EWMA e ARIMA(0,1,1)

EWMA = Exponentially Weighted Moving Average
ou Método de Amortecimento Exponencial Simples

↳ Idéia: construir previsão através de soma ponderada das observações, dando maior peso às obs. mais recentes.

Método de previsão ⇒ fórmula matemática usada para construir previsão (não é um modelo estatístico pois não possui componente aleatório).

Exs:

I) método ingênuo (ou naive)

$\hat{y}_{t+1|t} = y_t$ → a previsão para amanhã é o valor de hoje

$\Downarrow$

dá peso 1 à obs mais recente e peso 0 a todos os outros, pois:

$$\hat{y}_{t+1|t} = \sum_{j=0}^{t-1} w_j y_{t-j} = \underset{\uparrow\atop 1}{w_0} y_t + \underset{\uparrow\atop 0}{w_1} y_{t-1} + \ldots + \underset{\uparrow\atop 0}{w_{t-2}} y_2 + \underset{\uparrow\atop 0}{w_{t-1}}$$

Consistente com o modelo de passeio aleatório:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow \hat{y}_{t+1|t} = E(y_{t+1}|y_t) = y_t$$

Portanto o método ingênuo apenas faz sentido se a série estiver rumando de forma errática, apresentando comportamento instável (séries não estacionárias) ⟶ Consistente c/ $y_t = \alpha + \varepsilon_t$
↳ estacionário

II) média aritmética $\hat{y}_{t+1|t} = \dfrac{\sum_{j=0}^{t-1} y_{t-j}}{t}$ ⇒ todas as observações possuem o mesmo peso.

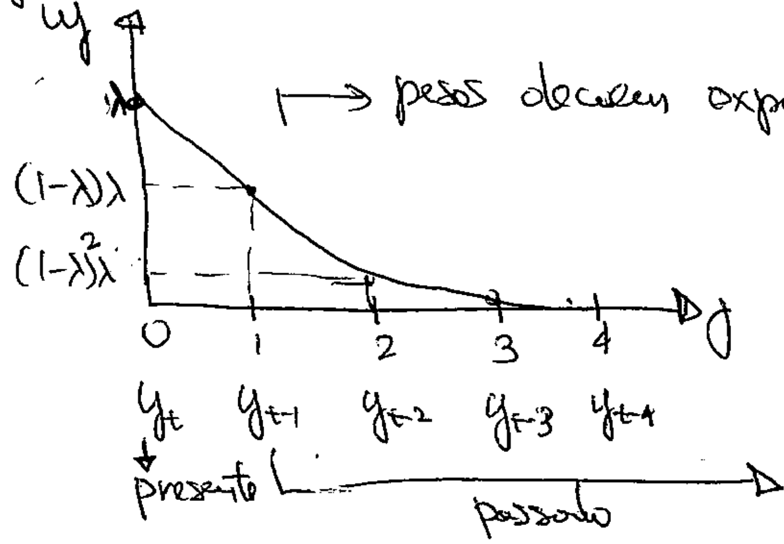
Portanto deve ser utilizado para séries bem comportadas, estacionárias

⇒

III) EWMA

$$\hat{y}_{t+1|t} = \sum_{j=0}^{t-1} \omega_j \, y_{t-j}$$

onde $\omega_j = (1-\lambda)^j \lambda \,, \; 0 < \lambda < 1$ ⟶ cte. de amortecimento



$$\hat{y}_{t+1|t} = \lambda \sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j y_{t-j} = \lambda \, y_t + \underbrace{\sum_{j=1}^{t-1} \lambda (1-\lambda)^j \cdot y_{t-j}}_{A}$$

Mas $\hat{y}_{t|t-1} = \lambda \sum_{j=0}^{t-2} (1-\lambda)^j y_{t-1-j}$ $\quad i = 1+j \begin{cases} \lambda^j \Rightarrow \lambda^{i-1} \\ y_{t-(1+j)} \to y_{t-i} \\ t-2 \to t-1 \end{cases}$

$$\hat{y}_{t|t-1} = \lambda \sum_{i=1}^{t-1} (1-\lambda)^{i-1} y_{t-i} = (1-\lambda)^{-1} \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^{t-1} (1-\lambda)^i y_{t-i}}$$

$$(1-\lambda)\hat{y}_{t|t-1} = \sum_{i=1}^{t-1} \lambda (1-\lambda)^i \cdot y_{t-i} \Rightarrow \text{subs em (A)}$$

$$\hat{y}_{t+1|t} = \lambda \, y_t + (1-\lambda)\hat{y}_{t|t-1} \,, \quad 0 < \lambda < 1 \quad \text{(I)}$$

Para implementar na prática: I) $\hat{y}_{1|0} = \bar{y}$ (usando as primeiras $T/3$ observações)

II) estimar λ minimizando $S(\lambda)$: utilizo a fórmula (I) com $\lambda = 0{,}1, 0.2, 0.3, \ldots 0.9$ e escolho o λ que minimiza $S(\lambda)$.

$$S(\lambda) = \sum_{t=0}^{T-1} \left(y_{t+1} - \hat{y}_{t+1|t}(\lambda) \right)^2$$

ARIMA(0,1,1) e EWMA (II)

$\Rightarrow \Delta y_t = \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad , \ |\theta| < 1, \ \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$

Queremos $\hat{y}_{t+1|t} = E(y_{t+1} | Y_t)$ e mostrar que essa função será EWMA

$$y_t - y_{t-1} = \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$y_t = y_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad (II)$$
$$y_{t+1} = y_t + \theta \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}$$
$$\hat{y}_{t+1|t} = E(y_{t+1} | Y_t) = y_t + \theta \varepsilon_t \quad (III)$$

Mas de (II) segue que $\hat{y}_{t|t-1} = y_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1}$, e que portanto $\varepsilon_t = y_t - [y_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-1}] = y_t - \hat{y}_{t|t-1} \Rightarrow$ subs. em (III)

$$\hat{y}_{t+1|t} = y_t + \theta [y_t - \hat{y}_{t|t-1}]$$
$$\hat{y}_{t+1|t} = (1+\theta) y_t - \theta \hat{y}_{t|t-1}$$

Se definimos $1+\theta = \lambda$; como $\lambda \in (0,1) \Rightarrow \theta \in (-1,0)$

$$\hat{y}_{t+1|t} = \lambda y_t + (1-\lambda) \hat{y}_{t|t-1}, \quad \lambda = 1+\theta, \quad \theta \in (-1,0)$$

Ou seja, a função de previsão 1 passo à frente do ARIMA(0,1,1) é um EWMA, desde que $\theta \in (-1,0)$.

Para o ARIMA(0,1,1), mostra-se facilmente que

$$\hat{y}_{t+k|t} = E(y_{t+k} | Y_t) = \hat{y}_{t+1|t} = \text{EWMA}(\theta, \theta \in (-1,0))$$

e assim o EWMA também será a previsão k-passos à frente, não apenas a 1 passo à frente. $\Longrightarrow$

Obs: Observar que os pesos ω_j em

1) $$\hat{y}_{t+1|t} = \sum_{j=0}^{t-1} \underbrace{(1-\lambda)^j \lambda}_{\omega_j} \, y_{t-j}$$ não somam 1,

pois $$\sum_{j=0}^{t-1} \omega_j = \lambda \underbrace{\sum_{j=0}^{t-1} (1-\lambda)^j}_{\text{PG decrescente}} = \lambda \left[\frac{1-(1-\lambda)^t}{1-(1-\lambda)}\right] = 1-(1-\lambda)^t$$

Definindo $\delta_j^t \hat{=} \dfrac{\omega_j}{1-(1-\lambda)^t} = \dfrac{(1-\lambda)^j \lambda}{1-(1-\lambda)^t}$, então por construção $\sum_{j=0}^{t-1} \delta_j^t = 1$

Pesos que somam 1 facilitam a interpretação da previsão. Assim podemos adotar um EWMA "normalizado"

$$\hat{y}_{t+1|t} = \sum_{j=0}^{t-1} \frac{(1-\lambda)^j \lambda}{[1-(1-\lambda)^t]} \, y_{t-j} = \sum_{j=0}^{t-1} \delta_j^t \, y_{t-j} \quad \text{(IV)}$$

$$\hat{y}_{t+1|t} = \frac{\lambda}{1-(1-\lambda)^t} \, y_t + \sum_{j=1}^{t-1} \frac{\lambda(1-\lambda)^j}{[1-(1-\lambda)^t]} \, y_{t-j}$$

$1+j=i \Rightarrow j=i-1$

$(1+j)=i$

se $j=t-2 \Rightarrow i=t-2+1=t-1$

$j=0 \Rightarrow i=1$

Mas $$\hat{y}_{t|t-1} = \sum_{j=0}^{t-2} \frac{(1-\lambda)^j \lambda}{1-(1-\lambda)^{t-1}} \, y_{t-(1+j)}$$ usando (IV)

$$\hat{y}_{t|t-1} = \sum_{i=1}^{t-1} \frac{\lambda(1-\lambda)^{i-1} \, y_{t-i}}{[1-(1-\lambda)^{t-1}]}$$

$$\hat{y}_{t|t-1} = \frac{1}{(1-\lambda)} \sum_{i=1}^{t-1} \frac{\lambda(1-\lambda)^i \, y_{t-i}}{[1-(1-\lambda)^{t-1}]}$$, donde segue que

$$\sum_{i=1}^{t-1} \lambda(1-\lambda)^i \, y_{t-i} = (1-\lambda)\,[1-(1-\lambda)^{t-1}]\,\hat{y}_{t|t-1} \quad \text{(B)}$$

Como $\hat{y}_{t+1|t} = \frac{\lambda}{1-(1-\lambda)^t} y_t + \left[\frac{\sum_{j=1}^{t-1} \lambda(1-\lambda)^j y_{t-j}}{1-(1-\lambda)^t}\right]$ → Subst. (III) por (B)

$$\hat{y}_{t+1|t} = \frac{\lambda}{1-(1-\lambda)^t} y_t + \frac{(1-\lambda)\left[1-(1-\lambda)^{t-1}\right]}{1-(1-\lambda)^t} \hat{y}_{t|t-1} \quad (\text{V})$$

$$\frac{(1-\lambda)\left[1-(1-\lambda)^{t-1}\right]}{1-(1-\lambda)^t} = \frac{(1-\lambda)-(1-\lambda)^t}{1-(1-\lambda)^t}$$

Definindo $\lambda_t = \frac{\lambda}{1-(1-\lambda)^t}$

$$1-\lambda_t = \frac{1-(1-\lambda)^t - \lambda}{1-(1-\lambda)^t} = \frac{(1-\lambda)-(1-\lambda)^t}{1-(1-\lambda)^t}$$

E assim, podemos re-escrever (V) como

$$\hat{y}_{t+1|t} = \lambda_t y_t + (1-\lambda_t)\hat{y}_{t|t-1}$$

Se t estiver muito distante da origem então $(1-\lambda)^t \to 0$ e assim $\lambda_t = \lambda$.

2) Se a série apresentar tendência crescente e/ou sazonalidade então o EWMA deve ser substituído por métodos de amortecimento mais gerais: Holt e Holt-Winters. Ao se utilizar esses métodos em séries não estacionárias não será necessário transformar a série: aplica direto na série