Prova 1A - 16 Horas - Cálculo III - 18.04.2024

Nome: ____________________

Número USP: ____________________

Professor: ____________________

Questão	Valor	Nota
1.ª	2,5	
2.ª	2,5	
3.ª	2,0	
4.ª	3,0	
Total	10,0	

1. Esboce a região de integração de $\int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y^{2/3}} y\text{sen}(x^2)\,dx \right) dy$ e calcule o valor da integral.

   Sugestão de pontuação: 0,5 desenho, 0,75 mudança de ordem de integração correta, 1,25 resultado correto.

   Solução. Vemos que $x = y^{2/3}$ é o mesmo que $y = x^{3/2}$ e que $x = y^2$ é o mesmo que $y = x^{1/2}$. Assim,

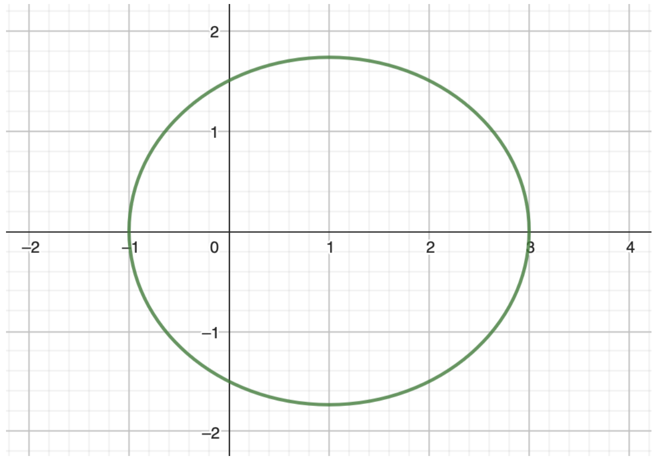
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} y\text{sen}(x^2)\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_{x^{3/2}}^{x^{1/2}} y\text{sen}(x^2)\,dy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y^2\big|_{y=x^{3/2}}^{y=x^{1/2}} \right) \text{sen}(x^2)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (x - x^3)\text{sen}(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - x^2)\text{sen}(x^2)x\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 (1-u)\text{sen}(u)\,du = \frac{1}{4}(-\cos(u) + u\cos(u) - \text{sen}(u))\big|_0^1 \\
&= \frac{1}{4}(1 - \text{sen}(1)).
\end{aligned}$$

   em que usamos $u = x^2$, $du = 2x\,dx$ e $\int u\text{sen}(u) = -u\cos(u) + \int \cos(u) = -u\cos(u) + \text{sen}(u)$.

2. Calcule a massa total da placa plana D, com densidade $\rho(x, y) = x^2$ e limitada pela elipse

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

   Solução. Considere a figura abaixo.



Vamos considerar coordenadas polares apropriadas para a elipse dada, ou seja,

$$\frac{x-1}{2} = r\cos\theta \quad \text{e} \quad \frac{y}{3} = r \text{ sen}\,\theta, \quad \text{com} \;\; 0 \le r \le 1 \;\; \text{e} \;\; 0 \le \theta \le 2\pi,$$

ou, equivalentemente,

$$x = 1 + 2r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = 3r \text{ sen}\,\theta, \quad \text{com} \;\; 0 \le r \le 1 \;\; \text{e} \;\; 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Note que, de fato, a igualdade $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ se verifica com a transformação acima. Note, também, que o jacobiano dessa transformação é $6r$. Então, a massa será dada por

$$\begin{aligned} M &= \iint_D \rho(x,y)\,dxdy = \iint_D x^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1+2r\cos\theta)^2 6r\,dr\,d\theta \\ &= 6\int_0^{2\pi}\int_0^1 [r + 4r^2\cos\theta + 4r^3\cos^2\theta]\,dr\,d\theta = 6\int_0^{2\pi}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{4r^3\cos\theta}{3} + r^4\cos^2\theta\right)\Bigg|_0^1 d\theta \\ &= 6\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{4\cos\theta}{3} + \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)\,d\theta = 6\left(2\pi + \frac{4}{3}\text{sen}\,\theta\Big|_0^{2\pi} + \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}\Big|_0^{2\pi}\right) = 12\pi \end{aligned}$$

3. Calcule $\iiint_W e^{x^2}\,dV$, onde W é a região dada por

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le x,\; 0 \le z \le 1\}.$$

Solução. Temos

$$\iiint_W e^{x^2}\,dV = \iint_D \left(\int_0^1 e^{x^2}\,dz\right)\,dxdy = \iint_D e^{x^2}\,dxdy$$

onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le x\}$ é a projeção de W sobre o plano xy.

Então,

$$\iiint_W e^{x^2}dV = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2}dy\right)dx = \int_0^1 e^{x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x^2}(2x)dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^1 - e^0\right) = \frac{1}{2}(e-1).$$

4. Escreva a integral tripla de $f(x,y,z) = z$ em uma integral iterada sobre a região W em $\mathbb{R}^3$ limitada pelo cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e o parabolóide $z = x^2+y^2$ em
   (a) coordenadas cartesianas,
   (b) coordenadas cilindricas,
   (c) coordenadas esféricas. Em seguida,
   (d) encontre a integral tripla de f avaliando uma das integrais triplas.

Solução.

Solução.

(a) As superfícies $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e $z = x^2+y^2$ se interceptam segundo a curva $x^2+y^2 = 1$ e $z = 1$. Portanto,

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2},\ (x,y) \in D\},$$

onde D é a projeção de W no plano xy descrita por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ -1 \le x \le 1\}.$$

Assim,

$$\iiint_W z\,dV = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} z\,dz\right] dy\right) dx.$$

(b) Usando a mudança de coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, z = z,$$

observando que W é a imagem do conjunto

$$Q = \{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ r^2 \le z \le r\}.$$

Portanto,

$$\iiint_W z\,dV = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left[\int_{r^2}^r z r\,dz\right] dr\right) d\theta.$$

(c) Usando a mudança de coordenadas esféricas

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta, \quad y = \rho \sin\phi \sin\theta, z = \rho\cos\phi,$$

o paraboloide $z = x^2 + y^2$ é a imagem de $\rho = \cos\phi \text{cossec}^2\phi$, o cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ é a imagem de $\phi = \pi/4$. Portanto W é a imagem do conjunto

$$Q = \{(\rho,\theta,\phi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le \rho \le \cos\phi \text{cossec}^2\phi,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ \pi/4 \le \phi \le \pi/2\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\iiint_W z dV &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\int_0^{\cos\phi \text{cossec}^2\phi} (\rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi \, d\rho \right] d\phi \right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\int_0^{\cos\phi \text{cossec}^2\phi} \rho^3 \cos\phi \sin\phi \, d\rho \right] d\phi \right) d\theta.
\end{aligned}$$

(d) Usando o item (b),

$$\begin{aligned}
\iiint_W z dV &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left[\int_{r^2}^{r} z r dz \right] dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{z^2}{2} r \Big|_{z=r^2}^{z=r} \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{1}{2}(r^3 - r^5) dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{1}{2}(r^3 - r^5) dr \\
&= \theta \Big|_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$