Lista de Exercícios 3 de Analise Numérica

Prof.: Fabrício Murai

Informações importantes:

- Data de entrega: até 23:59 do dia 26/04/2018.
- Questões podem ser discutidas entre até três alunos. Nomes dos colegas precisam ser listados. Contudo, a escrita das soluções e submissão deve ser feita individualmente.
- Submissão deve ser feita em formato PDF através do Moodle, mesmo que tenham sido resolvidas a mão e escaneadas.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Se puder, peço por favor que marque o tempo gasto para resolver a lista, para que o tamanho da lista de exercícios seja ajustado em semestres futuros.

1. Considere os pontos $\{(0.0, 0.0), (0.63, 0.59), (1.26, 0.95), (1.88, 0.95)\}$.

   (a) Seja o polinômio de Lagrange $L_n(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots c_n P_n(x)$. Determine $P_0(x)$ e $P_2(x)$.

   (b) Com a ajuda de uma calculdora, calcule o valor da interpolação em $x = \sqrt{2}/2$ a partir de $L_n(x)$.

   (c) Sem fazer contas, calcule $P_0(0.63)$.

   (d) Sem fazer contas, calcule $L_n(0.0)$.

2. Implemente a função InterpolacaoLagrange abaixo usando a matriz G vista no final da aula do dia 10/Abril. A função recebe como entrada dois arrays de mesmo tamanho - x contém as abcissas, y, as ordenadas - e uma abcissa z a ser interpolada. **Nota: a derivação da Interpolação de Lagrange a partir da matriz G faz uso do fator $\frac{x-x_i}{x-x_i}$. A suposição implícita é que $x \neq x_i$, ou seja, que o ponto a ser interpolado é diferente das abcissas dadas como entrada. Caso contrário, y_i deverá ser retornado.**

```
def InterpolacaoPolinomial(x, y, z):
    m = length(x)             # numero de pontos m=n+1
    for i in range(m):
        if z == x[i]:
            return
    G = np.zeros((m,m))
    for i in range(m):
        for j in range(m):
        # Preencher G aqui
    Gd =
    Gi = np.zeros(m)
    for i in range(m):
        Gi =
    somatorio = 0.0
    for i in range(m):
        somatorio +=
    y_z = Gd * somatorio
    return y_z
```

3. Nesta questão vamos usar sua implementação para verificar o que acontece ao escolhermos alguns dos pontos dados na Questão 1 para obter uma interpolação de grau menor.

   (a) Usando todos os pontos dados, obtenha interpolações para $z \in \{0.01, 0.02, \ldots, 3.14\}$. Dica: `z = np.arange(0.01,3.15,0.01)`.
   (b) Plote um gráfico com duas curvas: a primeira é formada pelas interpolações obtidas e a segunda é obtida pela função $f(z) = \text{sen}(z)$. Você pode usar o código no notebook da aula para gerar o gráfico. Dica: `f = np.sin(z)`.
   (c) O que acontece se você trocar a ordem em que os pontos (x_i, y_i) aparecem na entrada? Por exemplo: `x = np.array([0.63,0.0,1.26,1.88]); y = np.array([0.59,0.0,0.95,0.95])`?
   (d) O que acontece se você usar apenas três pontos para calcular a interpolação? Por exemplo, qual a diferença para a aproximação obtida para $z = 1.2$ quando você usa `x = np.array([0.0,0.63,1.26,1.88])` e `x = np.array([0.0,0.63,1.88])`?

4. Considere novamente os pontos dados na Questão 1.

   (a) Calcule as diferenças dividas de ordem até 3.
   (b) Usando uma calculadora, determine $P_3(\sqrt{2}/2)$ usando uma interpolação de Newton de grau 3. Não vale dizer que a resposta é igual a da Questão 1.b.
   (c) Faça a mesma coisa para $P_3(\sqrt{3}/2)$.

5. Mostre como alterar a implementação do Polinômio de Newton disponível na página da disciplina para que o último laço (onde y_z é calculado) realize apenas $\mathcal{O}(n)$ operações. **Dica:** você pode usar o Processo de Horner, mas não é obrigado a fazê-lo.

6. Assinale **V** para verdadeiro, **F** para falso e **justifique**:
   ( ) Usando os mesmos pontos, a interpolação de Lagrange e a interpolação de Newton podem gerar resultados diferentes.

   ( ) É possível interpolar $n + 1$ pontos quaisquer com um polinômio de grau $n - 1$, desde que as abcissas sejam diferentes.

   ( ) Dados cinco pontos de uma função desconhecida f, se a diferença dividida de ordem 4 é zero, sabemos que f é um polinômio de grau 3.

   ( ) Se o polinômio interpolador corta todos os pontos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, o erro $f(x) - P_n(x) = 0$ para qualquer x no intervalo $[x_0, x_n]$.

7. Dados os pontos $x = (1.00, 1.25, 1.50, 1.75, 2.00, 4.00, 4.25)$ e $y = (1.65, 2.72, 3.08, 3.40, 3.86, 3.96, 4.48)$, quais seriam as escolhas mais adequadas para uma interpolação cúbica em $z = 2.2$?

8. Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$ e os pontos $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$ e $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.667 \\ 0.4 \end{bmatrix}$.

   Qual a cota superior do módulo do erro de truncamento na interpolação polinomial de $x = 1.2$ usando todos os pontos?

9. Considere a função $f : \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Z}^*$, onde $f(n) = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2$. Sabendo que a soma dos n primeiros inteiros elevados a k é um polinômio de grau $k+1$, use a interpolação polinomial para mostrar que $f(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

10. Assinale V para verdadeiro, F para falso e justifique:

    ( ) A interpolação polinomial de grau 10 por Lagrange requer menos operações aritméticas que o necessário via solução de sistema linear.

    ( ) Um polinômio de Newton de grau n pode ter seu grau aumentado somando-se um termo a $P_n(x)$.

    ( ) Os polinômios de Lagrange permitem aumentar o grau adicionando-se mais termos sem alterar os anteriores.