a)

Para $D=3$ donde $a = a^i w_i$ $(i=1,2,3)$, si proyectamos a sobre los ejes de coordenadas obtenemos a^i, las bases w_i de formas o vectores w^i serán duales así que $w_i \cdot w^j = \delta_i^j$. Cada uno de los vectores base dual es perpendicular a otros vectores de la base dual. w^1 será $\perp$ a w_2, w_3: $w^1 = \alpha(w_2 \times w_3)$, y como $w^1 w_1 = 1$ tenemos que

$$\alpha w_1 (w_2 \times w_3) = 1 \qquad w^1 = \alpha (w_2 \times w_3)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{w_1 (w_2 \times w_3)} \qquad \alpha = \frac{w^1}{(w_2 \times w_3)}$$

$$\frac{w^1}{(w_2 \times w_3)} = \frac{1}{w_1 (w_2 \times w_3)}$$

$$w^1 = \frac{(w_2 \times w_3)}{w_1 (w_2 \times w_3)}$$

De forma general tenemos

$$w^i = \frac{w_j \times w_k}{w_i \cdot (w_j \times w_k)}$$

Donde i, j, k son permutaciones cíclicas

c) $\vec{a} = [a^1 e_1 + a^2 e_2 + a^3 e_3) \cdot e^1 = a^1 e_1 \cdot e^1 + a^2 \cancel{e_2 \cdot e^1} + a^3 \cancel{e_3 \cdot e^1} = a^1 e_1 e^1 = 1$

$\underline{e^1 e_1 = 1}$ por ende e_1 es único, ya que $e^1 e_2$ y $e^1 e_3$ son ortogonales entre sí.

b) $w^i = \dfrac{w_j \times w_k}{w_i \cdot (w_j \times w_k)}$ $\qquad V = w_i \cdot (w_j \times w_k) \rightarrow$ Volumen de los vectores $\{w_i\}$

$\tilde{V} = w^i \cdot (w^j \times w^k) \rightarrow$ Volumen de los vectores $\{w^i\}$

$w_i \cdot w^j = \delta_i^j$ Cada uno de los vectores bases duales es perpendicular a otros de la base dual $w^i \perp w_j, w_k$: $w^i = \alpha (w_j \times w_k)$

$\alpha w_i \cdot (w_j \times w_k) = 1 \qquad \alpha = \dfrac{1}{w_i \cdot (w_j \times w_k)}$ $\qquad$ donde $w^i = \alpha (w_j \times w_k) \Rightarrow \alpha = \dfrac{w^i}{w_j \times w_k}$

tenemos $\dfrac{1}{w_i \cdot (w_j \times w_k)} = \dfrac{w^i}{w_j \times w_k} = \underline{w^i w_i = 1}$ así para $\forall \{w_i\}$ y $\{w^i\}$ de la base dual tenemos que $\underline{V \tilde{V} = 1}$

D) $w_1 = 4i + 2j + k \qquad w_2 = 3i + 3j, \qquad w_3 = 2k.$

$w_1 \cdot w_2 = 12 + 6 + 1 = 19$

$w_1 \cdot w_3 = 8 + 2 + 1 = 11$

$w_2 \cdot w_3 = 6 + 3 = 9$

$$w^i = \frac{w_j \times w_k}{w_i \cdot (w_j \times w_k)}$$

$w_2 \times w_3 = [6i - 6j - 0k]$

$V = w_i \cdot (w_j \times w_k) = 12$

$w_3 \times w_1 = [-4i\ 8j\ 0k]$

$w_1 \times w_2 = [-3i\ 3j\ 6k]$

$$w^1 = \frac{w_2 \times w_3}{V} = \frac{6i - 6j}{12} = \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j$$

$$w^2 = \frac{w_3 \times w_1}{V} = \frac{-4i\ 8j}{12} = -\frac{1}{3}i\ \frac{2}{3}j$$

$$w^3 = \frac{w_1 \times w_2}{V} = \frac{-3i\ 3j\ 6k}{12} = -\frac{1}{4}i\ \frac{1}{4}j\ \frac{1}{2}k.$$

Base recíproca

$$\tilde{V} = w^1 \cdot (w^2 \times w^3) = \left[\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j\right] \cdot \left[\frac{1}{3}i\ \frac{1}{6}j\ \frac{1}{12}k\right] = \frac{1}{12}$$

$a = i + 2j + 3k$