1. Calcule o volume do sólido delimitado elipsóide do sólido dado por $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

2. Determinar o volume interno ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$, $0 \leq z \leq 9$ e externo ao cone $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}z^2$, $z \geq 0$.

3. Considere a integral $\iiint_B z\,dx\,dy\,dz$ onde B é o sólido definido pelas desigualdades $x^2+y^2 \leq z$, $x^2+y^2+z^2 \leq 2$, $z \geq 0$. Determine os extremos de integração, e escreva as integrais iteradas usando coordenadas cartesianas, coordenadas cilíndricas e coordenadas esféricas. Calcule esta integral usando o sistema de coordenadas que achar mais conveniente.

4. Calcule o volume do sólido definido pelas desigualdades $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ e $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6$. Sugestão: usar coordenadas cilíndricas.

5. Calcular o volume do sólido constituído pelo cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 2$ e pelo cone $x^2 + y^2 \leq z^2$, $2 \leq z \leq 5$.

6. Seja R a região limitada pelo parabolóide $z = 2x^2+y^2+1$, pelo plano $x+y = 1$ e pelos planos coordenados. Calcule o volume de R.

7. Calcule as integrais abaixo usando a sistema de coordenadas mais conveniente:
   (a) $\int_0^4\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx\,dz$
   (b) $\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2 dz\,dy\,dx$
   (c) Seja B a região limitada pelo tetraedro formado pelo plano $12x + 20y + 15z = 60$ e os planos coordenados. Calcule:
   a) $\iiint_B y\,dxdydz$ b) $\iiint_B (x^2+y^2)\,dxdydz$

8. Uma lâmina plana é limitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = 4$. Ache o centro de massa, sabendo-se que a densidade no ponto $P = (x, y)$ é diretamente proporcional à distância de P ao eixo y.

9. Considere uma placa delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$. Seccionando-se a placa segundo o segmento que liga o ponto $(0, b)$ ao ponto $(a, 0)$, pede-se o centróide (centro de massa) de cada porção seccionada da placa.

10. Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ um compacto cuja fronteira tem interior nulo. Suponha que B tem a forma de um sólido cuja densidade dada por uma função contínua $\delta(x, y, z)$, $(x, y, z) \in B$. O momento de inércia deste sólido com relação a um eixo ℓ é dado por

$$I = \iiint_B r^2(x,y,z)\delta(x,y,z)\,dV$$

em que $r(x, y, z)$ é a distância do ponto (x, y, z) ao eixo ℓ. Calcule os seguintes momentos de inércia nas seguintes situações
   (a) B é uma bola fechada de raio R, ℓ é um eixo que passa pelo cento de B e $\delta(x, y, z) = \delta_0$ constante;
   (b) B é um cilindro (maciço) circular de raio R e altura h, ℓ é o eixo do cilindro e $\delta(x, y, z) = \delta_0$ constante;
   (c) B é um cubo de lado a, ℓ contém uma das arestas de B e $\delta(x, y, z) = \delta_0$ constante;
   (d) $B = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$, ℓ é o eixo Oz e $\delta(x, y, z) = x$.

11. Sejam B_1 e ℓ como descritos no exercício 10(b) e B_2 o cilindro vazado de raio interno R_0, raio externo R e altura h. Suponha que ambos têm a mesma densidade constante. Qual dos dois tem maior momento de inércia com relação a ℓ? Suponha agora que B_1 tenha densidade constante δ_1, B_2 tenha densidade

constante δ_2 e a massa de ambos sejam iguais. Neste caso, qual dos dois tem maior momento de inércia com relação a ℓ?

Respostas

1. $4\pi abc/3$
2. 54π.
3. $$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z\,dzdydx = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{\sqrt{2-r^2}} zr\,dzdrd\theta$$
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{2}} \rho^3\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\rho d\varphi d\theta + \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\cos\varphi/\,\mathrm{sen}^2\,\varphi} \rho^3\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\rho d\varphi d\theta = \frac{7\pi}{12}$$
4. $92\pi/3$
5. 47π
6. $3/4$
7. a) 18π b) $\pi/30$. c-a) $15/2$ c-b) 34
8. $(0, 8/3)$
9. Parte menor: $(\frac{2a}{3(\pi-2)}, \frac{2b}{3(\pi-2)})$. Parte maior: $(-\frac{2a}{3(3\pi+2)}, -\frac{2b}{3(3\pi+2)})$.
10. (a) $I = 2MR^2/5$, em que M é a massa de B
    (b) $I = MR^2/2$, em que M é a massa de B
    (c) $I = 2Ma^2/3$, em que M é a massa de B
    (d) $5/12$
11. B_1; B_2.