PROVA 2A - 14 HORAS - CÁLCULO III - 20.06.2024

NOME:________________________________

NÚMERO USP:________________________________

PROFESSOR:________________________________

Questão	Valor	Nota
1.ª	2,5	
2.ª	2,5	
3.ª	2,5	
4.ª	2,5	
Total	10,0	

1. Seja R a região do primeiro quadrante limitada pela circunferência centrada na origem e raio 1 e pela elipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Considere o segmento C_1 do eixo coordenado y ligando os pontos $(0,2)$ e $(0,1)$ e seja C_2 a curva tal que a fronteira de R seja $C_1 \cup C_2$ orientada no sentido anti-horário. Calcule a integral

$$\int_{C_2} \left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}+2xy\right)dx+\left(e^y+x^2+2x\right)dy.$$

Solução: Denote

$$P(x,y)=(\operatorname{arctg}\sqrt{x}+2xy, \quad Q(x,y)=e^y+x^2+2x.$$

Assim,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=2.$$

Pelo Teorema de Green,

$$\int_{C_1\cup C_2} F\cdot dr=\iint_R 2\,dA$$

$$\int_{C_2} F\cdot dr=\iint_R 2\,dA-\int_{C_1} F\cdot dr=\iint_R 2\,dA+\int_{-C_1} F\cdot dr=2.\frac{1}{4}(\pi.3.2-\pi)+\int_1^2 e^t dt=\frac{5\pi}{2}+e^2-e,$$

onde $\gamma(t)=(0,t)$, $1\le t\le 2$ é uma parametrização de $-C_1$.

2. (a) Ache constantes $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tais que $\int_\gamma F\cdot dr=0$ para toda curva C^1 fechada simples contida em $\mathbb{R}^2$, em que $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ é dado por

$$F(x,y)=\left(y^2+\alpha y\cos(xy)+2x,\ \beta xy+3x\cos(xy)+2y\right).$$

(b) Para α e β encontrados no item (a), calcule $\int_\gamma F\cdot dr$, em que γ é a parte da parábola $y=\frac{\pi}{2}x^2$, onde x vai de 0 até 1.

Solução:

a) A função F é C^1 em todo o plano, que, por sua vez, é simplesmente conexo.

Primeira forma de resolver:

Para que F seja conservativa é necessário e suficiente que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, em que $P(x, y) = y^2 + \alpha y \cos(xy) + 2x$ e $Q(x, y) = \beta xy + 3x \cos(xy) + 2y$. Assim, devemos ter $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, ou seja,

$$\beta y + 3\cos(xy) - 3xy \sin(xy) = 2y + \alpha (\cos(xy) - yx \sin(xy)) .$$

Assim,

$$(\beta - 2)y + (3 - \alpha) (\cos(xy) - xy \sin(xy)) = 0.$$

Colocando $x = y = 0$, concluímos que $\alpha = 3$. Derivando $(\beta-2)y = 0$ em y, concluímos que $\beta = 2$.

A resposta é $\alpha = 3$ e $\beta = 2$.

Segunda forma de resolver:

Para que F seja conservativa é necessário e suficiente que $F = \nabla f$. Vamos encontrar f. Sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 + \alpha y \cos(xy) + 2x \implies f(x, y) = xy^2 + \alpha \sin(xy) + x^2 + h(y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \beta xy + 3x \cos(xy) + 2y \implies f(x, y) = \frac{\beta}{2} xy^2 + 3\sin(xy) + y^2 + k(x).$$

Assim, $f(x, y) = xy^2 + 3\sin(xy) + x^2 + y^2$ é uma solução.

A resposta é $\alpha = 3$ e $\beta = 2$.

b) Vamos usar que $F = \nabla f$, em que $f(x, y) = xy^2 + 3\sin(xy) + x^2 + y^2$. Vemos que γ liga $(0, 0)$ a $(1, \frac{\pi}{2})$. Logo

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = f(1, \pi/2) - f(0, 0) = 1 + 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 3\sin(\pi/2) = \frac{\pi^2}{2} + 4.$$

A resposta é $\frac{\pi^2}{4} + 4$.

3. (a) Sejam S uma superfície, ∂S o bordo (ou fronteira) de S orientado no sentido da normal n de S. Considere um campo vetorial F em $\mathbb{R}^3$ e suponha que S, ∂S, n e F estejam nas condições do Teorema de Stokes. Use o Teorema de Stokes e mostre que, se S_1 for uma outra superfície com mesmo bordo de S e se n_1 for normal a S_1 tal que a orientação de ∂S não se altera, então vale

$$\iint_S (\text{rot}\, F \cdot n) dS = \iint_{S_1} (\text{rot}\, F \cdot n_1) dS.$$

(b) Considere o campo vetorial

$$F(x, y, z) = (\cos(xz) + \text{sen}(e^x), x + e^{\text{sen}\, y}, e^{x^2+y})$$

e seja S a casca esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com $z \geq 0$. Use o item (a) convenientemente para calcular o fluxo do rotacional de F na direção da normal, orientada de tal forma que sua componente z seja positiva nos pontos em que $z > 0$.

Solução de (a). Pelo Teorema de Stokes aplicado a S e a S_1, valem as igualdades

$$\iint_S \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{\partial S} \vec{F} d\vec{r} \qquad \text{e} \qquad \iint_{S_1} \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{n_1} dS = \int_{\partial S_1} \vec{F} d\vec{r}.$$

Mas $\partial S = \partial S_1$ (com mesma orientação). Logo,

$$\iint_S \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{n_1} dS.$$

Solução de (b). O bordo da superfície S é a circunferência C de centro na origem e raio 1 no plano $z = 0$, orientada no sentido positivo em relação à normal exterior a S. Note que C também é bordo do disco

$$D = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$$

e C continuará orientada no sentido positivo, se considerarmos a normal $\vec{n_D} = (0, 0, 1)$ de D. Assim, pelo item (a), vale

$$\iint_S \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{n_D} dS. \tag{1}$$

Então, vamos calcular $\iint_D \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{n_D} dS$ que é uma integral mais fácil. O rotacional de $\vec{F}$ é dado por

$$\text{rot}\, \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \cos(xz) + \text{sen}(e^x) & x + e^{\text{sen}\, y} & e^{x^2+y} \end{vmatrix} = (e^{x^2+y}, -2x\, e^{x^2+y} - x\, \text{sen}(xz), 1).$$

Agora, consideremos uma parametrização de D dada por

$$\sigma_D(x,y) = (x,y,0), \quad \text{com } (x,y) \in B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Então,

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,0) = (e^{x^2+y}, -2x\, e^{x^2+y}, 1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\iint_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n_D}\, dS &= \iint_B \operatorname{rot} \vec{F}(\sigma_D(x,y)) \cdot (0,0,1) dx\, dy = \iint_B \operatorname{rot} \vec{F}(x,y,0) \cdot (0,0,1) dx\, dy \\ &= \iint_B (e^{x^2+y}, -2x\, e^{x^2+y}, 1) \cdot (0,0,1) dx\, dy = \iint_B 1\, dx\, dy = \text{área de } B = \pi.\end{aligned}$$

Finalmente, voltando em (1), obtemos

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \pi.$$

4. Calcule o fluxo exterior do campo vetorial $F(x, y, z) = (xz, yz, 1)$ através da fronteira da região W limitada pelo hemisfério superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ e pelo plano $z = 3$.

   Solução. Pelo teorema da divergência,

$$
\begin{aligned}
\iint_{\partial W} (F \cdot n) dS &= \iiint_W \operatorname{div} F dV = \iiint_W 2z dV \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_3^{\sqrt{25-r^2}} 2z \, dzr \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^4 (16r - r^3) \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 (16r - r^3) \, dr \\
&= 128\pi.
\end{aligned}
$$

Rascunho