Quizz 06
Cálculo Numérico / Análise Numérica

Prof.: Fabrício Murai

1. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 52 \end{bmatrix}$ e sua decomposição LU sendo,
   $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $U = \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$.

   a) Calcule o erro residual ($r = b - Ax$), sendo que $x_c = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,1 \end{bmatrix}$ e
   $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

   b) Use r para executar um refinamento da solução x_0.

2. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e sua inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
   Calcule o número de condicionamento segundos as normas:

   a) Norma-1. É bem condicionado?

   b) Norma-infinito. É bem condicionado?

   c) Considere um erro na medição do vetor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, resultando no vetor $b' = \begin{bmatrix} 1,1 \\ 1,9 \\ 3,0 \end{bmatrix}$. Usando o número de condição calculado a partir da norma-infinito, determine o limite superior do erro da aproximação encontrada ao se resolver $Ax = b'$.

1. a)
   O resíduo r pode ser obtido usando a relação $r = b - Ax$

$$r = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

1. b)

Temos que $x_1 = x_0 + c_0$ e $Ax_1 = b$, então, $A(x_0 + c_0) = b \Rightarrow Ac_0 = b - Ax_0$. Como $b - Ax_0 = r$, $Ac_0 = r_0$, portanto c_0 é a solução do sistema $Ac_0 = r_0$. Usando o método LU, $Uc_0 = y$ e $Ly = r_0$.

$$Ly = r_0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo pelas substituições sucessivas, $y = \begin{bmatrix} 0,3 \\ -0,4 \end{bmatrix}$

$$Uc_0 = y \rightarrow \begin{bmatrix} 9 & 18 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{0,1} \\ c_{0,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ -0,4 \end{bmatrix}$$

Resolvendo pelas substituições retroativas, $c_0 = \begin{bmatrix} 0,0833 \\ -0,025 \end{bmatrix}$

$x_1 = x_0 + c_0$, então,

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0833 \\ -0,025 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5833 \\ -0,125 \end{bmatrix}$$

OBS: como só precisava ser feito um refinamento poderíamos ter resolvido $Ac_0 = r_0$ utilizando Eliminação de Gauss.

2. a)

$||A||_1 = \underset{1 \leq j \leq 3}{max} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = max(13, 1, 10) = 13$

$||A^{-1}||_1 = \underset{1 \leq j \leq 3}{max} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = max(4, 1, 8) = 8$

$\kappa_1(A) = ||A||_1||A^{-1}||_1 = 13 \times 8 = 104$

$\kappa_1(A) \gg 1$ portanto é mal condicionado.

2. b)

$||A||_\infty = \underset{1 \leq i \leq 3}{max} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = max(5, 17, 2) = 17$

$||A^{-1}||_\infty = \underset{1 \leq i \leq 3}{max} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = max(3, 6, 4) = 6$

$\kappa_\infty(A) = ||A||_1||A^{-1}||_1 = 17 \times 6 = 102$

$\kappa_\infty(A) \gg 1$ portanto é mal condicionado.

OBS: é válido lembrar que o número de condicionamento varia com a norma utilizada. Isso pôde ser observado nas duas letras anteriores, obtivemos 2 números de condicionamento diferentes para a mesma matriz A.

2. c)

Temos que $\delta b = b' - b = \begin{bmatrix} 1,1 \\ 1,9 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ -0,1 \\ 0 \end{bmatrix}$

A fórmula utilizada para calcular o limite superior do erro é dada por:

$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq \kappa(A) \frac{||\delta b||}{||b||}|$, e usaremos $\kappa_\infty(A)$ calculado no item anterior.

$\kappa_\infty = 102$, $||b||_\infty = 3$, $||\delta b||_\infty = 0,1$

Substituindo os valores,

$\frac{||\delta x||}{||x||} \leq 102 \times \frac{0,1}{3} \Rightarrow \frac{||\delta x||}{||x||} \leq 3.4$

Uma explição mais detalhada desse limite superior do erro pode ser encontrada no tópico 2.9.3 -Sensibilidade da solução- (páginas 115 e 116) do livro Algorimos Númericos do professor Frederico. É aconselhável estudar antes o tópico 2.1.4 -Normas- (páginas 39, 40, 41 e 42) para entender as diferentes normas e quando uma norma é dita consistente.