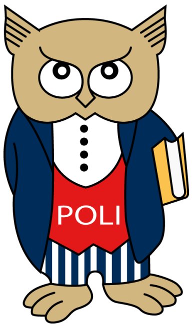


Probabilidad y Estadística - 2025-A

Sección 3: Variables aleatorias

Preparado por:

Cátedra de Probabilidad y Estadística - EPN

0. Índice general

1. VARIABLE ALEATORIA

1.1. INTRODUCCIÓN

En temas anteriores, se han estudiado las variables estadísticas, que representaban el conjunto de resultados observados al realizar un experimento aleatorio, presentando para cada valor su frecuencia, esto es, el número de veces que sucede cada resultado.

Sin embargo, antes de realizar un experimento aleatorio no se puede predecir con exactitud qué resultados se van a observar, sino que, como mucho, se puede describir cuales van a ser los resultados posibles y con qué probabilidad puede ocurrir cada uno de ellos. En muchas ocasiones, nos interesa más que el resultado completo del experimento, una función real de los resultados.

Tales funciones cuyos valores dependen de los posibles resultados de un experimento aleatorio, se llaman variables aleatorias. En todo proceso de observación o experimento aleatorio podemos definir una variable aleatoria asignando a cada resultado del experimento un número:

- si el resultado del experimento es numérico porque contamos o medimos, los posibles valores de la variable coinciden con los resultados del experimento.
- si el resultado del experimento es cualitativo, hacemos corresponder a cada resultado un número siguiendo algún criterio.

Llamamos variables aleatorias a aquellas funciones cuyos valores dependen de los resultados de un experimento aleatorio. Más precisamente:

Definición 1

Sea Ω un espacio muestral, se dice que X es una variable aleatoria, si es una función de Ω en $\mathbb{R}$, es decir,

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) \end{aligned}$$

Es decir, una variable aleatoria es un medio para describir los resultados del espacio muestral. Las variables aleatorias se clasifican en variables aleatorias discretas y variables aleatorias continuas.

1.2. Variables aleatorias discretas

Definición 2

Sea Ω un espacio muestral, se dice que X es un variable aleatoria discreta, si $\operatorname{img}(X)$ es un conjunto finito o numerable.

Ejemplo 1. Determine una variable aleatoria tal que identifique si una persona que visita un almacén lo atienden inmediatamente o le piden que espere de tal manera que la variable tome el valor de uno cuando sea atendido o cero cuando le piden que espere.

Solución. El espacio muestral sería $\Omega = \{A, E\}$ donde A representa ser atendido y E tener que esperar, podemos definir la variable aleatoria

$$X\colon \Omega \to \mathbb{R}, \qquad \text{donde} \quad X(A) = 1 \quad \text{y} \quad X(E) = 0.$$

□

Ejemplo 2. Determine una variable aleatoria para el experimento de lanzar una moneda cuatro veces y contar el número de caras obtenidas.

Solución. El espacio muestral sería

$$\Omega = \{CCCC, CCCS, CCSS, CSSS, SCCC, \ldots, SSSS\}$$

tomamos como variable aleatoria

$$X\colon \Omega \to \mathbb{R}$$

donde

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega \in \{SSSS\}, \\ 1 & \text{si } \omega \in \{CSSS, SCSS, SSCS, SSSC\}, \\ 2 & \text{si } \omega \in \{CCSS, CSCS, CSSC, \ldots, SSCC\} \\ 3 & \text{si } \omega \in \{CCCS, CCSC, CSCC, SCCC\}, \\ 4 & \text{si } \omega \in \{CCCC\}. \end{cases}$$

es decir, X representa el número de caras obtenidas. □

Para definir a una variable aleatoria discreta, debemos indicar el valor que toma la variable en cada elemento del espacio muestral.

Definición 3 – Probabilidad

Sea $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria discreta, se dice que la probabilidad de $x \in \mathbb{R}$ bajo X, notada por $P(X = x)$, como

$$P(X = x) = \begin{cases} P(X(\tau) = x | \tau \in \Omega) & \text{si } x \in \operatorname{img}(X), \\ 0 & \text{si } x \notin \operatorname{img}(X). \end{cases}$$

Es decir, si x es igual algún elemento de la imagen de X, $P(X = x)$ es igual a la probabilidad del evento de los posibles resultados del espacio muestral que tiene a x como imagen. Si x no pertenece a la imagen de X, entonces representa al evento vacío, por lo cual, su probabilidad es nula.

Definición 4 – Función de masa de probabilidad

Sea X una variable aleatoria discreta, se dice que p es la función de masa de probabilidad de X si

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto p(x) = P(X = x) \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Se lanzan dos monedas justas y se cuenta el número de caras que aparecen. Determine la función de masa de probabilidad para este experimento y trace la gráfica correspondiente.

Solución. Sea C si la moneda cayó en cara y S si la moneda cayo en sello. El espacio muestral del experimento es

$$\Omega = \{CC, CS, SC, SS\}.$$

Tomemos X variable aleatoria que representa la cantidad de caras que aparecieron, entonces

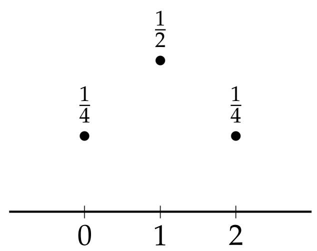
$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

donde

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega = \{SS\}, \\ 1 & \text{si } \omega = \{CS, SC\}, \\ 2 & \text{si } \omega = \{CC\}. \end{cases}$$

La función de masa de probabilidad está dada entonces por

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x = 0, \\ \frac{2}{4} & \text{si } x = 1, \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 2. \end{cases}$$



□

Teorema 1

Sea X una variable aleatoria discreta y Ω su espacio muestral. La función de probabilidad debe cumplir:

1. $0 \leqslant p(x_j) \leqslant 1$

2. $\sum_{j=1}^{n} p(x_j) = 1$

donde $|\Omega| = n$, $x_j \in \text{img}(X)$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Definición 5 – Función de distribución acumulada

Dada una variable aleatoria discreta X con función de probabilidad p, se dice que F es la función de distribución acumulada de X a toda función de la forma

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) = P(X \leqslant x) \end{aligned}$$

es decir,

$$F(x) = \sum_{t \leqslant x} p(t).$$

Ejemplo 4. Dada la siguiente tabla

X	$P(X = x)$
1	0.20
2	0.25
3	0.15
4	0.40

1. Comprueba si es una distribución de probabilidad.
2. Calcule $P(X < 3)$

Solución.

1. Comprobamos que

   a) Cada una de las probabilidades está entre cero y uno.

   b) Al sumar las probabilidades obtenemos uno.

   Como se cumplen ambas propiedades concluimos que es una distribución de probabilidad.

2. $P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0.20 + 0.25 = 0.45.$ □

Teorema 2

Si X es una variable aleatoria discreta, donde

$$\text{img}(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

p la función de masa de probabilidad y F la función de distribución acumulada, entonces:

1. Si se conoce p, para cada $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \sum_{t \leqslant x} p(t)$.

2. Si se conoce F,

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} F(x_j) - F(x_{j-1}) & \text{si } x = x_j, \\ 0 & \text{si } x \notin \operatorname{img}(X). \end{cases}$$

con $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ejemplo 5. Dada la siguiente tabla

X	$P(X = x)$
1	0.20
2	0.25
3	0.15
4	0.40

1. Calcule $P(X < 2)$
2. Calcule $P(X \geqslant 2)$

Solución. Tenemos

$$P(X < 2) = P(X = 1) = 0.20$$

Luego,

$$P(X \geqslant 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.80;$$

o también,

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - 0.20 = 0.80.$$ □

Ejemplo 6. Se lanza un dado "justo" y se apunta el número que se observa en la cara superior. De acuerdo a esto:

1. Determine la función de densidad de probabilidad.
2. Calcule la probabilidad de que el número sea un número par.
3. Calcule la probabilidad de que el número sea menor que tres.

Solución. Como es un dado "justo", cada una de las caras tiene la misma probabilidad de "salir". Sea X la variable aleatoria que representa el número que aparece en la cara superior.

1. La función de densidad de probabilidad está definida:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x = 1, \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 2, \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 3, \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 4, \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 5, \\ \frac{1}{6} & \text{si } x = 6. \end{cases}$$

2. La probabilidad de que sea un número par se calcula como

$$\begin{aligned} P(X \text{ sea par}) &= P(X = 2 \text{ o } X = 4 \text{ o } X = 6) \\ &= P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. La probabilidad de que el número sea menor que tres se determina por:

$$\begin{aligned} P(X < 3) &= P(X = 1 \text{ o } X = 2) \\ &= P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

□

1.3. Variables aleatorias continuas

En el caso de una variable continua, los valores numéricos provienen de un intervalo continuo.

Definición 6 – Variable aleatoria continua

Sea Ω un espacio muestral, se dice que X es un variable aleatoria continua, si $\operatorname{img}(X)$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Ejemplo 7. Determine una variable aleatoria que indica el número de mílilitros que toma una persona en un día.

Solución. Si la variable aleatoria que indica la cantidad de mililitros que tomó una persona durante un día es

$$X \colon \Omega \to \mathbb{R},$$

donde la imagen de X sería
$$\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad \text{y} \quad X(\omega) = x$$
para todo $\omega \in \Omega$ y $x \in \text{img}(X)$.

El espacio muestral representaría todos los volúmenes de agua consumidos por el individuo en el día. $\square$

Ejemplo 8. Determine una variable aleatoria que indica el kilometraje recorrido por una persona en un día en su auto.

Solución. Si la variable aleatoria que indica el kilometraje recorrido por una persona en un día en su auto es
$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$
donde la imagen de X sería
$$\mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad \text{y} \quad X(\omega) = x$$
para todo $\omega \in \Omega$ y $x \in \text{img}(X)$.

El espacio muestral es un poco más difícil de describir y representaría todas las posibles rutas que puedo haber tomado el individuo. $\square$

Definición 7 – Función de densidad de probabilidad

Sea X una variable aleatoria continua, se dice que f es la función de densidad probabilidad de X si para todo $a, b \in \mathbb{R}$ donde $a \leqslant b$ se tiene que
$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$$
la cual verifica

1. $f(t) \geqslant 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$,
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

Es decir, la probabilidad de que X tome valores dentro del intervalo $[a, b]$ es igual al área bajo la curva f que también suele ser llamada curva de densidad.

Teorema 3

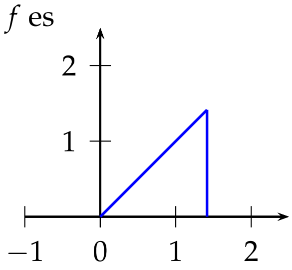
Sea X una variable aleatoria continua, entonces

1. $P(X = x) = 0.$
2. $P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b)$

Ejemplo 9. Sea la función de densidad
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \sqrt{2}, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

1. Trace la gráfica de f.
2. Calcule $P\,(0.5 < x < 1)$

Solución. La gráfica de la función f es



$$P\,(0.5 < x < 1) = \int_{0.5}^{1} x\,dx = 0.375$$ □

Definición 8 – Función de distribución

Dada una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad f, se dice que F es la función de distribución acumulada de X, a la función

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto F(x) = P\,(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Teorema 4

Sea X una variable aleatoria continua y su función de distribución F y f su función de densidad, se verifica que

$$f(x) = F'(x) \quad \text{y} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Teorema 5

Sea F la función de distribución de una variable aleatoria continua X, entonces

1. F es creciente.
2. Dado $a \in \mathbb{R}$, $P(X > a) = 1 - F(a)$
3. Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$, entonces $P\,(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a)$

1.4. Medidas características de una variable aleatoria

1.4.1.- Medidas de centralización

Definición 9 – Esperanza Matemática

Si X es una variable aleatoria discreta, se dice que la esperanza matemática de X, representada por $E\,(X)$, está definida por

$$E\,(X) = \sum_{x \in \mathrm{img}\,(X)} x\; p(x)$$

donde p es la función de masa de probabilidad de X.

Si X es una variable aleatoria continua, la esperanza matemática de X está dada por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$$

donde f es la función de densidad de probabilidad de X.

Observación. También se suele representar a la esperanza matemática mediante la letra griega μ.

Ejemplo 10. Continuando con el ejemplo 3 y dada la función de masa de probabilidad de X definida por

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x = 0, \\ \frac{2}{4} & \text{si } x = 1, \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Calcule la media de número de caras que pueden obtenerse cuando se lanzan dos monedas.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} \mu &= E(X) \\ &= \sum_{x=0}^{2} x p(x) \\ &= (0)(0.25) + (1)(0.5) + (2)(0.25) \\ &= 1. \end{aligned}$$

La media de la variable X significa que al realizar este experimento en muchas ocasiones en promedio el número de caras obtenidas es 1.

□

Ejemplo 11. Sea la función de densidad de la variable aleatoria X definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Determine la media.

Solución.

$$\begin{aligned} \mu &= E(X) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \\ &= \int_{0}^{\sqrt{2}} x \cdot x\, dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left.\frac{x^3}{2}\right|_0^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}^3}{3} - 0 \\
&\approx 0.942809
\end{aligned}
\qquad \square
$$

La media de la variable X significa que al realizar el experimento muchas veces en promedio el valor que tomará la variable aleatoria será 0.9428.

Teorema 6

Si X es una variable aleatoria, entonces la esperanza de la variable aleatoria $g(X)$ es

$$E(g(X)) = \sum_{x \in \mathrm{img}(X)} g(x)p(x)$$

si X es discreta con función de masa de probabilidad p; y

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)$$

si X es continua con función de densidad f.

Teorema 7

Sean X y Y variables aleatorias y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

1. $E(\alpha) = \alpha$
2. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
3. $E(\alpha + X) = \alpha + E(X)$
4. $E(\alpha X) = \alpha E(X)$

1.4.2.- Medidas de dispersión

Definición 10 – Varianza

Si X es una variable aleatoria discreta, se dice que la varianza de X, representada por $V(X)$, está definida por

$$V(x) = \sum_{x \in \mathrm{img}(X)} (x-\mu)^2 p(x),$$

donde p es la función de masa de probabilidad de X y μ es la esperanza de X.
Si X es una variable aleatoria continua, la varianza de X está dada por

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-\mu)^2 f(t)\, dt,$$

donde f es la función de densidad de X y μ es la esperanza de X.

La desviación estándar de X, que representaremos por σ_X, se define por

$$\sigma_X = \sqrt{V\left(X\right)}.$$

Ejemplo 12. Continuando con el ejemplo 3 y dada la función de masa de probabilidad de X definida por

$$P\left(X = x\right) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x = 0, \\ \frac{2}{4} & \text{si } x = 1, \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

Calcule la varianza del número de caras que pueden obtenerse cuando se lanzan dos monedas.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= V\left(X\right) \\ &= \sum_{x=0}^{2} (x-\mu)^2 p(x) \\ &= (0-1)^2(0.25) + (1-1)^2(0.5) + (2-1)^2(0.25) \\ &= 0.5\end{aligned}$$

□

Teorema 8

Si X es una variable aleatoria, entonces la varianza de la variable aleatoria $g(X)$ es

$$V(g(X)) = \sum_{x \in \mathrm{img}(X)} \Big(g(x) - E(g(X))\Big)^2 p(x)$$

si X es discreta con función de masa de probabilidad p; y

$$V(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(g(x) - E(g(X))\Big)^2 f(x)$$

si X es continua con función de densidad f.

Definición 11 – Variables aleatorias estadísticamente independientes

Dos variables aleatorias X y Y con función de densidad de probabilidad conjunta h y funciones de densidad marginales f y g, respectivamente son **estadísticamente independientes** si para todo $x \in \mathrm{img}(X)$ y $y \in \mathrm{img}(Y)$

$$h(x,y) = f(x)g(y).$$

Teorema 9

Sean X y Y variables aleatorias y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

1. $V\left(X\right) = E\left(X^2\right) - \left(E\left(X\right)\right)^2$

2. $V(\alpha) = 0$
3. Si X y Y son variables aleatorias independientes, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$
4. $V(\alpha + X) = V(X)$.
5. $V(\alpha X) = \alpha^2 V(X)$.

Vamos a probar la primera proposición para una variable aleatoria discreta

Demostración.

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{x\in \mathrm{img}(X)} (x-\mu)^2 p(x) \\
&= \sum_{x\in \mathrm{img}(X)} x^2 p(x) - 2\mu x p(x) + \mu^2 p(x) \\
&= \sum_{x\in \mathrm{img}(X)} x^2 p(x) - 2\mu \sum_{x\in \mathrm{img}(X)} x p(x) + \mu \sum_{x\in \mathrm{img}(X)} p(x) \\
&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)E(X) \\
&= E(X^2) - (E(X))^2
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 13. Sea la función de densidad de la variable aleatoria X definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le \sqrt{2} \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Determine la varianza y la distribución estándar.

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= V(X) \\
&= E\left(X^2\right) - (E(X))^2 \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} x^2 f(x)\, dx - \left(\frac{\sqrt{2}^3}{3}\right)^2 \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} x^2\, dx - \frac{8}{9} \\
&= \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^{\sqrt{2}} - \frac{8}{9} \\
&= \frac{4}{4} - 0 - \frac{8}{9} \\
&= \frac{1}{9} \\
&\approx 0.1111,
\end{aligned}$$

de donde $\sigma = \sqrt{0.1111} = 0.3333$. □

Ejemplo 14. Consideremos el experimento aleatorio **lazar una moneda dos veces**, en el cual notaremos con "C" cuando salga cara y "S" cuando salga sello, con lo cual el espacio muestral estará representado por

$$\Omega = \{CC, SC, CS, SS\},$$

Existen varias variables aleatorias que se pueden construir en base a Ω, en particular, construyamos la variable aleatoria X que cuenta el número de caras obtenidas después de lanzar dos veces la moneda, es decir,

$$X\colon \Omega \to \{0,1,2\}$$

Notemos que existe igual probabilidad de obtener "CC" o "SC", con eso en mente vamos a construir la función de densidad, donde

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P(\{SS\}) = \frac{1}{4} \\
P(X=1) &= P(\{CS\} \cup \{SC\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\
P(X=2) &= P(\{CC\}) = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

es decir,

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Comprobamos que se verifica que

$$\sum_{x=0}^{2} p(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

La función de distribución va estar dada por

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{3}{4} & \text{si } x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

Para analizar la variable aleatoria, calculamos:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=0}^{2} x p(x) \\
&= 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) \\
&= 0 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} \\
&= 1 = \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{x=0}^{2}(x-\mu)^2 p(x) \\
&= (0-1)^2 p(0) + (1-1)^2 p(1) + (2-1)^2 p(2) \\
&= 1\cdot\frac{1}{4} + 0 + 1\cdot\frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2} = \sigma^2.
\end{aligned}$$

Ejemplo 15. La distribución de la cantidad de grava (en toneladas) vendida por una compañía de materiales de construcción en una semana dada es una variable continua aleatoria X con función de densidad de probabilidad definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2) & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La función de distribución acumulada de las ventas esta definida por

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \frac{3}{2}(1-y^2)\,dy \\
&= \frac{3}{2}\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 \\
&= \frac{3}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)
\end{aligned}$$

para todo $x \in [0,1]$. Con ello se tiene que

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x\cdot\frac{3}{2}(1-x^2)\,dx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 (x - x^3)\,dx \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{3}{8}.
\end{aligned}$$

Si calculamos además,

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 x^2 \frac{3}{2}(1-x^2)\,dx \\
&= \frac{3}{2}\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx \\
&= \frac{1}{5},
\end{aligned}$$

se tiene que

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \frac{1}{5} - \left(\frac{3}{8}\right)^2 \\
&= \frac{19}{320} \\
&\approx 0.0593
\end{aligned}
$$

y

$$\sigma_X \approx 0.2437.$$

1.4.3.- Percentiles de una distribución

Definición 12 – Percentiles

Si X es una variable aleatoria discreta, F su función de distribución acumulada y $q \in [0,1]$. El percentil $100q$ es

$$x_q = \text{máx}\{x \in \text{img}(X) : \ F(x) \leqslant q\}.$$

Si X es una variable aleatoria continua, F su función de distribución acumulada y $q \in [0,1]$. El percentil $100q$ es el valor x_q tal que

$$F(x_q) = q.$$

Ejemplo 16. La proporción de personas que responden a cierta encuesta enviada por correo es una variable aleatoria continua X que tiene la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x+2)}{5} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la mediana de la proporción de personas que responden a dicha encuesta.

Solución. Para la mediana tenemos que $q = 0.5$ por tanto, vamos a buscar el valor $x_{0.5}$ talque

$$F(x_{0.5}) = 0.5,$$

luego,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{x_{0.5}} \frac{2(x+2)}{5} dx = 0.5 &\equiv \frac{1}{5} \cdot x_{0.5} \cdot (x_{0.5} + 4) = 0.5 \\
&\equiv x_{0.5}^2 + 4x_{0.5} - 2.5 = 0 \\
&\equiv x_{0.5} \approx -4.55 \ \vee \ x_{0.5} \approx 0.55.
\end{aligned}
$$

La mediana es igual a 0.55, descartamos el número negativo pues no pertenece al dominio. En este contexto, la mediana representa que la proporción de personas que responden una encuesta es menor o igual 55 % en el 50 % de las veces que se realice la encuesta. □

Los cuartiles dividen a la población en cuatro partes iguales

Definición 13 – Cuartiles

Los cuartiles, representados por Q_k con $k \in \{1, 2, 3\}$ dividen a la distribución en cuatro partes iguales. Se definen como el percentil con q igual a 0.25, 0.5 y 0.75 respectivamente, es decir,

1. $Q_1 = x_{0.25}$,
2. $Q_2 = x_{0.50}$, también llamada mediana.
3. $Q_3 = x_{0.75}$.

Definición 14

El rango intercuartílico representa la zona en la cual se encuentra el 50 % de la probabilidad y representado por RIQ es

$$RIQ = Q_3 - Q_1$$

Observación. Las distribuciones simétricas verifican

$$Q_2 - Q_1 = Q_3 - Q_2.$$

1.4.4.- Otras medidas características

Definición 15 – Momento alrededor del origen

Dado $k \in \mathbb{N}$. Definimos el momento de orden k alrededor del origen, y lo representaremos por μ_k,

1. de una variable discreta
$$\mu_k = \sum_{x \in \text{img}(X)} x^k p(x);$$
2. de una variable continua
$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\, dx.$$

Tomemos en cuenta que para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$E(X^k) = \mu_k.$$

Definición 16 – Momento alrededor de la media

Dado $k \in \mathbb{N}$. Definimos el momento de orden k alrededor de la media, y lo representaremos por m_k,

1. de una variable discreta
$$m_k = \sum_{x \in \text{img}(X)} (x - \mu)^k p(x);$$

2. de una variable continua
$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^k f(x)\, dx.$$

Por ejemplo, el momento de orden 2 respecto a la media es la varianza de una variable aleatoria X. Es decir,
$$m_2 = \sigma^2.$$

Definición 17 – Coeficiente de asimetría

El coeficiente de asimetría está definido por
$$A_s = \frac{m_3}{\sigma^3}.$$

Definición 18 – Coeficiente de apuntalamiento

El coeficiente de apuntalamiento está definido por
$$A_p = \frac{m_4}{\sigma^4}.$$

Definición 19 – Coeficiente de variación

El coeficiente de variación está definido por
$$CV = \frac{\sigma}{|\mu|}.$$

Ejemplo 17. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad es
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Determine el coeficiente de asimetría y apuntalamiento de la variable X.

Coeficiente de asimetría Determinemos la media, es decir,
$$\mu_1 = E(X),$$

luego,
$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^1 f(x)\, dx = \int_{-1}^{3} \left(\frac{1}{4}x\right) = 1.$$

Ahora, determinemos la varianza, es decir,
$$m_2 = \sigma^2.$$

luego,
$$m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = \int_{-1}^{3} (x-1)^2 \left(\frac{1}{4}\right)\, dx = \frac{4}{3};$$

de donde,

$$\sigma = \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

Después,

$$m_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^3 f(x)\, dx = \int_{-1}^{3} (x-1)^3 \left(\frac{1}{4}\right)\, dx = 0.$$

En conclusión,

$$A_s = \frac{m_3}{\sigma^3} = 0.$$

La distribución de la variable aleatoria X es simétrica.

Coeficiente de apuntalamiento

$$m_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^4 f(x)\, dx = \int_{-1}^{3} (x-1)^4 \left(\frac{1}{4}\right)\, dx = \frac{16}{5}.$$

Por lo tanto,

$$A_p = \frac{m_4}{\sigma^4} = \frac{\frac{16}{5}}{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^4} = \frac{9}{5}.$$

La concentración de la variable aleatoria X es de forma leptocúrtica.