

## Grupo 3 - Módulo 1 - Massa Mola

Felipe Nery Barcelos Araújo (2020021190) \*  
Gustavo Vieira Barbosa (2020021352) \*  
Matheus Marques Gonçalves de Paula (2020068995) \*

\* Engenharia de Controle e Automação,  
Universidade Federal de Minas Gerais, MG  
(e-mails: felipenery@ufmg.br, gustavovbarbosa@ufmg.br,  
mmgp@ufmg.br)

---

**Abstract:** These instructions give you guidelines for preparing papers for IFAC technical meetings. Please use this document as a template to prepare your manuscript. For submission guidelines, follow instructions on paper submission system as well as the event website.

*Keywords:* Five to ten keywords, preferably chosen from the IFAC keyword list.

---

### 1. INTRODUÇÃO

Os sistemas massa-mola são capazes de representar uma ampla gama de fenômenos físicos e engenharia. De forma a desempenhar um papel fundamental na modelagem desses fenômenos e sistemas mecânicos complexos, tais como: suspensões veiculares, sistemas de suspensão de edifícios, sistemas biomecânicos e muitos outros o sistema massa-mola representa com elevada exatidão. Afinal, com uma modelagem precisa, o sistema é capaz de realizar controle garantindo o desempenho e a estabilidade desejada.

Ao longo desse relatório será visto um estudo focado no controle de um sistema de massa-mola composto por duas massas interconectadas por duas molas, como mostra a figura 1, um problema clássico de controle de sistemas dinâmicos.

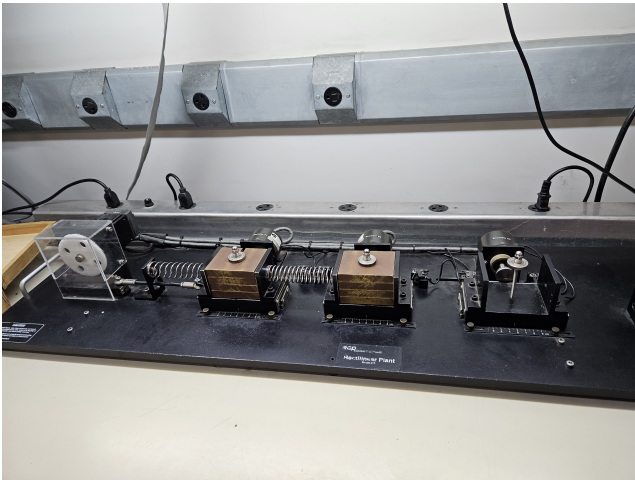


Fig. 1. Figura da planta real estudada, composta por duas molas de diferentes coeficientes e massas de 500 gramas cada. Fonte: Autoral

Com isso, nas seções subsequentes, exploraremos em detalhes a modelagem matemática do sistema massa-mola, bem como o fundamento do controle utilizado e demonstrações práticas.

### 2. DESCRIÇÃO DA PLANTA E ESPECIFICAÇÃO DO DESEMPENHO DESEJADO

Next we see a few subsections.

#### 2.1 Descrição da planta e especificação do desempenho desejado

Faça tudo

### 3. MODELAGEM MATEMÁTICA E VALIDAÇÃO DO MODELO

#### 3.1 Modelagem matemática

Após a definição do sistema em espaço de estados, deve-se encontrar os parâmetros  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $m_1$  e  $m_2$ . Para isso, analisa-se um sistema simples com um carro e uma mola, cuja equação característica é representada por:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \quad (1)$$

Esse é um sistema de segunda ordem, que é representado tipicamente por:

$$s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2 = 0 \quad (2)$$

onde a frequência natural  $\omega_n$  e o amortecimento  $\zeta$  podem ser encontrados facilmente através de respostas ao degrau. Comparando os termos de ambas equações, tem-se:

$$\frac{c}{m} = 2\omega_n\zeta \quad (3)$$

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 \quad (4)$$

Sendo assim, tem-se duas equações e três variáveis. Portanto, foram realizados quatro testes com duas diferentes partes da planta. O primeiro teste consistiu na aplicação de um degrau de 2,5 cm no sistema com a mola  $k_1$  e o carro  $m_1$  com adição de 2 kg de massa. O segundo teste consistiu na aplicação desse mesmo degrau, mas sem massa adicional no carro. Dessa forma, na saídas de ambos os

testes, verifica-se o amortecimento e a frequência natural, seguindo as equações 3 e 4. Tem-se, portanto, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{c_1}{m_1 + 2} = 2\omega_{n1}\zeta_1 \\ \frac{k_1}{m_1 + 2} = \omega_{n1}^2 \\ \frac{k_1}{m_1} = \omega_{n2}^2 \end{cases} \quad (5)$$

Calcula-se, a frequência natural e o amortecimento dos testes 1 e 2 utilizando analisando a resposta ao degrau, juntamente da função *findpeaks* do MATLAB. Para o amortecimento, as amplitudes dos picos caem exponencialmente através da relação  $e^{\omega_n \zeta}$ . Sendo assim, os valores dessas foram submetidos a uma linearização através de um logaritmo natural. O resultado da linearização é uma função de primeira ordem, onde o coeficiente angular é igual a  $\omega_n \zeta$ . Os gráficos das respostas ao degrau dos testes 1 e 2 estão presentes nas figuras 2 e 3. Os gráficos das amplitudes linearizadas sobre o tempo estão presentes nas figuras 4 e 5.

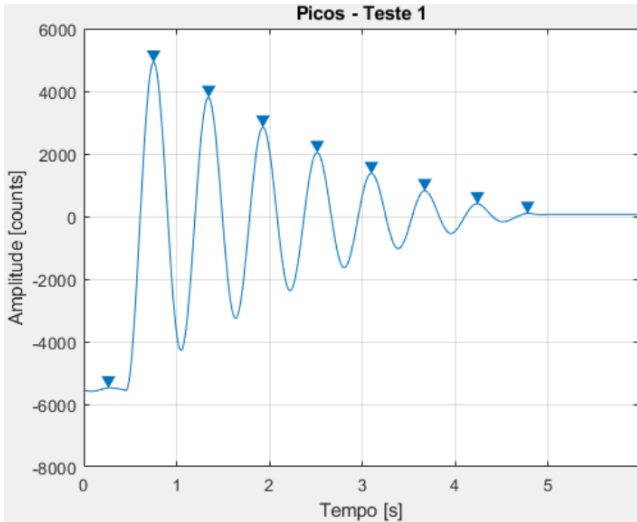


Fig. 2. Resposta ao degrau do teste 1. Fonte: Autoral.

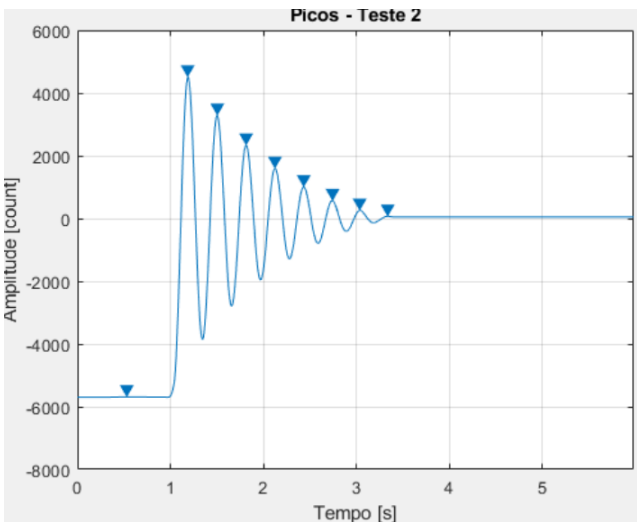


Fig. 3. Resposta ao degrau do teste 2. Fonte: Autoral.

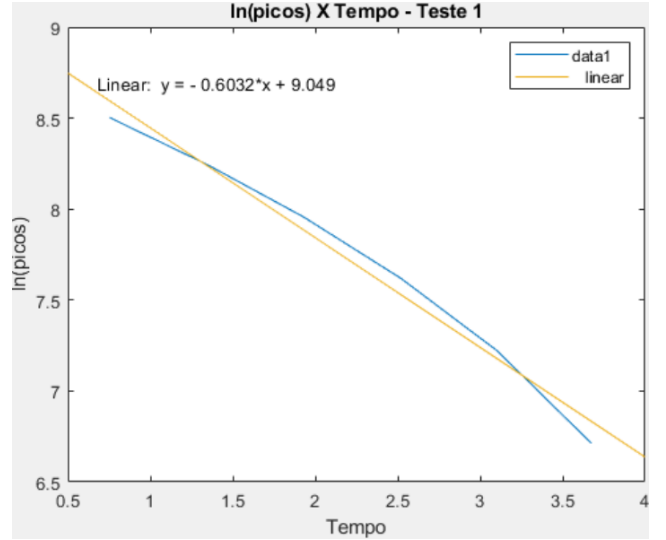


Fig. 4. Amplitudes linearizadas do teste 1. Fonte: Autoral.

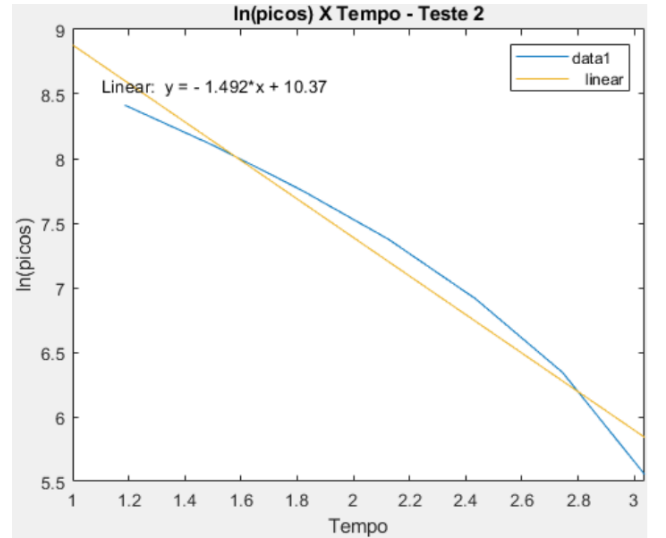


Fig. 5. Amplitudes linearizadas do teste 2. Fonte: Autoral.

Portanto, através dos gráficos da figura 2, com ajuda do MATLAB, foi obtido uma frequência natural de:

$$\omega_{n1} = 10,5956 \quad (6)$$

O resultado da regressão linear da figura 4 permite dizer que:

$$0,6032 = \omega_{n1}\zeta_1 \rightarrow \zeta_1 = \frac{0,6032}{\omega_{n1}} = 0,0569 \quad (7)$$

O mesmo procedimento foi feito com os resultados do teste 2, presentes nas figuras 3 e 5.

$$\omega_{n2} = 19,6965 \quad (8)$$

$$1,492 = \omega_{n2}\zeta_2 \rightarrow \zeta_2 = \frac{1,492}{\omega_{n2}} = 0,0757 \quad (9)$$

Com os valores de  $\omega_{n1}$ ,  $\omega_{n2}$ ,  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  em mãos, é possível resolver o sistema 5

$$\begin{cases} \frac{c_1}{m_1 + 2} = 2\omega_{n1}\zeta_1 \\ \frac{m_1 + 2}{k_1} = \omega_{n1}^2 \\ \frac{k_1}{m_1} = \omega_{n2}^2 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \frac{c_1}{m_1 + 2} = 2 \cdot 10,5956 \cdot 0,0569 \\ \frac{m_1 + 2}{k_1} = 10,5956^2 \\ \frac{k_1}{m_1} = 19,6965^2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} m_1 = 0,8145 \\ c_1 = 3,3954 \\ k_1 = 315,9872 \end{cases} \quad (12)$$

### 3.2 Validação do modelo

#### Modelo 3

## 4. PROJETO DO CONTROLADOR

A princípio, buscamos realizar o controlador proporcional, integrativo e derivativo (PID), por garantir erro nulo para entrada em degrau e por ser amplamente difundido nas indústrias e sistemas de controle em geral. A seguir será explicitado as tentativas para obter esse controlador.

### 4.1 Primeira tentativa

Para obtenção dos parâmetros foi plotado o lugar das raízes da planta em malha fechada, figura X. Com o lugar das raízes traçados, foi utilizado o *sisotool*

### 4.2 Segunda tentativa

Sequencialmente após a correção dos parâmetros C1 e C2, de forma empírica, obtendo as seguintes matrizes do espaço de estados: Posteriormente foi realizado um novo estudo sobre o lugar das raízes em malha fechada, figura 6, em que aproximando para próximo da origem temos a figura 7. Em que é possível perceber que a característica da resposta do modelo é fortemente marcada por dois pares de polos conjugados próximos a origem levando para a instabilidade do sistema, como mostra a resposta ao degrau do sistema, figura 8.

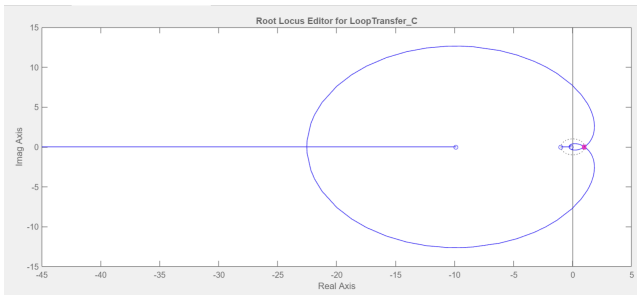


Fig. 6. Lugar das raízes da malha fechada da planta atualizada. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

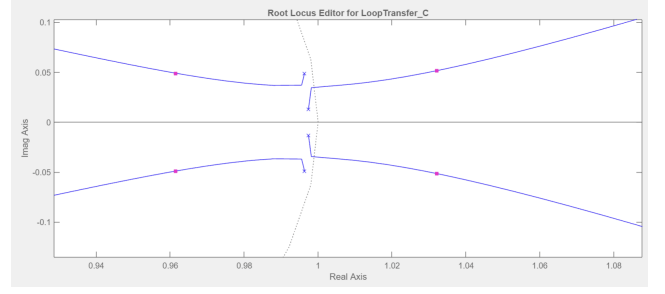


Fig. 7. Lugar das raízes da malha fechada da planta atualizada aproximada na origem. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

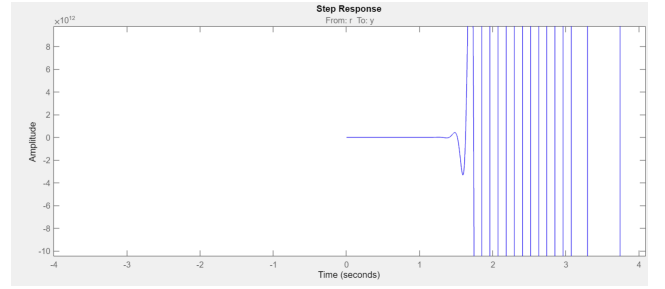


Fig. 8. Resposta ao degrau da planta atualizada. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

## 5. RESULTADOS EXPERIMENTAIS EM MALHA FECHADA

## 6. CONCLUSÃO

Nery vai concluir o trabalho pra gente!

## REFERENCES

Appendix A. A SUMMARY OF LATIN GRAMMAR

Appendix B. SOME LATIN VOCABULARY