Processamento de Sinais - 1/2022

Lista de Exercício 1
Conceitos básicos e Representações Transformadas
Felipe Costa Gomes - 190012757

Problema 1
A cerca de conceitos básicos de processamento de sinais, responda às perguntas que se seguem.

- *O que é um sinal?*

  O sinal pode ser definido como uma função que contém informação, geralmente sobre o estado ou comportamente de um sistema físico. Sinais são representados matematicamente como uma função de uma ou mais variáveis independentes.

- *O que é um sinal em domínio contínuo e um sinal em domínio discreto?*

  O sinal em domínio contínuo é definido para todo e qualquer valor da variável independente ($x(t)$), esses sinais são conhecidos como sinais analógicos. Já o sinal em domínio discreto é definido apenas para instantes isolados de tempo n ($x[n]$), ou seja, a amplitude do sinal é definida apenas para valores específicos da variável independente, e esses sinais são conhecidos como sinais digitais.

- *Suponha que um sinal em tempo contínuo x_c é amostrado a um intervalo regular. Qual o nome dado a este intervalo e ao inverso dele, no contexto de amostragem de sinais?*

  É dado o nome de intervalo de amostragem e seu inverso é chamado de frequência de amostragem.

- *Com respeito ao item anterior, qual a equação que relaciona o sinal em tempo contínuo x_c com o sinal em tempo discreto x?*

  Eles são relacionados da seguinte forma:

  $$x[n] = x_c(nT_s) \text{ ou } x[n] = x_c(\tfrac{n}{f_s})$$

  Sendo $f_s = \frac{1}{T_s}$ a taxa de amostragem.

- *Com respeito ao item c: há alguns critérios que, quando respeitados, garantem que é possível calcular, teoricamente sem erro, o valor do sinal em tempo contínuo em qualquer instante, a partir das amostras adquiridas a intervalos regulares. Qual desses critérios é o mais usado? Trata-se de um critério necessário, suficiente, ou os dois?*

  O critério mais utilizado é o de Nyquist. Esse critério garante que, se respeitado, é possível calcular o valor do sinal em tempo contínuo em qualquer instante.
  Esse critério define que a frequência de amostragem deve ser maior ou igual ao dobro da frequência original da amostragem.

  $$f_s \geq 2f_m \text{ , } T_s \leq \tfrac{1}{2f_m}$$

Trata-se de um critério suficiente, pois se o critério for utilizado é garatido que é possível calcular teoricamente sem erro, porém, se o critério não for utilizado, poderá funcionar, mas nada garantido.

- *Supondo que o critério do item acima é respeitado, há uma equação em forma fechada para cálculo de um valor do sinal em tempo contínuo, num instante arbitrário t, a partir das amostras? Ou seja, há uma fórmula para calcular $x_c(t)$ a partir dos vários $x[n]$'s? Se há, forneça essa fórmula.*

  A fórmula que calcula $x_c(t)$ a partir dos valores $x[n]$ é a seguinte:

$$x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] sinc\left(\frac{t-nT_s}{T_s}\right)$$

Problema 2

Suponha que um sinal em tempo contínuo x_c foi amostrado a um intervalo constante de 0,5 ms. Suponha ainda que essa condição de amostragem está de acordo com o critério de Nyquist, para o sinal em questão.

O gráfico abaixo mostra o sinal em tempo discreto obtido, que é nulo fora da faixa de valores de tempo mostrada.

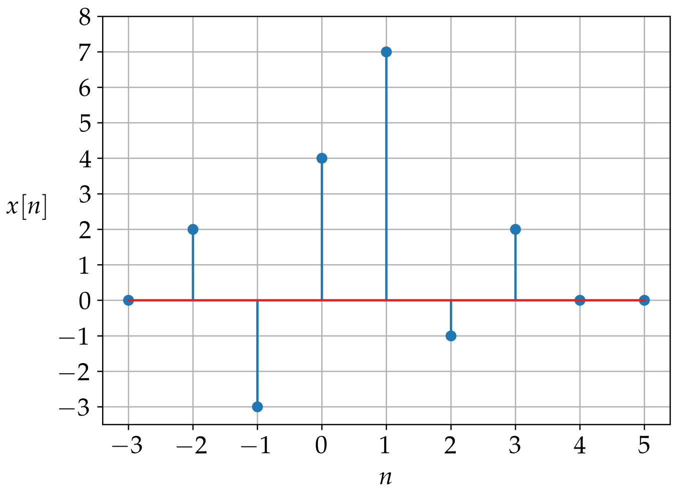

Figura 1: gráfico discreto.

Com base nessas informações:

- *Calcule o valor do sinal em tempo contínuo no instante 0.*

  Observando o gráfico, temos que o valor no instante 0 é de: $x_c(0) = x[0] = 4$.

- *Calcule o valor do sinal em tempo contínuo no instante 0,5ms.*

$$x_c(0.5) = \sum_{n=-3}^{5} x[n] sinc\left(\frac{0.5-n(0.5)}{0.5}\right)$$

$$x_c(0.5) = \sum_{n=-3}^{5} x[n]sinc\,(1-n) = x[1]sinc(1-1)$$

$$x_c(0.5) = 2$$

- *Calcule o valor do sinal em tempo contínuo no instante 0,75ms.*

$$x_c(0.75) = \sum_{n=-3}^{5} x[n]sinc\left(\tfrac{0.75-n(0.5)}{0.5}\right)$$

$$x_c(0.75) =$$
$$x[-3]sinc\left(\tfrac{0.75-(-3)(0.5)}{0.5}\right) + x[-2]sinc\left(\tfrac{0.75-(-2)(0.5)}{0.5}\right) + x[-1]sinc\left(\tfrac{0.75-(-1)(0.5)}{0.5}\right) +$$
$$x[0]sinc\left(\tfrac{0.75-(0)(0.5)}{0.5}\right) + x[1]sinc\left(\tfrac{0.75-(1)(0.5)}{0.5}\right) + x[2]sinc\left(\tfrac{0.75-(2)(0.5)}{0.5}\right) +$$
$$x[3]sinc\left(\tfrac{0.75-(3)(0.5)}{0.5}\right) + x[4]sinc\left(\tfrac{0.75-(4)(0.5)}{0.5}\right) + x[5]sinc\left(\tfrac{0.75-(5)(0.5)}{0.5}\right)$$
$$x_c(0.75) =$$
$$0 + 2\tfrac{sen(3.5\pi)}{3.5\pi} + (-3)\tfrac{sen(2.5\pi)}{2.5\pi} + 4\tfrac{sen(1.5\pi)}{1.5\pi} + 7\tfrac{sen(0.5\pi)}{0.5\pi} + (-1)\tfrac{sen(-0.5\pi)}{-0.5\pi} + 2\tfrac{sen(-1.5\pi)}{-1.5\pi} + 0 + 0$$
$$x_c(0.75) = 1.982$$

- *Calcule o valor do sinal em tempo contínuo no instante 1ms.*

$$x_c(1) = \sum_{n=-3}^{5} x[n]sinc\left(\tfrac{1-n(0.5)}{0.5}\right)$$

$$x_c(1) = \sum_{n=-3}^{5} x[n]sinc\,(2-n) = x[2]sinc\,(2-2)$$

$$x_c(1) = -1$$

- *Calcule o valor do sinal em tempo contínuo no instante 1,25ms.*

$$x_c(1.25) = \sum_{n=-3}^{5} x[n]sinc\left(\tfrac{1.25-n(0.5)}{0.5}\right)$$

$$x_c(1.25) =$$
$$x[-3]sinc\left(\tfrac{1.25-(-3)(0.5)}{0.5}\right) + x[-2]sinc\left(\tfrac{1.25-(-2)(0.5)}{0.5}\right) + x[-1]sinc\left(\tfrac{1.25-(-1)(0.5)}{0.5}\right) +$$
$$x[0]sinc\left(\tfrac{1.25-(0)(0.5)}{0.5}\right) + x[1]sinc\left(\tfrac{1.25-(1)(0.5)}{0.5}\right) + x[2]sinc\left(\tfrac{1.25-(2)(0.5)}{0.5}\right) +$$
$$x[3]sinc\left(\tfrac{1.25-(3)(0.5)}{0.5}\right) + x[4]sinc\left(\tfrac{1.25-(4)(0.5)}{0.5}\right) + x[5]sinc\left(\tfrac{1.25-(5)(0.5)}{0.5}\right)$$
$$x_c(1.25) =$$
$$0 + 2\tfrac{sen(4.5\pi)}{4.5\pi} + (-3)\tfrac{sen(3.5\pi)}{3.5\pi} + 4\tfrac{sen(2.5\pi)}{2.5\pi} + 7\tfrac{sen(1.5\pi)}{1.5\pi} + (-1)\tfrac{sen(0.5\pi)}{0.5\pi} + 2\tfrac{sen(-0.5\pi)}{-0.5\pi} + 0 + 0$$
$$x_c(1.25) = 0.074$$

- *Com o auxílio do Matlab, Python ou outro programa/linguagem, trace um gráfico do sinal em tempo contínuo entre os instantes de -2ms e de 2,5ms.*

Vale ressaltar que o gráfico 2 está deslocado no tempo.

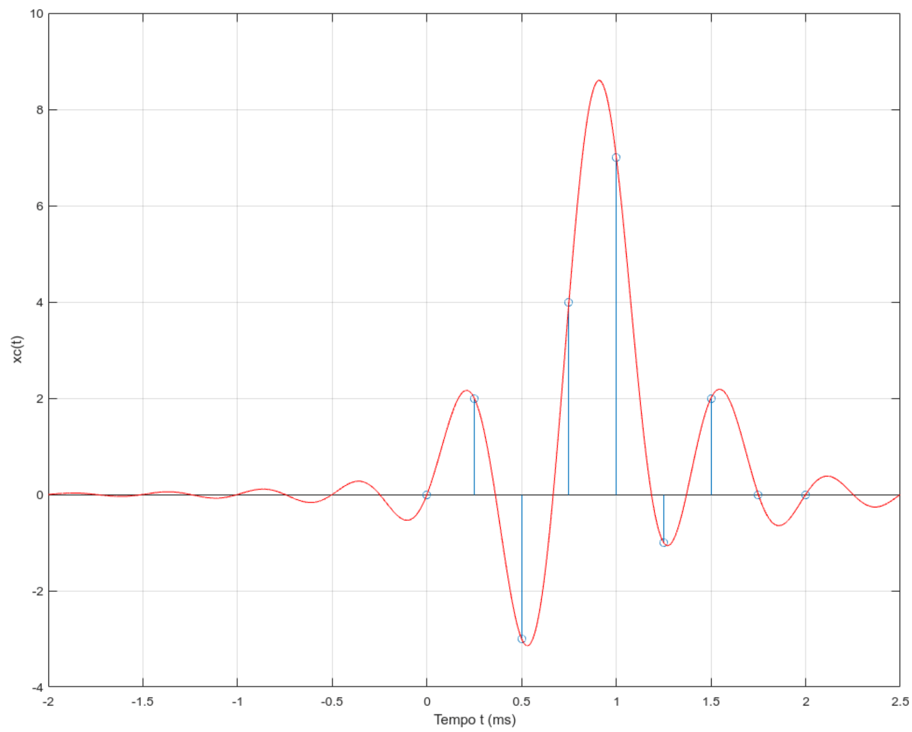

Figura 2: Gráfico referente ao sinal contínuo a partir da amostragem exposta na imagem 1.

Problema 3

O arquivo amostras_exemplo.mat fornece 20 amostras de um sinal amostrado a uma taxa constante de 4 kHz. A respeito desse sinal, responda os seguintes itens.
Com base nessas informações:

- *Determine o intervalo de tempo representado pelas 20 amostras.*

  Como a taxa de amostragem é de 4 kHz, o período de cada amostragem é de $T_s = \frac{1}{4\times 10} = 2.5 \times 10^{-4}$ s. Portanto, como são 20 amostras, o intervalo de tempo representado pelas 20 amostras é de 0.005 segundos ou 5 milissegundos.

- *Supondo que a amostragem atende o critério de Nyquist, trace um gráfico do sinal em tempo contínuo, em uma janela de tempo que inclua as 20 amostras e permita a visualização de todas elas, além do gráfico em tempo contínuo. Utilize o MatLab, Python, ou outro programa/linguagem. No gráfico, apresente as amostras individuais (representadas como stems) sobrepostas ao sinal em tempo contínuo. Note que é necessário calcular os instantes em s ou ms para cada amostra (e não representá-las, nesse caso, em índices inteiros de tempo).*

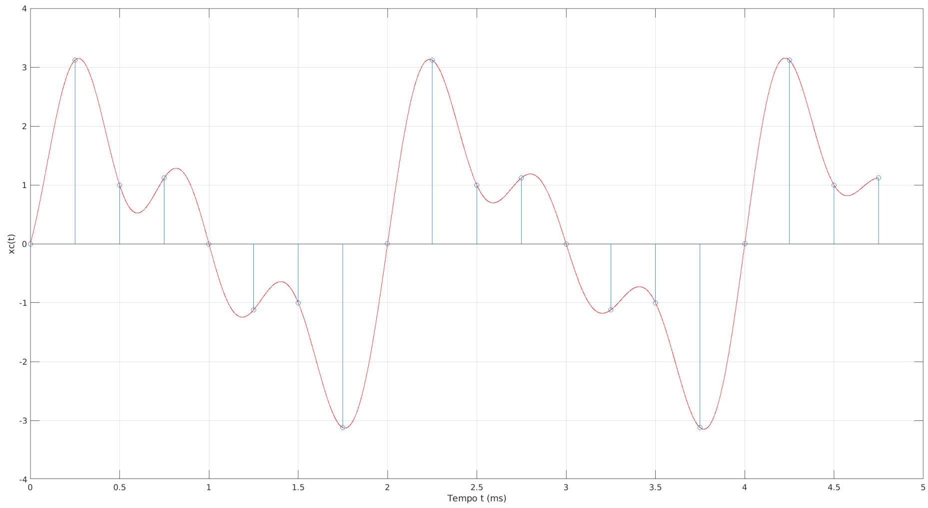

Figura 3: Gráfico do sinal em tempo contínuo.

- *Se interpolarmos o sinal com outra técnica que não a de Shannon (por exemplo, usando interpolação polinomial ou por splines), obteremos um sinal distinto, mas que também interpola as amostras. Em que sentido o sinal obtido pela equação de Shannon traduz mais fielmente o sinal real? Por quê?*

  O sinal obtido pela equação de Shannon traduz mais fielmente o sinal pois considera uma banda finita devidamente amostrado e através dos valores x[n] e da função sinc é calculada o valor ponto a ponto do sinal contínuo, não precisando de uma única equação que reconstrua o sinal por inteiro.

- *Com respeito ao item anterior, que característica matemática diferencia o sinal obtido pela equação de Shannon de qualquer outro sinal que interpole as amostras?*

  A interpolação tem como objetivo encontrar uma função matemática que passe entre os pontos amostrados, porém esse método pode gerar funções de alto grau que tornariam o sinal reconstruído muito complexo, além de que quando esses sinais forem analisados no domínio da frequência, haveria uma sobreposição da imagem com o sinal amostrado, gerando o que conhecemos de *Aliasing*. Já pela equação de Shannon, cada valor de amostra é multiplicado pela função sinc dimensionada, de modo que os cruzamentos de zero da função sinc ocorram nos instantes de amostragem e que o ponto central da função sinc seja deslocado para o tempo daquela amostra, nT. Todas essas funções dimensionadas e deslocadas são então somadas umas com as outras, para se recuperar o sinal original. É isso que diferencia a equação de Shannon da interpolação do sinal.

Problema 4

Quais são as duas etapas no processo de digitalização de um sinal em tempo contínuo? Descreva cada etapa, e diga, em cada caso, se é possível em geral realizá-la sem perda teórica de informação ou introdução de erro.

As duas etapas de digitalização são amostragem (discretização no domínio) e quantização (discretização no contradomínio). A etapa de amostragem é representada pela coleta dos valores do sinal contínuo apenas em instantes discretos de tempo. Essa etapa pode ser feita sem

perda, teoricamente, se respeitada o critério de Nyquist (Explicado na questão 1).
A outra etapa é a de quantização, nessa etapa os sinais obtidos na amostragem mudam de valor apenas em instantes discretos de tempo, mas assumem valores em uma faixa contínua. De modo a poder representá-los em um computador digital, é necessário também discretizar o sinal em amplitude.

Problema 5

Com que objetivos se realiza a digitalização de sinais analógicos? Quais as vantagens e desvantagens de se realizar processamento de sinais analógicos, em comparação ao processamento digital das versões amostradas daqueles sinais?

Todos os sinais naturais são na forma analógica, porém, com a tecnologia atual, é mais usual tratar esses sinais em computadores, microcontroladores e outros, sendo assim, é necessário fazer a digitalização desses sinais para que sejam tratados em ambientes digitais.

Vantagem do processamento analógico:

1. Têm o poder de definir uma quantidade infinita de informação.
2. É mais fácil de processar.
3. A densidade dos sinais analógicos é muito mais elevada, em comparação com os sinais digitais.
4. Tem menos largura de banda.

Desvantagem do processamento analógico em relação ao processamento digital:

1. O sinal analógico tende a possuir um sinal de qualidade inferor ao digital.
2. Podem sofrer alterações na forma de distorções, interferências e ruídos.
3. Garantem uma baixa qualidade no transporte de informação, dado que o enfraquecimento do sinal acentua-se ao longo do espaço percorrido.
4. Os sinais analógicos são menos seguros que os sinais digitais, pois os sinais digitais geralmente são criptografados.

Problema 6

Cite vantagens e desvantagens do processamento digital de sinais em relação ao processamento analógico de sinais.

Vantagens do processamento digital:

1. Equipamentos que usam sinais digitais são mais comuns e baratos.
2. Os sinais são menos propensos a ruídos.
3. Os sinais digitais são mais flexíveis.
4. O processamento digital de sinais é mais seguro porque as informações digitais são frequentemente criptografadas e compactadas com facilidade.

5. Os sinais digitais podem ser transmitidos a longas distâncias.

Desvantagem do processamento digital em relação ao processamento analógico:

1. O processamento analógico geralmente são menos complexos e mais rápidos.
2. O processamento digital pode desenvolver erros de quantização e arredondamento.
3. O processamento digital utiliza uma banda maior para a comunicação se comparado com a transmissão analógica de uma informação equivalente.

Problema 7

O que é uma representação transformada de um sinal? Nesse contexto, o que é, matematicamente, a transformada direta do sinal, e a transformada inversa do sinal?

A transformada permite decompor um sinal em componentes exponenciais (senoidais). A transformada direta diz respeito aos coeficientes que multiplicam as funções de base para, ao somá-las com os pesos, tenhamos o sinal. Já a transformada inversa diz respeito a equação em que cada função de base é multiplicado pelo peso correspondente para, ao somarmos todas as bases ponderadas, termos o sinal.

Problema 8

Com respeito à questão anterior: qual o objetivo geral de processamento de sinais (comum a todas as aplicações), e neste sentido por que a área de processamento de sinais se utiliza tanto de representações transformadas?

O objetivo principal do processamento de sinais consiste em analisar e/ou modificar sinais de forma a extrair informações dos mesmos e/ou torná-los mais apropriados para alguma aplicação específica. Sendo assim, a importância da transformada no processamento de sinais reside no fato de que os sinais periódicos ou não podem ser decompostos em senoides, facilitando o seu manuseio, além de facilitar, também, a análise matemática.