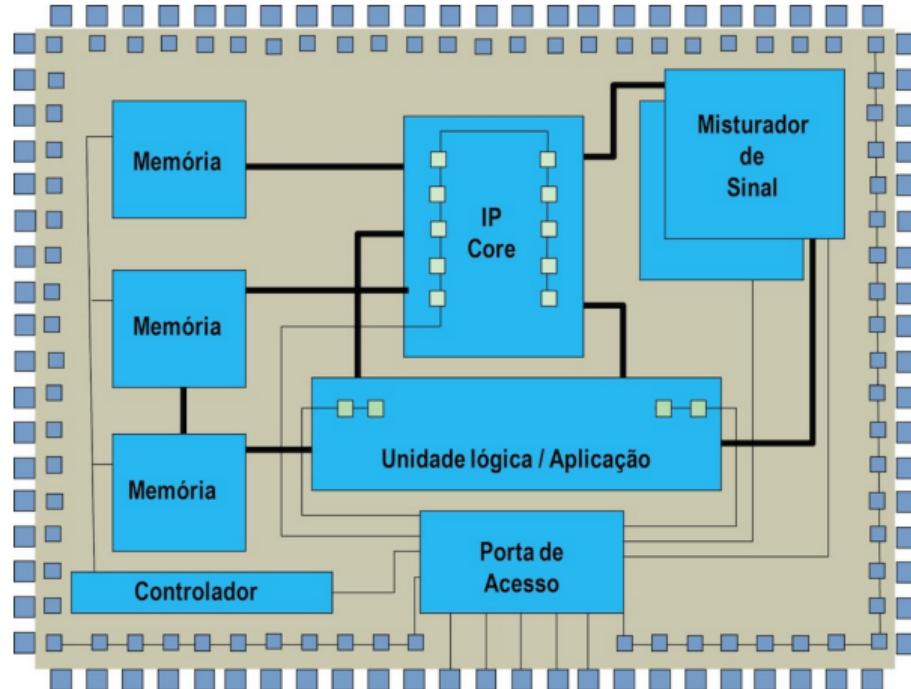
Distribuição de poços de petróleo e passeios para etapas diferentes de extração de petróleo.

Otimização de Cadeias de Varreduras de Semicondutores

Uma fábrica de semicondutores utilizou a heurística *Kernighan-Lin* (uma das heurísticas mais eficientes para o PCV simétrico) para determinação de rotas em um experimento de otimização de circuitos integrados.

Cadeias de varredura são rotas desenhadas em um chip que fornecem elementos de testes para este mesmo chip. O propósito do problema é minimizar o tamanho destas cadeias para evitar perda de tempo e potência dentro do chip.

Aplicações Práticas



Exemplo de chip com cadeias de varreduras otimizadas.

Dúvidas?

