

Cálculo Numérico

Aritmética de Ponto Flutuante e Noções de Erro

Ana Paula



- 1 Introdução
- 2 Sistemas de Numeração
- 3 Representação de Números Inteiros no Computador
- 4 Representação de Números Reais no Computador
- 5 Operações Aritméticas em Ponto Flutuante
- 6 Noções Básicas Sobre Erros
- 7 Efeitos Numéricos

Introdução

Introdução

- ▶ O objetivo aqui é estudar métodos numéricos
- ▶ Logo, é importante entender como os números são representados no computador e como as operações aritméticas são realizadas
 - ▶ Limitações da representação finita
 - ▶ Determinar os casos em que erros ocorrem
- ▶ Noções de erro
 - ▶ Efeitos numéricos
 - ▶ Cancelamento
 - ▶ Propagação do erro

Introdução

- ▶ O objetivo aqui é estudar métodos numéricos
- ▶ Logo, é importante entender como os números são representados no computador e como as operações aritméticas são realizadas
 - ▶ Limitações da representação finita
 - ▶ Determinar os casos em que erros ocorrem
- ▶ Noções de erro
 - ▶ Efeitos numéricos
 - ▶ Cancelamento
 - ▶ Propagação do erro

Sistemas de Numeração

Sistema Decimal

- ▶ O sistema decimal é normalmente adotado
 - ▶ Dez dígitos são utilizados para representar os números
 - ▶ base 10
 - ▶ Sistema posicional
- ▶ Qualquer número inteiro no sistema decimal pode ser representado como

$$\begin{aligned} N &= (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_{10} \\ &= a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0 \end{aligned}$$

onde $a_i \in \{0, 1, \dots, 8, 9\}$

Sistema Decimal

- ▶ Por exemplo

$$(21)_{10} = 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

$$(2001)_{10} = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

Sistema Decimal

- ▶ Por exemplo

$$(21)_{10} = 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

$$(2001)_{10} = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

Sistema Binário

- ▶ Os computadores adotam um sistema com dois estados
- ▶ Sistema binário
 - ▶ base 2
- ▶ Também é posicional
- ▶ Os números não negativos podem ser representados como

$$\begin{aligned} N &= (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0)_2 \\ &= a_n \times 2^n + a_{n-1} \times 2^{n-1} + \dots + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0 \end{aligned}$$

onde $a_i \in \{0, 1\}$

Sistema Binário

- ▶ Por exemplo

$$(101)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$(1001)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

Sistema Binário

- ▶ Por exemplo

$$(101)_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$(1001)_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

Representação de Números Inteiros no Computador

Conversão de Bases

- ▶ Um número na base β pode ser convertido para base decimal como

$$(N)_{10} = a_n \times \beta^n + a_{n-1} \times \beta^{n-1} + \cdots + a_1 \times \beta^1 + a_0 \times \beta^0$$

onde a_i são os dígitos do número representado em na base β

Exemplo

► **Exemplo 1**

Converta $(110)_2$ para a base decimal.

Exemplo

► Exemplo 2

Converta $(1001)_2$ para a base decimal.

Conversão de Bases

- ▶ Conversão da base decimal para a base β
 - ▶ Divisões sucessivas do número em base decimal por β até que o quociente seja igual a zero
 - ▶ O número na base β é formado pela concatenação em ordem inversa dos restos das divisões

Exemplo

► Exemplo 3

Converta $(35)_{10}$ para a base 2.

Representação de Números Inteiros no Computador

- ▶ Para número não negativos, a representação é direta

$$33 \Rightarrow \boxed{0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1}$$

- ▶ Para número inteiros com sinal, uma possibilidade é reservar 1 bit para indicar o sinal

- ▶ 0 \Rightarrow positivo

- ▶ 1 \Rightarrow negativo

$$-33 \Rightarrow \boxed{1 \mid 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1}$$

- ▶ 32 bits são normalmente adotados para representação simples
 - ▶ Valores em $[0, 2^{32} - 1]$ podem ser representados quando o sinal não é considerado

Representação de Números Inteiros no Computador

- ▶ Para número não negativos, a representação é direta

$$33 \Rightarrow \boxed{0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1}$$

- ▶ Para número inteiros com sinal, uma possibilidade é reservar 1 bit para indicar o sinal

- ▶ 0 \Rightarrow positivo

- ▶ 1 \Rightarrow negativo

$$-33 \Rightarrow \boxed{1 \mid 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1}$$

- ▶ 32 bits são normalmente adotados para representação simples
 - ▶ Valores em $[0, 2^{32} - 1]$ podem ser representados quando o sinal não é considerado

Representação de Números Inteiros no Computador

- ▶ Para número não negativos, a representação é direta

$$33 \Rightarrow \boxed{0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1}$$

- ▶ Para número inteiros com sinal, uma possibilidade é reservar 1 bit para indicar o sinal

- ▶ 0 \Rightarrow positivo
- ▶ 1 \Rightarrow negativo

$$-33 \Rightarrow \boxed{1 \mid 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1}$$

- ▶ 32 bits são normalmente adotados para representação simples
 - ▶ Valores em $[0, 2^{32} - 1]$ podem ser representados quando o sinal não é considerado

Representação de Números Reais no Computador

Representação de Números Reais no Computador

- ▶ Um número real positivo x pode ser escrito como

$$x = \underbrace{\sum_{i=0}^n a_i B^i}_{x_{\text{int}}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} b_i B^{-i}}_{x_{\text{frac}}}$$

onde a_i e b_i são, respectivamente, os coeficientes da parte inteira e fracionária do número x

- ▶ Por exemplo,

$$(123,45)_{10} = 1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$$

Representação de Números Reais no Computador

- ▶ Se $b_i = 0$ para todo i maior que um valor inteiro, então diz-se que a fração termina
- ▶ Caso contrário, diz-se que a fração não termina
- ▶ Exemplos:

$$0,45 = 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} \quad \Rightarrow \text{termina}$$

$$0,666\dots = 6 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} + 6 \times 10^{-3} + \dots \quad \Rightarrow \text{não termina}$$

Mudança de Base

- ▶ Conversão de base 2 para decimal
 - ▶ Similar ao caso inteiro
- ▶ Conversão de base decimal para binária
 - ▶ Converte-se a parte inteira
 - ▶ Divisões sucessivas
 - ▶ Converte-se a parte fracionária
 - ▶ Multiplicações sucessivas

Mudança de Base

- ▶ Conversão de base 2 para decimal
 - ▶ Similar ao caso inteiro
- ▶ Conversão de base decimal para binária
 - ▶ Converte-se a parte inteira
 - ▶ Divisões sucessivas
 - ▶ Converte-se a parte fracionária
 - ▶ Multiplicações sucessivas

Mudança de Base – Multiplicações sucessivas

- ▶ Seja $(x_{\text{frac}})_{10}$ a parte fracionária de $(x)_{10}$, a fração binária $(,b_1b_2\dots)_2$ é determinada como

$$c_0 = x_{\text{frac}}$$

$$b_1 = (2 \times c_0)_{\text{int}}$$

$$b_2 = (2 \times c_1)_{\text{int}}$$

$$\vdots$$

$$c_1 = (2 \times c_0)_{\text{frac}}$$

$$c_2 = (2 \times c_1)_{\text{frac}}$$

$$\vdots$$

onde “int” representa a parte inteira do número e “frac” a parte fracionária

- ▶ O processo pode ser finalizado quando $c_i = 0$

Exemplo

► Exemplo 4

Converta o número $(111,01)_2$ para a base 10.

Exemplo

► Exemplo 5

Converta o número $(3,25)_{10}$ para a base 2.

Exemplo

► Exemplo 6

Converta o número $(0,1)_{10}$ para a base 2.

Representação de Números Reais no Computador

- ▶ O computador representa os números em sistema binário
- ▶ A representação é finita
 - ▶ Números como o $\pi = 3,1415\dots$ são aproximados
- ▶ Existem duas formas de representar números reais no computador
 - ▶ Ponto fixo
 - ▶ **Ponto flutuante**

Representação em Ponto Fixo

- ▶ Neste sistema uma palavra (número) é representada por 3 campos
 - ▶ 1 bit para o sinal
 - ▶ bits que formam a parte inteira
 - ▶ bits que formam a parte fracionária
- ▶ Por exemplo, o número $(12,75)_{10}$ pode ser representado em um sistema com 32 bits (15 bits para a parte inteira e 16 bits para a parte fracionária) como

0	000000000001100	1100000000000000
---	-----------------	------------------

- ▶ O sistema de ponto fixo limita muito a magnitude dos números que podem ser representados
- ▶ Essa representação é raramente adotada

Representação em Ponto Fixo

- ▶ Neste sistema uma palavra (número) é representada por 3 campos
 - ▶ 1 bit para o sinal
 - ▶ bits que formam a parte inteira
 - ▶ bits que formam a parte fracionária
- ▶ Por exemplo, o número $(12,75)_{10}$ pode ser representado em um sistema com 32 bits (15 bits para a parte inteira e 16 bits para a parte fracionária) como

0	0000000000001100	1100000000000000
---	------------------	------------------

- ▶ O sistema de ponto fixo limita muito a magnitude dos números que podem ser representados
- ▶ Essa representação é raramente adotada

Representação em Ponto Fixo

- ▶ Neste sistema uma palavra (número) é representada por 3 campos
 - ▶ 1 bit para o sinal
 - ▶ bits que formam a parte inteira
 - ▶ bits que formam a parte fracionária
- ▶ Por exemplo, o número $(12,75)_{10}$ pode ser representado em um sistema com 32 bits (15 bits para a parte inteira e 16 bits para a parte fracionária) como

0	000000000001100	110000000000000000
---	-----------------	--------------------

- ▶ O sistema de ponto fixo limita muito a magnitude dos números que podem ser representados
- ▶ Essa representação é raramente adotada

Representação em Ponto Flutuante

- ▶ A representação em ponto flutuante é baseado na notação científica

$$x = \pm d \times \beta^e$$

onde d é a mantissa, β é a base do sistema de numeração e e é o expoente

- ▶ A mantissa é um número na forma

$$(0, d_1 d_2 \dots d_t)_\beta$$

onde t é o número de dígitos e $d_i \in \{0, 1, \dots, (\beta - 1)\}$, $i = 1, \dots, t$

- ▶ O expoente e é definido no intervalo $[L, U]$
- ▶ Um número é dito normalizado quando $d_1 \neq 0$
 - ▶ Os sistemas apresentados no curso são normalizados (a menos que o contrário seja dito)

Representação em Ponto Flutuante

- ▶ Um sistema de ponto flutuante pode ser definido como

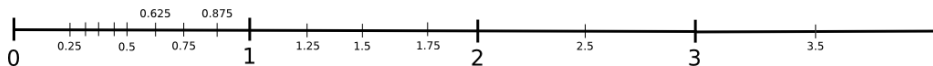
$$F(\beta, t, L, U)$$

onde

- ▶ β é a base do sistema
- ▶ t é o número de dígitos da mantissa
- ▶ L é o menor valor para o expoente
- ▶ U é o maior valor para o expoente

Representação em Ponto Flutuante

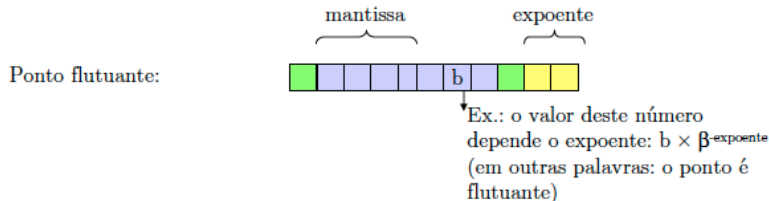
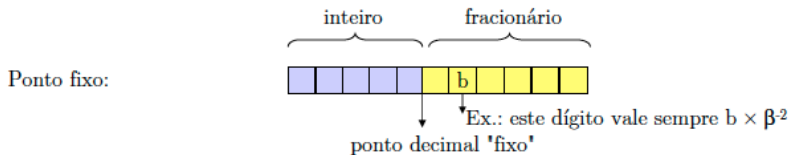
- ▶ Nota-se que os números em ponto flutuante são discretos
- ▶ Uma característica é a variação entre a discretização de números com magnitudes diferentes



Ponto Fixo *versus* Ponto Flutuante

Diferenças: ponto fixo \times flutuante

Suponha que temos 10 dígitos disponíveis:



Ponto Fixo *versus* Ponto Flutuante

Exemplo: ponto fixo \times flutuante

Base 10.

	ponto fixo	ponto flutuante																						
2343.12	<table><tr><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	0	2	3	4	3	1	2					<table><tr><td>+</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>4</td></tr></table>	+	2	3	4	3	1	2		+	0	4
0	2	3	4	3	1	2																		
+	2	3	4	3	1	2		+	0	4														
0.0012234	<table><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>	0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	3	<table><tr><td>+</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td></td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>2</td></tr></table>	+	1	2	3	3	4			-	0	2
0	0	0	0	0	0	0	1	2	2	3														
+	1	2	3	3	4			-	0	2														
123456789	<table><tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>												<table><tr><td>+</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>8</td><td>+</td><td>0</td><td>7</td></tr></table>	+	1	2	3	4	5	6	8	+	0	7
+	1	2	3	4	5	6	8	+	0	7														

(Questão em aberto: arredondamento!)

Exemplo

► Exemplo 7

Considerando o sistema $F(10, 3, -5, 5)$.

Represente o número 1,23 nesse sistema.

Exemplo

► Exemplo 8

Considerando o sistema $F(10, 3, -5, 5)$.

Qual o menor número em valor absoluto que esse sistema pode representar?

Exemplo

► Exemplo 9

Considerando o sistema $F(10, 3, -5, 5)$.

Qual o maior número que esse sistema pode representar?

Representação em Ponto Flutuante

- ▶ Sejam m e M , respectivamente, o menor e o maior valores absolutos representáveis no sistema $F(\beta, t, L, U)$
- ▶ Dado um número x , então
 - ▶ Se $m \leq |x| \leq M$, então o número pode ser representado no sistema
 - ▶ Os valores podem ser arredondados ou truncados
 - ▶ Truncamento: dígitos $d_{t+1}d_{t+2} \dots$ são removidos
 - ▶ Arredondamento: na base 10, além de remover os dígitos $d_{t+1}d_{t+2} \dots$, soma-se 1 ao dígito d_t se $d_{t+1} \geq 5$,
 - ▶ Se $|x| < m$, então o número não pode ser representado no sistema e diz-se que ocorre *underflow*
 - ▶ Se $|x| > M$, então o número não pode ser representado no sistema e diz-se que ocorre *overflow*

Exemplo

► Exemplo 10

Considerando o sistema $F(2, 3, -1, 2)$ com truncamento.
Represente o número $(0,38)_{10}$ nesse sistema.

Exemplo

► Exemplo 11

Considerando o sistema $F(2, 3, -1, 2)$ com truncamento.
Represente o número $(5,3)_{10}$ nesse sistema.

Exemplo

► Exemplo 12

Considerando o sistema $F(2, 3, -1, 2)$ com truncamento.
Represente o número $(0,15)_{10}$ nesse sistema.

Operações Aritméticas em Ponto Flutuante

Operações Aritméticas em Ponto Flutuante

▶ Adição/Subtração

- ▶ Deve-se ajustar o número de menor expoente para igualá-lo ao do outro número

▶ Multiplicação/Divisão

- ▶ Realiza-se a operação nas mantissas e nos expoentes
- ▶ Os valores devem ser representados no sistema utilizado
- ▶ Os resultados devem ser truncados ou arredondados
 - ▶ Definição do sistema

Operações Aritméticas em Ponto Flutuante

- ▶ Adição/Subtração
 - ▶ Deve-se ajustar o número de menor expoente para igualá-lo ao do outro número
- ▶ Multiplicação/Divisão
 - ▶ Realiza-se a operação nas mantissas e nos expoentes
- ▶ Os valores devem ser representados no sistema utilizado
- ▶ Os resultados devem ser truncados ou arredondados
 - ▶ Definição do sistema

Operações Aritméticas em Ponto Flutuante

- ▶ Adição/Subtração
 - ▶ Deve-se ajustar o número de menor expoente para igualá-lo ao do outro número
- ▶ Multiplicação/Divisão
 - ▶ Realiza-se a operação nas mantissas e nos expoentes
- ▶ Os valores devem ser representados no sistema utilizado
- ▶ Os resultados devem ser truncados ou arredondados
 - ▶ Definição do sistema

Exemplo

► Exemplo 13

Seja o sistema $F(10, 2, L, U)$ com arredondamento; os limitantes do expoente são ignorados nesse exemplo. Some 4,32 e 0,064 nesse sistema.

Exemplo

► Exemplo 14

Seja o sistema $F(10, 2, L, U)$ com arredondamento. Multiplique 1234 por 0,016 nesse sistema.

Noções Básicas Sobre Erros

Noções Básicas Sobre Erros

- ▶ Além disso, erros podem ser introduzidos ao representar números no computador
- ▶ Um número real x provavelmente será aproximado quando representado em ponto flutuante no computador
- ▶ É necessário definir medidas para calcular erros em aproximações
 - ▶ erro absoluto
 - ▶ erro relativo

Erro Absoluto

- ▶ Seja \bar{x} uma aproximação de x , o erro absoluto é definido como

$$EA(\bar{x}) = |x - \bar{x}|$$

Exemplo

► Exemplo 15

Seja o sistema $F(10, 4, L, U)$ com arredondamento. Qual o erro absoluto ao representar $x = 1428,756$ nesse sistema?

► Solução:

$$\bar{x} = 0,1429 \times 10^4 \Rightarrow EA(\bar{x}) = |1428,756 - 1429| = 0,244$$

Exemplo

► Exemplo 15

Seja o sistema $F(10, 4, L, U)$ com arredondamento. Qual o erro absoluto ao representar $x = 1428,756$ nesse sistema?

► Solução:

$$\bar{x} = 0,1429 \times 10^4 \Rightarrow EA(\bar{x}) = |1428,756 - 1429| = 0,244$$

Exemplo

► Exemplo 16

Seja o sistema $F(10, 4, L, U)$ com truncamento. Qual o erro absoluto ao representar $x = 1428,756$ nesse sistema?

► Solução:

$$\bar{x} = 0,1428 \times 10^4 \Rightarrow EA(\bar{x}) = |1428,756 - 1428| = 0,756$$

Exemplo

► Exemplo 16

Seja o sistema $F(10, 4, L, U)$ com truncamento. Qual o erro absoluto ao representar $x = 1428,756$ nesse sistema?

► Solução:

$$\bar{x} = 0,1428 \times 10^4 \Rightarrow EA(\bar{x}) = |1428,756 - 1428| = 0,756$$

Erro Relativo

- ▶ Seja \bar{x} uma aproximação de x , o erro relativo é definido como

$$ER(\bar{x}) = \frac{|x - \bar{x}|}{|x|} = \frac{EA(\bar{x})}{|x|}$$

- ▶ dado $x \neq 0$.

Exemplo

► Exemplo 17

Sejam $x_1 = 1000,5$, $\bar{x}_1 = 1000,6$, $x_2 = 10,5$ e $\bar{x}_2 = 10,6$. Nota-se que $EA(\bar{x}_1) = EA(\bar{x}_2) = 0,1$. Quais os erros relativos?

Noções Básicas Sobre Erros

- ▶ O valor de x geralmente não é conhecido
- ▶ Na prática utiliza-se uma medida de erro entre aproximações

$$\frac{||x_{novo} - x_{antigo}||}{||x_{novo}||}$$

Efeitos Numéricos

Efeitos Numéricos

- ▶ Além dos erros causados pela representação no computador, existem certos efeitos numéricos que contribuem para aumentar os erros
 - ▶ Somar (ou subtrair) números com ordens de grandeza muito diferentes
 - ▶ Cancelamento
 - ▶ Propagação do erro

Efeitos Numéricos

- ▶ Somar (ou subtrair) números com ordens de grandeza muito diferentes
 - ▶ As operações de soma e subtração podem não ter o efeito desejado
- ▶ Por exemplo, ao somar 0,1 e 5000 num sistema $F(10, 4, L, U)$, obtém-se

$$\begin{aligned}0,1 + 5000 &= 0,1000 \times 10^0 + 0,5000 \times 10^4 \\&= 0,00001 \times 10^4 + 0,5000 \times 10^4 \\&= 0,50001 \times 10^4 \\&= 0,5000 \times 10^4 \text{ (arredondando ou truncando)}\end{aligned}$$

Efeitos Numéricos

- ▶ Cancelamento
 - ▶ Ocorre quando dois números muito parecidos são subtraídos
 - ▶ Os expoentes devem ser igualados quando se calcula $x - y$
 - ▶ Quando x e y são similares, vários zeros aparecem no final da mantissa do resultado ao normalizá-lo
 - ▶ Ocorre assim uma perda de dígitos significativos

Efeitos Numéricos

- ▶ Propagação dos erros
 - ▶ Um grande número de operações elementares é normalmente utilizado em métodos numéricos para buscar a solução de um determinado problema
 - ▶ Assim, o erro cometido em uma operação isolada pode não ser muito significativo para a solução do problema tratado
 - ▶ Entretanto, é necessário analisar como esses erros se propagam
 - ▶ erro ilimitado: se acumulam a uma taxa crescente e a sequência de operações é considerada instável
 - ▶ erro limitado: se acumulam a uma taxa decrescente e a sequência de operações é considerada estável

Efeitos Numéricos

► Propagação dos erros

- Por exemplo, considerando um sistema $F(10, 4, L, U)$ com truncamento, ao efetuar a operação

$$S = \sum_{i=1}^4 (x_i + y_i); \quad x_i = 0,46709 \text{ e } y_i = 3,5678$$

- Para $i = 1$

$$(x_1 + y_1) = 0,4034 \times 10^1$$

e o erro absoluto é dado por $EA(\bar{S}) = |4,03569 - 4,034| = 0,00169$

- Para $i = 2$

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0,8068 \times 10^1$$

e o erro absoluto é dado por $EA(\bar{S}) = |8,07138 - 8,068| = 0,00338$

Efeitos Numéricos

► Propagação dos erros

- Por exemplo, considerando um sistema $F(10, 4, L, U)$ com truncamento, ao efetuar a operação

$$S = \sum_{i=1}^4 (x_i + y_i); \quad x_i = 0,46709 \text{ e } y_i = 3,5678$$

- Para $i = 1$

$$(x_1 + y_1) = 0,4034 \times 10^1$$

e o erro absoluto é dado por $EA(\bar{S}) = |4,03569 - 4,034| = 0,00169$

- Para $i = 2$

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0,8068 \times 10^1$$

e o erro absoluto é dado por $EA(\bar{S}) = |8,07138 - 8,068| = 0,00338$

Efeitos Numéricos

► Propagação dos erros

- Por exemplo, considerando um sistema $F(10, 4, L, U)$ com truncamento, ao efetuar a operação

$$S = \sum_{i=1}^4 (x_i + y_i); \quad x_i = 0,46709 \text{ e } y_i = 3,5678$$

- Para $i = 1$

$$(x_1 + y_1) = 0,4034 \times 10^1$$

e o erro absoluto é dado por $EA(\bar{S}) = |4,03569 - 4,034| = 0,00169$

- Para $i = 2$

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = 0,8068 \times 10^1$$

e o erro absoluto é dado por $EA(\bar{S}) = |8,07138 - 8,068| = 0,00338$

Efeitos Numéricos

► Propagação dos erros

► Para $i = 3$

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = 0,1210 \times 10^2$$

e o erro absoluto é dado por $EA(\bar{S}) = |12,10707 - 12,10| = 0,00707$

► Para $i = 4$

$$S = \sum_{i=1}^4 (x_i + y_i) = 0,1613 \times 10^2$$

e o erro absoluto é dado por $EA(\bar{S}) = |16,14267 - 16,13| = 0,01276$

- Pode-se observar que o erro absoluto aumenta à medida em que as operações são realizadas

Efeitos Numéricos

► Propagação dos erros

- Para $i = 3$

$$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = 0,1210 \times 10^2$$

e o erro absoluto é dado por $EA(\bar{S}) = |12,10707 - 12,10| = 0,00707$

- Para $i = 4$

$$S = \sum_{i=1}^4 (x_i + y_i) = 0,1613 \times 10^2$$

e o erro absoluto é dado por $EA(\bar{S}) = |16,14267 - 16,13| = 0,01276$

- Pode-se observar que o erro absoluto aumenta à medida em que as operações são realizadas

Efeitos Numéricos

- ▶ A implementação ou o uso incorreto de algoritmos e softwares científicos já foi responsável por alguns desastres
- ▶ Guerra do Golfo (1991)
- ▶ Uma bateria de mísseis Patriot (“Phased Array TRacking Intercept Of Target”) americano, falhou ao rastrear e interceptar um míssil Scud do Iraque
- ▶ O míssil Scud acertou o acampamento americano
 - ▶ 28 soldados morreram e centenas ficaram feridos
- ▶ O tempo era medido em décimos de segundo
 - ▶ Uma dízima periódica em um sistema binário
- ▶ O acúmulo do erro durante o tempo em que o sistema estava operante levou à falha

Fontes

- ▶ Curso de Cálculo Numérico - UFJF

Dúvidas?

