Quiz 15 (Gabarito)
Cálculo Numérico / Análise Numérica

Prof.: Fabrício Murai

Nome:
Nº de matricula:

1. Marque V ou F e justifique:

   ( ) Para garantir a exatidão do cálculo da integral de um polinômio f(x) de grau 8 através da Quadratura de Gauss-Legendre é necessário avaliar a função f(x) em pelo menos 5 pontos.

   ( ) Podemos aplicar uma versão "composta" da Quadratura de Gauss-Legendre a partir do cáculo de um ponto intermediário $t_m = (t_1+t_2)/2$. A integral numérica será dada por $I = f(t_1)+2f(t_m)+f(t_2)$.

   ( ) Na Quadratura de Gauss-Legendre, os valores de A_i em $I = A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2)$ são as raízes do polinômio de Legendre de grau $n = 2$.

2. $$\int_1^5 (e^x + x^{-1})dx$$

   (a) Calcule o valor da integral utilizando a Quadratura de Gauss-Legendre, com n = 2.

$$x_i = \frac{b-a}{2}t_i + \frac{b+a}{2} = \frac{5-1}{2}t_i + \frac{5+1}{2} = 2t_i + 3$$

$$F(t_i) = \frac{b-a}{2}f(x_i) = 2f(t_i+3)$$

$$I_2 = A_1 F(t_1) + A_2 F(t_2)$$

i	t_i	$F(t_i)$	A_i
1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	13,744	1
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	127,947	1

$$I_2 = 1 \times 13,744 + 1 \times 127,947 = 141,691$$

(b) Calcule a cota superior do erro da integral

$$E_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{((2n)!)^3(2n+1)} f^{2n}(\theta), \quad a < \theta < b$$

$$E_2 = \frac{(4)^5(2!)^4}{((4)!)^3(5)} f^4(\theta), \quad a < \theta < b$$

$$E_2 = \frac{1024 \times 16}{13824 \times 5} f^4(\theta), \quad a < \theta < b$$

$$f(x) = e^x + x^{-1}$$
$$f^4(x) = e^x + 24x^{-5}$$

θ é tal que $f^4(\theta)$ apresenta maior valor em módulo no intervalo trabalhado, logo

$$f^4(5) = 148,42$$

$$E_2 = \frac{1024 \times 16}{13824 \times 5} 148,42 = 35,18$$

Gabarito da Questão 1.

(V) Para garantir a exatidão do cálculo da integral de um polinômio f(x) de grau 8 através da Quadratura de Gauss-Legendre é necessário avaliar a função f(x) em pelo menos 5 pontos.

Verdadeiro. Para $n = 4$, só garantiríamos a exatidão até grau $2n - 1 = 7$. Para $n = 5$, garante-se exatidão até $n = 9$.

(F) Podemos aplicar uma versão "composta"da Quadratura de Gauss-Legendre a partir do cáculo de um ponto intermediário $t_m = (t_1 + t_2)/2$. A integral numérica será dada por $I = f(t_1) + 2f(t_m) + f(t_2)$.

Falso. Como as abcissas em que a função é avaliada não são os extremos do intervalo, uma versão composta da Quadratura de Gauss seria baseada em quatro pontos, cada um com peso igual a um.

(F) Na Quadratura de Gauss-Legendre, os valores de A_i em $I = A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2)$ são as raízes do polinômio de Legendre de grau $n = 2$.

Falso. As raízes do polinômio de Legendre de grau $n = 2$ são t_1 e t_2.