Prova 1B - 16 Horas - Cálculo III - 18.04.2024

Nome:____

Número USP:____________________________________

Professor:_____________________________________

Questão	Valor	Nota
1.ª	2,5	
2.ª	2,5	
3.ª	2,0	
4.ª	3,0	
Total	10,0	

1. Esboce a região de integração de $\int_0^1 \left(\int_{y^3}^{y} y^2 \text{sen}(x^2)\,dx \right) dy$ e calcule o valor da integral.

   Sugestão de pontuação: 0,5 desenho, 0,75 mudança de ordem de integração correta, 1,25 resultado correto.

   Solução. Vemos que $x = y$ é o mesmo que $y = x$ e que $x = y^3$ é o mesmo que $y = x^{1/3}$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{y^3}^{y} y^2 \sin(x^2)\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_x^{x^{1/3}} y^2 \sin(x^2)\,dy\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(y^3 \Big|_{y=x}^{y=x^{1/3}} \right) \sin(x^2)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 (x - x^3)\sin(x^2)\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (1 - x^2)\sin(x^2)\,x\,dx \\ &= \frac{1}{6}\int_0^1 (1-u)\sin(u)\,du = \frac{1}{6}(-\cos(u) + u\cos(u) - \text{sen}(u))\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{6}(1 - \text{sen}(1))\end{aligned}$$

   em que usamos $u = x^2$, $du = 2x\,dx$ e $\int u\,\text{sen}(u) = -u\cos(u) + \int \cos(u) = -u\cos(u) + \text{sen}(u)$.

2. Calcule a massa total da placa plana D, com densidade $\rho(x,y) = y^2$ e limitada pela elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1.$$

   Solução. Vamos considerar coordenadas polares apropriadas para a elipse dada, ou seja,

$$\frac{x}{2} = r\cos\theta \quad \text{e} \quad \frac{y-1}{3} = r\,\text{sen}\,\theta, \quad \text{com} \ \ 0 \le r \le 1 \ \ \text{e} \ \ 0 \le \theta \le 2\pi,$$

   ou, equivalentemente,

$$x = 2r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = 1 + 3r\,\text{sen}\,\theta, \quad \text{com} \ \ 0 \le r \le 1 \ \ \text{e} \ \ 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Note que, de fato, a igualdade $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ se verifica com a transformação acima. Note, também, que o jacobiano dessa transformação é $6r$. Então, a massa será dada por

$$\begin{aligned}
M &= \iint_D \rho(x,y)\,dxdy = \iint_D y^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+3r\sin\theta)^2 6r\,dr\,d\theta \\
&= 6\int_0^{2\pi}\int_0^1 [r+6r^2\sin\theta+9r^3\sin^2\theta]\,dr\,d\theta = 6\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2}+2r^3\sin\theta+\frac{9}{4}r^4\sin^2\theta\right)\Big|_0^1\,d\theta \\
&= 6\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}+2\sin\theta+\frac{9}{4}\frac{(1-\cos(2\theta))}{2}\right)\,d\theta \\
&= 6\int_0^{2\pi}\left(\frac{13}{8}+2\sin\theta-\frac{9}{8}\cos(2\theta)\right)\,d\theta \\
&= 6\left(\frac{13}{8}\theta-2\cos\theta-\frac{9}{16}\sin(2\theta)\right)\Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{39\pi}{2}.
\end{aligned}$$

3. Calcule $\iiint_W e^{(1-y)^2}\,dV$, onde W é a região dada por

$$W = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x,\ 0\le z\le 1\}.$$

Solução. Temos

$$\iiint_W e^{(1-y)^2}dV = \iint_D\left(\int_0^1 e^{(1-y)^2}dz\right)dxdy = \iint_D e^{(1-y)^2}dxdy$$

onde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$ é a projeção de W sobre o plano xy. Então,

$$\begin{aligned}
\iiint_W e^{(1-y)^2}dV &= \int_0^1\left(\int_y^1 e^{(1-y)^2}dx\right)dy = \int_0^1 e^{(1-y)^2}(1-y)dy \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{(1-y)^2}(-2(1-y))dy = \\
&= -\frac{1}{2}\left[e^{(1-y)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^1-e^0\right) = \frac{1}{2}(e-1).
\end{aligned}$$

4. Escreva a integral tripla de $f(x,y,z)=z$ em uma integral iterada sobre a região W em $\mathbb{R}^3$ limitada pelo cone $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ e o parabolóide $z=x^2+y^2$ em

   (a) coordenadas cartesianas,

(b) coordenadas cilindricas,

(c) coordenadas esféricas. Em seguida,

(d) encontre a integral tripla de f avaliando uma das integrais triplas.

Solução.

(a) As superfícies $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ e $z = x^2+y^2$ se interceptam segundo a curva $x^2+y^2 = \frac{1}{3}$ e $z = \frac{1}{3}$. Portanto,

$$W = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}},\ (x, y) \in D \right\},$$

onde D é a projeção de W no plano xy descrita por

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{\frac{1}{3} - x^2} \leq y \leq \sqrt{\frac{1}{3} - x^2},\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}.$$

Assim,

$$\iiint_W z dV = \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\int_{-\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{3}-x^2}} \left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}} z dz \right] dy \right) dx.$$

(b) Usando a mudança de coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, z = z,$$

observando que W é a imagem do conjunto

$$Q = \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{3}},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ r^2 \leq z \leq \frac{r}{\sqrt{3}} \right\}.$$

Portanto,

$$\iiint_W z dV = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left[\int_{r^2}^{\frac{r}{\sqrt{3}}} z r dz \right] dr \right) d\theta.$$

(c) Usando a mudança de coordenadas esféricas

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, z = \rho\cos\phi,$$

o paraboloide $z = x^2 + y^2$ é a imagem de $\rho = \cos\phi \text{cossec}^2\phi$, o cone $z = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}$ é a imagem de $\phi = \pi/3$. Portanto W é a imagem do conjunto

$$Q = \{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le \rho \le \cos\phi \text{cossec}^2\phi,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \pi/3 \le \phi \le \pi/2\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\iiint_W z dV &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\int_0^{\cos\phi \text{cossec}^2\phi} (\rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi d\rho \right] d\phi \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\int_0^{\cos\phi \text{cossec}^2\phi} \rho^3 \cos\phi \sin\phi d\rho \right] d\phi \right) d\theta.\end{aligned}$$

(d) Usando o item (b),

$$\begin{aligned}\iiint_W z dV &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left[\int_{r^2}^{\frac{r}{\sqrt{3}}} z r dz \right] dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{z^2}{2} r \Big|_{z=r^2}^{z=\frac{r}{\sqrt{3}}} \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{2}(\frac{r^3}{3} - r^5) dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{2}(\frac{r^3}{3} - r^5) dr \\ &= \theta\Big|_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\frac{r^4}{12} - \frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\pi}{324}.\end{aligned}$$