Prova 2A - 16 Horas - Cálculo III - 20.06.2024

Nome:____

Número USP:____________________________________

Professor:______________________________________

Questão	Valor	Nota
1.ª	2,5	
2.ª	2,5	
3.ª	2,5	
4.ª	2,5	
Total	10,0	

1. Calcule a integral

$$\int_\gamma \left(xy + \sqrt{\frac{x^2+1}{x^4+5}}\right) dx + \left(x^2 + y^2 - \frac{\ln(y^2+1)}{e^{-y^2}+1}\right) dy,$$

sendo γ a curva fechada fronteira da região limitada por $y = x^2$ e $y - x = 2$, orientada no sentido anti-horário.

Solução: Denote

$$P(x,y) = xy + \sqrt{\frac{x^2+1}{x^4+5}}, \quad Q(x,y) = x^2 + y^2 - \frac{\ln(y^2+1)}{e^{-y^2}+1}.$$

Assim,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = x.$$

Pelo teorema de Green,

$$\int_\gamma F \cdot dr = \iint_R x\, dA = \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} x\, dy\, dx = \int_{-1}^{2} x(x+2-x^2)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{4}.$$

2. Considere o campo vetorial $F : \mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0)\} \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$F(x,y) = \left(\frac{-(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}}, \frac{-y}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}} \right).$$

(a) O campo F conservativo? Se for, ache $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0)\} \to \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$.

(b) Suponha que o campo acima corresponda a um campo de forças. Qual é o trabalho ($\int_\gamma F \cdot dr$) que a força realiza sobre uma partícula que se move na curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (1+\cos(2\pi t), t)$?

Solução:

a) Como $\mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0)\}$ não é simplesmente conexo, para provar que o campo é conservativo é suficiente mostrar que existe $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0)\} \to \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$. Usaremos que $\int \frac{-x}{(x^2+C)^{3/2}} dx = (x^2+C)^{-1/2}$. Assim,

$$\partial_x f(x,y) = \frac{-(x-1)}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}} \implies f(x,y) = \frac{1}{((x-1)^2+y^2)^{1/2}} + k(y),$$
$$\partial_y f(x,y) = \frac{-y}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}} \implies f(x,y) = \frac{1}{((x-1)^2+y^2)^{1/2}} + h(x).$$

Resposta: F é conservativo e $F = \nabla f$, em que $f(x,y) = \frac{1}{((x-1)^2+y^2)^{1/2}}$.

b) Basta observar que

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(2,1) - f(2,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1.$$

A resposta é $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$.

3. Aplique o Teorema de Stokes para calcular o fluxo do rotacional do campo vetorial

$$F(x, y, z) = (-y, xe^z, x + y)$$

através da superfície S que é a parte do paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ com $x \geq 0$ e $z \geq 0$, em direção à normal de S que aponta para cima (i.e., com 3^a coordenada positiva).

Solução. O bordo (fronteira) de S é formado pela meia circunferência C, dada por $x^2 + y^2 = 9$ em $z = 0$, com $x \geq 0$, e pela parábola P, dada por $z = 9 - y^2$ em $x = 0$, com $z \geq 0$. Considere a seguinte parametrização de S por meio de gráfico:

$$\sigma(x, y) = (x, y, g(x, y)),$$

com

$$z = g(x, y) = 9 - x^2 - y^2$$

e

$$(x, y) \in B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 9,\ x \geq 0\}.$$

Então,

$$\vec{n_1} = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right) = (2x, 2y, 1)$$

é a normal apontando para cima. Agora, consideremos as seguintes parametrizações, γ_C e γ_P, respectivamente para C e P:

$$\begin{aligned}
\gamma_C(t) &= (3\cos(t), 3\,\text{sen}(t), 0), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\
\gamma_P(t) &= (0, t, 9 - t^2), \quad t \in [-3, 3].
\end{aligned}$$

Essas parametrizações, γ_C e γ_P, estão orientadas positivamente em relação a $\vec{n_1}$? Com a regra da mão direita, verifica-se que γ_C está sim, porém, γ_P está ao contrário. Por isso, escreveremos o bordo de S como $\partial S = \gamma_C \cup (-\gamma_P)$ em que o sinal na frente da γ_P indica que colocaremos um sinal negativo na sua INTEGRAL de LINHA para ficar com o sentido correto (como se tivéssemos feito uma reparametrização que invertesse o sentido de γ_P). Assim, pelo Teorema de Stokes,

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{\partial S} \vec{F} d\vec{r} = \int_{\gamma_C} \vec{F} d\vec{r} - \int_{\gamma_P} \vec{F} d\vec{r}. \tag{1}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\gamma_C'(t) &= (-3\,\text{sen}(t), 3\cos(t), 0), \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\
\gamma_P'(t) &= (0, 1, -2t), \quad t \in [-3, 3].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_C} \vec{F} d\vec{r} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma_C(t)) \cdot \gamma_C'(t) dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(3\cos(t), 3\,\mathrm{sen}(t), 0) \cdot (-3\,\mathrm{sen}(t), 3\cos(t), 0) dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-3\,\mathrm{sen}(t), 3\cos(t), 3\cos(t) + 3\,\mathrm{sen}(t)) \cdot (-3\,\mathrm{sen}(t), 3\cos(t), 0) dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 9\, dt = 9\pi
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_P} \vec{F} d\vec{r} &= \int_{-3}^{3} F(\gamma_P(t)) \cdot \gamma_P'(t) dt \\
&= \int_{-3}^{3} F(0, t, 9 - t^2) \cdot (0, 1, -2t) dt \\
&= \int_{-3}^{3} (-t, 0, t) \cdot (0, 1, -2t) dt = -2 \int_{-3}^{3} t^2 dt = -36.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\iint_S \mathrm{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 9\pi + 36.$$

4. Seja W uma região fechada e limitada de $\mathbb{R}^3$ cuja fronteira, ∂W, é a união de duas superfícies S_1 e S_2, orientadas com vetor normal exterior a W. Considere o vetor normal a S_1 com a terceira componente positiva. Qual o valor do fluxo exterior do campo vetorial F através de S_2, onde $F(x,y,z) = \left(e^{y^2+z^2}, y + 2\sqrt{5}, -2y\right)$ sabendo que S_1 é uma porção do plano $2y + z = 1$ com 5 unidades de área e que W possui 30 unidades de volume.

Solução: Pelo teorema de Gauss,

$$\iint_{\partial W} (F \cdot n)\, dS = \iiint_W \operatorname{div} F\, dV = \iiint_W 1\, dV = \operatorname{vol}(W) = 30.$$

Por outro lado, como $\partial W = S_1 \cup S_2$, temos

$$\iint_{\partial W} (F \cdot n)\, dS = \iint_{S_1} (F \cdot n)\, dS + \iint_{S_2} (F \cdot n)\, dS.$$

Assim,

$$\iint_{S_2} (F \cdot n)\, dS = \iint_{\partial W} (F \cdot n)\, dS - \iint_{S_1} (F \cdot n)\, dS = 30 - \iint_{S_1} (F \cdot n)\, dS.$$

Para calcular $\iint_{S_1} (F \cdot n)\, dS$ vamos usar a definição dessa integral. Para isso, seja $r(x,y) = (x, y, 1 - 2y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, uma parametrização de S_1. O vetor

$$n = \frac{r_x(x,y) \times r_y(x,y)}{\|r_x(x,y) \times r_y(x,y)\|} = \frac{(0,2,1)}{\sqrt{5}}$$

é normal unitário a S_1 apontando para cima. Assim,

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} (F \cdot n)\, dS &= \iint_{S_1} F(x, y, 1-2y) \cdot \frac{(0,2,1)}{\sqrt{5}} dS \\
&= \iint_{S_1} \left(e^{y^2+(1-2y)^2}, y + 2\sqrt{5}, -2y\right) \cdot \frac{(0,2,1)}{\sqrt{5}} dS \\
&= \iint_{S_1} (2(y + 2\sqrt{5}) - 2y) \frac{1}{\sqrt{5}} dS \\
&= \iint_{S_1} 4 dS = 4 \text{Área}(S_1) = 4.5 = 20.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\iint_{S_2} (F \cdot n)\, dS = \iint_{\partial W} (F \cdot n)\, dS - \iint_{S_1} (F \cdot n)\, dS = 30 - 20 = 10.$$

A resposta é 10.

Rascunho