

## Grupo 3 - Módulo 1 - Massa Mola

Felipe Nery Barcelos Araújo (2020021190) \*  
Gustavo Vieira Barbosa (2020021352) \*  
Matheus Marques Gonçalves de Paula (2020068995) \*

\* Engenharia de Controle e Automação,  
Universidade Federal de Minas Gerais, MG  
(e-mails: felipenery@ufmg.br, gustavovbarbosa@ufmg.br,  
mmgp@ufmg.br)

**Abstract:** These instructions give you guidelines for preparing papers for IFAC technical meetings. Please use this document as a template to prepare your manuscript. For submission guidelines, follow instructions on paper submission system as well as the event website.

**Keywords:** massa-mola, controle, posição

### 1. INTRODUÇÃO

Os sistemas massa-mola são capazes de representar uma ampla gama de fenômenos físicos e engenharia. De forma a desempenhar um papel fundamental na modelagem desses fenômenos e sistemas mecânicos complexos, tais como: suspensões veiculares, sistemas de suspensão de edifícios, sistemas biomecânicos e muitos outros o sistema massa-mola representa com elevada exatidão. Afinal, com uma modelagem precisa, o sistema é capaz de realizar controle garantindo o desempenho e a estabilidade desejada.

Ao longo desse relatório será visto um estudo focado no controle de um sistema de massa-mola composto por duas massas interconectadas por duas molas, como mostra a figura 1, um problema clássico de controle de sistemas dinâmicos.

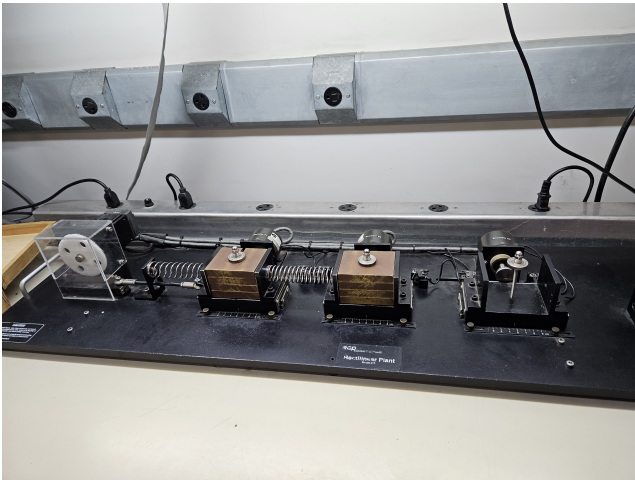


Fig. 1. Figura da planta real estudada, composta por duas molas de diferentes coeficientes e massas de 500 gramas cada. Fonte: Autoral

Com isso, nas seções subsequentes, exploraremos em detalhes a modelagem matemática do sistema massa-mola, bem como o fundamento do controle utilizado e demonstrações práticas.

### 2. DESCRIÇÃO DA PLANTA E ESPECIFICAÇÃO DO DESEMPENHO DESEJADO

O controle a ser realizado visa, inicialmente, controlar a posição do segundo carrinho bem como tornar o sistema estável, erro nulo para entrada de degrau, tempo de acomodação menor do que 4 segundos e sobressinal até 20%.

### 3. MODELAGEM MATEMÁTICA E VALIDAÇÃO DO MODELO

#### 3.1 Modelagem matemática

Após a definição do sistema em espaço de estados, deve-se encontrar os parâmetros  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $m_1$  e  $m_2$ . Para isso, analisa-se um sistema simples com um carro, um coeficiente de atrito e uma mola, cuja equação característica é representada por:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0 \quad (1)$$

Esse é um sistema de segunda ordem, que é representado tipicamente por:

$$s^2 + 2\omega_n\zeta s + \omega_n^2 = 0 \quad (2)$$

onde a frequência natural  $\omega_n$  e o amortecimento  $\zeta$  podem ser encontrados facilmente através de respostas ao degrau. Comparando os termos de ambas equações, tem-se:

$$\frac{c}{m} = 2\omega_n\zeta \quad (3)$$

$$\frac{k}{m} = \omega_n^2 \quad (4)$$

Sendo assim, tem-se duas equações e três variáveis. Portanto, foram realizados quatro testes aplicados a duas diferentes partes da planta. Dois testes são realizados com a mola  $k_1$  e o carro de massa  $m_1$ , onde o primeiro teste consistiu na aplicação de um degrau de 2,5 cm na entrada, com uma massa adicional de 2 kg sobre o carro. O segundo, por sua vez, consistiu na aplicação do mesmo degrau, mas

sem a massa adicional sobre o carro. Do primeiro teste, obtém-se  $\omega_{n1}$  e  $\zeta_1$ , já do segundo, obtém-se  $\omega_{n2}$  e  $\zeta_2$ . Os mesmos testes são realizados sobre a mola  $k_2$  conectado ao carro de massa  $m_2$  a fim de obter  $\omega_{n3}$ ,  $\zeta_3$ ,  $\omega_{n4}$  e  $\zeta_4$ . Pelas respostas ao degrau, a frequência natural pode ser encontrada calculando o período entre dos picos, o que se torna muito fácil com ajuda de uma calculadora. O amortecimento pode ser encontrado analisando através da função *findpeaks* do *MATLAB* aplicado à resposta. Como as amplitudes dos picos caem exponencialmente através da relação  $e^{-\omega_n \zeta}$ , seus valores foram submetidos a uma linearização através de um logaritmo natural. O resultado da linearização é uma função de primeira ordem, onde o coeficiente angular é igual a  $-\omega_n \zeta$ . Portanto, é possível obter o coeficiente de amortecimento através da frequência natural. Com os valores do coeficiente de amortecimento e da frequência natural em mãos, o seguinte sistema de equações pode ser resolvido para calcular os parâmetros dos testes 1 e 2, que foram submetidos na primeira parte da planta:

$$\begin{cases} \frac{c_1}{m_1 + 2} = 2\omega_{n1}\zeta_1 \\ \frac{m_1 + 2}{k_1} = \omega_{n1}^2 \\ \frac{c_1}{m_1} = \omega_{n2}^2 \end{cases} \quad (5)$$

Os testes 3 e 4 foram submetidos na segunda parte da planta e, da mesma forma, que os testes 1 e 2, resultam no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{c_2}{m_2 + 2} = 2\omega_{n3}\zeta_3 \\ \frac{m_2 + 2}{k_2} = \omega_{n3}^2 \\ \frac{m_2}{k_2} = \omega_{n4}^2 \end{cases} \quad (6)$$

### 3.2 Testes 1 e 2

Os gráficos das respostas ao degrau dos testes 1 e 2 estão presentes nas figuras 2 e 3. Os gráficos das amplitudes linearizadas sobre o tempo estão presentes nas figuras 4 e 5.

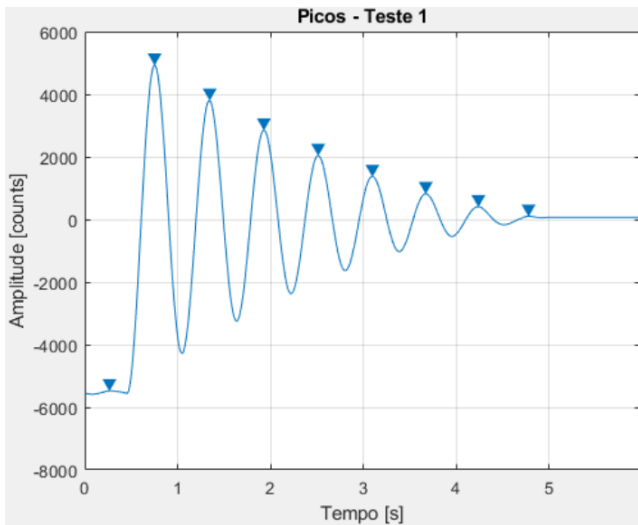


Fig. 2. Resposta ao degrau do teste 1. Fonte: Autoral.

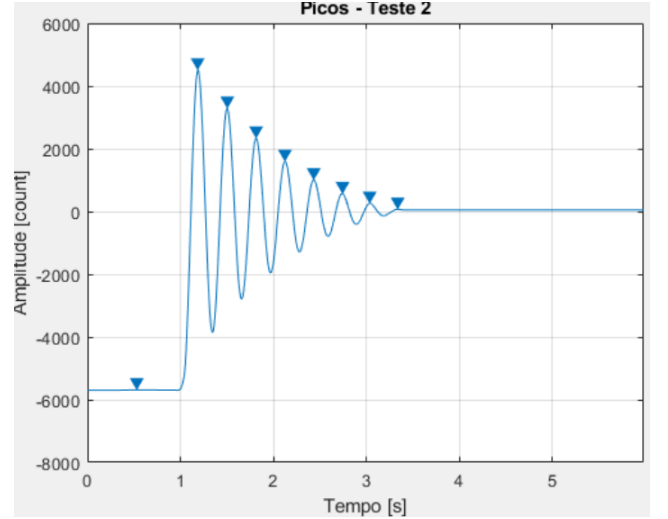


Fig. 3. Resposta ao degrau do teste 2. Fonte: Autoral.

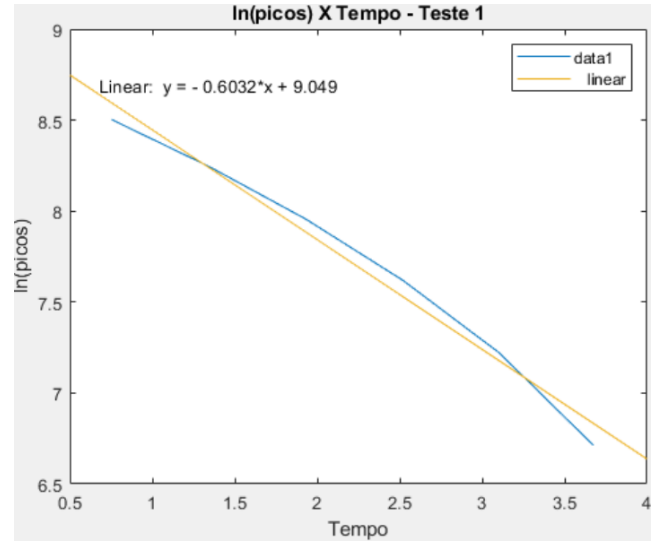


Fig. 4. Amplitudes linearizadas do teste 1. Fonte: Autoral.

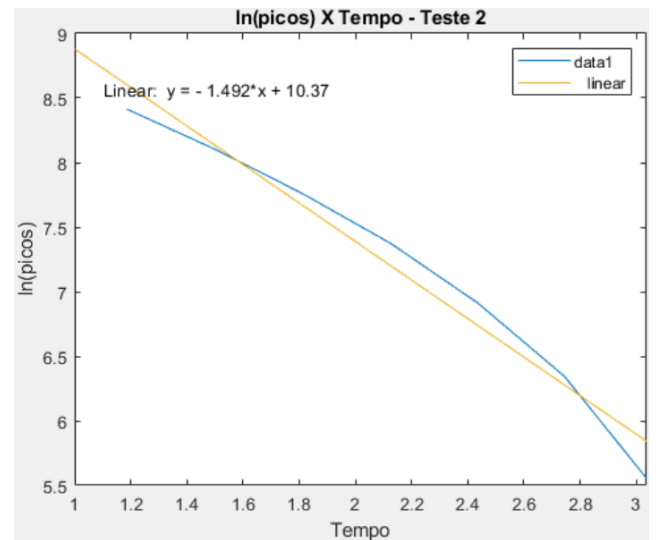


Fig. 5. Amplitudes linearizadas do teste 2. Fonte: Autoral.

Portanto, através dos gráficos da figura 2, com ajuda do MATLAB, foi obtido uma frequência natural de:

$$\omega_{n1} = 10,5956 \quad (7)$$

O resultado da regressão linear da figura 4 permite dizer que:

$$0,6032 = \omega_{n1}\zeta_1 \rightarrow \zeta_1 = \frac{0,6032}{\omega_{n1}} = 0,0569 \quad (8)$$

O mesmo procedimento foi feito com os resultados do teste 2, cujo resultados estão presentes nas figuras 3 e 5.

$$\omega_{n2} = 19,6965 \quad (9)$$

$$1,492 = \omega_{n2}\zeta_2 \rightarrow \zeta_2 = \frac{1,492}{\omega_{n2}} = 0,0757 \quad (10)$$

Com os valores de  $\omega_{n1}, \omega_{n2}, \zeta_1$  e  $\zeta_2$  em mãos, é possível resolver o sistema 5

$$\begin{cases} \frac{c_1}{m_1 + 2} = 2\omega_{n1}\zeta_1 \\ \frac{m_1 + 2}{k_1} = \omega_{n1}^2 \\ \frac{k_1}{m_1} = \omega_{n2}^2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{c_1}{m_1 + 2} = 2 \cdot 10,5956 \cdot 0,0569 \\ \frac{m_1 + 2}{k_1} = 10,5956^2 \\ \frac{k_1}{m_1} = 19,6965^2 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} m_1 = 0,92kg \\ c_1 = 2,143Ns/m \\ k_1 = 356,5N/m \end{cases} \quad (13)$$

### 3.3 Testes 3 e 4

Após a aplicação do degrau de 2,5 cm ao sistema, a saída foi obtida e está presente na figura 7. Além disso, houve a linearização e regressão da amplitude dos picos da resposta ao degrau, assim como descrito nos testes anteriores, e está presente na figura ???. Para o teste 4, a resposta ao degrau está presente na figura ?? e a linearização dos picos juntamente da regressão linear está presente na figura 9.

Portanto, através da resposta ao degrau, obtém-se uma frequência natural de:

$$\omega_{n3} = 11,1010 \quad (14)$$

Pela regressão linear, pode-se dizer que:

$$\omega_{n3}\zeta_3 = 0,6515 \rightarrow \zeta_3 = \frac{0,6515}{\omega_{n3}} = 0,0587 \quad (15)$$

Realizando o mesmo procedimento para o teste 4, tem-se:

$$\omega_{n4} = 33,7806 \quad (16)$$

Pela regressão linear, pode-se dizer que:

$$\omega_{n4}\zeta_4 = 1,321 \rightarrow \zeta_4 = \frac{1,321}{\omega_{n4}} = 0,0391 \quad (17)$$

Aplicando os valores de frequência natural e amortecimento dos testes 3 e 4 ao sistema de equações ??, tem-se:

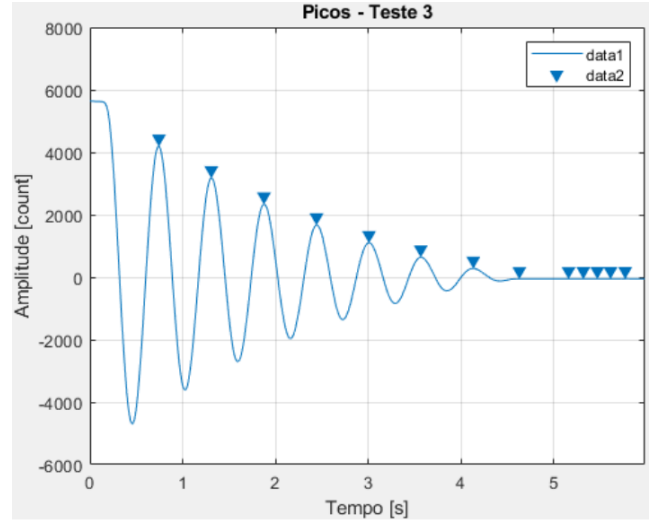


Fig. 6. Resposta ao degrau do teste 3. Fonte: Autoral.

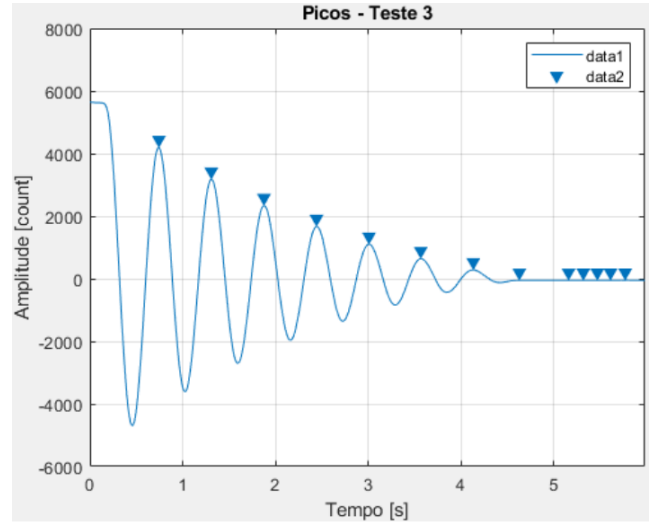


Fig. 7. Resposta ao degrau do teste 3. Fonte: Autoral.

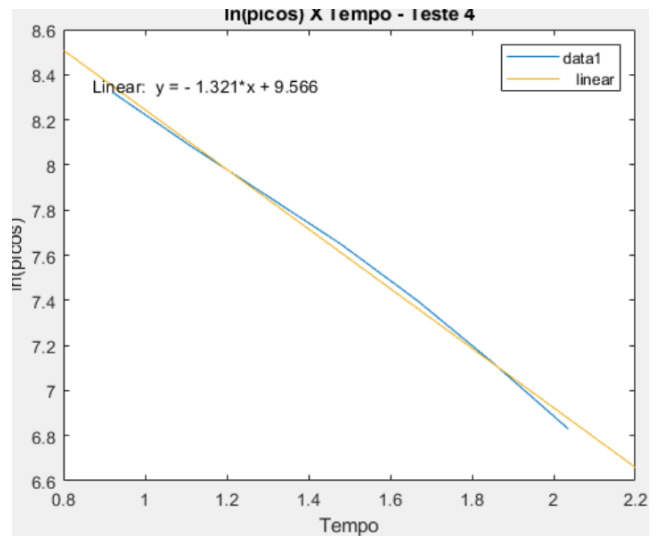


Fig. 8. Amplitudes linearizadas do teste 4. Fonte: Autoral.

$$\begin{cases} \frac{c_2}{m_2 + 2} = 2\omega_{n3}\zeta_3 \\ \frac{m_2 + 2}{k_2} = \omega_{n3}^2 \\ \frac{k_2}{m_2} = \omega_{n4}^2 \end{cases} \quad (18)$$

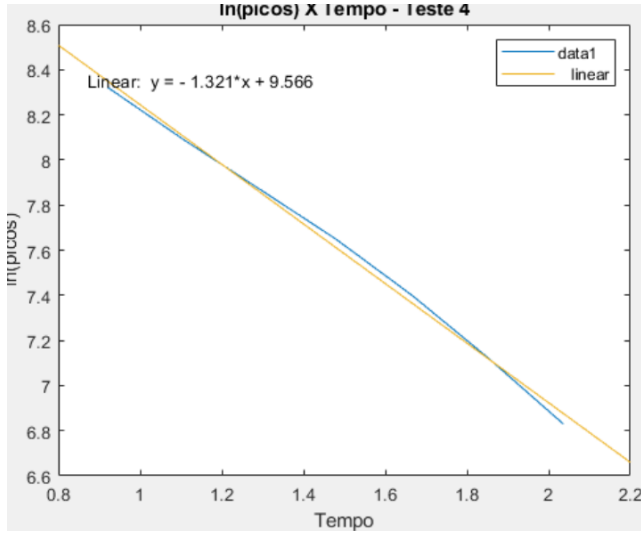


Fig. 9. Amplitudes linearizadas do teste 4. Fonte: Autoral.

$$\begin{cases} \frac{c_2}{m_2 + 2} = 2 \cdot 11,1010 \cdot 0,0587 \\ \frac{k_2}{m_2 + 2} = 11,1010^2 \\ \frac{k_2}{m_2} = 33,7806^2 \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} m_2 = 0,896kg \\ c_2 = 3,774Ns/m \\ k_2 = 1022,45N/m \end{cases} \quad (20)$$

### 3.4 Validação do modelo

Foi realizada a aplicação de uma entrada em degrau de tensão na planta em malha aberta, onde a sua resposta foi comparada com a resposta ao degrau da planta simulada pelo *MATLAB*. Ambas as respostas apresentaram semelhanças, o que é um bom sinal, haja vista as dificuldades enfrentadas até aqui.

## 4. PROJETO DO CONTROLADOR

A princípio, buscamos realizar o controlador proporcional, integrativo e derivativo (PID), por garantir erro nulo para entrada em degrau e por ser amplamente difundido nas indústrias e sistemas de controle em geral. A seguir será explicitado as tentativas para obter esse controlador.

### 4.1 Primeira tentativa

Para obtenção dos parâmetros foi plotado o lugar das raízes da planta em malha fechada, figuras 10 e 11. Com o lugar das raízes traçados, foi utilizado o *sisotool* para realizar a escolha da localização dos polos e ganho do controlador PID, com isso realizamos o cancelamento de polos mais instáveis, os polos localizados mais à direita do círculo unitário, e escolhemos um ganho arbitrário para sair da instabilidade e obter uma resposta satisfatória. Por fim, implementamos o controle na planta e visualizamos que a resposta obtida na planta não condizia com o esperado visto no *MatLab*, independente da referência inserida, o carrinho não se mexia nada, consequentemente, acreditamos que o ganho do  $K_p$  estava baixo e fomos

aumentando de forma empírica, após diversos aumentos no  $K_p$ , o carrinho começou a se mexer. Sendo assim, a planta modelada era equivalente com o sistema em malha aberta, mas em malha fechada o comportamento era diferente. De forma a elucidar o ocorrido, assumimos de que a falha ocorreu devido aos coeficientes de atrito  $C1$  e  $C2$ , portanto, aumentamos esses parâmetros, empiricamente, até obter uma resposta satisfatória para iniciar novamente o processo de controle mas com uma nova modelagem da planta.

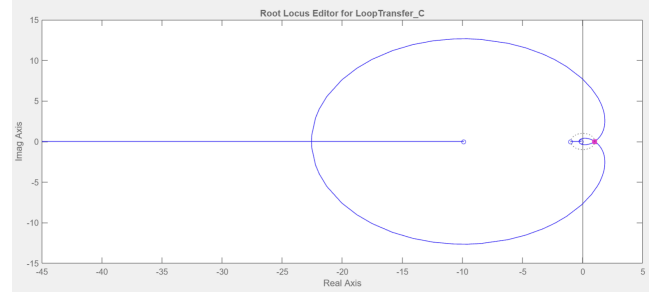


Fig. 10. Lugar das raízes da malha fechada da planta. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

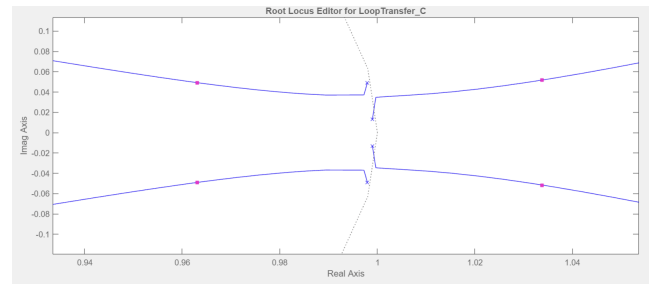


Fig. 11. Lugar das raízes da malha fechada da planta aproximada na extremidade do círculo unitário. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

### 4.2 Segunda tentativa

Sequencialmente após a correção dos parâmetros  $C1$  e  $C2$ , de forma empírica, recalculamos o modelo obtendo as seguintes matrizes do espaço de estados:

Posteriormente foi realizado um novo estudo sobre o lugar das raízes em malha fechada, figura 12, em que aproximando para próximo da extremidade do círculo unitário temos a figura 13. Em que é possível perceber que a característica da resposta do modelo é fortemente marcada por dois pares de polos conjugados próximos a extremidade do círculo unitário levando para a instabilidade do sistema, como mostra a resposta ao degrau do sistema, figura 14.

Com isso, foi inserido o integrador e um par de zeros conjugados, controlador PID, próximo ao par de polos conjugados mais à direita do círculo unitário com a finalidade de atraí-los para dentro do círculo unitário, estabilizando o sistema e melhorando a margem de ganho. Nesse processo visualizamos que o integrador colocado fazia com que o lugar das raízes do segundo par de polos conjugados da planta direcionasse para a instabilidade, portanto, procuramos alocar o par de zeros conjugados de forma a garantir a não instabilidade do primeiro par de polos e de aumentar

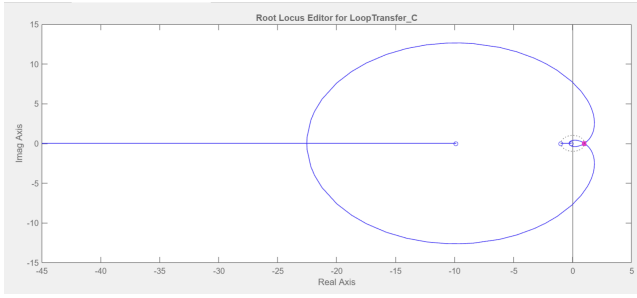


Fig. 12. Lugar da raízes da malha fechada da planta atualizada. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

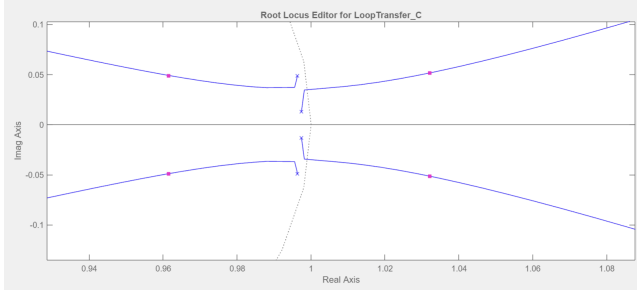


Fig. 13. Lugar da raízes da malha fechada da planta atualizada aproximada na extremidade do círculo unitário. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

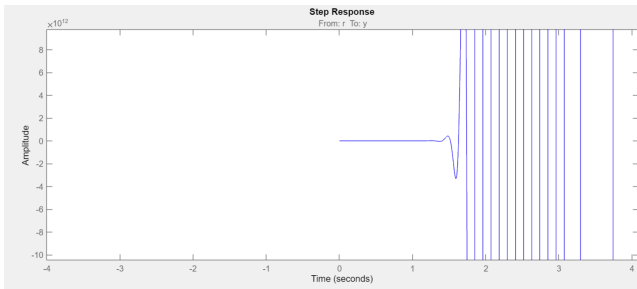


Fig. 14. Resposta ao degrau da planta atualizada, sem controlador, indo para a instabilidade. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

a margem de ganho em relação ao segundo par de polos, para tal, o par de zeros deveria se localizar entre ambos os polos, mas mais próximo do primeiro. O lugar das raízes do controlador é explicitado pelas figuras 15 e 16.

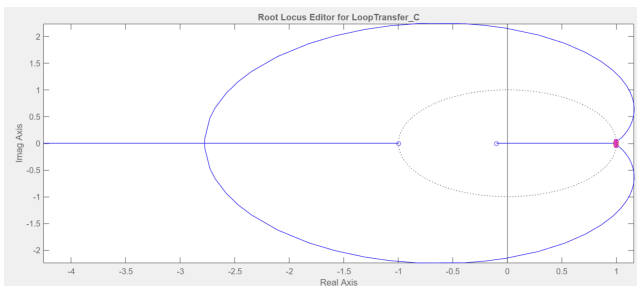


Fig. 15. Lugar da raízes da malha fechada da planta atualizada com controlador PID. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

Posteriormente, foi ajustado o ganho do controlador visualizando a resposta ao degrau do sistema com controlador,

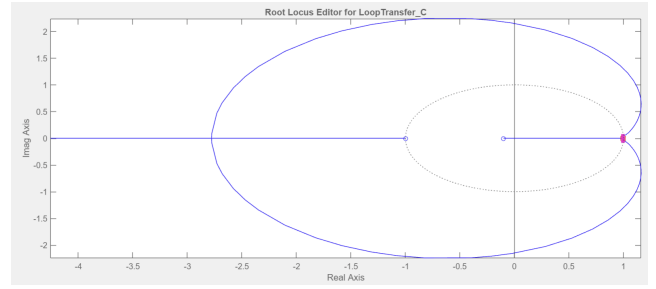


Fig. 16. Lugar da raízes da malha fechada da planta atualizada com controlador PID aproximada na extremidade do círculo unitário. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

tendo como foco que o tempo de acomodação fosse menor do que 4 segundos e principalmente que não houvesse sobressinal, pois como a planta possui uma margem de apenas 3 centímetros, sendo que nos 3 centímetros possui uma chave fim de curso em que corta a alimentação do motor, o sobressinal atrapalha muito o controle, a reposta ao degrau obtida é representada pela curva 'Modelado' na figura 17. Por fim, a equação do controlador PID obtido está explicitada na equação 21.

$$C = \frac{0,27951(z^2 - 1,994z + 0,9948)}{(z - 1)} \quad (21)$$

No final, o controlador foi implementado e aplicado um degrau unitário na planta com o objetivo de comparar o resultado real com o esperado pela modelagem, essa comparação é representada pela figura 17.

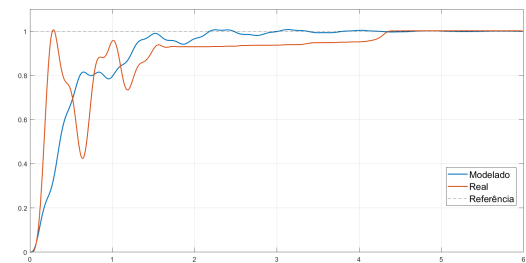


Fig. 17. Comparação da resposta ao degrau em MF da planta em relação ao modelo, com controlador PID. Fonte: autoral, produzida com *matlab*.

Nessa comparação é possível perceber uma dinâmica aproximada entre os modelos, todavia, há algumas divergências nas amplitudes do movimento do período transitório e demora para estabilização no regime permanente.

## 5. RESULTADOS EXPERIMENTAIS EM MALHA FECHADA

Essa seção testa o controle obtido em diversas situações e entradas diferentes na planta.

## 6. CONCLUSÃO

Nery vai concluir o trabalho pra gente!

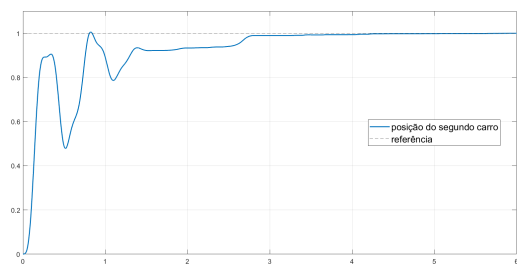


Fig. 18. Resposta ao degrau unitário da planta, carro 1 com 1 peso e carro 2 com 4 pesos. Fonte: autoral, produzido com *matlab* por meio dos dados coletados na planta.

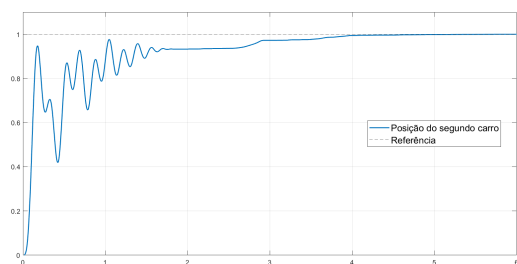


Fig. 19. Resposta ao degrau unitário da planta, carro 1 e 2 com 1 peso. Fonte: autoral, produzido com *matlab* por meio dos dados coletados na planta.

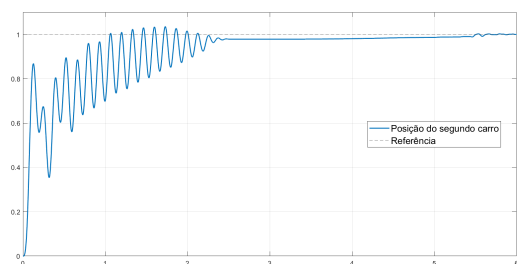


Fig. 20. Resposta ao degrau unitário da planta, carro 1 e 2 com nenhum peso. Fonte: autoral, produzido com *matlab* por meio dos dados coletados na planta.

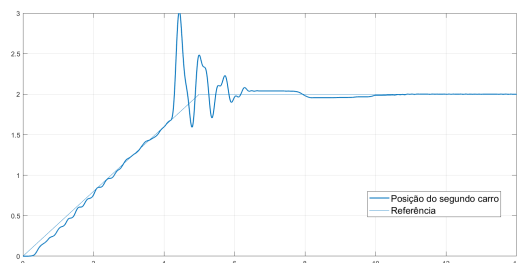


Fig. 21. Resposta a rampa com inclinação de 0,5cm/s e saturação em 2cm, carro 1 e 2 com 4 pesos. Fonte: autoral, produzido com *matlab* por meio dos dados coletados na planta.

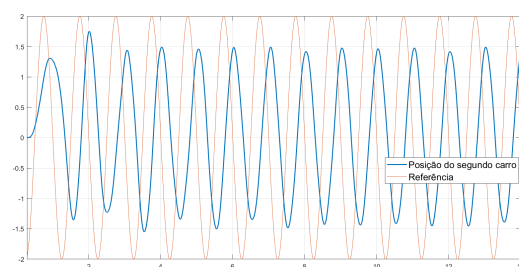


Fig. 22. Resposta a senoide com amplitude de 2cm e frequência de 1 Hz, carro 1 e 2 com 4 pesos. Fonte: autoral, produzido com *matlab* por meio dos dados coletados na planta.

## REFERENCES

Appendix A. A SUMMARY OF LATIN GRAMMAR

Appendix B. SOME LATIN VOCABULARY