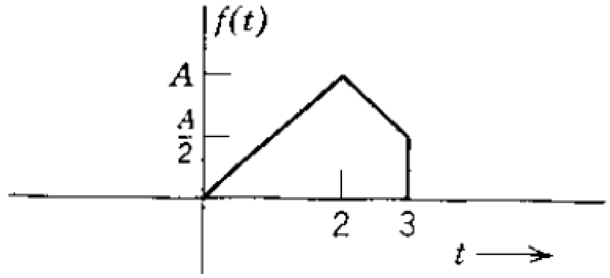
P1. **(3 pts.) Considere la siguiente función f(t) y responda las siguientes preguntas**

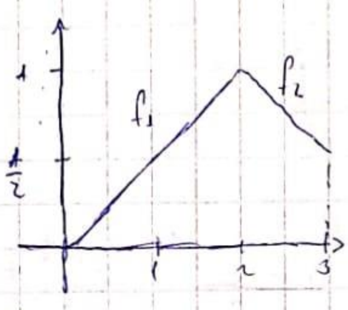


a. (1.5) Obtenga la transformada de Fourier para la señal f(t)
b. (0.5) Defina A como los dos últimos números de su RUT y grafique la Transformada de Fourier obtenida.
c. (1.0) Calcule la energía de la señal en el dominio del tiempo y de la frecuencia. ¿Se cumple el teorema de Parseval (o Plancherel)?

a) R:

Control 2

a)



Al dividir en 2 funciones la señal se obtiene:

$f_1(t) = \frac{A}{2}t \ , \ t \in [0,2]$

$f_2(t) = -\frac{A}{2}t + 2A, \ t \in [2,3]$

Transformada de Fourier

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Se divide en 2 partes.

$$F(\omega) = \int_0^2 \frac{A}{2} t\, e^{-j\omega t} dt + \int_2^3 \left(-\frac{A}{2} t + 2A\right) e^{-j\omega t} dt$$

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{A}{2}\int_0^2 t\, e^{-j\omega t} dt + \int_2^3 -\frac{A}{2} t\, e^{-j\omega t} dt + \int_2^3 2A\, e^{-j\omega t} dt$$

$$\tilde{F}(\omega) = \frac{A}{2}\int_0^2 \underbrace{t\, e^{-j\omega t} dt}_{(1)} - \frac{A}{2}\int_2^3 \underbrace{t\, e^{-j\omega t} dt}_{(1)} + 2A\int_2^3 \underbrace{e^{-j\omega t} dt}_{(2)}.$$

Por ello existen 2 tipos de integrales.

(1) $\int t\, e^{-j\omega t} dt$ / Sust. $u = -j\omega t \Rightarrow t = \frac{u}{-j\omega} \Rightarrow dt = \frac{du}{-j\omega}$.

$$\int \frac{-u}{j\omega} e^{u} \cdot \frac{du}{-j\omega}$$

$$\int \frac{u}{j^2\omega^2} e^{u} \quad / \ j^2 = -1 \quad \Rightarrow -\int \frac{u}{\omega^2} e^{u} du$$

$\Rightarrow \frac{-1}{\omega^2}\int u e^{u} du \Big/ \begin{matrix} u = u & du = du \\ dv = e^{u} du & v' = e^{u} \end{matrix}$ Por Partes.

$$\frac{-1}{\omega^2}\int u e^{u} du = \frac{-1}{\omega^2}\left[u e^{u}_{+c} - \int e^{u} du\right]$$

$$= -\frac{1}{\omega^2}\left[u e^{u} - e^{u} + c\right]$$

$$= \frac{-u e^{u}}{\omega^2} + \frac{e^{u}}{\omega^2} \Rightarrow \overset{u = j\omega t}{\frac{j\omega t e^{-j\omega t}}{\omega^2}} + \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2} + c$$

$$\Rightarrow \frac{j t e^{-j\omega t}}{\omega} + \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2} + c$$

(1)

Por otro lado

(2)

$$\int e^{-j\omega t} dt \Big/ -j\omega t = u \Rightarrow t = \frac{u}{j\omega} \Rightarrow dt = \frac{du}{-j\omega}$$

$$\int \frac{e^{u}}{-j\omega} du = \frac{-1}{j\omega} e^{u} + c \Big/ u = -j\omega t$$

$$= \frac{-1}{j\omega} e^{-j\omega t} + c$$

Al volver a la transformada.

$$F(\omega) = \frac{A}{2}\left[\frac{j t e^{-j\omega t}}{\omega} + \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2}\right]_0^2 - \frac{A}{2}\left[\frac{j t e^{-j\omega t}}{\omega} + \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2}\right]_2^3 + 2A\left[\frac{-e^{-j\omega t}}{j\omega}\right]_2^3$$

$$= \frac{A}{2}\left[\frac{j2e^{-j\omega 2}}{\omega} + \frac{e^{-j\omega 2}}{\omega^2} - 0 - \frac{1}{\omega^2}\right] - \frac{A}{2}\left[\frac{j3e^{-j\omega 3}}{\omega} + \frac{e^{-j\omega 3}}{\omega^2} - \frac{j2e^{-j\omega 2}}{\omega} - \frac{e^{-j\omega 2}}{\omega^2}\right] +$$

$$2A\left[\frac{-e^{-j\omega 3}}{j\omega} + \frac{e^{-j\omega 2}}{j\omega}\right.$$

$$= \frac{Aj e^{-j\omega 2}}{\omega} + \frac{Ae^{-j\omega 2}}{2\omega^2} - \frac{A}{2\omega^2} - \frac{Aj3e^{-j\omega 3}}{2\omega} - \frac{Ae^{-j\omega 3}}{2\omega^2} + \frac{Aje^{-j\omega 2}}{\omega} + \frac{Ae^{-j\omega 2}}{2\omega^2} + \frac{2Ae^{-j\omega 3}}{j\omega} + \frac{2Ae^{-j\omega 2}}{j\omega}$$

Dejar todos los divisores en $\frac{1}{\omega^2 2}$.

$$\overset{\to (1)}{\frac{Aje^{-j\omega 2}\cdot 2\omega}{2\omega^2}} + \overset{\to (2)}{\frac{Ae^{-j\omega 2}}{2\omega^2}} - \frac{A}{2\omega^2} - \overset{\to (3)}{\frac{Aj\omega 3e^{-j\omega 3}}{2\omega^2}} - \frac{Ae^{-j\omega 3}}{2\omega^2} + \underbrace{\frac{2Aje^{-j\omega 2}\cdot\omega}{2\omega^2}}_{(1)} + \underbrace{\frac{Ae^{-j\omega 2}}{2\omega^2}}_{(2)} +$$

$$+ \underbrace{\frac{4Aje^{-j\omega 3}\omega}{2\omega^2}}_{(3)} - \underbrace{\frac{4jAe^{-j\omega 2}\omega}{2\omega^2}}_{(1)}$$

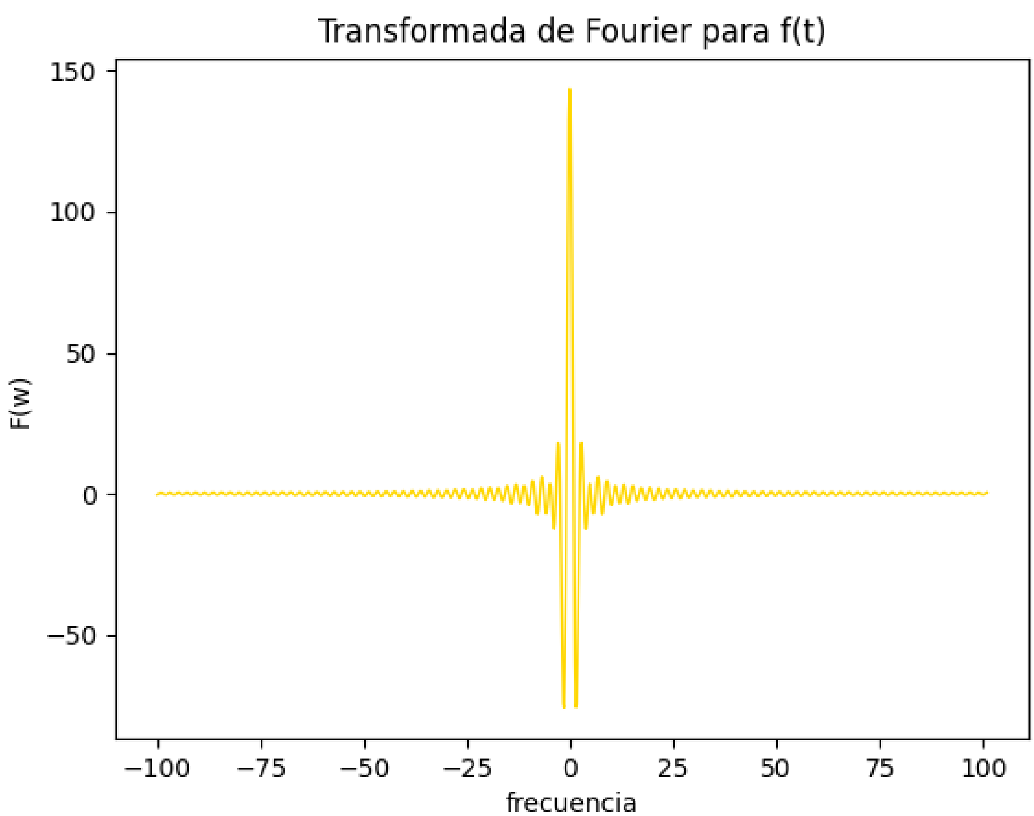
$$F(\omega) = \frac{Ae^{-j\omega 2}}{\omega^2} + \frac{Aje^{-j\omega 3}}{2\omega} - \frac{A}{2\omega^2} - \frac{Ae^{-j\omega 3}}{2\omega^2} \checkmark$$

b)

```
def plotter(figura, titulo, xlab, ylab, x, y, color="gold"):
    #plt.figure(nombre, tamaño, resolución)
    plt.figure(figura)
    plt.title(titulo)
    plt.xlabel(xlab)
    plt.ylabel(ylab)
    plt.plot(x, y, color,linewidth=1)
    plt.show()

A = 82
w = np.linspace(-100,101,1000)
fourier_part1 = (A*(e**(-1j*w*2)))/(w**2)
fourier_part2 = -A/(2*w**2)
fourier_part3 = (A*1j*(e**(-1j*w*3)))/(2*w)
fourier_part4 = -(A*(e**(-1j*w*3)))/(2*w**2)
fourier_total = fourier_part1 + fourier_part2 + fourier_part3 +
fourier_part4

plotter("Transformada de Fourier para f(t)", "Transformada de Fourier para
f(t)", "frecuencia", "F(w)", w, fourier_total.real)
```



c)

```
#Calcular la energía de la señal en el dominio del tiempo y de la frecuencia
#Se debe dividir, asi como en el la parte (a) la función en 2 partes
#f1 = (A/2)*t , t e [0,2]
#f2 = (-A/2)*t + 2*A , t e [2,3]
# luego la energia respecto al tiempo será la integral del valor absoluto de
la función al cuadrado.

arg1 = lambda t: abs((A/2)*t)**2
energia1 = quad(arg1, 0,2)[0]

arg2 = lambda t: abs((-A/2)*t + 2*A)**2
energia2 = quad(arg2,2,3)[0]
# Se saca el primer elemento del retorno de quad, ya que devuelve una array
con primer elemento el resultado.

energia_total = energia1 + energia2
print("La energia total de la señal, respecto al tiempo es: ",
energia_total)

#Por otro lado para la energia respecto a la frecuencia, se trabaja con la
transformada anteriormente desarrollada
fourierw = lambda w: abs((A*(e**(-1j*w*2)))/(w**2) - A/(2*w**2) +
(A*1j*(e**(-1j*w*3)))/(2*w) - (A*(e**(-1j*w*3)))/(2*w**2))**2
energia_freq = quad(fourierw, -1000,1001, limit=1000)[0]

print("El resultado de la Energía respecto a la frecuencia es: ",
energia_freq)

#Para que se cumpla la ley de Parseval se debe dividir la energia por 2*pi
print("La energia finalmente es: ", energia_freq/(2*np.pi))

#No da exacto lo mismo pero se acercan por decimales al mismo numero, las
razones de por que no da exacto puede ser
#por la cantidad de divisiones que el programa tiene que hacer, junto con
las integrales el cual su calculo retorna como
#segundo valor un factor de error tambien.
```

Al ejecutar el programa, La energia total de la señal, respecto al tiempo es: 8405.0

El resultado de la Energía respecto a la frecuencia es: 52806.81221213483

La energia finalmente es: 8404.465192486723, Como se acercan mucho y difiere en posiblemente el valor de Pi o el error en las aproximciones, se puede concluir que son iguales y por ello la ley de Parserval se cumple.

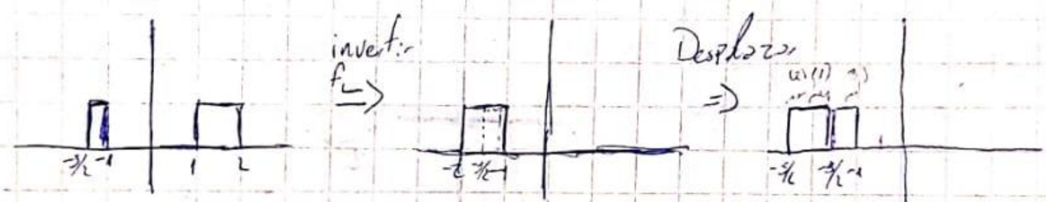
2)a)

Convolución

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau \ , \ \forall t$$

$f_1(t) \begin{cases} A & \text{si } 1 \le t \le 2 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$; $f_2(t) = \begin{cases} A & \text{si } -3/2 \le t \le -1 \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$

$$Conv(t) = \int f_2(\tau) f_1(t-\tau)\, d\tau \ , \ \forall t$$



$t < -3/2 \Rightarrow Conv(t) = 0$

$-3/2 \le t \le -1 \Rightarrow (1)$

$-1 \le t \le -\frac{1}{2} \Rightarrow (2)$

$-\frac{1}{2} \le t \le 0 \Rightarrow (3)$

$t > 0 \Rightarrow Conv(t) = 0$

Para (1) $\int_{-3/2}^{t} A \cdot A \, d\tau = A^2 \tau \Big|_{-3/2}^{t} = A^2 t + \frac{3A^2}{2}$, $-\frac{3}{2} \le t \le -1$

Para (2) $\int_{-3/2}^{-1} A \cdot A \, d\tau = A^2 \tau \Big|_{-3/2}^{-1} = -A^2 + \frac{3}{2} A^2 = \frac{A^2}{2}$ $\quad -1 \le t \le -1/2$

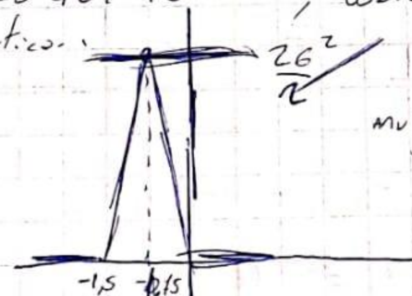
Para (3) $\int_{t}^{0} A \cdot A \, d\tau = A^2 \tau \Big|_{t}^{0} = -A^2 t$ $\quad -1/2 \le t \le 0$ //

luego.

$$\mathrm{Conv}(t) = \begin{cases} A^2 t + \frac{3}{2} A^2, & \frac{-3}{2} < t \le 1 \\ \frac{A^2}{2}, & -1 < t < -\frac{1}{2} \\ -A^2 t, & \frac{-1}{2} < t < 0 \end{cases}$$

Para el paso final del item 2,a), A = 82.000

Como mi rut es 20 427 782-6, usaré 26, ya que es más fácil de graficar.



muy grande 26 :(

el Area se puede obtener

$$\frac{b \cdot h}{2} \qquad b = 1,5 \; ; \; h = \frac{26^2}{2}$$

$b =$