Prova 2B - 14 Horas - Cálculo III - 20.06.2024

Nome:______________________________

Número USP:______________________________

Professor:______________________________

Questão	Valor	Nota
1.ª	2,5	
2.ª	2,5	
3.ª	2,5	
4.ª	2,5	
Total	10,0	

1. Seja R a região do primeiro quadrante limitada pela circunferência centrada na origem e raio 2 e pela elipse $4x^2 + y^2 = 1$. Considere o segmento C_1 do eixo coordenado y ligando os pontos $(0,2)$ e $(0,1)$ e seja C_2 a curva tal que a fronteira de R seja $C_1 \cup C_2$ orientada no sentido anti-horário. Calcule a integral

$$\int_{C_2} \left(\operatorname{arctg}\sqrt{x} + 2xy\right) dx + \left(e^y + x^2 + 2x\right) dy.$$

Solução: Denote

$$P(x,y) = \operatorname{arctg}\sqrt{x} + 2xy, \quad Q(x,y) = e^y + x^2 + 2x.$$

Assim,

$$\frac{\partial Q}{\partial x(x,y)} - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 2.$$

Pelo Teorema de Green,

$$\int_{C_1 \cup C_2} F \cdot dr = \iint_R 2\, dA$$

$$\int_{C_2} F\cdot dr = \iint_R 2\, dA - \int_{C_1} F\cdot dr = \iint_R 2\, dA + \int_{-C_1} F\cdot dr = 2.\frac{1}{4}(4\pi - \pi.\frac{1}{2}.1) + \int_1^2 e^t dt = \frac{7\pi}{4} + e^2 - e.$$

onde $\gamma(t) = (0,t)$, $1 \le t \le 2$ é uma parametrização de $-C_1$.

2. (a) Ache constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\int_\gamma F \cdot dr = 0$ para toda curva C^1 fechada simples contida em $\mathbb{R}^2$, em que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é dado por

$$F(x, y) = \left(\beta xy^2 + 5y\sin(xy) + 4x, x^2y + \alpha x\sin(xy) + 2y\right).$$

(b) Para α e β encontrados no item (a), calcule $\int_\gamma F \cdot dr$, em que γ é a parte da parábola $y = \pi x^2$, onde x vai de 0 até 1.

Solução:

a) A função F é C^1 em todo o plano, que, por sua vez, é simplesmente conexo.

Primeira forma de resolver:

Para que F seja conservativa é necessário e suficiente que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, em que $P(x, y) = \beta xy^2 + 5y\sin(xy) + 4x$ e $Q(x, y) = x^2y + \alpha x\sin(xy) + 2y$. Assim, devemos ter $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, ou seja,

$$2xy + \alpha\sin(xy) + \alpha xy\cos(xy) = 2\beta xy + 5\sin(xy) + 5xy\cos(xy).$$

Assim,

$$(2 - 2\beta)xy + (\alpha - 5)(\sin(xy) + xy\cos(xy)) = 0.$$

A igualdade é obtida para $\beta = 1$ e $\alpha = 5$.

A resposta é $\alpha = 5$ e $\beta = 1$.

Segunda forma de resolver:

Para que F seja conservativa é necessário e suficiente que $F = \nabla f$. Vamos encontrar f. Sabemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \beta xy^2 + 5y\sin(xy) + 4x \implies f(x, y) = \frac{\beta}{2}x^2y^2 - 5\cos(xy) + 2x^2 + h(y),\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2y + \alpha x\sin(xy) + 2y \implies f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - \alpha\cos(xy) + y^2 + k(x).\end{aligned}$$

Assim, $\alpha = 5$ e $\beta = 1$, $h(y) = y^2$ e $k(x) = 2x^2$.

Assim, $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - 5\cos(xy) + 2x^2 + y^2$ é uma função potencial de F.

A resposta é $\alpha = 5$ e $\beta = 1$.

b) Vamos usar que $F = \nabla f$, em que $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - 5\cos(xy) + 2x^2 + y^2$. Vemos que γ liga $(0, 0)$ a $(1, \pi)$. Logo

$$\int_\gamma F \cdot d\gamma = f(1, \pi) - f(0, 0) = \frac{1}{2}\pi^2 - 5\cos(\pi) + 2 + \pi^2 - (-5) = \frac{3\pi^2}{2} + 12.$$

A resposta é $\frac{3\pi^2}{2} + 12$.

3. (a) Sejam S uma superfície, ∂S o bordo (ou fronteira) de S orientado no sentido da normal n de S. Considere um campo vetorial F em $\mathbb{R}^3$ e suponha que S, ∂S, n e F estejam nas condições do Teorema de Stokes. Use o Teorema de Stokes e mostre que, se S_1 for uma outra superfície com mesmo bordo de S e se n_1 for normal a S_1 tal que a orientação de ∂S não se altera, então vale

$$\iint_S (\operatorname{rot} F \cdot n)\, dS = \iint_{S_1} (\operatorname{rot} F \cdot n_1)\, dS.$$

(b) Considere o campo vetorial

$$F(x, y, z) = (\cos(xz) + \operatorname{sen}(e^x), x + e^{\operatorname{sen} y}, x^2 + 2y),$$

e seja S a casca esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, com $x \geq 0$. Use o item (a) convenientemente para calcular o fluxo do rotacional de F na direção da normal, orientada de tal forma que sua componente x seja positiva nos pontos em que $x > 0$.

Solução de (a). Pelo Teorema de Stokes aplicado a S e a S_1, valem as igualdades

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_{\partial S} \vec{F} d\vec{r} \qquad \text{e} \qquad \iint_{S_1} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n_1}\, dS = \int_{\partial S_1} \vec{F} d\vec{r}.$$

Mas $\partial S = \partial S_1$ (com mesma orientação). Logo,

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{S_1} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n_1}\, dS.$$

Solução de (b). O bordo da superfície S é a circunferência C de centro na origem e raio 1 no plano $x = 0$, orientada no sentido positivo em relação à normal exterior a S. Note que C também é bordo do disco

$$D = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon y^2 + z^2 \leq 1\}$$

e C continuará orientada no sentido positivo, se considerarmos a normal $\vec{n_D} = (1, 0, 0)$ de D. Pelo item (a), vale

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n_D}\, dS. \tag{1}$$

Então, vamos calcular $\iint_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n_D}\, dS$ que é uma integral mais fácil. O rotacional de $\vec{F}$ é dado por

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \cos(xz) + \operatorname{sen}(e^x) & x + e^{\operatorname{sen} y} & x^2 + 2y \end{vmatrix} = (2, -2x - x \operatorname{sen}(xz), 1).$$

Consideremos uma parametrização de D dada por

$$\sigma_D(y, z) = (0, y, z), \quad \text{com domínio} \quad B = \{(y, z)\colon y^2 + z^2 \le 1\}.$$

Portanto,

$$\operatorname{rot} \vec{F}(0, y, z) = (2, 0, 1).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\iint_D \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n_D}\, dS &= \iint_B \operatorname{rot} \vec{F}(\sigma_D(y, z)) \cdot (1, 0, 0)\, dy\, dz \\
&= \iint_B \operatorname{rot} \vec{F}(0, y, z) \cdot (1, 0, 0)\, dy\, dz = \iint_B (2, 0, 1) \cdot (1, 0, 0)\, dx\, dy \\
&= \iint_B 2\, dx\, dy = 2(\text{área de } B) = 2\pi.
\end{aligned}$$

Finalmente, voltando em (1), obtemos

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 2\pi.$$

4. Calcule o fluxo exterior do campo vetorial $F(x, y, z) = \left(xz, yz, \frac{z^2}{2}\right)$ através da fronteira da região W limitada pelo hemisfério superior da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ e pelo plano $z = 4$.

   Solução. Pelo teorema da divergência,

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial W} (F \cdot n) dS &= \iiint_W \operatorname{div} F dV = \iiint_W 3z dV \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_4^{\sqrt{25-r^2}} 3z \, dzr \, dr \, d\theta \\
&= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^4 (16r - r^3) \, dr \, d\theta \\
&= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 (9r - r^3) \, dr \\
&= \frac{243\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Rascunho