5.2 Segundo Roteiro - Revisão da distribuição normal usando o Tabuleiro de Galton

Introdução

Neste roteiro será abordado o método de aproximação de uma distribuição binomial para uma normal. Quando o número de tentativas é muito grande, é conveniente aproximar a distribuição binomial para uma normal. Tal aproximação, quando possível, pode ser realizada encontrando a média μ e o desvio padrão σ da binomial, e depois de uma correção de continuidade, normalizado os valores para encontrar o valor de z. Com esse valor, a probabilidade é facilmente encontrada com uma Tabela Normal Padrão (LARSON, 2010).

Objetivos

- Demonstrar conceitos de probabilidade através do Tabuleiro de Galton.
- Explicar para os alunos o método para calcular uma distribuição binomial acumulada no Tabuleiro de Galton.
- Auxiliar na aproximação de uma distribuição binomial para uma distribuição normal.
- Demonstrar aos alunos a facilidade do uso de uma distribuição Normal, no caso de uma distribuição binomial acumulada extensa.

Materiais utilizados

Simulador online do tabuleiro de Galton, disponível na plataforma PhET em: https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability_pt_BR.html.

É opcional para o professor utilizar a calculadora de distribuições disponível em: https://passeioaleatorio.shinyapps.io/dist_calc/.

Desenvolvimento

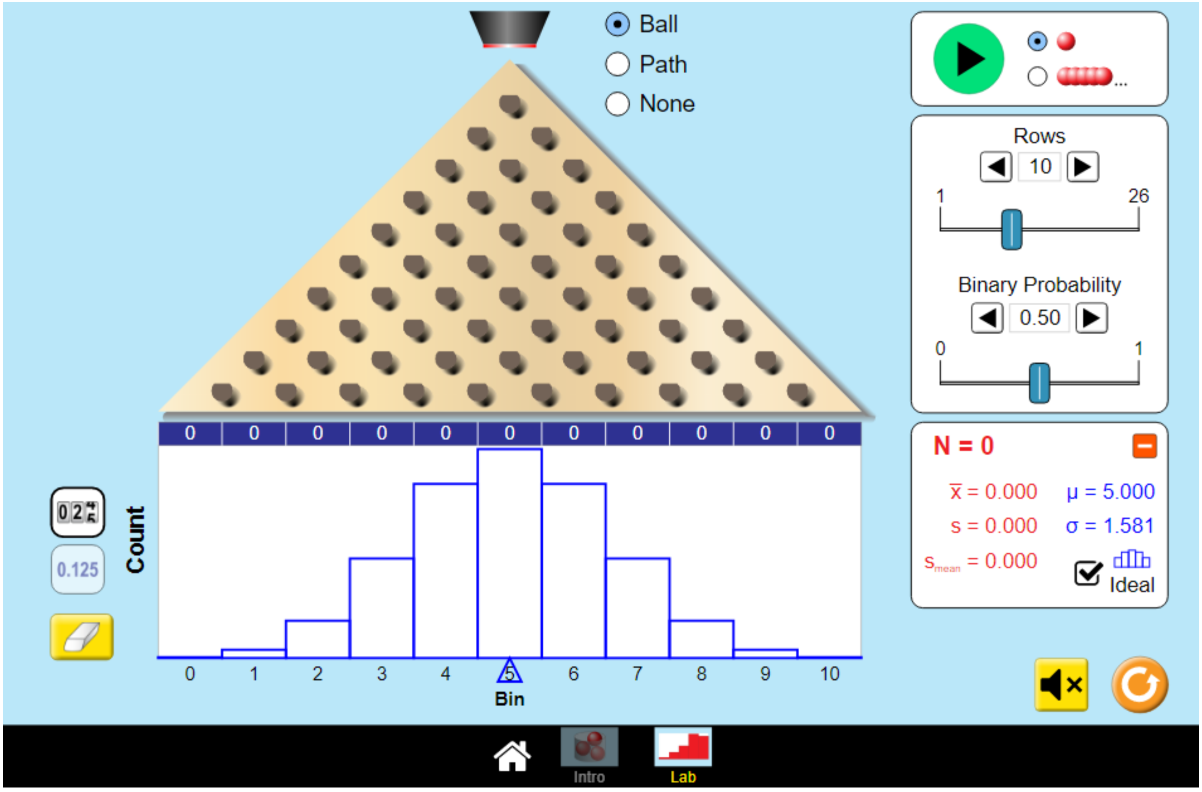
Este roteiro pode ser usado como sequência do roteiro anterior, ou individualmente para demonstrar aos alunos os conceitos aqui abordados, contanto que as propostas do roteiro tenham sido trabalhadas em sala, e os alunos conheçam o funcionamento do Tabuleiro de Galton.

Nesse roteiro a simulação será usada mais para visualização dos alunos, para compreensão dos problemas propostos, os cálculos serão realizados pelos próprios alunos, com auxílio da calculadora de distribuições, caso o professor deseje.

A aplicação desse roteiro está prevista para uma aula de 100 minutos, divididas em 5 etapas, que propõe o uso de distribuições normais e binomiais, para resolução de problemas.

Etapa 1: Os alunos devem abrir a simulação do Tabuleiro com uma configuração de 10 linhas, peça para eles marcarem a caixa "ideal".

Figura 1 – Simulação do tabuleiro de Galton com 10 divisórias, e marcação da distribuição ideal de esferas.



Fonte: (PLINKO PROBABILITY, 2021).

Peça para os alunos calcularem a probabilidade de que uma esfera caia entre as divisórias 0 e 3.

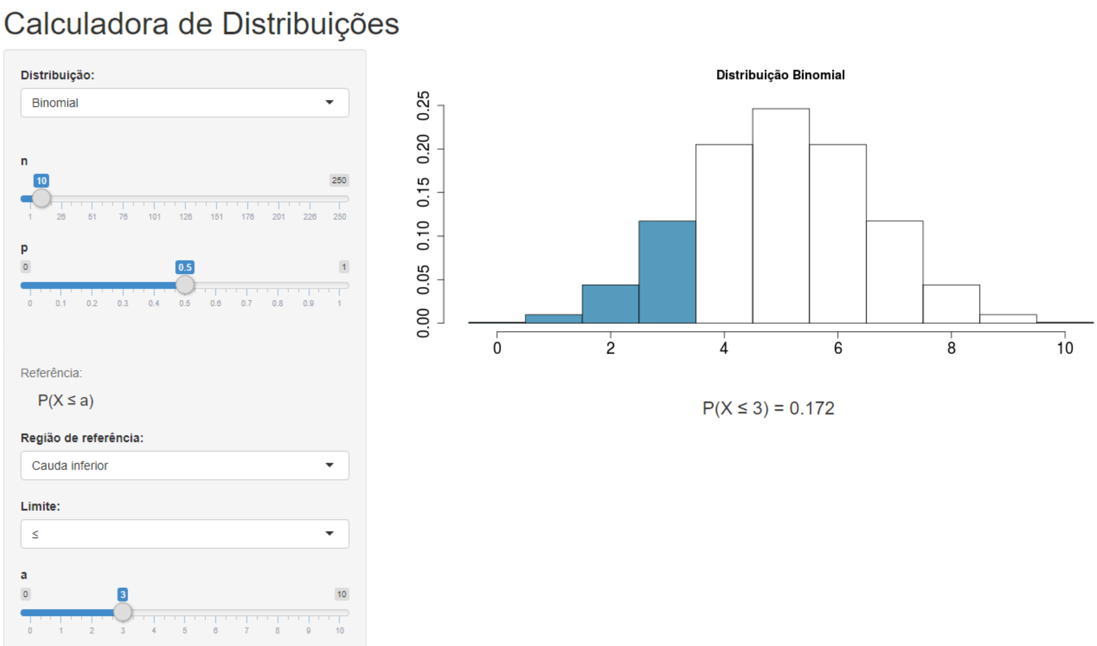
Os alunos deverão calcular uma distribuição binomial acumulada, ou seja, a soma das probabilidades de que a esfera caia em cada uma das divisórias de 0 a 3.

Os cálculos são extensos, por isso um a opção do professor é demonstrar como seriam feitos os cálculos, e em seguida demonstrar o valor através da calculadora de distribuições, como o exemplo da Figura 2.

Etapa 2: Peças aos alunos para fazerem a normalização dessa distribuição com o uso da Equação 12 e na tabela de distribuição normal padrão, ou tabela Z, encontrarem a probabilidade por uma distribuição normal.

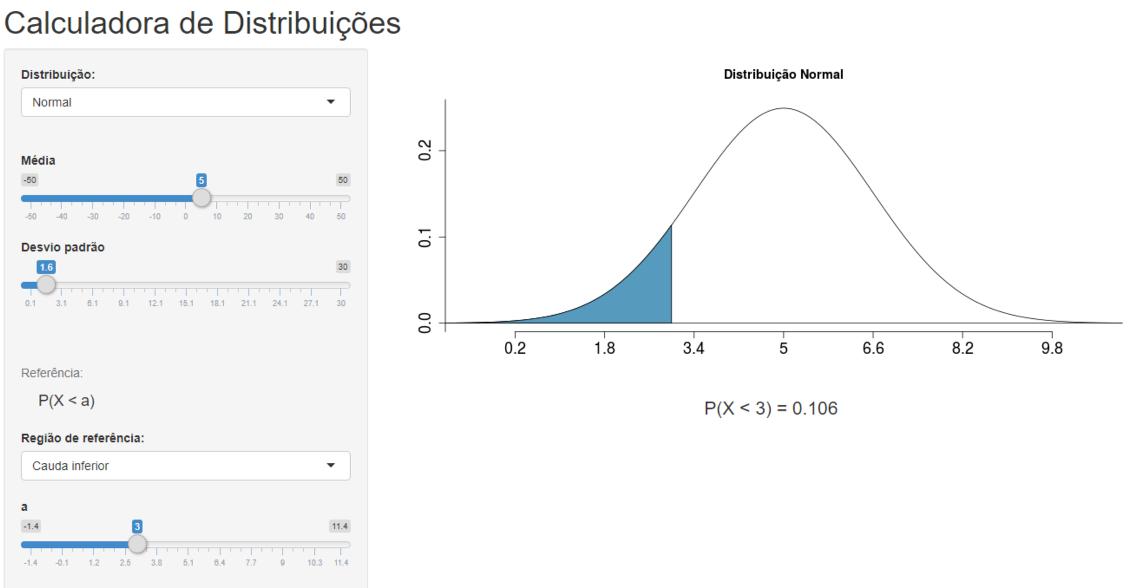
Essa etapa também pode ser realizada com auxílio da calculadora de distribuições, a simulação do Tabuleiro de Galton já fornece os valores da média μ, e do desvio padrão σ, como mostrado na Figura 3.

Figura 2 – Calculadora de distribuições com distribuição binomial.



Fonte: (CALCULADORA DE DISTRIBUIÇÕES, 2021).

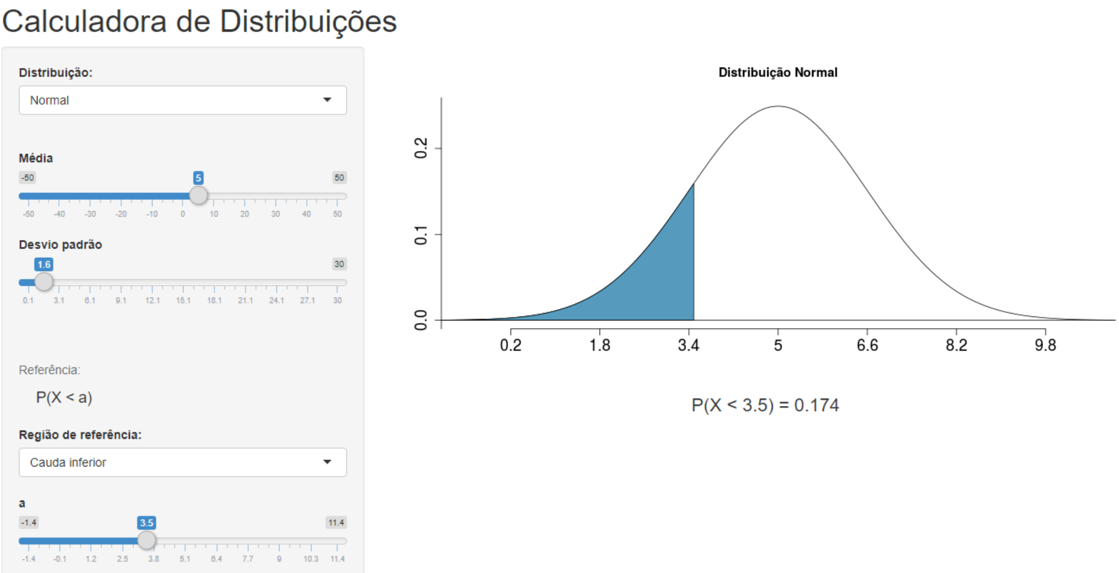
Figura 3 – Calculadora de distribuições com distribuição normal.



Fonte: (CALCULADORA DE DISTRIBUIÇÕES, 2021).

Haverá uma pequena diferença entre a probabilidade, isso se deve à chamada correção pela continuidade, como na ***Erro! Fonte de referência não encontrada.****. É preciso então acrescentar 0,5 ao valor de X:b*

Figura 4 – Calculadora de distribuições, com distribuição normal ajustada.



Fonte: (CALCULADORA DE DISTRIBUIÇÕES, 2021).

Com o ajuste, o valor será uma aproximação da probabilidade binomial.

Uma sugestão para o professor: pode se pedir aos alunos para acharem a probabilidade utilizando uma Tabela de Distribuição Normal, para a aproximação e correção pela continuidade, com $0 \leq x \leq 3$*, então:*

$$P(0 \leq x \leq 3) \Rightarrow P(0 \leq x \leq 3{,}5)$$
$$\Rightarrow P(x \leq 3{,}5) = 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq z)$$

Usando a ***Erro! Fonte de referência não encontrada.*** *para encontrar o valor de Z:*

$$Z = \frac{3{,}5 - 5}{\sqrt{5.0{,}5}} = -0{,}95$$

Usando a Tabela de Distribuição Normal disponível no Anexo A, é possível encontrar a probabilidade correspondente com o valor da casa decimal e centesimal do valor de Z, na linha e na coluna da tabela, respectivamente. Um exemplo é mostrado na Figura 5:

Figura 5 - Exemplo de uso de uma Tabela de Distribuição Normal

Tabela de distribuião normal padrão P (0 < Z < z)										
Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389

Fonte: (Elaborada pelo autor).

Então, a probabilidade de que a esfera caia nas três primeiras divisórias é:

$$
\begin{aligned}
P(0 \leq x \leq 3) &\Rightarrow P(0 \leq x \leq 3{,}5) \\
&= P(x \leq 3{,}5) \Rightarrow P(x \leq -0{,}95) \\
&= 0{,}5 - \; P(-0{,}95 \leq Z \leq 0) \\
&= 0{,}5 - \; P(0 \leq Z \leq 0{,}95) \\
&= 0{,}5 \; - \; 0{,}3289 = 0{,}1711
\end{aligned}
$$

Que se aproxima da probabilidade encontrada na simulação, na Figura 4.

Etapa 5: Avaliação.

Esta avaliação formativa tem por finalidade permitir um ajustamento didático, através de uma harmonização método/aluno (HADJI, 1994). Sendo esse um roteiro montado para preparar a apresentação de conceitos de física moderna para o aluno, se supõe o seu uso em uma aula de física moderna, por um professor desta matéria. Portanto, com exceção do caso de um projeto interdisciplinar, o professor de física deve usar essa avaliação para diagnosticar se os alunos estão seguros com os conceitos de probabilidade trabalhados até aqui.

Questão 1 - Com um tabuleiro de 26 linhas, qual a probabilidade de que uma esfera caia nas 10 primeiras divisórias?

Os alunos devem fazer esse cálculo através da normalização da probabilidade, com uma tabela Z (Tabela de Distribuição Normal), ou com a Calculadora de Distribuições.

O aluno pode usar a tabela Z: para $0 \le x \le 10$, *pela correção pela continuidade, tem se que:*

$$\begin{aligned} P(0 \le x \le 10) &\Rightarrow P(0 \le x \le 10{,}5) \\ &= P(x \le 10{,}5) \\ &= P(Z \le z) \\ &= 0{,}5 - P(0 \le Z \le z) \end{aligned}$$

onde $Z = \frac{-2{,}5}{\sqrt{13.0{,}5}} = -0{,}98.$

Segue-se então que $P(-0{,}98 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 0{,}98)$, *e pela tabela Z:*

Figura 6 - Uso da Tabela de Distribuição Normal para resolução do exercício proposto.

Tabela de distribuião normal padraão P (0 < Z < z)										
Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389

Fonte: (Elaborada pelo autor).

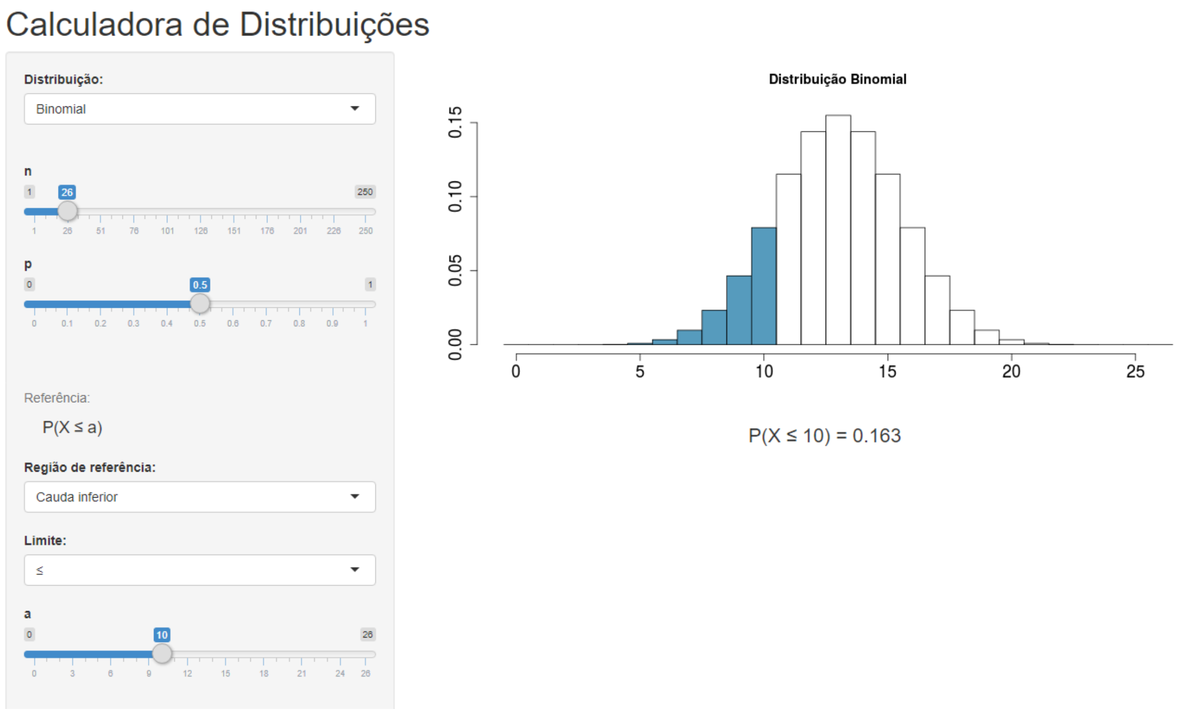
$$\begin{aligned} P(-0{,}98 \le z \le 0) &= P(0 \le z \le 0{,}98) \\ &= 0{,}3365 \Rightarrow 0{,}5 - 0{,}3365 \\ &= 0{,}1635 \end{aligned}$$

É possível comparar a probabilidade encontrada com a probabilidade na calculadora de distribuições, como mostra a Figura 7.

Questão 2 - No Tabuleiro de 26 divisórias, qual a probabilidade de que uma esfera caia na 15 divisória? Calcule utilizando uma distribuição binomial e um normal.

Para calcular pela distribuição binomial, os alunos podem usar a equação binomial, pela distribuição normal, os alunos devem calcular a probabilidade de que a esfera caia nas divisórias de 0 a 15, e de 0 a 14, para então subtrair os dois valores.

Figura 7 - Calculadora de Distribuições para um tabuleiro de 26 divisórias.



Fonte: (CALCULADORA DE DISTRIBUIÇÕES, 2021).

Questão 3 - Qual cálculo de distribuição é mais prático?

O professor deve debater com os alunos, em um caso de uma distribuição acumulada, como na Etapa 1, o uso da distribuição normal é mais prático, já no caso de uma probabilidade de uma única esfera em uma única divisória, o uso da binomial é mais útil.