UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de Rio Claro

Relatório de estudo sobre grafos do tipo árvore

Grafos e Aplicações

Equipe:
André Luis Dias Nogueira
Felipe Melchior de Britto
Rafael Daiki Kaneko
Ryan Hideki Tadeo Guimarães
Vitor Marchini Rolisola

01/08/2024

Conteúdo

1 Resumo

Este trabalho tem como objetivo aplicar o algoritmo de Busca em Largura (BFS) em árvores binomiais geradas aleatoriamente, calculando a média das profundidades das ordenações geradas para todos os nós. O número de filhos por nó segue uma distribuição binomial com parâmetros n_{max} (número máximo de filhos) e p (probabilidade de ter filhos), sendo a geração de descendentes limitada pela profundidade d_{max}.

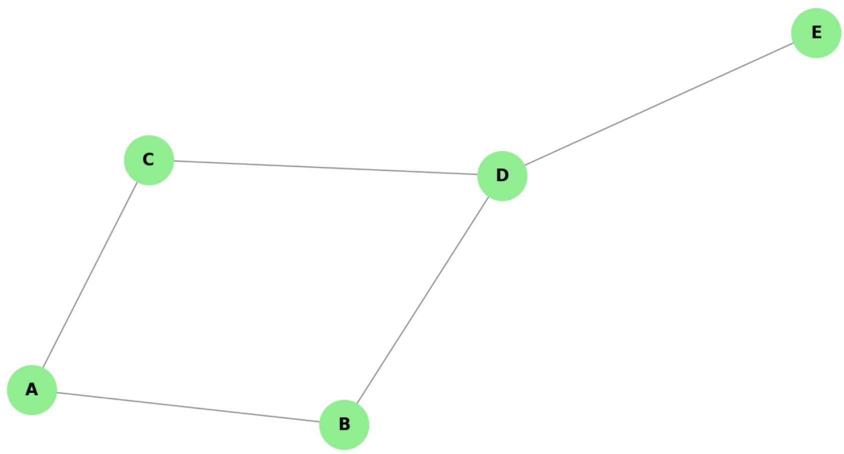
Realizamos experimentos variando os parâmetros n_{max}, p, e d_{max}, gerando ao menos 10 árvores aleatórias para cada combinação de valores. Os resultados obtidos foram apresentados em tabelas e gráficos, permitindo a análise das profundidades médias.

Um dos interesses do estudo era almejar a transição de fase esperada no modelo: para $n_{\text{max}} \cdot p < 1$, as árvores atingem no geral níveis sem descendentes enquanto para $n_{\text{max}} \cdot p > 1$, as árvores se expandem até o limite de profundidade d_{max}. Esse comportamente fornece uma visão mais detalhada sobre a estrutura de crescimento das árvores binomias conforme variamos seus parâmetros.

2 Introdução

Grafos são estruturas fundamentais em teoria dos grafos, utilizadas para modelar uma variedade de problemas em diferentes áreas, desde redes de computadores até genética.

Um grafo é uma estrutura matemática usada para modelar relações entre objetos de um conjunto. Ele é composto por dois conjuntos: um conjunto de vértices (ou nós) e um conjunto de arestas (ou arcos) que conectam esses vértices. Os vértices representam os objetos e as arestas representam as relações entre esses objetos. [1]



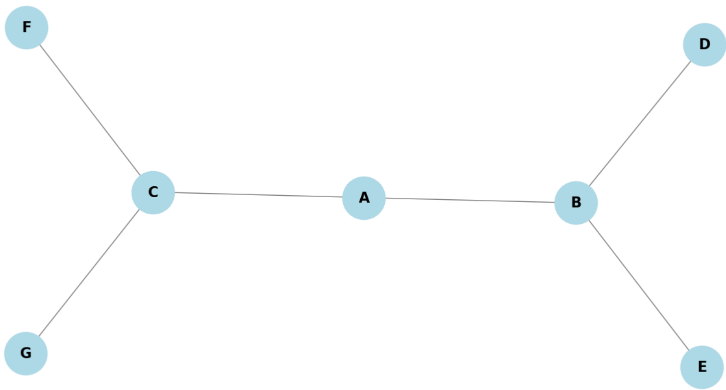
Por exemplo, na representação de uma rede social, os vértices podem representar pessoas e as arestas representam as conexões de amizade entre elas.

Um tipo especial de grafo, conhecido como árvore, apresenta propriedades únicas que tornam essa classe particularmente interessante para estudo.

Uma árvore é definida como um grafo não-orientado, conexo e acíclico, o que significa que não possui ciclos e, além disso, qualquer remoção de uma de suas arestas resulta em um grafo desconexo.[5] [2] Então suas características são:

- **Conectividade**: Para qualquer par de vértices u e v, existe exatamente um caminho que conecta u e v.
- **Aciclicidade**: O grafo não contém ciclos; ou seja; não é possivel iniciar em im vértice, seguir arestas e retornar ao mesmo vértice sem atravessar arestas repetidamente.
- **Número de arestas**: Se uma árvore possui n vértices, então ela possui exatamente $n - 1$ arestas.

Essas características permitem que árvores sejam a estrutura mínima necessária para garantir a conectividade entre os vértices de um grafo com o menor número de arestas possíveis, um aspecto crucial para a otimização de recursos em diversos cenários práticos.

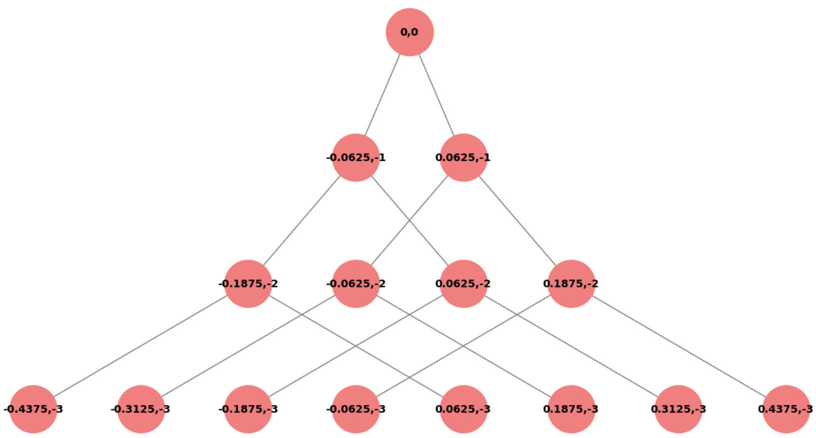


A análise de árvores em grafos tem implicações diretas em problemas de interligação, como o fornecimento de redes elétricas, onde o objetivo é minimizar o custo de conexão ao garantir que todas as unidades estejam conectadas. Além disso, árvores desempenham um papel importante na computação, particularmente em algoritmos de ordenação, como o Heapsort, e na modelagem de genealogias e redes hierárquicas.

Uma **árvore binomial** é uma estrutura de dados que representa uma coleção de árvores binomiais. A definição formal de uma árvore binomial é a seguinte[4] [3]:

Uma **árvore binomial** B_k é uma árvore que possui as seguintes propriedades:

- **Estrutura Recursiva**: Uma árvore binomial B_k é composta por 2^k nós e tem exatamente k árvores binomiais $B_{k-1}, B_{k-2}, \ldots, B_0$ como subárvores. A árvore B_k é obtida ao unir duas árvores B_{k-1}.
- **Propriedades dos Nós**:
  - O nó na raiz de B_k tem um grau de k (ou seja, ele possui k filhos).
  - A altura de B_k é k.
  - A árvore B_k possui 2^k folhas.
- **Organização dos Nós**: Os nós são organizados de tal forma que os valores dos nós na subárvore esquerda são menores ou iguais ao valor do nó pai, e os valores dos nós na subárvore direita são maiores.



As árvores binomiais são particularmente úteis em algoritmos de estrutura de dados, como em filas de prioridade.

O presente relatório tem o objetivo de explorar as propriedades matemáticas e aplicativas das árvores binomiais, abordando tanto sua definição formal quanto suas extensões, como arborescências e a aplicação em algoritmos de busca.

A introdução a essas ideias será contextualizada com base nas propriedades da conectividade e da aciclicidade, discutindo ainda como árvores binomiais podem ser vistas como estruturas mínimas e otimizadas para representação de relações complexas, ao mesmo tempo que mantêm a simplicidade computacional.

3 Implementação

A implementação do trabalho envolve a criação de um algoritmo que gera árvores binomiais com base nos parâmetros fornecidos: n_{max} (número máximo de filhos por nó), p (probabilidade de um nó gerar filhos) e d_{max} (profundidade máxima da árvore). Cada nó é representado por um conjunto de quatro posições em um vetor. A primeira posição do vetor, exclusivamente, armazena o número máximo de filhos do nó, enquanto as outras três posições armazenam o índice do pai e dos filhos, respectivamente, conforme o modelo que você está utilizando.

Para cada tripla de parâmetros, são geradas pelo menos 10 árvores aleatórias, utilizando a distribuição binomial para decidir quantos filhos cada nó terá. O algoritmo segue uma abordagem de Busca em Largura (BFS) para explorar os nós da árvore. A BFS percorre a árvore começando da raiz, explorando todos os nós em cada nível antes de passar para o próximo. Essa busca é gerenciada por uma fila que armazena os nós a serem explorados, garantindo que os nós sejam processados em ordem de nível.

Durante a execução do BFS, são registrados a profundidade de cada nó e a profundidade total das árvores. Ao final de cada execução, é calculada a profundidade média da árvore, que será utilizada para gerar tabelas ou gráficos que mostram como essa profundidade varia de acordo com as diferentes combinações de n_{max}, p, e d_{max}.

Além disso, o código precisa lidar com a transição de fase do modelo, que ocorre quando n_{max} multiplicado por p é menor que 1, indicando que, em algum ponto, a geração de novos filhos para a árvore vai parar, resultando em níveis sem descendentes. Caso $n_{\text{max}} \cdot p$ seja maior que 1, a geração de nós continuará até atingir o limite imposto por d_{max}.

Portanto, a implementação é construída de maneira a não apenas gerar as árvores e calcular as profundidades, mas também simular a dinâmica de crescimento dessas árvores binomiais sob diferentes condições, explorando a variação desses parâmetros.

4 Resultados e discussão

5 Conclusão

Os resultados obtidos neste trabalho demonstram que, embora o problema das árvores binomiais apresente desafios consideráveis, fomos capazes de obter resultados positivos em situações que não extrapolavam os limites máximos dos parâmetros. Para combinações de n_{max}, p, e d_{max} que mantiveram o crescimento da árvore controlado, nosso algoritmo de Busca em Largura (BFS) foi bem-sucedido, fornecendo medições precisas das profundidades médias das árvores geradas.

No entanto, verificamos que, quando os parâmetros se aproximavam de seus valores máximos, o algoritmo encontrou dificuldades em lidar com a complexidade crescente, principalmente em cenários onde $n_{\text{max}} \cdot p > 1$, e a árvore se expandia rapidamente. Nessas situações, a BFS, que foi implementada para operar de maneira eficiente no caso médio, demonstrou limitações ao lidar com grandes quantidades de nós em profundidades elevadas, indicando a necessidade de otimizações para tratar casos extremos.

Apesar dessas dificuldades, nosso algoritmo se comportou de forma esperada em cenários moderados e foi capaz de capturar a dinâmica do modelo de árvores binomiais com precisão. As transições de fase observadas foram de acordo com as expectativas teóricas, e os resultados médios mostram correlação entre os parâmetros e a profundidade das árvores geradas. A implementação oferece uma base rica para futuros estudos e melhorias, especialmente no que tange a otimizações para lidar com grandes árvores e parâmetros no limite superior.

Bibliografia

[1] Emilio Bergamin Junior. *Aula 1 - Conceitos introdutórios de grafos*. 2024. URL: `https://drive.google.com/file/d/1ZE6hkZ3LWcdHdRhw44ctXAguC0Iqbqzm/view`.

[2] Emilio Bergamin Junior. *Aula 3 - Árvores*. 2024. URL: `https://drive.google.com/file/d/1ZE6hkZ3LWcdHdRhw44ctXAguC0Iqbqzm/view`.

[3] Daniel D. Sleator Robert E. Tarjan. ≪A data structure for dynamic trees≫. Em: *STOC '81: Proceedings of the thirteenth annual ACM symposium on Theory of computing* (1981). DOI: 10.1145/800076.

[4] Ronald L. Rivest e Clifford Stein Thomas H. Cormen Charles E. Leiserson. *Introduction to Algorithms*. First edition. MIT Press, 1990.

[5] Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory*. Second edition. Pearson College Div, 2000.