

# Estudio de la caminata aleatoria con memoria en una red compleja semántica

B.Sc. A.F. Flórez Olivera; Ph.D. Fernando Naranjo Mayorga (2021)

Grupo de Física Teórica y Computacional

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

# Contenido

- 1. Objetivos**
- 2. Introducción**
- 3. Caminata Aleatoria con memoria en redes complejas**
- 4. Metodología**
- 5. Resultados**
- 6. Conclusiones**
- 7. Perspectivas**
- 8. Bibliografía**

# Objetivos

**1. Objetivo general:** Estudiar el mecanismo de caminata aleatoria con memoria en redes complejas a través del formalismo de las Cadenas de Márkov Absorbentes y ejecutar una aplicación en una pequeña red compleja semántica.

1. Estudiar la teoría general de las redes complejas.
2. Comprender el uso de las cadenas de Márkov como formalismo para definir la dinámica en la red.
3. Profundizar en la caminata aleatoria con memoria para acoplar a la dinámica general a partir de la topología de la red.
4. Aplicar los distintos mecanismos en una red compleja semántica y extraer los rasgos más significativos.
5. Interpretar los resultados a partir de las aplicaciones subyacentes y extrapolar desde el contexto de los sistemas complejos.

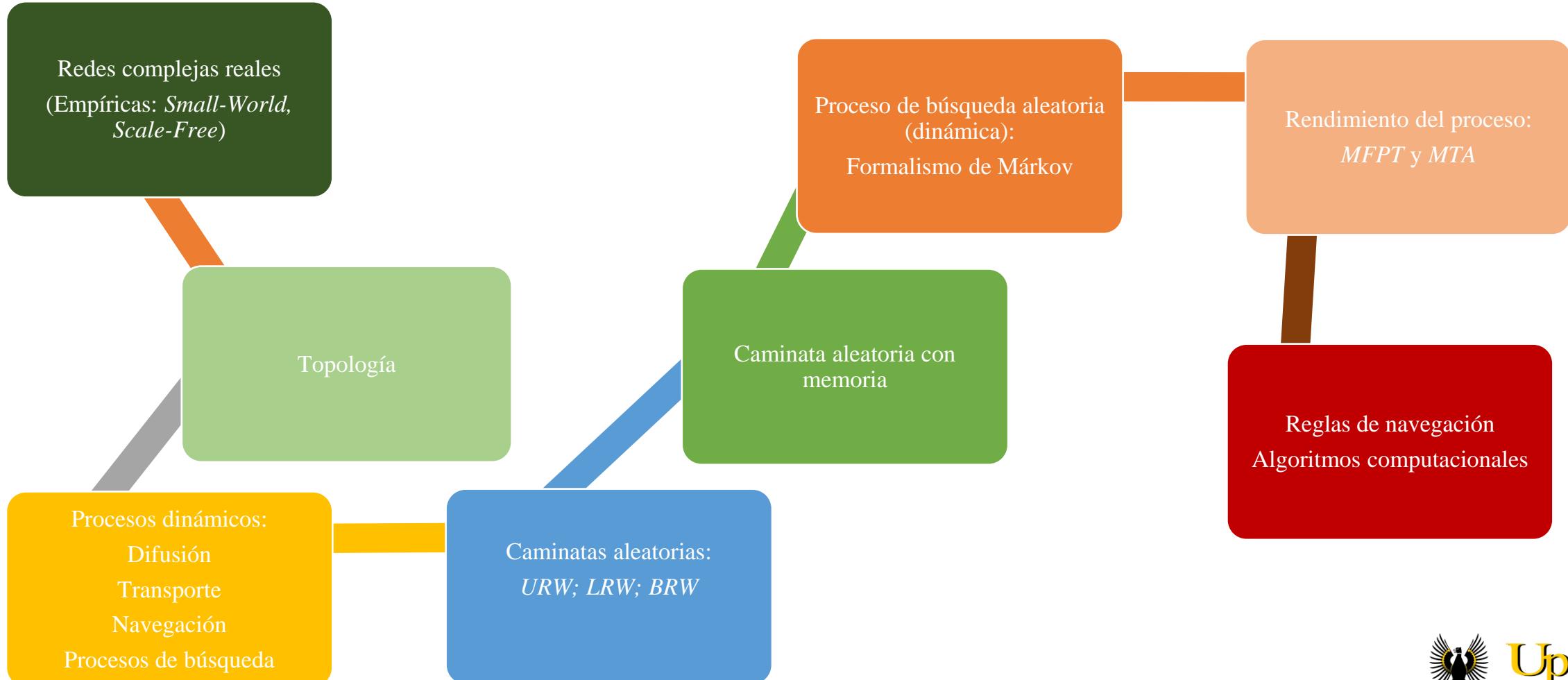
Pregunta de investigación:

¿Cuáles son los mecanismos que optimizan la búsqueda en una red compleja en la cual se aplica la caminata aleatoria con memoria?

# Introducción

## Motivación:

“Entender la dinámica en las redes complejas puede ser útil para ejercer control en las mismas y dar aproximaciones a fenomenologías a futuro.” (Newman, 2010)



# Sistemas Complejos

La implementación de los estudios en redes complejas es de vital importancia para dar aproximaciones y, en parte, describir varios tipos de sistemas en nuestra realidad (e.g. Redes neuronales, WWW, redes sociales, redes semánticas, etc.)

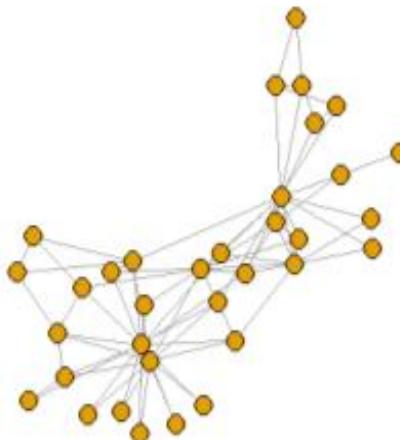


Figura 1. Red genérica creada con igraph de RStudio

30/06/2021

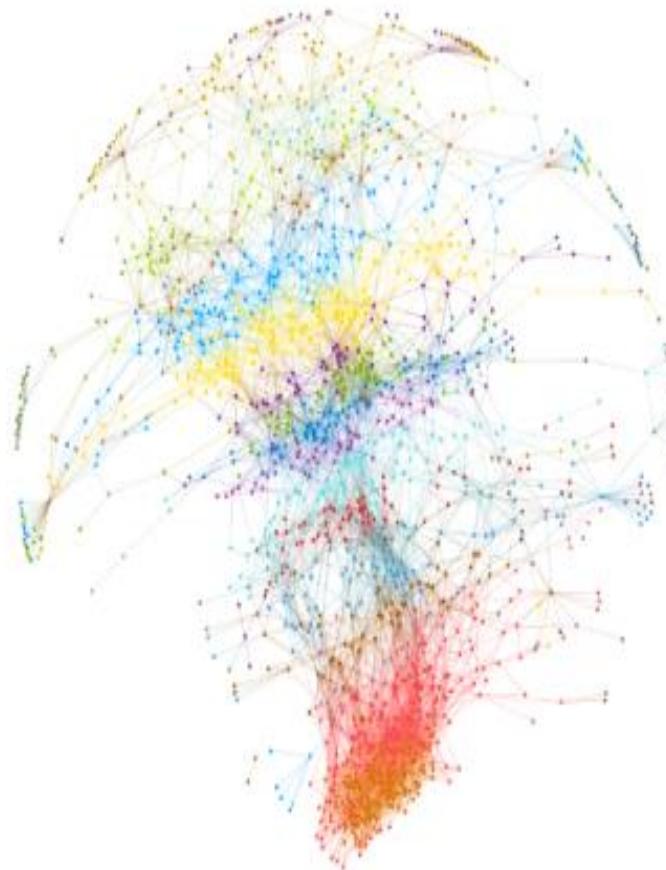


Figura 2. Grafos descriptivos de conexiones - Globalidad - Personajes GoT

Andrés F. Flórez O.

# Teoría de las redes complejas

- **Red:** Conjunto de nodos que pueden estar unidos o no por enlaces.
  - Representación general y abstracta: **grafo**.
- Topología: Medidas características de las redes. (*Albert & Barabási, 2001*) (*Siew et. al. 2019*)
  1. Número de nodos
  2. Número de enlaces
  3. Densidad de la red
  4. Distancia entre nodos
  5. Trayectorias (Longitud, Diámetro)
  6. Grado y grado promedio
  7. Clustering
  8. Matriz de adyacencia
  9. Betweenness

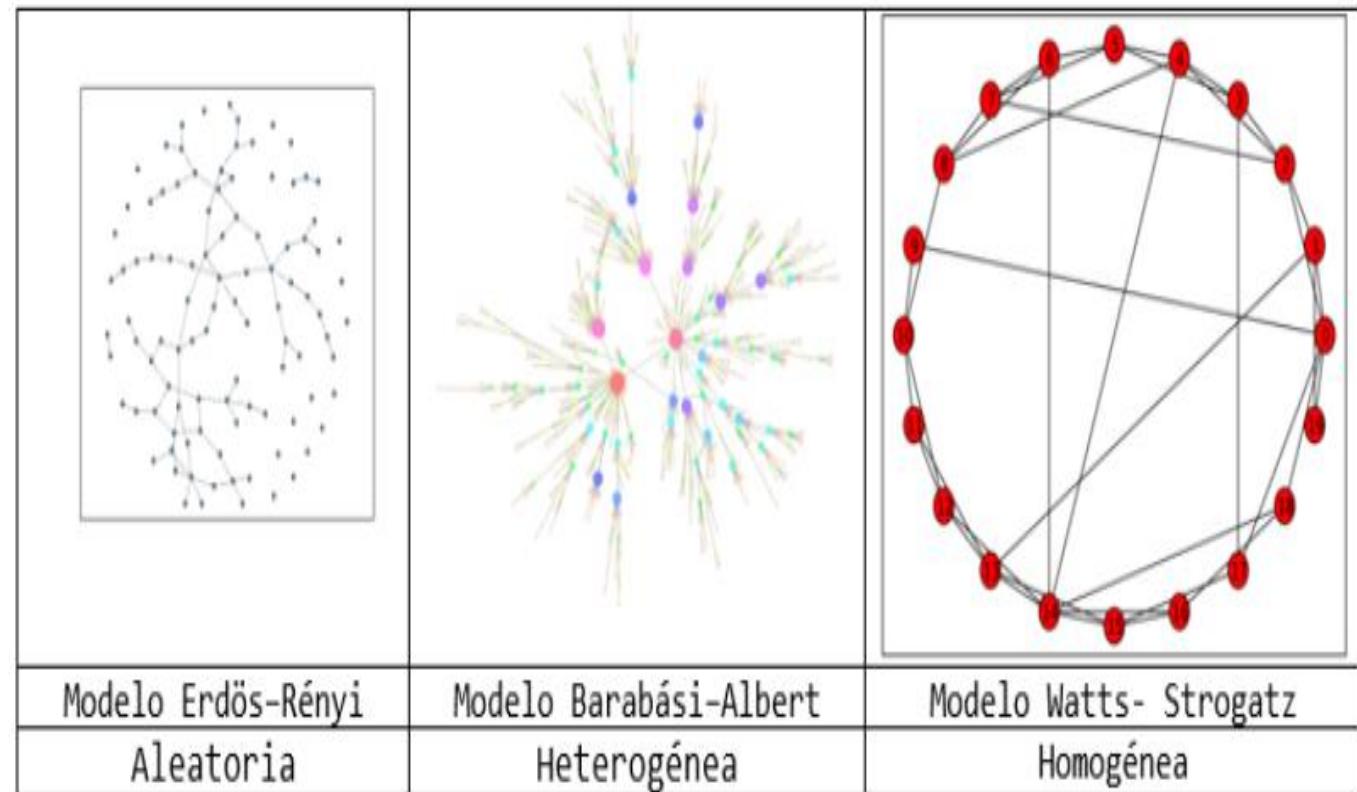
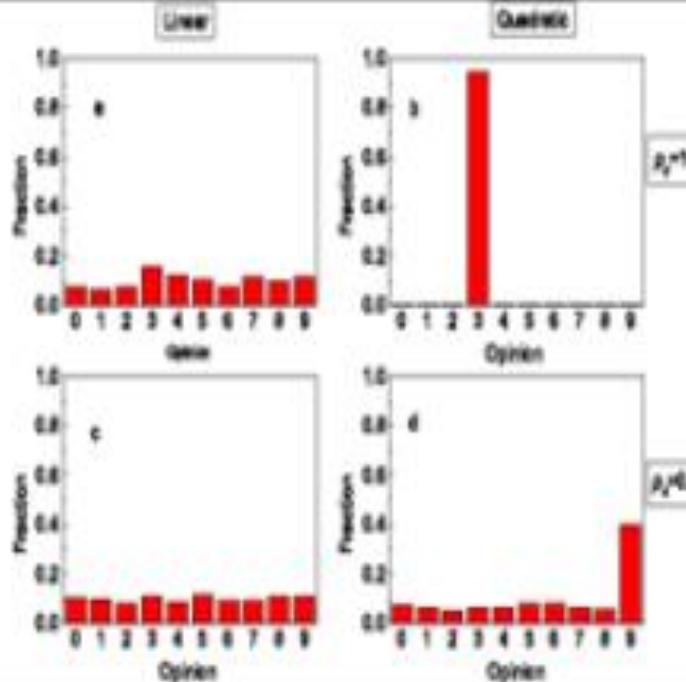
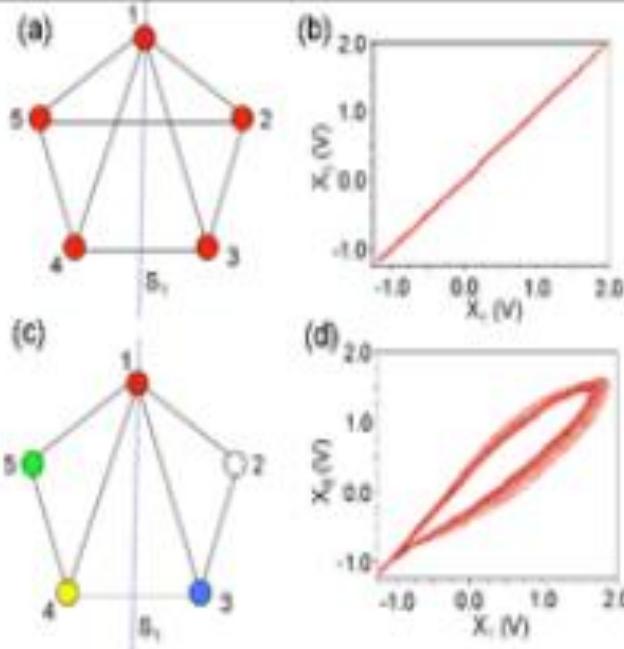


Tabla 1: Tipos de grafos

# Procesos dinámicos en redes complejas



Sincronización

Arenas et al. (2008)

Formación de consenso

Olfati-Saber et al.  
(2007)

Propagación de  
enfermedades

M.E.J. Newman (2002)

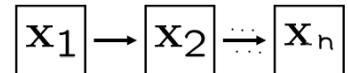
Tabla 2: Distintos procesos de aplicación de los modelos dinámicos de redes complejas

# Cadenas de Márkov



Andrei Markov

- Una secuencia de variables aleatorias  $x_1, x_2, \dots, x_n$



➤  $x_n$  es el estado del modelo en el paso n-ésimo

➤ **Propiedad de Márkov:** Cada estado es dependiente solo del estado inmediatamente anterior.

- ✓ La dependencia viene dada por una probabilidad condicional:

$$p(x_t | x_{t-1})$$

*Cadena de Márkov de primer orden*

- ✓ Una cadena de Márkov de n-ésimo orden debe tener la forma:

$$p(x_t | x_{t-1}, \dots, x_{t-N})$$

- Dada una distribución de probabilidad inicial U:

$$U^n = UP^n$$

- ✓ Las probabilidades satisfacen la **normalización**:  $\sum_{j=1}^N T_{ij} = 1$
- ✓ Al cabo de n pasos se alcanza una **distribución estacionaria (equilibrio)**

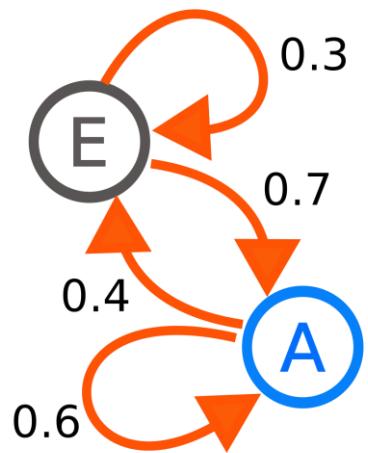


Figura 3. Cadena de Márkov simple, extraída de Wikipedia

(Snavely, 2013)

# Cadenas de Márkov

## Cadenas de Márkov absorbentes

- En las cadenas de Márkov pueden existir **estados absorbentes**.

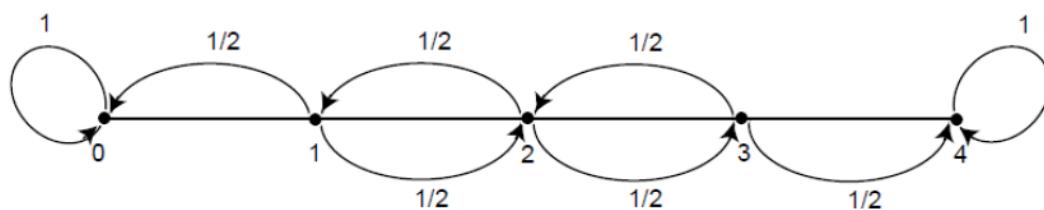


Figura 4. Cadena de Márkov absorbente, extraída de Grinstead (2006)

- ✓ **Estado absorbente:**  $P_{ii} = 1 ; P_{ij} = 0$
- ✓ Conjunto de estados **transitorios**( $N_1$ ) y estados **absorbentes**( $N_2$ )
  - ✓ Matrices que describen:
    - Transitorios - Transitorios: Q(j)
    - Transitorios – Absorbentes: R(j)
    - Absorbentes – Transitorios: 0
    - Absorbentes – Absorbentes: I
  - ✓ Conjunto total:  $N = N_1 + N_2$

(Grinstead, 2006)

## Formalismo de Márkov

- Forma canónica:

$$P(j) = \begin{pmatrix} Q(j) & R(j) \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (1)$$

- Discriminante de estados:

$$D = I - Q(j) \quad (2)$$

- Matriz fundamental:

$$F = D^{-1} \quad (3)$$

- Tiempo promedio de absorción (MTA):

$$t = F \mathbf{c} \quad (4)$$

- Distribución de probabilidad inicial de absorción:

$$B = F R(j) \quad (5)$$

(Grinstead, 2006)

# Caminatas aleatorias

Los procesos de caminata aleatoria son un caso particular de las cadenas de Márkov

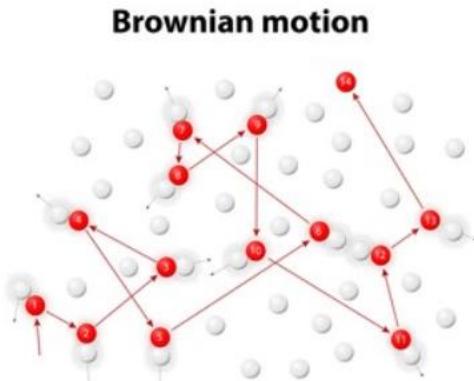


Figura 5. Brownian Motion, extraída de Shutterstock

**Caminata aleatoria:** Cadena de Márkov que describe la trayectoria de una partícula o proceso que realiza pasos aleatorios sucesivos (e.g. difusión, interacciones, propagación de enfermedades, ...)

(Hughes, 1995)

¡Formalismo de Márkov compatible con la caminata aleatoria!

- Conjunto total de N estados
- Cálculo de las matrices características.
- La difusión de información en la red requiere un tiempo promedio de primer paso (*MFPT*)
  - ✓ Tiempo promedio de retorno(*MRT*)
  - ✓ Tiempo promedio de cobertura(*MCT*)

(Bonaventura et. al., 2014)

# Caminata aleatoria con memoria en redes complejas

## Memoria de un paso

- Caminata aleatoria de tiempo y longitud discreto. (**origen  $x_i$ , objetivo  $x_j$** )
- Probabilidades:

$$p_{hi,ij} = p(j|i, h) = hi \rightarrow ij$$

- ✓ Organizadas en la matriz de probabilidad de transición,  $P(j)$

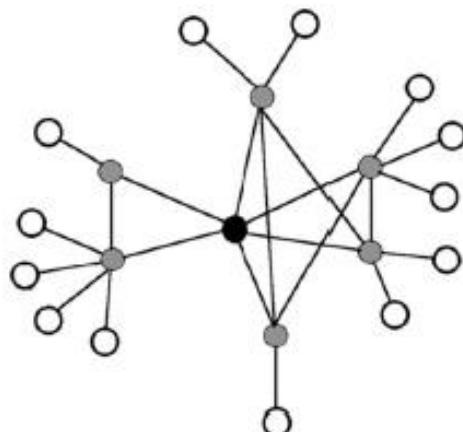


Figura 6. Vecindades de un nodo inicial.

Extraído de Shutterstock

30/06/2021

## Tarea: Encontrar el objetivo j en la red

1. Indicar un paso inicial
2. Definir matriz  $P(j)$
3. Transiciones limitadas a vecindades cercanas.
4. Suponiendo una secuencia,

$i, r, \dots, s, j:$

- Transitorios:  $ir$
- Absorbentes:  $sj$

Andrés F. Flórez O.

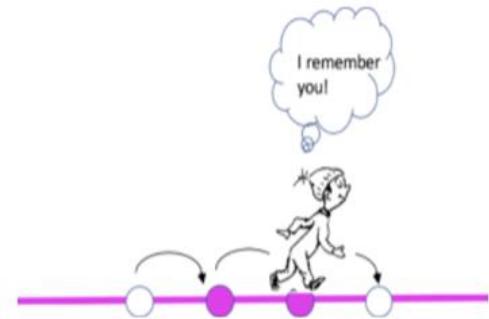


Figura 7. Caricatura de la caminata aleatoria con memoria, extraído de *Oh, the Places You'll Go! Dr. Seuss, 1990*

Es posible generalizar a **n** pasos...

- Puede existir un conjunto de posibles trayectorias, caminatas ( $W$ )
- La topología y la cadena de Márkov asociada juegan un papel fundamental en las transiciones.

Rescribiendo el formalismo matricial:

1. Forma canónica ,  $P(j)$
2. Matriz fundamental,  $Y(j)$
3. Vector tiempo promedio de absorción,  $\mu(j)$
4. Probabilidad de absorción inicial,  $B(j)$

(Basmakov et. al., 2020)

# Caminata aleatoria con memoria en redes complejas

## Formalismo

- El número de pasos en una trayectoria particular equivale a la longitud de la respectiva caminata aleatoria:  $W_{ij}$
- $MPFT_{ij}$ : suma ponderada de las longitudes  $l$  de todo el conjunto de caminatas posibles  $W_{ij}$ :

$$m_{ij} = \sum_{W_{ij}} l(W_{ij}) p(W_{ij}) \quad (6)$$

- $l(W_{ij})$ : Longitud de cada caminata posible
- $p(W_{ij})$ : Probabilidad de ocurrencia de cada caminata
- Solo se tiene en cuenta los primeros vecinos
- Considerando el caso cuando el objetivo  $j$  no es un vecino primario de  $i$ :

$$m_{ij} = \sum_{s \in N_i} p_{i,s} \sum_{W_{sj}} [1 + l(W_{s,j})] p(W_{s,j}) \quad (7)$$

(Basnarkov et. al., 2020)

La vecindad inmediata provee información necesaria para considerarse en un posible algoritmo que facilite la búsqueda aleatoria

Información local ~ Efectividad

Información global ~ Mejor muestreo

(Masuda and Porter, 2017)

- Toda caminata aleatoria en una cadena de Márkov absorbente es absorbida con una probabilidad igual a 1. La caminata no se hará indefinidamente.

$$\sum_{W_{sj}} p(W_{sj}) = 1 \quad (8)$$

Condición de normalización de las probabilidades de incidencia en un estado absorbente

(Basnarkov et. al., 2020)

# Caminata aleatoria con memoria en redes complejas

**MFPT:**  $i \rightarrow s \rightarrow j \dots p(j|s, i) \dots p(j|s, \dots, i)$

Por lo tanto, conviene escribir:

- Tiempo promedio de absorción (*MTA*):

$$\mu(j)_{is} = \sum_{W_{sj}} l(W_{sj}) p(W_{sj}) \quad (8)$$

Combinando las expresiones y considerando la escogencia de la vecindad de primer paso por la probabilidad  $p_{is} = \frac{1}{k_i}$ :

$$m_{ij} = 1 + \frac{1}{k_i} \sum_{s \in N_i} \mu(j)_{is} \quad (9)$$

✓ Trivial:  $j \in N_i$ : Caminata de un paso,  $p_{ij} = \frac{1}{k_i}$

✓ Caminatas más largas: Relación entre MFPT y MTA describiendo paso a paso la caminata realizada      (Basnarkov et. al., 2020)

- La expresión de *MFPT* es útil para cualquier objetivo, independiente de si es vecino del nodo inicial...

- Se consideran caminatas cortas y largas...  
**¡El mecanismo de memoria se aplica!**

➤ La relación entre el nodo  $i$  y  $N_i$  es similar con los vecinos más largos debido a la relación MFPT y MTA

➤ Resultado óptimo en la búsqueda

(Basnarkov et. al., 2020)

# Búsqueda en redes complejas

*RW Sampling (Muestreo):*

- ✓ Recolección de información
- ✓ Nodos centrales
- ✓ Centros de actividad
- ✓ Escanear vecindades
- ✓ Realizar cualquier trayectoria posible

*Reglas de navegación local y global*

✓ Ejemplos famosos:

1. Stanley Milgram, “Pequeño mundo”
2. PageRank de Google
3. Parentesco semántico

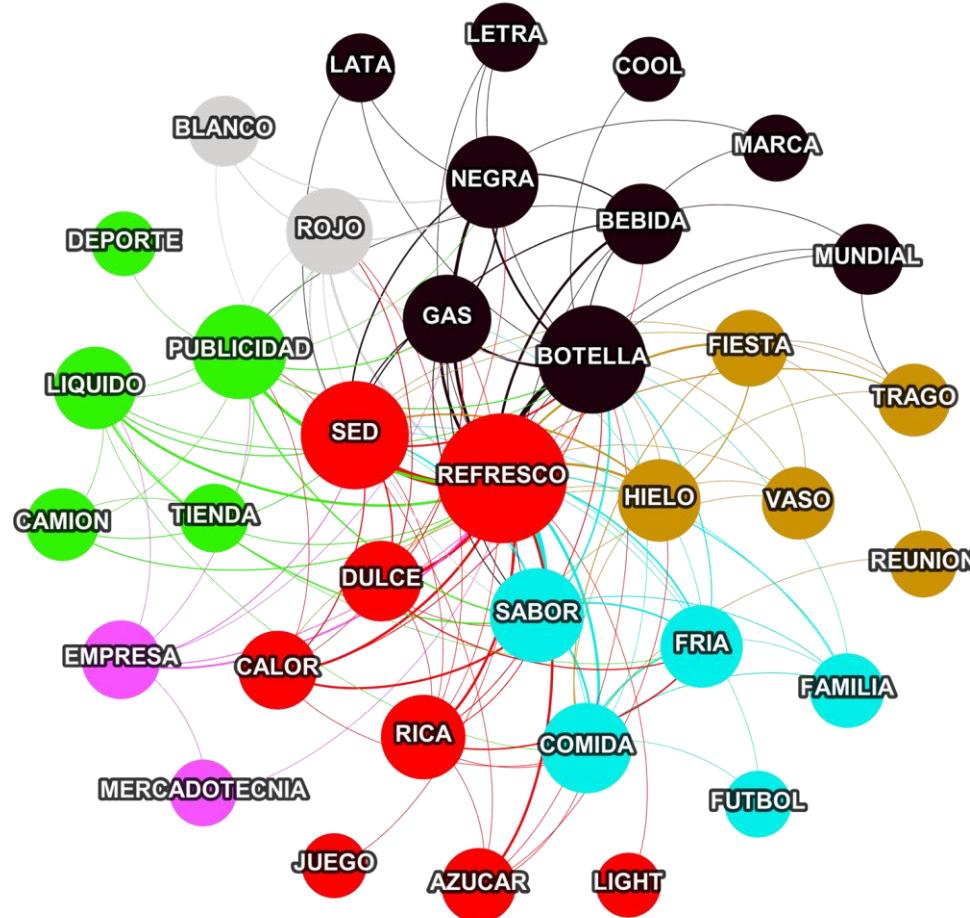


Figura 8. Red semántica de Coca-Cola, extraída de La Inteligencia Detrás de la Investigación: Lo que la estadística y las marcas susurran, Jorge Andrade. (2020)

# Metodología

*La particularidad de la red semántica emerge del concepto de memoria semántica. Esta se define como el subsistema de la memoria humana que almacena el conocimiento conceptual y factual.*

La caminata aleatoria refiere una dinámica a partir de la topología de la red:

**N = 22**  
**E = 44**  
**No dirigida**  
**No ponderada**

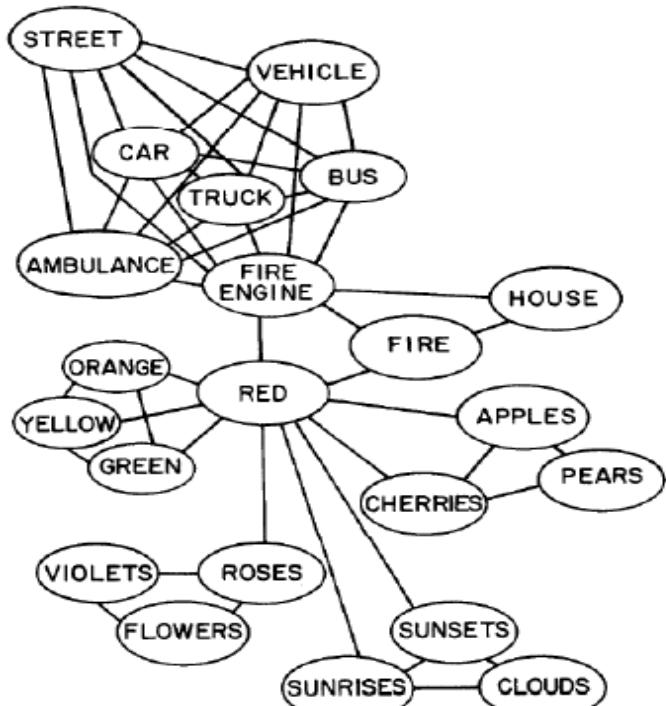
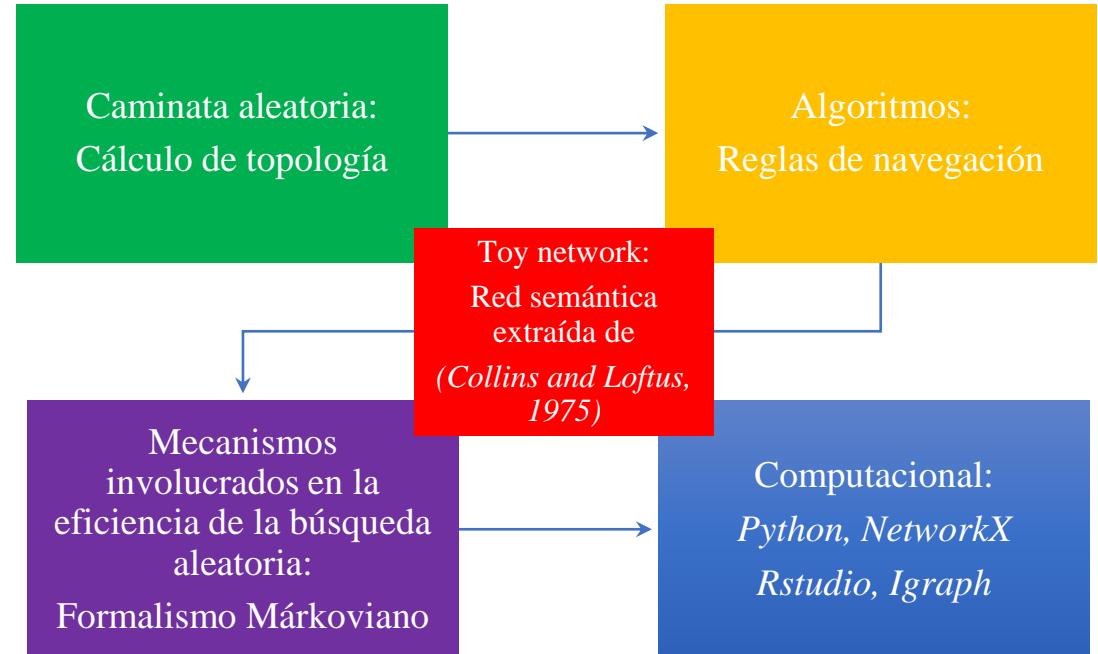


FIGURE 1. A schematic representation of concept relatedness in a stereotypical fragment of human memory (where a shorter line represents greater relatedness).

Figura 9. Red semántica extraída de  
(Collins and Loftus, 1975)

30/06/2021

Andrés F. Flórez O.



# Metodología

Parejas de nodos conectadas a través de enlaces				
Nº	Nodo i	Nodo j	Nodo i	Nodo j
1	Street	Vehicle	Vehicle	Street
2	Street	Bus	Bus	Street
3	Street	Car	Car	Street
4	Street	Truck	Truck	Street
5	Street	Fire engine	Fire engine	Street
6	Street	Ambulance	Ambulance	Street
7	Vehicle	Bus	Bus	Vehicle
8	Vehicle	Car	Car	Vehicle
9	Vehicle	Ambulance	Ambulance	Vehicle
10	Vehicle	Truck	Truck	Vehicle
11	Car	Bus	Bus	Car
12	Car	Truck	Truck	Car
13	Car	Fire engine	Fire engine	Car
14	Car	Ambulance	Ambulance	Car
15	Bus	Truck	Truck	Bus
16	Bus	Ambulance	Ambulance	Bus
17	Bus	Fire engine	Fire engine	Bus
18	Truck	Ambulance	Ambulance	Truck
19	Truck	Fire engine	Fire engine	Truck
20	Fire engine	Ambulance	Ambulance	Fire engine
21	Fire engine	House	House	Fire engine
22	Fire engine	Fire	Fire	Fire engine

Parejas de nodos conectadas a través de enlaces				
Nº	Nodo i	Nodo j	Nodo i	Nodo j
23	Fire engine	Red	Red	Fire engine
24	House	Fire	Fire	House
25	Fire	Red	Red	Fire
26	Red	Orange	Orange	Red
27	Red	Yellow	Yellow	Red
28	Red	Green	Green	Red
29	Red	Apples	Apples	Red
30	Red	Cherries	Cherries	Red
31	Red	Sunsets	Sunsets	Red
32	Red	Sunrises	Sunrises	Red
33	Red	Roses	Roses	Red
34	Orange	Green	Green	Orange
35	Orange	Yellow	Yellow	Orange
36	Yellow	Green	Green	Yellow
37	Apples	Cherries	Cherries	Apples
38	Apples	Pears	Pears	Apples
39	Pears	Cherries	Cherries	Pears
40	Roses	Violets	Violets	Roses
41	Roses	Flowers	Flowers	Roses
42	Violets	Flowers	Flowers	Violets
43	Sunsets	Sunrises	Sunrises	Sunsets
44	Sunsets	Clouds	Clouds	Sunsets

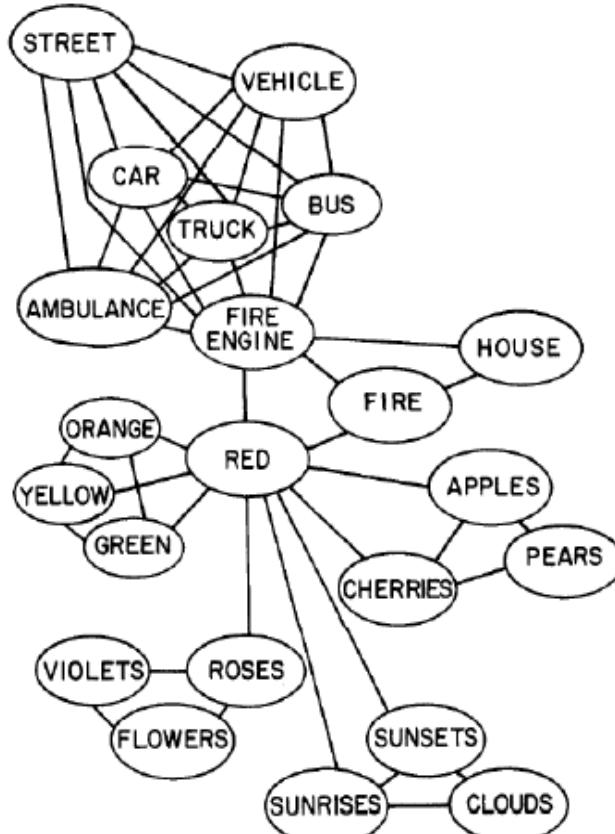


FIGURE 1. A schematic representation of concept relatedness in a stereotypical fragment of human memory (where a shorter line represents greater relatedness).

(Collins and Loftus, 1975)

Tabla 3. Caracterización de enlaces existentes en el grafo (no dirigido)

# Metodología

## Selección arbitraria de N= 44 trayectorias

Parejas de nodos (fuente, objetivo)			
Nº	Nodo fuente $x_i$	Nodo objetivo $x_j$	Distancia
1	Street	Roses	3
2	Street	Clouds	4
3	Vehicle	Flowers	4
4	Vehicle	Sunsets	3
5	Car	Pears	4
6	Car	Green	3
7	Bus	Yellow	3
8	Bus	Sunrises	3
9	Truck	Cherries	3
10	Truck	Flowers	4
11	Ambulance	Apples	3
12	Ambulance	Violets	4
13	Fire engine	Clouds	3
14	Fire engine	Flowers	3
15	House	Sunrises	3
16	House	Clouds	4
17	Fire	Street	2
18	Fire	Clouds	3
19	Red	Vehicle	2
20	Red	Flowers	2
21	Orange	Car	3
22	Orange	Pears	3
23	Yellow	Bus	3
24	Yellow	House	3
25	Green	Apples	2
26	Green	Truck	3
27	Apples	Yellow	2
28	Apples	Vehicle	3
29	Pears	Roses	3

Tabla 4. Caracterización arbitraria de trayectorias a partir del grafo

Parejas de nodos (fuente, objetivo)			
Nº	Nodo fuente $x_i$	Nodo objetivo $x_j$	Distancia
30	Pears	Clouds	4
31	Cherries	Flowers	3
32	Cherries	Sunsets	2
33	Roses	Pears	3
34	Roses	Street	3
35	Violets	House	4
36	Violets	Sunrises	3
37	Flowers	Cherries	3
38	Flowers	Vehicle	4
39	Sunsets	Car	3
40	Sunsets	House	3
41	Sunrises	Truck	3
42	Sunrises	Flowers	3
43	Clouds	House	4
44	Clouds	Car	4

Selección arbitraria de dos nodos de tipo absorbente:

Street y Clouds

Criterio: Baja intermediación, aparente lejanía

- Escogencia de parejas que involucran los nodos
- Énfasis en la pareja (**Street, Clouds**)
- Es posible realizar para cualquier otra pareja

Trayectorias involucradas con los nodos absorbentes: Street y Clouds			
Nº	Nodo fuente $x_i$	Nodo objetivo $x_j$	Distancia
1	Street	Roses	3
2	Street	Clouds	4
3	Fire engine	Clouds	3
4	House	Clouds	4
5	Fire	Street	2
6	Fire	Clouds	3
7	Pears	Clouds	4
8	Roses	Street	3
9	Clouds	House	4
10	Clouds	Car	4

Tabla 5. Selección de nodos absorbentes

# Resultados

6. Clustering local por nodos:  
(Satisface la normalización)

$$1. \quad N_D = \frac{2E}{N(N-1)} = 0.19476$$

2. Distribución de grado  $P(k)$  para una red *Scale-Free*

1. Red teóricamente dispersa

Total de nodos con grado k en la red		
Nº	Número de grado(k)	Número de nodos(n)
1	2	5
2	3	9
3	6	6
4	9	1
5	10	1

Tabla 4. Conjunto de nodos con valor de grado

3. Grado promedio:  $\langle k \rangle = 4.181818$

4. Coeficiente de agrupamiento promedio:

$$\langle C \rangle = 0.7872$$

5. Grados de los nodos de la red

Grados de los nodos componentes de la red		
Nº	Nodo i	Grado $k_i$
1	Street	6
2	Vehicle	6
3	Car	6
4	Bus	6
5	Truck	6
6	Ambulance	6
7	Fire engine	9
8	House	2
9	Fire	3
10	Red	10
11	Orange	3
12	Yellow	3
13	Green	3
14	Apples	3
15	Pears	2
16	Cherries	3
17	Roses	3
18	Violets	2
19	Flowers	2
20	Sunsets	3
21	Sunrises	3
22	Clouds	2

Tabla 6. Grados de cada nodo

Clustering local por nodos		
Nº	Nodo	$C_i$
1	Street	1
2	Vehicle	1
3	Car	1
4	Bus	1
5	Truck	1
6	Ambulance	1
7	Fire engine	0.1944
8	House	1
9	Fire	0.0667
10	Red	0.05555
11	Orange	1
12	Yellow	1
13	Green	1
14	Apples	0.667
15	Pears	1
16	Cherries	0.667
17	Roses	0.3333
18	Violets	1
19	Flowers	1
20	Sunsets	0.667
21	Sunrises	0.667
22	Clouds	1

Tabla 7. Clustering local por nodos

# Resultados

Mecanismo 1: Distribución de probabilidad,  $p_i = \frac{1}{k_i}$

Nodo Origen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
Street	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Vehicle	1/6	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Car	1/6	1/6	0	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Bus	1/6	1/6	1/6	0	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Truck	1/6	1/6	1/6	1/6	0	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Ambulance	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Fire engine	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	1/6	1/6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
House	0	0	0	0	0	1/2	0	1/2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Fire	0	0	0	0	0	1/3	1/3	0	1/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Red	0	0	0	0	0	1/10	0	1/10	0	1/10	1/10	1/10	0	1/10	1/10	0	0	1/10	1/10	0	1/10	0	
Orange	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3	0	1/3	1/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Yellow	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3	1/3	0	1/3	1/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Green	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
Apples	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3	0	0	0	1/3	1/3	0	0	0	0	0	0	0	
Pears	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/2	0	1/2	0	0	0	0	0	0	
Cherries	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3	0	0	0	1/3	1/3	0	0	0	0	0	0	0	
Roses	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3	0	0	0	0	0	0	1/3	1/3	0	0	0	0	0	
Violets	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/2	0	1/2	0	0	0	0	
Flowers	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/2	1/2	0	0	0	0	0	
Sunsets	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3	1/3	0	
Sunrises	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/3	0	
Clouds	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/2	1/2	0

Figura 10. Distribución de probabilidad inicial con probabilidad dependiente del inverso del grado por nodo

Process finished with exit code 0

Figura 11. Transitividad y Betweenness obtenidos con Python

Andrés F. Flórez O.

```

Transitividad: 0.6417112299465241
La centralidad por Betweenness para cada nodo vendra dada como
{'Street': 0.015238095238095247, 'Vehicle': 0.0,
'Car': 0.015238095238095247, 'Bus': 0.015238095238095247,
'Truck': 0.015238095238095247, 'Ambulance': 0.015238095238095247,
'Fire engine': 0.45952380952380956, 'House': 0.0,
'Fire': 0.030952380952380953, 'Red': 0.7714285714285715,
'Orange': 0.0, 'Yellow': 0.0, 'Green': 0.0,
'Apples': 0.045238095238095244, 'Pears': 0.0,
'Cherries': 0.045238095238095244, 'Roses': 0.18095238095238098,
'Violets': 0.0, 'Flowers': 0.0, 'Sunsets': 0.09523809523809525,
'Sunrises': 0.0, 'Clouds': 0.0}

La centralidad para autovectores cada nodo vendra dada como
{'Street': 0.37898909453403223, 'Vehicle': 0.32420269108741945,
'Car': 0.37898909453403223, 'Bus': 0.37898909453403223,
'Truck': 0.37898909453403223, 'Ambulance': 0.37898909453403223,
'Fire engine': 0.3750086791869036, 'House': 0.08095566739309872,
'Roses': 0.0, 'Red': 0.11782674013611974,
'Fire': 0.09816980935429696, 'Orange': 0.030646609625409757,
'Yellow': 0.030646609625409757, 'Green': 0.030646609625409757,
'Apples': 0.026169120404076242, 'Pears': 0.008954978442877981,
'Cherries': 0.026169120404076242, 'Roses': 0.021691631182742727,
'Violets': 0.0044774892215444706, 'Flowers': 0.0044774892215444706,
'Sunsets': 0.02507686176887862, 'Sunrises': 0.024449995386652996,
'Clouds': 0.004290587646335744}

```

Figura 12. Trayectorias más cortas obtenidas con Python

# Resultados

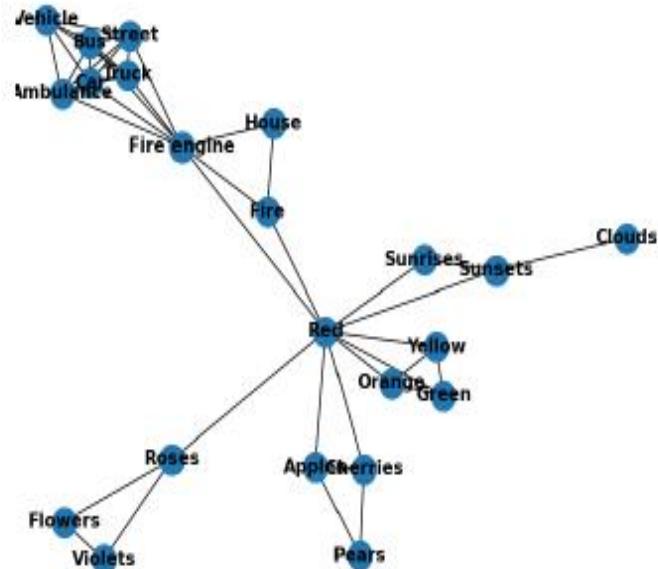


Figura 13. Grafo obtenido con Python

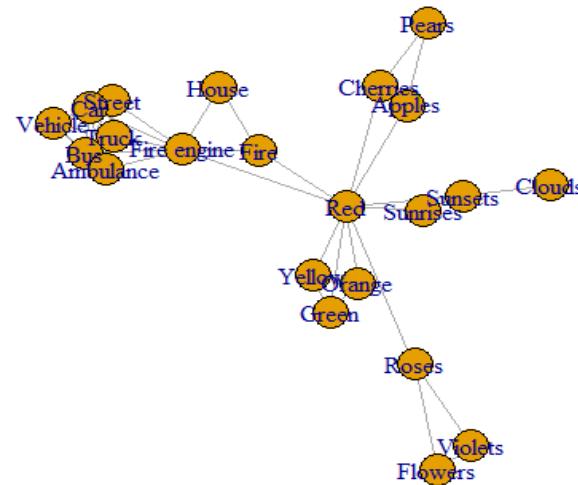
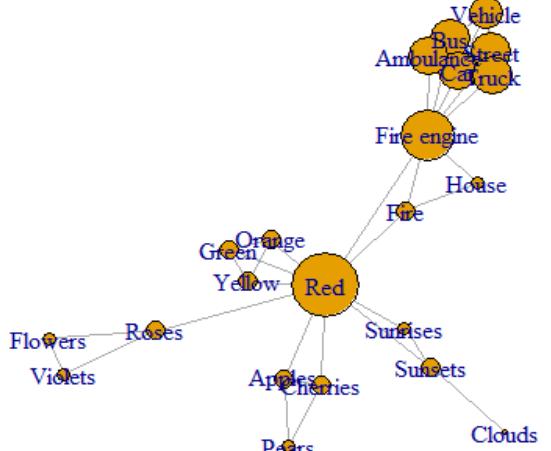


Figura 14. Grafo obtenido con igraph



30/06/ Figura 15. Grafo con nodos ponderados obtenido con igraph

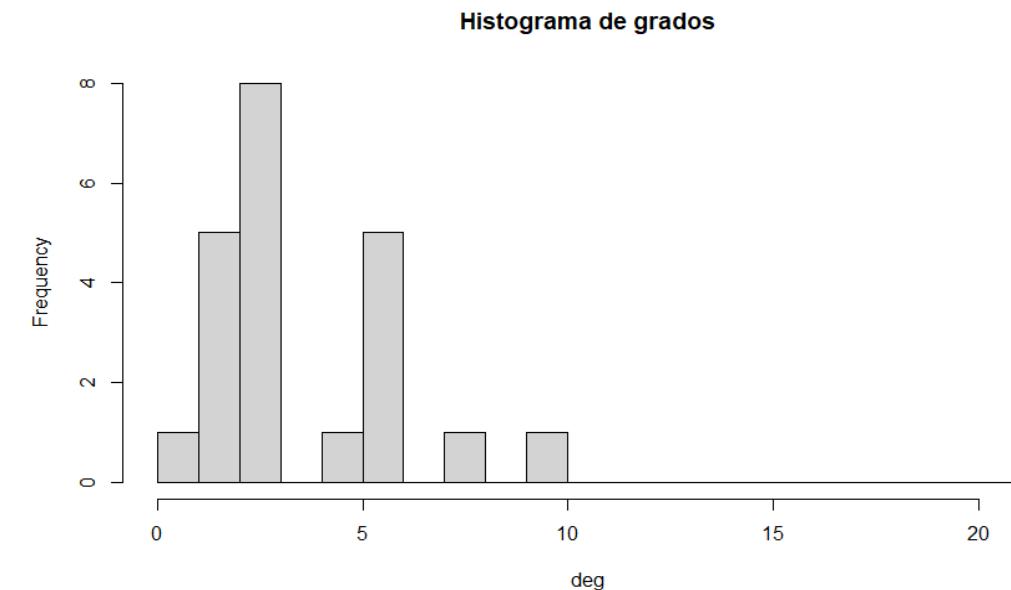


Figura 16. Histograma de grados en la red

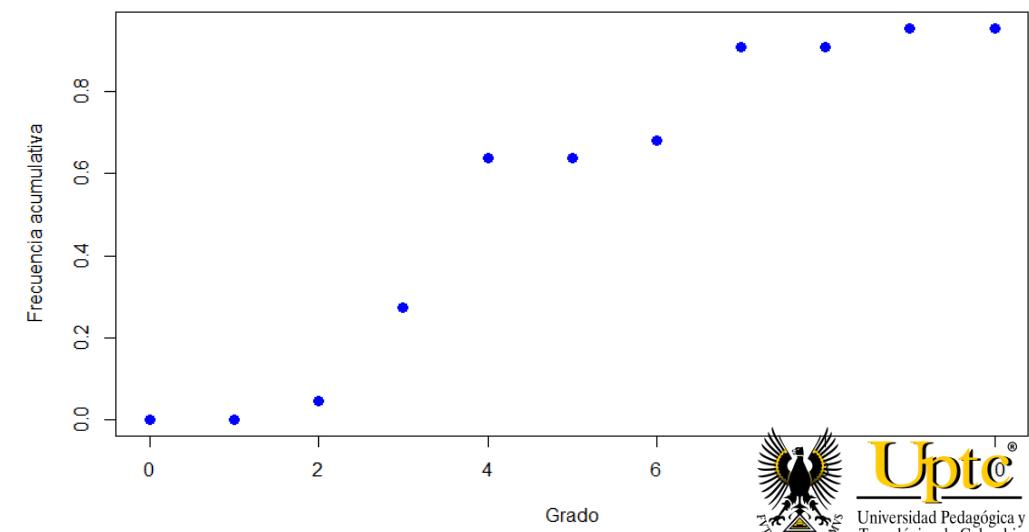


Figura 17. Distribución de grados en la red

Andrés F. Flórez O.

# Resultados

## Proceso algorítmico: Reglas de navegación

1. Selección aleatoria de  $i, j$ 
  1. Transiciones por navegación local(vecindad cercana)
  2. **Absorción:** Incidencia en j

*¿Y si quiero conocer la totalidad de la red a través de la caminata aleatoria, cómo puedo evitar los nodos absorbentes para evitar quedar atrapado y terminar el proceso trivialmente?*

2. Muestreo: Caminata corta ( $n \ll N$ ):
  1. Cuando el proceso incide en un nodo absorbente, este debe tomarse como parcialmente finalizado y almacenar la información sobre la trayectoria realizada.
  2. Continuar la búsqueda desde el nodo inicial u otro seleccionado arbitrariamente, evitando la caminata ya hecha.
  3. Establecer criterio a futuro para evitar trivialidades.

3. Mapeo: Realizar todas las trayectorias posibles y así tener un panorama de la red.  
*Conocimiento local → Conocimiento global*
  - **¿Eficiencia?**
  - La caminata aleatoria a futuro no estaría dada por una memoria ciega, sino que podría llegar a tener un sesgo.

# Resultados

- Mecanismo 2: Transición sesgada entre dos nodos absorbentes:  
(Street, Clouds)

- Se consideran las equiprobabilidades de acuerdo a la distribución de probabilidad donde:  $p_i = \frac{1}{k_i}$
- Se consideran las probabilidades de **transición iniciales** involucrando los nodos absorbentes
- La notación solo se utiliza para indicar cualquier vecino, de acuerdo al grado, sin importar cuál.

n	i	$P(i,i)$	$i+1$ $P(i,i+1)$	$i+2$ $P(i,i+2)$	$i+3$ $P(i,i+3)$	$i+4$ $P(i,i+4)$	$i+5$ $P(i,i+5)$	$i+6$ $P(i,i+6)$	$i+7$ $P(i,i+7)$	$i+8$ $P(i,i+8)$	$i+9$ $P(i,i+9)$	$i+10$ $P(i,i+10)$
1	Street ( $k=6$ ) 1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	1/7	0	0	0	0	0
2	Fire engine ( $k=9$ ) 0	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	0	0
3	Red ( $k=10$ ) 0	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	0
4	Sunsets( $k=3$ ) 0	1/3	1/3	1/3	0	0	0	0	0	0	0	0
5	Clouds( $k=2$ ) 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 7. Distribución de probabilidad para la caminata seleccionada con  $p_i = \frac{1}{k_i}$

30/06/2021

Las probabilidades de transición iniciales entre estados transitorios y absorbentes para la cadena de Márkov absorbente vendrán dadas a partir de:

Probabilidades de transición entre estados transitorios y absorbentes						
Columna: Actual / Fila: Siguiente	Street	Fire engine	Red	Sunsets	Clouds	
Street	0	1	0	0	0	0
Fire engine	0.111	0	0.111	0	0	0
Red	0	0.1	0	0.1	0	0
Sunsets	0	0	0.3	0	0.3	0
Clouds	0	0	0	0	0	1

Tabla 8. Probabilidades de transición entre estados, obedeciendo a  $p_i = \frac{1}{k_i}$

Mecanismo 3: Considerando la caminata unidimensional, la matriz de probabilidades de transición en la forma canónica:

Probabilidades de transición de la cadena de Márkov absorbente en la forma canónica					
Columna: Actual / Fila: Siguiente	Fire engine	Red	Sunsets	Street	Clouds
Fire engine	0	0.5	0	0.5	0
Red	0.5	0	0.5	0	0
Sunsets	0	0.5	0	0	0.5
Street	0	0	0	1	0
Clouds	0	0	0	0	1

Tabla 9. Probabilidades de transición de la cadena de Márkov absorbente en la forma canónica para la caminata seleccionada.

# Resultados

## Formalismo Márkoviano

### Mecanismo 4: Formalismo Márkoviano

- Matriz fundamental:

La matriz resultante de la operación  $I - Q(j)$  será:

```
[[ 1. -0.5  0. ]
 [-0.5  1. -0.5]
 [ 0. -0.5  1. ]]
```

La matriz fundamental  $Y(j)$  será:

```
[[1.5 1.  0.5]
 [1.  2.  1. ]
 [0.5 1.  1.5]]
```

```
Process finished with exit code 0
```

- Distribución de probabilidad inicial de absorción para la cadena unidimensional:

Las probabilidades de absorción iniciales para la cadena escogida, dadas por la matriz  $B$  vienen dadas como:

```
[[0.75 0.25]
 [0.5  0.5 ]
 [0.25 0.75]]
```

```
Process finished with exit code 0
```

- Vector tiempo promedio de absorción:

El vector  $\mu$ , el cual representa el vector de absorción será:

```
[[3.]
 [4.]
 [3.]]
```

```
Process finished with exit code 0
```

# Resultados

## Mecanismo 5: Relación entre MFPT y MTA

- **MFPT:** Con  $l(W_{ij}) = 4$ ;  $W_{ij} = 1$ ;  $p(W_{ij}) = 1$ :

$$m_{ij} = \sum_{W_{ij}} l(W_{ij})p(W_{ij}) = 4$$

- Fuente: Street (i) ; Vecino: Fire engine (s) ( $k = 9$ ):

$$m_{ij} = \sum_{s \in N_i} p_{is} \sum_{W_{sj}} [1 + l(W_{sj})]p(W_{sj}) = 4$$

Siendo  $N_i = 6$ ;  $p_{is} = 1$ ;  $l(W_{sj}) = 3$

Por normalización:  $\sum_{W_{sj}} p(W_{sj}) = 1$

(Evidentemente puede existir un conjunto mayor de trayectorias)

- **MTA:**

$$\mu(j)_{is} = \sum_{W_{sj}} l(W_{sj})p(W_{sj}) = 3$$

- **Deducción de MFPT a través de  $\mu(j)_{is}$ :**

$$m_{ij} = \sum_{s \in N_i} p_{is} \sum_{W_{sj}} [p(W_{sj}) + l(W_{sj})p(W_{sj})] = 4$$

- **Escogencia uniforme de vecino,  $p_{is} = \frac{1}{ki}$ :**

$$m_{ij} = 1 + \frac{1}{k_i} \sum_{s \in N_i} \mu(j)_{is} = 4$$

Las expresiones pueden ser generalizadas a un  $W_{ij}$  mayor de caminatas, considerando estados transitorios y estados absorbentes

# Conclusiones

- El formalismo de Márkov se reduce a encontrar las matrices que definen las transiciones entre estados.
- Los mecanismos de la caminata aleatoria con memoria confían en la presencia de un espacio métrico en la red muestra, el cual en principio puede estar oculto.
- Se mostró que las expresiones analíticas resultan válidas y a través de una lógica *inductiva*, dichos resultados podrían ser generalizados al considerar un conjunto mayor de trayectorias.
- Los mecanismos que representan la búsqueda y la hacen eficiente, basado en el modelo de caminata aleatoria con memoria, requieren necesariamente la relación entre *MFPT* y *MTA*
- En cuanto a la memoria semántica, es posible inferir de acuerdo a la caminata aleatoria y explícitamente el *MFPT*, que puede existir una asociación nemotécnica entre palabras, lo cual de alguna manera establece una relación entre conceptos (inclusive comunidades de conceptos) y esto puede extrapolarse al campo del aprendizaje humano debido a que sería posible memorizar conceptos con más facilidad.
- Por último, debe tenerse en cuenta que una caminata larga permite un escaneo de la red, sin embargo una caminata corta puede servir para explorar vecindades cercanas que faciliten la eficiencia en el proceso.

# Perspectivas

- Una posible aplicación de este estudio está en encontrar una red relativamente grande (i.e,  $N \geq 10^4$  ) en la cual se tenga conocimiento de que existen nodos absorbentes.
- En cuanto al rol computacional, aún queda por aplicar las reglas de navegación propuestas por este trabajo, teniendo en cuenta la teoría estudiada, y observar que tan eficientemente se realiza la búsqueda en redes complejas.
- Por otro lado, queda la pregunta sobre *¿cuál es el algoritmo de búsqueda más eficiente que favorece la navegabilidad en las redes?* el cual debería incluir una expresión explícita para el tiempo promedio de primer paso y ser susceptible a una implementación computacional.
- Por último, también se puede evaluar el hecho de cómo se podría enriquecer el mecanismo de búsqueda a través de la caminata aleatoria con memoria a partir de expresiones más directas que tengan en cuenta la topología de las redes.

# Bibliografía

- Albert, A.-L., Reka. Barabási. (2001). Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 1, 47 - 97.
- Barabási, A.-L. (2016). Network science. Cambridge University Press,1(1), 479.
- Basnarkov, M., y Kocarev. (2020). Random walk with memory on complex networks. *Physical Review Letters*, 1 - 9.
- Bonaventura, L., Nicosia. (2014). Characteristic times of biased random walks on complex networks. *APS Physics*.
- Collins, A. M., y F., L. E. (1975). A spreading-activation theory of semantic processing. *Psychological Review*, 1- 22.
- Einstein, A. (1905). Über die von der molekularkinetischen theorie der warme geforderte bewegung von in ruhenden ussigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der Physik*, 1- 12.
- Estrada, P. A., Ernesto. Knight. (2015). A first course in network theory. Oxford University Press.
- Grinstead, C. M., y Snell, J. L. (2006). Introduction to probability. American Mathematical Society.
- Hughes, B. D. (1995). Random walks and random environments. Oxford University Press.
- J., N. M. E. (2010). Networks: An introduction. Oxford University Press.
- Masuda, N., y Porter, M. (2017). Random walks and diffusion on networks. *Physics Reports*, 1 - 115.
- Norris, J. (1998). Markov chains. Cambridge University Press.
- Rosvall, M., y Bergstrom, C. (2008). Maps of random walks on complex networks reveal community structure. *PNAS*.
- Rycroft, C. H., y Bazant, M. Z. (2005). Lecture 1: Introduction to random walks and diffusion. Department of Mathematics, MIT.
- Siew, D. U. B. N. M. . K. Y. N., Cynthia ; Wulff. (2019). Cognitive network science: A review of research on cognition through the lens of network representations, processes, and dynamics. Hindawi, Wiley.
- Snavely, N. (2013). Markov chains, lecture cs1114. Cornell University Computer Science.



Document is current

Any future updates will be listed below

Random walk with memory on complex networks

Crossref DOI link: <https://doi.org/10.1103/PHYSREVE.102.042315>

Published Online: 2020-10-30

Update policy: <https://doi.org/10.1103/CROSSMARK-POLICY>

➤ Authors

➤ License Information

## Random walk with memory on complex networks

Lasko Basnarkov, Miroslav Mirchev, and Ljupco Kocarev  
Phys. Rev. E **102**, 042315 – Published 30 October 2020

