Quizz 12
Cálculo Numérico / Análise Numérica

Prof.: Fabrício Murai

Nome:
N^o de matricula:

1. Escreva a matriz de Vandermonde A (5 x 3), a partir das 5 abcissas presentes na tabela:

x	2.0	3.5	4.0	5.1	7.0
y	2.2	2.0	3.0	6.0	5.0

2. Considere a decomposição $A = QR$ pelo método de Gram-Schmidt, em que Q é uma matriz ortogonal (5 x 3) e R é uma matriz tringular superior com elementos da diagonal não-nulos. Encontre os vetor ortonormais $q_1 = a_1/\|a_1\|_2$, $q_2 = \frac{a_2-(a_2\cdot q_1)q_1}{\|a_2-(a_2\cdot q_1)q_1\|}$.

3. Suponha que continuemos a decomposição QR a fim de obter os coeficientes da regressão polinomial $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$. Sabendo que

$$R = \begin{bmatrix} 2.24 & 9.66 & 47.97 \\ 0.00 & 3.73 & 34.05 \\ 0.00 & 0.00 & 6.27 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q'y = \begin{bmatrix} 8.14 \\ 2.78 \\ -0.42 \end{bmatrix},$$

encontre β_2 (**Dica**: os coeficientes podem ser encontrados a partir da solução de $R\beta = Q'y$).

Respostas

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2.00 & 4.00 \\ 1 & 3.50 & 12.25 \\ 1 & 4.00 & 16.00 \\ 1 & 5.10 & 26.01 \\ 1 & 7.00 & 49.00 \end{bmatrix}$$

2. $q_1 = a_1/\|a_1\|_2 = 1/\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2+1^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$q_2 = \frac{a_2-(a_2\cdot q_1)q_1}{\|a_2-(a_2\cdot q_1)q_1\|} = \frac{v_2}{\|v_2\|}$

$v_2 = a_2 - (a_2 \cdot q_1)q_1$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 2.00 \\ 3.50 \\ 4.00 \\ 5.10 \\ 7.00 \end{bmatrix} \text{ - } \left(\begin{bmatrix} 2.00 \\ 3.50 \\ 4.00 \\ 5.10 \\ 7.00 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{bmatrix} \right) * \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 2.00 \\ 3.50 \\ 4.00 \\ 5.10 \\ 7.00 \end{bmatrix} \text{ - } \left(\frac{1}{5} * (2.00 \cdot 1.00 + 3.50 \cdot 1.00 + 4.00 \cdot 1.00 + 5.10 \cdot 1.00 + 7.00 \cdot 1.00) \right) \begin{bmatrix} 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \\ 1.00 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 2.00 \\ 3.50 \\ 4.00 \\ 5.10 \\ 7.00 \end{bmatrix} \text{ - } \begin{bmatrix} 4.32 \\ 4.32 \\ 4.32 \\ 4.32 \\ 4.32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.32 \\ -0.82 \\ -0.32 \\ 0.78 \\ 2.68 \end{bmatrix}$$

$q_2 = \|v_2\| = \sqrt{(-2.32)^2 + (-0.82)^2 + (-0.32)^2 + (0.78)^2 + (2.68)^2} = 3.73$

$\frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{3.73} \begin{bmatrix} -2.32 \\ -0.82 \\ -0.32 \\ 0.78 \\ 2.68 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.62 \\ -0.22 \\ -0.09 \\ 0.21 \\ 0.72 \end{bmatrix}$

3. $R\beta = Q^T y$

$$R = \begin{bmatrix} 2.24 & 9.66 & 47.97 \\ 0.00 & 3.73 & 34.05 \\ 0.00 & 0.00 & 6.27 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.14 \\ 2.78 \\ -0.42 \end{bmatrix}$$

Fazendo-se substituições retroativas, encontra-se:

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.79 \\ 1.36 \\ -0.07 \end{bmatrix}$$