

5.4 Quarto Roteiro - Ilustração do colapso da função de onda.

Introdução

Neste roteiro serão trabalhados princípios da física quântica, especificamente o princípio da incerteza, e o princípio da complementaridade.

Será feito um experimento mental, com um tabuleiro de Galton hipotético de escala reduzida. Nesse experimento mental, juntamente com o uso da simulação, será demonstrado como o ato de observar um experimento pode interferir em seu resultado. Em um detector muito pequeno, não seria possível ver a trajetória das esferas, mas haveria uma boa previsão estatística do padrão que elas devem formar nas divisórias. Caso um detector da mesma escala do experimento fosse colocado na saída das esferas, para detectar o momento que elas caem, o padrão conhecido não seria apresentado, devido ao deslocamento delas.

Objetivos

- Usar o Tabuleiro de Galton para demonstrar os conceitos de complementaridade, e do princípio da incerteza.
- Relacionar através de um experimento mental, como apesar de não ser conhecida a trajetória das esferas, o padrão formado na divisória é bem conhecido devido aos cálculos de probabilidade já estudados.
- Associar como uma mudança no experimento, realizada em mesma escala hipotética, altera o resultado.
- Fazer uma comparação entre o experimento mental proposto, e o experimento mental da dupla fenda.
- Discutir sobre os princípios da complementaridade e da incerteza, através dos exemplos propostos.

Materiais Utilizados

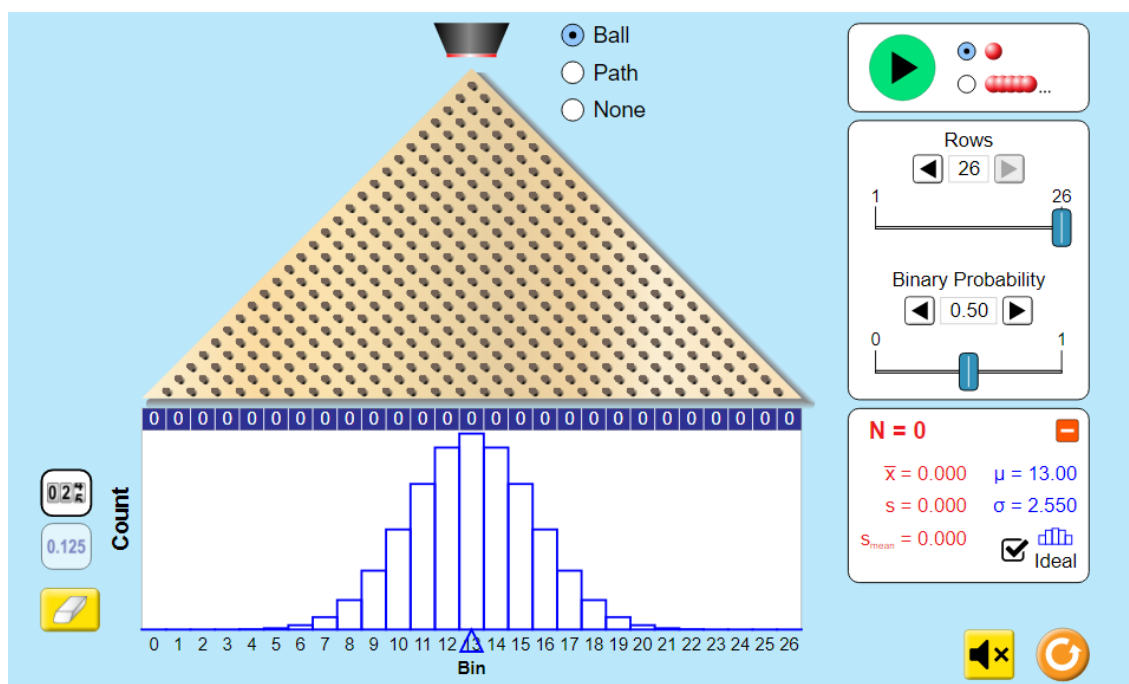
Simulador online do tabuleiro de Galton, disponível na plataforma PhET em: https://phet.colorado.edu/sims/html/plinko-probability/latest/plinko-probability_pt_BR.html.

Desenvolvimento

Este roteiro pode ser usado em sequência com os roteiros anteriores, ou individualmente, desde que os assuntos abordados já tenham sido revisados em sala. O roteiro foi planejado para a aplicação em uma aula de 100 minutos, podendo ser estendido devido à complexidade dos exercícios propostos, o professor deve avaliar o grau de aprendizagem dos alunos para melhor adaptar o tempo de aula.

Etapla 1: Peça para os alunos abrirem a simulação do tabuleiro de Galton, com 26 linhas, e com a marcação de distribuição ideal marcada.

Figura 1- Tabuleiro de Galton com 26 linhas, com a marcação de distribuição ideal ativada.



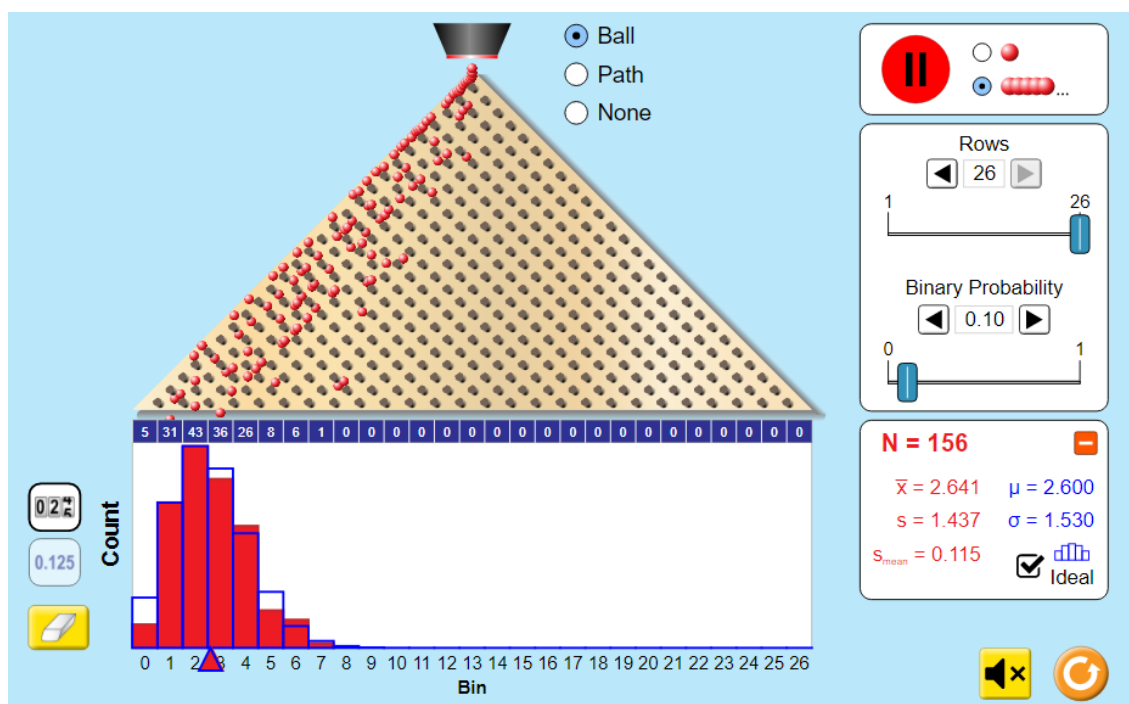
Fonte: (PLINKO PROBABILITY, 2021).

Em seguida peça para os alunos imaginarem que esse tabuleiro é tão pequeno, que não seja possível ver a olho nu as esferas e suas trajetórias, apenas detectar o padrão de distribuição normal nas divisórias. Mesmo sem lançar esferas, e sem poder observá-las, foi discutido anteriormente que é possível prever com segurança as trajetórias através de cálculos de probabilidade.

No experimento de dupla fenda com elétrons, mesmo não conhecendo as trajetórias das partículas, com a interpretação da probabilidade associada ao seu comportamento ondulatório, é possível estimar com segurança o padrão que será formado no experimento.

Etapa 2: Agora peça para os alunos ajustarem a probabilidade binária da simulação para 0.10, e lancem as esferas.

Figura 2 – Tabuleiro de Galton com 26 linhas, e probabilidade binária de 0,10.



Fonte: (PLINKO PROBABILITY, 2021).

Peça para os alunos imaginarem que o experimento é alterado, e um detector é colocado na saída superior das esferas, para detectar o momento em que elas caem, porém o experimento é de escala tão pequena, que o detector só pode ser montado em um tamanho que altere a trajetória das esferas, como na Figura 2. Agora há uma detecção de quando as esferas caem, é possível até calcular com maior grau de certeza sua trajetória, considerando o desvio imposto pelo detector, porém o padrão final não é mais o mesmo do experimento da Etapa 1.

No experimento da dupla fenda com elétrons, só é possível observar a posição do elétron com radiação eletromagnética, mas devido a quantização de energia, radiação eletromagnética só é divisível em unidades de um quantum, proporcionais a constante de Planck. Essa unidade mínima de radiação eletromagnética já é suficiente para transferir momento linear para um elétron, alterando sua trajetória, e mudando o padrão final do experimento.

Esse efeito pode ser visualizado através do experimento do microscópio de Bohr na Erro! Fonte de referência não encontrada..

A tentativa de observar o elétron exige que seja lançada luz sobre ele. Porém um fóton da luz incidente já possui momento linear suficiente para desviar a partícula de sua posição, então na observação, mesmo com o momento linear do sistema bem definido, só é possível ter uma estimativa da posição do elétron.

Etapa 3: Discuta com os alunos o princípio da complementaridade, de acordo com este, um experimento pode ser compreendido em um quadro corpuscular ou ondulatório, mas nunca ambos ao mesmo tempo. No experimento da dupla fenda, a montagem interfere no resultado, e a observação da passagem do elétron pela fenda irá determinar se o padrão formado será ondulatório ou corpuscular.

Compare também a complementaridade com o princípio da incerteza, como experimentos em física quântica não é possível determinar simultaneamente a posição e o momento de um sistema com precisão total.

Etapa 4: Como no terceiro roteiro, esta avaliação consiste em um problema adaptado de Eisberg (1979) sendo também uma avaliação formativa, a finalidade é complementar e reforçar os conteúdos já abordados no roteiro. Fica ao critério do professor permitir que os alunos resolvam os problemas antes das discussões, ou discutir enquanto resolve os problemas em conjunto com eles.

Questão 1 - (EISBERG, 1979) Um emissor lança elétrons a uma velocidade de 300 m/s, com uma incerteza de 0,01%, com qual precisão fundamental se pode calcular a posição deste elétron? Se esse emissor fosse utilizado no experimento de dupla fenda, qual seria a implicação para a incerteza da posição no experimento?

Sendo a incerteza do momento o momento linear $\Delta p = m\Delta v$ e a massa de repouso do elétron $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, então com uma incerteza de 0,01%, tem-se que:

$$\Delta p = m\Delta v = \frac{0,01}{100} \times 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 2,733 \times 10^{-32} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Dada a relação do princípio da incerteza, $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$, ou $\Delta x \Delta p \geq h/4\pi$, onde $\hbar = h/2$ e $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ logo:

$$2,733 \times 10^{-32} \cdot \Delta x \geq \frac{6,63 \times 10^{-34}}{4\pi} \Rightarrow \Delta x = 1,93 \times 10^{-3} \text{ m}$$

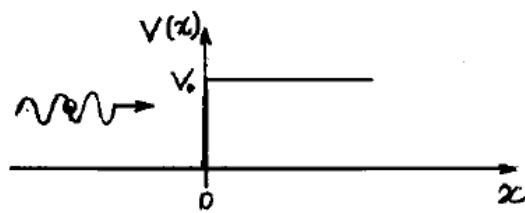
ou 1,93 mm.

Que é a precisão mínima com que se pode detectar a posição do elétron.

Para a segunda questão é preciso discutir com os alunos, que apesar de parecer uma medida pequena para determinar a posição de uma partícula, trata-se de um valor muito grande para experimentos de escala microscópica, como o experimento da dupla fenda. No experimento as fendas são muito pequenas, da escala de 10^{-14}mm , que é a proporção de escala de um elétron. Portanto, para um emissor como o do exemplo, não é possível determinar por qual fenda o elétron passou, e como visto no roteiro, se observarmos por qual fenda ele passa, seu momento linear será alterado, condizendo com o princípio de incerteza.

Questão 2 (adaptado de KAMAL, 2010) - Uma partícula de massa m está se movendo em uma região onde há um degrau de potencial em $x = 0$: $V(x) = 0$ para $x < 0$ e $V(x) = V_0$ (uma constante positiva) para $x \geq 0$.

Figura 3 - Representação gráfica de um potencial degrau.



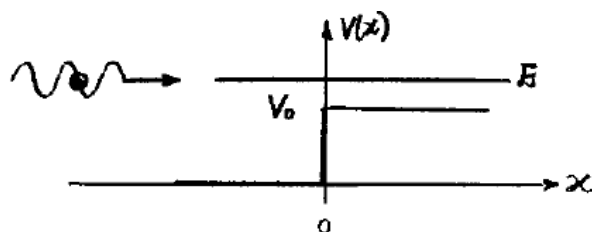
Fonte: (LIMA, C., 2011).

a) Determine $\Psi(x)$ separadamente para as regiões $x \ll 0$ e $x \gg 0$ para os casos:

- (i) $V_0 < E$
- (ii) $V_0 > E$

Caso (i): na região $x \ll 0$, $V(x) = 0$. Vamos usar a equação de Schrödinger para resolver o problema.

Figura 4 - Incidência de uma partícula de energia total E sobre um potencial degrau, onde $V_0 < E$.



Fonte: (LIMA, C., 2011).

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

como $V(x) = 0$,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = E\Psi(x)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \Psi(x)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi(x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi(x) = 0 \quad (A)$$

Essa é uma equação diferencial de ordem 2, homogênea, com coeficientes constantes. Como as derivadas, nessa situação, se assemelham às funções originais, vamos associar uma função exponencial à solução dessa equação:

$\Psi(x) = e^{\alpha x}$, onde α é uma constante que será determinada.

Substituindo essa solução possível em (A):

$$\alpha^2 e^{\alpha x} + \frac{2mE}{\hbar^2} e^{\alpha x} = 0$$

$$\alpha^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$$

$$\alpha = \pm \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha' = +i \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \\ \alpha'' = -i \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \end{cases}$$

Como são duas soluções possíveis para α , a solução para $\Psi(x)$ é uma combinação linear dessas duas soluções:

$$\Psi(x) = Ae^{ik_1 x} + Be^{-ik_1 x}$$

$$\text{onde } k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.$$

Analisando os dois termos dessa equação, temos que o primeiro termo, Ae^{ik_1x} , representa a onda que se propaga da esquerda para a direita, enquanto o segundo termo, Be^{-ik_1x} , representa a onda se propagando da direita para a esquerda, refletida no potencial degrau em $x = 0$.

Na região $x \gg 0$, $V(x) = V_0$. Resolvendo a Equação de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

como, $V(x) = V_0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V_0\Psi(x) = E\Psi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = (E - V_0)\Psi(x)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \Psi(x)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2} \Psi(x) = 0$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem homogênea e tem solução parecida com a anterior:

$$\Psi(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}$$

$$\text{onde } k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}.$$

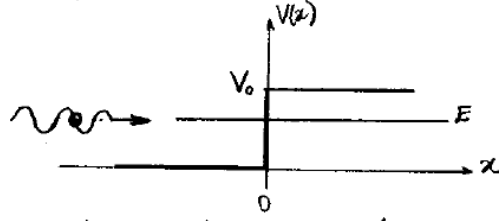
A onda transmitida tem atenuação na amplitude, visto que $k_2 < k_1$. Nessa região, como não há outra diferença de potencial, não há onda refletida, portanto o termo $De^{-ik_2x} = 0$.

Assim, para a região $x \gg 0$:

$$\Psi_2(x) = Ce^{ik_2x}$$

Caso (ii): para o segundo caso, os cálculos serão análogos ao caso (i), chegando-se aos mesmos resultados para as regiões $x \ll 0$ e $x \gg 0$.

Figura 5 – Incidência de energia total sobre um potencial degrau para $V_0 > E$.



Fonte: (LIMA, C., 2011).

Logo, para o caso (ii):

$$\begin{cases} \Psi_3(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} & \text{para } x \ll 0 \\ \Psi_4(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_1x} & \text{para } x \gg 0 \end{cases}$$

Porém, na região $x \gg 0$, constata-se que $\Psi(x) \rightarrow +\infty$ quando $x \rightarrow +\infty$, por causa do termo Ce^{ik_2x} . Logo, para evitar que isso ocorra, é necessário admitir $C = 0$, então temos:

$$\Psi_4(x) = De^{-ik_1x} \text{ para } x \gg 0$$

- b) Escreva e justifique brevemente as condições de contorno que $\Psi(x)$ deve satisfazer na fronteira entre as duas regiões adjacentes. Use essas condições para esboçar a forma de $\Psi(x)$ na região em torno de $x = 0$ para os casos (i) e (ii).

Em $x = 0$ as funções precisam ser contínuas e terem o mesmo valor:

$$\begin{aligned} \Psi_1(0) &= \Psi_2(0) \\ Ae^{ik_1 0} + Be^{-ik_1 0} &= Ce^{ik_2 0} \Rightarrow A + B = C \end{aligned}$$

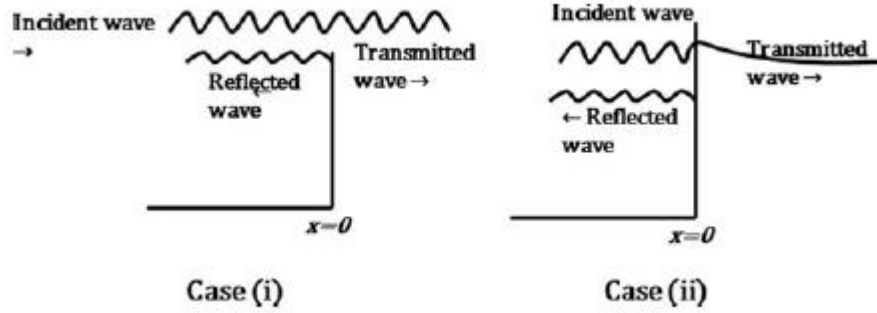
As suas derivadas também devem ser contínuas e idênticas nesse ponto:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\Psi_1}{dx} \right|_{x=0} &= \left. \frac{d\Psi_2}{dx} \right|_{x=0} \\ ik_1 Ae^{ik_1 0} + (-ik_1)Be^{-ik_1 0} &= ik_2 Ce^{ik_2 0} \\ ik_1 A - ik_1 B &= ik_2 C \\ k_1(A - B) &= k_2 C \end{aligned}$$

como $C = A + B$

$$k_2 = \frac{k_1(A - B)}{A + B}$$

Figura 6 - Esboço da onda incidente e onda refletida em um potencial degrau.



Fonte: (KAMAL, 2010).

É possível observar que tanto no caso (i), como no caso (ii), uma parte da onda sempre irá refletir, enquanto uma parte incidirá para além do potencial degrau.

- c) Compare as situações dos casos das alternativas anteriores com o modelo clássico da física, e faça uma comparação com o princípio da complementaridade.

Tomando primeiro o caso (ii), pelo modelo clássico, uma partícula sempre terá seu momento invertido ao atingir o degrau potencial. Porém no modelo quântico uma parte da função de onda penetra o degrau e isso, de acordo com a física clássica, implicaria em uma energia cinética negativa, e momento imaginário. Para descobrir a probabilidade de que a partícula seja refletida, podemos calcular sua reflectância R . Realizando um processo análogo ao da questão b, pela continuidade das funções $\Psi_3(x)$ e $\Psi_4(x)$ em $x = 0$, temos:

$$D = A + B \quad (B)$$

$$ik_2D = k_1(A - B) \quad (C)$$

Somando (B) e (C) temos:

$$A = \frac{D}{2} \left(1 + \frac{ik_2}{k_1} \right)$$

e, subtraindo-as, encontra-se:

$$B = \frac{D}{2} \left(1 - \frac{ik_2}{k_1} \right)$$

Como a intensidade de uma onda é proporcional ao quadrado do módulo de sua amplitude, a reflectância R , será sua razão entre módulos quadráticos da amplitude da onda refletida $|B|^2$ e da amplitude da onda incidente $|A|^2$, isto é:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{B^*B}{A^*A}$$

Substituindo o valor de A e B , temos

$$R = \frac{(1 + ik_2/k_1)(1 - ik_2/k_1)}{(1 - ik_2/k_1)(1 + ik_2/k_1)} = 1$$

Esse resultado mostra que, semelhante a previsão clássica, a partícula sempre será refletida ao incidir sobre o degrau. Na mecânica quântica, uma parte da função de onda penetra no degrau, e esse fenômeno é chamado de penetração na região classicamente proibida (LIMA, C., 2011). Entretanto, tal penetração não significa que a partícula seja mantida na região classicamente proibida, pois vimos que ela sempre é refletida.

No caso (i), uma partícula no modelo clássico sempre passará pelo degrau, mas vimos que no modelo quântico, uma parte da função de onda reflete no potencial degrau. Tal fenômeno é coerente com o modelo clássico ondulatório, e essa é uma das mais notáveis previsões da física quântica.

Nesse exercício, podemos ver o comportamento dual da partícula, as duas situações descrevem a natureza dela, tanto ondulatória, quanto corpuscular. O princípio da complementaridade diz que o comportamento de uma partícula não pode ser compreendido apenas como uma onda, ou apenas como uma partícula; ambos os conceitos são complementares, e necessários para se compreender a física quântica.