Prova 1A - 14 Horas - Cálculo III - 18.04.2024

Nome:____________________________

Número USP:____________________________

Professor:____________________________

Questão	Valor	Nota
1.ª	2,5	
2.ª	2,5	
3.ª	2,0	
4.ª	3,0	
Total	10,0	

1. Esboce a região de integração de $\int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y^{2/3}} y e^{x^2} dx \right) dy$ e calcule o valor da integral.

   Solução. Vemos que $x = y^{2/3}$ é o mesmo que $y = x^{3/2}$ e que $x = y^2$ é o mesmo que $y = x^{1/2}$. Assim,

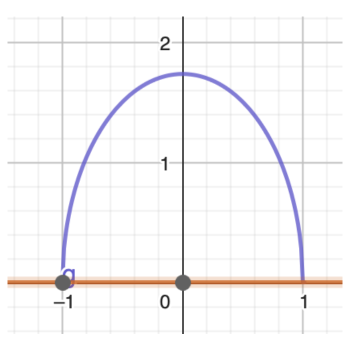
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} y e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \int_{x^{3/2}}^{x^{1/2}} y e^{x^2} dy dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(y^2 \Big|_{y=x^{3/2}}^{y=x^{1/2}} \right) e^{x^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^3) e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - x^2) e^{x^2} x dx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^1 (1-u) e^u du = \frac{1}{4} (2e^u - ue^u)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(e-2)
\end{aligned}$$

   em que usamos $u = x^2$, $du = 2xdx$ e $\int ue^u = ue^u - \int e^u = ue^u - e^u$.

2. Calcule a massa total da placa plana D, com densidade $\rho(x, y) = y$ e limitada pelo eixo $0x$ e pela semi-elipse

$$y = \sqrt{3 - 3x^2}.$$

   Solução. Considere a figura abaixo.



Para termos noção de como tomarmos as coordenadas polares para essa elipse, note que a elipse inteira pode ser reescrita como

$$x^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1.$$

Assim, tomamos

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad \frac{y}{\sqrt{3}} = r\,\text{sen}\,\theta, \quad \text{com} \;\; 0 \le r \le 1 \;\; \text{e} \;\; 0 \le \theta \le \pi,$$

ou, equivalentemente,

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = \sqrt{3}\,r\,\text{sen}\,\theta, \quad \text{com} \;\; 0 \le r \le 1 \;\; \text{e} \;\; 0 \le \theta \le \pi.$$

Note que a igualdade $x^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$ de fato se verifica com a transformação acima. Note, também, que o jacobiano dessa transformação é $\sqrt{3}\,r$. Então, a massa de D será dada por

$$\begin{aligned}
M &= \iint_D \rho(x,y)\,dxdy = \iint_D y\,dxdy = \int_0^{\pi}\int_0^1 (\sqrt{3}\,r\,\text{sen}\,\theta)\sqrt{3}r\,dr\,d\theta \\
&= 3\int_0^{\pi}\int_0^1 r^2\,\text{sen}\,\theta\,dr\,d\theta = 3\int_0^{\pi}\left(\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \text{sen}\,\theta\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\text{sen}\,\theta\,d\theta = -\cos\theta\Big|_0^{\pi} = 2.
\end{aligned}$$

Outro modo:

$$\begin{aligned}
M &= \iint_D \rho(x,y)\,dxdy = \iint_D y\,dxdy = \int_0^{\sqrt{3}}\left(\int_{-\sqrt{(3-y^2)/3}}^{\sqrt{(3-y^2)/3}} y\,dx\right)dx = \int_0^{\sqrt{3}} 2y\sqrt{(3-y^2)/3}\,dy \\
&= -3\int_1^0 \sqrt{u}\,du = 3\int_0^1 \sqrt{u}\,du = 2u^{3/2}\Big|_0^1 = 2,
\end{aligned}$$

onde usamos a mudança de variáveis $u = (3-y^2)/3$.

3. Calcule a integral $\iiint_B x\,dV$, onde B é o sólido limitado pelos planos $x = 0$, $z = 0$, $x = y$ e $x + y + z = 2$.

Solução. O sólido B é limitado superiormente pelo $z = 2 - (x + y)$ e inferiormente pelo plano $z = 0$. Portanto,

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 2 - (x+y) \;\text{e}\; (x,y) \in D\},$$

onde D é a projeção de B no plano xy que pode ser descrita por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \leq 2-x,\ 0 \leq x \leq 1\}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\iiint_B x\,dV &= \iint_D \left(\int_0^{2-(x+y)} x\,dz \right) dA \\
&= \iint_D x(2-x-y)\,dA \\
&= \int_0^1 \left(\int_x^{2-x} (2x - x^2 - xy)\,dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_x^{2-x} \left[(2x-x^2)y - \frac{xy^2}{2} \right] \Big|_{y=x}^{y=2-x} \right) dx \\
&= \int_0^1 (2x - 4x^2 + 2x^3)\,dx \\
&= \left(x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

4. Escreva a integral tripla de $f(x,y,z) = 6 + 4y$ em uma integral iterada sobre a região W no primeiro octante delimitada pelo cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$, o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e os planos coordenadados em
   (a) coordenadas cartesianas,
   (b) coordenadas cilindricas,
   (c) coordenadas esféricas. Em seguida,
   (d) encontre a integral tripla de f avaliando uma das integrais triplas.

Solução.

(a) Note que $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}, (x,y) \in D\}$ onde D é a projeção de W no plano xy descrita por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\ 0 \leq x \leq 1\}.$$

Assim,

$$\iiint_W (6+4y)\,dV = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left[\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} (6+4y)\,dz \right] dy \right) dx.$$

(b) Usando a mudança de coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, z = z,$$

observando que W é a imagem do conjunto

$$Q = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le z \le r\}.$$

Portanto,

$$\iiint_W (6+4y)\,dV = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1\left[\int_0^r (6+4r\sin\theta)r\,dz\right]dr\right)d\theta.$$

(c) Usando a mudança de coordenadas esféricas

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, z = \rho\cos\phi,$$

o cilindro $x^2+y^2=1$ é a imagem de $\rho = \text{cossec}\phi$, o cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$ é a imagem de $\phi = \pi/4$. Portanto W é a imagem do conjunto

$$Q = \{(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le \rho \le \text{cossec}\phi,\ 0 \le \theta \le \pi/2,\ \pi/4 \le \phi \le \pi/2\}.$$

Logo,

$$\iiint_W (6+4y)\,dV = \int_0^{\pi/2}\left(\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[\int_0^{\text{cossec}\phi} (6+4\rho\sin\phi\sin\theta)\rho^2\sin\phi\,d\rho\right]d\phi\right)d\theta.$$

(d) Usando o item (b),

$$\begin{aligned}
\iiint_W (6+4y)\,dV &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1\left[\int_0^r (6+4r\sin\theta)r\,dz\right]dr\right)d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 (6+4r\sin\theta)rz\Big|_{z=0}^{z=r}dr\right)d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1 (6r^2+4r^3\sin\theta)dr\right)d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}(2r^3+r^4\sin\theta)\Big|_{r=0}^{r=1}d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}(2+\sin\theta)d\theta \\
&= (2\theta-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \pi+1.
\end{aligned}$$