Projeto e Análise de Algoritmos

Aula 8: Busca Inteligente para Problemas Intratáveis

DECOM/UFOP
2020 – 5º. Período
Anderson Almeida Ferreira
Material elaborado por:
Andréa Iabrudi Tavares

Objetivos

- Entender de forma genérica as abordagens para resolver um problema intratável
- Entender os conceitos básicos de busca exaustiva inteligente

- Bibliografia
  - GPV 9.1

Problemas de Busca

Constraint Satisfaction Problem(CSP)

- Otimização ou Decisão
- Conjunto de variáveis $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$
  - Cada variável X_i no domínio D_i

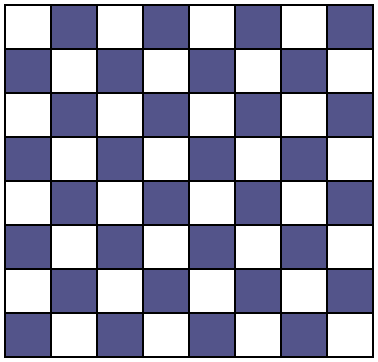
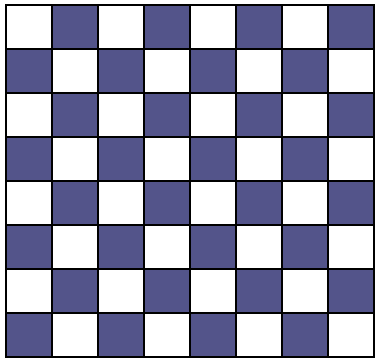
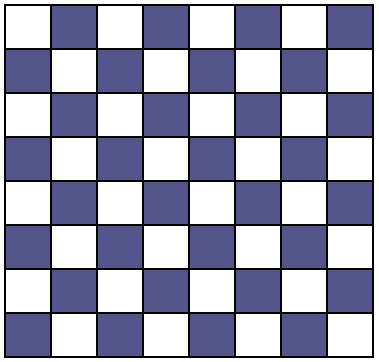
- Conjunto de restrições $\{C_1, C_2, \ldots, C_p\}$
  - Cada restrição relaciona um subconjunto de variáveis e especifica uma combinação viável (consistente) de valores para as mesmas.

Soluções

- Uma solução *s* é uma atribuição de valores para as variáveis: $s = (x_1, \cdots, x_n)$
  $x_i \in D_i \cup \{-\}$
  - **Consistente**: valores fixos não violam restrição.
- Objetivo: Obter solução consistente ótima.
  - Atribuir valor para toda variável de forma que todas as restrições sejam satisfeitas.

Exemplo: 8-rainhas

- Variáveis
- Domínios
- Restrições
- Solução

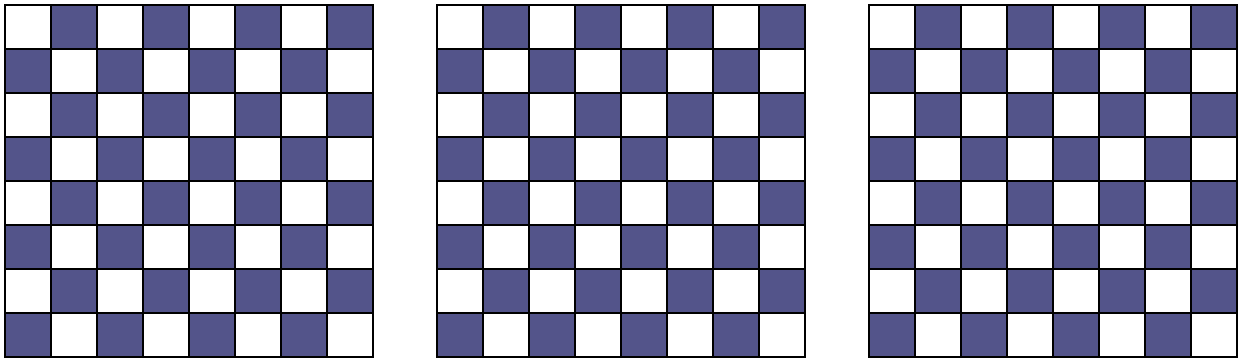
Exemplo: 8-rainhas

- Variáveis $X_1, \cdots, X_8$
- Domínios $D_i = \begin{cases} \text{posição no tabuleiro} & \{1, \cdots, 64\} \\ \text{linha da rainha na i-ésima coluna} & \{1, \cdots, 8\} \end{cases}$
- Restrições

$X_i \neq X_j, \forall i \neq j$ linhas diferentes (segunda representação)

$|i - j| \neq |X_j - X_i|, \forall i \neq j$ diagonais diferentes

- Solução



Exemplo: Mochila

- Variáveis
- Domínios
- Restrições
- Solução

Como resolver de forma exata?

- Geração exaustiva das soluções
  - Viabilidade: Checar restrições
  - Otimalidade: Checar valor da função objetivo

Busca Exaustiva: Algoritmo

```
acabou = false;
sol = (-,…,-);

function BuscaExaustivaDecisao(n,i,s)
//Entrada: número de variáveis n binárias
//         próxima variável a ser atribuída i
//         solução até o momento s
//Saída: solução s com variável i atribuída
//       uma solução consistente em global sol

1. if (i > n):
2.   if (e_consistente(s)):
3.     sol = s;
4.     acabou = true;
5. else:
6.   for j=0..1 & (~acabou): //para com a primeira consistente
7.     s[i]=j;
8.     BuscaExaustivaDecisão(n,i+1,s);
9.   s[i] = -; // limpa valor na solução
```

O que é específico?

- Função e_consistente muda para cada problema
  - Implementa restrições do problema
- Valores do for de atribuição (linha 5)
- Se quiser gerar TODAS as consistentes, basta tirar variável de controle acabou

Busca Exaustiva: Algoritmo Otimização

```
max = -∞;
sol = (-,…,-);

function BuscaExaustivaOtimização(n,i,s)
//Entrada: número de variáveis n binárias
//         próxima variável a ser atribuída i
//         solução até o momento s
//Saída: solução s com variável i atribuída
//       uma solução consistente ótima em global sol

1. if (i > n):
2.   if (e_consistente(s)):
3.     if (objetivo(s) > max):
4.       sol = s;
5.       max = objetivo(s);
6. else:
7.   for j=0..1:
8.     s[i]=j;
9.     BuscaExaustivaOtimização(n,i+1,s);
10.  s[i] = -1; // limpa valor na solução
```

O que é específico?

- Funções e_consistente e objetivo mudam para cada problema
  - Implementa restrições do problema
  - Implementa min/max do problema

- Valores do for de atribuição (linha 5)

Soluções incrementais

- Uma solução *s* é uma atribuição de valores para as variáveis: $s = (x_1, \cdots, x_n)$

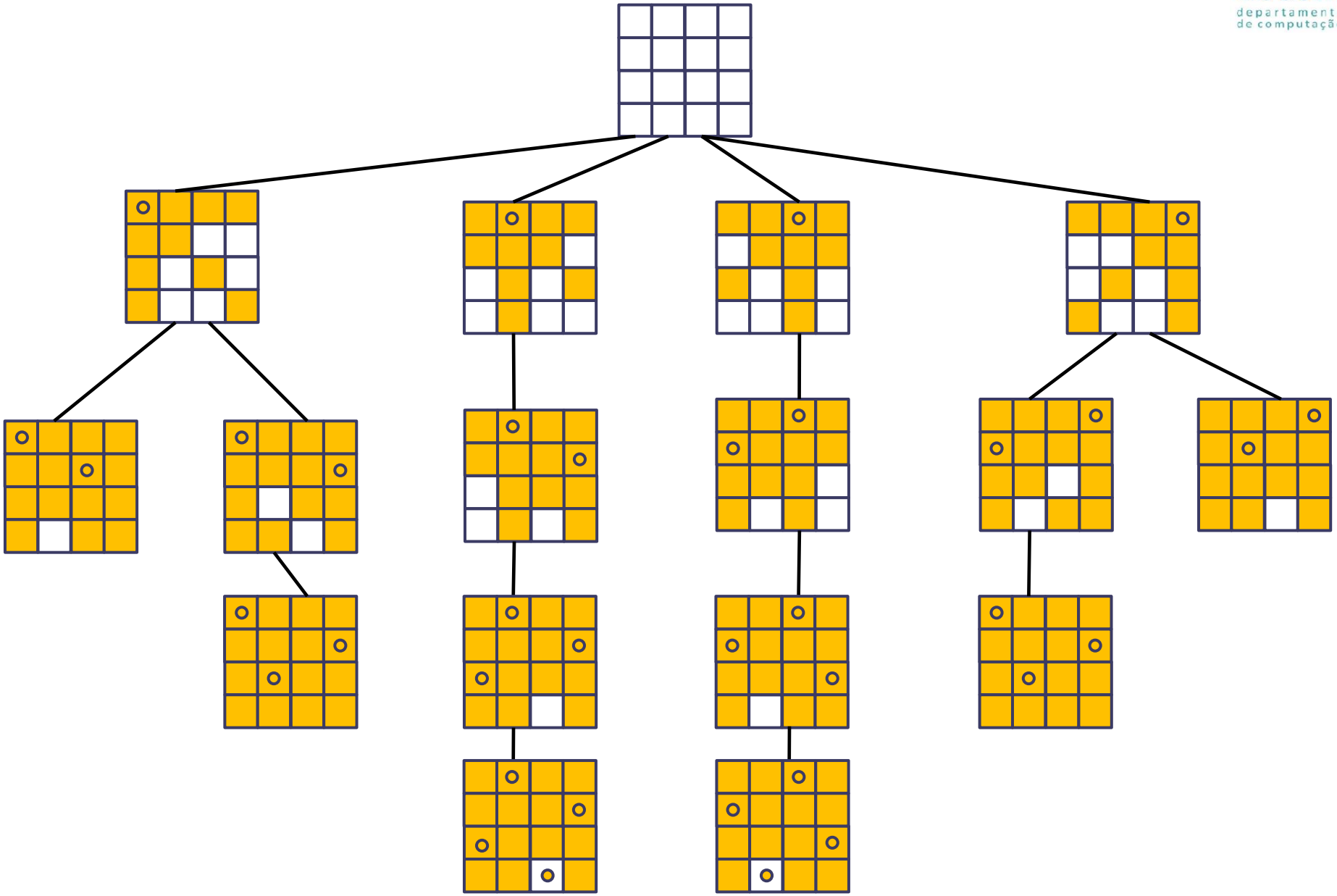
  $x_i \in D_i \cup \{-\}$

  - Se livre, não foi ainda escolhido valor.
  - **Completa**: todos os valores fixos.
  - **Consistente**: valores fixos não violam restrição.

- Objetivo: Obter solução (ótima,) completa e consistente
  - Atribuir valor para toda variável de forma que todas as restrições sejam satisfeitas.

Podemos melhorar?

- Inconsistência pode ser detectada prematuramente!



```
bool finished = FALSE; (* found all solutions yet? *)

backtrack(int a[], int k, data input)
{
        int c[MAXCANDIDATES]; (* candidates for next position *)
        int ncandidates; (* next position candidate count *)
        int i; (* counter *)

        if (is_a_solution(a,k,input))
                process_solution(a,k,input);
        else {
                k = k+1;
                construct_candidates(a,k,input,c,&ncandidates);
                for (i=0; i<ncandidates; i++) {
                        a[k] = c[i];
                        backtrack(a,k,input);
                        if (finished) return; (* terminate early *)
                }
        }
}
```

n-rainhas

```
construct_candidates(int a[], int k, int n, int c[], int *ncandidates)
{
        int i,j; (* counters *)
        bool legal_move; (* might the move be legal? *)

        *ncandidates = 0;
        for (i=1; i<=n; i++) {
                legal_move = TRUE;
                for (j=1; j<k; j++) {
                        if (abs((k)-j) == abs(i-a[j])) (* diagonal threat *)
                                legal_move = FALSE;
                        if (i == a[j]) (* column threat *)
                                legal_move = FALSE;
                }
                if (legal_move == TRUE) {
                        c[*ncandidates] = i;
                        *ncandidates = *ncandidates + 1;
                }
        }
}
```

Soluções parciais e subproblemas

- As variáveis livres de uma solução parcial geram um subproblema equivalente ao original, mas menor.

Árvore de busca

- Cada nó, uma solução.
- Cada folha no último nível, uma solução completa.
- Cada nível, uma variável é fixada.

- Subárvore: todas as soluções completas derivadas da solução parcial.

Árvore para Problema da Mochila

Valor	Peso	15
45	3	
45	9	
30	5	
10	2	

Valor	Peso	50
60	10	
100	20	
120	30	

Problema do assinalamento

	1	2	3	4
a	11	12	18	40
b	14	15	13	22
c	11	17	19	23
d	17	14	20	28

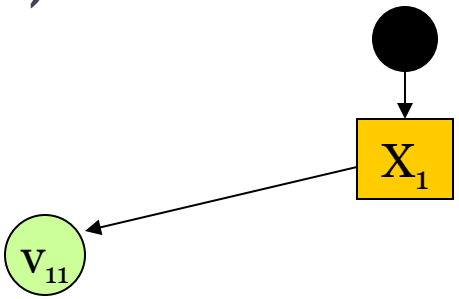
Algoritmo Backtracking

- Busca em profundidade na árvore de busca
- Permitir somente valores que levem a soluções parciais consistentes

Exemplo de Backtracking (3 variáveis)

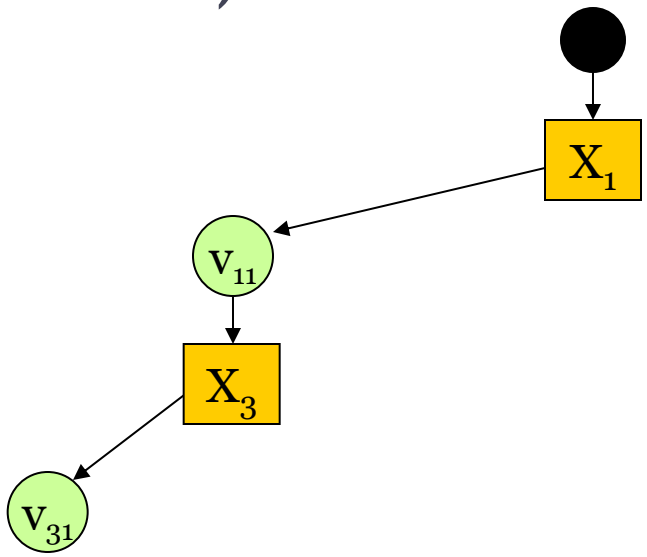
s = {-,-,-}

Busca Backtracking (3 variáveis)



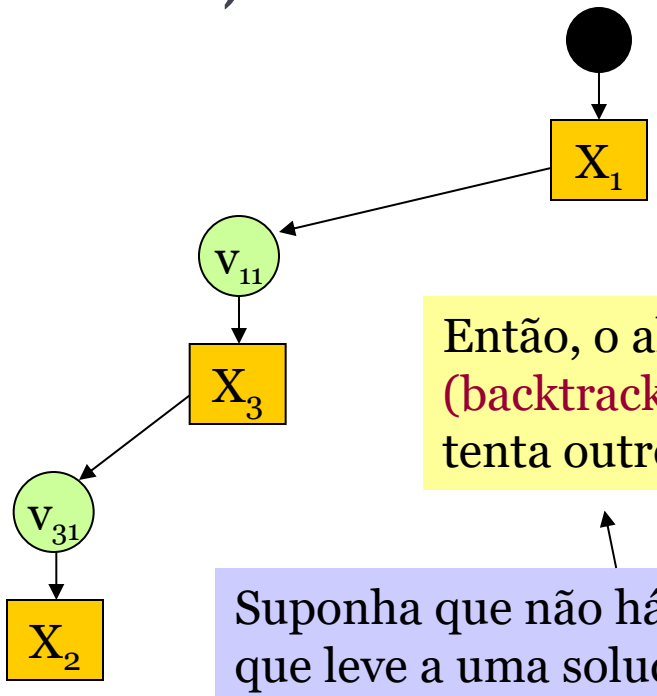
$s = \{v_{11}, -, -\}$

Busca Backtracking (3 variáveis)



$s = \{v_{11}, -, v_{31}\}$

Busca Backtracking (3 variáveis)

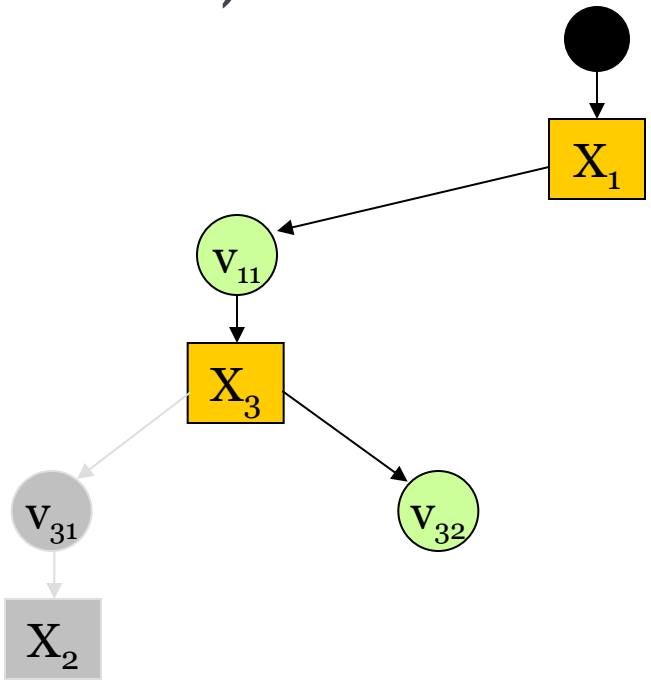


Então, o algoritmo de busca volta atrás (backtracks) para a variável anterior (X_3) e tenta outro valor

Suponha que não há valor de X_2 que leve a uma solução consistente

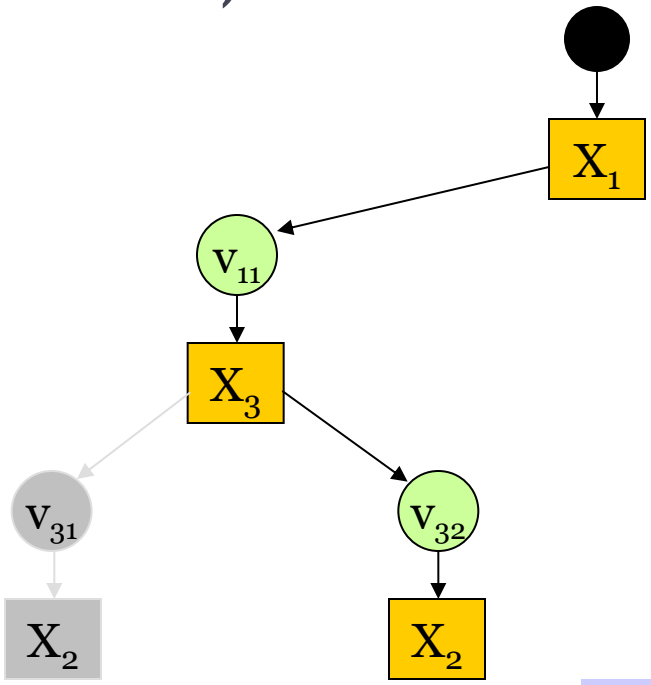
$S = \{v_{11}, -, v_{31}\}$

Busca Backtracking (3 variáveis)



$s = \{v_{11}, -, v_{32}\}$

Busca Backtracking (3 variáveis)

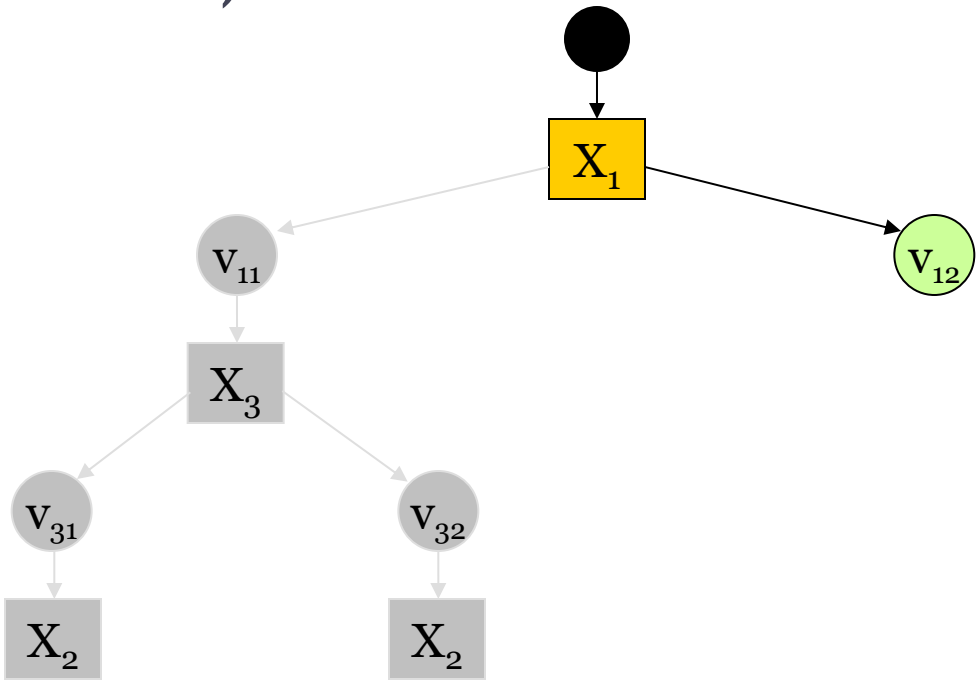


O algoritmo de busca volta atrás para a variável anterior (X_3) e tenta outro valor. Suponha que só existam dois valores, o algoritmo volta atrás novamente para X_1

Suponha novamente que não há valor de X_2 que leve a uma solução consistente

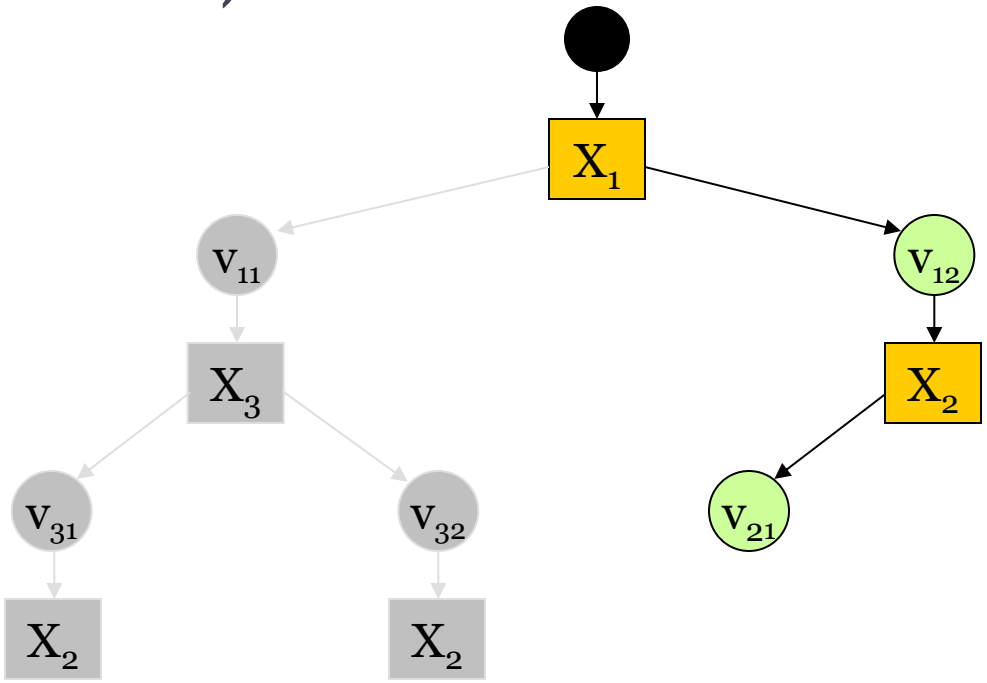
$s = \{v_{11}, -, v_{32}\}$

Busca Backtracking (3 variáveis)



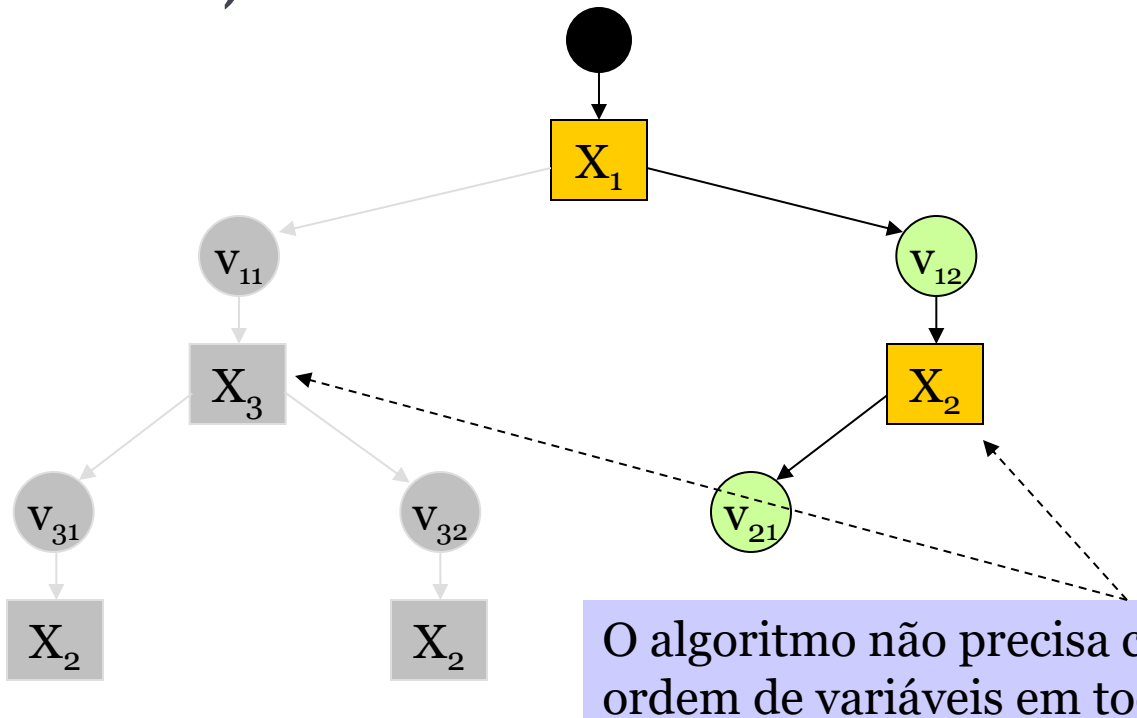
$s = \{v_{12}, -, -\}$

Busca Backtracking (3 variáveis)



$S = \{v_{12}, v_{21}, -\}$

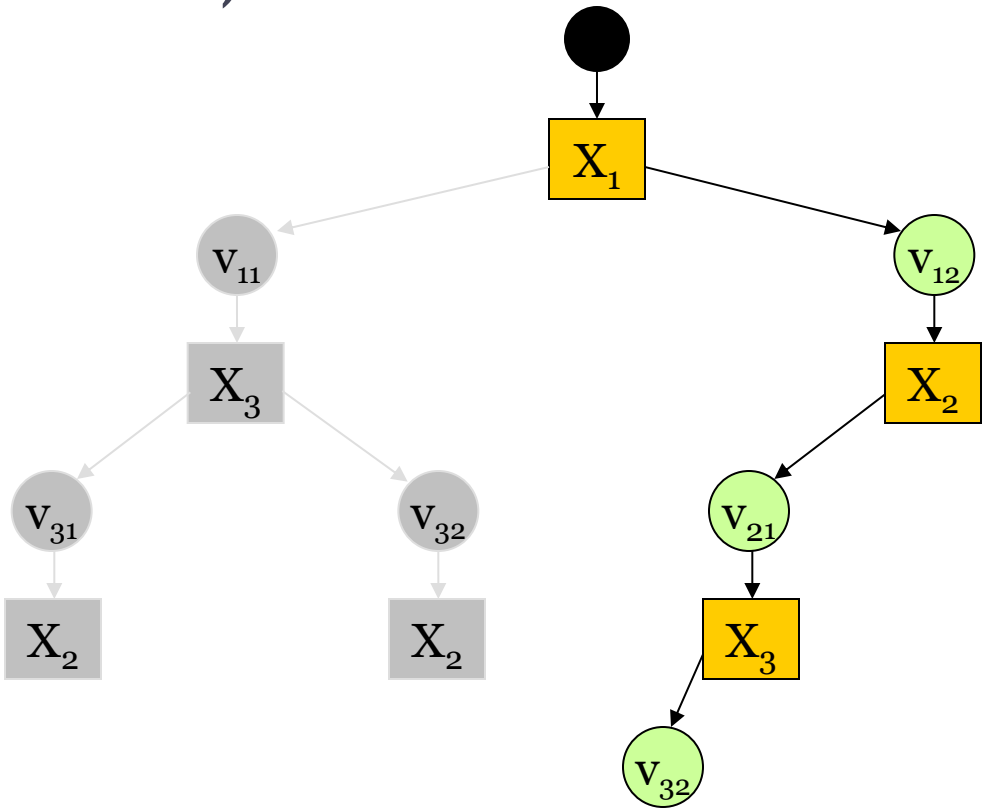
Busca Backtracking (3 variáveis)



O algoritmo não precisa considerar a mesma ordem de variáveis em todos os ramos...

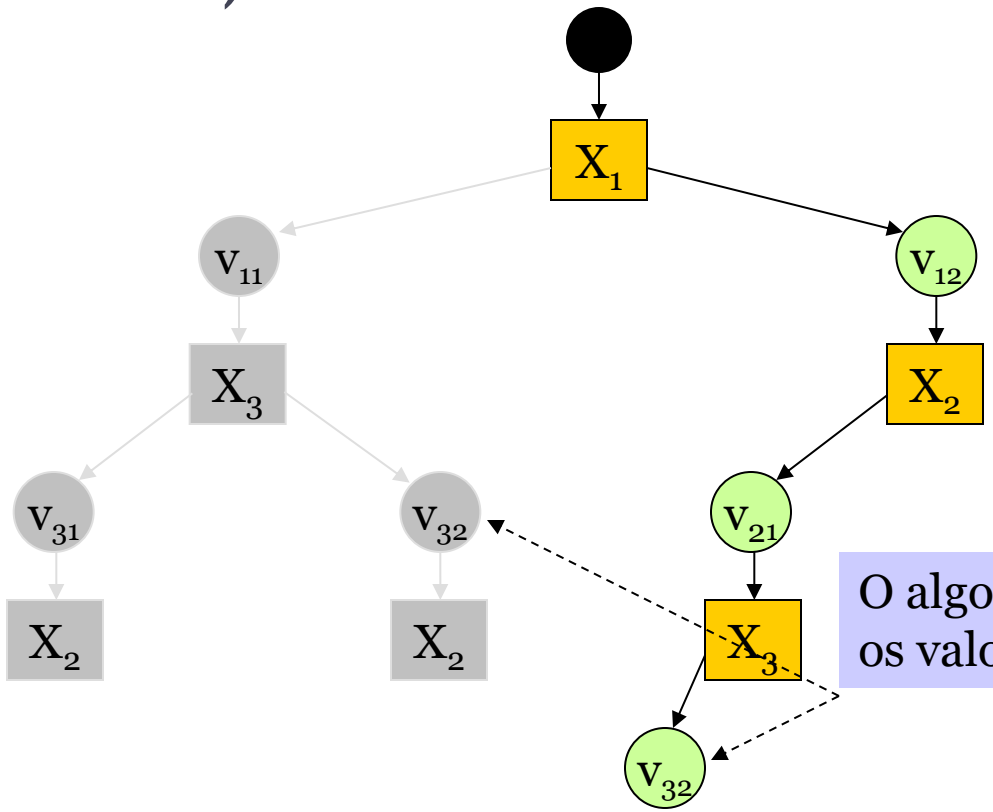
$S = \{v_{12}, v_{21}, -\}$

Busca Backtracking (3 variáveis)



$S = \{v_{12}, v_{21}, v_{32}\}$

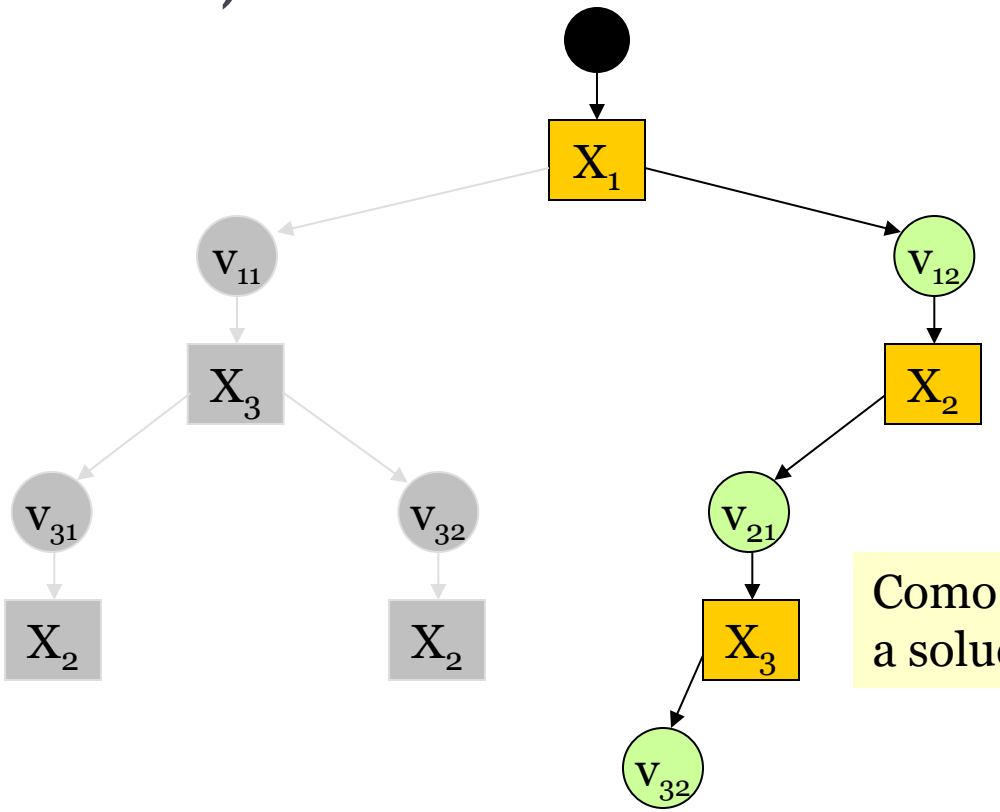
Busca Backtracking (3 variáveis)



O algoritmo não precisa conside
os valores na mesma ordem

$S = \{v_{12}, v_{21}, v_{32}\}$

Busca Backtracking (3 variáveis)



Como só há três variáveis, a solução é completa.

$S = \{v_{12}, v_{21}, v_{32}\}$

Backtracking

- **Exploração** sistemática do espaço de busca
  - Geração recursiva (implícita) da árvore
  - Semelhante à exaustiva
  - Busca em profundidade

- **Eliminação** de soluções parciais inviáveis
  - Construtivo
  - Restrições implícitas
  - Pode usar heurísticas para definir poda