5.1 Primeiro Roteiro - Revisão de probabilidade usando o Tabuleiro de Galton

Introdução

Foi visto que probabilidades podem ser representadas de forma binária, se for considerado uma probabilidade de acerto e uma de falha para o evento observado. Essas probabilidades são chamadas binomiais. Também foi explicado a lei dos grandes números, que diz que a diferença entre a probabilidade de um evento e sua média de ocorrência, tende a ser menor quanto maior for o número de eventos abordados. Será abordado nessa aula uma possível aplicação desses conceitos, através de uma simulação da plataforma online PhET.

A probabilidade e estatística foram alvos de estudos inicialmente para estudar jogos, portanto nesta aula a abordagem será com base no exercício de um jogo fictício, onde o aluno deverá calcular as chances a favor, e contra o jogador.

Objetivos

- Observar conceitos da probabilidade através da simulação de um tabuleiro de Galton.
- Utilizar a equação binomial para determinar a probabilidade de sucesso e falha em diferentes configurações do tabuleiro.
- Observar a validade da lei dos grandes números.
- Familiarizar-se com as ferramentas do simulador para os próximos experimentos.

Materiais utilizados

Simulador online do tabuleiro de Galton, disponível na plataforma PhET em: https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability_pt_BR.html.

Desenvolvimento

Iniciaremos a aula fazendo um levantamento de conhecimento prévio sobre probabilidades binomiais, e a aproximação de uma distribuição binomial para uma distribuição normal.

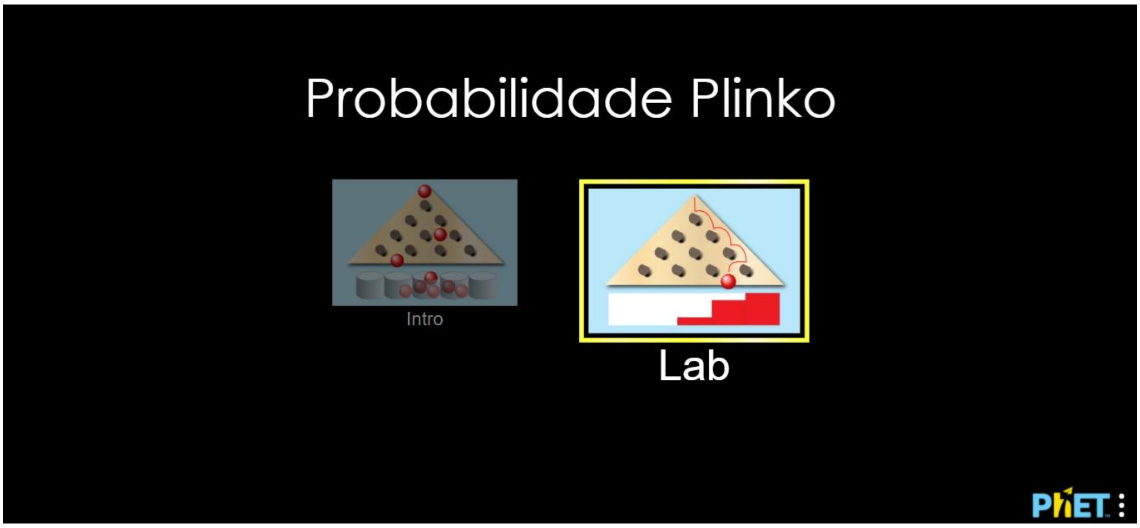
Esse experimento é dividido em duas partes, primeiro é utilizado o simulador com apenas duas divisórias, e analisados os dados de acordo com o proposto pelo roteiro. Em seguida a simulação é configurada para seis divisórias, para nova coleta e análise de dados.

A aplicação é prevista para uma aula de 100 minutos de duração, e está dividida em cinco etapas, simulando situações que envolvem um jogo em uma casa de apostas, os alunos deveram reproduzir a situações propostas em cada etapa, e debater os resultados.

Etapa 1: uma casa de jogos possui um dispositivo semelhante a um tabuleiro de Galton com apenas um pino, uma esfera é jogada por vez, e o apostador deve escolher previamente qual das duas divisórias a esfera cairá. O administrador diz que as chances são iguais para o jogador e para a casa, ele está correto? Justifique.

Professor: peça aos alunos para abrirem o simulador no modo Lab.

Figura 1 – Tela inicial do Tabuleiro de Galton.

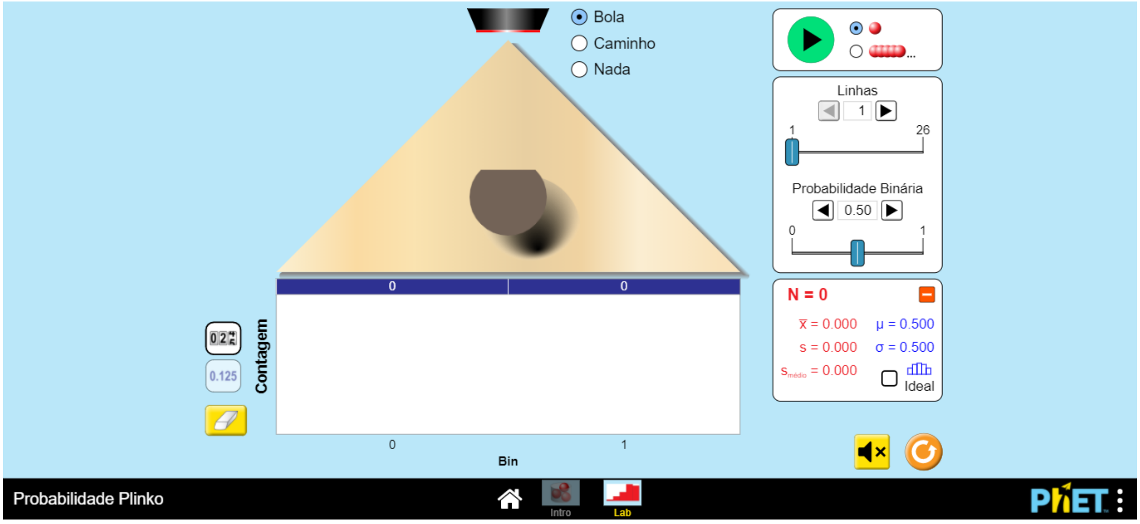


Fonte: (PLINKO PROBABILITY, 2021).

Funcionamento: a caixa no canto superior direito serve para soltar uma esfera apenas, ou um fluxo contínuo, o aluno pode alterar de acordo com o proposto no roteiro. Na caixa abaixo se pode alterar o número de linhas de pinos do simulador, lembrando que o número de divisórias será sempre igual ao número de linhas, acrescido de um.

Em seguida peça para que configurem a simulação com uma linha e duas divisórias:

Figura 2 – Simulação do tabuleiro de Galton com duas divisórias.



Fonte: (PLINKO PROBABILITY, 2021).

O aluno pode perceber que se o pino for ajustado corretamente, a esfera terá iguais chances de ir para a direita ou para esquerda, sendo o caminho aleatório.

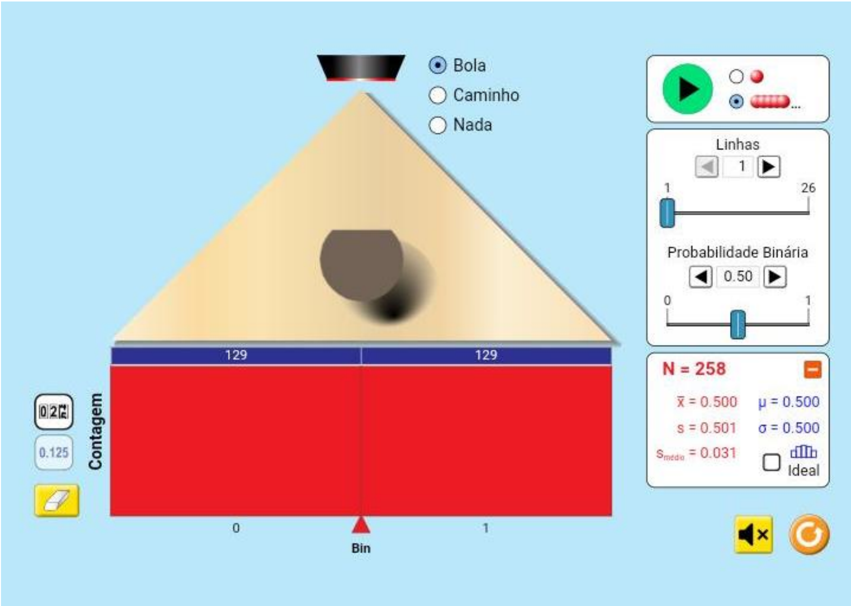
Etapa 2: após três jogadas, um jogador que apostou que a esfera cairia a direita perdeu em todas. Após reclamar ao administrador, ele disse que se ele jogasse mais, veria que metade das esferas jogadas caem na direita, e outra metade na esquerda, portando o dispositivo era perfeitamente justo. O Administrador está correto? Verifique a queda de 10, 50, 100 e 200 esferas respectivamente, e verifique a diferença observada entre a média esperada, e a média obtida.

No simulador, a variável μ indica a média esperada de distribuição das esferas, como as divisórias são denominadas 0 e 1, a probabilidade teórica leva a uma média teórica de 0,5, tendo em vista que as esferas devem se distribuir igualmente entre as duas divisórias. A tendência é que com o aumento de esferas lançadas, a média real $\bar{x}$ *se aproxime da média esperada. Isto evidencia a lei de frequência dos grandes números.*

Por se tratar de eventos aleatórios independentes, as quedas das esferas podem não se aproximar da média teórica, como ocorreu com o jogador hipotético, isso também pode ocorrer com os alunos. O professor pode discutir com os alunos o porquê de tal fenômeno, com uma discussão sobre uma probabilidade mínima de um evento, não significar um evento improvável.

Na imagem abaixo é possível perceber na simulação um caso específico onde a média real se iguala a média prevista teoricamente, após 258 lançamentos.

Figura 3 – Caso do tabuleiro de Galton onde a média real se iguala a média teórica.



Fonte: (PLINKO PROBABILITY, 2021).

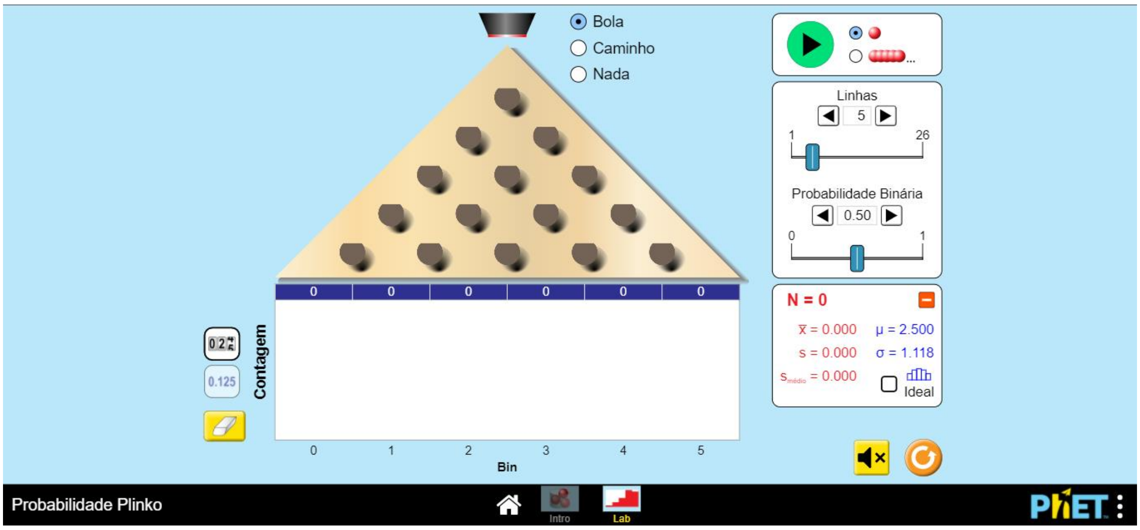
O professor pode exibir essa imagem para os alunos como exemplo do que é esperado através da lei dos grandes números.

Etapa 3: ao lado do primeiro dispositivo, há um com seis divisórias, que segundo o administrador é semelhante a um lance de um dado, pois a probabilidade é igual para que a esfera caia em qualquer divisória. Ele ainda está correto?

Caso o dispositivo acima tivesse representado em cada divisória, da esquerda para direita, os valores 0, 100, 5, 10, 0 e 1000; e cada valor represente o ganho do jogador em pontos, quantos pontos é mais provável que o jogador ganhe na primeira jogada? Qual a probabilidade de que o jogador ganhe 1000 pontos em uma única jogada? E de que ele ganhe 1000 pontos com dez esferas caindo consecutivamente na divisória de 100 pontos?

Portanto, para o segundo caso do experimento, se usa a seguinte configuração:

Figura 4 – Tabuleiro de Galton com cinco divisórias.



Fonte: (PLINKO PROBABILITY, 2021).

O professor pode pedir para os alunos responderem a primeira e segunda questão dessa etapa, antes de lançar qualquer esfera, basta ele observar novamente a média teórica μ = 2,5. De acordo com essa estimativa, as esferas têm maior probabilidade de se distribuir entre a divisória 2 e 3, então as chances são maiores de que o jogador ganhe 5 ou 10 pontos na primeira jogada. Portanto as probabilidades não são iguais para cada divisória, visto que são maiores as chances de que a esfera caia na divisória central.

A segunda questão pode ser calculada através da fórmula de distribuição binomial:

$$P(5) = \binom{5}{5}\left[\frac{1}{2}\right]^5 = \frac{1}{32}$$

Se as chances para cada divisória fossem semelhantes, haveria uma probabilidade de $\frac{1}{6}$ *para cada. Pelo cálculo acima é possível confirmar que a afirmação não é verdadeira.*

Para a terceira questão, o professor deve sugerir ao aluno o uso da fórmula de distribuição multinomial

.

$$P(0) = \binom{5}{0}\left[\frac{1}{2}\right]^5 = \frac{1}{32}$$

$$P(1) = \binom{5}{1}\left[\frac{1}{2}\right]^5 = \frac{5}{32}$$

$$P(2) = \binom{5}{2}\left[\frac{1}{2}\right]^5 = \frac{5}{16}$$

$$P(3) = \binom{5}{3}\left[\frac{1}{2}\right]^5 = \frac{5}{16}$$

$$P(4) = \binom{5}{4}\left[\frac{1}{2}\right]^5 = \frac{5}{32}$$

$$P(5) = \binom{5}{5}\left[\frac{1}{2}\right]^5 = \frac{1}{32}$$

$$P(A_1 = 0, A_2 = 10, A_3 = 0,\ A_4 = 0, A_5 = 0, A_6 = 0\ )$$
$$= \left(\frac{10!}{0!\,10!\,0!\,0!\,0!\,0!}\right)\left(\frac{1}{32}\right)^0\left(\frac{5}{32}\right)^{10}\left(\frac{5}{16}\right)^0\left(\frac{5}{16}\right)^0\left(\frac{5}{32}\right)^0\left(\frac{1}{32}\right)^0 = \left(\frac{5}{32}\right)^{10}$$
$$\cong 0{,}9 \times 10^{-8}$$

Etapa 4: use o simulador imaginando o experimento acima, indique quantos pontos você ganhou na primeira jogada, e qual a probabilidade desse evento.

Etapa 5: Avaliação.

As avaliações presentes nesse roteiro, assim como nos seguintes, possuem caráter formativo, tendo como objetivo principal diagnosticar (HADJI, 1994). O intuito é estabelecer um diálogo, para compreender as dificuldades e situar um nível para os alunos, e com isso orientar, reforçar e corrigir quando necessário.

Peça para os alunos elaborarem um breve relato sobre os procedimentos e resultados obtidos na simulação, com as equações utilizadas. O relatório deve ser entregue em data posterior, junto com as questões abaixo.

Questão 1: A interpretação da frequência diz que a probabilidade real de um evento se aproxima da probabilidade teórica, quando o número de tentativas for grande o suficiente. Com base nesta afirmação e no experimento realizado, explique com suas palavras essa interpretação.

Nessa questão o aluno deve refletir sobre como uma probabilidade teórica pode se aproximar da realidade apenas com uma experimentação extensa.

Questão 2: Jogos como o idealizado no experimento levam a crer que a probabilidade é uma questão de sorte ou acaso, porém a probabilidade é amplamente utilizada em experimentos científicos. Como a probabilidade em um experimento pode se mostrar confiável para previsões?

Com essa questão, e a anterior, o aluno deve refletir sobre como uma probabilidade é confiável para previsões, quando o número de tentativas é grande o suficiente. No caso de um *jogo de azar, costumam ocorrer poucas tentativas e por isso os eventos realmente dependem do acaso.*

Questão 3: Quanto maior o número de divisórias, menor é a probabilidade de que uma esfera caia nas divisórias da extremidade, ainda sim, esta probabilidade não é nula, no caso do experimento, que evento caracterizaria uma probabilidade nula?

Um exemplo de probabilidade nula na simulação, seria uma esfera cair no exterior, ou entre as divisórias. Essa questão tem como objetivo auxiliar o aluno a compreender a diferença entre um evento de probabilidade baixa, e um evento de probabilidade nula.