

# Algoritmos Numéricos 2<sup>a</sup> edição

## Capítulo 2: Sistemas lineares

## Capítulo 2: Sistemas lineares

2.1 Conceitos fundamentais

2.2 Sistemas triangulares

2.3 Eliminação de Gauss

2.4 Decomposição  $LU$

2.5 Decomposição de Cholesky e  $LDL^T$

2.6 Decomposição espectral

2.7 Uso da decomposição

2.8 Métodos iterativos estacionários

2.9 Análise de erro na solução de sistemas

2.10 Exemplos de aplicação: tensões em circuito elétrico e estequiometria de reação química

2.11 Exercícios

## Conceitos fundamentais

- Matriz é um conjunto de elementos dispostos em forma retangular.
- Tamanho ou dimensão de uma matriz definido pelo número de linhas e colunas.
- Matriz com  $m$  linhas e  $n$  colunas é dita ser  $m \times n$  e se  $m = n$ , então ela é quadrada de ordem  $m$ .
- Elementos da matriz delimitados por colchetes ou parênteses

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

- Elemento referenciado por dois índices:
  - o primeiro indica a linha e o segundo a coluna onde está o elemento.

## Alguns tipos de matrizes

- Coluna: 
$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}.$$

- Linha: 
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix}.$$

- Nula: 
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

## Alguns tipos de matrizes

• Diagonal:

$$\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

• Identidade:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

### Alguns tipos de matrizes

- Triangular inferior:

$$\begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}.$$

- Triangular superior:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1m} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2m} \\ 0 & 0 & c_{33} & \cdots & c_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{mm} \end{bmatrix}.$$

## Alguns tipos de matrizes

- Densa: 
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -9 \\ 5 & 8 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 6 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Esparsa: 
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

- Simétrica:  $m_{ij} = m_{ji}$ ,  $\forall i, j$ , ou seja,  $M = M^T$ .

**Exemplo 1** A matriz simétrica  $M$  e sua transposta  $M^T$

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 9 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 9 & 5 & 2 \\ 0 & 5 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

## Transposição

- Transposta  $A^T$  da matriz  $A$  é obtida trocando-se as linhas pelas colunas.

Exemplo 2 A transposição da matriz  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 6 & 9 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & 8 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}.$$



**Adição e subtração**

- $C = A + B$ , tal que  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ,  $\forall i, j$ .

**Exemplo 3** As operações de adição e subtração das matrizes  $A$  e  $B$

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = A + B = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 1 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \text{ e } D = A - B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

**Multiplicação por escalar**

- $B = kA$ , tal que  $b_{ij} = ka_{ij}$ ,  $\forall i, j$ .

Exemplo 4 O produto de matriz por escalar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}.$$

## Multiplicação Matriz-vetor

- $A$  ( $n \times m$ ) multiplicada por  $v$  ( $m \times 1$ ) =  $x$  ( $n \times 1$ ), de forma que

$$x_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}v_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Exemplo 5 O produto de matriz por vetor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow x = Av = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

**Multiplicação Matriz-Matriz**

- $A$  ( $n \times p$ ) multiplicada por  $B$  ( $p \times m$ )  $= C = AB$  ( $n \times m$ ), tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

**Exemplo 6** O produto de matriz por matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow C = AB = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 41 & 48 \end{bmatrix}.$$

**Multiplicação por matriz diagonal**

- Pré-multiplicação de uma matriz  $A$  por uma matriz diagonal  $D$ :

$$\begin{bmatrix} d_{11} & & \\ & d_{22} & \\ & & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}a_{11} & d_{11}a_{12} & d_{11}a_{13} \\ d_{22}a_{21} & d_{22}a_{22} & d_{22}a_{23} \\ d_{33}a_{31} & d_{33}a_{32} & d_{33}a_{33} \end{bmatrix}.$$

- Pós-multiplicação de uma matriz  $A$  por uma matriz diagonal  $D$ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & & \\ & d_{22} & \\ & & d_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}d_{11} & a_{12}d_{22} & a_{13}d_{33} \\ a_{21}d_{11} & a_{22}d_{22} & a_{23}d_{33} \\ a_{31}d_{11} & a_{32}d_{22} & a_{33}d_{33} \end{bmatrix}.$$

## Produtos vetoriais

- Produto interno:

$$k = x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

- Produto externo:

$$M = xy^T = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_m \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_n y_1 & \cdots & x_n y_m \end{bmatrix}; m_{ij} = x_i y_j, \quad i=1, 2, \dots, n; \quad j=1, 2, \dots, m.$$

**Exemplo 7** O produto interno e externo de dois vetores

$$x = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \longrightarrow k = x^T y = 10 \quad \text{e} \quad M = xy^T = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 20 \\ -1 & -3 & -4 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

**Determinante**

- Valor pode ser obtido pela fórmula de recorrência

$$\det(A) = a_{11} \det(M_{11}) - a_{12} \det(M_{12}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det(M_{1n}).$$

- Particularmente,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = a_{11},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \text{ e}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}). \quad (1)$$

- Matriz  $A$  é singular se  $\det(A) = 0$ .

**Determinante**

**Exemplo 8** O determinante de uma matriz de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \det(A) = 2 \times 5 - 4 \times 1 = 6.$$



**Posto**

- Sequência de vetores  $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  linearmente dependente

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p = 0.$$

- Escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ , não todos nulos.
- Vetores  $v_1, v_2, \dots, v_p$  linearmente independentes se a igualdade acima só se verificar com os  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  iguais a zero.
- Posto da matriz  $A$  ( $m \times n$ ): número máximo de vetores linhas ou de vetores colunas de  $A$  que são linearmente independentes.
- $\text{posto}(A) \leq \min(m, n)$ .

**Posto**

Exemplo 9 Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 & 0 & -2 \\ 7 & -2 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -7 & 8 & 0 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Linhas 2 e 4 são obtidas pela combinação linear das linhas 1 e 3, pois

$$\text{linha } 2 = \text{linha } 1 + \text{linha } 3$$

$$\text{linha } 4 = 2(\text{linha } 1) - \text{linha } 3.$$

Linhas 1, 3 e 5 são linearmente independentes.

$$\text{posto}(A) = 3.$$

## Traço

- Soma dos elementos da diagonal principal

$$\text{traço}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Exemplo 10 A matriz  $M = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

tem  $\text{traço}(M) = 5 + 3 + 9 = 17$ .

**Inversa**

- A inversa da matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  é  $A^{-1}$  tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

- Lei comutativa existe para o produto de uma matriz por sua inversa.

**Exemplo 11** Uma matriz  $A$  e sua inversa  $A^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Operações com transposta e inversa

- $(A^T)^T = A$ .
- $(A^{-1})^{-1} = A$ .
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-T}$ .
- Se  $A = BCD$ , então  $A^T = D^T C^T B^T$  e  $A^{-1} = D^{-1} C^{-1} B^{-1}$ .
- $(A + B)^T = A^T + B^T$ .
- $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$ .

Clicker question: Inversa do produto de duas matrizes

## Noções sobre autovalores e autovetores

- Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$$

- e a igualdade

$$\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- A matriz  $A$  possui um autovalor  $\lambda = 2$  e um correspondente autovetor  $v = [1 \ 2]^T$ .

## Noções sobre autovalores e autovetores

- Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$$

- e a igualdade

$$\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- A matriz  $A$  possui um autovalor  $\lambda = 2$  e um correspondente autovetor  $v = [1 \ 2]^T$ .

- Também é verdade para  $\lambda = 4$  e  $v = [2 \ 3]^T$

$$\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- Relação fundamental de uma matriz  $A$  de ordem  $n$  com seus  $n$  autovalores  $\lambda$  e os correspondentes autovetores  $v$

$$Av = \lambda v. \tag{2}$$

**Problema do autovalor**

- Solução não trivial (ou não nula) do sistema homogêneo

$$(A - \lambda I)v = 0.$$

**Teorema 1** *Se  $M$  for uma matriz de ordem  $n$ , então o sistema homogêneo  $My = 0$  tem solução não trivial se, e somente se,  $M$  for singular.*

- Pelo Teorema 1 e sabendo que uma matriz singular tem determinante nulo, então

$$\det(A - \lambda I) = 0. \tag{3}$$



**Exemplo**

Exemplo 12 Para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \left( \begin{bmatrix} 10 - \lambda & -4 \\ 12 & -4 - \lambda \end{bmatrix} \right) = 0,$$

$$= (10 - \lambda)(-4 - \lambda) - 12(-4) = 0,$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 8,$$

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0.$$

**Autovalores**

- Valores de  $\lambda$  para os quais  $\det(A - \lambda I) = 0$  são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 4$ .
- Para  $\lambda = 2$

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - 2I) = \det \left( \begin{bmatrix} 10 - 2 & -4 \\ 12 & -4 - 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\det(A - 2I) = 8 \times -6 - 12 \times -4 = 0.$$

**Autovalores**

- Valores de  $\lambda$  para os quais  $\det(A - \lambda I) = 0$  são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 4$ .
- Para  $\lambda = 2$

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - 2I) = \det \left( \begin{bmatrix} 10 - 2 & -4 \\ 12 & -4 - 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\det(A - 2I) = 8 \times -6 - 12 \times -4 = 0.$$

- Para  $\lambda = 4$

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - 4I) = \det \left( \begin{bmatrix} 10 - 4 & -4 \\ 12 & -4 - 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$\det(A - 4I) = 6 \times -8 - 12 \times -4 = 0.$$

**Autovalores**

- Valores de  $\lambda$  para os quais  $\det(A - \lambda I) = 0$  são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 4$ .

- Para  $\lambda = 2$

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - 2I) = \det \left( \begin{bmatrix} 10 - 2 & -4 \\ 12 & -4 - 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\det(A - 2I) = 8 \times -6 - 12 \times -4 = 0.$$

- Para  $\lambda = 4$

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - 4I) = \det \left( \begin{bmatrix} 10 - 4 & -4 \\ 12 & -4 - 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$\det(A - 4I) = 6 \times -8 - 12 \times -4 = 0.$$

- Para  $\lambda \neq 2$  ou  $\lambda \neq 4$ , por exemplo,  $\lambda = 1$

$$\det(A - \lambda I) = \det(A - I) = \det \left( \begin{bmatrix} 10 - 1 & -4 \\ 12 & -4 - 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\det(A - I) = 9 \times -5 - 12 \times -4 = 3 \neq 0.$$

**Polinômio característico**

- Determinante (3) é da forma

$$D_n(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$
$$D_n(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

- Polinômio  $D_n(\lambda)$  de grau  $n$  é chamado de polinômio característico de  $A$ .
- Os  $n$  zeros  $\lambda_i$  de  $D_n(\lambda)$  são os autovalores de  $A$ .

## Expansão do polinômio característico

- Expandindo o determinante para  $n = 3$

$$D_3(\lambda) = -\lambda^3 + [a_{11} + a_{22} + a_{33}]\lambda^2 -$$

$$[(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) + (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + (a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13})]\lambda +$$

$$[a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})].$$

- $D_3(\lambda) = d_3\lambda^3 + d_2\lambda^2 + d_1\lambda + d_0.$
- $d_{n-1} = d_2 = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{traço}(A).$
- $d_0 = \det(A),$  conforme (1).

## Relações de Girard

- Relações entre raízes e coeficientes de uma equação algébrica

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i = -\frac{d_{n-1}}{d_n} \text{ e}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i = (-1)^n \frac{d_0}{d_n}.$$

## Relações de Girard

- Relações entre raízes e coeficientes de uma equação algébrica

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i = -\frac{d_{n-1}}{d_n} \text{ e}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i = (-1)^n \frac{d_0}{d_n}.$$

- Soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz (traço) é igual à soma dos seus autovalores

$$\text{traço}(A) = -\frac{d_{n-1}}{d_n} \longrightarrow \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$



## Relações de Girard

- Relações entre raízes e coeficientes de uma equação algébrica

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots + \lambda_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i = -\frac{d_{n-1}}{d_n} \text{ e}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i = (-1)^n \frac{d_0}{d_n}.$$

- Soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz (traço) é igual à soma dos seus autovalores

$$\text{traço}(A) = -\frac{d_{n-1}}{d_n} \longrightarrow \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i,$$

- Determinante de uma matriz é igual ao produto dos seus autovalores

$$\det(A) = (-1)^n \frac{d_0}{d_n} \longrightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

**Exemplo**

**Exemplo 13** Para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$$

tem-se que

$$\text{traço}(A) = 10 + (-4) = 6 = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 + 4 \text{ e}$$

$$\det(A) = 10(-4) - 12(-4) = 8 = \lambda_1 \lambda_2 = 2 \times 4.$$

## Propriedades do polinômio característico

- Uma matriz com elementos reais tem seu polinômio característico com coeficientes reais.
- Se os coeficientes de uma equação algébrica forem reais, então suas raízes complexas serão complexos conjugados em pares.
- Uma matriz com elementos reais tem autovalores reais e/ou complexos conjugados em pares.

**Exemplo**

**Exemplo 14** Calcular os autovalores da matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ .

Clicker question: Soma e produto dos autovalores de A (Exemplo 14)

**Exemplo**

**Exemplo 14** Calcular os autovalores da matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ .

- Por (4), o polinômio característico é

$$D_2(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \left( \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \right) = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 2 \times 2,$$
$$D_2(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

**Exemplo**

**Exemplo 14** Calcular os autovalores da matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ .

- Por (4), o polinômio característico é

$$D_2(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \left( \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \right) = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 2 \times 2,$$
$$D_2(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

- Zeros do polinômio característico  $D_2(\lambda)$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2. \end{cases}$$

**Exemplo**

**Exemplo 14** Calcular os autovalores da matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ .

- Por (4), o polinômio característico é

$$D_2(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \left( \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} \right) = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 2 \times 2,$$
$$D_2(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6.$$

- Zeros do polinômio característico  $D_2(\lambda)$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2. \end{cases}$$

- Verifica-se que

$$\text{traço}(A) = 2 + (-1) = 1 = \sum_{i=1}^2 \lambda_i = 3 + (-2) \quad \text{e}$$

$$\det(A) = 2(-1) - 2 \times 2 = -6 = \prod_{i=1}^2 \lambda_i = 3 \times (-2).$$

## Cálculo de autovalores via polinômios característicos

- Esquematicamente simples.
- Computacionalmente ineficiente.
- Métodos baseados em transformações ortogonais.



**Forma quadrática**

- Seja  $A$  uma matriz simétrica de ordem  $n$  com autovalores  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $v$  um vetor qualquer não nulo de tamanho  $n$ .
- Forma quadrática de  $A$  é o escalar

$$q = v^T A v, \quad \forall v \neq 0.$$

- A matriz pode ter diferentes nomes dependendo do valor da forma quadrática.

## Valores da forma quadrática

Forma quadrática	Nome de $A$	Autovalores de $A$
$v^T A v > 0$	definida positiva	$\lambda_i > 0$
$v^T A v \geq 0$	semidefinida positiva	$\lambda_i \geq 0$
$v^T A v < 0$	definida negativa	$\lambda_i < 0$
$v^T A v \leq 0$	semidefinida negativa	$\lambda_i \leq 0$

- Matriz indefinida: quando não for enquadrada em nenhum dos nomes acima.
- Autovalores, no caso, podem ser negativos, nulos e positivos.

## Propriedades dos autovalores

- Considerando que  $\det(A) = \det(A^T)$ , então os autovalores  $\lambda$  de  $A$ , representados por  $\lambda(A)$ , são iguais a  $\lambda(A^T)$ .

Clicker question: Autovalores de uma matriz triangular

## Propriedades dos autovalores

- Considerando que  $\det(A) = \det(A^T)$ , então os autovalores  $\lambda$  de  $A$ , representados por  $\lambda(A)$ , são iguais a  $\lambda(A^T)$ .
- Se  $A$  for uma matriz triangular de ordem  $n$ , então, por (4)

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) = 0.$$

Os autovalores de uma matriz triangular ou diagonal são iguais aos elementos da diagonal principal.

## Propriedades dos autovalores

- Considerando que  $\det(A) = \det(A^T)$ , então os autovalores  $\lambda$  de  $A$ , representados por  $\lambda(A)$ , são iguais a  $\lambda(A^T)$ .
- Se  $A$  for uma matriz triangular de ordem  $n$ , então, por (4)

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) = 0.$$

Os autovalores de uma matriz triangular ou diagonal são iguais aos elementos da diagonal principal.

- O posto de uma matriz quadrada é igual ao número de autovalores não nulos.

### Propriedades dos autovalores

- Considerando que  $\det(A) = \det(A^T)$ , então os autovalores  $\lambda$  de  $A$ , representados por  $\lambda(A)$ , são iguais a  $\lambda(A^T)$ .
- Se  $A$  for uma matriz triangular de ordem  $n$ , então, por (4)

$$\det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) = 0.$$

Os autovalores de uma matriz triangular ou diagonal são iguais aos elementos da diagonal principal.

- O posto de uma matriz quadrada é igual ao número de autovalores não nulos.
- Se  $\lambda_i$  são os autovalores de  $A$ , então  $\lambda_i^{-1}$  são os autovalores de  $A^{-1}$

$$\begin{aligned} A^{-1}Av &= \lambda A^{-1}v, \\ Iv = \lambda A^{-1}v &\longrightarrow A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v. \end{aligned}$$

**Exemplo**

**Exemplo 15** Seja a matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ .

Então

- Autovalores de  $A$  :  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 5$ .
- Posto de  $A = 3$ .
- Autovalores de  $A^{-1}$  :  $\tau_1 = \lambda_1^{-1} = 0,5$ ;  $\tau_2 = \lambda_2^{-1} = 1$ ;  $\tau_3 = \lambda_3^{-1} = 0,2$ .
- Sendo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,7 \\ 0 & 1 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

## Normas

- Expressar a magnitude de um vetor ou de uma matriz por meio de um escalar.
- Normas vetoriais definidas em termos da norma- $p$

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}.$$



## Normas vetoriais mais comuns

- Norma-1 ou norma de soma de magnitudes

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

## Normas vetoriais mais comuns

- Norma-1 ou norma de soma de magnitudes

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

- Norma-2 ou norma Euclidiana

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

## Normas vetoriais mais comuns

- Norma-1 ou norma de soma de magnitudes

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

- Norma-2 ou norma Euclidiana

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

- Norma- $\infty$  ou norma de máxima magnitude

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Clicker question: Normas vetoriais

### Condições das normas vetoriais

- Norma vetorial é uma função  $\| \cdot \| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa um número real a cada vetor.
- Satisfaz às condições

$$\|x\| \geq 0 \text{ e } \|x\| = 0 \text{ se, e somente se, } x = 0,$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ e}$$

$$\|kx\| = |k|\|x\|,$$

onde  $x, y \in \mathbb{C}^n$  são vetores e  $k \in \mathbb{C}$  é um escalar.

**Exemplo de normas vetoriais**

**Exemplo 16** Calcular as normas 1, 2 e  $\infty$  do vetor  $x = [3 \ -5 \ 1]^T$ .

$$\|x\|_1 = |3| + |-5| + |1| \leadsto \|x\|_1 = 9,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|3|^2 + |-5|^2 + |1|^2} \leadsto \|x\|_2 = \sqrt{35} \approx 5,9161 \text{ e}$$

$$\|x\|_\infty = \max(|3|, |-5|, |1|) \leadsto \|x\|_\infty = 5.$$

**Exemplo de normas vetoriais**

**Exemplo 17** Calcular as normas 1, 2 e  $\infty$  do vetor  $v = [1 \ -3 \ 4+3i \ 4-3i]^T$ .

$$\|v\|_1 = |1| + |-3| + |4+3i| + |4-3i| = 1 + 3 + 5 + 5 \leadsto \|v\|_1 = 14,$$

$$\|v\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |-3|^2 + |4+3i|^2 + |4-3i|^2} \leadsto \|v\|_2 = \sqrt{60} \approx 7,7460 \text{ e}$$

$$\|v\|_\infty = \max(|1|, |-3|, |4+3i|, |4-3i|) \leadsto \|v\|_\infty = 5.$$

### Condições das normas matriciais

- Satisfazem às condições

$$\|A\| \geq 0 \text{ e } \|A\| = 0 \text{ se, e somente se, } A = 0,$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\| \text{ e}$$

$$\|kA\| = |k|\|A\|,$$

onde as matrizes  $A$  e  $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$  e  $k \in \mathbb{C}$  é um escalar.

**Normas matriciais mais comuns de  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$** 

- Norma-1 ou norma de soma máxima de coluna

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|.$$



**Normas matriciais mais comuns de  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$** 

- Norma-1 ou norma de soma máxima de coluna

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|.$$

- Norma- $\infty$  ou norma de soma máxima de linha

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

**Normas matriciais mais comuns de  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$** 

- Norma-1 ou norma de soma máxima de coluna

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|.$$

- Norma- $\infty$  ou norma de soma máxima de linha

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

- Norma de Frobenius

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

**Normas matriciais mais comuns de  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$** 

## • Norma-2 ou norma espectral

$$\|A\|_2 = \begin{cases} \lambda_{\max} & \text{se } A = A^T \\ \sigma_{\max} & \text{se } A \neq A^T \end{cases} \quad (5)$$

onde

- $\lambda_{\max}$  é o maior autovalor de  $A$  em módulo e
- $\sigma_{\max}$  é o maior valor singular de  $A$ , sendo  $\sigma_{\max} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$  (raiz quadrada do maior autovalor em módulo da matriz  $A^T A$ ).

Pergunta: O que há de especial sobre  $t(A)A$ ?  
E se  $A$  não for matrix quadrada?

**Normas consistentes e subordinadas**

- Uma norma matricial  $\|A\|$  é dita consistente com uma norma vetorial  $\|x\|$  se, para qualquer matriz  $A$  ( $m \times n$ ) e vetor  $x$  ( $n \times 1$ )

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|.$$

- Uma norma matricial consistente  $\|A\|$  é dita subordinada a uma norma vetorial  $\|y\|$  se para qualquer matriz  $A$  ( $m \times n$ ) existe um vetor  $y$  ( $n \times 1$ ),  $y \neq 0$ , tal que

$$\|Ay\| = \|A\|\|y\|.$$

- Se a norma for subordinada, então

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

- As normas matriciais 1, 2 e  $\infty$  são consistentes e subordinadas às respectivas normas vetoriais.
- A norma de Frobenius é consistente, mas não subordinada à norma-2 vetorial.

**Exemplo de normas matriciais**

**Exemplo 18** Calcular as normas 1,  $\infty$ , F e 2 da matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ .

$$\|A\|_1 = \max(|2| + |3|, |-1| + |5|) = \max(5, 6) \leadsto \|A\|_1 = 6,$$

$$\|A\|_\infty = \max(|2| + |-1|, |3| + |5|) = \max(3, 8) \leadsto \|A\|_\infty = 8,$$

$$\|A\|_F = \sqrt{|2|^2 + |-1|^2 + |3|^2 + |5|^2} \leadsto \|A\|_F = \sqrt{39} \approx 6,2450 \text{ e}$$

$$\|A\|_2 = \max \left( \sqrt{\lambda(A^T A)} \right) = \max(2,2284; 5,8339) \leadsto \|A\|_2 = 5,8339.$$

**Exemplo de normas matriciais**

**Exemplo 19** Calcular as normas 1,  $\infty$ , F e 2 da matriz  $B = \begin{bmatrix} 3+4i & -2i \\ 3-4i & 9 \end{bmatrix}$ .

$$\|B\|_1 = \max(|3+4i| + |3-4i|, |-2i| + |9|) = \max(10, 11) \leadsto \|B\|_1 = 11,$$

$$\|B\|_\infty = \max(|3+4i| + |-2i|, |3-4i| + |9|) = \max(7, 14) \leadsto \|B\|_\infty = 14,$$

$$\|B\|_F = \sqrt{|3+4i|^2 + |-2i|^2 + |3-4i|^2 + |9|^2} \leadsto \|B\|_F = \sqrt{135} \approx 11,6190 \text{ e}$$

$$\|B\|_2 = \max\left(\sqrt{\lambda(B^T B)}\right) = \max(5,2831; 10,3484) \leadsto \|B\|_2 = 10,3484.$$

## Sistemas de equações lineares

- Conjunto de  $m$  equações polinomiais com  $n$  variáveis  $x_i$  de grau 1

$$\begin{array}{rcl}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m.
 \end{array}$$

- Forma matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \quad (6)$$

## Sistemas de equações lineares

- $Ax = b$ , onde  $A$  é a matriz dos coeficientes,  $x$  é o vetor solução e  $b$  é o vetor dos termos independentes.
- Se  $A$  for uma matriz quadrada  $(n \times n)$  não singular

$$Ax = b \longrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \longrightarrow x = A^{-1}b.$$



## Classificação de sistemas: forma da matriz

- **Sobredeterminado:** têm-se mais equações do que incógnitas

$$A (m \times n), m \geq n \text{ e } \text{posto}(A) = n.$$

- Problema de quadrados mínimos lineares

$$\underset{x}{\text{minimize}} \|b - Ax\|_2$$

possui uma única solução, chamada de solução de quadrados mínimos.

**Classificação de sistemas: forma da matriz cont.**

- **Subdeterminado:** existem mais incógnitas do que equações

$$A (m \times n), m < n \text{ e } \text{posto}(A) = m.$$

- Sistema não tem solução ou existe um número infinito de soluções que satisfazem  $b - Ax = 0$ .
- Encontrar a solução única  $x$  que minimiza  $\|x\|_2$ .
- Determinar a solução de norma mínima do sistema linear (6).
- Resolver um sistema de ordem  $n$ .

## Classificação de sistemas: número de soluções

- Número de soluções depende do valor do determinante da matriz dos coeficientes.
- Há três situações possíveis:
  - única solução,
  - infinitas soluções e
  - sem solução.

**Sistema com única solução**

- Por exemplo,

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{array} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \det(A) \neq 0 \text{ e } x = [1 \ 2]^T.$$

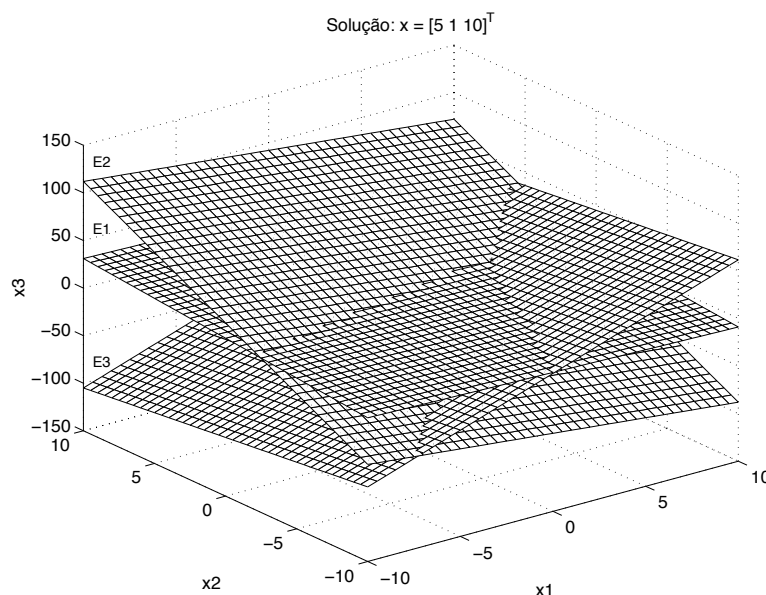
- $\det(A) \neq 0$ : sistema admite uma única solução.

## Geometria de sistema com solução única

- Solução de um sistema linear de ordem  $n$  é um ponto no  $\mathbb{C}^n$  comum aos  $n$  hiperplanos descritos por cada uma das  $n$  equações

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -20 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -12 \\ -65 \end{bmatrix}.$$

- Vetor solução  $x$  é a interseção dos três planos descritos por cada uma das três equações E1, E2 e E3:  $x = [5 \ 1 \ 10]^T$ .



**Sistema com infinitas soluções**

- Por exemplo,

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 2 \\ 2x_1 + 2x_2 & = & 4 \end{array} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \det(A) = 0 \text{ e } x = [\theta \ 2-\theta]^T.$$

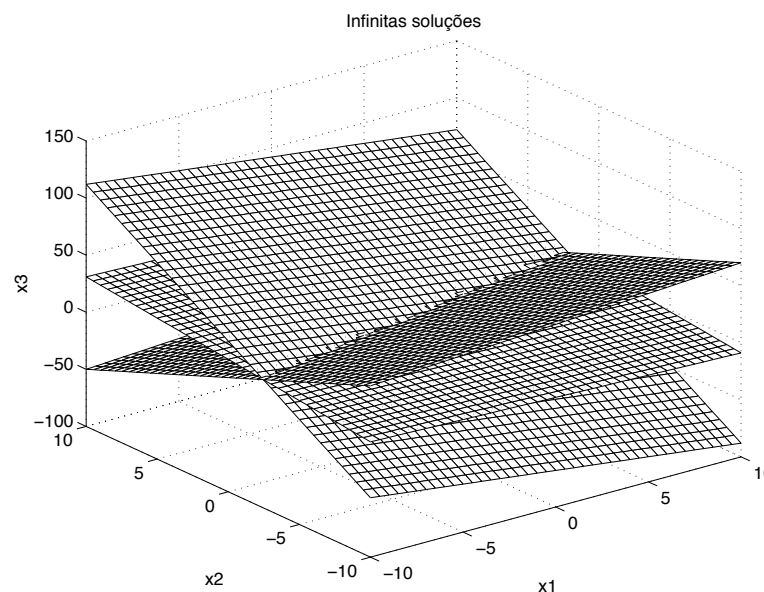
- $\det(A) = 0$ : sistema admite infinitas soluções, uma para cada valor de  $\theta$ .

## Geometria de sistema com infinitas soluções

- Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ -12 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

- Com  $\det(A) = 0$ , os três planos se interceptam em uma linha reta descrita por  $x = [70 - 6,5\theta \quad 16 - 1,5\theta \quad \theta]^T$ .
- Para cada valor de  $\theta$  ter-se-á uma solução do sistema linear.



**Sistema sem solução**

- Por exemplo,

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 1 \\ x_1 + x_2 & = & -1 \end{array} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \det(A) = 0 \text{ e } \nexists x.$$

- $\det(A) = 0$ : sistema não tem solução.

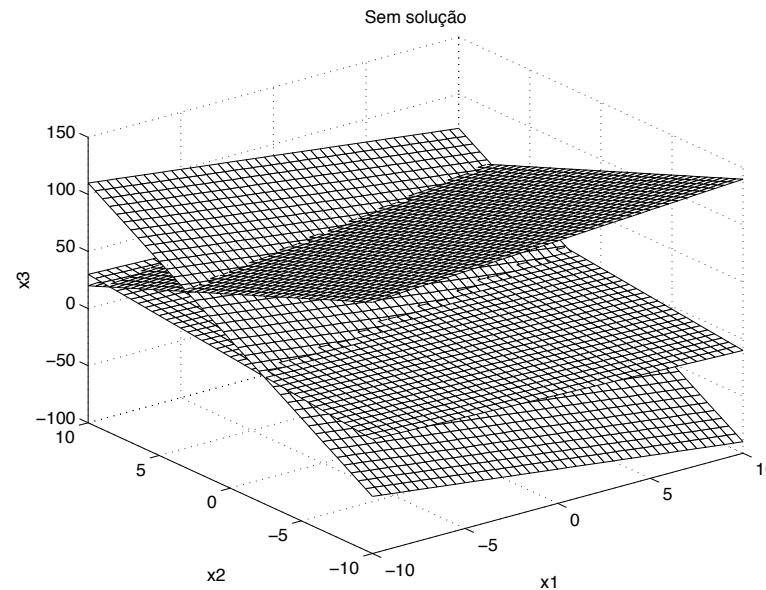


## Geometria de sistema sem solução

- Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 80 \end{bmatrix}$$

- Com  $\det(A) = 0$  os planos não têm nenhum ponto em comum.



## Sistema triangular inferior

- Apresenta a forma

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

- Solução via substituições sucessivas

$$l_{11}x_1 = c_1 \leadsto x_1 = \frac{c_1}{l_{11}},$$

$$l_{21}x_1 + l_{22}x_2 = c_2 \leadsto x_2 = \frac{c_2 - l_{21}x_1}{l_{22}},$$

$$l_{31}x_1 + l_{32}x_2 + l_{33}x_3 = c_3 \leadsto x_3 = \frac{c_3 - l_{31}x_1 - l_{32}x_2}{l_{33}},$$

...

**Sistema triangular inferior cont.**

## • Generalizando

$$l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \cdots + l_{n,n-1}x_{n-1} + l_{nn}x_n = c_n \leadsto$$

$$x_n = \frac{c_n - l_{n1}x_1 - l_{n2}x_2 - \cdots - l_{n,n-1}x_{n-1}}{l_{nn}}.$$

## • Esquemáticamente

$$x_i = \frac{c_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}x_j}{l_{ii}}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

(7)

**Exemplo de substituições sucessivas**

**Exemplo 20** Calcular a solução do sistema triangular inferior

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 48 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Fazer no quadro.

**Exemplo de substituições sucessivas**

**Exemplo 20** Calcular a solução do sistema triangular inferior

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 48 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$2x_1 = 4, \quad x_1 = \frac{4}{2} \leadsto x_1 = 2,$$

**Exemplo de substituições sucessivas**

**Exemplo 20** Calcular a solução do sistema triangular inferior

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 48 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$2x_1 = 4, \quad x_1 = \frac{4}{2} \leadsto x_1 = 2,$$

$$3x_1 + 5x_2 = 1, \quad x_2 = \frac{1 - 3(2)}{5} \leadsto x_2 = -1,$$

**Exemplo de substituições sucessivas**

**Exemplo 20** Calcular a solução do sistema triangular inferior

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 48 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$2x_1 = 4, \quad x_1 = \frac{4}{2} \leadsto x_1 = 2,$$

$$3x_1 + 5x_2 = 1, \quad x_2 = \frac{1 - 3(2)}{5} \leadsto x_2 = -1,$$

$$x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 48, \quad x_3 = \frac{48 - (2) + 6(-1)}{8} \leadsto x_3 = 5$$

**Exemplo de substituições sucessivas**

**Exemplo 20** Calcular a solução do sistema triangular inferior

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 48 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$2x_1 = 4, \quad x_1 = \frac{4}{2} \leadsto x_1 = 2,$$

$$3x_1 + 5x_2 = 1, \quad x_2 = \frac{1 - 3(2)}{5} \leadsto x_2 = -1,$$

$$x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 48, \quad x_3 = \frac{48 - (2) + 6(-1)}{8} \leadsto x_3 = 5 \text{ e}$$

$$-x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 9x_4 = 6, \quad x_4 = \frac{6 + (2) - 4(-1) + 3(5)}{9} \leadsto x_4 = 3.$$

- Solução do sistema triangular inferior:  $x = [2 \ -1 \ 5 \ 3]^T$ .



**Algoritmo: substituições sucessivas****Algoritmo Substituições Sucessivas**

{ **Objetivo:** Resolver o sistema triangular inferior  $Lx = c$  }

{ pelas substituições sucessivas }

**parâmetros de entrada**  $n, L, c$

{ ordem, matriz triangular inferior e vetor independente }

**parâmetros de saída**  $x$  { solução do sistema triangular inferior }

$x(1) \leftarrow c(1)/L(1, 1)$

**para**  $i \leftarrow 2$  **até**  $n$  **faça**

$Soma \leftarrow 0$

**para**  $j \leftarrow 1$  **até**  $i - 1$  **faça**

$Soma \leftarrow Soma + L(i, j) * x(j)$

**fimpara**

$x(i) \leftarrow (c(i) - Soma)/L(i, i)$

**fimpara**

**fimalgoritmo**

||←

**CQ:** qual o número de adições, multiplicações e divisões?

## Exemplo de uso do algoritmo

**Exemplo 21** Resolver o sistema triangular inferior do Exemplo 20 usando o algoritmo.

```
% Os valores de entrada
```

```
n = 4
```

```
L =
```

```
    2    0    0    0
    3    5    0    0
    1   -6    8    0
   -1    4   -3    9
```

```
c =
```

```
    4
    1
   48
    6
```

```
% produzem o resultado
```

```
x =
```

```
    2
   -1
    5
    3
```

## Sistema triangular superior

- Apresenta a forma

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & u_{33} & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \cdots & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}.$$

- Solução via substituições retroativas

$$u_{nn}x_n = d_n \leadsto x_n = \frac{d_n}{u_{nn}},$$

$$u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = d_{n-1} \leadsto x_{n-1} = \frac{d_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}},$$

$$\dots$$

## Sistema triangular superior

- Continuando

$$u_{22}x_2 + u_{23}x_3 + \cdots + u_{2n}x_n = d_2 \leadsto x_2 = \frac{d_2 - u_{23}x_3 - \cdots - u_{2n}x_n}{u_{22}} \text{ e}$$

$$\begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 + \cdots + u_{1n}x_n &= d_1 \\ \leadsto x_1 &= \frac{d_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3 - \cdots - u_{1n}x_n}{u_{11}}. \end{aligned}$$

- Esquematicamente

$$x_i = \frac{d_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j}{u_{ii}}, \quad i = n, n-1, \dots, 1.$$

(8)

**Exemplo de substituições retroativas**

**Exemplo 22** Determinar a solução do sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 28 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo de substituições retroativas**

**Exemplo 22** Determinar a solução do sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 28 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

$$2x_4 = 8, \quad x_4 = \frac{8}{2} \leadsto x_4 = 4,$$

**Exemplo de substituições retroativas**

**Exemplo 22** Determinar a solução do sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 28 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

$$2x_4 = 8, \quad x_4 = \frac{8}{2} \leadsto x_4 = 4,$$

$$4x_3 + 5x_4 = 28, \quad x_3 = \frac{28 - 5(4)}{4} \leadsto x_3 = 2,$$

**Exemplo de substituições retroativas**

**Exemplo 22** Determinar a solução do sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 28 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

$$2x_4 = 8, \quad x_4 = \frac{8}{2} \leadsto x_4 = 4,$$

$$4x_3 + 5x_4 = 28, \quad x_3 = \frac{28 - 5(4)}{4} \leadsto x_3 = 2,$$

$$3x_2 + 7x_3 - 4x_4 = -2, \quad x_2 = \frac{-2 - 7(2) + 4(4)}{3} \leadsto x_2 = 0$$



**Exemplo de substituições retroativas**

**Exemplo 22** Determinar a solução do sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 28 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

$$2x_4 = 8, \quad x_4 = \frac{8}{2} \leadsto x_4 = 4,$$

$$4x_3 + 5x_4 = 28, \quad x_3 = \frac{28 - 5(4)}{4} \leadsto x_3 = 2,$$

$$3x_2 + 7x_3 - 4x_4 = -2, \quad x_2 = \frac{-2 - 7(2) + 4(4)}{3} \leadsto x_2 = 0 \text{ e}$$

$$5x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 1, \quad x_1 = \frac{1 + 2(0) - 6(2) - (4)}{5} \leadsto x_1 = -3.$$

- Solução do sistema triangular superior:  $x = [-3 \ 0 \ 2 \ 4]^T$ .

**Algoritmo: substituições retroativas****Algoritmo Substituições Retroativas**

**{ Objetivo:** Resolver o sistema triangular superior  $Ux = d$  }

**{** pelas substituições retroativas **}**

**parâmetros de entrada**  $n, U, d$

**{** ordem, matriz triangular superior e vetor independente **}**

**parâmetros de saída**  $x$  **{** solução do sistema triangular superior **}**

$x(n) \leftarrow d(n)/U(n, n)$

**para**  $i \leftarrow n - 1$  **até**  $1$  **passo**  $-1$  **faça**

$Soma \leftarrow 0$

**para**  $j \leftarrow i + 1$  **até**  $n$  **faça**

$Soma \leftarrow Soma + U(i, j) * x(j)$

**fimpara**

$x(i) \leftarrow (d(i) - Soma)/U(i, i)$

**fimpara**

**fimalgoritmo**

||←

## Exemplo de uso do algoritmo

**Exemplo 23** Resolver o sistema triangular superior do Exemplo 22 usando o algoritmo.

```
% Os valores de entrada
```

```
n = 4
```

```
U =
```

```
    5    -2     6     1
    0     3     7    -4
    0     0     4     5
    0     0     0     2
```

```
d =
```

```
    1
   -2
   28
    8
```

```
% produzem o resultado
```

```
x =
```

```
   -3
    0
    2
    4
```

**Complexidade computacional: substituições sucessivas**

- Considerando

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

a complexidade computacional do algoritmo de substituições sucessivas é

- Adições:  $\sum_{i=2}^n [(i-1) + 1] = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1;$

**Complexidade computacional: substituições sucessivas**

- Considerando

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

a complexidade computacional do algoritmo de substituições sucessivas é

- Adições:  $\sum_{i=2}^n [(i-1) + 1] = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1;$
- Multiplicações:  $\sum_{i=2}^n (i-1) = \frac{n(n+1)}{2} - 1 - (n-1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2};$

**Complexidade computacional: substituições sucessivas**

- Considerando

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

a complexidade computacional do algoritmo de substituições sucessivas é

- Adições:  $\sum_{i=2}^n [(i-1) + 1] = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1;$
- Multiplicações:  $\sum_{i=2}^n (i-1) = \frac{n(n+1)}{2} - 1 - (n-1) = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2};$
- Divisões:  $1 + \sum_{i=2}^n 1 = 1 + n - 1 = n.$

**Complexidade computacional: substituições retroativas**

- A complexidade computacional do algoritmo de substituições retroativas é

- Adições: 
$$\sum_{i=1}^{n-1} [(n-i) + 1] = (n-1)n - \frac{(n-1)n}{2} + n - 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1;$$

**Complexidade computacional: substituições retroativas**

- A complexidade computacional do algoritmo de substituições retroativas é

- Adições: 
$$\sum_{i=1}^{n-1} [(n-i) + 1] = (n-1)n - \frac{(n-1)n}{2} + n - 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1;$$

- Multiplicações: 
$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = (n-1)n - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2};$$



**Complexidade computacional: substituições retroativas**

- A complexidade computacional do algoritmo de substituições retroativas é

- Adições: 
$$\sum_{i=1}^{n-1} [(n-i) + 1] = (n-1)n - \frac{(n-1)n}{2} + n - 1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} - 1;$$

- Multiplicações: 
$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = (n-1)n - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2};$$

- Divisões: 
$$1 + \sum_{i=1}^{n-1} 1 = 1 + n - 1 = n.$$

**Complexidades dos algoritmos de substituições para sistemas de ordem  $n$** 

Substituições sucessivas	
Operações	Complexidade
adições	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1$
multiplicações	$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
divisões	$n$

Substituições retroativas	
Operações	Complexidade
adições	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1$
multiplicações	$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$
divisões	$n$

- Número de operações aritméticas das substituições sucessivas e retroativas é descrito por polinômios.
- Consequentemente, estes algoritmos são polinomiais.

## Eliminação de Gauss

- O nome do método foi uma homenagem a Gauss.
- O processo aparece no livro chinês *Nove capítulos sobre a arte matemática*, escrito por volta de 250 a.C.
- Classes de métodos para resolução de sistemas de equações lineares: métodos diretos e iterativos.

## Eliminação de Gauss

- Classes de métodos para resolução de sistemas de equações lineares: métodos diretos e iterativos.
- Métodos diretos: a solução exata do sistema é obtida, teoricamente, com um número finito de operações aritméticas.
  - Na prática, os erros de arredondamento devidos à aritmética de ponto flutuante interferem no resultado verdadeiro.

## Eliminação de Gauss

- Classes de métodos para resolução de sistemas de equações lineares: métodos diretos e iterativos.
- Métodos diretos: a solução exata do sistema é obtida, teoricamente, com um número finito de operações aritméticas.
  - Na prática, os erros de arredondamento devidos à aritmética de ponto flutuante interferem no resultado verdadeiro.
- Métodos iterativos: solução exata somente com um número infinito de operações.
  - Em cada passo dos métodos iterativos a solução é calculada com um nível de exatidão crescente.
  - Esse nível é limitado pelo número finito de *bytes* utilizados para armazenar as variáveis do programa que implementa o método iterativo.

## Sistemas equivalentes

Dois sistemas de equações lineares são ditos equivalentes quando possuem o mesmo vetor solução.

$$A \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

e

$$B \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = -2 \\ x_1 + 4x_2 = 9 \end{cases} \implies$$

$$x^A = x^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \implies A \sim B.$$

## Operações l-elementares

Um sistema de equações lineares pode ser transformado em um outro sistema equivalente utilizando as três operações l-elementares (operações de linha)

- Trocar a ordem de duas equações.
- Multiplicar uma equação por uma constante não nula.
- Somar uma equação à outra.

### Trocar a ordem de duas equações

$$B \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = -2 \\ x_1 + 4x_2 = 9 \end{cases}$$

e

$$C \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 9 \\ 2x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^B = x^C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B \sim C.$$



**Multiplicar uma equação por uma constante não nula**

$$C \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 9 \\ 2x_1 - 2x_2 = -2 \end{cases}$$

e

$$D \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 9 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^C = x^D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow C \sim D.$$

**Somar uma equação à outra**

$$D \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 9 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$$

e

$$E \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \implies$$

$$x^D = x^E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \implies D \sim E = A.$$

## Sistema triangular equivalente

- Método de eliminação de Gauss

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

- Transformação  $Ax = b \sim Ux = d$ .
- Solução do sistema triangular superior  $Ux = d$  obtida pelas substituições retroativas.
- Vetor resíduo  $r = b - Ax$ .

**Exemplo de eliminação de Gauss**

**Exemplo 24** Resolver o sistema abaixo pelo método de eliminação de Gauss e verificar a exatidão da solução

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Eliminar os elementos da primeira coluna

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -15 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo de eliminação de Gauss**

**Exemplo 24** Resolver o sistema abaixo pelo método de eliminação de Gauss e verificar a exatidão da solução

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Eliminar os elementos da primeira coluna

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -15 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

- Eliminar o elemento da segunda coluna

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

## Dispositivo prático

$L$	Multiplicador	$A$	$b$	Operações
1		$\underline{1} \quad -3 \quad 2$	11	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	$-2 \quad 8 \quad -1$	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	$4 \quad -6 \quad 5$	29	

## Dispositivo prático

$L$	Multiplicador	$A$	$b$	Operações
1		<u>1</u> -3 2	11	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	-2 8 -1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	29	
4		0 <u>2</u> 3	7	$2L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0 6 -3	-15	$-4L_1 + L_3$

## Dispositivo prático

$L$	Multiplicador	$A$	$b$	Operações
1		<u>1</u> -3 2	11	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	-2 8 -1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	29	
4		0 <u>2</u> 3	7	$2L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0 6 -3	-15	$-4L_1 + L_3$
6		0 0 <u>-12</u>	-36	$-3L_4 + L_5$



## Dispositivo prático

$L$	Multiplicador	$A$	$b$	Operações
1		<u>1</u> -3 2	11	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	-2 8 -1	-15	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	29	
4		0 <u>2</u> 3	7	$2L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0 6 -3	-15	$-4L_1 + L_3$
6		0 0 <u>-12</u>	-36	$-3L_4 + L_5$

- Sistema triangular superior equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}.$$

**Vetor solução**

- Sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}.$$

**Vetor solução**

- Sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}.$$

- Substituições retroativas

$$-12x_3 = -36, \quad x_3 = \frac{-36}{-12} \leadsto x_3 = 3,$$

$$2x_2 + 3x_3 = 7, \quad x_2 = \frac{7 - 3(3)}{2} \leadsto x_2 = -1 \text{ e}$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11, \quad x_1 = \frac{11 + 3(-1) - 2(3)}{1} \leadsto x_1 = 2.$$

**Vetor solução**

- Sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix}.$$

- Substituições retroativas

$$-12x_3 = -36, \quad x_3 = \frac{-36}{-12} \leadsto x_3 = 3,$$

$$2x_2 + 3x_3 = 7, \quad x_2 = \frac{7 - 3(3)}{2} \leadsto x_2 = -1 \text{ e}$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11, \quad x_1 = \frac{11 + 3(-1) - 2(3)}{1} \leadsto x_1 = 2.$$

- Vetor solução do sistema:  $x = [2 \ -1 \ 3]^T$ .

**Vetor resíduo**

- Vetor resíduo:  $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Solução exata.

**Exemplo de eliminação de Gauss**

**Exemplo 25** Resolver o sistema abaixo pelo método de eliminação de Gauss e verificar a exatidão da solução

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 19 & 4 & 15 \\ 1 & 4 & 8 & -12 \\ 5 & 33 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 25 \\ 18 \\ 72 \end{bmatrix}.$$

## Dispositivo prático

$L$	Multiplicador	$A$	$b$	Operações
1		<u>1</u> 6 2 4	8	
2	$m_{21} = 3/1 = 3$	3 19 4 15	25	
3	$m_{31} = 1/1 = 1$	1 4 8 -12	18	
4	$m_{41} = 5/1 = 5$	5 33 9 3	72	

## Dispositivo prático

$L$	Multiplicador	$A$				$b$	Operações
1		<u>1</u>	6	2	4	8	
2	$m_{21} = 3/1 = 3$	3	19	4	15	25	
3	$m_{31} = 1/1 = 1$	1	4	8	-12	18	
4	$m_{41} = 5/1 = 5$	5	33	9	3	72	
5		0	<u>1</u>	-2	3	1	$-3L_1 + L_2$
6	$m_{32} = (-2)/1 = -2$	0	-2	6	-16	10	$-L_1 + L_3$
7	$m_{42} = 3/1 = 3$	0	3	-1	-17	32	$-5L_1 + L_4$



## Dispositivo prático

$L$	Multiplicador	$A$				$b$	Operações
1		<u>1</u>	6	2	4	8	
2	$m_{21} = 3/1 = 3$	3	19	4	15	25	
3	$m_{31} = 1/1 = 1$	1	4	8	-12	18	
4	$m_{41} = 5/1 = 5$	5	33	9	3	72	
5		0	<u>1</u>	-2	3	1	$-3L_1 + L_2$
6	$m_{32} = (-2)/1 = -2$	0	-2	6	-16	10	$-L_1 + L_3$
7	$m_{42} = 3/1 = 3$	0	3	-1	-17	32	$-5L_1 + L_4$
8		0	0	<u>2</u>	-10	12	$2L_5 + L_6$
9	$m_{43} = 5/2 = 2,5$	0	0	5	-26	29	$-3L_5 + L_7$

## Dispositivo prático

$L$	Multiplicador	$A$				$b$	Operações
1		<u>1</u>	6	2	4	8	
2	$m_{21} = 3/1 = 3$	3	19	4	15	25	
3	$m_{31} = 1/1 = 1$	1	4	8	-12	18	
4	$m_{41} = 5/1 = 5$	5	33	9	3	72	
5		0	<u>1</u>	-2	3	1	$-3L_1 + L_2$
6	$m_{32} = (-2)/1 = -2$	0	-2	6	-16	10	$-L_1 + L_3$
7	$m_{42} = 3/1 = 3$	0	3	-1	-17	32	$-5L_1 + L_4$
8		0	0	<u>2</u>	-10	12	$2L_5 + L_6$
9	$m_{43} = 5/2 = 2,5$	0	0	5	-26	29	$-3L_5 + L_7$
10		0	0	0	<u>-1</u>	-1	$-2,5L_8 + L_9$

- Sistema triangular superior equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**Vetor solução**

- Sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix},$$

**Vetor solução**

- Sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix},$$

- Substituições retroativas

$$-1x_4 = -1, \quad x_4 = \frac{-1}{-1} \rightsquigarrow x_4 = 1,$$

$$2x_3 - 10x_4 = 12, \quad x_3 = \frac{12 + 10(1)}{2} \rightsquigarrow x_3 = 11,$$

$$x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \quad x_2 = \frac{1 + 2(11) - 3(1)}{1} \rightsquigarrow x_2 = 20 \text{ e}$$

$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \quad x_1 = \frac{8 - 6(20) - 2(11) - 4(1)}{1} \rightsquigarrow x_1 = -138.$$

**Vetor solução**

- Sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 12 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow x = \begin{bmatrix} -138 \\ 20 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Substituições retroativas

$$-1x_4 = -1, \quad x_4 = \frac{-1}{-1} \rightsquigarrow x_4 = 1,$$

$$2x_3 - 10x_4 = 12, \quad x_3 = \frac{12 + 10(1)}{2} \rightsquigarrow x_3 = 11,$$

$$x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1, \quad x_2 = \frac{1 + 2(11) - 3(1)}{1} \rightsquigarrow x_2 = 20 \text{ e}$$

$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 8, \quad x_1 = \frac{8 - 6(20) - 2(11) - 4(1)}{1} \rightsquigarrow x_1 = -138.$$

**Vetor resíduo**

$$r = b - Ax,$$

$$r = \begin{bmatrix} 8 \\ 25 \\ 18 \\ 72 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 19 & 4 & 15 \\ 1 & 4 & 8 & -12 \\ 5 & 33 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -138 \\ 20 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Solução exata.

## Cálculo do determinante

- Determinante da matriz dos coeficientes pode ser obtido como um subproduto do método de eliminação de Gauss.
- Relações entre os determinantes das matrizes dos sistemas equivalentes intermediários obtidos pelas operações l-elementares.

**Operação I-elementar: trocar a ordem de duas equações**

**a)** Se duas linhas quaisquer de uma matriz  $A$  forem trocadas, então o determinante da nova matriz  $B$  será

$$\det(B) = -\det(A).$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 10 \text{ e}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = -10.$$



**Operação I-elementar: multiplicar uma equação por uma constante não nula**

**b)** Se todos os elementos de uma linha de  $A$  forem multiplicados por uma constante  $k$ , então o determinante da matriz resultante  $B$  será

$$\det(B) = k \det(A).$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = -10 \text{ e}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = -5.$$

**Operação I-elementar: somar uma equação à outra**

**c)** Se um múltiplo escalar de uma linha de  $A$  for somado a outra linha, então o determinante da nova matriz  $B$  será

$$\det(B) = \det(A).$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = -5 \text{ e}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = -5.$$

**Determinante de matriz triangular ou diagonal**

**d)** Se  $A$  for uma matriz triangular ou diagonal de ordem  $n$ , então o seu determinante será igual ao produto dos elementos da diagonal principal,

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} \dots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = -2 \text{ e}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = 15.$$

**Determinante do produto de matrizes**

e) Se uma matriz  $A$  for multiplicada por uma matriz  $B$ , o determinante da matriz resultante  $C$  será

$$\det(C) = \det(A) \det(B).$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 10,$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = 3 \text{ e}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 13 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(C) = 30.$$

**Exemplo de cálculo do determinante**

**Exemplo 26** Calcular o determinante da matriz do Exemplo 24

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo de cálculo do determinante**

**Exemplo 26** Calcular o determinante da matriz do Exemplo 24

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Sequência de matrizes obtidas pelas operações l-elementares foram as dos sistemas (9) e (10)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo de cálculo do determinante**

**Exemplo 26** Calcular o determinante da matriz do Exemplo 24

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Sequência de matrizes obtidas pelas operações l-elementares foram as dos sistemas (9) e (10)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes obtidas somente por intermédio de combinações lineares das linhas.

**Exemplo de cálculo do determinante**

**Exemplo 26** Calcular o determinante da matriz do Exemplo 24

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Sequência de matrizes obtidas pelas operações l-elementares foram as dos sistemas (9) e (10)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes obtidas somente por intermédio de combinações lineares das linhas.
- As três matrizes possuem determinantes com o mesmo valor.



**Exemplo de cálculo do determinante**

**Exemplo 26** Calcular o determinante da matriz do Exemplo 24

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Sequência de matrizes obtidas pelas operações l-elementares foram as dos sistemas (9) e (10)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes obtidas somente por intermédio de combinações lineares das linhas.
- As três matrizes possuem determinantes com o mesmo valor.
- Determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal.

**Exemplo de cálculo do determinante**

**Exemplo 26** Calcular o determinante da matriz do Exemplo 24

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Sequência de matrizes obtidas pelas operações l-elementares foram as dos sistemas (9) e (10)

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes obtidas somente por intermédio de combinações lineares das linhas.
- As três matrizes possuem determinantes com o mesmo valor.
- Determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal.
- Determinante é o produto dos pivôs

$$\det(A) = 1 \times 2 \times -12 = -24.$$

## Pivotação parcial

- Método de Gauss falha quando um pivô for nulo.
- Consiste em escolher como pivô o maior elemento em módulo da coluna, cujos elementos serão eliminados.
- A pivotação parcial garante que o pivô seja não nulo, exceto quando a matriz for singular.
- Todos os multiplicadores satisfazem

$$-1 \leq m_{ij} \leq 1.$$

- Multiplicadores grandes podem ampliar os erros de arredondamento.

### Exemplo de pivotação parcial

**Exemplo 27** Resolver o sistema pelo método de Gauss com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

$L$	Multiplicador	$A$	$b$	Operações
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1   -3   2	11	
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2   8   -1	-15	
3		<u>4</u> -6   5	29	

### Exemplo de pivotação parcial

**Exemplo 27** Resolver o sistema pelo método de Gauss com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

$L$	Multiplicador	$A$	$b$	Operações
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1   -3   2	11	
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2   8   -1	-15	
3		<u>4</u> -6   5	29	
4	$m_{12} = (-1,5)/5 = -0,3$	0   -1,5   0,75	3,75	$-0,25L_3 + L_1$
5		0 <u>5</u> 1,5	-0,5	$0,5L_3 + L_2$

### Exemplo de pivotação parcial

**Exemplo 27** Resolver o sistema pelo método de Gauss com pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

$L$	Multiplicador	$A$	$b$	Operações
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1   -3   2	11	
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2   8   -1	-15	
3		<u>4</u> -6   5	29	
4	$m_{12} = (-1,5)/5 = -0,3$	0   -1,5   0,75	3,75	$-0,25L_3 + L_1$
5		0 <u>5</u> 1,5	-0,5	$0,5L_3 + L_2$
6		0   0 <u>1,2</u>	3,6	$0,3L_5 + L_4$

- Sistema triangular superior equivalente

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -0,5 \\ 3,6 \end{bmatrix}.$$

**Vetor solução**

- Sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -0,5 \\ 3,6 \end{bmatrix}.$$

**Vetor solução**

- Sistema triangular superior

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -0,5 \\ 3,6 \end{bmatrix}.$$

- Substituições retroativas

$$1,2x_3 = 3,6; \quad x_3 = \frac{3,6}{1,2} \leadsto x_3 = 3,$$

$$5x_2 + 1,5x_3 = -0,5; \quad x_2 = \frac{-0,5 - 1,5(3)}{5} \leadsto x_2 = -1 \text{ e}$$

$$4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 29, \quad x_1 = \frac{29 + 6(-1) - 5(3)}{4} \leadsto x_1 = 2.$$

- Vetor solução:  $x = [2 \quad -1 \quad 3]^T$ .



## Decomposição $LU$

- Uma matriz quadrada pode ser escrita como o produto de duas matrizes

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- A matriz  $A$  foi fatorada tal que  $A = LU$ .
- $L$  é uma matriz triangular inferior unitária ( $l_{ii} = 1, \forall i$ ).
- $U$  é uma matriz triangular superior.
- Para resolver o sistema  $Ax = b$

$$Ax = b \longrightarrow L U x = b.$$

$$U x = y, \text{ então } L y = b.$$

## Cálculo dos fatores

- A matriz pode ser fatorada usando-se o método de eliminação de Gauss.
- A matriz triangular superior  $U$  é a mesma do método de Gauss.
- A matriz triangular inferior unitária  $L$ , além de  $l_{ii} = 1$ ,  $l_{ij} = 0, i < j$ , possui  $l_{ij} = m_{ij}, i > j$ , sendo  $m_{ij}$  os multiplicadores usados no processo de eliminação de Gauss.

### Exemplo de decomposição $LU$

**Exemplo 28** Resolver o sistema do Exemplo 24 usando a decomposição  $LU$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

$L$	$m$	$A$	Operações
1		<u>1</u> -3 2	.
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	-2 8 -1	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	

### Exemplo de decomposição $LU$

**Exemplo 28** Resolver o sistema do Exemplo 24 usando a decomposição  $LU$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

$L$	$m$	$A$	Operações
1		<u>1</u> -3 2	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	-2 8 -1	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	
4		0 <u>2</u> 3	$2L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0 6 -3	$-4L_1 + L_3$

### Exemplo de decomposição $LU$

**Exemplo 28** Resolver o sistema do Exemplo 24 usando a decomposição  $LU$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

$L$	$m$	$A$	Operações
1		<u>1</u> -3 2	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	-2 8 -1	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	
4		0 <u>2</u> 3	$2L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0 6 -3	$-4L_1 + L_3$
6		0 0 <u>-12</u>	$-3L_4 + L_5$

### Exemplo de decomposição $LU$

**Exemplo 28** Resolver o sistema do Exemplo 24 usando a decomposição  $LU$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

• Dispositivo prático

$L$	$m$	$A$	Operações
1		<u>1</u> -3 2	
2	$m_{21} = (-2)/1 = -2$	-2 8 -1	
3	$m_{31} = 4/1 = 4$	4 -6 5	
4		0 <u>2</u> 3	$2L_1 + L_2$
5	$m_{32} = 6/2 = 3$	0 6 -3	$-4L_1 + L_3$
6		0 0 <u>-12</u>	$-3L_4 + L_5$

• Matrizes  $L$  e  $U$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } U = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

**Verificação da igualdade  $A = LU$** 

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}.$$

**Sistema triangular superior  $Ly = b$** 

- Substituições sucessivas  $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix},$$

$$y_1 = 11,$$

$$-2y_1 + y_2 = -15, \quad y_2 = -15 + 2(11) \leadsto y_2 = 7 \text{ e}$$

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 = 29, \quad y_3 = 29 - 4(11) - 3(7) \leadsto y_3 = -36.$$

- Vetor intermediário:  $y = [11 \ 7 \ -36]^T$ .



**Sistema triangular superior  $Ux = y$** 

## ● Substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -36 \end{bmatrix},$$

$$-12x_3 = -36, \quad x_3 = \frac{-36}{-12} \leadsto x_3 = 3,$$

$$2x_2 + 3x_3 = 7, \quad x_2 = \frac{7 - 3(3)}{2} \leadsto x_2 = -1 \text{ e}$$

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11, \quad x_1 = \frac{11 + 3(-1) - 2(3)}{1} \leadsto x_1 = 2.$$

● Vetor solução:  $x = [2 \ -1 \ 3]^T$ .

### Observações sobre a decomposição $LU$

- Diferença entre os dispositivos práticos da eliminação de Gauss e da decomposição  $LU$ : ausência da coluna relativa ao vetor  $b$ .
- Efetuar as substituições sucessivas para resolver  $Ly = b$  na decomposição  $LU$  é o mesmo que fazer as operações l-elementares em  $b$  na eliminação de Gauss.
- A solução de  $Ly = b$  funciona como uma memória de cálculo para ser efetuada sobre o vetor  $b$ .
- Resolver vários sistemas lineares com a mesma matriz dos coeficientes com a fatoração da matriz feita uma única vez.

## Pivotação parcial

- Evitar pivô nulo.
- Evitar multiplicadores com valores muito grandes.
- Decomposição da forma

$$PA = LU.$$

- $P$ : matriz de permutações.
- $L$ : matriz triangular inferior unitária formada pelos multiplicadores  $m_{ij}$ .
- $U$ : matriz triangular superior.
- Resolver o sistema  $Ax = b$

$$Ax = b \longrightarrow PAx = Pb \longrightarrow LUx = Pb.$$

$$\boxed{Ux = y, \text{ então } Ly = Pb.} \quad (11)$$

### Exemplo de decomposição $LU$

**Exemplo 29** Resolver o sistema do Exemplo 27 pela decomposição  $LU$  usando pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

$L$	$m$	$A$	Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1   -3   2		1
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2   8   -1		2
3		<u>4</u> -6   5		<u>3</u>

### Exemplo de decomposição $LU$

**Exemplo 29** Resolver o sistema do Exemplo 27 pela decomposição  $LU$  usando pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

$L$	$m$	$A$	Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1   -3   2		1
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2   8   -1		2
3		<u>4</u> -6   5		<u>3</u>
4	$m_{12} = (-1,5)/5 = -0,3$	0   -1,5   0,75	$-0,25L_3 + L_1$	1
5		0 <u>5</u> 1,5	$0,5L_3 + L_2$	<u>2</u>

### Exemplo de decomposição $LU$

**Exemplo 29** Resolver o sistema do Exemplo 27 pela decomposição  $LU$  usando pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

$L$	$m$	$A$	Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1   -3   2		<u>1</u>
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2   8   -1		<u>2</u>
3		<u>4</u> -6   5		<u>3</u>
4	$m_{12} = (-1,5)/5 = -0,3$	0   -1,5   0,75	$-0,25L_3 + L_1$	<u>1</u>
5		0 <u>5</u> 1,5	$0,5L_3 + L_2$	<u>2</u>
6		0   0 <u>1,2</u>	$0,3L_5 + L_4$	<u>1</u>

### Exemplo de decomposição $LU$

**Exemplo 29** Resolver o sistema do Exemplo 27 pela decomposição  $LU$  usando pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

$L$	$m$	$A$	Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1   -3   2		<u>1</u>
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2   8   -1		<u>2</u>
3		<u>4</u> -6   5		<u>3</u>
4	$m_{12} = (-1,5)/5 = -0,3$	0   -1,5   0,75	$-0,25L_3 + L_1$	<u>1</u>
5		0 <u>5</u> 1,5	$0,5L_3 + L_2$	<u>2</u>
6		0   0 <u>1,2</u>	$0,3L_5 + L_4$	<u>1</u>

- Índices das linhas pivotais:  $\underline{p} = [\underline{3} \ \underline{2} \ \underline{1}]$ .

### Exemplo de decomposição $LU$

**Exemplo 29** Resolver o sistema do Exemplo 27 pela decomposição  $LU$  usando pivotação parcial

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Dispositivo prático

$L$	$m$	$A$	Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11} = 1/4 = 0,25$	1   -3   2		<u>1</u>
2	$m_{21} = (-2)/4 = -0,5$	-2   8   -1		<u>2</u>
3		<u>4</u> -6   5		<u>3</u>
4	$m_{12} = (-1,5)/5 = -0,3$	0   -1,5   0,75	$-0,25L_3 + L_1$	<u>1</u>
5		0 <u>5</u> 1,5	$0,5L_3 + L_2$	<u>2</u>
6		0   0 <u>1,2</u>	$0,3L_5 + L_4$	<u>1</u>

- Índices das linhas pivotais:  $\underline{p} = [\underline{3} \ \underline{2} \ \underline{1}]$ .

- Matrizes  $L$ ,  $U$  e  $P$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 0,25 & -0,3 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1,2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



**Solução de  $Ly = Pb$** 

- Vetor  $Pb$ : formado pelos elementos de  $b$  dispostos na ordem das linhas pivotais contidas em  $\underline{p}$ .
- Solução de  $Ly = Pb$  via substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 0,25 & -0,3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -15 \\ 11 \end{bmatrix},$$

$$y_1 = 29,$$

$$-0,5y_1 + y_2 = -15, \quad y_2 = -15 + 0,5(29) \rightsquigarrow y_2 = -0,5 \text{ e}$$

$$0,25y_1 - 0,3y_2 + y_3 = 11, \quad y_3 = 11 - 0,25(29) + 0,3(-0,5) \rightsquigarrow y_3 = 3,6.$$

- Vetor intermediário:  $y = [29 \quad -0,5 \quad 3,6]^T$ .

**Vetor solução**

- Solução de  $Ux = y$  pelas substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -0,5 \\ 3,6 \end{bmatrix},$$

$$1,2x_3 = 3,6; \quad x_3 = \frac{3,6}{1,2} \leadsto x_3 = 3,$$

$$5x_2 + 1,5x_3 = -0,5; \quad x_2 = \frac{-0,5 - 1,5(3)}{5} \leadsto x_2 = -1 \text{ e}$$

$$4x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 29, \quad x_1 = \frac{29 + 6(-1) - 5(3)}{4} \leadsto x_1 = 2,$$

- Vetor solução:  $x = [2 \quad -1 \quad 3]^T$ .

**Vetor resíduo**

$$r = b - Ax,$$

$$r = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Solução exata.

## Cálculo do determinante

- Pelas propriedades dos determinantes

$$PA = LU \longrightarrow \det(PA) = \det(LU),$$

$$\det(A) = \frac{\det(L) \det(U)}{\det(P)},$$

$$\det(L) = \prod_{i=1}^n l_{ii} = 1, \quad \det(U) = \prod_{i=1}^n u_{ii} \quad \text{e} \quad \det(P) = (-1)^t,$$

- $t$ : número de trocas de linhas necessárias para transformar a matriz de permutações  $P$  em uma matriz identidade.
- Determinante de  $A$

$$\det(A) = (-1)^t \prod_{i=1}^n u_{ii}. \quad (12)$$

### Exemplo de cálculo do determinante

**Exemplo 30** Calcular o determinante da matriz do Exemplo 29

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes  $U$  e  $P$

$$U = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1,2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Valor de  $t$

$t$	Linhas pivotais			Comentário
0	3	2	1	trocar 3 com 1

### Exemplo de cálculo do determinante

**Exemplo 30** Calcular o determinante da matriz do Exemplo 29

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

• Matrizes  $U$  e  $P$

$$U = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 5 \\ 0 & 5 & 1,5 \\ 0 & 0 & 1,2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

• Valor de  $t$

$t$	Linhas pivotais			Comentário
0	3	2	1	trocar 3 com 1
1	1	2	3	ordem crescente

• Determinante

$$\det(A) = (-1)^t \prod_{i=1}^3 u_{ii} = (-1)^1 \times 4 \times 5 \times 1,2 \rightsquigarrow \det(A) = -24.$$

**Exemplo**

**Exemplo 31** Resolver o sistema abaixo pela decomposição  $LU$ , usando pivotação parcial, e verificar a exatidão e a unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

### Cálculo dos fatores

$L$	$m$	$A$	Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11} = 4/5 = 0,8$	4 -1 0 -1		1
2	$m_{21} = 1/5 = 0,2$	1 -2 1 0		2
3	$m_{31} = 0/5 = 0$	0 4 -4 1		3
4		<u>5</u> 0 5 -1		<u>4</u>



### Cálculo dos fatores

$L$	$m$	$A$	Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11} = 4/5 = 0,8$	4 -1 0 -1		1
2	$m_{21} = 1/5 = 0,2$	1 -2 1 0		2
3	$m_{31} = 0/5 = 0$	0 4 -4 1		3
4		<u>5</u> 0 5 -1		<u>4</u>
5	$m_{12} = (-1)/4 = -0,25$	0 -1 -4 -0,2	$-0,8L_4 + L_1$	1
6	$m_{22} = (-2)/4 = -0,5$	0 -2 0 0,2	$-0,2L_4 + L_2$	2
7		0 <u>4</u> -4 1	$0L_4 + L_3$	<u>3</u>

### Cálculo dos fatores

$L$	$m$	$A$	Operações	$p$
1	$m_{11} = 4/5 = 0,8$	4   -1   0   -1		<u>1</u>
2	$m_{21} = 1/5 = 0,2$	1   -2   1   0		2
3	$m_{31} = 0/5 = 0$	0   4   -4   1		3
4		<u>5</u> 0   5   -1		<u>4</u>
5	$m_{12} = (-1)/4 = -0,25$	0   -1   -4   -0,2	$-0,8L_4 + L_1$	1
6	$m_{22} = (-2)/4 = -0,5$	0   -2   0   0,2	$-0,2L_4 + L_2$	2
7		0 <u>4</u> -4   1	$0L_4 + L_3$	<u>3</u>
8		0   0 <u>-5</u> 0,05	$0,25L_7 + L_5$	<u>1</u>
9	$m_{23} = (-2)/(-5) = 0,4$	0   0   -2   0,7	$0,5L_7 + L_6$	2

### Cálculo dos fatores

$L$	$m$	$A$	Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11} = 4/5 = 0,8$	4 -1 0 -1		1
2	$m_{21} = 1/5 = 0,2$	1 -2 1 0		2
3	$m_{31} = 0/5 = 0$	0 4 -4 1		3
4		<u>5</u> 0 5 -1		<u>4</u>
5	$m_{12} = (-1)/4 = -0,25$	0 -1 -4 -0,2	$-0,8L_4 + L_1$	1
6	$m_{22} = (-2)/4 = -0,5$	0 -2 0 0,2	$-0,2L_4 + L_2$	2
7		0 <u>4</u> -4 1	$0L_4 + L_3$	<u>3</u>
8		0 0 <u>-5</u> 0,05	$0,25L_7 + L_5$	<u>1</u>
9	$m_{23} = (-2)/(-5) = 0,4$	0 0 -2 0,7	$0,5L_7 + L_6$	2
10		0 0 0 <u>0,68</u>	$-0,4L_8 + L_9$	<u>2</u>

### Cálculo dos fatores

$L$	$m$	$A$	Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11} = 4/5 = 0,8$	4   -1   0   -1		<u>1</u>
2	$m_{21} = 1/5 = 0,2$	1   -2   1   0		<u>2</u>
3	$m_{31} = 0/5 = 0$	0   4   -4   1		<u>3</u>
4		<u>5</u> 0   5   -1		<u>4</u>
5	$m_{12} = (-1)/4 = -0,25$	0   -1   -4   -0,2	$-0,8L_4 + L_1$	<u>1</u>
6	$m_{22} = (-2)/4 = -0,5$	0   -2   0   0,2	$-0,2L_4 + L_2$	<u>2</u>
7		0 <u>4</u> -4   1	$0L_4 + L_3$	<u>3</u>
8		0   0 <u>-5</u> 0,05	$0,25L_7 + L_5$	<u>1</u>
9	$m_{23} = (-2)/(-5) = 0,4$	0   0   -2   0,7	$0,5L_7 + L_6$	<u>2</u>
10		0   0   0 <u>0,68</u>	$-0,4L_8 + L_9$	<u>2</u>

- Vetor  $\underline{p} = [\underline{4} \ \underline{3} \ \underline{1} \ \underline{2}]$ .

### Cálculo dos fatores

$L$	$m$	$A$	Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11} = 4/5 = 0,8$	4 -1 0 -1		1
2	$m_{21} = 1/5 = 0,2$	1 -2 1 0		2
3	$m_{31} = 0/5 = 0$	0 4 -4 1		3
4		<u>5</u> 0 5 -1		<u>4</u>
5	$m_{12} = (-1)/4 = -0,25$	0 -1 -4 -0,2	$-0,8L_4 + L_1$	1
6	$m_{22} = (-2)/4 = -0,5$	0 -2 0 0,2	$-0,2L_4 + L_2$	2
7		0 <u>4</u> -4 1	$0L_4 + L_3$	<u>3</u>
8		0 0 <u>-5</u> 0,05	$0,25L_7 + L_5$	<u>1</u>
9	$m_{23} = (-2)/(-5) = 0,4$	0 0 -2 0,7	$0,5L_7 + L_6$	2
10		0 0 0 <u>0,68</u>	$-0,4L_8 + L_9$	<u>2</u>

• Vetor  $\underline{p} = [\underline{4} \ \underline{3} \ \underline{1} \ \underline{2}]$ .

• Matrizes  $L$ ,  $U$  e  $P$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,8 & -0,25 & 1 & 0 \\ 0,2 & -0,5 & 0,4 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 0,68 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Sistemas triangulares

- Substituições sucessivas para  $Ly = Pb$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,8 & -0,25 & 1 & 0 \\ 0,2 & -0,5 & 0,4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \leadsto y = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2,95 \\ -3,12 \end{bmatrix}.$$

## Sistemas triangulares

- Substituições sucessivas para  $Ly = Pb$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0,8 & -0,25 & 1 & 0 \\ 0,2 & -0,5 & 0,4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2,95 \\ -3,12 \end{bmatrix}.$$

- Substituições retroativas para  $Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 0,68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2,95 \\ -3,12 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x = \begin{bmatrix} -0,6617 \\ 0,9412 \\ 0,5441 \\ -4,5882 \end{bmatrix}.$$

**Verificação da exatidão do vetor  $x$** 

- Vetor resíduo  $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,6617 \\ 0,9412 \\ 0,5441 \\ -4,5882 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0002 \\ 0,0000 \\ -0,0002 \\ -0,0002 \end{bmatrix}.$$

- Solução quase exata.



## Verificação da unicidade da solução

- Valor de  $t$

$t$	Linhas pivotais				Comentário
0	4	3	1	2	trocar 4 com 1

## Verificação da unicidade da solução

- Valor de  $t$

$t$	Linhas pivotais				Comentário
0	4	3	1	2	trocar 4 com 1 .
1	1	3	4	2	trocar 3 com 2

## Verificação da unicidade da solução

- Valor de  $t$

$t$	Linhas pivotais				Comentário
0	4	3	1	2	trocar 4 com 1
1	1	3	4	2	trocar 3 com 2
2	1	2	4	3	trocar 4 com 3

## Verificação da unicidade da solução

- Valor de  $t$

$t$	Linhas pivotais				Comentário
0	4	3	1	2	trocar 4 com 1
1	1	3	4	2	trocar 3 com 2
2	1	2	4	3	trocar 4 com 3
3	1	2	3	4	ordem crescente

- Determinante

$$\det(A) = (-1)^t \prod_{i=1}^4 u_{ii} = \det(A) = (-1)^3 \times 5 \times 4 \times -5 \times 0,68 = 68 \neq 0.$$

- Solução única.

## Sistema com matriz singular

- infinitas soluções ou
- não ter solução.

**Exemplo de sistema com matriz singular**

**Exemplo 32** Resolver os sistemas  $Ax = b$  e  $Ax = c$  usando decomposição  $LU$  com pivotação parcial, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 22 \\ -12 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

## Cálculo dos fatores

### • Dispositivo prático

$L$	$m$	$A$	Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11} = 1/(-2) = -0,5$	1 -3 2		1
2		<u>-2</u> 8 -1		<u>2</u>
3	$m_{31} = (-1)/(-2) = 0,5$	-1 5 1		3

## Cálculo dos fatores

### • Dispositivo prático

$L$	$m$	$A$	Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11} = 1/(-2) = -0,5$	1   -3   2		<u>1</u>
2		<u>-2</u> 8   -1		<u>2</u>
3	$m_{31} = (-1)/(-2) = 0,5$	-1   5   1		<u>3</u>
4		0 <u>1</u> 1,5	$0,5L_2 + L_1$	<u>1</u>
5	$m_{32} = 1/1 = 1$	0   1   1,5	$-0,5L_2 + L_3$	<u>3</u>



## Cálculo dos fatores

### • Dispositivo prático

$L$	$m$	$A$	Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11} = 1/(-2) = -0,5$	1   -3   2		<u>1</u>
2		<u>-2</u> 8   -1		<u>2</u>
3	$m_{31} = (-1)/(-2) = 0,5$	-1   5   1		<u>3</u>
4		0 <u>1</u> 1,5	$0,5L_2 + L_1$	<u>1</u>
5	$m_{32} = 1/1 = 1$	0   1   1,5	$-0,5L_2 + L_3$	<u>3</u>
6		0   0   0	$-L_4 + L_5$	<u>3</u>

## Cálculo dos fatores

### ● Dispositivo prático

$L$	$m$	$A$	Operações	$\underline{p}$
1	$m_{11} = 1/(-2) = -0,5$	1 -3 2		<u>1</u>
2		<u>-2</u> 8 -1		<u>2</u>
3	$m_{31} = (-1)/(-2) = 0,5$	-1 5 1		<u>3</u>
4		0 <u>1</u> 1,5	$0,5L_2 + L_1$	<u>1</u>
5	$m_{32} = 1/1 = 1$	0 1 1,5	$-0,5L_2 + L_3$	<u>3</u>
6		0 0 0	$-L_4 + L_5$	<u>3</u>

### ● Os três fatores são

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Sistema  $Ax = b$** 

- Solução de  $Ly = Pb$  pelas substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 22 \\ 10 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Sistema  $Ax = b$** 

- Solução de  $Ly = Pb$  pelas substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 22 \\ 10 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Solução de  $Ux = y$  pelas substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$0x_3 = 0 \rightsquigarrow x_3 = \theta \quad (\text{qualquer valor de } x_3 \text{ é solução}),$$

$$x_2 + 1,5x_3 = 16 \rightsquigarrow x_2 = 16 - 1,5\theta \text{ e}$$

$$-2x_1 + 8x_2 - x_3 = -12, \quad x_1 = \frac{-12 - 8(16 - 1,5\theta) + \theta}{-2} \rightsquigarrow x_1 = 70 - 6,5\theta.$$

**Sistema  $Ax = b$**

- Solução de  $Ly = Pb$  pelas substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 22 \\ 10 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Solução de  $Ux = y$  pelas substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$0x_3 = 0 \rightsquigarrow x_3 = \theta \quad (\text{qualquer valor de } x_3 \text{ é solução}),$$

$$x_2 + 1,5x_3 = 16 \rightsquigarrow x_2 = 16 - 1,5\theta \text{ e}$$

$$-2x_1 + 8x_2 - x_3 = -12, \quad x_1 = \frac{-12 - 8(16 - 1,5\theta) + \theta}{-2} \rightsquigarrow x_1 = 70 - 6,5\theta.$$

- Vetor solução  $x = [70 - 6,5\theta \quad 16 - 1,5\theta \quad \theta]^T$  (Figura).

**Sistema  $Ax = c$** 

- Solução de  $Ly = Pc$  via substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ 80 \end{bmatrix} \leadsto y = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ 70 \end{bmatrix}$$

**Sistema  $Ax = c$** 

- Solução de  $Ly = Pc$  via substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ 80 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ 70 \end{bmatrix}$$

- Solução de  $Ux = y$  via substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ 70 \end{bmatrix}$$
$$0x_3 = 70 \longrightarrow \nexists x_3 \rightsquigarrow \nexists x.$$

**Sistema  $Ax = c$** 

- Solução de  $Ly = Pc$  via substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 \\ 0,5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 20 \\ 80 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ 70 \end{bmatrix}$$

- Solução de  $Ux = y$  via substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} -2 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 15 \\ 70 \end{bmatrix}$$

$$0x_3 = 70 \longrightarrow \nexists x_3 \rightsquigarrow \nexists x.$$

- Sistema  $Ax = c$  não tem solução porque  $\nexists x_3$  tal que  $0x_3 \neq 0$  (Figura).



## Algoritmo: decomposição $LU$

```

Algoritmo Decomposição  $LU$ 
{ Objetivo: Fazer a decomposição  $LU$  de uma matriz  $A$  }
parâmetros de entrada  $n, A$  { ordem e matriz a ser decomposta }
parâmetros de saída  $A, Det, Pivot$ 
{ matriz decomposta  $A = U + L - I$ , determinante, pivôs }
para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça  $Pivot(i) \leftarrow i$ , fimpara;  $Det \leftarrow 1$ 
para  $j \leftarrow 1$  até  $n - 1$  faça
  { escolha do elemento pivô }
   $p \leftarrow j$ ;  $Amax \leftarrow \text{abs}(A(j, j))$ 
  para  $k \leftarrow j + 1$  até  $n$  faça
    se  $\text{abs}(A(k, j)) > Amax$  então
       $Amax \leftarrow \text{abs}(A(k, j))$ ;  $p \leftarrow k$ 
    fimse
  fimpara
  se  $p \neq j$  então
    { troca de linhas }
    para  $k \leftarrow 1$  até  $n$  faça
       $t \leftarrow A(j, k)$ ;  $A(j, k) \leftarrow A(p, k)$ ;  $A(p, k) \leftarrow t$ 
    fimpara
     $m \leftarrow Pivot(j)$ ;  $Pivot(j) \leftarrow Pivot(p)$ ;  $Pivot(p) \leftarrow m$ 
     $Det \leftarrow -Det$ 
  fimse
   $Det \leftarrow Det * A(j, j)$ 
  se  $\text{abs}(A(j, j)) \neq 0$  então
    { eliminação de Gauss }
     $r \leftarrow 1/A(j, j)$ 
    para  $i \leftarrow j + 1$  até  $n$  faça
       $Mult \leftarrow A(i, j) * r$ ;  $A(i, j) \leftarrow Mult$ 
      para  $k \leftarrow j + 1$  até  $n$  faça
         $A(i, k) \leftarrow A(i, k) - Mult * A(j, k)$ 
      fimpara
    fimpara
  fimse
fimpara
 $Det \leftarrow Det * A(n, n)$ 
fimalgoritmo

```

||

## Detalhes do algoritmo para decomposição $LU$

- As matrizes triangulares  $L$  e  $U$  são escritas sobre a matriz original  $A$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \text{A, antes da decomposição} & \longrightarrow & \text{A, após a decomposição} \\
 \left[ \begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] & \longrightarrow & \left[ \begin{array}{ccccc} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & u_{nn} \end{array} \right].
 \end{array}$$

- Se necessário a matriz  $A$  deve ser previamente copiada em uma outra matriz.
- Matriz  $L$ : triangular inferior unitária.
- Esquema da pivotação parcial é utilizado.
- Algoritmo das substituições sucessivas para solução de  $Ly = b$  deve ser modificado para resolver  $Ly = Pb$ .

**Algoritmo: substituições sucessivas pivotal****Algoritmo Substituições Sucessivas Pivotal**

{ **Objetivo:** Resolver o sistema triangular inferior  $Ly = Pb$  }  
{ pelas substituições sucessivas, com a matriz  $L$  }  
{ obtida de decomposição  $LU$  com pivotação parcial }

**parâmetros de entrada**  $n, L, b, Pivot$

{ ordem, matriz triangular inferior unitária, }

{ vetor independente e posição dos pivôs }

**parâmetros de saída**  $y$  { solução do sistema triangular inferior }

$k \leftarrow Pivot(1); y(1) \leftarrow b(k)$

**para**  $i \leftarrow 2$  **até**  $n$  **faça**

$Soma \leftarrow 0$

**para**  $j \leftarrow 1$  **até**  $i - 1$  **faça**

$Soma \leftarrow Soma + L(i,j) * y(j)$

**fimpara**

$k \leftarrow Pivot(i); y(i) \leftarrow b(k) - Soma$

**fimpara**

**fimalgoritmo**

⇐

**Complexidade da decomposição  $LU$  de uma matriz de ordem  $n$** 

Operações	Complexidade
adições	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$
multiplicações	$\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$
divisões	$n - 1$

- Desconsiderando operações para o cálculo do determinante.
- Complexidade computacional do algoritmo de substituições sucessivas pivotal difere do algoritmo padrão somente quanto ao número de divisões, que é nulo.
- Como  $L$  é unitária, não há necessidade de divisão.

## Exemplo de uso dos algoritmos

**Exemplo 33** Resolver o sistema do Exemplo 31 usando os algoritmos decomposição  $LU$ , substituições sucessivas pivotal e substituições retroativas.

```
% Os valores de entrada
n = 4
A =
    4    -1     0    -1
    1    -2     1     0
    0     4    -4     1
    5     0     5    -1

% produzem os resultados pela decomposicao LU
A =
    5.0000         0    5.0000   -1.0000
         0    4.0000   -4.0000    1.0000
    0.8000   -0.2500   -5.0000    0.0500
    0.2000   -0.5000    0.4000    0.6800

Det = 68.0000
Pivot =     4     3     1     2
% vetor de termos independentes
b =
     1
    -2
    -3
     4

% As substituiçoes sucessivas pivotal produzem
y =
     4.0000
    -3.0000
    -2.9500
    -3.1200

% As substituiçoes retroativas resultam em
x =
   -0.6618
    0.9412
    0.5441
   -4.5882
```

## Sistemas lineares complexos

- Sistemas de equações que envolvam números complexos podem ser solucionados pelos algoritmos apresentados.
- Algoritmos implementados em uma linguagem de programação que suporta aritmética complexa.
- Algoritmos implementados com aritmética real, com o sistema complexo previamente transformado em um sistema real.

**Sistema complexo usando aritmética real**

- Seja o sistema complexo  $Ax = b$ .
- Fazendo  $A = A_r + iA_i$ ,  $x = x_r + ix_i$ ,  $b = b_r + ib_i$ .
- Substituindo na equação acima

$$(A_r + iA_i)(x_r + ix_i) = b_r + ib_i,$$

$$A_r x_r - A_i x_i + i(A_i x_r + A_r x_i) = b_r + ib_i.$$

- Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} A_r & -A_i \\ A_i & A_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_r \\ b_i \end{bmatrix}. \quad (13)$$

**Exemplo de sistema complexo usando aritmética complexa**

**Exemplo 34** Resolver o sistema abaixo, utilizando os algoritmos substituições retroativas, decomposição  $LU$  e substituições sucessivas pivotal implementados em uma linguagem com aritmética complexa.

$$\begin{bmatrix} 1+2i & -3i & 5 \\ 2+3i & 1+i & 1-i \\ 4 & 2i & 3-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-16i \\ -5+12i \\ 13+2i \end{bmatrix}.$$



## Resultados com aritmética complexa

```
% Os valores de entrada
n = 3
A =
    1.0000+ 2.0000i      0- 3.0000i      5.0000
    2.0000+ 3.0000i      1.0000+ 1.0000i      1.0000- 1.0000i
    4.0000              0+ 2.0000i      3.0000- 2.0000i
% Produzem os resultados pela decomposicao LU
A =
    4.0000              0+ 2.0000i      3.0000- 2.0000i
    0.2500+ 0.5000i      1.0000- 3.5000i      3.2500- 1.0000i
    0.5000+ 0.7500i      0.1887+ 0.6604i     -3.2736- 4.2075i
Det =
    -72.0000+29.0000i
Pivot =
     3     1     2
% vetor de termos independentes
b =
    10.0000-16.0000i
    -5.0000+12.0000i
    13.0000+ 2.0000i
% As substituicoes sucessivas pivotal produzem
y =
    13.0000+ 2.0000i
     7.7500-23.0000i
    -26.6509+ 0.4717i
% As substituicoes retroativas resultam em
x =
    3.0000+ 4.0000i
    2.0000+ 0.0000i
    3.0000- 4.0000i
```

### Exemplo de sistema complexo usando aritmética real

**Exemplo 35** Resolver o sistema do Exemplo 34, utilizando os algoritmos substituições retroativas, decomposição  $LU$  e substituições sucessivas pivotal implementados em uma linguagem que não tem aritmética complexa.

$$\begin{bmatrix} 1+2i & -3i & 5 \\ 2+3i & 1+i & 1-i \\ 4 & 2i & 3-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-16i \\ -5+12i \\ 13+2i \end{bmatrix}.$$

- Por (13), o sistema complexo pode ser resolvido por meio do sistema real

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 13 \\ -16 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

## Resultados com aritmética real

```
% Os valores de entrada
n = 6
A =
    1     0     5    -2     3     0
    2     1     1    -3    -1     1
    4     0     3     0    -2     2
    2    -3     0     1     0     5
    3     1    -1     2     1     1
    0     2    -2     4     0     3

% produzem os resultados pela decomposicao LU
A =
    4.0000         0    3.0000         0   -2.0000    2.0000
    0.5000   -3.0000   -1.5000    1.0000    1.0000    4.0000
    0.2500         0    4.2500   -2.0000    3.5000   -0.5000
         0   -0.6667   -0.7059    3.2549    3.1373    5.3137
    0.7500   -0.3333   -0.8824    0.1747    5.3735   -0.5361
    0.5000   -0.3333   -0.2353   -0.9639    0.7780    6.7545

Det =
    6.0250e+03

Pivot =
     3     4     1     6     5     2

% vetor de termos independentes
b =
    10
    -5
    13
   -16
    12
     2

% As substituicoes sucessivas pivotal produzem
y =
    13.0000
   -22.5000
    6.7500
   -8.2353
    2.1446
   -27.0179
```

## Vetor solução

```
% As substituições retroativas resultam em  
x =  
    3.0000  
    2.0000  
    3.0000  
    4.0000  
    0.0000  
   -4.0000
```

- Vetor solução

$$x = \begin{bmatrix} 3+4i \\ 2 \\ 3-4i \end{bmatrix}.$$

## Decomposição de Cholesky e $LDL^T$

- Matriz dos coeficientes  $A$  simétrica e definida positiva

$$v^T A v > 0, \quad \forall v \neq 0, \quad (\text{tabela}).$$

- $A$  pode ser decomposta tal que

$$A = LL^T,$$

- $L$ : matriz triangular inferior e,
- $L^T$ : matriz triangular superior.

## Decomposição de Cholesky e $LDL^T$

- Matriz dos coeficientes  $A$  simétrica e definida positiva

$$v^T A v > 0, \forall v \neq 0, \text{ (tabela).}$$

- $A$  pode ser decomposta tal que

$$A = LL^T,$$

- $L$ : matriz triangular inferior e,
- $L^T$ : matriz triangular superior.

**Teorema 2 (Cholesky)** *Se  $A$  for uma matriz simétrica e definida positiva, então existe uma única matriz triangular  $L$  com elementos da diagonal positivos tal que  $A = LL^T$ .*

**Cálculo do fator**

- Produto  $LL^T = A$  de uma matriz de ordem 4

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

- Elemento  $l_{44}$  da diagonal

**Cálculo do fator**

- Produto  $LL^T = A$  de uma matriz de ordem 4

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

- Elemento  $l_{44}$  da diagonal

$$l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 = a_{44} \rightarrow l_{44} = \sqrt{a_{44} - (l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2)}.$$



### Cálculo do fator

- Produto  $LL^T = A$  de uma matriz de ordem 4

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

- Elemento  $l_{44}$  da diagonal

$$l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 = a_{44} \rightarrow l_{44} = \sqrt{a_{44} - (l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2)} \leadsto l_{44} = \sqrt{a_{44} - \sum_{k=1}^3 l_{4k}^2}.$$

### Cálculo do fator

- Produto  $LL^T = A$  de uma matriz de ordem 4

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

- Elemento  $l_{44}$  da diagonal

$$l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 = a_{44} \rightarrow l_{44} = \sqrt{a_{44} - (l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2)} \leadsto l_{44} = \sqrt{a_{44} - \sum_{k=1}^3 l_{4k}^2}.$$

- Elemento qualquer da diagonal de  $L$

### Cálculo do fator

- Produto  $LL^T = A$  de uma matriz de ordem 4

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

- Elemento  $l_{44}$  da diagonal

$$l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2 + l_{44}^2 = a_{44} \rightarrow l_{44} = \sqrt{a_{44} - (l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2)} \rightsquigarrow l_{44} = \sqrt{a_{44} - \sum_{k=1}^3 l_{4k}^2}.$$

- Elemento qualquer da diagonal de  $L$

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

**Cálculo do fator cont.**

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

- Elemento  $l_{43}$  abaixo da diagonal

**Cálculo do fator cont.**

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

- Elemento  $l_{43}$  abaixo da diagonal

$$l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32} + l_{43}l_{33} = a_{43} \rightarrow l_{43} = \frac{a_{43} - (l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32})}{l_{33}}.$$

## Cálculo do fator cont.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

- Elemento  $l_{43}$  abaixo da diagonal

$$l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32} + l_{43}l_{33} = a_{43} \rightarrow l_{43} = \frac{a_{43} - (l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32})}{l_{33}} \leadsto l_{43} = \frac{a_{43} - \sum_{k=1}^2 l_{4k}l_{3k}}{l_{33}}.$$

## Cálculo do fator cont.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

- Elemento  $l_{43}$  abaixo da diagonal

$$l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32} + l_{43}l_{33} = a_{43} \rightarrow l_{43} = \frac{a_{43} - (l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32})}{l_{33}} \rightsquigarrow l_{43} = \frac{a_{43} - \sum_{k=1}^2 l_{4k}l_{3k}}{l_{33}}.$$

- Elemento genérico abaixo da diagonal principal

Cálculo do fator      cont.

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

- Elemento  $l_{43}$  abaixo da diagonal

$$l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32} + l_{43}l_{33} = a_{43} \rightarrow l_{43} = \frac{a_{43} - (l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32})}{l_{33}} \rightsquigarrow l_{43} = \frac{a_{43} - \sum_{k=1}^2 l_{4k}l_{3k}}{l_{33}}.$$

- Elemento genérico abaixo da diagonal principal

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk}}{l_{jj}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{e} \quad i = j+1, j+2, \dots, n. \quad (15)$$



## Solução do sistema $Ax = b$ pela decomposição de Cholesky

- Seja

$$Ax = b \longrightarrow LL^T x = b.$$

- Fazendo

$$L^T x = y \text{ então } Ly = b.$$

## Solução do sistema $Ax = b$ pela decomposição de Cholesky

- Seja

$$Ax = b \longrightarrow LL^T x = b.$$

- Fazendo

$$L^T x = y \text{ então } Ly = b.$$

- Sistema triangular inferior  $Ly = b$  resolvido pelas substituições sucessivas

$$y_i = \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right) / l_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

**Solução do sistema  $Ax = b$  pela decomposição de Cholesky**

- Seja

$$Ax = b \longrightarrow LL^T x = b.$$

- Fazendo

$$L^T x = y \text{ então } Ly = b. \quad (16)$$

- Sistema triangular inferior  $Ly = b$  resolvido pelas substituições sucessivas

$$y_i = \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right) / l_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

- Sistema triangular superior  $L^T x = y$  obtido pelas substituições retroativas

$$x_i = \left( y_i - \sum_{j=i+1}^n l_{ji} x_j \right) / l_{ii}, \quad i = n, n-1, \dots, 1. \quad (18)$$

## Cálculo do determinante

- Pelas propriedades dos determinantes

$$\det(A) = \det(L) \det(L^T),$$

$$\det(A) = \left( \prod_{i=1}^n l_{ii} \right)^2. \quad (19)$$

**Exemplo da decomposição de Cholesky**

**Exemplo 36** Resolver o sistema abaixo usando a decomposição de Cholesky e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo da decomposição de Cholesky**

**Exemplo 36** Resolver o sistema abaixo usando a decomposição de Cholesky e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix}.$$

- Pelo uso de (14) e (15)
- Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2, \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-2}{2} = -1, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{2}{2} = 1.$$

**Exemplo da decomposição de Cholesky**

**Exemplo 36** Resolver o sistema abaixo usando a decomposição de Cholesky e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix}.$$

- Pelo uso de (14) e (15)
- Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2, \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-2}{2} = -1, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{2}{2} = 1.$$

- Coluna 2:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{10 - (-1)^2} = 3, \quad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{-7 - (1)(-1)}{3} = -2.$$

**Exemplo da decomposição de Cholesky**

**Exemplo 36** Resolver o sistema abaixo usando a decomposição de Cholesky e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix}.$$

- Pelo uso de (14) e (15)

- Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{4} = 2, \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-2}{2} = -1, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{2}{2} = 1.$$

- Coluna 2:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{10 - (-1)^2} = 3, \quad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{-7 - (1)(-1)}{3} = -2.$$

- Coluna 3:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = \sqrt{30 - ((1)^2 + (-2)^2)} = 5.$$



## Dispositivo prático

$A$				$L$			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	3
1	4			1			
2	-2	10		2			
3	2	-7	30	3			

## Dispositivo prático

$A$				$L$			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	3
1	4			1	2		
2	-2	10		2	-1		
3	2	-7	30	3	1		

## Dispositivo prático

$A$				$L$			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	3
1	4			1	2		
2	-2	10		2	-1	3	
3	2	-7	30	3	1	-2	

## Dispositivo prático

$A$				$L$			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	3
1	4			1	2		
2	-2	10		2	-1	3	
3	2	-7	30	3	1	-2	5

## Dispositivo prático

$A$				$L$			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	3
1	4			1	2		
2	-2	10		2	-1	3	
3	2	-7	30	3	1	-2	5

- Verificação que  $LL^T = A$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix}.$$

## Solução dos sistemas triangulares

- Sistema  $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix} \leadsto y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

## Solução dos sistemas triangulares

- Sistema  $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix} \leadsto y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

- Sistema  $L^T x = y$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

- Vetor solução

$$x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**Verificação da exatidão e unicidade da solução**

- Vetor resíduo  $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{solução exata.}$$



**Verificação da exatidão e unicidade da solução**

- Vetor resíduo  $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{solução exata.}$$

- Cálculo do determinante por (19)

$$\det(A) = \left( \prod_{i=1}^3 l_{ii} \right)^2 = ((2)(3)(5))^2 = 900 \neq 0 \longrightarrow \text{solução única.}$$

**Exemplo da decomposição de Cholesky**

**Exemplo 37** Resolver o sistema abaixo usando a decomposição de Cholesky e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 20 & 2 & 22 \\ -3 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 22 & 2 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 64 \\ 4 \\ 82 \end{bmatrix}.$$

**Cálculo das colunas**

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 20 & 2 & 22 \\ -3 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 22 & 2 & 28 \end{bmatrix}.$$

- Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{9} = 3, \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{6}{3} = 2, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{-3}{3} = -1,$$
$$l_{41} = \frac{a_{41}}{l_{11}} = \frac{3}{3} = 1.$$

**Cálculo das colunas**

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 20 & 2 & 22 \\ -3 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 22 & 2 & 28 \end{bmatrix}.$$

- Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{9} = 3, \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{6}{3} = 2, \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{-3}{3} = -1, \\ l_{41} = \frac{a_{41}}{l_{11}} = \frac{3}{3} = 1.$$

- Coluna 2:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{20 - (2)^2} = 4, \quad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{2 - (-1)(2)}{4} = 1, \\ l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41}l_{21}}{l_{22}} = \frac{22 - (1)(2)}{4} = 5.$$

**Cálculo das colunas cont.**

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 20 & 2 & 22 \\ -3 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 22 & 2 & 28 \end{bmatrix}.$$

- Coluna 3:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = \sqrt{6 - ((-1)^2 + (1)^2)} = 2,$$

$$l_{43} = \frac{a_{43} - (l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32})}{l_{33}} = \frac{2 - ((1)(-1) + (5)(1))}{2} = -1.$$

**Cálculo das colunas cont.**

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 20 & 2 & 22 \\ -3 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 22 & 2 & 28 \end{bmatrix}.$$

## • Coluna 3:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = \sqrt{6 - ((-1)^2 + (1)^2)} = 2,$$

$$l_{43} = \frac{a_{43} - (l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32})}{l_{33}} = \frac{2 - ((1)(-1) + (5)(1))}{2} = -1.$$

## • Coluna 4:

$$l_{44} = \sqrt{a_{44} - (l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2)} = \sqrt{28 - ((1)^2 + (5)^2 + (-1)^2)} = 1.$$

## Dispositivo prático

$A$					$L$				
$i \backslash j$	1	2	3	4	$i \backslash j$	1	2	3	4
1	9				1				
2	6	20			2				
3	-3	2	6		3				
4	3	22	2	28	4				

## Dispositivo prático

$A$					$L$				
$i \backslash j$	1	2	3	4	$i \backslash j$	1	2	3	4
1	9				1	3			
2	6	20			2	2			
3	-3	2	6		3	-1			
4	3	22	2	28	4	1			



## Dispositivo prático

$A$					$L$				
$i \backslash j$	1	2	3	4	$i \backslash j$	1	2	3	4
1	9				1	3			
2	6	20			2	2	4		
3	-3	2	6		3	-1	1		
4	3	22	2	28	4	1	5		

## Dispositivo prático

$A$					$L$				
$i \backslash j$	1	2	3	4	$i \backslash j$	1	2	3	4
1	9				1	3			
2	6	20			2	2	4		
3	-3	2	6		3	-1	1	2	
4	3	22	2	28	4	1	5	-1	

## Dispositivo prático

$A$					$L$				
$i \backslash j$	1	2	3	4	$i \backslash j$	1	2	3	4
1	9				1	3			
2	6	20			2	2	4		
3	-3	2	6		3	-1	1	2	
4	3	22	2	28	4	1	5	-1	1

## Solução dos sistemas triangulares

- Sistema  $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 64 \\ 4 \\ 82 \end{bmatrix} \leadsto y = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

## Solução dos sistemas triangulares

- Sistema  $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 64 \\ 4 \\ 82 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

- Sistema  $L^T x = y$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \longrightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ (vetor solução).}$$

**Verificação da exatidão e unicidade da solução**

- Vetor resíduo  $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 12 \\ 64 \\ 4 \\ 82 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 20 & 2 & 22 \\ -3 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 22 & 2 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{solução exata.}$$

**Verificação da exatidão e unicidade da solução**

- Vetor resíduo  $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 12 \\ 64 \\ 4 \\ 82 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 & -3 & 3 \\ 6 & 20 & 2 & 22 \\ -3 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 22 & 2 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{solução exata.}$$

- Determinante

$$\det(A) = \left( \prod_{i=1}^4 l_{ii} \right)^2 = ((3)(4)(2)(1))^2 = 576 \neq 0 \longrightarrow \text{solução única.}$$

**Exemplo da decomposição de Cholesky**

**Exemplo 38** Resolver o sistema abaixo usando a decomposição de Cholesky e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix}.$$



**Exemplo da decomposição de Cholesky**

**Exemplo 38** Resolver o sistema abaixo usando a decomposição de Cholesky e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

• Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{5} = 2,2361;$$
$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-1}{2,2361} = -0,4472; \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{2}{2,2361} = 0,8944.$$

**Exemplo da decomposição de Cholesky**

**Exemplo 38** Resolver o sistema abaixo usando a decomposição de Cholesky e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

- Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{5} = 2,2361;$$
$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-1}{2,2361} = -0,4472; \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{2}{2,2361} = 0,8944.$$

- Coluna 2:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{8 - (-0,4472)^2} = 2,7929;$$
$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{4 - (0,8944)(-0,4472)}{2,7929} = 1,5754.$$

**Exemplo da decomposição de Cholesky**

**Exemplo 38** Resolver o sistema abaixo usando a decomposição de Cholesky e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

- Coluna 1:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{5} = 2,2361;$$
$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{-1}{2,2361} = -0,4472; \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{2}{2,2361} = 0,8944.$$

- Coluna 2:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{8 - (-0,4472)^2} = 2,7929;$$
$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}l_{21}}{l_{22}} = \frac{4 - (0,8944)(-0,4472)}{2,7929} = 1,5754.$$

- Coluna 3:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)} = \sqrt{10 - ((0,8944)^2 + (1,5754)^2)} = 2,5919.$$

## Dispositivo prático

$A$				$L$			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	3
1	5			1			
2	-1	8		2			
3	2	4	10	3			

## Dispositivo prático

$A$				$L$			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	3
1	5			1	2,2361		
2	-1	8		2	-0,4472		
3	2	4	10	3	0,8944		

## Dispositivo prático

$A$				$L$			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	3
1	5			1	2,2361		
2	-1	8		2	-0,4472	2,7929	
3	2	4	10	3	0,8944	1,5754	

## Dispositivo prático

$A$				$L$			
$i \backslash j$	1	2	3	$i \backslash j$	1	2	3
1	5			1	2,2361		
2	-1	8		2	-0,4472	2,7929	
3	2	4	10	3	0,8944	1,5754	2,5919

## Solução dos sistemas triangulares

- Sistema  $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 2,2361 & 0 & 0 \\ -0,4472 & 2,7929 & 0 \\ 0,8944 & 1,5754 & 2,5919 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} \leadsto y = \begin{bmatrix} 9,3914 \\ 5,0843 \\ 12,9598 \end{bmatrix}.$$



**Solução dos sistemas triangulares**

- Sistema  $Ly = b$

$$\begin{bmatrix} 2,2361 & 0 & 0 \\ -0,4472 & 2,7929 & 0 \\ 0,8944 & 1,5754 & 2,5919 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} \leadsto y = \begin{bmatrix} 9,3914 \\ 5,0843 \\ 12,9598 \end{bmatrix}.$$

- Sistema  $L^T x = y$

$$\begin{bmatrix} 2,2361 & -0,4472 & 0,8944 \\ 0 & 2,7929 & 1,5754 \\ 0 & 0 & 2,5919 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,3914 \\ 5,0843 \\ 12,9598 \end{bmatrix} \leadsto x = \begin{bmatrix} 2,0000 \\ -1,0000 \\ 5,0001 \end{bmatrix}.$$

**Verificação da exatidão e unicidade da solução**

- Vetor resíduo  $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,0000 \\ -1,0000 \\ 5,0001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0002 \\ -0,0004 \\ -0,0010 \end{bmatrix}.$$

- Solução não exata devido aos erros de arredondamento.

**Verificação da exatidão e unicidade da solução**

- Vetor resíduo  $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,0000 \\ -1,0000 \\ 5,0001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0002 \\ -0,0004 \\ -0,0010 \end{bmatrix}.$$

- Solução não exata devido aos erros de arredondamento.
- Determinante

$$\det(A) = \left( \prod_{i=1}^3 l_{ii} \right)^2 \approx ((2,2361)(2,7929)(2,5919))^2,$$

$$\det(A) \approx 262,0171 \neq 0 \longrightarrow \text{solução única.}$$

## Algoritmo: decomposição de Cholesky

### Algoritmo Cholesky

```

{ Objetivo: Fazer a decomposição  $LL^T$  de uma matriz  $A$  }
{      simétrica e definida positiva }
parâmetros de entrada  $n, A$  { ordem e matriz a ser decomposta }
parâmetros de saída  $A, Det, CondErro$ 
{ fator  $L$  escrito sobre  $A$ , determinante e condição de erro }
 $CondErro \leftarrow 0; Det \leftarrow 1$ 
para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
     $Soma \leftarrow 0$ 
    para  $k \leftarrow 1$  até  $j - 1$  faça
         $Soma \leftarrow Soma + A(j, k)^2$ 
    fimpara
     $t \leftarrow A(j, j) - Soma$ 
    se  $t > 0$  então
         $A(j, j) \leftarrow \text{raiz}_2(t); r \leftarrow 1/A(j, j); Det \leftarrow Det * t$ 
    senão
         $CondErro \leftarrow 1$ , escreva “a matriz não é definida positiva”, abandone
    fimse
    para  $i \leftarrow j + 1$  até  $n$  faça
         $Soma \leftarrow 0$ 
        para  $k \leftarrow 1$  até  $j - 1$  faça
             $Soma \leftarrow Soma + A(i, k) * A(j, k)$ 
        fimpara
         $A(i, j) \leftarrow (A(i, j) - Soma) * r$ 
    fimpara
fimpara
fimalgoritmo

```

||⇐

**Exemplo de uso dos algoritmos**

**Exemplo 39** Resolver o sistema do Exemplo 37 usando os algoritmos de decomposição de Cholesky, substituições sucessivas e substituições retroativas.

```
% Os valores de entrada
```

```
n = 4
```

```
A =
```

```
    9  
    6    20  
   -3     2     6  
    3    22     2    28
```

## Resultados dos algoritmos

```
% produzem os resultados pela decomposicao de Cholesky
```

```
A =
```

```
    3
    2    4
   -1    1    2
    1    5   -1    1
```

```
Det = 576
```

```
CondErro = 0
```

```
% vetor de termos independentes
```

```
b =
```

```
    12
    64
     4
    82
```

```
% As substituicoes sucessivas resultam em
```

```
y =
```

```
     4
    14
    -3
     5
```

```
% As substituicoes retroativas produzem
```

```
x =
```

```
     2
    -3
     1
     5
```

**Complexidade da decomposição de Cholesky de matriz de ordem  $n$** 

Operações	Complexidade
adições	$\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$
multiplicações	$\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{2}{3}n$
divisões	$n$
raízes quadradas	$n$

- Desconsiderando as  $n$  multiplicações efetuadas para o cálculo do determinante.
- Operação de potenciação computada como uma multiplicação.

**Fatoração  $LDL^T$** 

- Uma matriz  $A$  simétrica pode ser decomposta, tal que

$$A = LDL^T,$$

- $L$ : matriz triangular inferior unitária ( $l_{jj} = 1, \forall j$ ).
- $D$ : matriz diagonal.



**Fatoração  $LDL^T$** 

- Uma matriz  $A$  simétrica pode ser decomposta, tal que

$$A = LDL^T,$$

- $L$ : matriz triangular inferior unitária ( $l_{jj} = 1, \forall j$ ).
- $D$ : matriz diagonal.
- Matriz  $D$

$$d_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 d_{kk}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

### Fatoração $LDL^T$

- Uma matriz  $A$  simétrica pode ser decomposta, tal que

$$A = LDL^T,$$

- $L$ : matriz triangular inferior unitária ( $l_{jj} = 1, \forall j$ ).
- $D$ : matriz diagonal.
- Matriz  $D$

$$d_{jj} = a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 d_{kk}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (20)$$

- Matriz unitária  $L$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_{kk} l_{jk}}{d_{jj}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{e} \quad i = j+1, j+2, \dots, n. \quad (21)$$

### Solução do sistema $Ax = b$ pela fatoração $LDL^T$

- Seja

$$Ax = b \longrightarrow LDL^T x = b.$$

- Fazendo

$$L^T x = t \text{ e } Dt = y \text{ então } Ly = b.$$

### Solução do sistema $Ax = b$ pela fatoração $LDL^T$

- Seja

$$Ax = b \longrightarrow LDL^T x = b.$$

- Fazendo

$$L^T x = t \text{ e } Dt = y \text{ então } Ly = b.$$

- Sistema  $Ly = b$  resolvido pelas substituições sucessivas.
- Solução do sistema diagonal  $Dt = y$  é  $t_i = y_i/D_{ii}$ .
- Vetor solução  $x$  do sistema  $L^T x = t$  obtido pelas substituições retroativas.

## Cálculo do determinante

- Pelas propriedades dos determinantes

$$\det(A) = \det(L) \det(D) \det(L^T),$$

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n d_{ii}. \quad (22)$$

**Exemplo de fatoraçoão  $LDL^T$** 

**Exemplo 40** Resolver o sistema do Exemplo 38 usando a decomposiçoão de  $LDL^T$  e verificar a exatidão e unicidade da soluçoão

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo de fatoraçoão  $LDL^T$** 

**Exemplo 40** Resolver o sistema do Exemplo 38 usando a decomposição de  $LDL^T$  e verificar a exatidão e unicidade da solução

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

- Pelo uso de (20) e (21)
- Coluna 1:

$$d_{11} = a_{11} = 5, \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{d_{11}} = \frac{-1}{5} = -0,2; \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{d_{11}} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

**Exemplo de fatoraço  $LDL^T$** 

**Exemplo 40** Resolver o sistema do Exemplo 38 usando a decomposiço de  $LDL^T$  e verificar a exatidão e unicidade da soluço

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

- Pelo uso de (20) e (21)

- Coluna 1:

$$d_{11} = a_{11} = 5, \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{d_{11}} = \frac{-1}{5} = -0,2; \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{d_{11}} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

- Coluna 2:

$$d_{22} = a_{22} - l_{21}^2 d_{11} = 8 - (-0,2)^2(5) = 7,8;$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}d_{11}l_{21}}{d_{22}} = \frac{4 - (0,4)(5)(-0,2)}{7,8} = 0,5641.$$



### Exemplo de fatora  o $LDL^T$

**Exemplo 40** Resolver o sistema do Exemplo 38 usando a decomposi  o de  $LDL^T$  e verificar a exatidão e unicidade da soluço

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

- Pelo uso de (20) e (21)

- Coluna 1:

$$d_{11} = a_{11} = 5, \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{d_{11}} = \frac{-1}{5} = -0,2; \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{d_{11}} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

- Coluna 2:

$$d_{22} = a_{22} - l_{21}^2 d_{11} = 8 - (-0,2)^2(5) = 7,8;$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}d_{11}l_{21}}{d_{22}} = \frac{4 - (0,4)(5)(-0,2)}{7,8} = 0,5641.$$

- Coluna 3:

$$d_{33} = a_{33} - (l_{31}^2 d_{11} + l_{32}^2 d_{22}) = 10 - ((0,4)^2(5) + (0,5641)^2(7,8)) = 6,7180.$$

Verificação que  $A = LDL^T$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,2 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5641 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7,8 & 0 \\ 0 & 0 & 6,7180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0,2 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0,5641 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Solução dos sistemas

- Sistema  $Ly = b$  pelas substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,2 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5641 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} \leadsto y = \begin{bmatrix} 21 \\ 14,2 \\ 33,5898 \end{bmatrix}.$$

**Solução dos sistemas**

- Sistema  $Ly = b$  pelas substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,2 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5641 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} \leadsto y = \begin{bmatrix} 21 \\ 14,2 \\ 33,5898 \end{bmatrix}.$$

- Sistema  $Dt = y$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7,8 & 0 \\ 0 & 0 & 6,7180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 14,2 \\ 33,5898 \end{bmatrix} \leadsto t = \begin{bmatrix} 4,2 \\ 1,8205 \\ 5,0000 \end{bmatrix}.$$

**Solução dos sistemas**

- Sistema  $Ly = b$  pelas substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,2 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,5641 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} \rightsquigarrow y = \begin{bmatrix} 21 \\ 14,2 \\ 33,5898 \end{bmatrix}.$$

- Sistema  $Dt = y$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7,8 & 0 \\ 0 & 0 & 6,7180 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 14,2 \\ 33,5898 \end{bmatrix} \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 4,2 \\ 1,8205 \\ 5,0000 \end{bmatrix}.$$

- Sistema  $L^T x = t$  pelas substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,2 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0,5641 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,2 \\ 1,8205 \\ 5,0000 \end{bmatrix} \rightsquigarrow x = \begin{bmatrix} 2,0000 \\ -1,0000 \\ 5,0000 \end{bmatrix}.$$

**Verificação da exatidão e unicidade da solução**

- Vetor resíduo  $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,0000 \\ -1,0000 \\ 5,0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Solução exata com quatro decimais.

**Verificação da exatidão e unicidade da solução**

- Vetor resíduo  $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 21 \\ 10 \\ 50 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,0000 \\ -1,0000 \\ 5,0000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Solução exata com quatro decimais.
- Cálculo do determinante por (22)

$$\det(A) = \prod_{i=1}^3 d_{ii} \approx (5)(7,8)(6,7180) = 262,0020 \neq 0 \longrightarrow \text{solução única.}$$

## Algoritmo: decomposição $LDL^T$

### Algoritmo Decomposição $LDL^T$

```

{ Objetivo: Fazer a decomposição  $LDL^T$  de uma matriz  $A$  }
{
    simétrica e definida positiva }
parâmetros de entrada  $n, A$  { ordem e matriz a ser decomposta }
parâmetros de saída  $A, Det$ 
    { matriz decomposta  $A = L - I + D$  e determinante }
 $Det \leftarrow 1$ 
para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
     $Soma \leftarrow 0$ 
    para  $k \leftarrow 1$  até  $j - 1$  faça
         $Soma \leftarrow Soma + A(j, k)^2 * A(k, k)$ 
    fimpara
     $A(j, j) \leftarrow A(j, j) - Soma$ 
     $r = 1/A(j, j); Det \leftarrow Det * A(j, j)$ 
    para  $i \leftarrow j + 1$  até  $n$  faça
         $Soma \leftarrow 0$ 
        para  $k \leftarrow 1$  até  $j - 1$  faça
             $Soma \leftarrow Soma + A(i, k) * A(k, k) * A(j, k)$ 
        fimpara
         $A(i, j) \leftarrow (A(i, j) - Soma) * r$ 
    fimpara
fimpara
fimalgoritmo

```

||←



## Exemplo de uso do algoritmo

**Exemplo 41** Decompor a matriz do sistema do Exemplo 40 utilizando o algoritmo de decomposição  $LDL^T$ .

```
% Os valores de entrada
n = 3
A =

    5
   -1    8
    2    4   10

% produzem os resultados pela decomposicao LDLt
A =

    5.0000
   -0.2000    7.8000
    0.4000    0.5641    6.7179
Det = 262.0000
```

**Complexidade computacional da decomposição  $LDL^T$** 

Operações	Complexidade
adições	$\frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$
multiplicações	$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{6}n$
divisões	$n$

- Desconsiderando as  $n$  multiplicações efetuadas para o cálculo do determinante.
- Operação de potenciação contada como multiplicação.
- Vantagem da fatoração  $LDL^T$  é evitar o cálculo de raiz quadrada.
- Não deve ser usada em matriz simétrica que não seja definida positiva.
- A decomposição não é estável para essas matrizes.
- Recomendado o uso de outros métodos, como o de Aasen.

## Decomposição espectral

- Seja uma matriz  $A$  de ordem  $n$  com autovalores  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Cada autovalor tem um autovetor correspondente.
- Generalizando a relação  $Av_i = \lambda_i v_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

$$AV = V\Lambda.$$

- $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ : matriz diagonal contendo os autovalores  $\lambda_i$ .
- $V$ : matriz, cujas colunas são os autovetores  $v_i$ .

## Decomposição espectral

- Seja uma matriz  $A$  de ordem  $n$  com autovalores  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- Cada autovalor tem um autovetor correspondente.
- Generalizando a relação  $Av_i = \lambda_i v_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$

$$AV = V\Lambda.$$

- $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ : matriz diagonal contendo os autovalores  $\lambda_i$ .
- $V$ : matriz, cujas colunas são os autovetores  $v_i$ .
- Pós-multiplicando por  $V^{-1}$ ,

$$\boxed{A = V\Lambda V^{-1}}. \quad (23)$$

- Matriz  $A$  decomposta em termos de seus autovalores e autovetores.

### Cálculo dos autovetores

- Relação fundamental  $Av_i = \lambda_i v_i$

$$(A - \lambda_i I)v_i = 0. \quad (24)$$

- Matriz  $(A - \lambda_i I)$  é singular

$$\det(A - \lambda_i I) = 0.$$

- Sistema  $(A - \lambda_i I)v_i = 0$  é homogêneo.
- Ele apresenta infinitas soluções  $v_i$ .
- Atribuir um valor arbitrário a um elemento de  $v_i$ , por exemplo  $v_{i1} = 1$ .
- Obter os demais elementos do autovetor pela solução do sistema resultante de ordem  $n - 1$ .

**Exemplo de decomposição espectral**

**Exemplo 42** Fazer a decomposição espectral da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo de decomposição espectral**

**Exemplo 42** Fazer a decomposição espectral da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Polinômio característico

$$D_3(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \left( \begin{bmatrix} 7-\lambda & 14 & -2 \\ -3 & -10-\lambda & 2 \\ -12 & -28 & 5-\lambda \end{bmatrix} \right).$$

**Exemplo de decomposição espectral**

**Exemplo 42** Fazer a decomposição espectral da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Polinômio característico

$$D_3(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \left( \begin{bmatrix} 7-\lambda & 14 & -2 \\ -3 & -10-\lambda & 2 \\ -12 & -28 & 5-\lambda \end{bmatrix} \right).$$

- Desenvolvendo o determinante:  $D_3(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 11\lambda - 12$ .



**Exemplo de decomposição espectral**

**Exemplo 42** Fazer a decomposição espectral da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Polinômio característico

$$D_3(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \left( \begin{bmatrix} 7-\lambda & 14 & -2 \\ -3 & -10-\lambda & 2 \\ -12 & -28 & 5-\lambda \end{bmatrix} \right).$$

- Desenvolvendo o determinante:  $D_3(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 11\lambda - 12$ .
- Três zeros do polinômio característico:  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 1$  e  $\lambda_3 = -3$ .

**Exemplo de decomposição espectral**

**Exemplo 42** Fazer a decomposição espectral da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Polinômio característico

$$D_3(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \left( \begin{bmatrix} 7-\lambda & 14 & -2 \\ -3 & -10-\lambda & 2 \\ -12 & -28 & 5-\lambda \end{bmatrix} \right).$$

- Desenvolvendo o determinante:  $D_3(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 11\lambda - 12$ .
- Três zeros do polinômio característico:  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 1$  e  $\lambda_3 = -3$ .
- Matriz  $\Lambda$  contendo os autovalores

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Autovetor  $v$  correspondente ao autovalor  $\lambda_1 = 4$

- Resolver o sistema  $(A - \lambda_1 I)v = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & 14 & -2 \\ -3 & -14 & 2 \\ -12 & -28 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Autovetor  $v$  correspondente ao autovalor  $\lambda_1 = 4$** 

- Resolver o sistema  $(A - \lambda_1 I)v = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & 14 & -2 \\ -3 & -14 & 2 \\ -12 & -28 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- As equações 1 e 2 são redundantes.

**Autovetor  $v$  correspondente ao autovalor  $\lambda_1 = 4$** 

- Resolver o sistema  $(A - \lambda_1 I)v = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & 14 & -2 \\ -3 & -14 & 2 \\ -12 & -28 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- As equações 1 e 2 são redundantes.
- Elimina-se a segunda e faz-se  $v_1 = 1$ .

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -28 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix} \rightarrow v_2 = -0,5 \text{ e } v_3 = -2 \rightarrow$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Autovetor  $w$  correspondente ao autovalor  $\lambda_2 = 1$

- Resolver o sistema  $(A - \lambda_2 I)w = 0$

$$\begin{bmatrix} 6 & 14 & -2 \\ -3 & -11 & 2 \\ -12 & -28 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Autovetor  $w$  correspondente ao autovalor  $\lambda_2 = 1$** 

- Resolver o sistema  $(A - \lambda_2 I)w = 0$

$$\begin{bmatrix} 6 & 14 & -2 \\ -3 & -11 & 2 \\ -12 & -28 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- As equações 1 e 3 são redundantes.

**Autovetor  $w$  correspondente ao autovalor  $\lambda_2 = 1$** 

- Resolver o sistema  $(A - \lambda_2 I)w = 0$

$$\begin{bmatrix} 6 & 14 & -2 \\ -3 & -11 & 2 \\ -12 & -28 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- As equações 1 e 3 são redundantes.
- Elimina-se a terceira e faz-se  $w_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -11 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow w_2 = -1 \text{ e } w_3 = -4 \rightarrow$$

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$



Autovetor  $z$  correspondente ao autovalor  $\lambda_3 = -3$

- Resolver o sistema  $(A - \lambda_3 I)z = 0$

$$\begin{bmatrix} 10 & 14 & -2 \\ -3 & -7 & 2 \\ -12 & -28 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Autovetor  $z$  correspondente ao autovalor  $\lambda_3 = -3$**

- Resolver o sistema  $(A - \lambda_3 I)z = 0$

$$\begin{bmatrix} 10 & 14 & -2 \\ -3 & -7 & 2 \\ -12 & -28 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- As equações 2 e 3 são redundantes.

**Autovetor  $z$  correspondente ao autovalor  $\lambda_3 = -3$** 

- Resolver o sistema  $(A - \lambda_3 I)z = 0$

$$\begin{bmatrix} 10 & 14 & -2 \\ -3 & -7 & 2 \\ -12 & -28 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- As equações 2 e 3 são redundantes.
- Elimina-se a terceira e faz-se  $z_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow z_2 = -1 \text{ e } z_3 = -2 \rightarrow$$
$$z = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

## Decomposição espectral de $A$

- Matriz  $V$  contendo os autovetores de  $A$

$$V = [v \ w \ z] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0,5 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

## Decomposição espectral de $A$

- Matriz  $V$  contendo os autovetores de  $A$

$$V = [v \ w \ z] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0,5 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

- Inversa de  $V$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -0,5 \\ 0 & -2 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

## Decomposição espectral de $A$

- Matriz  $V$  contendo os autovetores de  $A$

$$V = [v \ w \ z] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0,5 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

- Inversa de  $V$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -0,5 \\ 0 & -2 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

- Decomposição espectral  $A = V\Lambda V^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0,5 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -0,5 \\ 0 & -2 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

### Solução de sistema linear

- Solução do sistema  $Ax = b$  obtida por  $x = A^{-1}b$ .
- Por (23)

$$x = (V\Lambda V^{-1})^{-1}b \rightsquigarrow \boxed{x = (V\Lambda^{-1}V^{-1})b}. \quad (25)$$

- Vetor solução  $x$  depende dos recíprocos dos autovalores  $\lambda_i$ .
- Quase singularidade de  $A \implies x$  tenha elementos muito grandes.

**Exemplo de solução de sistema via decomposição espectral**

**Exemplo 43** Calcular a solução do sistema abaixo, o qual envolve a matriz dos coeficientes do Exemplo 42

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 29 \end{bmatrix}.$$



### Exemplo de solução de sistema via decomposição espectral

**Exemplo 43** Calcular a solução do sistema abaixo, o qual envolve a matriz dos coeficientes do Exemplo 42

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

- Por (25) e utilizando os resultados do Exemplo 42

$$x = (V\Lambda^{-1}V^{-1})b$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0,5 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -0,5 \\ 0 & -2 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 29 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

**Verificação da exatidão**

- Solução exata

$$r = \begin{bmatrix} -10 \\ 14 \\ 29 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 14 & -2 \\ -3 & -10 & 2 \\ -12 & -28 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Grande custo computacional.
- Normalmente, não é utilizada para a solução de sistemas de equações lineares.

## Uso da decomposição

- Resolver sistemas de equações lineares.
- Calcular o determinante de uma matriz.
- Refinar a solução de sistema.
- Calcular a matriz inversa.

### Refinamento da solução

- Seja  $x^0$  uma solução aproximada de  $Ax = b$  calculada via decomposição  $LU$  com pivotação parcial

$$LUx^0 = Pb \longrightarrow Lt = Pb \text{ e } Ux^0 = t.$$

- Fatores  $L$  e  $U$  perdem exatidão devido aos erros de arredondamento.

### Refinamento da solução

- Seja  $x^0$  uma solução aproximada de  $Ax = b$  calculada via decomposição  $LU$  com pivotação parcial

$$LUx^0 = Pb \longrightarrow Lt = Pb \text{ e } Ux^0 = t.$$

- Fatores  $L$  e  $U$  perdem exatidão devido aos erros de arredondamento.
- Solução melhorada  $x^1 = x^0 + c^0$ .
- $c^0$ : vetor de correção

$$Ax^1 = b \longrightarrow A(x^0 + c^0) = b \longrightarrow Ac^0 = b - Ax^0 \rightsquigarrow Ac^0 = r^0.$$

- Correção  $c^0$ : solução do sistema  $Ac^0 = r^0$  dada por

$$LUc^0 = Pr^0 \longrightarrow Lt = Pr^0 \text{ e } Uc^0 = t.$$

### Refinamento da solução

- Seja  $x^0$  uma solução aproximada de  $Ax = b$  calculada via decomposição  $LU$  com pivotação parcial

$$LUx^0 = Pb \longrightarrow Lt = Pb \text{ e } Ux^0 = t.$$

- Fatores  $L$  e  $U$  perdem exatidão devido aos erros de arredondamento.
- Solução melhorada  $x^1 = x^0 + c^0$ .
- $c^0$ : vetor de correção

$$Ax^1 = b \longrightarrow A(x^0 + c^0) = b \longrightarrow Ac^0 = b - Ax^0 \rightsquigarrow Ac^0 = r^0.$$

- Correção  $c^0$ : solução do sistema  $Ac^0 = r^0$  dada por

$$LUc^0 = Pr^0 \longrightarrow Lt = Pr^0 \text{ e } Uc^0 = t.$$

- Melhor aproximação  $x^2 = x^1 + c^1$ .
- $c^1$ : solução de  $Ac^1 = r^1$  obtida por  $LUc^1 = Pr^1 \longrightarrow Lt = Pr^1 \text{ e } Uc^1 = t$ .

### Esquema do refinamento de solução

$$\left. \begin{array}{l} LUx^0 = Pb \longrightarrow Lt = Pb \text{ e } Ux^0 = t, \\ r^k = b - Ax^k \\ LUc^k = Pr^k \longrightarrow Lt = Pr^k \text{ e } Uc^k = t \\ x^{k+1} = x^k + c^k \end{array} \right\} k = 0, 1, 2, \dots$$

- Processo repete até que um critério de parada seja satisfeito.
- Outras decomposições podem ser usadas para o refinamento da solução.

**Exemplo de refinamento de solução**

**Exemplo 44** Resolver o sistema abaixo e refinar a solução até que  $\|c\|_\infty < 10^{-3}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$



**Exemplo de refinamento de solução**

**Exemplo 44** Resolver o sistema abaixo e refinar a solução até que  $\|c\|_\infty < 10^{-3}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

- Decomposição  $LU$  com pivotação parcial

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,67 & 1 & 0 \\ -0,33 & 0,42 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 0 & 6,33 & 3 \\ 0 & 0 & 2,74 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo de refinamento de solução**

**Exemplo 44** Resolver o sistema abaixo e refinar a solução até que  $\|c\|_\infty < 10^{-3}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

- Decomposição  $LU$  com pivotação parcial

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,67 & 1 & 0 \\ -0,33 & 0,42 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 0 & 6,33 & 3 \\ 0 & 0 & 2,74 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Cálculo de  $x^0$

$$Ax^0 = b \longrightarrow LUx^0 = Pb,$$
$$Lt = Pb \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 19 \\ 8,73 \\ 13,6034 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Ux^0 = t \rightsquigarrow x^0 = \begin{bmatrix} 1,9731 \\ -0,9738 \\ 4,9647 \end{bmatrix}.$$

**Refinamento do vetor  $x$** 

$$x^0 = \begin{bmatrix} 1,9731 \\ -0,9738 \\ 4,9647 \end{bmatrix}$$
$$r^0 = b - Ax^0 = \begin{bmatrix} -0,0601 \\ 0 \\ 0,0712 \end{bmatrix}, \quad LUc^0 = Pr^0 \rightsquigarrow c^0 = \begin{bmatrix} 0,0268 \\ -0,0262 \\ 0,0352 \end{bmatrix},$$

**Refinamento do vetor  $x$** 

$$x^0 = \begin{bmatrix} 1,9731 \\ -0,9738 \\ 4,9647 \end{bmatrix}$$
$$r^0 = b - Ax^0 = \begin{bmatrix} -0,0601 \\ 0 \\ 0,0712 \end{bmatrix}, \quad LUc^0 = Pr^0 \rightsquigarrow c^0 = \begin{bmatrix} 0,0268 \\ -0,0262 \\ 0,0352 \end{bmatrix},$$

$$x^1 = x^0 + c^0 = \begin{bmatrix} 1,9999 \\ -1,0000 \\ 4,9999 \end{bmatrix},$$

$$r^1 = b - Ax^1 = \begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0 \\ 0,0002 \end{bmatrix}, \quad LUc^1 = Pr^1 \rightsquigarrow c^1 = \begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0,0000 \\ 0,0001 \end{bmatrix},$$

## Refinamento do vetor $x$

$$x^0 = \begin{bmatrix} 1,9731 \\ -0,9738 \\ 4,9647 \end{bmatrix}$$

$$r^0 = b - Ax^0 = \begin{bmatrix} -0,0601 \\ 0 \\ 0,0712 \end{bmatrix}, \quad LUC^0 = Pr^0 \rightsquigarrow c^0 = \begin{bmatrix} 0,0268 \\ -0,0262 \\ 0,0352 \end{bmatrix},$$

$$x^1 = x^0 + c^0 = \begin{bmatrix} 1,9999 \\ -1,0000 \\ 4,9999 \end{bmatrix},$$

$$r^1 = b - Ax^1 = \begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0 \\ 0,0002 \end{bmatrix}, \quad LUC^1 = Pr^1 \rightsquigarrow c^1 = \begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0,0000 \\ 0,0001 \end{bmatrix},$$

$$x^2 = x^1 + c^1 = \begin{bmatrix} 2,0000 \\ -1,0000 \\ 5,0000 \end{bmatrix}.$$

- Refinamento interrompido:  $\|c^1\|_\infty = 0,0001 < 10^{-3}$ .

## Cálculo da matriz inversa

- Matriz inversa:  $AA^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- $V = A^{-1}$ : usado para simplificar a notação.

## Cálculo da matriz inversa

- Matriz inversa:  $AA^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- $V = A^{-1}$ : usado para simplificar a notação.
- Cálculo de  $V$  pela solução de  $n$  sistemas

$$Av_i = e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

- $v_i$ :  $i$ -ésima coluna da matriz inversa e
- $e_i$ :  $i$ -ésima coluna da matriz identidade.
- Fazer uma decomposição de  $A$ .
- Calcular os  $n$  vetores  $v_i$  que compõem a inversa via substituições sucessivas e retroativas.

**Exemplo de cálculo da inversa**

**Exemplo 45** Calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -5 \\ 2 & -5 & 30 \end{bmatrix}.$$



**Exemplo de cálculo da inversa**

**Exemplo 45** Calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -5 \\ 2 & -5 & 30 \end{bmatrix}.$$

- Matriz  $A$  simétrica.
- Decomposição de Cholesky

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

**Cálculo das colunas da matriz inversa**

- Coluna 1:  $Av_1 = e_1$

$$LL^T v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow Lt = e_1 \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \text{ e } L^T v_1 = t \rightsquigarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2,75 \\ 1,70 \\ 0,10 \end{bmatrix}.$$

**Cálculo das colunas da matriz inversa**

- Coluna 1:  $Av_1 = e_1$

$$LL^T v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow Lt = e_1 \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \text{ e } L^T v_1 = t \rightsquigarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2,75 \\ 1,70 \\ 0,10 \end{bmatrix}.$$

- Coluna 2:  $Av_2 = e_2$

$$LL^T v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow Lt = e_2 \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,4 \end{bmatrix} \text{ e } L^T v_2 = t \rightsquigarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1,70 \\ 1,16 \\ 0,08 \end{bmatrix}.$$

**Cálculo das colunas da matriz inversa**

- Coluna 1:  $Av_1 = e_1$

$$LL^T v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow Lt = e_1 \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1,5 \\ 0,5 \end{bmatrix} \text{ e } L^T v_1 = t \rightsquigarrow v_1 = \begin{bmatrix} 2,75 \\ 1,70 \\ 0,10 \end{bmatrix}.$$

- Coluna 2:  $Av_2 = e_2$

$$LL^T v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow Lt = e_2 \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0,4 \end{bmatrix} \text{ e } L^T v_2 = t \rightsquigarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1,70 \\ 1,16 \\ 0,08 \end{bmatrix}.$$

- Coluna 3:  $Av_3 = e_3$

$$LL^T v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow Lt = e_3 \rightsquigarrow t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,2 \end{bmatrix} \text{ e } L^T v_3 = t \rightsquigarrow v_3 = \begin{bmatrix} 0,10 \\ 0,08 \\ 0,04 \end{bmatrix}.$$

**Matriz inversa**

- $A^{-1} = V = [v_1 \ v_2 \ v_3]$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2,75 & 1,70 & 0,10 \\ 1,70 & 1,16 & 0,08 \\ 0,10 & 0,08 & 0,04 \end{bmatrix}.$$

**Matriz inversa**

- $A^{-1} = V = [v_1 \ v_2 \ v_3]$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2,75 & 1,70 & 0,10 \\ 1,70 & 1,16 & 0,08 \\ 0,10 & 0,08 & 0,04 \end{bmatrix}.$$

- Verificação da relação  $AA^{-1} = I$

$$\begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 10 & -5 \\ 2 & -5 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,75 & 1,70 & 0,10 \\ 1,70 & 1,16 & 0,08 \\ 0,10 & 0,08 & 0,04 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## Métodos iterativos estacionários

- Gerar, a partir de  $x^0$ , uma seqüência de vetores
$$\{x^1, x^2, x^3, \dots, x^k, \dots\} \longrightarrow x.$$
- Uma mesma série de operações é repetida várias vezes.

## Métodos iterativos estacionários

- Gerar, a partir de  $x^0$ , uma seqüência de vetores

$$\{x^1, x^2, x^3, \dots, x^k, \dots\} \longrightarrow x.$$

- Uma mesma série de operações é repetida várias vezes.
- Existem várias classes de métodos iterativos.
- Seja  $M$  a matriz de iteração e  $c$  um vetor constante.

$$x^{k+1} = Mx^k + c. \tag{26}$$

- Método iterativo é dito estacionário quando a matriz  $M$  for fixa.



## Métodos iterativos estacionários

- Gerar, a partir de  $x^0$ , uma seqüência de vetores

$$\{x^1, x^2, x^3, \dots, x^k, \dots\} \longrightarrow x.$$

- Uma mesma série de operações é repetida várias vezes.
- Existem várias classes de métodos iterativos.
- Seja  $M$  a matriz de iteração e  $c$  um vetor constante.

$$x^{k+1} = Mx^k + c. \quad (27)$$

- Método iterativo é dito estacionário quando a matriz  $M$  for fixa.
- Métodos iterativos estacionários: Jacobi, Gauss-Seidel e sobre-relaxação sucessiva.

**Condição de convergência**

**Teorema 3 (Condição necessária)** *O método iterativo (27) converge com qualquer valor inicial  $x^0$  se, e somente se,  $\rho(M) < 1$ , sendo  $\rho(M)$  o raio espectral (maior autovalor em módulo) da matriz de iteração  $M$ .*

**Condição de convergência**

**Teorema 3 (Condição necessária)** *O método iterativo (27) converge com qualquer valor inicial  $x^0$  se, e somente se,  $\rho(M) < 1$ , sendo  $\rho(M)$  o raio espectral (maior autovalor em módulo) da matriz de iteração  $M$ .*

**Teorema 4 (Condição suficiente)** *É condição suficiente para a convergência dos métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel que a matriz dos coeficientes  $A$  seja diagonal estritamente dominante, ou seja,*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (28)$$

**Condição de convergência**

**Teorema 3 (Condição necessária)** *O método iterativo (27) converge com qualquer valor inicial  $x^0$  se, e somente se,  $\rho(M) < 1$ , sendo  $\rho(M)$  o raio espectral (maior autovalor em módulo) da matriz de iteração  $M$ .*

**Teorema 4 (Condição suficiente)** *É condição suficiente para a convergência dos métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel que a matriz dos coeficientes  $A$  seja diagonal estritamente dominante, ou seja,*

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (29)$$

- A convergência não depende da escolha do vetor inicial  $x^0$ .

### Critério de parada

- A cada passo do método iterativo a solução é obtida com exatidão crescente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x.$$

**Critério de parada**

- A cada passo do método iterativo a solução é obtida com exatidão crescente

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x.$$

- Processo deve ser interrompido quando algum critério de parada for satisfeito

$$\frac{||x^k - x^{k-1}||}{||x^k||} \leq \varepsilon \quad \text{ou} \quad (30)$$

$$k \geq k_{\max}, \quad (31)$$

- $\varepsilon$ : tolerância e
- $k_{\max}$ : número máximo de iterações.

**Critério de parada adotado**

- Com norma- $\infty$

$$\frac{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^{k-1}|}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k|} \leq \varepsilon,$$

- $x_i^k$ :  $i$ -ésimo componente do vetor  $x^k$  obtido na  $k$ -ésima iteração.

### Critério de parada adotado

- Com norma- $\infty$

$$\frac{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^{k-1}|}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k|} \leq \varepsilon,$$

- $x_i^k$ :  $i$ -ésimo componente do vetor  $x^k$  obtido na  $k$ -ésima iteração.
- A tolerância  $\varepsilon$  define com qual exatidão a solução é calculada.
- Em aritmética de ponto flutuante a exatidão não pode ser tão grande quanto se queira.
- Ela é limitada de acordo com o número de *bytes* das variáveis do programa.



**Método de Jacobi**

- Decompor a matriz  $A$  de modo que

$$A = D + E + F,$$

- $D$  é uma matriz diagonal e  $E$  e  $F$  são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com diagonais nulas.

**Método de Jacobi**

- Decompor a matriz  $A$  de modo que

$$A = D + E + F,$$

- $D$  é uma matriz diagonal e  $E$  e  $F$  são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com diagonais nulas.
- O sistema  $Ax = b$  escrito na forma

$$(D + E + F)x = b \longrightarrow Dx = -(E + F)x + b.$$

**Método de Jacobi**

- Decompor a matriz  $A$  de modo que

$$A = D + E + F,$$

- $D$  é uma matriz diagonal e  $E$  e  $F$  são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com diagonais nulas.
- O sistema  $Ax = b$  escrito na forma

$$(D + E + F)x = b \longrightarrow Dx = -(E + F)x + b.$$

- Igualdade convertida em um processo iterativo

$$x^{k+1} = \left( -D^{-1}(E + F) \right) x^k + D^{-1}b \longrightarrow x^{k+1} = Jx^k + c, \quad (32)$$

- Matriz de iteração do método de Jacobi  $J = -D^{-1}(E + F)$ .

## Forma análoga de dedução do método de Jacobi

- Sistema de equações lineares na forma

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \text{ .} \\ \vdots & & \vdots \text{ } \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

## Forma análoga de dedução do método de Jacobi

- Sistema de equações lineares na forma

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n & = & b_3 \quad . \\ \vdots & & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

- Explicitar  $x_i$  na  $i$ -ésima equação.
- Equações de iterações do método de Jacobi

$$\left. \begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}} \left( -a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k + b_1 \right), \\ x_2^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}} \left( -a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k + b_2 \right), \\ x_3^{k+1} &= \frac{1}{a_{33}} \left( -a_{31}x_1^k - a_{32}x_2^k - \cdots - a_{3n}x_n^k + b_3 \right), \\ &\vdots \\ x_n^{k+1} &= \frac{1}{a_{nn}} \left( -a_{n1}x_1^k - a_{n2}x_2^k - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^k + b_n \right), \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Forma de recorrência  $x^{k+1} = Jx^k + c$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} \end{bmatrix}}_{x^{k+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix}}_{x^k} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}}_c.$$

- Convergência independe do valor inicial  $x^0$ .
- Vetor inicial

$$x_i^0 = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

(34)

## Algoritmo: método iterativo de Jacobi

### Algoritmo Jacobi

```

{ Objetivo: Resolver o sistema  $Ax = b$  pelo método iterativo de Jacobi }
parâmetros de entrada  $n, A, b, Toler, IterMax$ 
  { ordem, matriz, vetor independente, tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída  $x, Iter, CondErro$ 
  { vetor solução, número de iterações e condição de erro }
  { construção das matrizes para as iterações }
para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
   $r \leftarrow 1/A(i, i)$ 
  para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
    se  $i \neq j$  então  $A(i, j) \leftarrow A(i, j) * r$ , fimse
  fimpara;  $b(i) \leftarrow b(i) * r$ ;  $x(i) \leftarrow b(i)$ 
fimpara;  $Iter \leftarrow 0$ 
{ iterações de Jacobi }
repita
   $Iter \leftarrow Iter + 1$ 
  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
     $Soma \leftarrow 0$ 
    para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
      se  $i \neq j$  então  $Soma \leftarrow Soma + A(i, j) * x(j)$ , fimse
    fimpara;  $v(i) \leftarrow b(i) - Soma$ 
  fimpara
   $NormaNum \leftarrow 0$ ;  $NormaDen \leftarrow 0$ 
  para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
     $t \leftarrow \text{abs}(v(i) - x(i))$ 
    se  $t > NormaNum$  então  $NormaNum \leftarrow t$ , fimse
    se  $\text{abs}(v(i)) > NormaDen$  então  $NormaDen \leftarrow \text{abs}(v(i))$ , fimse;  $x(i) \leftarrow v(i)$ 
  fimpara
   $NormaRel \leftarrow NormaNum / NormaDen$ ; escreva  $Iter, x, NormaRel$ 
  { teste de convergência }
  se  $NormaRel \leq Toler$  ou  $Iter \geq IterMax$  então interrompa, fimse
fimrepita
se  $NormaRel \leq Toler$  então  $CondErro \leftarrow 0$ , senão  $CondErro \leftarrow 1$ 
fimse
fimalgoritmo

```

**Complexidade computacional**

Operações	Complexidade
adições	$kn^2 + kn + k$
multiplicações	$(k + 1)n^2 - kn$
divisões	$n + k$

- Complexidade de Jacobi usando  $k$  iterações em sistema de ordem  $n > 1$ .



**Exemplo do método de Jacobi**

**Exemplo 46** Resolver o sistema de equações pelo método de Jacobi com  $\varepsilon < 10^{-5}$  e  $k_{\max} = 50$  usando os critérios (30) e (31)

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo do método de Jacobi**

**Exemplo 46** Resolver o sistema de equações pelo método de Jacobi com  $\varepsilon < 10^{-5}$  e  $k_{\max} = 50$  usando os critérios (30) e (31)

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

- Matriz dos coeficientes diagonal estritamente dominante

$$|10| > |3| + |-2|, \quad |8| > |2| + |-1| \quad \text{e} \quad |5| > |1| + |1|.$$

**Exemplo do método de Jacobi**

**Exemplo 46** Resolver o sistema de equações pelo método de Jacobi com  $\varepsilon < 10^{-5}$  e  $k_{\max} = 50$  usando os critérios (30) e (31)

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

- Matriz dos coeficientes diagonal estritamente dominante

$$|10| > |3| + |-2|, \quad |8| > |2| + |-1| \quad \text{e} \quad |5| > |1| + |1|.$$

- Equações de iterações

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{10} \left( -3x_2^k + 2x_3^k + 57 \right), \\ x_2^{k+1} &= \frac{1}{8} \left( -2x_1^k + x_3^k + 20 \right) \quad \text{e} \\ x_3^{k+1} &= \frac{1}{5} \left( -x_1^k - x_2^k - 4 \right). \end{aligned}$$

**Exemplo do método de Jacobi**

**Exemplo 46** Resolver o sistema de equações pelo método de Jacobi com  $\varepsilon < 10^{-5}$  e  $k_{\max} = 50$  usando os critérios (30) e (31)

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

- Matriz dos coeficientes diagonal estritamente dominante

$$|10| > |3| + |-2|, \quad |8| > |2| + |-1| \quad \text{e} \quad |5| > |1| + |1|.$$

- Equações de iterações

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{10} \left( -3x_2^k + 2x_3^k + 57 \right), \\ x_2^{k+1} &= \frac{1}{8} \left( -2x_1^k + x_3^k + 20 \right) \quad \text{e} \\ x_3^{k+1} &= \frac{1}{5} \left( -x_1^k - x_2^k - 4 \right). \end{aligned}$$

- Vetor inicial  $x^0 = [5,7 \quad 2,5 \quad -0,8]^T$ .

**Coordenadas do vetor da primeira iteração**

$$x_1^1 = \frac{1}{10} (-3x_2^0 + 2x_3^0 + 57) = \frac{1}{10} (-3(2,5) + 2(-0,8) + 57) \leadsto x_1^1 = 4,79,$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8} (-2x_1^0 + x_3^0 + 20) = \frac{1}{8} (-2(5,7) + (-0,8) + 20) \leadsto x_2^1 = 0,975 \text{ e}$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5} (-x_1^0 - x_2^0 - 4) = \frac{1}{5} (-(5,7) - (2,5) - 4) \leadsto x_3^1 = -2,44.$$

**Coordenadas do vetor da primeira iteração**

$$x_1^1 = \frac{1}{10} (-3x_2^0 + 2x_3^0 + 57) = \frac{1}{10} (-3(2,5) + 2(-0,8) + 57) \leadsto x_1^1 = 4,79,$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8} (-2x_1^0 + x_3^0 + 20) = \frac{1}{8} (-2(5,7) + (-0,8) + 20) \leadsto x_2^1 = 0,975 \text{ e}$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5} (-x_1^0 - x_2^0 - 4) = \frac{1}{5} (-(5,7) - (2,5) - 4) \leadsto x_3^1 = -2,44.$$

- Vetor da primeira iteração:  $x^1 = [4,79 \ 0,975 \ -2,44]^T$ .

**Coordenadas do vetor da primeira iteração**

$$x_1^1 = \frac{1}{10} (-3x_2^0 + 2x_3^0 + 57) = \frac{1}{10} (-3(2,5) + 2(-0,8) + 57) \leadsto x_1^1 = 4,79,$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8} (-2x_1^0 + x_3^0 + 20) = \frac{1}{8} (-2(5,7) + (-0,8) + 20) \leadsto x_2^1 = 0,975 \text{ e}$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5} (-x_1^0 - x_2^0 - 4) = \frac{1}{5} (-(5,7) - (2,5) - 4) \leadsto x_3^1 = -2,44.$$

• Vetor da primeira iteração:  $x^1 = [4,79 \ 0,975 \ -2,44]^T$ .

• Critério de parada

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(|4,79 - 5,7|, |0,975 - 2,5|, |-2,44 - (-0,8)|)}{\max(|4,79|, |0,975|, |-2,44|)},$$

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(0,91; 1,525; 1,64)}{\max(4,79; 0,975; 2,44)} = 0,3424.$$

## Resultados gerados pelo algoritmo

```
% Os valores de entrada
```

```
n = 3
```

```
A =
```

```
    10     3    -2
     2     8    -1
     1     1     5
```

```
b =
```

```
    57
    20
    -4
```

```
Toler = 1.0000e-05
```

```
IterMax = 50
```

```
% produzem os resultados
```

```
Solucao de sistema linear pelo metodo de Jacobi
```

Iter	x1	x2	x3	NormaRelativa
0	5.70000	2.50000	-0.80000	
1	4.79000	0.97500	-2.44000	3.42380e-01
2	4.91950	0.99750	-1.95300	9.89938e-02
3	5.01015	1.02600	-1.98340	1.80933e-02
4	4.99552	0.99954	-2.00723	5.29725e-03
5	4.99869	1.00022	-1.99901	1.64413e-03
6	5.00013	1.00045	-1.99978	2.88007e-04
7	4.99991	0.99999	-2.00012	9.12629e-05
8	4.99998	1.00001	-1.99998	2.72243e-05
9	5.00000	1.00001	-2.00000	4.59167e-06

```
Solucao = 5.00000 1.00001 -2.00000
```

```
Iter = 9
```

```
CondErro = 0
```

- Vetor solução

$$x \approx x^9 = [5,00000 \quad 1,00001 \quad -2,00000]^T.$$



**Exemplo do método de Jacobi**

**Exemplo 47** Calcular três aproximações do vetor solução do sistema do Exemplo 46 utilizando a formulação (32):

$$x^{k+1} = -D^{-1}(E + F)x^k + D^{-1}b = Jx^k + c.$$

**Exemplo do método de Jacobi**

**Exemplo 47** Calcular três aproximações do vetor solução do sistema do Exemplo 46 utilizando a formulação (32):

$$x^{k+1} = -D^{-1}(E + F)x^k + D^{-1}b = Jx^k + c.$$

- Decompondo  $A = D + E + F$

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### Exemplo do método de Jacobi

**Exemplo 47** Calcular três aproximações do vetor solução do sistema do Exemplo 46 utilizando a formulação (32):

$$x^{k+1} = -D^{-1}(E + F)x^k + D^{-1}b = Jx^k + c.$$

- Decompondo  $A = D + E + F$

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Matriz  $J$  e vetores  $c$  e  $x^0$

$$J = -D^{-1}(E + F) = \begin{bmatrix} 0 & -0,3 & 0,2 \\ -0,25 & 0 & 0,125 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$c = D^{-1}b = x^0 = [5,7 \quad 2,5 \quad -0,8]^T.$$

## Primeiras aproximações da solução

- Por (32)

$k$	$x_1^k$	$x_2^k$	$x_3^k$
0	5,70000	2,50000	−0,80000
1	4,79000	0,97500	−2,44000
2	4,91950	0,99750	−1,95300
3	5,01015	1,02600	−1,98340

**Exemplo do método de Jacobi**

**Exemplo 48** Resolver o sistema pelo método de Jacobi com  $\varepsilon < 10^{-3}$  e  $k_{\max} = 50$  usando os critérios (30) e (31)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo do método de Jacobi**

**Exemplo 48** Resolver o sistema pelo método de Jacobi com  $\varepsilon < 10^{-3}$  e  $k_{\max} = 50$  usando os critérios (30) e (31)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Matriz dos coeficientes diagonalmente dominante

$$|5| > |2| + |0| + |-1|, |8| > |1| + |-3| + |2|,$$

$$|6| > |0| + |1| + |1| \text{ e } |9| > |1| + |-1| + |2|.$$

## Equações de iterações

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{5} \left( -2x_2^k + x_4^k + 6 \right),$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{8} \left( -x_1^k + 3x_3^k - 2x_4^k + 10 \right),$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{6} \left( -x_2^k - x_4^k - 5 \right) \text{ e}$$

$$x_4^{k+1} = \frac{1}{9} \left( -x_1^k + x_2^k - 2x_3^k \right).$$

- Vetor inicial:  $x^0 = [1,2 \quad 1,25 \quad -0,8333 \quad 0]^T$ .

## Coordenadas do vetor da primeira iteração

- Pelas equações de iterações

$$x_1^1 = \frac{1}{5} (-2x_2^0 + x_4^0 + 6) = \frac{1}{5} (-2(1,25) + (0) + 6) = 0,7;$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8} (-x_1^0 + 3x_3^0 - 2x_4^0 + 10) = \frac{1}{8} (-(1,2) + 3(-0,8333) - 2(0) + 10) = 0,7875;$$

$$x_3^1 = \frac{1}{6} (-x_2^0 - x_4^0 - 5) = \frac{1}{6} (-(1,25) - (0) - 5) = -1,0417;$$

$$x_4^1 = \frac{1}{9} (-x_1^0 + x_2^0 - 2x_3^0) = \frac{1}{9} (-(1,2) + (1,25) - 2(-0,8333)) = 0,1907.$$

- Vetor da primeira iteração:  $x^1 = [0,7 \ 0,7875 \ -1,0417 \ 0,1907]^T$ .



## Coordenadas do vetor da primeira iteração

- Pelas equações de iterações

$$x_1^1 = \frac{1}{5} (-2x_2^0 + x_4^0 + 6) = \frac{1}{5} (-2(1,25) + (0) + 6) = 0,7;$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8} (-x_1^0 + 3x_3^0 - 2x_4^0 + 10) = \frac{1}{8} (-(1,2) + 3(-0,8333) - 2(0) + 10) = 0,7875;$$

$$x_3^1 = \frac{1}{6} (-x_2^0 - x_4^0 - 5) = \frac{1}{6} (-(1,25) - (0) - 5) = -1,0417;$$

$$x_4^1 = \frac{1}{9} (-x_1^0 + x_2^0 - 2x_3^0) = \frac{1}{9} (-(1,2) + (1,25) - 2(-0,8333)) = 0,1907.$$

- Vetor da primeira iteração:  $x^1 = [0,7 \ 0,7875 \ -1,0417 \ 0,1907]^T$ .

- Critério de parada

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(|0,7 - 1,2|, |0,7875 - 1,25|, |-1,0417 - (-0,8333)|, |0,1907 - 0|)}{\max(|0,7|, |0,7875|, |-1,0417|, |0,1907|)},$$

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(0,5; 0,4625; 0,2084; 0,1907)}{\max(0,7; 0,7875; 1,0417; 0,1907)} = 0,4800.$$

## Resultados gerados pelo algoritmo

```
% Os valores de entrada
n = 4
A =
    5     2     0    -1
    1     8    -3     2
    0     1     6     1
    1    -1     2     9
b =
     6
    10
    -5
     0
Toler = 1.0000e-03
IterMax = 50
% produzem os resultados
  Solucao de sistema linear pelo metodo de Jacobi
Iter      x1      x2      x3      x4      NormaRelativa
  0      1.20000    1.25000   -0.83333    0.00000
  1      0.70000    0.78750   -1.04167    0.19074    4.80000e-01
  2      0.92315    0.72419   -0.99637    0.24120    2.23960e-01
  3      0.95856    0.70067   -0.99423    0.19931    4.21369e-02
  4      0.95960    0.70751   -0.98333    0.19229    1.10879e-02
  5      0.95545    0.71323   -0.98330    0.19051    5.81305e-03
  6      0.95281    0.71420   -0.98396    0.19160    2.68474e-03
  7      0.95264    0.71402   -0.98430    0.19215    5.56291e-04

Solucao =    0.95264    0.71402   -0.98430    0.19215
Iter      = 7
CondErro = 0
```

- Vetor solução:  $x \approx x^7 = [0,95264 \ 0,71402 \ -0,98430 \ 0,19215]^T$ .

## Método de Gauss-Seidel

- Decompor a matriz  $A$  tal que

$$A = D + E + F,$$

- $D$  é uma matriz diagonal e  $E$  e  $F$  são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com diagonais nulas.

## Método de Gauss-Seidel

- Decompor a matriz  $A$  tal que

$$A = D + E + F,$$

- $D$  é uma matriz diagonal e  $E$  e  $F$  são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com diagonais nulas.
- Sistema linear  $Ax = b$  escrito na forma

$$(D + E + F)x = b \longrightarrow (D + E)x = -Fx + b.$$

**Método de Gauss-Seidel**

- Decompor a matriz  $A$  tal que

$$A = D + E + F,$$

- $D$  é uma matriz diagonal e  $E$  e  $F$  são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com diagonais nulas.
- Sistema linear  $Ax = b$  escrito na forma

$$(D + E + F)x = b \longrightarrow (D + E)x = -Fx + b.$$

- Forma de iteração obtida pela recorrência

$$x^{k+1} = \left( -(D + E)^{-1}F \right) x^k + (D + E)^{-1}b \longrightarrow x^{k+1} = Sx^k + d. \quad (35)$$

- Matriz de iteração do método de Gauss-Seidel:  $S = -(D + E)^{-1}F$ .

## Forma alternativa de dedução do método de Gauss-Seidel

- Seja

$$(D + E + F)x = b \longrightarrow (D + E)x = -Fx + b.$$

## Forma alternativa de dedução do método de Gauss-Seidel

- Seja

$$(D + E + F)x = b \longrightarrow (D + E)x = -Fx + b.$$

- Na forma de recorrência

$$(D + E)x^{k+1} = -Fx^k + b \longrightarrow Dx^{k+1} = -Ex^{k+1} - Fx^k + b.$$

## Forma alternativa de dedução do método de Gauss-Seidel

- Seja

$$(D + E + F)x = b \longrightarrow (D + E)x = -Fx + b.$$

- Na forma de recorrência

$$(D + E)x^{k+1} = -Fx^k + b \longrightarrow Dx^{k+1} = -Ex^{k+1} - Fx^k + b.$$

- Escrevendo a segunda equação na forma matricial

$$Dx^{k+1} = - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}}_E \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \\ x_3^{k+1} \\ \vdots \\ x_n^{k+1} \end{bmatrix}}_{x^{k+1}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}}_F \underbrace{\begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{bmatrix}}_{x^k} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_b,$$



## Equações de iterações do método de Gauss-Seidel

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}} \left( -a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k + b_1 \right),$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}} \left( -a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k + b_2 \right),$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}} \left( -a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - \cdots - a_{3n}x_n^k + b_3 \right),$$

$$\vdots$$

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}} \left( -a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} + b_n \right).$$

## Equações de iterações do método de Gauss-Seidel

$$\left. \begin{aligned}
 x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}} \left( -a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k + b_1 \right), \\
 x_2^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}} \left( -a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k + b_2 \right), \\
 x_3^{k+1} &= \frac{1}{a_{33}} \left( -a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - \cdots - a_{3n}x_n^k + b_3 \right), \\
 &\vdots \\
 x_n^{k+1} &= \frac{1}{a_{nn}} \left( -a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} + b_n \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

- Vetor  $x^{k+1}$  obtido a partir dos elementos mais recentes, incluindo o próprio  $x^{k+1}$  e  $x^k$ .
- Vetor inicial

$$x_i^0 = \frac{b_i}{a_{ii}}.$$

## Algoritmo: método iterativo de Gauss-Seidel

### Algoritmo Gauss-Seidel

```

{ Objetivo: Resolver o sistema  $Ax = b$  pelo método iterativo de Gauss-Seidel }
parâmetros de entrada  $n, A, b, Toler, IterMax$ 
    { ordem, matriz, vetor independente, tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída  $x, Iter, CondErro$ 
    { vetor solução, número de iterações e condição de erro }
    { construção das matrizes para as iterações }
para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
     $r \leftarrow 1/A(i, i)$ 
    para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
        se  $i \neq j$  então  $A(i, j) \leftarrow A(i, j) * r$ , fimse
    fimpara;  $b(i) \leftarrow b(i) * r$ ;  $x(i) \leftarrow b(i)$ 
fimpara;  $Iter \leftarrow 0$ 
{ iterações de Gauss-Seidel }
repita
     $Iter \leftarrow Iter + 1$ 
    para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
         $Soma \leftarrow 0$ 
        para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
            se  $i \neq j$  então  $Soma \leftarrow Soma + A(i, j) * x(j)$ , fimse
        fimpara;  $v(i) \leftarrow x(i)$ ;  $x(i) \leftarrow b(i) - Soma$ 
    fimpara;  $NormaNum \leftarrow 0$ ;  $NormaDen \leftarrow 0$ 
    para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
         $t \leftarrow \text{abs}(x(i) - v(i))$ 
        se  $t > NormaNum$  então  $NormaNum \leftarrow t$ , fimse
        se  $\text{abs}(x(i)) > NormaDen$  então  $NormaDen \leftarrow \text{abs}(x(i))$ , fimse
    fimpara;  $NormaRel \leftarrow NormaNum / NormaDen$ ; escreva  $Iter, x, NormaRel$ 
    { teste de convergência }
    se  $NormaRel \leq Toler$  ou  $Iter \geq IterMax$  então interrompa, fimse
fimrepita
se  $NormaRel \leq Toler$  então  $CondErro \leftarrow 0$ , senão  $CondErro \leftarrow 1$ 
fimse
fimalgoritmo

```

**Complexidade computacional**

Operações	Complexidade
adições	$kn^2 + kn + k$
multiplicações	$(k + 1)n^2 - kn$
divisões	$n + k$

- Complexidade de Gauss-Seidel usando  $k$  iterações em sistema de ordem  $n > 1$ .

**Exemplo do método de Gauss-Seidel**

**Exemplo 49** Resolver o sistema do Exemplo 46 pelo método de Gauss-Seidel com  $\varepsilon < 10^{-5}$  e  $k_{\max} = 50$  usando os critérios (30) e (31)

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo do método de Gauss-Seidel**

**Exemplo 49** Resolver o sistema do Exemplo 46 pelo método de Gauss-Seidel com  $\varepsilon < 10^{-5}$  e  $k_{\max} = 50$  usando os critérios (30) e (31)

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

- Matriz dos coeficientes é diagonalmente dominante.

**Exemplo do método de Gauss-Seidel**

**Exemplo 49** Resolver o sistema do Exemplo 46 pelo método de Gauss-Seidel com  $\varepsilon < 10^{-5}$  e  $k_{\max} = 50$  usando os critérios (30) e (31)

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

- Matriz dos coeficientes é diagonalmente dominante.
- Equações de iterações

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{10} \left( -3x_2^k + 2x_3^k + 57 \right),$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{8} \left( -2x_1^{k+1} + x_3^k + 20 \right) \text{ e}$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{5} \left( -x_1^{k+1} - x_2^{k+1} - 4 \right).$$

**Exemplo do método de Gauss-Seidel**

**Exemplo 49** Resolver o sistema do Exemplo 46 pelo método de Gauss-Seidel com  $\varepsilon < 10^{-5}$  e  $k_{\max} = 50$  usando os critérios (30) e (31)

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

- Matriz dos coeficientes é diagonalmente dominante.
- Equações de iterações

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{10} \left( -3x_2^k + 2x_3^k + 57 \right),$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{8} \left( -2x_1^{k+1} + x_3^k + 20 \right) \text{ e}$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{5} \left( -x_1^{k+1} - x_2^{k+1} - 4 \right).$$

- Vetor inicial:  $x^0 = [5,7 \quad 2,5 \quad -0,8]^T$ .



**Coordenadas do vetor da primeira iteração**

$$x_1^1 = \frac{1}{10} (-3x_2^0 + 2x_3^0 + 57) = \frac{1}{10} (-3(2,5) + 2(-0,8) + 57) \leadsto x_1^1 = 4,79,$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8} (-2x_1^1 + x_3^0 + 20) = \frac{1}{8} (-2(4,79) + (-0,8) + 20) \leadsto x_2^1 = 1,2025 \text{ e}$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5} (-x_1^1 - x_2^1 - 4) = \frac{1}{5} (-(4,79) - (1,2025) - 4) \leadsto x_3^1 = -1,9985.$$

- Vetor da primeira iteração:  $x^1 = [4,79 \quad 1,2025 \quad -1,9985]^T$ .

**Coordenadas do vetor da primeira iteração**

$$x_1^1 = \frac{1}{10} (-3x_2^0 + 2x_3^0 + 57) = \frac{1}{10} (-3(2,5) + 2(-0,8) + 57) \leadsto x_1^1 = 4,79,$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8} (-2x_1^1 + x_3^0 + 20) = \frac{1}{8} (-2(4,79) + (-0,8) + 20) \leadsto x_2^1 = 1,2025 \text{ e}$$

$$x_3^1 = \frac{1}{5} (-x_1^1 - x_2^1 - 4) = \frac{1}{5} (-(4,79) - (1,2025) - 4) \leadsto x_3^1 = -1,9985.$$

• Vetor da primeira iteração:  $x^1 = [4,79 \ 1,2025 \ -1,9985]^T$ .

• Condição de parada

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(|4,79 - 5,7|, |1,2025 - 2,5|, |-1,9985 - (-0,8)|)}{\max(|4,79|, |1,2025|, |-1,9985|)},$$

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(0,91; 1,2975; 1,1985)}{\max(4,79; 1,2025; 1,9985)} = 0,2709.$$

## Resultados gerados pelo algoritmo

```
% Os valores de entrada
n = 3
A =
    10     3    -2
     2     8    -1
     1     1     5
b =
    57
    20
    -4
Toler = 1.0000e-05
IterMax = 50
% produzem os resultados
  Solucao de sistema linear pelo metodo de Gauss-Seidel
Iter      x1      x2      x3      NormaRelativa
  0      5.70000    2.50000   -0.80000
  1      4.79000    1.20250   -1.99850    2.70877e-01
  2      4.93955    1.01530   -1.99097    3.78982e-02
  3      4.99722    1.00182   -1.99981    1.15396e-02
  4      4.99949    1.00015   -1.99993    4.55035e-04
  5      4.99997    1.00002   -2.00000    9.55994e-05
  6      5.00000    1.00000   -2.00000    5.32440e-06

Solucao =    5.00000    1.00000   -2.00000
Iter      =    6
CondErro =    0
```

- Vetor solução:  $x \approx x^6 = [5,00000 \ 1,00000 \ -2,00000]^T$ .

**Exemplo do método de Gauss-Seidel**

**Exemplo 50** Calcular três aproximações do vetor solução do sistema do Exemplo 49 usando a formulação (35):

$$x^{k+1} = -(D + E)^{-1}Fx^k + (D + E)^{-1}b = Sx^k + d.$$

**Exemplo do método de Gauss-Seidel**

**Exemplo 50** Calcular três aproximações do vetor solução do sistema do Exemplo 49 usando a formulação (35):

$$x^{k+1} = -(D + E)^{-1}Fx^k + (D + E)^{-1}b = Sx^k + d.$$

- Decompondo  $A = D + E + F$

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Matriz  $(D + E)^{-1}$  calculada utilizando o esquema:  $(D + E)(D + E)^{-1} = I$ .

### Exemplo do método de Gauss-Seidel

**Exemplo 51** Calcular três aproximações do vetor solução do sistema do Exemplo 49 usando a formulação (35):

$$x^{k+1} = -(D + E)^{-1}Fx^k + (D + E)^{-1}b = Sx^k + d.$$

- Decompondo  $A = D + E + F$

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } F = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Matriz  $(D + E)^{-1}$  calculada utilizando o esquema:  $(D + E)(D + E)^{-1} = I$ .
- Matrizes  $(D + E)^{-1}$  e  $S$

$$(D + E)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ -0,025 & 0,125 & 0 \\ -0,015 & -0,025 & 0,2 \end{bmatrix} \text{ e } S = -(D + E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,075 & 0,075 \\ 0 & 0,045 & -0,055 \end{bmatrix}.$$

- Vetores  $d$  e  $x^0$

$$d = (D + E)^{-1}b = [5,7 \quad 1,075 \quad -2,155]^T \text{ e } x^0 = D^{-1}b = [5,7 \quad 2,5 \quad -0,8]^T.$$

## Primeiras aproximações da solução

$k$	$x_1^k$	$x_2^k$	$x_3^k$
0	5,70000	2,50000	−0,80000
1	4,79000	1,20250	−1,99850
2	4,93955	1,01530	−1,99097
3	4,99722	1,00182	−1,99981

**Exemplo do método de Gauss-Seidel**

**Exemplo 51** Resolver o sistema do Exemplo 48 pelo método de Gauss-Seidel com  $\varepsilon < 10^{-3}$  e  $k_{\max} = 50$  usando os critérios (30) e (31)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



**Exemplo do método de Gauss-Seidel**

**Exemplo 51** Resolver o sistema do Exemplo 48 pelo método de Gauss-Seidel com  $\varepsilon < 10^{-3}$  e  $k_{\max} = 50$  usando os critérios (30) e (31)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Matriz dos coeficientes diagonal estritamente dominante

$$|5| > |2| + |0| + |-1|, |8| > |1| + |-3| + |2|,$$

$$|6| > |0| + |1| + |1| \text{ e } |9| > |1| + |-1| + |2|.$$

### Exemplo do método de Gauss-Seidel

**Exemplo 51** Resolver o sistema do Exemplo 48 pelo método de Gauss-Seidel com  $\varepsilon < 10^{-3}$  e  $k_{\max} = 50$  usando os critérios (30) e (31)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 8 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Matriz dos coeficientes diagonal estritamente dominante

$$|5| > |2| + |0| + |-1|, |8| > |1| + |-3| + |2|,$$

$$|6| > |0| + |1| + |1| \text{ e } |9| > |1| + |-1| + |2|.$$

- Equações de iterações

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \frac{1}{5} (-2x_2^k + x_4^k + 6), \\ x_2^{k+1} &= \frac{1}{8} (-x_1^{k+1} + 3x_3^k - 2x_4^k + 10), \\ x_3^{k+1} &= \frac{1}{6} (-x_2^{k+1} - x_4^k - 5) \text{ e} \\ x_4^{k+1} &= \frac{1}{9} (-x_1^{k+1} + x_2^{k+1} - 2x_3^{k+1}). \end{aligned}$$

- Vetor inicial:  $x^0 = [1,2 \quad 1,25 \quad -0,8333 \quad 0]^T$ .

**Coordenadas do vetor da primeira iteração**

$$x_1^1 = \frac{1}{5} (-2x_2^0 + x_4^0 + 6) = \frac{1}{5} (-2(1,25) + (0) + 6) = 0,7;$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8} (-x_1^1 + 3x_3^0 - 2x_4^0 + 10) = \frac{1}{8} (-(0,7) + 3(-0,8333) - 2(0) + 10) = 0,85;$$

$$x_3^1 = \frac{1}{6} (-x_2^1 - x_4^0 - 5) = \frac{1}{6} (-(0,85) - (0) - 5) = -0,975;$$

$$x_4^1 = \frac{1}{9} (-x_1^1 + x_2^1 - 2x_3^1) = \frac{1}{9} (-(0,7) + (0,85) - 2(-0,975)) = 0,2333.$$

- Vetor da primeira iteração:  $x^1 = [0,7 \ 0,85 \ -0,975 \ 0,2333]^T$ .

### Coordenadas do vetor da primeira iteração

$$x_1^1 = \frac{1}{5} (-2x_2^0 + x_4^0 + 6) = \frac{1}{5} (-2(1,25) + (0) + 6) = 0,7;$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8} (-x_1^1 + 3x_3^0 - 2x_4^0 + 10) = \frac{1}{8} (-(0,7) + 3(-0,8333) - 2(0) + 10) = 0,85;$$

$$x_3^1 = \frac{1}{6} (-x_2^1 - x_4^0 - 5) = \frac{1}{6} (-(0,85) - (0) - 5) = -0,975;$$

$$x_4^1 = \frac{1}{9} (-x_1^1 + x_2^1 - 2x_3^1) = \frac{1}{9} (-(0,7) + (0,85) - 2(-0,975)) = 0,2333.$$

• Vetor da primeira iteração:  $x^1 = [0,7 \ 0,85 \ -0,975 \ 0,2333]^T$ .

• Condição de parada

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(|0,7 - 1,2|, |0,85 - 1,25|, |-0,975 - (-0,8333)|, |0,2333 - 0|)}{\max(|0,7|, |0,85|, |-0,975|, |0,2333|)},$$

$$\frac{\|x^1 - x^0\|_\infty}{\|x^1\|_\infty} = \frac{\max(0,5; \ 0,4; \ 0,1417; \ 0,2333)}{\max(0,7; \ 0,85; \ 0,975; \ 0,2333)} = 0,5128.$$

## Resultados obtidos pelo algoritmo

```
% Os valores de entrada
n = 4
A =
    5     2     0    -1
    1     8    -3     2
    0     1     6     1
    1    -1     2     9
b =
    6
   10
   -5
    0
Toler = 1.0000e-03
IterMax = 50
% produzem os resultados
Solucao de sistema linear pelo metodo de Gauss-Seidel
Iter      x1      x2      x3      x4      NormaRelativa
  0      1.20000    1.25000   -0.83333    0.00000
  1      0.70000    0.85000   -0.97500    0.23333    5.12821e-01
  2      0.90667    0.71271   -0.99101    0.19867    2.08542e-01
  3      0.95465    0.70937   -0.98467    0.19156    4.87314e-02
  4      0.95456    0.71354   -0.98418    0.19193    4.22999e-03
  5      0.95297    0.71383   -0.98429    0.19216    1.61801e-03
  6      0.95290    0.71374   -0.98432    0.19216    9.20739e-05

Solucao =    0.95290    0.71374   -0.98432    0.19216
Iter      = 6
CondErro = 0
```

- Vetor solução:  $x \approx x^6 = [0,95290 \ 0,71374 \ -0,98432 \ 0,19216]^T$ .

## Método da sobre-relaxação sucessiva

- Decompor a matriz  $A$  de modo que

$$A = D + E + F,$$

- $D$  é uma matriz diagonal e  $E$  e  $F$  são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com diagonais nulas.

## Método da sobre-relaxação sucessiva

- Decompor a matriz  $A$  de modo que

$$A = D + E + F,$$

- $D$  é uma matriz diagonal e  $E$  e  $F$  são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com diagonais nulas.
- Multiplicando o sistema linear  $Ax = b$  por um parâmetro  $\omega$

$$\omega(D + E + F)x = \omega b.$$

- Somando o vetor nulo  $(D - D)x$  ao primeiro termo

$$(D - D)x + \omega(D + E + F)x = \omega b.$$

- Rearranjando

$$(D + \omega E)x = [(1 - \omega)D - \omega F]x + \omega b.$$

## Método da sobre-relaxação sucessiva

- Decompor a matriz  $A$  de modo que

$$A = D + E + F,$$

- $D$  é uma matriz diagonal e  $E$  e  $F$  são matrizes triangulares inferior e superior, respectivamente, com diagonais nulas.
- Multiplicando o sistema linear  $Ax = b$  por um parâmetro  $\omega$

$$\omega(D + E + F)x = \omega b.$$

- Somando o vetor nulo  $(D - D)x$  ao primeiro termo

$$(D - D)x + \omega(D + E + F)x = \omega b.$$

- Rearranjando

$$(D + \omega E)x = [(1 - \omega)D - \omega F]x + \omega b.$$

- Forma de iteração

$$(D + \omega E)x^{k+1} = [(1 - \omega)D - \omega F]x^k + \omega b, \quad (37)$$

$$x^{k+1} = (D + \omega E)^{-1} [(1 - \omega)D - \omega F] x^k + \omega (D + \omega E)^{-1} b \rightarrow x^{k+1} = Rx^k + e. \quad (38)$$

- Matriz de iteração do método SOR:  $R = (D + \omega E)^{-1} [(1 - \omega)D - \omega F]$ .
- *SOR: successive over-relaxation.*



### Convergência do método SOR

- Depende do parâmetro  $\omega$ .
- Para garantir a convergência:  $0 < \omega < 2$ .
- Usualmente:  $1 < \omega < 2$ .
- Para  $\omega = 1$ , a recorrência (38) torna-se

$$x^{k+1} = -(D + E)^{-1} F x^k + (D + E)^{-1} b,$$

- Método de Gauss-Seidel é um caso particular da sobre-relaxação sucessiva.

## Equações de iterações do método SOR

- Por (37)

$$\begin{aligned}(D + \omega E)x^{k+1} &= [(1 - \omega)D - \omega F]x^k + \omega b, \\ Dx^{k+1} &= \omega(-Ex^{k+1} - Fx^k + b) + (1 - \omega)Dx^k, \\ x^{k+1} &= \omega D^{-1}(-Ex^{k+1} - Fx^k + b) + (1 - \omega)x^k.\end{aligned}$$

## Equações de iterações do método SOR

- Por (37)

$$\begin{aligned}(D + \omega E)x^{k+1} &= [(1 - \omega)D - \omega F]x^k + \omega b, \\ Dx^{k+1} &= \omega(-Ex^{k+1} - Fx^k + b) + (1 - \omega)Dx^k, \\ x^{k+1} &= \omega D^{-1}(-Ex^{k+1} - Fx^k + b) + (1 - \omega)x^k.\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}x_1^{k+1} &= \frac{\omega}{a_{11}} \left( -a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k + b_1 \right) + (1 - \omega)x_1^k, \\ x_2^{k+1} &= \frac{\omega}{a_{22}} \left( -a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k + b_2 \right) + (1 - \omega)x_2^k, \\ x_3^{k+1} &= \frac{\omega}{a_{33}} \left( -a_{31}x_1^{k+1} - a_{32}x_2^{k+1} - \cdots - a_{3n}x_n^k + b_3 \right) + (1 - \omega)x_3^k, \\ &\vdots \\ x_n^{k+1} &= \frac{\omega}{a_{nn}} \left( -a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{k+1} + b_n \right) + (1 - \omega)x_n^k.\end{aligned} \right\} \quad (39)$$

## Algoritmo: método da sobre-relaxação sucessiva

### Algoritmo SOR

```

{ Objetivo: Resolver o sistema  $Ax = b$  pelo método iterativo da sobre-relaxação sucessiva }
parâmetros de entrada  $n, A, b, \text{Omega}, \text{Toler}, \text{IterMax}$ 
    { ordem, matriz, vetor independente, parâmetro  $\omega$ , tolerância e número máximo de iterações }
parâmetros de saída  $x, \text{Iter}, \text{CondErro}$ 
    { vetor solução, número de iterações e condição de erro }
    { construção das matrizes para as iterações }
para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
     $r \leftarrow 1/A(i, i)$ 
    para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
        se  $i \neq j$  então  $A(i, j) \leftarrow A(i, j) * r$ , fimse
    fimpara;  $b(i) \leftarrow b(i) * r$ ;  $x(i) \leftarrow b(i)$ 
fimpara;  $\text{Iter} \leftarrow 0$ 
{ iterações da sobre-relaxação sucessiva }
repita
     $\text{Iter} \leftarrow \text{Iter} + 1$ 
    para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
         $\text{Soma} \leftarrow 0$ 
        para  $j \leftarrow 1$  até  $n$  faça
            se  $i \neq j$  então  $\text{Soma} \leftarrow \text{Soma} + A(i, j) * x(j)$ , fimse
        fimpara;  $v(i) \leftarrow x(i)$ ;  $x(i) \leftarrow \text{Omega} * (b(i) - \text{Soma}) + (1 - \text{Omega}) * x(i)$ 
    fimpara;  $\text{NormaNum} \leftarrow 0$ ;  $\text{NormaDen} \leftarrow 0$ 
    para  $i \leftarrow 1$  até  $n$  faça
         $t \leftarrow \text{abs}(x(i) - v(i))$ 
        se  $t > \text{NormaNum}$  então  $\text{NormaNum} \leftarrow t$ , fimse
        se  $\text{abs}(x(i)) > \text{NormaDen}$  então  $\text{NormaDen} \leftarrow \text{abs}(x(i))$ , fimse
    fimpara;  $\text{NormaRel} \leftarrow \text{NormaNum}/\text{NormaDen}$ ; escreva  $\text{Iter}, x, \text{NormaRel}$ 
    { teste de convergência }
    se  $\text{NormaRel} \leq \text{Toler}$  ou  $\text{Iter} \geq \text{IterMax}$  então interrompa, fimse
fimrepita
se  $\text{NormaRel} \leq \text{Toler}$  então  $\text{CondErro} \leftarrow 0$ , senão  $\text{CondErro} \leftarrow 1$ 
fimse
fimalgoritmo

```

**Influência do parâmetro  $\omega$  no raio espectral**

**Exemplo 52** Resolver o sistema pelo método SOR, com  $\varepsilon < 10^{-5}$  e  $k_{\max} = 500$  usando os critérios (30) e (31)

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 10 & 0 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 15 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 56 \\ 74 \\ 57 \\ 107 \end{bmatrix}.$$

### Influência do parâmetro $\omega$ no raio espectral

**Exemplo 52** Resolver o sistema pelo método SOR, com  $\varepsilon < 10^{-5}$  e  $k_{\max} = 500$  usando os critérios (30) e (31)

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 10 & 0 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & 15 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 10 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 56 \\ 74 \\ 57 \\ 107 \end{bmatrix}.$$

- Influência do parâmetro  $\omega$  no raio espectral  $\rho$  da matriz de iteração

$$R = (D + \omega E)^{-1} [(1 - \omega)D - \omega F]$$

$\omega$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
$\rho(R)$	0,9357	0,8618	0,7747	0,6674	0,5231	0,4459	0,7506	1,0660	1,3943
iterações	118	63	41	29	20	17	44	>500	>500

- Quanto menor  $\rho(R)$  menor será o número de iterações.

### Sobre o teorema da condição suficiente

- Teorema 4 não se aplica ao método da sobre-relaxação sucessiva devido ao parâmetro  $\omega$ .
- No Exemplo 51, onde a matriz  $A$  é diagonal estritamente dominante, o método de Gauss-Seidel converge com 6 iterações.
- Sobre-relaxação sucessiva não converge com  $\omega = 1,8$  porque neste caso  $\rho(R_{\omega=1,8}) = 1,0131 > 1$ .

## Análise de convergência

- Seja o erro  $\epsilon^k$  na  $k$ -ésima iteração

$$\epsilon^k = x^k - x^*,$$

- $x^*$ : solução exata do sistema  $Ax = b$  de ordem  $n$  e
- $x^k$ : aproximação da solução.



## Análise de convergência

- Seja o erro  $\epsilon^k$  na  $k$ -ésima iteração

$$\epsilon^k = x^k - x^*,$$

- $x^*$ : solução exata do sistema  $Ax = b$  de ordem  $n$  e
- $x^k$ : aproximação da solução.
- Substituindo a equação acima para  $\epsilon^{k+1}$  em (27)

$$\epsilon^{k+1} = x^{k+1} - x^* = Mx^k + c - x^*.$$

- Sendo  $x^k = \epsilon^k + x^*$

$$\epsilon^{k+1} = M(\epsilon^k + x^*) + c - x^*,$$

$$\epsilon^{k+1} = M\epsilon^k + (Mx^* + c - x^*).$$

### Análise de convergência

- Seja o erro  $\epsilon^k$  na  $k$ -ésima iteração

$$\epsilon^k = x^k - x^*,$$

- $x^*$ : solução exata do sistema  $Ax = b$  de ordem  $n$  e
- $x^k$ : aproximação da solução.

- Substituindo a equação acima para  $\epsilon^{k+1}$  em (27)

$$\epsilon^{k+1} = x^{k+1} - x^* = Mx^k + c - x^*.$$

- Sendo  $x^k = \epsilon^k + x^*$

$$\begin{aligned}\epsilon^{k+1} &= M(\epsilon^k + x^*) + c - x^*, \\ \epsilon^{k+1} &= M\epsilon^k + (Mx^* + c - x^*).\end{aligned}\tag{40}$$

- Tomando o limite de (27),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} Mx^k + c \longrightarrow x^* = Mx^* + c.$$

**Análise de convergência cont.**

- Propagação de erro é da forma

$$\epsilon^{k+1} = M\epsilon^k.$$

**Análise de convergência cont.**

- Propagação de erro é da forma

$$\epsilon^{k+1} = M\epsilon^k.$$

- Sendo  $\lambda_i$  um autovalor de  $M$  e  $v_i$  o seu correspondente autovetor

$$Mv_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{ou}$$

$$MV = V\Lambda$$

- $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ : matriz diagonal contendo os autovalores  $\lambda_i$  e
- $V$ : matriz composta pelos autovetores  $v_i$ .

**Análise de convergência cont.**

- Propagação de erro é da forma

$$\epsilon^{k+1} = M\epsilon^k. \quad (41)$$

- Sendo  $\lambda_i$  um autovalor de  $M$  e  $v_i$  o seu correspondente autovetor

$$Mv_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \text{ou}$$

$$MV = V\Lambda$$

- $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ : matriz diagonal contendo os autovalores  $\lambda_i$  e
- $V$ : matriz composta pelos autovetores  $v_i$ .
- Expressando o vetor erro inicial  $\epsilon^0$  como uma combinação linear dos autovetores  $V$  de  $M$

$$\epsilon^0 = Vc$$

- $c$ : um vetor de coeficientes obtido pela solução do sistema linear acima.

**Análise de convergência cont.**

- Substituindo em (41)

$$\epsilon^1 = M\epsilon^0 = MVc \longrightarrow \epsilon^1 = V\Lambda c.$$

$$\epsilon^2 = M\epsilon^1 = MV\Lambda c \longrightarrow \epsilon^2 = V\Lambda^2 c.$$

## Análise de convergência cont.

- Substituindo em (41)

$$\epsilon^1 = M\epsilon^0 = MVc \longrightarrow \epsilon^1 = V\Lambda c.$$

$$\epsilon^2 = M\epsilon^1 = MV\Lambda c \longrightarrow \epsilon^2 = V\Lambda^2 c.$$

$$\boxed{\epsilon^k = V\Lambda^k c},$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^k \\ \epsilon_2^k \\ \vdots \\ \epsilon_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \lambda_1^k \\ c_2 \lambda_2^k \\ \vdots \\ c_n \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

# Análise de convergência cont.

- Substituindo em (41)

$$\begin{aligned}\epsilon^1 &= M\epsilon^0 = MVc \longrightarrow \epsilon^1 = V\Lambda c. \\ \epsilon^2 &= M\epsilon^1 = MV\Lambda c \longrightarrow \epsilon^2 = V\Lambda^2 c. \\ \boxed{\epsilon^k &= V\Lambda^k c},\end{aligned}\tag{42}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^k \\ \epsilon_2^k \\ \vdots \\ \epsilon_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \lambda_1^k \\ c_2 \lambda_2^k \\ \vdots \\ c_n \lambda_n^k \end{bmatrix}.$$

- Quando  $k$  aumentar, o vetor erro  $\epsilon^k$  irá reduzir se, e somente se, o módulo de todos os autovalores  $\lambda_i$  da matriz de iteração  $M$  for menor que a unidade.
- A taxa de convergência será controlada pela magnitude do maior autovalor em módulo, o chamado raio espectral  $\rho(M)$  (ver Teorema 3).



Resultados da expressão  $\epsilon^k = V\Lambda^k c$

**Exemplo 53** Seja o sistema  $Ax = b$  do Exemplo 49 e sua solução exata  $x^*$

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ e } x^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

**Resultados da expressão  $\epsilon^k = V\Lambda^k c$**

**Exemplo 53** Seja o sistema  $Ax = b$  do Exemplo 49 e sua solução exata  $x^*$

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ e } x^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- A partir dos resultados do Exemplo 51, obtêm-se os valores para a fórmula de recorrência de Gauss-Seidel  $x^{k+1} = Sx^k + d$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -0,300 & 0,200 \\ 0 & 0,075 & 0,075 \\ 0 & 0,045 & -0,055 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 5,700 \\ 1,075 \\ -2,155 \end{bmatrix} \text{ e } x^0 = \begin{bmatrix} 5,7 \\ 2,5 \\ -0,8 \end{bmatrix}.$$

- Vetor erro inicial:  $\epsilon^0 = x^0 - x^* = [0,7 \ 1,5 \ 1,2]^T$ .

**Resultados da expressão  $\epsilon^k = V\Lambda^k c$** 

**Exemplo 53** Seja o sistema  $Ax = b$  do Exemplo 49 e sua solução exata  $x^*$

$$\begin{bmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 20 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ e } x^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- A partir dos resultados do Exemplo 51, obtêm-se os valores para a fórmula de recorrência de Gauss-Seidel  $x^{k+1} = Sx^k + d$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -0,300 & 0,200 \\ 0 & 0,075 & 0,075 \\ 0 & 0,045 & -0,055 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 5,700 \\ 1,075 \\ -2,155 \end{bmatrix} \text{ e } x^0 = \begin{bmatrix} 5,7 \\ 2,5 \\ -0,8 \end{bmatrix}.$$

- Vetor erro inicial:  $\epsilon^0 = x^0 - x^* = [0,7 \ 1,5 \ 1,2]^T$ .
- Autovalores  $\Lambda$  da matriz de iteração  $S$  e seus respectivos autovetores  $V$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,09718 & 0 \\ 0 & 0 & -0,07718 \end{bmatrix} \text{ e } V = \begin{bmatrix} 1 & -0,92174 & -0,97074 \\ 0 & 0,37189 & -0,10615 \\ 0 & 0,10997 & 0,21538 \end{bmatrix}.$$

Resultados da expressão  $\epsilon^k = V\Lambda^k c$  cont.

- Por (42) o vetor erro na  $k$ -ésima iteração

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^k \\ \epsilon_2^k \\ \epsilon_3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,92174 & -0,97074 \\ 0 & 0,37189 & -0,10615 \\ 0 & 0,10997 & 0,21538 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8,19997(0)^k \\ 4,90841(0,09718)^k \\ 3,06538(-0,07718)^k \end{bmatrix},$$

**Resultados da expressão  $\epsilon^k = V\Lambda^k c$  cont.**

- Por (42) o vetor erro na  $k$ -ésima iteração

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^k \\ \epsilon_2^k \\ \epsilon_3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,92174 & -0,97074 \\ 0 & 0,37189 & -0,10615 \\ 0 & 0,10997 & 0,21538 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8,19997(0)^k \\ 4,90841(0,09718)^k \\ 3,06538(-0,07718)^k \end{bmatrix},$$

- vetor  $c$ : solução do sistema linear  $Vc = \epsilon^0$ .
- Calcula-se o vetor erro  $\epsilon^k$  a cada iteração.

### Resultados da expressão $\epsilon^k = V\Lambda^k c$ cont.

- Por (42) o vetor erro na  $k$ -ésima iteração

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1^k \\ \epsilon_2^k \\ \epsilon_3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,92174 & -0,97074 \\ 0 & 0,37189 & -0,10615 \\ 0 & 0,10997 & 0,21538 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8,19997(0)^k \\ 4,90841(0,09718)^k \\ 3,06538(-0,07718)^k \end{bmatrix},$$

- vetor  $c$ : solução do sistema linear  $Vc = \epsilon^0$ .
- Calcula-se o vetor erro  $\epsilon^k$  a cada iteração.
- Como  $x^k = \epsilon^k + x^*$ , é possível obter a solução aproximada  $x^k$  para comparar com os valores mostrados no Exemplo 51

$k$	$\epsilon_1^k$	$\epsilon_2^k$	$\epsilon_3^k$	$\epsilon_1^k + x_1^*$	$\epsilon_2^k + x_2^*$	$\epsilon_3^k + x_3^*$
0	0,70000	1,50000	1,20000	5,70000	2,50000	-0,80000
1	-0,21001	0,20250	0,00150	4,78999	1,20250	-1,99850
2	-0,06045	0,01530	0,00903	4,93955	1,01530	-1,99097
3	-0,00278	0,00182	0,00019	4,99722	1,00182	-1,99981

**Resultados da expressão  $\epsilon^k = V\Lambda^k c$  cont.**

- Processo converge, pois  $|\lambda_i| < 1 \forall i$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^k = 0 \longrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon^k = 0,$$

- Solução divergiria se pelo menos um  $|\lambda_i| > 1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^k = \infty \longrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon^k = \infty,$$

## Comparação dos métodos iterativos estacionários

- Matriz dos coeficientes  $A$  diagonal estritamente dominante: solução converge pelos métodos de Jacobi e Gauss-Seidel (Teorema 4).
- Se  $A$  não for diagonalmente dominante: previsão de convergência feita usando o raio espectral  $\rho(M)$  da matriz de iteração (Teorema 3).
- Neste caso, um método pode convergir e o outro não.



**Exemplo de convergência**

**Exemplo 54** Verificar se o sistema abaixo pode ser resolvido pelo método de Jacobi ou de Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0,4 & -0,4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0 \\ -0,6 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo de convergência**

**Exemplo 54** Verificar se o sistema abaixo pode ser resolvido pelo método de Jacobi ou de Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0,4 & -0,4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0 \\ -0,6 \end{bmatrix}.$$

- Matriz  $A$  não é diagonal estritamente dominante.
- Matrizes de iteração

$$J = -D^{-1}(E + F) = \begin{bmatrix} 0 & -1,2 & -0,6 \\ -1 & 0 & -1 \\ -0,4 & 0,4 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(J) = 1,1200 \text{ e}$$

$$S = -(D + E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1,2 & -0,6 \\ 0 & 1,2 & -0,4 \\ 0 & 0,96 & 0,08 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(S) = 0,6928.$$

### Exemplo de convergência

**Exemplo 54** Verificar se o sistema abaixo pode ser resolvido pelo método de Jacobi ou de Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0,4 & -0,4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0 \\ -0,6 \end{bmatrix}.$$

- Matriz  $A$  não é diagonal estritamente dominante.
- Matrizes de iteração

$$J = -D^{-1}(E + F) = \begin{bmatrix} 0 & -1,2 & -0,6 \\ -1 & 0 & -1 \\ -0,4 & 0,4 & 0 \end{bmatrix} \leadsto \rho(J) = 1,1200 \text{ e}$$

$$S = -(D + E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1,2 & -0,6 \\ 0 & 1,2 & -0,4 \\ 0 & 0,96 & 0,08 \end{bmatrix} \leadsto \rho(S) = 0,6928.$$

- Raios espectrais:  $\rho(J) > 1$  e  $\rho(S) < 1$ .

## Dez primeiras iterações

Solução de sistema linear pelo método de Jacobi

Iter	x1	x2	x3	NormaRelativa
0	0.40000	0.00000	-0.60000	
1	0.76000	0.20000	-0.76000	4.73684e-01
2	0.61600	0.00000	-0.82400	2.42718e-01
3	0.89440	0.20800	-0.84640	3.11270e-01
4	0.65824	-0.04800	-0.87456	2.92719e-01
5	0.98234	0.21632	-0.88250	3.29924e-01
6	0.66991	-0.09984	-0.90641	3.48806e-01
7	1.06365	0.23649	-0.90790	3.70176e-01
8	0.66095	-0.15575	-0.93086	4.32612e-01
9	1.14542	0.26991	-0.92668	4.22963e-01
10	0.63211	-0.21874	-0.95020	5.40209e-01

Solução de sistema linear pelo método de Gauss-Seidel

Iter	x1	x2	x3	NormaRelativa
0	0.40000	0.00000	-0.60000	
1	0.76000	-0.16000	-0.96800	3.80165e-01
2	1.17280	-0.20480	-1.15104	3.51978e-01
3	1.33638	-0.18534	-1.20869	1.22408e-01
4	1.34763	-0.13894	-1.19463	3.44366e-02
5	1.28350	-0.08887	-1.14895	4.99639e-02
6	1.19602	-0.04707	-1.09723	7.31440e-02
7	1.11482	-0.01759	-1.05296	7.28318e-02
8	1.05288	0.00008	-1.02112	5.88269e-02
9	1.01258	0.00854	-1.00161	3.98065e-02
10	0.99071	0.01090	-0.99193	2.20409e-02

**Exemplo de convergência**

**Exemplo 55** Verificar se o sistema a seguir pode ser resolvido pelo método de Jacobi ou de Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0,4 & -0,4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0 \\ -0,6 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo de convergência**

**Exemplo 55** Verificar se o sistema a seguir pode ser resolvido pelo método de Jacobi ou de Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0,4 & -0,4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0 \\ -0,6 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes de iteração

$$J = -D^{-1}(E + F) = \begin{bmatrix} 0 & -1,2 & -0,6 \\ 1 & 0 & 1 \\ -0,4 & 0,4 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(J) = 0,8266 \text{ e}$$

$$S = -(D + E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1,2 & -0,6 \\ 0 & -1,2 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(S) = 1,2000.$$

### Exemplo de convergência

**Exemplo 55** Verificar se o sistema a seguir pode ser resolvido pelo método de Jacobi ou de Gauss-Seidel

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,6 & 0,3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0,4 & -0,4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0 \\ -0,6 \end{bmatrix}.$$

- Matrizes de iteração

$$J = -D^{-1}(E + F) = \begin{bmatrix} 0 & -1,2 & -0,6 \\ 1 & 0 & 1 \\ -0,4 & 0,4 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(J) = 0,8266 \text{ e}$$

$$S = -(D + E)^{-1}F = \begin{bmatrix} 0 & -1,2 & -0,6 \\ 0 & -1,2 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(S) = 1,2000.$$

- Raios espectrais:  $\rho(J) < 1$  e  $\rho(S) > 1$ .

## Dez primeiras iterações

Solucao de sistema linear pelo metodo de Jacobi

Iter	x1	x2	x3	NormaRelativa
0	0.40000	0.00000	-0.60000	
1	0.76000	-0.20000	-0.76000	4.73684e-01
2	1.09600	0.00000	-0.98400	3.06569e-01
3	0.99040	0.11200	-1.03840	1.07858e-01
4	0.88864	-0.04800	-0.95136	1.68180e-01
5	1.02842	-0.06272	-0.97466	1.35914e-01
6	1.06006	0.05376	-1.03645	1.09881e-01
7	0.95736	0.02360	-1.00252	1.02439e-01
8	0.97319	-0.04516	-0.97350	7.06332e-02
9	1.03829	-0.00032	-1.00734	6.27033e-02
10	1.00478	0.03095	-1.01544	3.30007e-02

Solucao de sistema linear pelo metodo de Gauss-Seidel

Iter	x1	x2	x3	NormaRelativa
0	0.40000	0.00000	-0.60000	
1	0.76000	0.16000	-0.84000	4.28571e-01
2	0.71200	-0.12800	-0.93600	3.07692e-01
3	1.11520	0.17920	-0.97440	3.61549e-01
4	0.76960	-0.20480	-0.98976	3.87973e-01
5	1.23962	0.24986	-0.99590	3.79163e-01
6	0.69772	-0.29819	-0.99836	5.48944e-01
7	1.35684	0.35848	-0.99934	4.85781e-01
8	0.56943	-0.42992	-0.99974	7.88605e-01
9	1.51574	0.51600	-0.99990	6.24324e-01
10	0.38073	-0.61916	-0.99996	1.13522e+00



## Velocidade de convergência

- Vetor erro  $\epsilon^k = V\Lambda^k c$ .
- Quanto menor o valor de  $\rho(M)$ , mais rápida será a convergência do método iterativo.

### Velocidade de convergência

- Vetor erro  $\epsilon^k = V\Lambda^k c$ .
- Quanto menor o valor de  $\rho(M)$ , mais rápida será a convergência do método iterativo.
- Matrizes de iteração para o sistema do Exemplo 46

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -0,3 & 0,2 \\ -0,25 & 0 & 0,125 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(J) = 0,2725 \text{ e}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,075 & 0,075 \\ 0 & 0,045 & -0,055 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(S) = 0,0972.$$

- Raios espectrais:  $\rho(S) < \rho(J)$ .

**Velocidade de convergência**

- Vetor erro  $\epsilon^k = V\Lambda^k c$ .
- Quanto menor o valor de  $\rho(M)$ , mais rápida será a convergência do método iterativo.
- Matrizes de iteração para o sistema do Exemplo 46

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -0,3 & 0,2 \\ -0,25 & 0 & 0,125 \\ -0,2 & -0,2 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(J) = 0,2725 \text{ e}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,075 & 0,075 \\ 0 & 0,045 & -0,055 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \rho(S) = 0,0972.$$

- Raios espectrais:  $\rho(S) < \rho(J)$ .
- Método de Gauss-Seidel converge mais rápido.
- Gasta 6 iterações (Exemplo 49) contra 9 do método de Jacobi (Exemplo 46).

**Refinamento como método estacionário**

- Refinar a solução de um sistema linear a partir dos fatores da decomposição.
- Esquema do refinamento de solução

$$\left. \begin{array}{l} LUx^0 = Pb \longrightarrow Lt = Pb \text{ e } Ux^0 = t, \\ r^k = b - Ax^k \\ LUc^k = Pr^k \longrightarrow Lt = Pr^k \text{ e } Uc^k = t \\ x^{k+1} = x^k + c^k \end{array} \right\} k = 0, 1, 2, \dots$$

## Refinamento como método estacionário

- Refinar a solução de um sistema linear a partir dos fatores da decomposição.
- Esquema do refinamento de solução

$$\left. \begin{aligned} LUx^0 &= Pb \longrightarrow Lt = Pb \text{ e } Ux^0 = t, \\ r^k &= b - Ax^k \\ LUc^k &= Pr^k \longrightarrow Lt = Pr^k \text{ e } Uc^k = t \\ x^{k+1} &= x^k + c^k \end{aligned} \right\} k = 0, 1, 2, \dots$$

- Rearranjando as equações

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + c^k \\ &= x^k + U^{-1}L^{-1}Pr^k \\ &= x^k + U^{-1}L^{-1}P(b - Ax^k) \\ x^{k+1} &= x^k - U^{-1}L^{-1}PAx^k + U^{-1}L^{-1}Pb, \end{aligned}$$

### Refinamento como método estacionário

- Refinar a solução de um sistema linear a partir dos fatores da decomposição.
- Esquema do refinamento de solução

$$\left. \begin{aligned} LUx^0 &= Pb \longrightarrow Lt = Pb \text{ e } Ux^0 = t, \\ r^k &= b - Ax^k \\ LUc^k &= Pr^k \longrightarrow Lt = Pr^k \text{ e } Uc^k = t \\ x^{k+1} &= x^k + c^k \end{aligned} \right\} k = 0, 1, 2, \dots$$

- Rearranjando as equações

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k + c^k \\ &= x^k + U^{-1}L^{-1}Pr^k \\ &= x^k + U^{-1}L^{-1}P(b - Ax^k) \\ x^{k+1} &= x^k - U^{-1}L^{-1}PAx^k + U^{-1}L^{-1}Pb, \end{aligned}$$

- Resulta em

$$x^{k+1} = (I - U^{-1}L^{-1}PA)x^k + U^{-1}L^{-1}Pb, \quad (43)$$

- Apresenta a forma de um método iterativo estacionário.

**Exemplo de refinamento como método estacionário**

**Exemplo 56** Resolver o sistema do Exemplo 44, utilizando a formulação mostrada em (43)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo de refinamento como método estacionário**

**Exemplo 56** Resolver o sistema do Exemplo 44, utilizando a formulação mostrada em (43)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

- Três fatores obtidos pela decomposição  $LU$  com pivotação parcial

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,67 & 1 & 0 \\ -0,33 & 0,42 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 0 & 6,33 & 3 \\ 0 & 0 & 2,74 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



**Exemplo de refinamento como método estacionário**

**Exemplo 56** Resolver o sistema do Exemplo 44, utilizando a formulação mostrada em (43)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

- Três fatores obtidos pela decomposição  $LU$  com pivotação parcial

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,67 & 1 & 0 \\ -0,33 & 0,42 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 6 \\ 0 & 6,33 & 3 \\ 0 & 0 & 2,74 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Matriz de iteração

$$(I - U^{-1}L^{-1}PA) = \begin{bmatrix} -3,6384 & 2,2421 & 7,2768 \\ 4,0359 & -6,1000 & -8,0719 \\ -5,1825 & 6,2044 & 10,365 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

**Refinamento como método estacionário cont.**

## • Vetores

$$U^{-1}L^{-1}Pb = x^0 = [1,9731 \quad -0,9738 \quad 4,9647]^T.$$

## • Iterações calculadas por (43)

$k$	$x_1^k$	$x_2^k$	$x_3^k$
0	1,9731	-0,9738	4,9647
1	1,9999	-1,0000	4,9999
2	2,0000	-1,0000	5,0000

**Refinamento como método estacionário cont.**

- Vetores

$$U^{-1}L^{-1}Pb = x^0 = [1,9731 \quad -0,9738 \quad 4,9647]^T.$$

- Iterações calculadas por (43)

$k$	$x_1^k$	$x_2^k$	$x_3^k$
0	1,9731	-0,9738	4,9647
1	1,9999	-1,0000	4,9999
2	2,0000	-1,0000	5,0000

- Comparando com os resultados do Exemplo 44
- Raio espectral  $\rho(I - U^{-1}L^{-1}PA) = 6,2355 \times 10^{-4} < 1$ : processo convergiu.

**Refinamento como método estacionário cont.**

- Vetores

$$U^{-1}L^{-1}Pb = x^0 = [1,9731 \quad -0,9738 \quad 4,9647]^T.$$

- Iterações calculadas por (43)

$k$	$x_1^k$	$x_2^k$	$x_3^k$
0	1,9731	-0,9738	4,9647
1	1,9999	-1,0000	4,9999
2	2,0000	-1,0000	5,0000

- Comparando com os resultados do Exemplo 44
- Raio espectral  $\rho(I - U^{-1}L^{-1}PA) = 6,2355 \times 10^{-4} < 1$ : processo convergiu.
- Perturbação nos fatores  $L$  e  $U$  for grande o suficiente para  $\rho(I - U^{-1}L^{-1}PA) \geq 1$ : processo não mais convergirá.

**Malcondicionamento**

- Sistema linear  $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1,99 \\ 1,97 \end{bmatrix}.$$

- Solução exata:  $x = [1 \ 1]^T$ .

**Malcondicionamento**

- Sistema linear  $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1,99 \\ 1,97 \end{bmatrix}.$$

- Solução exata:  $x = [1 \ 1]^T$ .
- Vetor  $\tilde{b} = [1,99 \ 1,98]^T \approx b$ .
- Solução exata de  $Ay = \tilde{b}$ :  $y = [100 \ -99]^T$ .

**Malcondicionamento**

- Sistema linear  $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1,99 \\ 1,97 \end{bmatrix}.$$

- Solução exata:  $x = [1 \ 1]^T$ .
- Vetor  $\tilde{b} = [1,99 \ 1,98]^T \approx b$ .
- Solução exata de  $Ay = \tilde{b}$ :  $y = [100 \ -99]^T$ .
- Seja a matriz

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,99 \end{bmatrix} \approx A.$$

- Solução exata de  $\tilde{A}z = b$ :  $z = [2 \ -1/99]^T$ .

**Malcondicionamento**

- Sistema linear  $Ax = b$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1,99 \\ 1,97 \end{bmatrix}.$$

- Solução exata:  $x = [1 \ 1]^T$ .
- Vetor  $\tilde{b} = [1,99 \ 1,98]^T \approx b$ .
- Solução exata de  $Ay = \tilde{b}$ :  $y = [100 \ -99]^T$ .
- Seja a matriz

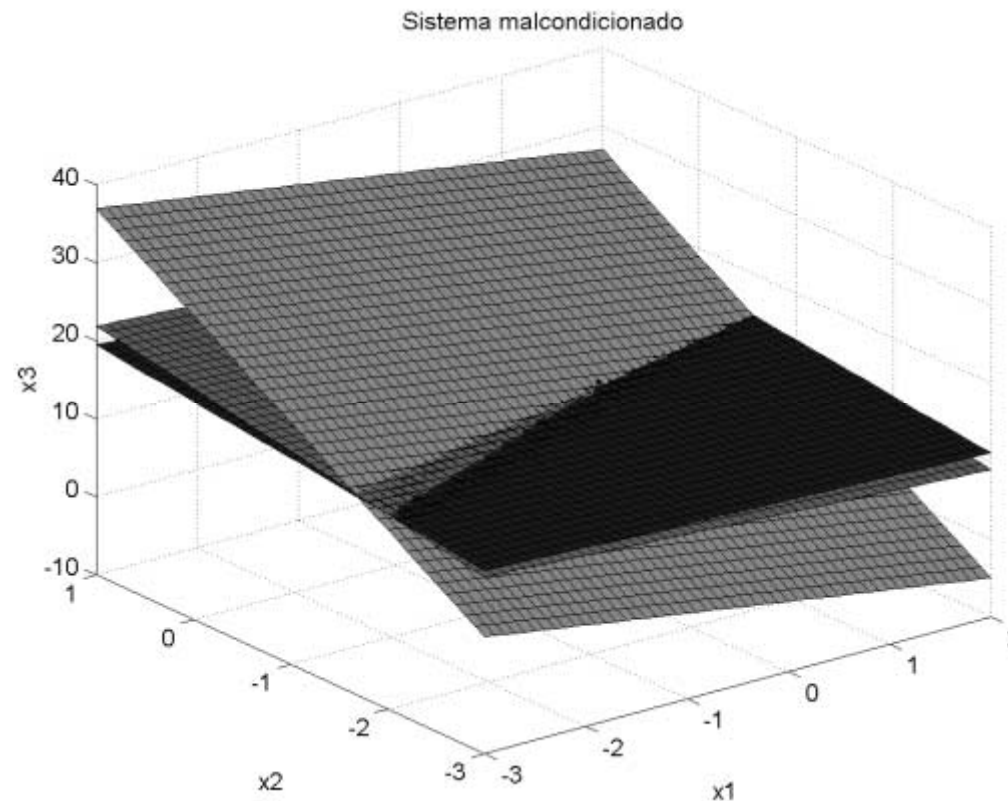
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,99 \end{bmatrix} \approx A.$$

- Solução exata de  $\tilde{A}z = b$ :  $z = [2 \ -1/99]^T$ .
- Matriz  $A$  é quase singular ( $\det(A) = -10^{-4}$ ).
- Sistema linear malcondicionado.



## Interpretação geométrica do malcondicionamento

- Três planos definidos por um sistema linear.
- Dois planos são quase coincidentes.
- Deslocamento no ponto de interseção.



## Problemas do malcondicionamento

- Solução exata de  $Ax = b$ :  $x = [1 \ 1]^T$ .
- Resíduo para  $\tilde{x} = [0,9 \ 1,1]^T$

$$\tilde{r} = b - A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1,99 \\ 1,97 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9 \\ 1,1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \tilde{r} = \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

- Vetor  $\tilde{x} \neq x$ , mas  $\tilde{r} \approx 0$ .
- Resíduo não é bom indicador de exatidão da solução quando o sistema for malcondicionado.

## Problemas do malcondicionamento

- Solução exata de  $Ax = b$ :  $x = [1 \ 1]^T$ .
- Resíduo para  $\tilde{x} = [0,9 \ 1,1]^T$

$$\tilde{r} = b - A\tilde{x} = \begin{bmatrix} 1,99 \\ 1,97 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,9 \\ 1,1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \tilde{r} = \begin{bmatrix} 10^{-3} \\ 10^{-3} \end{bmatrix}.$$

- Vetor  $\tilde{x} \neq x$ , mas  $\tilde{r} \approx 0$ .
- Resíduo não é bom indicador de exatidão da solução quando o sistema for malcondicionado.
- Instabilidade da solução.
- Se  $A$  e/ou  $b$  forem medidas experimentais.

## Singularidade da matriz

- Medir singularidade de  $A$  pelo determinante não constitui boa prática.
- $\det(A) \approx 0$  não indica necessariamente a ocorrência de malcondicionamento.

### Singularidade da matriz

- Medir singularidade de  $A$  pelo determinante não constitui boa prática.
- $\det(A) \approx 0$  não indica necessariamente a ocorrência de malcondicionamento.
- Por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 0,001 & 0,001 \\ -0,001 & 0,001 \end{bmatrix}$$

- $\det(A) = 2 \times 10^{-6}$  e é muito bem-condicionada.
- Seu determinante é pequeno porque seus elementos são pequenos.

## Número de condição

- Número de condição

$$\text{condição}(A) = \kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|. \quad (44)$$

- $\|\cdot\|$ : uma norma matricial qualquer.
- Valor de  $\kappa(A)$  depende da norma utilizada.

## Número de condição

- Número de condição

$$\text{condição}(A) = \kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|. \quad (45)$$

- $\|\cdot\|$ : uma norma matricial qualquer.
- Valor de  $\kappa(A)$  depende da norma utilizada.
- Por exemplo

$$\kappa_2(A) = \begin{cases} \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} & \text{se } A = A^T \\ \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} & \text{se } A \neq A^T \end{cases} \quad (46)$$

- $\lambda(A^{-1}) = \lambda^{-1}(A)$ .
- Sistema  $Ax = b$  é malcondicionado se  $\kappa(A) \gg 1$ .

**Exemplo de número de condição**

**Exemplo 57** Calcular  $\kappa_2(A)$  e  $\kappa_2(B)$  para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$



**Exemplo de número de condição**

**Exemplo 57** Calcular  $\kappa_2(A)$  e  $\kappa_2(B)$  para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

- Por (46)

$$\lambda(A) = (1,9801, -5,0504 \times 10^{-5}) \leadsto$$
$$\kappa_2(A) = \frac{|1,9801|}{|-5,0504 \times 10^{-5}|} = 3,9206 \times 10^4$$

**Exemplo de número de condição**

**Exemplo 57** Calcular  $\kappa_2(A)$  e  $\kappa_2(B)$  para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

- Por (46)

$$\lambda(A) = (1,9801, -5,0504 \times 10^{-5}) \leadsto$$

$$\kappa_2(A) = \frac{|1,9801|}{|-5,0504 \times 10^{-5}|} = 3,9206 \times 10^4 \text{ e}$$

$$\lambda(B^T B) = (1,7423 \times 10^2, 3,7222 \times 10^1, 2,4548 \times 10^1) \leadsto$$

$$\kappa_2(B) = \sqrt{\frac{1,7423 \times 10^2}{2,4548 \times 10^1}} = 2,6641.$$

**Exemplo de número de condição**

**Exemplo 57** Calcular  $\kappa_2(A)$  e  $\kappa_2(B)$  para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

- Por (46)

$$\lambda(A) = (1,9801, -5,0504 \times 10^{-5}) \rightsquigarrow$$

$$\kappa_2(A) = \frac{|1,9801|}{|-5,0504 \times 10^{-5}|} = 3,9206 \times 10^4 \text{ e}$$

$$\lambda(B^T B) = (1,7423 \times 10^2, 3,7222 \times 10^1, 2,4548 \times 10^1) \rightsquigarrow$$

$$\kappa_2(B) = \sqrt{\frac{1,7423 \times 10^2}{2,4548 \times 10^1}} = 2,6641.$$

- Com  $A$ : sistema linear malcondicionado.
- Com  $B$ : bem-condicionado.

## Exemplo clássico de malcondicionamento

- Matriz de Hilbert de ordem  $n$

$$H_n = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

- Por exemplo

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ e } H_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

## Exemplo de matriz de Hilbert

### Exemplo 58 Matriz de Hilbert de ordem 4 e sua inversa.

H =

1.0000	0.5000	0.3333	0.2500
0.5000	0.3333	0.2500	0.2000
0.3333	0.2500	0.2000	0.1667
0.2500	0.2000	0.1667	0.1429

NinfH = 2.0833

Hinv =

16	-120	240	-140
-120	1200	-2700	1680
240	-2700	6480	-4200
-140	1680	-4200	2800

NinfHinv = 13620

## Exemplo de matriz de Hilbert

### Exemplo 58 Matriz de Hilbert de ordem 4 e sua inversa.

H =

1.0000	0.5000	0.3333	0.2500
0.5000	0.3333	0.2500	0.2000
0.3333	0.2500	0.2000	0.1667
0.2500	0.2000	0.1667	0.1429

NinfH = 2.0833

Hinv =

16	-120	240	-140
-120	1200	-2700	1680
240	-2700	6480	-4200
-140	1680	-4200	2800

NinfHinv = 13620

- Considerando que

$$\|H_4\|_\infty = \frac{25}{12} \approx 2,0833 \quad \text{e} \quad \|H_4^{-1}\|_\infty = 13620,$$

- $H_4$  é malcondicionada

$$\kappa_\infty(H_4) = \|H_4\|_\infty \|H_4^{-1}\|_\infty = \frac{25}{12} 13620 = 28375 \gg 1.$$

## Normas- $\infty$ e número de condição das matrizes de Hilbert

$n$	$\ H_n\ _\infty$	$\ H_n^{-1}\ _\infty$	$\kappa_\infty(H_n)$
1	1,00000	$1,00000 \times 10^0$	$1,00000 \times 10^0$
2	1,50000	$1,80000 \times 10^1$	$2,70000 \times 10^1$
3	1,83333	$4,08000 \times 10^2$	$7,48000 \times 10^2$
4	2,08333	$1,36200 \times 10^4$	$2,83750 \times 10^4$
5	2,28333	$4,13280 \times 10^5$	$9,43656 \times 10^5$
6	2,45000	$1,18654 \times 10^7$	$2,90703 \times 10^7$
7	2,59286	$3,79965 \times 10^8$	$9,85195 \times 10^8$
8	2,71786	$1,24631 \times 10^{10}$	$3,38728 \times 10^{10}$
9	2,82897	$3,88712 \times 10^{11}$	$1,09965 \times 10^{12}$
10	2,92897	$1,20716 \times 10^{13}$	$3,53574 \times 10^{13}$

### Sensibilidade da solução

- Sistema  $Ax = b$  e  $\delta b$  sendo uma pequena perturbação em  $b$ .
- Modificação  $\delta x$  na solução  $x = A^{-1}b$  satisfaz

$$\delta x = A^{-1}\delta b.$$



### Sensibilidade da solução

- Sistema  $Ax = b$  e  $\delta b$  sendo uma pequena perturbação em  $b$ .
- Modificação  $\delta x$  na solução  $x = A^{-1}b$  satisfaz

$$\delta x = A^{-1}\delta b.$$

- Pelas propriedades das normas consistentes

$$\|A\|\|x\| \geq \|b\| \quad \text{e} \quad \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\|.$$

- Combinando

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

- Em vista de (45)

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

**Sensibilidade da solução**

- Sistema  $Ax = b$  e  $\delta b$  sendo uma pequena perturbação em  $b$ .
- Modificação  $\delta x$  na solução  $x = A^{-1}b$  satisfaz

$$\delta x = A^{-1}\delta b.$$

- Pelas propriedades das normas consistentes

$$\|A\|\|x\| \geq \|b\| \quad \text{e} \quad \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\delta b\|.$$

- Combinando

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}.$$

- Em vista de (45)

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}. \quad (47)$$

- Limite superior ao erro relativo na solução  $x$ .
- Número de condição  $\kappa(A)$ .

**Exemplo de perturbação no vetor de termos independentes**

**Exemplo 59** Verificar (47) para o sistema  $Ax = b$ , com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1,99 \\ 1,97 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo de perturbação no vetor de termos independentes**

**Exemplo 59** Verificar (47) para o sistema  $Ax = b$ , com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1,99 \\ 1,97 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix}.$$

- Sejam  $x = [1 \ 1]^T$ ,  $\kappa_2(A) = 3,9206 \times 10^4$  (ver Exemplo 57),  $\|b\|_2 = 2,8002$  e  $\|\delta b\|_2 = 10^{-2}$ .
- Limite superior ao erro relativo em termos da norma-2

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \kappa_2(A) \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} = 3,9206 \times 10^4 \frac{10^{-2}}{2,8002} \leadsto \frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq 1,4001 \times 10^2.$$

### Exemplo de perturbação no vetor de termos independentes

**Exemplo 59** Verificar (47) para o sistema  $Ax = b$ , com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1,99 \\ 1,97 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,01 \end{bmatrix}.$$

- Sejam  $x = [1 \ 1]^T$ ,  $\kappa_2(A) = 3,9206 \times 10^4$  (ver Exemplo 57),  $\|b\|_2 = 2,8002$  e  $\|\delta b\|_2 = 10^{-2}$ .

- Limite superior ao erro relativo em termos da norma-2

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \kappa_2(A) \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} = 3,9206 \times 10^4 \frac{10^{-2}}{2,8002} \leadsto \frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq 1,4001 \times 10^2.$$

- Com  $\delta b$ , a solução  $x$  variou de  $[1 \ 1]^T$  para  $[100 \ -99]^T \longrightarrow \delta x = [100-1 \ -99-1]^T \leadsto \|\delta x\|_2 = 1,4072 \times 10^2$ .

- Sendo  $\|x\|_2 = 1,4142$ , na realidade, o erro relativo cometido foi

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} = \frac{1,4072 \times 10^2}{1,4142} = 9,9505 \times 10^1.$$

## Perturbação na matriz dos coeficientes

- Seja

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b \rightarrow Ax + A \delta x + \delta A x + \delta A \delta x = b \leadsto \\ A \delta x = -\delta A(x + \delta x).$$

- Tomando as normas consistentes

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|x + \delta x\| \quad \text{ou}$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

## Perturbação na matriz dos coeficientes

- Seja

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b \rightarrow Ax + A \delta x + \delta A x + \delta A \delta x = b \leadsto \\ A \delta x = -\delta A(x + \delta x).$$

- Tomando as normas consistentes

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|x + \delta x\| \quad \text{ou}$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}.$$

- Maior malcondicionamento de  $Ax = b$ : maior a influência de  $\delta A$  em  $A$  na solução  $x$ .

## Perturbação na matriz dos coeficientes

- Seja

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b \rightarrow Ax + A \delta x + \delta A x + \delta A \delta x = b \leadsto \\ A \delta x = -\delta A(x + \delta x).$$

- Tomando as normas consistentes

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta A\| \|x + \delta x\| \quad \text{ou}$$

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}. \quad (48)$$

- Maior malcondicionamento de  $Ax = b$ : maior a influência de  $\delta A$  em  $A$  na solução  $x$ .
- Coeficientes de  $A$  conhecidos com precisão de quatro decimais e número de condição  $10^3$ : solução  $x$  pode ter precisão de uma decimal.



**Exemplo de perturbação na matriz dos coeficientes**

**Exemplo 60** Verificar (48) para o sistema  $Ax = b$ , com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1,99 \\ 1,97 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo de perturbação na matriz dos coeficientes**

**Exemplo 60** Verificar (48) para o sistema  $Ax = b$ , com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1,99 \\ 1,97 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix}.$$

- Sejam  $\kappa_2(A) = 3,9206 \times 10^4$ ,  $\|\delta A\|_2 = 10^{-2}$  e  $\|A\|_2 = 1,9801$ .
- Erro relativo em termos da norma-2

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x + \delta x\|_2} \leq \kappa_2(A) \frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} = 3,9206 \times 10^4 \frac{10^{-2}}{1,9801} \rightsquigarrow \frac{\|\delta x\|_2}{\|x + \delta x\|_2} \leq 1,9800 \times 10^2.$$

## Exemplo de perturbação na matriz dos coeficientes

**Exemplo 60** Verificar (48) para o sistema  $Ax = b$ , com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,99 \\ 0,99 & 0,98 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1,99 \\ 1,97 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix}.$$

- Sejam  $\kappa_2(A) = 3,9206 \times 10^4$ ,  $\|\delta A\|_2 = 10^{-2}$  e  $\|A\|_2 = 1,9801$ .
- Erro relativo em termos da norma-2

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x + \delta x\|_2} \leq \kappa_2(A) \frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} = 3,9206 \times 10^4 \frac{10^{-2}}{1,9801} \rightsquigarrow \frac{\|\delta x\|_2}{\|x + \delta x\|_2} \leq 1,9800 \times 10^2.$$

- Com a perturbação  $\delta A$ ,  $x$  variou de  $x = [1 \ 1]^T$  para  $\tilde{x} = [2 \ -1/99]^T$ .
- Variação na solução  $\delta x = [2-1 \ -1/99-1]^T$ .
- Erro relativo real

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x + \delta x\|_2} = \frac{1,4214}{2,0000} = 7,1070 \times 10^{-1}.$$

## Capítulo 2: Sistemas lineares

Fim