Métodos matemáticos para física

• PUNTO 5 . Sección 2.2.6 Pdf.

Desarrollo:

a) Compruebe si los cuaterniones, $|a\rangle$, forman un espacio vectorial respecto a la operación suma y esa multiplicación por escalares, análoga a la de los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas.

→ PRIMERO: Los cuaterniones $|a\rangle$ cumplen las propiedades de espacio vectorial.

definamos:

$$q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$$
$$q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$$

$\in |a\rangle$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

• Suma:

* $q_1 + q_2 = q_2 + q_1$ → conmutativa!
* $q_1 + (q_2 + q_3) = (q_1 + q_2) + q_3$ → asociativa!
* $q_1 + 0 = 0 + q_1 = q_1$ → Elemento neutro!

• Producto

* $(\alpha + \beta) q_1 = \alpha q_1 + \beta q_2$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
* $\alpha (q_1 + q_2) = \alpha q_1 + \alpha q_2$
* $\alpha (\beta q_1) = (\alpha \beta) q_1$
* $1 q_1 = q_1$

→ cumple con todas las propiedades de espacio vectorial

Según lo anterior los números cuaterniones $|a\rangle$ forman espacio vectorial respecto a la operación suma y multiplicación por escalares, ya que cumple con todas las propiedades particulares de los espacios vectoriales.

Scanned by TapScanner

b) Dados dos cuaterniones cualesquiera $|b\rangle \equiv (b^0, \mathbf{b})$ y $|r\rangle \equiv (r^0, \mathbf{r})$ y su tabla de multiplicación, muestre que el producto entre esos cuaterniones $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ podrá representarse como:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \longleftrightarrow (d^0, \mathbf{d}) = (b^0 r^0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r},\ r^0 \mathbf{b} + b^0 \mathbf{r} + \mathbf{b}\times\mathbf{r})$$

$b = b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k.$

$r = r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k.$

$|b\rangle \odot |r\rangle = (b_0 + b_1 i + b_2 j + b_3 k)(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k).$

$b_0(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k) + b_1 i(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k) + b_2 j(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k) \ldots$

$\ldots + b_3 k(r_0 + r_1 i + r_2 j + r_3 k)$

$b_0 r_0 + b_0 r_1 i + b_0 r_2 j + b_0 r_3 k + b_1 i r_0 - b_1 r_1 + b_1 r_2 k - b_1 r_3 j + b_2 j r_0 - b_2 r_1 k \ldots$

$\ldots - b_2 r_1 k - b_2 r_2 + b_2 r_3 + b_3 k r_0 + b_3 r_1 j + b_3 r_2 i - b_3 r_3$

$(b_0 r_0 + b_1 r_1 - b_2 r_2 - b_3 r_3)$

$b_0 r_0 - (b_1 r_1 + b_2 r_2 + b_3 r_3).$

$\langle b_0 r_0 - \mathbf{b}\cdot\mathbf{r},\ b_0 \mathbf{r} + r_0 \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{r})$.

e) Muestre que los cuaterniones pueden ser representados por matrices complejas 2x2 del tipo

$$|b\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix}$$

donde z, w son numeros complejos.

se toma un cuaternion $q = a + bi + cj + dk$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

→ se representa como el producto interno del vector base $\langle 1, i, j, k\rangle$ y el vector $\langle a, b, c, d\rangle$ y se puede representar con la parte real e imaginaria separados $p = \langle a, q\rangle$, donde se tome la parte real aparte y el producto interno se efectua entre el vector $\langle b, c, d\rangle$ y un vector imaginario q que contiene las unidades imaginarias i, j, k.

→ Entonces definimos $|b\rangle = a + bi + cj + dk$, $z = a + bi$, $w = c + di$ con $|b\rangle$.

Entonces reemplazando.

$$|b\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} (a+bi) & (c+di) \\ -(c-di) & (a-bi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+bi) & (c+di) \\ (-c+di) & (a-bi) \end{bmatrix}$$

hallando el det de la matriz

$$\rightarrow (a+bi)(a-bi) - [(c+di)(-c+di)]$$

$$= a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} - b^2i^2 - [c^2 + \cancel{cdi} - \cancel{cdi} + d^2i^2]$$

$$= a^2 - b^2i^2 - [-c^2 + d^2i^2] \quad ; \quad i^2 = -1.$$

$$\det = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad ; \quad |q|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

$$\det \begin{bmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{bmatrix} = |q|^2 \quad ; \; z, w \text{ son numeros complejos}$$