

## Grupo 3 - Módulo 2 - Maglev

Felipe Nery Barcelos Araújo (2020021190) \*  
Gustavo Vieira Barbosa (2020021352) \*  
Matheus Marques Gonçalves de Paula (2020068995) \*

\* Engenharia de Controle e Automação,  
Universidade Federal de Minas Gerais, MG  
(e-mails: felipenery@ufmg.br, gustavovbarbosa@ufmg.br,  
mmgp@ufmg.br)

**Abstract:** Relatório do controle de posição de uma massa levitada por um eletroima

**Keywords:** maglev, controle, posição, levitação, eletroima

### 1. INTRODUÇÃO

A levitação magnética, é uma tecnologia em que utiliza forças magnéticas para suspender e controlar a posição de objetos metálicos, como uma esfera de aço, sem a necessidade de contato físico com superfícies. Um exemplo notável dessa aplicação é a levitação de uma esfera de aço por meio da força magnética gerada por um eletroímã, que será abordado nesse relatório por meio da planta Maglev da *Feedback*. Tal controle tem importância significativa tanto na sociedade como na indústria, oferecendo uma ampla gama de benefícios, desde sistemas de transporte de alta velocidade até aplicações em pesquisa e desenvolvimento.

Ao longo desse relatório será visto um estudo focado no controle de posição de uma esfera de aço por meio de forças magnéticas gerada por um eletroímã, como mostra a figura 1, um problema clássico de controle de sistemas magnéticos.

Com isso, nas seções subsequentes, exploraremos em detalhes a modelagem matemática do sistema maglev, bem como o fundamento do controle utilizado e demonstrações práticas.

### 2. DESCRIÇÃO DA PLANTA E ESPECIFICAÇÃO DO DESEMPENHO DESEJADO

O controle a ser realizado visa, inicialmente, controlar a posição de uma esfera de aço bem como tornar o sistema estável (deixando-a parada) com erro nulo para entrada de degrau. A planta a ser estudada envolve além da esfera de aço, um eletroímã, o qual irá gerar um campo magnético que consequentemente irá impor uma força eletromagnética sobre a esfera fazendo-a levitar com um controle preciso de posição.

### 3. MODELAGEM MATEMÁTICA E VALIDAÇÃO DO MODELO

#### 3.1 Modelagem do Sensor

A variável quantificada pelo sensor corresponde à distância, sendo que sua resposta resultante é expressa em termos de

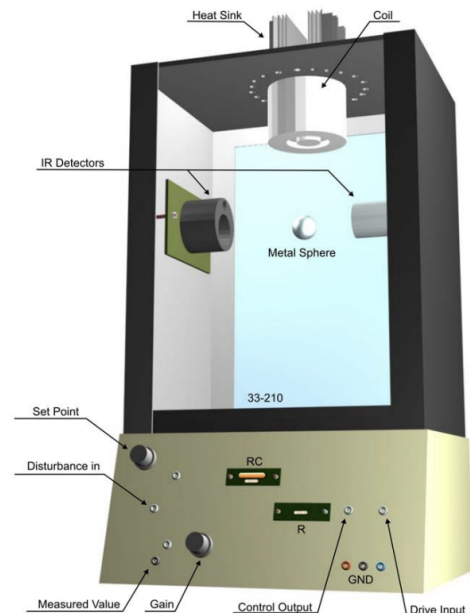


Fig. 1. Figura da planta real estudada, levitador magnético (Maglev). Fonte: Autoral

tensão. Neste contexto, surge a necessidade de um modelo que estabeleça a relação entre a resposta em tensão gerada pelo sensor e a distância efetivamente medida por este último. Devido à proporcionalidade das variáveis, a relação entre elas pode ser expressa pela seguinte função:

$$y = ax + b \quad (1)$$

onde:

- y - resposta do sensor em volts [V]
- x - distância medida em metros [m]
- a - constante de ganho do sensor em volts por metro [V/m]
- b - constante de offset do sensor em volts [V]

#### 3.2 Modelagem da Planta

Inicialmente, procedemos com uma análise das forças atuantes no sistema em questão. A força exercida pela bobina é formulada mediante a seguinte expressão matemática:

$$F_b = k \frac{i^2}{x^2} \quad (2)$$

onde  $i$  representa a intensidade da corrente elétrica,  $x$  denota a distância entre o objeto e a bobina, e  $k$  representa um coeficiente intrínseco ao circuito elétrico. Paralelamente, a força gravitacional que age sobre um corpo é definida como:

$$F_g = mg \quad (3)$$

onde  $m$  corresponde à massa do corpo em questão, e  $g$  representa a aceleração devida à gravidade. Em concordância com os princípios da segunda lei de Newton, podemos estabelecer o seguinte resultado:

$$m\ddot{x} = mg - k \frac{i^2}{x^2} \quad (4)$$

$$f(x, i) = \ddot{x}_2 = g - \frac{k}{m} \frac{i^2}{x^2} \quad (5)$$

### 3.3 Linearização

A teoria de controle linear parte do princípio de que a planta possui comportamento linear. Mas nem sempre isto é verdade. Contudo, para toda função bem comportada em torno de um ponto fixo, para variações pequenas, curva pode ser aproximada por uma reta que passa pelo ponto fixo. Novas equações podem ser obtidas a partir de (7) e (9) de modo a se obter a dinâmica para pequenas variações. Por este motivo as seguintes variáveis são definidas:

$$\delta x = x - x_{eq} \quad (6)$$

$$\delta i = i - i_{eq} \quad (7)$$

$$\delta y = y - y_{eq} \quad (8)$$

onde  $x$ ,  $i$  e  $y$  são as variáveis originais,  $x_{eq}$ ,  $i_{eq}$  e  $y_{eq}$  são valores que a planta assume quando está em uma condição de equilíbrio e  $\delta x$ ,  $\delta i$  e  $\delta y$  as variações em torno do ponto de equilíbrio. Vale ressaltar que o ponto de equilíbrio escolhido deve ser o mais próximo possível das especificações de desempenho desejado, ou seja, os valores que fazem a esfera flutuar a 9 mm, pois fora do ponto de equilíbrio os comportamentos não lineares são mais evidentes. Encontra-se os pontos de equilíbrio igualando a equação 5 a 0.

$$\ddot{x}_2 = g - k \frac{i^2}{x^2} = 0 \rightarrow i = \sqrt{\frac{mg}{k}} x \quad (9)$$

Quaisquer combinações de  $i$  e  $x$  que satisfaçam a relação anterior são considerados pontos de equilíbrio. Os valores de  $m$  e  $k$  não são definidos separadamente, mas sim através da seguinte relação:

$$\frac{k}{m} = 1,2415 \cdot 10^{-3} \quad (10)$$

que é inerente ao sistema. A aceleração da gravidade é tomada por  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Sendo assim, a corrente de entrada para uma saída de equilíbrio  $x_o = 9 \text{ mm}$  é:

$$i_o = \sqrt{\frac{9,81 \text{ m/s}^2}{1,2415 \cdot 10^{-3}}} \cdot 0,009 \text{ m} \quad (11)$$

$$i_o = 0,8 \text{ A} \quad (12)$$

Portanto, a entrada e a saída de equilíbrio estipulados são  $i_o = 0,8 \text{ A}$  e  $x_o = 0,009 \text{ m}$ , respectivamente. Neste ponto, o sistema é linearizado, deslocando-se o referencial, de modo que sua nova origem coincida com este ponto. O modelo linearizado da planta, então, é dado por:

$$\ddot{x} = -[K_i i + a_x x] \quad (13)$$

onde  $K_i$  e  $a_x x$  são coeficientes dados por:

$$K_i = \left[ \frac{\partial}{\partial i} f(x, i) \right]_{x=x_o, i=i_o} \quad (14)$$

$$a_x = \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x, i) \right]_{x=x_o, i=i_o} \quad (15)$$

Tomando as derivadas parciais e aplicando o ponto de operação, tem-se:

$$K_i = \frac{-2ki_o}{mx_o^2} = \frac{-2 \cdot 1,2415 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8 \text{ A}}{(0,009 \text{ m})^2} = -24,5250 \quad (16)$$

$$a_x = \frac{2ki_o^2}{mx_o^3} = \frac{2 \cdot 1,2415 \cdot 10^{-3} \cdot (0,8 \text{ A})^2}{(0,009 \text{ m})^3} = 2180 \quad (17)$$

Aplicando a transformada de Laplace ao modelo linearizado em 13, tem-se a seguinte função de transferência:

$$s^2 X(s) = -K_i I(s) - a_x X(s) \quad (18)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{I(s)} = \frac{-K_i}{s^2 + a_x} \quad (19)$$

Entretanto, a entrada do sistema, na prática, é dada por tensão. Essa relação é descrita por:

$$i(t) = k_1 u(t) \quad (20)$$

onde  $k_1$  é uma constante de proporcionalidade entre a tensão e a corrente do circuito e depende inteiramente das características físicas do mesmo. A equação anterior, no domínio de Laplace, se torna:

$$I(s) = k_1 U(s) \quad (21)$$

Substituindo 21 em 19, tem-se:

$$G(s) = \frac{X(s)}{k_1 U(s)} = \frac{-k_1 K_i}{s^2 + a_x} \quad (22)$$

Por fim, a saída da planta, na prática, é dada por tensão, através da relação:

$$v(t) = k_s x(t) \quad (23)$$

que, em Laplace, é:

$$V(s) = k_s X(s) \quad (24)$$

Substituindo 24 em 22, tem-se:

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{-k_s k_1 K_i}{s^2 + a_x} \quad (25)$$

Os valores das constantes são:

$$k_1 = 1,05 \text{ A/V} \quad (26)$$

$$k_s = 143,48 \text{ V/m} \quad (27)$$

e foram obtidos pelo diagrama de simulação da planta. Ao final, a função de transferência que descreve o comportamento linear da planta em torno do ponto de operação estipulado em  $x_o = 0,009 \text{ m}$  é:

$$G(s) = \frac{3695}{s^2 - 2180} \quad (28)$$

### 3.4 Validação do Modelo

O modelo obtido não é estável e, portanto, não é possível aplicar uma entrada de tensão sem que a saída divirja. Sendo assim, o modelo será validado juntamente com um controle PD. Para o mesmo, o lugar das raízes da planta  $G(s)$  foi analisado a fim de estipular um controlador PD do tipo:

$$C(s) = K_d(s + \frac{K_p}{K_d}) \quad (29)$$

onde  $K_d$  é o ganho do controlador e  $\frac{K_p}{K_d}$  é o zero do mesmo. O lugar das raízes da planta está presente na figura abaixo.

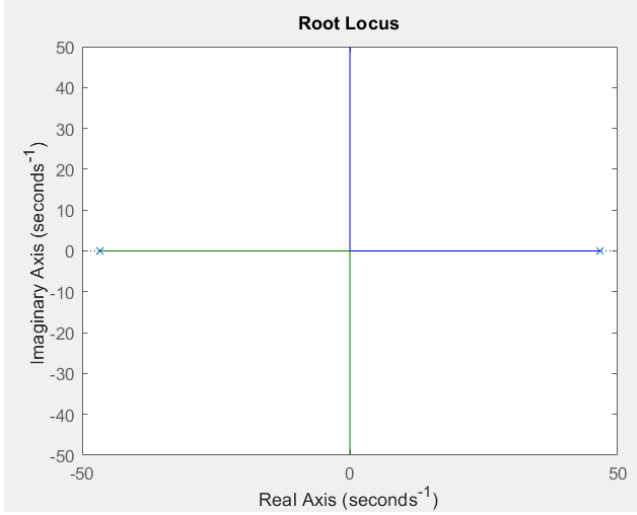


Fig. 2. Lugar das raízes da planta  $G(s)$ . Fonte: Autoral, produzida com *MATLAB*.

Sendo assim, a fim de estabilizar a planta, foi estipulado um zero em  $s = -20$  e um ganho de 0,2, que resultou no seguinte lugar das raízes, com o deslocamento do polo instável para  $s = -17,5$ . O outro polo é negativo, então, para fins de validação, já está satisfatório.

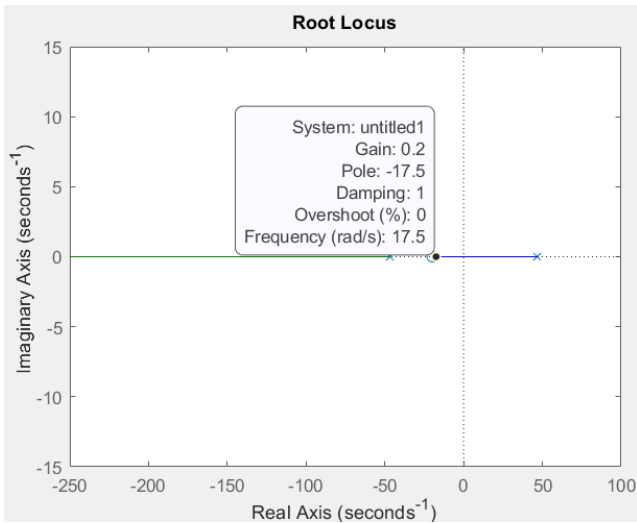


Fig. 3. Lugar das raízes da planta  $G(s)$  com compensador  $C(s)$ . Fonte: Autoral, produzida com *MATLAB*.

Portanto, tem-se:

$$K_i = 0,2 \quad (30)$$

$$\frac{K_p}{K_i} = 20 \rightarrow K_p = 4 \quad (31)$$

Ao final, o sistema de validação será correspondente à seguinte figura:

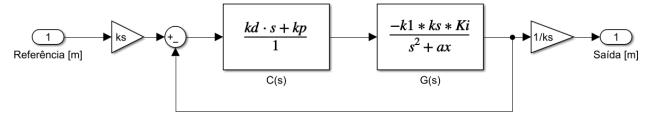


Fig. 4. Diagrama em blocos do sistema realimentado para validação. Fonte: Autoral, produzida com *SIMULINK*.

O sistema foi simulado para uma entrada de referência de onda quadrada com 2 mm de amplitude 1 Hz de frequência. O resultado da simulação está presente na figura 5. Vale lembrar que a saída está em torno do ponto de operação.

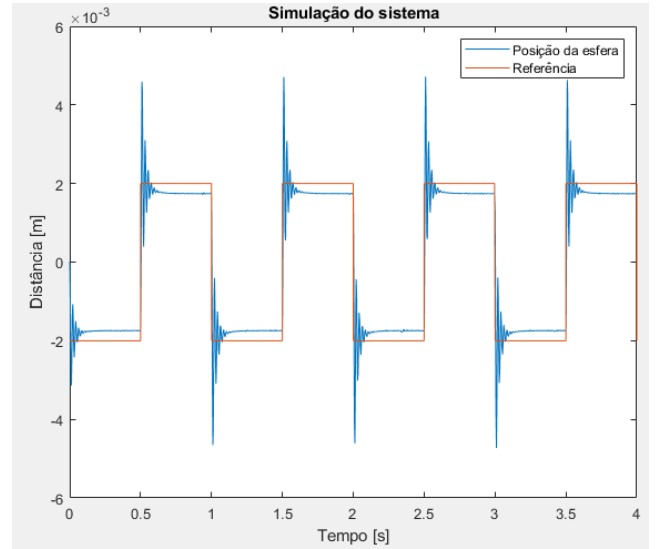


Fig. 5. Resultado de simulação. Fonte: Autoral, produzida com *SIMULINK*.

Em seguida, o teste prático foi realizado implementando o mesmo compensador PD utilizado na simulação. O resultado do teste não foi coletado, mas se mostrou bastante satisfatório em comparação com a planta simulada, ou seja, a função de transferência em 28 se mostra capaz de representar o sistema real.

## 4. PROJETO DO CONTROLADOR

A princípio, buscamos realizar o controlador proporcional, integrativo e derivativo (PID), por garantir erro nulo para entrada em degrau e por ser amplamente difundido nas indústrias e sistemas de controle em geral. A seguir será explicitado as tentativas para obter esse controlador.

### 4.1 Primeira tentativa

Para obtenção dos parâmetros foi plotado o lugar das raízes da planta em malha fechada, figuras 6 e 7. Com o lugar das raízes traçados, foi utilizado o *sisotool* para

realizar a escolha da localização dos polos e ganho do controlador PID, com isso realizamos o cancelamento de polos mais instáveis, os polos localizados mais a direita do círculo unitário, e escolhemos um ganho arbitrário para sair da instabilidade e obter uma resposta satisfatória. Por fim, implementamos o controle na planta e visualizamos que a resposta obtida na planta não condizia com o esperado visto no *MatLab*, independente da referência inserida, o carrinho não se mexia nada, consequentemente, acreditamos que o ganho do  $K_p$  estava baixo e fomos aumentando de forma empírica, após diversos aumentos no  $K_p$ , o carrinho começou a se mexer. Sendo assim, a planta modelada era equivalente com o sistema em malha aberta, mas em malha fechada o comportamento era diferente. De forma a elucidar o ocorrido, assumimos de que a falha ocorreu devido aos coeficientes de atrito  $C_1$  e  $C_2$ , portanto, aumentamos esses parâmetros, empiricamente, até obter uma resposta satisfatória para iniciar novamente o processo de controle mas com uma nova modelagem da planta.

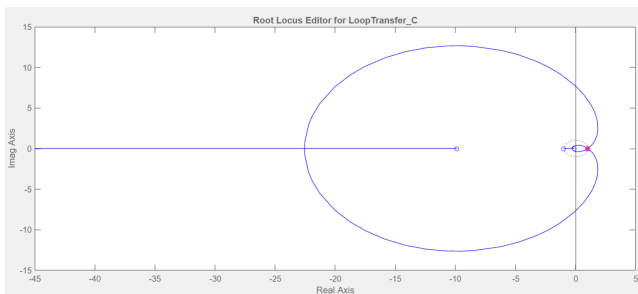


Fig. 6. Lugar da raízes da malha fechada da planta. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

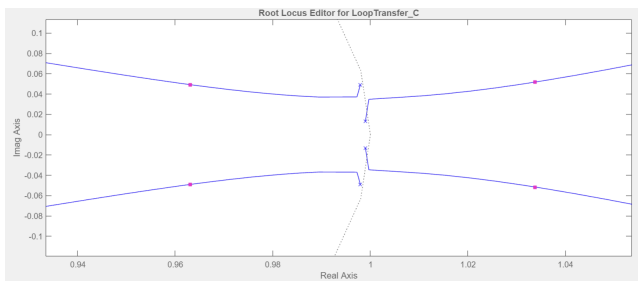


Fig. 7. Lugar da raízes da malha fechada da planta aproximada na extremidade do círculo unitário. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

#### 4.2 Segunda tentativa

Sequencialmente após a correção dos parâmetros  $C_1$  e  $C_2$ , de forma impirica, recalculamos o modelo de espaço de estados utilizando a equação X.

Posteriormente foi realizado um novo estudo sobre o lugar das raízes em malha fechada, figura 8, em que aproximando para próximo da extremidade do círculo unitário temos a figura 9. Em que é possível perceber que a característica da resposta do modelo é fortemente marcada por dois pares de polos conjugados próximos a extremidade do círculo unitário levando para a instabilidade do sistema, como mostra a resposta ao degrau do sistema, figura 10.

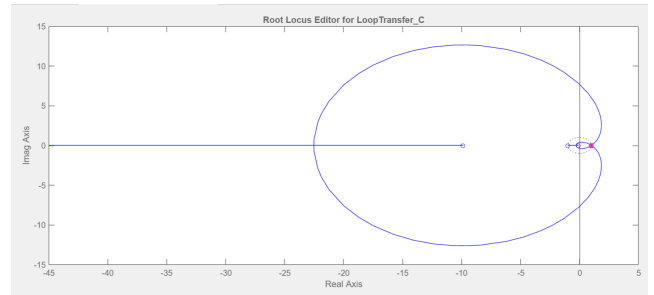


Fig. 8. Lugar da raízes da malha fechada da planta atualizada. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

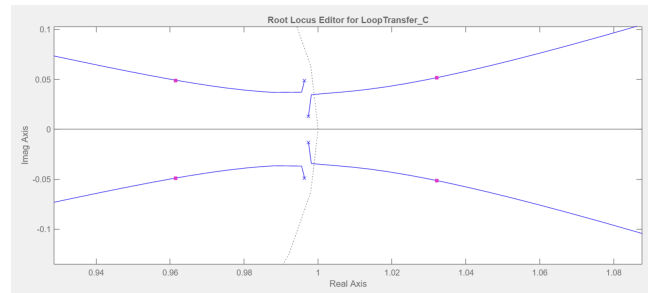


Fig. 9. Lugar da raízes da malha fechada da planta atualizada aproximada na extremidade do círculo unitário. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

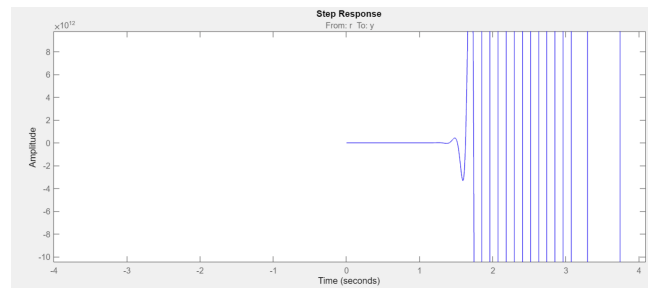


Fig. 10. Resposta ao degrau da planta atualizada, sem controlador, indo para a instabilidade. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

Com isso, foi inserido o integrador e um par de zeros conjugados, controlador PID, próximo ao par de polos conjugados mais a direita do círculo unitário com a finalidade de atraí-los para dentro do círculo unitário, estabilizando o sistema e melhorando a margem de ganho. Nesse processo visualizamos que o integrador colocado fazia com que o lugar das raízes do segundo par de polos conjugados da planta direcionasse para a instabilidade, portanto, procuramos alocar o par de zeros conjugados de forma a garantir a não instabilidade do primeiro par de polos e de aumentar a margem de ganho em relação ao segundo par de polos, para tal, o par de zeros deveria se localizar entre ambos os polos, mas mais próximo do primeiro. O lugar das raízes do controlador é explicitado pelas figuras 11 e 12.

Posteriormente, foi ajustado o ganho do controlador visualizando a resposta ao degrau do sistema com controlador, tendo como foco que o tempo de acomodação fosse menor do que 4 segundos e principalmente que não houvesse sobressinal, pois como a planta possui uma margem de apenas 3 centímetros, sendo que nos 3 centímetros possui

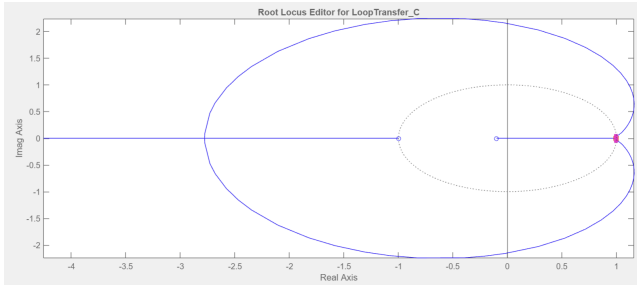


Fig. 11. Lugar da raízes da malha fechada da planta atualizada com controlador PID. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

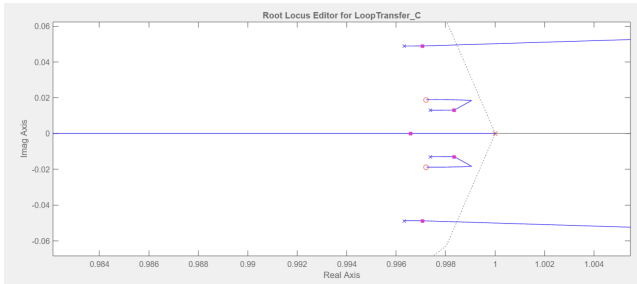


Fig. 12. Lugar da raízes da malha fechada da planta atualizada com controlador PID aproximada na extremidade do círculo unitário. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

uma chave fim de curso em que corta a alimentação do motor, o sobressinal atrapalha muito o controle, a reposta ao degrau obtida é representada pela curva 'Modelado' na figura 13. Por fim, a equação do controlador PID obtido está explicitada na equação 32.

$$C = \frac{0,27951(z^2 - 1,994z + 0,9948)}{(z - 1)} \quad (32)$$

No final, o controlador foi implementado e aplicado um degrau unitário na planta com o objetivo de comparar o resultado real com o esperado pela modelagem, essa comparação é representada pela figura 13.

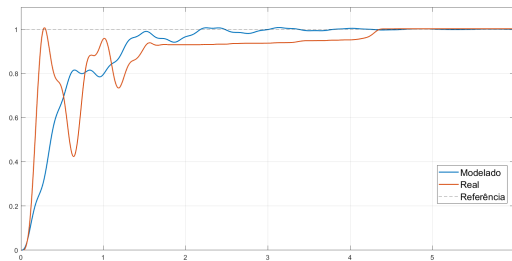


Fig. 13. Comparação da resposta ao degrau em MF da planta em relação ao modelo, com controlador PID. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

Nessa comparação é possível perceber uma dinâmica aproximada entre os modelos, todavia, há algumas divergências nas amplitudes do movimento do período transitório e demora para estabilização no regime permanente.

## 5. RESULTADOS EXPERIMENTAIS EM MALHA FECHADA

Essa seção testa o controle obtido em diversas situações e entradas diferentes na planta, esses testes são as figuras 14, 15, 16, 17 e 18.

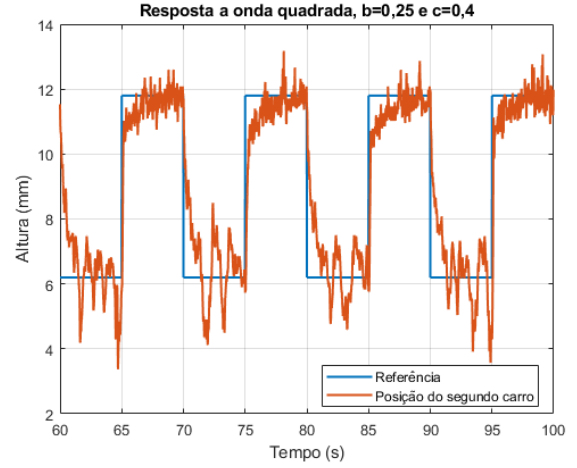


Fig. 14. Resposta a onda quadrada com  $A=5,29\text{mm}$  e  $F=0,1\text{Hz}$ , e filtro com  $b=0,25$  e  $c=0,4$ . Fonte: autoral, produzido com *matlab* por meio dos dados coletados na planta.

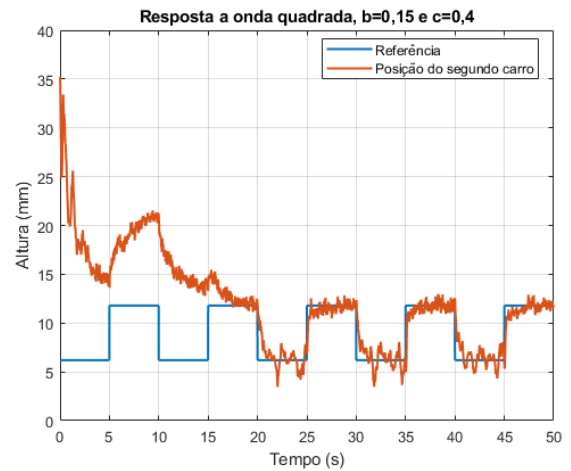


Fig. 15. Resposta a onda quadrada com  $A=5,29\text{mm}$  e  $F=0,1\text{Hz}$ , e filtro com  $b=0,15$  e  $c=0,4$ . Fonte: autoral, produzido com *matlab* por meio dos dados coletados na planta.

Analisando os testes exemplificados, vemos que no início a resposta é muito afetada pelo fato da planta exigir que a esfera de aço parte de uma posição favorável para a força magnética atuar, com isso a esfera era colocada manualmente e, portanto, sujeita a diversos erros humanos de precisão como foi visto, mas após a esfera ser posicionada ela entra para o controle da planta. Ademais, quando a esfera entra na região de controle, é visto que o controle foi eficaz, pois foi capaz de atingir a referência de forma rápida, mas oscilava bem pouco em torno dela devido as características intrínsecas a planta.

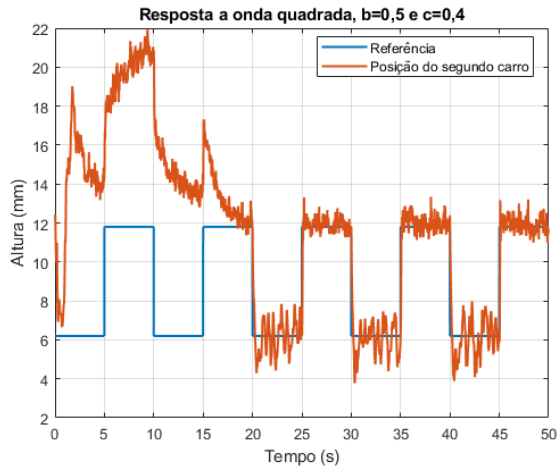


Fig. 16. Resposta a onda quadrada com  $A=5,29\text{mm}$  e  $F=0,1\text{Hz}$ , e filtro com  $b=0,5$  e  $c=0,4$ . Fonte: autoral, produzido com *matlab* por meio dos dados coletados na planta.

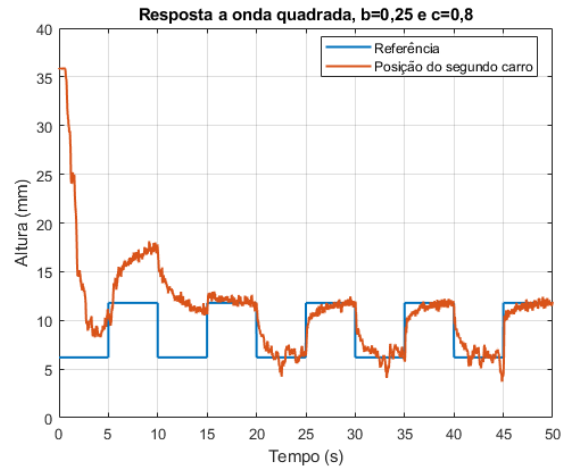


Fig. 18. Resposta a onda quadrada com  $A=5,29\text{mm}$  e  $F=0,1\text{Hz}$ , e filtro com  $b=0,25$  e  $c=0,8$ , carro 1 e 2 com 4 pesos. Fonte: autoral, produzido com *matlab* por meio dos dados coletados na planta.

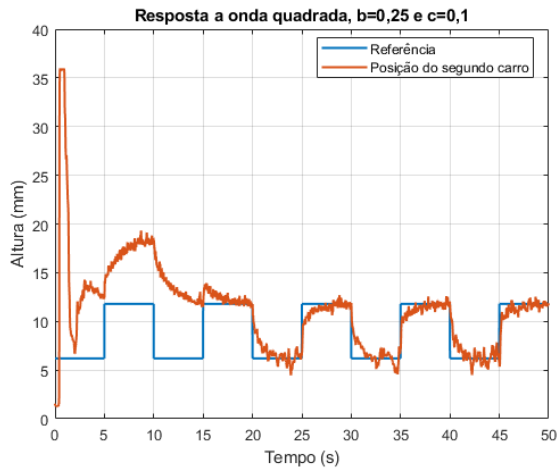


Fig. 17. Resposta a onda quadrada com  $A=5,29\text{mm}$  e  $F=0,1\text{Hz}$ , e filtro com  $b=0,25$  e  $c=0,1$ , carro 1 e 2 com 4 pesos. Fonte: autoral, produzido com *matlab* por meio dos dados coletados na planta.

## 7. REFERÊNCIAS

- Notas de aula
- Manual da planta

## 6. CONCLUSÃO

Por fim, vale ressaltar que o projeto envolveu o estudo da modelagem e controle de uma planta linear e serviu de base para o estudo prático das teorias de controle estudadas ao longo de disciplinas de semestres anteriores. A modelagem envolveu o uso de uma abordagem fenomenológica para a decomposição das forças do sistema e a partir disso os parâmetros da planta foram encontrados com a realização de testes envolvendo a troca de molas, pesos e a fixação dos carrinhos. Depois de modelar o sistema, foi desenvolvido um controlador com base no método do lugar das raízes com o *software Matlab* e com isso os parâmetros da resposta foram aprimorados para maior confiabilidade do modelo. Com isso, os parâmetros do PID foram implementados de forma discreta no controlador do sistema massa mola e diversos testes com entradas diferentes foram feitos.