Quizz 05
Cálculo Numérico / Análise Numérica

Prof.: Fabrício Murai

1. Dado o sistema linear $Ax = b$, sendo a matriz $A = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 52 \end{bmatrix}$ simétrica e definida positiva.

   a) Sendo $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, encontre a solução usando a Decomposição de Cholesky.

   b) Sendo $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$, encontre a solução usando a Decomposição de Cholesky.

a)
A matriz L pode ser obtida utilizando as fórmulas:

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2},\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}},\ j = 1, 2, \ldots, n \text{ e } i = j+1, j+2, \ldots, n.$$

Temos então
Coluna 1: $l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{9} = 3,\ l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{18}{3} = 6$
Coluna 2: $l_{22} = \sqrt{a_{22} - l21^2} = \sqrt{52 - 6^2} = \sqrt{16} = 4$

Esses resultados podem ser observados no dispositivo prático abaixo

A			L		
i\j	1	2	i\j	1	2
1	9	18	1		
2	18	52	2		

$\Downarrow$

A			L		
i\j	1	2	i\j	1	2
1	9	18	1	3	
2	18	52	2	6	

$\Downarrow$

A			L		
i\j	1	2	i\j	1	2
1	9	18	1	3	
2	18	52	2	6	4

Deve ser conferido que $LL^T = A$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 52 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema $Ly = b$ pelas substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \to y = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema $L^T x = y$ pelas substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \to x = \begin{bmatrix} \frac{7}{12} \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

b) A matriz L calculada na letra a) é a mesma para esse item, portanto precisamos realizar novamente apenas os dois últimos passos.

Resolvendo o sistema $Ly = b$ pelas substituições sucessivas

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \to y = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema $L^T x = y$ pelas substituições retroativas

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \to x = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$