Quiz 21
Cálculo Numérico / Análise Numérica

Prof.: Fabrício Murai

Nome:
N° de matricula:

1. Encontre o par (x,y) que minimiza $f(x,y) = -x^2 - y^2$, usando o método de Newton para duas dimensões, começando a partir do ponto (1,1).

$$z_{n+1} = x_n - (H(z_n))^{-1}\nabla f(z_n)$$

onde $z_n = (x_n, y_n)$ e H é a matriz Hessiana de $f(x,y)$.

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_n) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_n) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(z_n) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_n) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_n}(z_n) \\ \frac{\partial f}{\partial y_n}(z_n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

É necessário apenas uma iteração porque como o valor obtido de (x,y) = (0,0), isso faz com que ∇f na segunda iteração seja 0, ou seja, teríamos a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Marque V para verdadeiro e F para falso. Justifique sua resposta.
`(F)` Seja uma função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se x^* é o único ponto em que o gradiente ∇g é nulo, então $g(x^*)$ é necessariamente o mínimo ou máximo de g.

   Falso, pois x^* pode ser um ponto de cela (um exemplo fácil de visualizar, no caso unidimensional $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seria $g(x) = x^3$).

`(V)` Encontrar os pontos críticos de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ equivale a resolver um sistema de equações (lineares ou não-lineares).

Encontrar os pontos críticos de g consiste de resolver o sistema $\frac{\partial g}{\partial x_1} = 0$ e $\frac{\partial g}{\partial x_2} = 0$, onde cada uma das derivadas parciais pode ser linear ou não-linear em x_1, x_2.

`(F)` Seja um polinômio $h(x, y, z)$ de grau 1. Pode-se aplicar o método de Newton para encontrar os pontos críticos de $h(x, y, z)$.

O método de Newton multivariado depende da inversa da Hessiana $\nabla^2 h = 0$ da função h, que no caso é a matriz nula. Como a matriz nula é singular, não possui inversa.

Resposta alternativa: considere o polinômio $h(x, y, z) = a + bx + cy + dz$, onde pelo menos um dos coeficientes b, c ou d é não nulo. Nota-se que h não possui pontos críticos, pois $\nabla h = (b, c, d)$.