

# Grupo 3 - Módulo 1 - Massa Mola

Felipe Nery Barcelos Araújo (2020021190)\*  
Gustavo Vieira Barbosa (2020021352)\*  
Matheus Marques Gonçalves de Paula (2020068995)\*

\* Engenharia de Controle e Automação,  
Universidade Federal de Minas Gerais, MG  
(e-mails: felipenergy@ufmg.br, gustavovbarbosa@ufmg.br,  
mmgp@ufmg.br)

**Abstract:** Relatório do controle de posição de um sistema massa mola com dois graus de liberdade, com molas de diferentes coeficientes elásticos.

**Keywords:** massa-mola, controle, posição

## 1. INTRODUÇÃO

Os sistemas massa-mola são capazes de representar uma ampla gama de fenômenos físicos e engenharia. De forma a desempenhar um papel fundamental na modelagem desses fenômenos e sistemas mecânicos complexos, tais como: suspensões veiculares, sistemas de suspensão de edifícios, sistemas biomecânicos e muitos outros o sistema massa-mola representa com elevada exatidão. Afinal, com uma modelagem precisa, o sistema é capaz de realizar controle garantindo o desempenho e a estabilidade desejada.

Ao longo desse relatório será visto um estudo focado no controle de um sistema de massa-mola composto por duas massas interconectadas por duas molas, como mostra a figura 1, um problema clássico de controle de sistemas dinâmicos.

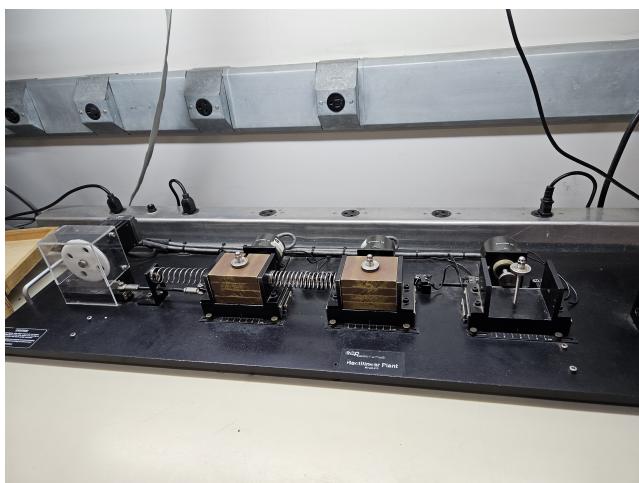


Fig. 1. Figura da planta real estudada, composta por duas molas de diferentes coeficientes e massas de 500 gramas cada. Fonte: Autoral

Com isso, nas seções subsequentes, exploraremos em detalhes a modelagem matemática do sistema massa-mola, bem como o fundamento do controle utilizado e demonstrações práticas.

## 2. DESCRIÇÃO DA PLANTA E ESPECIFICAÇÃO DO DESEMPENHO DESEJADO

O controle a ser realizado visa, inicialmente, controlar a posição do segundo carrinho bem como tornar o sistema estável, erro nulo para entrada de degrau, tempo de acomodação menor do que 4 segundos e sobressinal até 20%. A planta a ser estudada envolve dois carrinhos de massas aproximadamente iguais, com duas molas de constantes elásticas diferentes, uma presa ao carrinho 1 e a uma extremidade fixa e outra entre ambos os carrinhos. O sistema possui dois graus de liberdade e o interesse do projeto é em controlar a posição do carrinho 2.

## 3. MODELAGEM MATEMÁTICA E VALIDAÇÃO DO MODELO

### 3.1 Modelagem matemática

Para obter o modelo da planta a ser controlada foi utilizada uma abordagem fenomenológica com decomposição das forças por meio da Mecânica Newtoniana. A imagem abaixo mostra um esquema da planta com os carrinhos, as molas entre eles e a superfície sólida na extremidade.

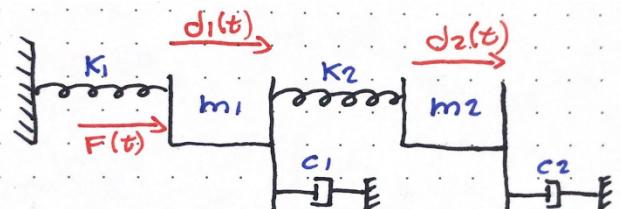


Fig. 2. Esquema planta a ser estudada com os carrinhos, molas e amortecimento envolvidos. Fonte: Autoral

À partir desse modelo, foi realizada uma decomposição de forças para posterior obtenção do modelo em espaço de estados do sistema. Considerou-se uma força  $F(t)$  exercida no carrinho 1 e por meio dela se obteve uma reação contrária das molas e do amortecedor como representado pelo esquema abaixo.

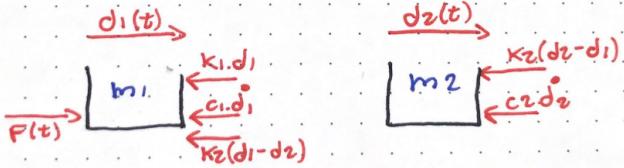


Fig. 3. Decomposição das forças para obtenção das equações. Fonte: Autoral

Com a decomposição das forças como mostrado na figura 3 foi feita uma soma vetorial nos corpos para obter a dinâmica da planta para os carrinhos.

$$F(t) - c_1 \dot{d}_1 - k_1(d_1 - d_2) = m_1 \ddot{d}_1 \quad (1)$$

$$-c_2 \dot{d}_2 - k_1(d_2 - d_1) - k_2 d_2 = m_2 \ddot{d}_2 \quad (2)$$

Para encontrar o modelo em espaço de estados, foi preciso primeiramente escolher os estados da planta. Nesse caso foram considerados  $d_1$ ,  $\dot{d}_1$ ,  $d_2$ ,  $\dot{d}_2$ , como  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  respectivamente. Com isso, chegou-se ao modelo da planta em espaço de estados.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(k_1 + k_2) & -c_1 & k_2 & 0 \\ \frac{m_1}{m_1} & \frac{m_1}{m_1} & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & 0 & -c_2 \\ \frac{m_2}{m_2} & \frac{m_2}{m_2} & 0 & \frac{-c_2}{m_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} f(t) \quad (3)$$

$$Y = [0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Nesse caso não é preciso linearizar o modelo, porque ele é linear e como mostrado pela equação 3, pode ser escrito na forma padrão do espaço de estados. Por fim, através do software Matlab, a planta foi discretizada com um tempo de amostragem de 0,001768 segundos para se obter uma relação mais confiável e precisa.

O próximo passo da modelagem foi encontrar os valores das constantes elásticas das molas e os coeficientes de amortecimento atuando sobre cada carro. Para fazer isso quatro testes específicos foram realizados com o sistema sem a aplicação da força  $F(t)$  do motor. Em todos os testes um dos carro foi fixado e o peso dentro de cada um foi variado entre cheio e vazio. A imagem abaixo ilustra um exemplo de m dos testes com a decomposição das forças.

Com a decomposição das forças e considerando que ao soltar os carrinhos da posição de 2,5 cm o sistema sofre uma resposta impulsiva, chega-se à equação 5 que descreve a planta para os parâmetros de forma genérica.

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \quad (5)$$

Após a definição do sistema em espaço de estados, deve-se encontrar os parâmetros  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $m_1$  e  $m_2$ . Para

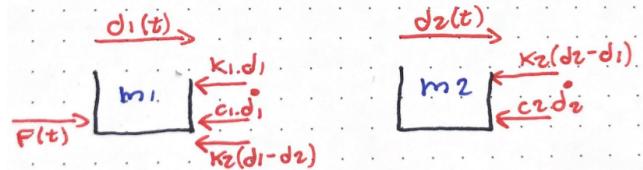
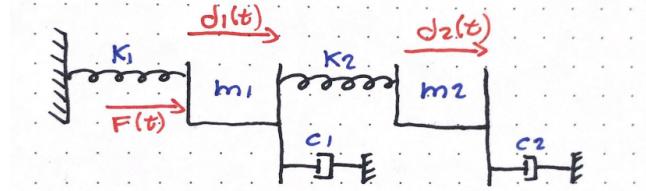


Fig. 4. Exemplo da aplicação do teste para uma mola, amortecimento e massa genéricos. Fonte: Autoral

isso, analisa-se um sistema simples com um carro, um coeficiente de atrito e uma mola, cuja equação característica é representada por:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \quad (6)$$

Esse é um sistema de segunda ordem, que é representado tipicamente por:

$$s^2 + 2\omega_n \zeta s + \omega_n^2 = 0 \quad (7)$$

onde a frequência natural  $\omega_n$  e o amortecimento  $\zeta$  podem ser encontrados facilmente através de respostas ao degrau. Comparando os termos de ambas equações, tem-se:

$$\frac{c}{m} = 2\omega_n \zeta \quad (8)$$

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 \quad (9)$$

Sendo assim, tem-se duas equações e três variáveis. Portanto, foram realizados quatro testes aplicados a duas diferentes partes da planta. Dois testes são realizados com a mola  $k_1$  e o carro de massa  $m_1$ , onde o primeiro teste consistiu na aplicação de um degrau de 2,5 cm na entrada, com uma massa adicional de 2 kg sobre o carro. O segundo, por sua vez, consistiu na aplicação do mesmo degrau, mas sem a massa adicional sobre o carro. Do primeiro teste, obtém-se  $\omega_{n1}$  e  $\zeta_1$ , já do segundo, obtém-se  $\omega_{n2}$  e  $\zeta_2$ . Os mesmos testes são realizados sobre a mola  $k_2$  conectado ao carro de massa  $m_2$  a fim de obter  $\omega_{n3}$ ,  $\zeta_3$ ,  $\omega_{n4}$  e  $\zeta_4$ . Pelas respostas ao degrau, a frequência natural pode ser encontrada calculando o período entre dos picos, o que se torna muito fácil com ajuda de uma calculadora. O amortecimento pode ser encontrado analisando através da função `findpeaks` do MATLAB aplicado à resposta. Como as amplitudes dos picos caem exponencialmente através da relação  $e^{-\omega_n \zeta}$ , seus valores foram submetidos a uma linearização através de um logaritmo natural. O resultado da linearização é uma função de primeira ordem, onde o coeficiente angular é igual a  $-\omega_n \zeta$ . Portanto, é possível obter o coeficiente de amortecimento através da frequência natural. Com os valores do coeficiente de amortecimento e da frequência natural em mãos, o seguinte sistema de equações pode ser resolvido para calcular os parâmetros dos testes 1 e 2, que foram submetidos na primeira parte da planta:

$$\begin{cases} \frac{c_1}{m_1+2} = 2\omega_{n1}\zeta_1 \\ \frac{k_1}{m_1+2} = \omega_{n1}^2 \\ \frac{k_1}{m_1} = \omega_{n2}^2 \end{cases} \quad (10)$$

Os testes 3 e 4 foram submetidos na segunda parte da planta e, da mesma forma, que os testes 1 e 2, resultam no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{c_2}{m_2+2} = 2\omega_{n3}\zeta_3 \\ \frac{k_2}{m_2+2} = \omega_{n3}^2 \\ \frac{k_2}{m_2} = \omega_{n4}^2 \end{cases} \quad (11)$$

### 3.2 Testes 1 e 2

Os gráficos das respostas ao degrau dos testes 1 e 2 estão presentes nas figuras 5 e 7. Os gráficos das amplitudes linearizadas sobre o tempo estão presentes nas figuras 6 e 8.

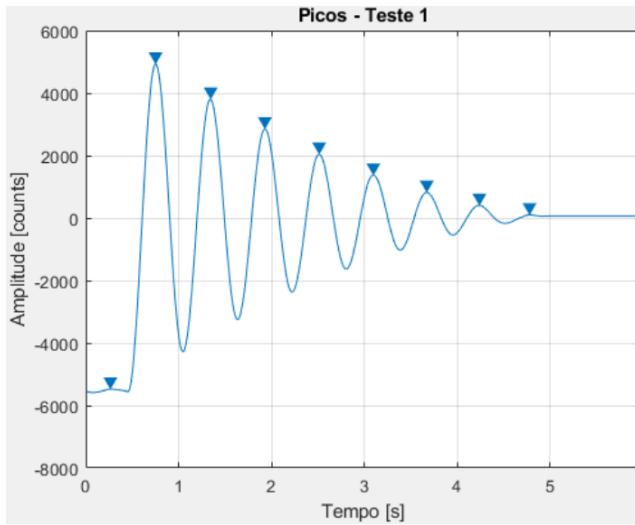


Fig. 5. Resposta ao degrau do teste 1. Fonte: Autoral.

Portanto, através dos gráficos da figura 5, com ajuda do MATLAB, foi obtido uma frequência natural de:

$$\omega_{n1} = 10,5956 \quad (12)$$

O resultado da regressão linear da figura 6 permite dizer que:

$$0,6032 = \omega_{n1}\zeta_1 \rightarrow \zeta_1 = \frac{0,6032}{\omega_{n1}} = 0,0569 \quad (13)$$

O mesmo procedimento foi feito com os resultados do teste 2, cujo resultados estão presentes nas figuras 7 e 8.

$$\omega_{n2} = 19,6965 \quad (14)$$

$$1,492 = \omega_{n2}\zeta_2 \rightarrow \zeta_2 = \frac{1,492}{\omega_{n2}} = 0,0757 \quad (15)$$

Com os valores de  $\omega_{n1}, \omega_{n2}, \zeta_1$  e  $\zeta_2$  em mãos, é possível resolver o sistema 10

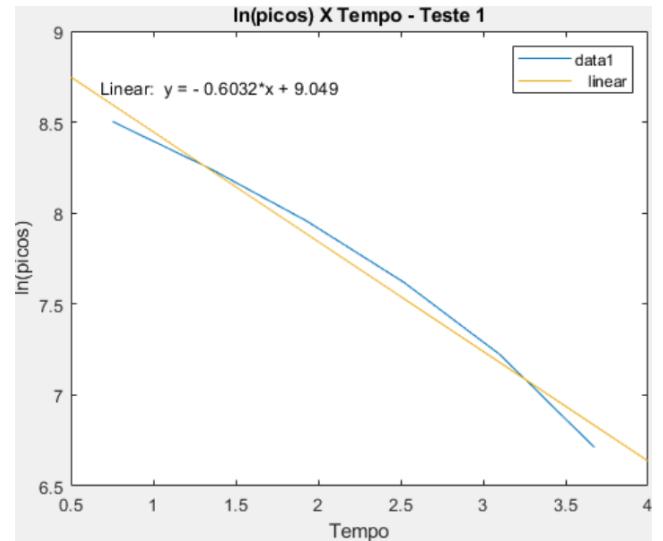


Fig. 6. Amplitudes linearizadas do teste 1. Fonte: Autoral.

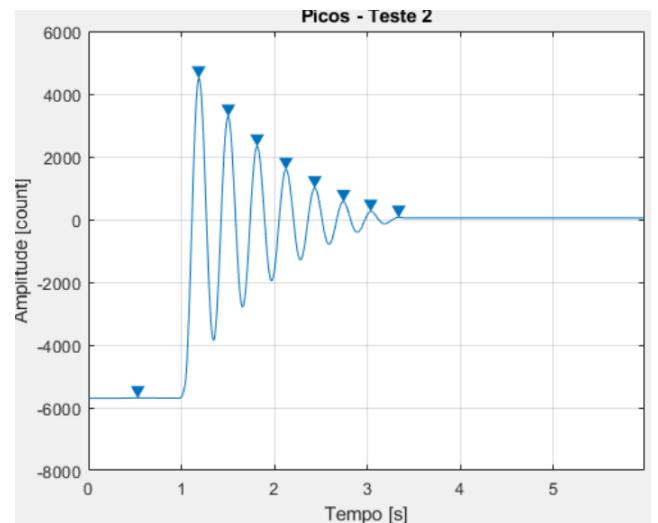


Fig. 7. Resposta ao degrau do teste 2. Fonte: Autoral.

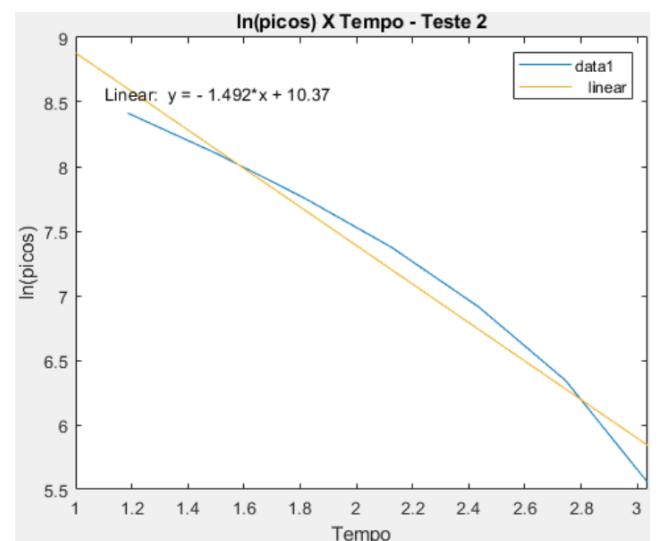


Fig. 8. Amplitudes linearizadas do teste 2. Fonte: Autoral.

$$\begin{cases} \frac{c_1}{m_1 + 2} = 2\omega_{n1}\zeta_1 \\ \frac{k_1}{m_1 + 2} = \omega_{n1}^2 \\ \frac{k_1}{m_1} = \omega_{n2}^2 \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} \frac{c_1}{m_1 + 2} = 2 \cdot 10,5956 \cdot 0,0569 \\ \frac{k_1}{m_1 + 2} = 10,5956^2 \\ \frac{k_1}{m_1} = 19,6965^2 \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} m_1 = 0,92kg \\ c_1 = 2,143Ns/m \\ k_1 = 356,5N/m \end{cases} \quad (18)$$

### 3.3 Testes 3 e 4

Após a aplicação do degrau de 2,5 cm ao sistema, a saída foi obtida e está presente na figura 9. Além disso, houve a linearização e regressão da amplitude dos picos da resposta ao degrau, assim como descrito nos testes anteriores, e está presente na figura 10. Para o teste 4, a resposta ao degrau está presente na figura 11 e a linearização dos picos juntamente da regressão linear está presente na figura 12.

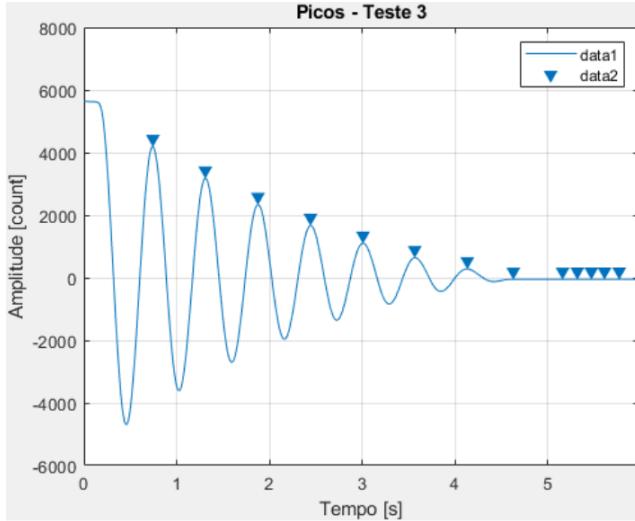


Fig. 9. Resposta ao degrau do teste 3. Fonte: Autoral.

Portanto, através da resposta ao degrau, obtém-se uma frequência natural de:

$$\omega_{n3} = 11,1010 \quad (19)$$

Pela regressão linear, pode-se dizer que:

$$\omega_{n3}\zeta_3 = 0,6515 \rightarrow \zeta_3 = \frac{0,6515}{\omega_{n3}} = 0,0587 \quad (20)$$

Realizando o mesmo procedimento para o teste 4, tem-se:

$$\omega_{n4} = 33,7806 \quad (21)$$

Pela regressão linear, pode-se dizer que:

$$\omega_{n4}\zeta_4 = 1,321 \rightarrow \zeta_4 = \frac{1,321}{\omega_{n4}} = 0,0391 \quad (22)$$

Aplicando os valores de frequência natural e amortecimento dos testes 3 e 4 ao sistema de equações 11, tem-se:

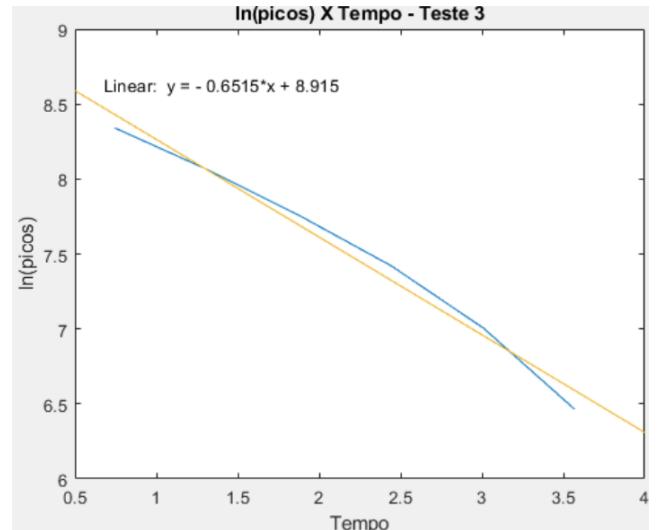


Fig. 10. Amplitudes linearizadas do teste 3. Fonte: Autoral.

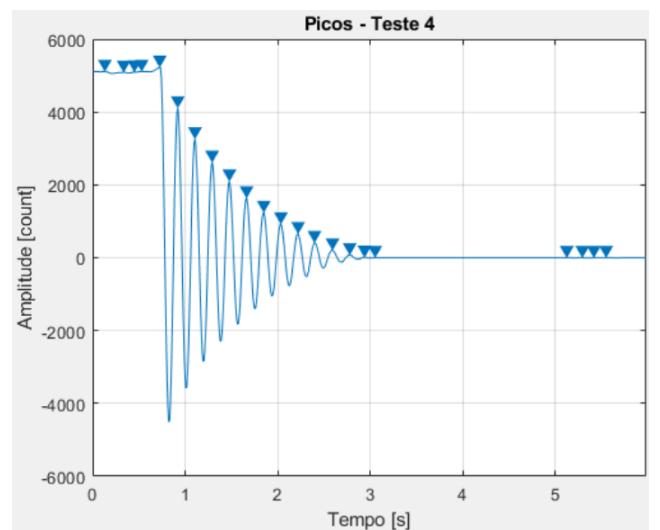


Fig. 11. Resposta ao degrau do teste 4. Fonte: Autoral.

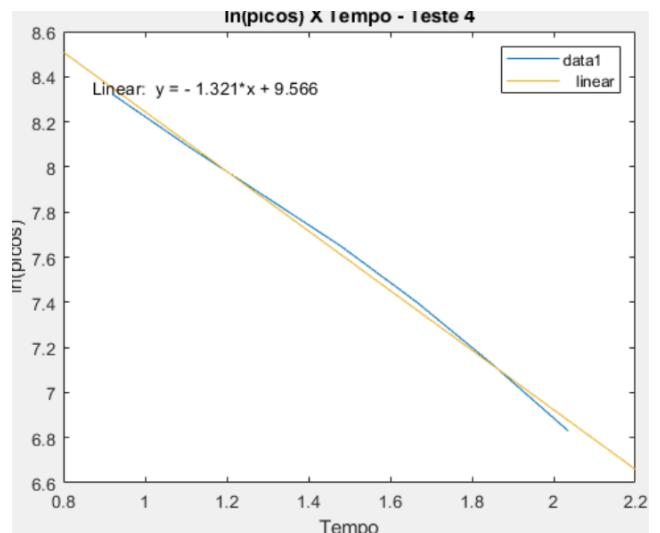


Fig. 12. Amplitudes linearizadas do teste 4. Fonte: Autoral.

$$\begin{cases} \frac{c_2}{m_2 + 2} = 2\omega_{n3}\zeta_3 \\ \frac{k_1}{m_2 + 2} = \omega_{n3}^2 \\ \frac{k_2}{m_2} = \omega_{n4}^2 \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \frac{c_2}{m_2 + 2} = 2 \cdot 11,1010 \cdot 0,0587 \\ \frac{k_2}{m_2 + 2} = 11,1010^2 \\ \frac{k_2}{m_2} = 33,7806^2 \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} m_2 = 0,896kg \\ c_2 = 3,774Ns/m \\ k_2 = 1022,45N/m \end{cases} \quad (25)$$

### 3.4 Validação do modelo

Foi realizada a aplicação de uma entrada em degrau de tensão na planta em malha aberta, onde a sua resposta foi comparada com a resposta ao degrau da planta simulada pelo *MATLAB*. Ambas as respostas apresentaram semelhanças, o que é um bom sinal, haja vista as dificuldades enfrentadas até aqui.

## 4. PROJETO DO CONTROLADOR

A princípio, buscamos realizar o controlador proporcional, integrativo e derivativo (PID), por garantir erro nulo para entrada em degrau e por ser amplamente difundido nas indústrias e sistemas de controle em geral. A seguir será explicitado as tentativas para obter esse controlador.

### 4.1 Primeira tentativa

Para obtenção dos parâmetros foi plotado o lugar das raízes da planta em malha fechada, figuras 13 e 14. Com o lugar da raízes traçados, foi utilizado o *sisotool* para realizar a escolha da localização dos polos e ganho do controlador PID, com isso realizamos o cancelamento de polos mais instáveis, os polos localizados mais à direita do círculo unitário, e escolhemos um ganho arbitrário para sair da instabilidade e obter uma resposta satisfatória. Por fim, implementamos o controle na planta e visualizamos que a resposta obtida na planta não condizia com o esperado visto no *MatLab*, independente da referência inserida, o carrinho não se mexia nada, consequentemente, acreditamos que o ganho do  $K_p$  estava baixo e fomos aumentando de forma empírica, após diversos aumentos no  $K_p$ , o carrinho começou a se mexer. Sendo assim, a planta modelada era equivalente com o sistema em malha aberta, mas em malha fechada o comportamento era diferente. De forma a elucidar o ocorrido, assumimos de que a falha ocorreu devido aos coeficientes de atrito  $C_1$  e  $C_2$ , portanto, aumentamos esses parâmetros, empiricamente, até obter uma resposta satisfatória para iniciar novamente o processo de controle mas com uma nova modelagem da planta.

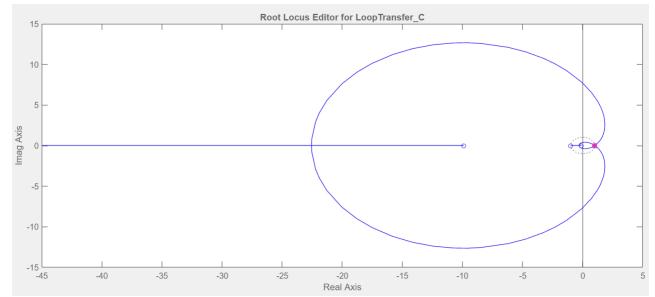


Fig. 13. Lugar da raízes da malha fechada da planta. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

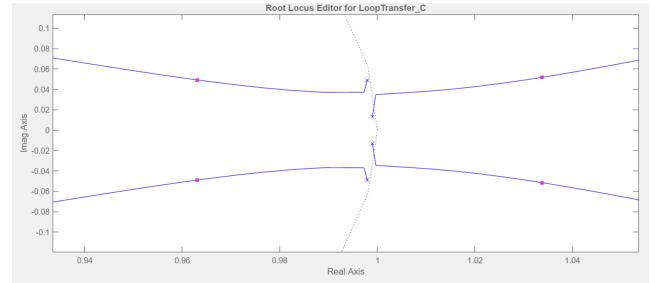


Fig. 14. Lugar da raízes da malha fechada da planta aproximada na extremidade do círculo unitário. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

### 4.2 Segunda tentativa

Sequencialmente após a correção dos parâmetros  $C_1$  e  $C_2$ , de forma empírica, recalculamos o modelo de espaço de estados utilizando a equação X.

Posteriormente foi realizado um novo estudo sobre o lugar das raízes em malha fechada, figura 15, em que aproximando para próximo da extremidade do círculo unitário temos a figura 16. Em que é possível perceber que a característica da resposta do modelo é fortemente marcada por dois pares de polos conjugados próximos a extremidade do círculo unitário levando para a instabilidade do sistema, como mostra a resposta ao degrau do sistema, figura 17.

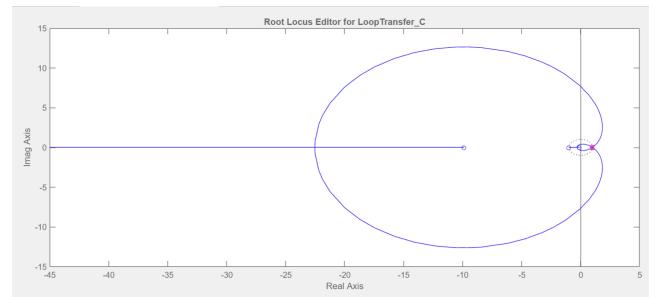


Fig. 15. Lugar da raízes da malha fechada da planta atualizada. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

Com isso, foi inserido o integrador e um par de zeros conjugados, controlador PID, próximo ao par de polos conjugados mais à direita do círculo unitário com a finalidade de atraí-los para dentro do círculo unitário, estabilizando o sistema e melhorando a margem de ganho. Nesse processo visualizamos que o integrador colocado fazia com que o lugar das raízes do segundo par de polos conjugados da planta direcionasse para a instabilidade, portanto, procu-

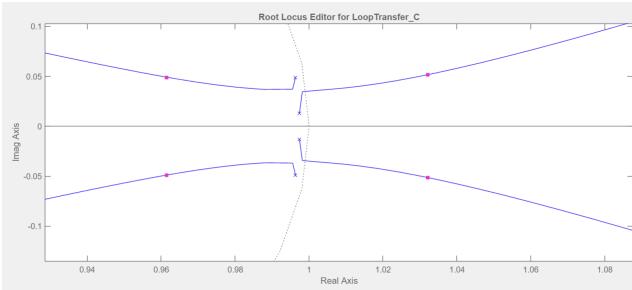


Fig. 16. Lugar da raízes da malha fechada da planta atualizada aproximada na extremidade do círculo unitário. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

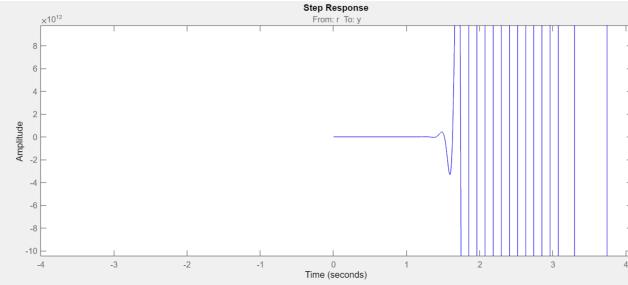


Fig. 17. Resposta ao degrau da planta atualizada, sem controlador, indo para a instabilidade. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

ramos alocar o par de zeros conjugados de forma a garantir a não instabilidade do primeiro par de polos e de aumentar a margem de ganho em relação ao segundo par de polos, para tal, o par de zeros deveria se localizar entre ambos os polos, mas mais próximo do primeiro. O lugar das raízes do controlador é explicitado pelas figuras 18 e 19.

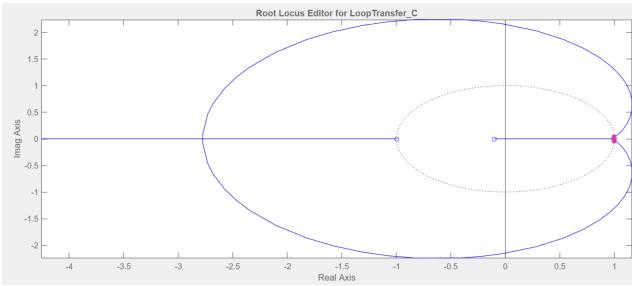


Fig. 18. Lugar da raízes da malha fechada da planta atualizada com controlador PID. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

Posteriormente, foi ajustado o ganho do controlador visualizando a resposta ao degrau do sistema com controlador, tendo como foco que o tempo de acomodação fosse menor do que 4 segundos e principalmente que não houvesse sobressinal, pois como a planta possui uma margem de apenas 3 centímetros, sendo que nos 3 centímetros possui uma chave fim de curso em que corta a alimentação do motor, o sobressinal atrapalha muito o controle, a resposta ao degrau obtida é representada pela curva 'Modelado' na figura 20. Por fim, a equação do controlador PID obtido está explicitada na equação 26.

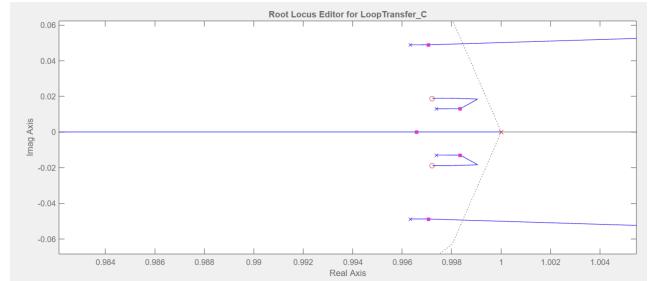


Fig. 19. Lugar da raízes da malha fechada da planta atualizada com controlador PID aproximada na extremidade do círculo unitário. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

$$C = \frac{0,27951(z^2 - 1,994z + 0,9948)}{(z - 1)} \quad (26)$$

No final, o controlador foi implementado e aplicado um degrau unitário na planta com o objetivo de comparar o resultado real com o esperado pela modelagem, essa comparação é representada pela figura 20.

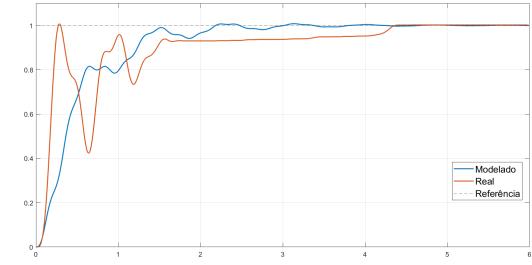


Fig. 20. Comparação da resposta ao degrau em MF da planta em relação ao modelo, com controlador PID. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

Nessa comparação é possível perceber uma dinâmica aproximada entre os modelos, todavia, há algumas divergências nas amplitudes do movimento do período transitório e demora para estabilização no regime permanente.

## 5. RESULTADOS EXPERIMENTAIS EM MALHA FECHADA

Essa seção testa o controle obtido em diversas situações e entradas diferentes na planta.

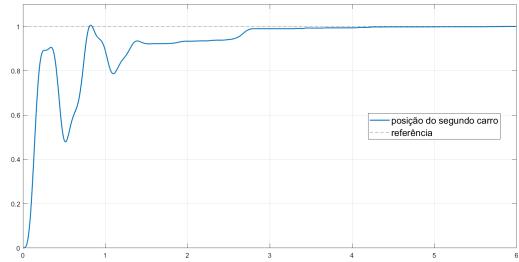


Fig. 21. Resposta ao degrau unitário da planta, carro 1 com 1 peso e carro 2 com 4 pesos. Fonte: autoral, produzido com *matlab* por meio dos dados coletados na planta.

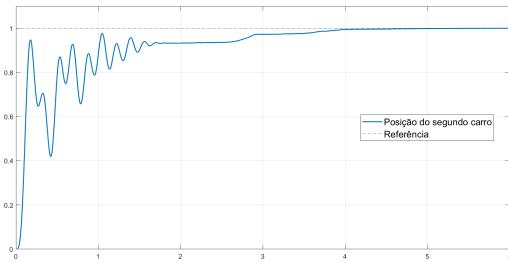


Fig. 22. Resposta ao degrau unitário da planta, carro 1 e 2 com 1 peso. Fonte: autoral, produzido com *matlab* por meio dos dados coletados na planta.

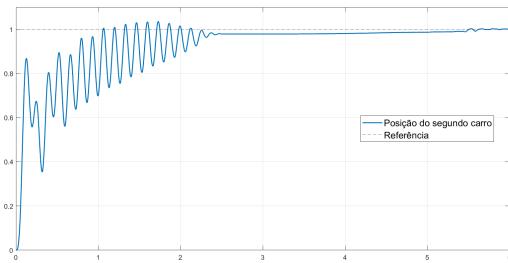


Fig. 23. Resposta ao degrau unitário da planta, carro 1 e 2 com nenhum peso. Fonte: autoral, produzido com *matlab* por meio dos dados coletados na planta.

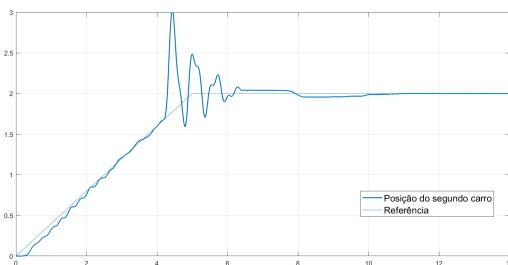


Fig. 24. Resposta a rampa com inclinação de 0,5cm/s e saturação em 2cm, carro 1 e 2 com 4 pesos. Fonte: autoral, produzido com *matlab* por meio dos dados coletados na planta.

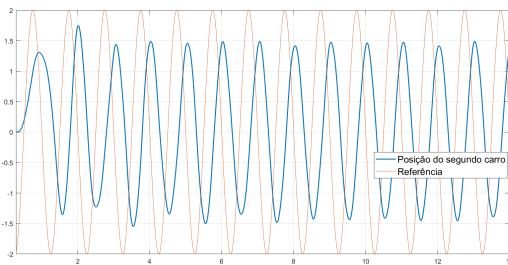


Fig. 25. Resposta a senoide com amplitude de 2cm e frequencia de 1 Hz, carro 1 e 2 com 4 pesos. Fonte: autoral, produzido com *matlab* por meio dos dados coletados na planta.

Os testes exemplificados acima, mostram que o controle foi eficaz em sua maioria, pois foi capaz de atingir a

referência para entradas de degrau unitário e conseguiu também atingir outros tipos de entrada, isso mostra que apesar de simples, o controle PID é capaz de atingir requisitos específicos em uma planta e também consegue estabilizar os sistemas em sua maioria por possibilitar o posicionamento de dois zeros e um polo dentro da planta, sendo uma opção fácil e de eficaz implementação.

## 6. CONCLUSÃO

Por fim, vale ressaltar que o projeto envolveu o estudo da modelagem e controle de uma planta linear e serviu de base para o estudo prático das teorias de controle estudadas ao longo de disciplinas de semestres anteriores. A modelagem envolveu o uso de uma abordagem fenomenológica para a decomposição das forças do sistema e a partir disso os parâmetros da planta foram encontrados com a realização de testes envolvendo a troca de molas, pesos e a fixação dos carrinhos. Depois de modelar o sistema, foi desenvolvido um controlador com base no método do lugar das raízes com o software *Matlab* e com isso os parâmetros da resposta foram aprimorados para maior confiabilidade do modelo. Com isso, os parâmetros do PID foram implementados de forma discreta no controlador do sistema massa mola e diversos testes com entradas diferentes foram feitos.

## 7. REFERÊNCIAS

- Notas de aula
- Manual da planta