4. Tres parejas y dos individuos solteros han sido invitados a un seminario de inversión y han aceptado asistir. Suponga que la probabilidad de que cualquier pareja o individuo particular llegue tarde es de 0.4 (una pareja viajará en el mismo vehículo, así que ambos llegarán a tiempo o bien ambos llegarán tarde). Suponga que diferentes parejas e individuos llegan puntuales o tarde independientemente unos de otros. Sea X el número de personas que llegan tarde al seminario.

a) Determine la función masa de probabilidad de X. [Sugerencia: Designe las tres parejas #1, #2 y #3 y los dos individuos #4 y #5.]

b) Obtenga la función de distribución acumulativa de X y úsela para calcular $P(2 \leq X \leq 6)$.

$|P| = 6 \quad |S| = 2$

$P(T) = 0{,}4$ Para parejas: 2 llegan tarde o temprano juntas $P(T^c) = 0{,}6$

$X =$ # de personas que llegan

a) $P(X=x)$

Mínimo: 0 | $P = \{C_1, C_2, C_3\}$

Máximo = 8 | $S = \{S_1, S_2\}$

Defino la función de la variable aleatoria:

$$X(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } w = \emptyset \quad \text{todas punt.} \\ 1 & \text{si } w \in \{\{S_1\},\{S_2\}\} \quad \text{Los solteros llegan tarde (1 a la vez)} \\ 2 & \text{si } w \in \{\{S_1, S_2\}, \{P_1\}, \{P_2\}, \{P_3\}\} \\ 3 & \text{si } w \in \{S_1, P_1\}, \{S_2, P_1\} \ldots \{S_2, P_3\}\} \\ 4 & \text{si } w \in \{\{P_1, S_1, S_2\}, \{P_1, P_2\} \ldots \{P_2, P_3\}\} \\ 5 & \text{si } w \in \{\{P_1, P_2, S_1\} \ldots \{P_2, P_3, S_2\}\} \\ 6 & \text{si } w \in \{\{P_1, P_2, P_3\}, \{P_1, P_2, S_1, S_2\} \ldots \{P_2, P_3, S_1, S_2\}\} \\ 7 & \text{si } w \in \{\{P_1, P_2, P_3, S_1\}, \{P_1, P_2, P_3, S_2\}\} \\ 8 & \text{si } w \in \{\{P_1, P_2, P_3, S_1, S_2\}\} \end{cases}$$

Necesitamos conocer el número de combinaciones posibles por grupo

Para $x = 1$, tomamos como diferentes las parejas y los solteros

${}_3C_0 = \frac{3!}{0!(3-0)!} \cdot {}_2C_1 = \frac{2!}{1!1!} = 1 \cdot 2 = 2$ casos $\Rightarrow$ Prob $= 2 \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4 = 0{,}103$

Para $x = 2$, caso A: 2 S tarde, 0 P tarde

${}_2C_2 = \frac{2!}{2!0!} = 1 \cdot {}_3C_0 = 1 \Rightarrow 1$ comb para A $\Rightarrow$ Prob $= 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}155$

Caso B: 1P, 0S

$\frac{3!}{1!2!} \cdot \frac{2!}{0!2!} = 3 \cdot 1 = 3 \Rightarrow$ Prob $= 3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}035$ Total $x=2$: $0{,}190$

Escaneado con CamScanner

Para $x=3$, Caso A: 1P, 1S

$$\frac{3!}{1!\,2!}\cdot\frac{2!}{1!\,1!}=3\cdot 2=6 \Rightarrow Prob=6\cdot(0,4)^2\cdot(0,6)^3=0,207$$

Para $x=4$, Caso A: 2P, 0S

$$\frac{3!}{2!\,1!}\cdot\frac{2!}{0!\,2!}=3\cdot 1=3 \Rightarrow Prob=3\cdot 0,4^2\cdot 0,6^3=0,104$$

Caso B: 2S, 1P

$$\frac{3!}{1!\,2!}\cdot\frac{2!}{2!\,0!}=3 \Rightarrow Prob=3\cdot 0,4^3\cdot 0,6^2=0,069$$

Total para $x=4$: 0,173

Para $x=5$, Caso A: 2P, 1S

$$\frac{3!}{2!\,1!}\cdot\frac{2!}{1!\,1!}=3\cdot 2=6 \Rightarrow Prob=0,4^3\cdot 0,6^2\cdot 6=0,138$$

Para $x=6$, Caso A: 3P, 0S

$$\frac{3!}{3!\,0!}\cdot\frac{2!}{0!\cdot 2!}=1 \Rightarrow Prob=0,4^3\cdot 0,6^2=0,023$$

Caso B: 2S, 2P

$$\frac{3!}{2!\,1!}\cdot\frac{2!}{2!\cdot 0!}=3\cdot 1=3 \Rightarrow Prob=3\cdot 0,4^4\cdot 0,6=0,046$$

Total para $x=6$: 0,069

Para $x=7$, Caso A: 3P, 1S

$$1\cdot 2=2 \Rightarrow Prob=2\cdot 0,4^3\cdot 0,6=0,031$$

Para $x=8$, 1 caso posible $\Rightarrow$ Prob $=(0,4)^5 \xrightarrow{5\text{ grupos}} = 0,010$ (todos tarde)

Para $x=0$, 1 caso posible $\Rightarrow$ Prob $=(0,6)^5=0,078$ (todos temprano)

Función masa probabilidad

$$P(X=x)=\begin{cases} 0,078 & \text{si } x=0 \\ 0,104 & \text{si } x=1 \\ 0,190 & \text{si } x=2 \\ 0,207 & \text{si } x=3 \\ 0,173 & \text{si } x=4 \\ 0,138 & \text{si } x=5 \\ 0,069 & \text{si } x=6 \\ 0,030 & \text{si } x=7 \\ 0,010 & \text{si } x=8 \\ 0 & \text{si } x \notin \text{im}(X) \end{cases}$$

Escaneado con CamScanner

b) $F(x) = \sum_{t \leq x} P(t)$

$\Rightarrow$ $F(x) = P(0) + \dots + P(8)$

$F(x) = 0{,}078 + \dots + 0{,}010 = 1.00$

$P(2 \leq x \leq 6)$

$$P(X = x) = \begin{cases} F(x_j) - F(x_{j-1}) & \text{si } x = x_j \\ 0 & \text{si } x \notin \text{imag} \end{cases}$$

Sabiendo que va desde 2 hasta 6, aplicamos la fórmula desde $x=2$ hasta $x=6$

$\cancel{F_2} - F_1 + \cancel{F_3} - \cancel{F_2} + \cancel{F_4} - \cancel{F_3} + \cancel{F_5} - \cancel{F_4} + F_6 - \cancel{F_5}$

$\Rightarrow P(2 \leq x \leq 6) = F_6 - F_1$

$F_6 = P(0) + \dots + P(6)$

$= 0{,}078 + \dots + 0{,}069 = 0{,}959$

$\Rightarrow P(2 \leq x \leq 6) = 0{,}959 - 0{,}181 = 0{,}778$

Escaneado con CamScanner

15. Una variable aleatoria X puede tomar los valores 30, 40, 50 y 60 con probabilidades 0.4, 0.2, 0.1 y 0.3. Represente en una tabla la función de probabilidad, $P(X = x)$, y la función de distribución de probabilidad, $F(X) = P(X \leq x)$, y determine las siguientes probabilidades.

a) $P(X \leq 25)$

b) $P(X \geq 60)$

c) $P(X < 40)$

d) $P(X > 40)$

e) $P(30 \leq X \leq 60)$

Tabla:

x	$P(X=x)$	$F(x)$
30	0,4	0,4
40	0,2	0,6
50	0,1	0,7
60	0,3	1,0

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 30 \\ 0,4 & \text{si } 30 \leq x < 40 \\ 0,6 & \text{si } 40 \leq x < 50 \\ 0,7 & \text{si } 50 \leq x < 60 \\ 1,0 & \text{si } x \geq 60 \end{cases}$$

Si $F(x) = P(X \leq x)$

a) $P(X \leq 25) = 0$

b) $P(X \geq 60) = 0,3$ Único posible: 60

c) $P(X < 40) = 0,4$ único posible: 30

d) $P(X > 40) = P(50) + P(60) = 0,1 + 0,3 = 0,4$

e) $P(30 \leq X \leq 60) = P(30) + P(40) + P(50) + P(60) = 0,4 + 0,2 + 0,1 + 0,3 = 1,0$

Escaneado con CamScanner

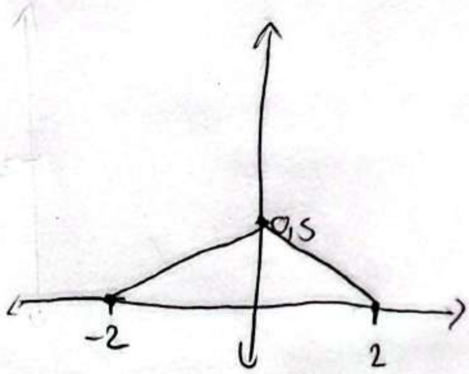
30. Dada la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x|}{2}\right) & \text{si } -2 \leq x < 2, \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases}$$

a) Pruebe si f es función de densidad;

b) Si f es función de densidad, halle la función de distribución de X.

c) Halle $P(-1 < X < 2)$.



$f(-2) = \frac{1}{2}(0) = 0$

$f(0) = \frac{1}{2}$

$f(2) = 0$

a)

Primero despejamos el val. absoluto

Para $-2 \leq x < 0$

$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2}\right)$

$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$

Para $0 \leq x < 2$

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$

Se debe verificar que: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

Podemos conseguir el área total de la figura integrando por tramos

T_1:

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{2} + \frac{x}{4}\, dx = \int_{-2}^{0} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\int_{-2}^{0} x = \frac{x}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{8}\Big|_{-2}^{0}$$

$$= \frac{0}{2} - \frac{-2}{2} + \frac{0}{8} - \frac{(-2)^2}{8}$$

$$= +1 - \frac{\cancel{4}\,1}{\cancel{8}\,2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

Escaneado con CamScanner

I_2:

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{2}-\frac{x}{4}\right)dx = \frac{x}{2}\Big|_0^2 - \frac{x^2}{8}\Big|_0^2$$

$$= 1 - 0 - (0 + \frac{1}{2})$$

$$= +1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$I_1 + I_2 = 1 \Rightarrow f$ es la función densidad

b) $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Resolvemos por tramos

1) $-2 \leq x < 0$

$$F(x) = \int_{-2}^{x}\left(\frac{1}{2}+\frac{t}{4}\right)dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{x} 1\,dt + \frac{1}{4}\int_{-2}^{x} t\,dt$$

$$= \frac{t}{2}\Big|_{-2}^{x} + \frac{t^2}{8}\Big|_{-2}^{x}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{2}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{4}{8}$$

$$= \frac{4x+x^2}{8} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4x+x^2+4}{8} = \frac{(x+2)^2}{8}$$

2) $0 \leq x < 2$

Le debo sumar $F(0)$ (más anterior) $\Rightarrow F(0) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \left(\frac{1}{2}-\frac{t}{4}\right)dt = \frac{t}{2}\Big|_0^x - \frac{t^2}{8}\Big|_0^x + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{-x^2+4x+4}{8}$$

Escaneado con CamScanner

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{(x+2)^2}{8} & \text{si } -2 \leq x < 0 \\ \dfrac{-x^2+4x+4}{8} & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

c) $P(-1 < X < 2) = F(2) - F(-1)$

$$= 1 - \frac{(-1+2)^2}{8}$$

$$= 1 - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{7}{8} = 0{,}875$$

87,5% del arco se encuentra en $-1 < x < 2$

Escaneado con CamScanner

38. Una compañía petrolera va a perforar 29 pozos, cada uno de ellos tiene una probabilidad de 0.1 de producir petróleo de manera rentable. A la compañía le cuesta 100 mil dólares perforar cada pozo. Un pozo comercial extrae petróleo por un valor de 5 millones de dólares. Calcule.

a) La ganancia que espera obtener la compañía por los 29 pozos.

b) La desviación estándar del valor de la ganancia.

(Sugerencia: expresar la ganancia en función de la renta y el costo).

Éxito: \$4.900.000 , Fracaso: -\$100 000

Prob: 0,1 Prob: 0,9

$$P(x) = \begin{cases} 0,1 & si\ x = 4.900.000 \\ 0,9 & si\ x = -100000 \end{cases}$$

$E(x) = \sum x \cdot P(x)$

a) $E(X) = (4.900.000 \cdot 0.1) + (-100\,000 \cdot 0,9)$

$E(x) = 400\,000$ esperado por cada pozo

$\Rightarrow$ Para los 29: $400\,000 \cdot 29 = 11.600.000$

b) $V(X) = E(X^2) - [E(x)]^2$

$E(x^2) = \sum x^2 \cdot P(x^2)$

$= 4.900.000^2 \cdot 0,1 - 100000^2 \cdot 0,9$

$= 2,392 \times 10^{12}$

$(E(x))^2 = 400\,000^2$

$\Rightarrow$

$V(x) = 2,392 \times 10^{12} - 400.000^2 = \overbrace{2,232 \times 10^{12}}^{\text{por pozo}} \cdot 29$

$V(x_{Total}) = 6,4728 \times 10^{13}$

$\sigma = \sqrt{V(x_{Total})}$

$\sigma = 8045\,371.340$

La ganancia varía en ese valor

Escaneado con CamScanner

40. En un juego con una baraja de 52 cartas, se plantea lo siguiente al sacar una carta al azar. Gana $100 dólares si saca un as, ii) gana $50 dólares si saca una reina, iii) gana $10 si saca un rey y, iv) pierde su apuesta de $20 con cualquiera otra carta. ¿Cuál es la ganancia esperada del juego?

$|\Omega| = 52$

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 12 \\ -52 \\ 16 \\ \hline 36 \end{array}$$

$$P\,X(\omega) = \begin{cases} 100 & \text{si } x = a \\ 50 & \text{si } x = r \\ 10 & \text{si } x = r_2 \\ -20 & \text{si } x \in \{2, 3, \ldots, J\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{4}{52} & \text{si } x = 100 \\ \frac{4}{52} & \text{si } x = 50 \\ \frac{4}{52} & \text{si } x = 10 \\ \frac{40}{52} & \text{si } x = -20 \ \{ \ldots, J\} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$E(x) = \frac{4}{52} \cdot 100 + \frac{4}{52} \cdot 50 + \frac{4}{52} \cdot 10 - 20 \cdot \frac{40}{52}$$

$$\frac{4}{52}(100 + 50 + 10) - \frac{40}{52} \cdot 20$$

$E(x) = -3{,}08$, se espera perder dinero

Escaneado con CamScanner

47. Se organizó una rifa con el objetivo de obtener fondos para realizar un asunto benéfico, para ello se vencieron 10000 boletos a 4 *USD* cada uno. El premio es de un automóvil que cuesta 13000, si un ciudadano compra 2 , ¿cuál es la ganancia esperada que tendría el comparador de dichos boletos?

$|\Omega| = 10000$

$$X(w) = \begin{cases} 12992 & \text{si } x = P \\ -8 & \text{si } x = nP \end{cases}$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{2}{10000} & \text{si } x = 12992 \\[2ex] \dfrac{9998}{10000} & \text{si } x = -8 \end{cases}$$

$$E(x) = -8 \cdot \frac{9998}{10000} + \frac{2 \cdot 12992}{10000} =$$

$E(x) = -5,4560$

Escaneado con CamScanner