Prova 1B - 14 Horas - Cálculo III - 18.04.2024

Nome:______________________________

Número USP:______________________________

Professor:______________________________

Questão	Valor	Nota
1.ª	2,5	
2.ª	2,5	
3.ª	2,0	
4.ª	3,0	
Total	10,0	

1. Esboce a região de integração de $\int_0^1 \left(\int_{y^3}^{y} y^2 e^{x^2} dx \right) dy$ e calcule o valor da integral.

   Solução. Vemos que $x = y$ é o mesmo que $y = x$ e que $x = y^3$ é o mesmo que $y = x^{1/3}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{y^3}^{y} y^2 e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \int_x^{x^{1/3}} y^2 e^{x^2} dy dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(y^3 \Big|_{y=x}^{y=x^{1/3}} \right) e^{x^2} dx \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 (x - x^3) e^{x^2} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (1 - x^2) e^{x^2} x dx \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-u) e^u du = \frac{1}{6} (2e^u - ue^u)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}(e-2)
\end{aligned}$$

   em que usamos $u = x^2$, $du = 2x dx$ e $\int ue^u = ue^u - \int e^u = ue^u - e^u$.

2. Calcule a massa total da placa plana D, com densidade $\rho(x,y) = x$ e limitada pelo eixo $0y$ e pela semi-elipse

$$x = \sqrt{3 - 3y^2}.$$

   Solução. Para termos noção de como tomarmos as coordenadas polares para essa elipse, note que a elipse inteira pode ser reescrita como

$$\left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right)^2 + y^2 = 1.$$

   Assim, tomamos

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = r \cos\theta \quad \text{e} \quad y = r \sin\theta, \quad \text{com} \;\; 0 \le r \le 1 \;\; \text{e} \;\; -\pi/2 \le \theta \le \pi/2,$$

   ou, equivalentemente,

$$x = \sqrt{3}\, r \cos\theta \quad \text{e} \quad y = r \text{ sen}\,\theta, \quad \text{com} \;\; 0 \le r \le 1 \;\; \text{e} \;\; -\pi/2 \le \theta \le \pi/2.$$

Note que a igualdade $\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + y^2 = 1$ de fato se verifica com a transformação acima. Note, também, que o jacobiano dessa transformação é $\sqrt{3}\,r$. Então, a massa de D será dada por

$$M = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy = \iint_D x\,dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^1 (\sqrt{3}\,r\,\cos\theta)\sqrt{3}r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta \int_0^1 3r^2 dr = \operatorname{sen}\theta\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} r^3\Big|_0^1 = 2.$$

Outro modo:

$$M = \iint_D \rho(x,y)\,dxdy = \iint_D x\,dxdy = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_{-\sqrt{(3-x^2)/3}}^{\sqrt{(3-x^2)/3}} x dy\right) dx = \int_0^{\sqrt{3}} 2x\sqrt{(3-x^2)/3}dx$$
$$= -3\int_1^0 \sqrt{u}du = 3\int_0^1 \sqrt{u}du = 2u^{3/2}\Big|_0^1 = 2,$$

onde usamos a mudança de variáveis $u = (3-x^2)/3$.

3. Calcule a integral $\iiint_B y dV$, onde B é o sólido limitado pelos planos $y = 0$, $z = 0$, $x = y$ e $x + y + z = 2$.

Solução. O sólido B é limitado superiormente pelo $z = 2 - (x+y)$ e inferiormente pelo plano $z = 0$. Portanto,

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 2 - (x+y) \text{ e } (x,y) \in D\},$$

onde D é a projeção de B no plano xy que pode ser descrita por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le x \le 2-y,\ 0 \le y \le 1\}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\iiint_B y\,dV &= \iint_D \left(\int_0^{2-(x+y)} y\,dz\right) dA \\
&= \iint_D y(2-x-y)\,dA \\
&= \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} (2y-y^2-xy)\,dx\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} \left[(2y-y^2)x - \frac{yx^2}{2}\right] \Big|_{x=y}^{x=2-y}\right) dy \\
&= \int_0^1 (2y-4y^2+2y^3)\,dy \\
&= \left(y^2 - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^4}{2}\right) \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

4. Escreva a integral tripla de $f(x,y,z) = 4+6y$ em uma integral iterada sobre a região W no primeiro octante delimitada pelo cone $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$, o cilindro $x^2+y^2=1$ e os planos coordenadados em
   (a) coordenadas cartesianas,
   (b) coordenadas cilindricas,
   (c) coordenadas esféricas. Em seguida,
   (d) encontre a integral tripla de f avaliando uma das integrais triplas.

   Solução.

   (a) Note que $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le \sqrt{3(x^2+y^2)}, (x,y) \in D\}$ onde D é a projeção de W no plano xy descrita por

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le \sqrt{1-x^2},\ 0 \le x \le 1\}.$$

   Assim,

$$\iiint_W (4+6y)\,dV = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left[\int_0^{\sqrt{3(x^2+y^2)}} (4+6y)\,dz\right] dy\right) dx.$$

   (b) Usando a mudança de coordenadas cilíndricas

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, z = z,$$

observando que W é a imagem do conjunto

$$Q = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le z \le \sqrt{3}\, r\}.$$

Portanto,

$$\iiint_W (4+6y)\,dV = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{3}\,r} (4 + 6r\sin\theta) r\,dz \right] dr \right) d\theta.$$

(c) Usando a mudança de coordenadas esféricas

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi\sin\theta, z = \rho\cos\phi,$$

o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ é a imagem de $\rho = \text{cossec}\phi$, o cone $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$ é a imagem de $\phi = \pi/6$. Portanto W é a imagem do conjunto

$$Q = \{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le \rho \le \text{cossec}\phi,\ 0 \le \theta \le \pi/2,\ \pi/6 \le \phi \le \pi/2\}.$$

Logo,

$$\iiint_W (4+6y)\,dV = \int_0^{\pi/2} \left(\int_{\pi/6}^{\pi/2} \left[\int_0^{\text{cossec}\phi} (4 + 6\rho\sin\phi\sin\theta)\rho^2\sin\phi\,d\rho \right] d\phi \right) d\theta.$$

(d) Usando o item (b),

$$\begin{aligned}
\iiint_W (4+6y)\,dV &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{3}\,r} (4 + 6r\sin\theta) r\,dz \right] dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 (4 + 6r\sin\theta) rz \Big|_{z=0}^{z=\sqrt{3}\,r} dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 (4\sqrt{3}r^2 + 6\sqrt{3}r^3\sin\theta)\,dr \right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} r^3 + \frac{6\sqrt{3}}{4} r^4 \sin\theta \right) \Big|_{r=0}^{r=1} d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\theta \right) d\theta \\
&= \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\theta - \frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\theta \right) \Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$