Lista de Exercícios de Analise Numérica (Integração e (Isolamento de Raízes ou EDOs))

Prof.: Fabrício Murai

Informações importantes:

- Data de entrega: até 23:55 do dia 05/06/2018.
- Questões podem ser discutidas entre até três alunos. Nomes dos colegas precisam ser listados. Contudo, a escrita das soluções e submissão deve ser feita individualmente.
- Submissão deve ser feita em formato PDF através do Moodle, mesmo que tenham sido resolvidas a mão e escaneadas.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Se puder, peço por favor que marque o tempo gasto para resolver a lista, para que o tamanho da lista de exercícios seja ajustado em semestres futuros.

1. Marque V ou F e justifique:

   (   ) Durante a integração numérica de uma função muito complicada, são escolhidos três pontos colineares. O resultado pela regra do trapézio será igual aquele pela regra 1/3 de Simpson.

   (   ) A regra do trapézio irá sempre superestimar o valor da integral.

   (   ) O número de pontos para se aplicar a regra dos 3/8 de Simpson composta deve ser par.

   (   ) Para um mesmo número de subintervalos, a regra de 1/3 de Simpson possui um limitante superior do erro maior que a regra dos 3/8 de Simpson.

   (   ) Se você pudesse optar entre:

   (a) obter 3 pontos (x_i, y_i) com abcissas igualmente espaçadas e usar a regra do 1/3 de Simpson;

   (b) obter 4 pontos (x_i, y_i) com abcissas igualmente espaçadas e usar a regra dos 3/8 de Simpson.

   a primeira opção seria preferível.

   (   ) Ao se duplicar o número de intervalos na regra do trapézio, o limitante superior do erro de integração cai pela metade.

   (   ) Para garantir a exatidão do cálculo da integral de um polinômio $f(x)$ de grau 8 através da Quadratura de Gauss-Legendre é necessário avaliar a função $f(x)$ em pelo menos 5 pontos.

   (   ) Podemos aplicar uma versão "composta"da Quadratura de Gauss-Legendre a partir do cáculo de um ponto intermediário $t_m = (t_1 + t_2)/2$. A integral numérica será dada por $I = f(t_1) + 2f(t_m) + f(t_2)$.

   (   ) Na Quadratura de Gauss-Legendre, em $I = A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2)$, os valores A_1 e A_2 são as raízes do polinômio de Legendre de grau $n = 2$.

2. Dada a integral

$$\int_1^7 x^2 dx$$

   Resolva usando:

   (a) a regra do trapézio

(b) a regra do 1/3 de Simpson

(c) a regra do trapézio composta, a partir de m = 6 subintervalos

(d) a regra do 1/3 de Simpson composta, a partir de m = 6 subintervalos

(e) a regra dos 3/8 de Simpson composta, a partir de m = 6 subintervalos

3. Calcule o limitante superior para o erro ao aproximar a integral abaixo a partir das regras:

$$\int_1^7 (3x^2 + 4x^3 + e^x)dx$$

(a) a regra do trapézio composta, a partir de m=6 subintervalos

(b) a regra do 1/3 de Simpson composta, a partir de m=6 subintervalos

(c) a regra dos 3/8 de Simpson composta, a partir de m=6 subintervalos

4. Seja a integral

$$\int_1^5 (e^x + x^{-1})dx$$

(a) Calcule o valor da integral utilizando a Quadratura de Gauss-Legendre, com n = 2.

(b) Calcule a cota superior do erro da integral.

Questões exclusivas para TN1 e TN2

5. Dado o polinômio $P(x) = x^4 - 7x^3 - 4x^2 + 45x + 40 = 0$, determine o intervalo em que se encontram as raízes reais.

6. Sobre o polinômio da questão anterior, responda:

(a) O polinômio acima possui alguma raiz nula?

(b) O que se pode dizer sobre o número de raízes reais positivas desse polinômio?

(c) O que se pode dizer sobre o número de raízes reais negativas desse polinômio?

(d) Qual a soma das raízes de $P(x)$?

Questões exclusivas para TB1

5. Considere o modelo Suscetível-Infectado-Recuperado (SIR) visto em sala, descrito pelas equações

$$\frac{ds}{dt} = -\beta s x \tag{1}$$
$$\frac{dx}{dt} = \beta s x - \gamma x \tag{2}$$
$$\frac{dr}{dt} = \gamma x \tag{3}$$

(a) Sabendo que $s + x + r = 1$, elimine x em (1) e (3).

(b) Mostre que a equação obtida para $\frac{ds}{dt}$ no item (a) é satisfeita por

$$s(t) = s_0 \exp\left(-\frac{\beta}{\gamma} r(t)\right), \tag{4}$$

onde s_0 é a fração de indivíduos suscetíveis em $t = 0$.

(c) Utilize (4) para descrever a eq. obtida para $\frac{dr}{dt}$ no item (a), apenas em função de β, γ, s_0 e r.

6. (ATENÇÃO: esta questão requer implementação.) A partir da equação obtida para $\frac{dr}{dt}$ no último item da questão anterior, aproxime os valores de $r(t)$, $s(t)$ e $x(t)$ para $t = 40$, 80 e 120, dados $r(0) = 0$, $x(0) = 0.2$, $\beta = 0.8$, $\gamma = 0.4$, utilizando

   (a) o método de Euler com passo $h = 0.1$;

   (b) o método de Euler com passo $h = 0.05$;

   (c) o método de Heun (Euler melhorado) com passo $h = 0.1$;

   (d) o método de Heun (Euler melhorado) com passo $h = 0.05$.
