Lógica de Programação

Autor:
Jusdewbe Tatiane de Souza Mora

LÓGICA

Introdução:

O estudo da Lógica, é o estudo dos métodos e princípios usados para distinguir o raciocínio correto do incorreto. Esta definição não quer dizer que somente uma pessoa que tenha estudado Lógica possa raciocinar corretamente e encontrar soluções para diversos problemas.A habilidade de resolver problemas é natural em todo ser humano.

Ao resolver o problema do equilíbrio do próprio corpo ou ao decifrar o complexo código de comunicação verbal que nossos pais utilizam, todos nós demos provas que já nascemos com uma incrível capacidade para solucionar enigmas. Muitos dos mais criativos enigmas matemáticos, aliás, são sugeridos por situações ocorridas no dia-a-dia de pessoas comuns, como carpinteiros, costureiras e ferreiros que os solucionam com maestria digna do respeito dos melhores matemáticos, sem contudo, terem estudado métodos e princípios para raciocinar corretamente.

Mas, certamente, uma pessoa com conhecimento de Lógica tem mais probabilidades de raciocinar corretamente do que aquela que não se aprofundou nos princípios gerais implicados nessa atividade. Há muitas razões para isso: No estudo da Lógica o aluno deverá fazer exercícios sobre todos os aspectos da teoria que aprende, e isto ajuda o aperfeiçoamento.

Uma parte do estudo da Lógica consiste no exame e na análise dos métodos incorretos do raciocínio (falácias), isto nos dá uma visão mais profunda dos princípios do raciocínio em geral e nos auxilia também a evitá-los. Por último, o estudo da Lógica proporcionará ao estudante certas técnicas e certos métodos de fácil aplicação para determinar a correção ou incorreção de todos os raciocínios, incluindo os próprios. O valor desse conhecimento reside no fato de ser menor a probabilidade de se cometerem erros, quando é possível localizá-los mais facilmente.

Lógica vem de “Logos” que significa palavra, expressão, conceito, pensamento, discurso, razão.

Álgebra das proposições

Proposição:

Chama-se proposição todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo. As proposições transmitem pensamentos, isto é, afirmam fatos ou exprimem juízos ao qual se possa atribuir, dentro de certo contexto, somente um de dois valores lógicos possíveis: **verdadeiro** ou **falso**.

A lógica matemática adota como regras fundamentais do pensamento os dois seguintes princípios:

(I) **Princípio da não-contradição**: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

(II) **Princípio do terceiro excluído**: Toda proposição ou é verdadeira ou falsa, excluindo-se qualquer outro.

Somente às sentenças declarativas pode-se atribuir valores de verdadeiro ou falso, que ocorre quando a sentença é, respectivamente, confirmada ou negada.

Não se pode atribuir um valor de verdadeiro ou falso às demais formas de sentenças como as interrogativas, as exclamativas e outras, embora elas também expressem juízos.

Exemplos de proposições declarativas:
O número oito é par.
Todos os homens são mortais.
Eu falo inglês e espanhol.
Nenhum gato sabe ler.
Não são proposições:
Será que vai esfriar hoje?
Preste atenção ao sinal.
Feliz aniversário!
Abra a janela.

Valores lógicos das proposições:

Chama-se valor lógico de uma proposição p, a **verdade** se p é verdadeira e a **falsidade** se p é falsa.

Simbolicamente escrevemos V(p) = V se p é verdadeira e V(p) = F se p é falsa.
Ex. Seja a proposição p: Cuiabá é a capital de Mato Grosso.
O valor lógico de p é V. Escreve-se V(p) = V
Seja a proposição q: Pedro Álvares Cabral descobriu a América.
O valor lógico de q é F. Escreve-se V(q) = F

Os valores “verdadeiro” (V) e “falso” (F) são chamados valores lógicos.

Proposições simples e compostas:

As proposições classificam-se em simples ou atômicas e compostas ou moleculares.

Proposições simples: São aquelas que não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma.

São proposições simples as seguintes:

p: Antonio é casado.
q: Camila é estudiosa.
r: O número 11 é ímpar.
As proposições simples são geralmente designadas pelas letras minúsculas p,q,r,s,.....

Proposições compostas: São aquelas formadas pela combinação de duas ou mais proposições simples.
São proposições compostas as seguintes:

P: Maria é bonita e Joana é inteligente.
Q: Antonio é casado ou solteiro.
R: Se x não é maior que y, então x é igual a y ou x é menor que y.
As proposições compostas são geralmente representadas pelas letras maiúsculas P,Q,R,S.......

Conectivos: São palavras ou frases que se usam para formar novas proposições a partir de outras.
São conectivos usuais em Lógica:

Negação “ não ”, cujo símbolo é ” $\sim$ “ p: Antonio não é casado.

Conjunção “ e “ ,cujo símbolo é “ $\wedge$ “

Q: O número 2 é primo e o número 9 é quadrado perfeito.

Disjunção: “ ou “, cujo símbolo é “ $\vee$ “

R : Um triângulo pode ser eqüilátero ou isósceles ou escaleno.

Condicional : “ se...., então “, cujo símbolo é “ $\rightarrow$ “ S: Se está calor então vai chover.

Bicondicional: “ Se, e somente se “, cujo símbolo é “ $\leftrightarrow$ “

T: Maria é minha tia se, e somente se, é irmã de me pai ou de minha mãe.

Exercícios Grupo A:

1) Sejam as proposições: p: Carla está doente e q: Carla está com febre. Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições:
   a) $\sim p$ b) $p \wedge q$ c) $p \vee q$ d) $p \rightarrow \sim q$ e) $q \leftrightarrow p$ f) $\sim p \wedge \sim q$ g) $\sim p \vee q$ h) $p \leftrightarrow \sim q$ i) $\sim\sim p$ j) $(p \wedge \sim q) \rightarrow p$

2) Sejam as proposições: p: Paulo é bonito e q: Paulo é alto. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições:
   a) Paulo é alto e bonito.

b) Paulo é bonito mas é baixo.
c) Não é verdade que Paulo é bonito ou baixo.
d) Paulo não é nem bonito e nem alto.
e) Paulo é bonito ou é feio e alto.
f) É falso que Paulo é feio ou que não é alto.

3) Sejam as proposições: p: Alfredo é pobre e q: Tiago é feliz. Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições :
a) $q \rightarrow p$
b) $p \vee \sim q$
c) $\sim p \leftrightarrow q$
d) $\sim p \rightarrow q$
e) $\sim \sim q$
f) $(\sim p \vee q) \leftrightarrow p$

4) Sejam as proposições: p: Ana fala inglês , q: Ana fala francês e r: Ana fala espanhol. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições:
a) Ana fala inglês.
b) Ana fala francês e inglês, ou não fala francês nem espanhol.
c) Não é verdade que Ana fala inglês e que não fala francês.
d) É falso que Ana fala francês ou espanhol mas não fala inglês.

....

Tabela-Verdade

O valor lógico de uma proposição composta depende dos valores lógicos das proposições componentes, e se determina por um dispositivo chamado **tabela-verdade**, no qual figuram todos os possíveis valores lógicos da proposição composta correspondentes a todas as possíveis atribuições dos valores lógicos das proposições simples componentes.

No caso de uma proposição simples, pelo princípio do terceiro excluído, temos:

p
V
F

No caso de uma proposição composta cujas proposições simples componentes são p e q, as únicas possíveis atribuições dos valores lógicos a p e a q, são:

p	Q
V	V
V	F
F	V
F	F

No caso de uma proposição composta cujas componentes simples são p, q e r, as únicas atribuições possíveis a p, q e r são:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Operações lógicas sobre proposições:

Quando raciocinamos, efetuamos operações sobre proposições ,sendo que elas obedecem as regras de um cálculo, chamado de cálculo proposicional que é semelhante ao da aritmética sobre números.

Veremos a seguir as operações **lógicas fundamentais.**

1) Negação (~)
Chama-se **negação de uma proposição** p a proposição representada por " não p " , cujo valor lógico é a verdade (V) quando p é falsa e a falsidade (F) quando p é verdadeira.

O valor lógico da negação de uma proposição é definido pela seguinte tabela verdade:

p	~p
V	F
F	V

Ex: p: O número 125 é cubo perfeito   V(p) = V
~p: O número 125 não é cubo perfeito   V(~p) = F

Pode-se também negar uma proposição de outras formas:

Ex: p: Pedro é estudioso

~p: Não é verdade que Pedro é estudioso

ou ~p: É falso que Pedro é estudioso
Ex: q: Todas as mulheres são vaidosas
~q: Nem todas as mulheres são vaidosas

ou ~q: Nenhuma mulher é vaidosa
ou ~q: Alguma mulher não é vaidosa

2) Conjunção ($\wedge$)
Chama-se **conjunção de duas proposições** p e q a proposição representada por "p e q", cujo valor lógico é a verdade quando p e q são ambas verdadeiras e a falsidade nos demais casos.

O valor lógico da conjunção de duas proposições é dado pela tabela:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ex: a) p: Cuiabá é a capital de Mato Grosso V(p) = V
q: Brasília é a capital do Brasil V(q) = V
$p \wedge q$: Cuiabá é a capital de Mato Grosso e Brasília é a capital do Brasil

$V(p \wedge q) = V \wedge V = V$

b) p: 2 é um número primo V(p) = V
q: O quadrado tem 3 lados V(q) = F
$p \wedge q$: 2 é um número primo e o quadrado tem 3 lados
$V(p \wedge q) = V \wedge F = F$

3) Disjunção

3.1) Disjunção inclusiva ($\vee$)

Chama-se **disjunção inclusiva** de duas proposições p e q a proposição representada por "p ou q", cujo valor lógico é a falsidade (F) quando o valor lógico das proposições p e q forem ambos falsos e a verdade (V), quando pelo menos uma das proposições for verdadeira.

O valor lógico da disjunção inclusiva de duas proposições é dada pela tabela:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ex: a) p: A lua é amarela V (p) = F
q: Pitágoras era grego V (q) = V
$p \vee q$: A lua é amarela ou Pitágoras era grego
$V (p \vee q) = F \vee V = V$
Ex: b) p: 2 + 2 = 5 V (p) = F
q: 3 < 1 V (q) = F
$p \vee q : 2 + 2 = 5 \vee 3 < 1$
$V (p \vee q) = F \vee F = F$

3.2) Disjunção exclusiva ($\underline{\vee}$)

Chama-se **disjunção exclusiva** de duas proposições p e q, a proposição representada por "p ou q ", cujo valor lógico é a falsidade (F) quando os valores lógicos das proposições p e q são ambos falsos ou ambos verdadeiros e a verdade (V), nos demais casos.

O valor lógico da disjunção exclusiva de duas proposições é dado pela tabela:

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ex: p: André é baiano.

q: André é carioca.

$p \underline{\vee} q$: André é baiano **ou** André é carioca
Aqui a palavra **ou** tem o sentido de exclusão pois não existe a possibilidade de ambas as proposições serem verdadeiras, não é possível ocorrer " André é baiano e carioca ".

4) Condicional ($\rightarrow$)

Chama-se **proposição condicional** a proposição composta representada por " se p então q ", cujo valor lógico é a falsidade (F) quando p é verdadeira e q é falsa e o valor lógico é a verdade (V) nos demais casos.

A condicional, onde p é o antecedente e q o conseqüente, se lê das seguintes maneiras:

(i) p é condição suficiente para q
(ii) q é condição necessária para p O valor lógico da "condicional" é dado pela tabela:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ex: a) p: Brasília é a capital do Brasil V(p) =V

b) q: O mês de julho tem 31 dias V(q) = V

$p \rightarrow q$: Se Brasília é a capital do Brasil então o mês de julho tem 31 dias
$V (p \rightarrow q) = V \rightarrow V = V$
Ex: b) p: Brasília é a capital do Brasil V (p) = V
q: O número 2 é ímpar V (q) = F

$p \rightarrow q$: Se Brasília é a capital do Brasil então o número 2 é ímpar.
$V (p \rightarrow q) = V \rightarrow F = F$
Ex:c) p: O número 2 é ímpar V (p) = F
q: O mês de julho tem 30 dias V (q) = F

$p \rightarrow q$: Se o número 2 é ímpar então o mês de julho tem 30 dias
$V(p \rightarrow q) = F \rightarrow F = V$

5) Bicondicional ($\leftrightarrow$)

Chama-se **proposição bicondicional** a proposição representada por “p se e somente se q”, cujo valor lógico é a verdade (V) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e a falsidade (F) nos demais casos.

A bicondicional de duas proposições p e q, se lê das seguintes maneiras:

(i) p é condição necessária e suficiente para q
(ii) q é condição necessária e suficiente para p O valor lógico da “bicondicional” é dado pela tabela:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ex: a) p: A cidade de Cuiabá está localizada na região centro-oeste   V(p) = V

q: 3 / 5 é um número inteiro   V(q) = F
$p \leftrightarrow q$: A cidade de Cuiabá está localizada na região centro-oeste se e somente se, 3 / 5 é um número inteiro.
$V(p \leftrightarrow q) = V \leftrightarrow F = F$
Ex: b) p: O mês de julho tem 30 dias   V(p) = F
q: Brasília é a capital da Argentina V(q) = F
($p \leftrightarrow q$): O mês de julho tem 30 dias se e somente se, Brasília é a capital da Argentina
$V(p \leftrightarrow q) = F \leftrightarrow F = V$

Uso de parêntesis

É necessário o uso de parêntesis na simbolização das proposições para evitar qualquer tipo de ambigüidade. Assim por exemplo, a expressão $p \vee q \wedge r$ dá lugar, colocando parêntesis, às duas seguintes proposições: a) $(p \vee q) \wedge r$ e b) $p \vee (q \wedge r)$ que não têm o mesmo significado pois, na (a) é uma conjunção e na (b) é uma disjunção.

Analogamente, a expressão $p \wedge q \rightarrow r \vee s$ dá lugar, colocando-se parêntesis, às seguintes proposições:

$((p \wedge q) \rightarrow r) \vee s$, $p \wedge ((q \rightarrow r) \vee s)$, $(p \wedge (q \rightarrow r)) \vee s$, $p \wedge (q \rightarrow (r \vee s))$, $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$ sendo que, duas quaisquer delas, não têm o mesmo significado.

Por outro lado, em muitos casos, parêntesis podem ser suprimidos, a fim de simplificar as proposições simbolizadas, desde que, nenhuma ambigüidade venha a aparecer.

A supressão de parêntesis nas proposições simbolizadas se faz mediante algumas convenções, das quais são particularmente importantes as duas seguintes:

I) A ordem de precedência para os conectivos é:
   1) ~
   2) $\wedge$ e $\vee$
   3) $\rightarrow$
   4) $\leftrightarrow$
      Portanto, o conectivo mais “fraco” é a negação (~) e o conectivo mais “forte” a bicondicional

($\leftrightarrow$). Assim por exemplo, a proposição : $p \rightarrow q \leftrightarrow r \wedge s$ é uma bicondicional e nunca uma condicional ou conjunção. Para convertê-la numa condicional tem que se usar parêntesis.

$p \rightarrow (q \leftrightarrow r \wedge s)$ e, analogamente, para convertê-la numa conjunção $(p \rightarrow q \leftrightarrow r) \wedge s$
O consequente da condicional é uma bicondicional . Desejando-se converter este consequente numa conjunção, escreve-se: $p \rightarrow ((q \leftrightarrow r) \wedge s$
Também são bicondicionais as três seguintes proposições:

$p \wedge q \leftrightarrow r \vee s$; $p \rightarrow q \leftrightarrow r \wedge s$; $p \vee q \leftrightarrow {\sim} r \rightarrow s$

II) Quando um mesmo conectivo aparece sucessivamente repetido, suprimem-se os parêntesis, fazendo –se a associação a partir da esquerda.
    Exemplos:

a) $((\sim (\sim p \wedge q))) \vee (\sim p))$ escreve-se mais simplesmente assim $\sim\sim (p \wedge q) \vee \sim p$
b) $((p \vee (\sim q)) \wedge (r \wedge \sim p)$ escreve-se mais simplesmente assim: $(p \vee \sim q) \wedge (r \wedge \sim p)$
c) $(((p \vee (\sim q)) \wedge r) \wedge (\sim p))$ escreve-se mais simplesmente assim: $(p \vee \sim q) \wedge r \wedge \sim p$
d) $((\sim p) \rightarrow (q \rightarrow (\sim (p \vee r))))$ escreve-se mais simplesmente assim: $\sim p \rightarrow (q \rightarrow \sim (p \vee r))$

Exercícios grupo B

1) Seja p a proposição “ 2 + 1 = 3” e q a proposição “ $2^3 = 4$”. Determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:
   a) $p \wedge \sim q$ b) $p \vee \sim q$ c) $\sim p \wedge q$ d) $\sim p \wedge \sim q$
   e) $\sim p \vee \sim q$ f) $\sim(\sim p \wedge \sim q)$ g) $p \wedge (\sim p \wedge q)$ h) $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

2) Determinar o valor lógico(V ou F) de cada uma das seguintes proposições:
   a) $0 > 1 \wedge \sqrt{5}$ é irracional
   b) $1 > 0 \wedge 3 + 2 = 5$
   c) $5^2 = 10 \vee \pi$ é um número racional
   d) 3 = 3 ou $\sqrt{25} = 4$ e)Se $|-5| = 5$ então 4 + 4 = 9 f)Se Cuiabá é a capital de Pernambuco então Pedro Álvares Cabral descobriu a América.
      g) Se 10 – 2 = 7 então $3^3 = 27$
      h) Não é verdade que 8 é um número ímpar.
      i) E falso que Cuiabá é a capital de Mato Grosso.
      j) Não é verdade que 8 + 1 = 9 e 8 – 1 = 6
      k) E falso que 3 + 3 = 6 ou $\sqrt{-1} = 0$
      l) $\sim(3 - 1 = 2 \rightarrow 2^2 = 5)$

m) $\sim(3 \cdot 2 = 9 \leftrightarrow 5 - 1 \neq 4)$

3) Determinar V(p) em cada um dos seguintes casos, sabendo-se que:
   a) $V(p \rightarrow q) = V$ e $V(p \wedge q) = F$
   b) $V(p \rightarrow q) = V$ e $V(p \vee q) = F$
   c) $V(p \leftrightarrow q) = V$ e $V(p \wedge q) = V$
   d) $V(p \leftrightarrow q) = V$ e $V(p \vee q) = V$
   e) $V(p \leftrightarrow q) = F$ e $V(\sim p \vee q) = V$

4) Determinar V(p) e V(q) em cada um dos seguintes casos, sabendo-se que:
   a) $V(p \rightarrow q) = V$ e $V(p \wedge q) = F$
   b) $V(p \rightarrow q) = V$ e $V(p \vee q) = F$
   c) $V(p \leftrightarrow q) = V$ e $V(p \wedge q) = V$
   d) $V(p \leftrightarrow q) = V$ e $V(p \vee q) = V$
   e) $V(p \leftrightarrow q) = F$ e $V(\sim p \vee q) = V$

5) Sejam as proposições: p: $\text{tg}\ \pi = 1$ e q: $\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$. Deter minar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:
   a) $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$
   b) $(p \rightarrow q) \wedge \sim p \rightarrow \sim q$
   c) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
   d) $(p \vee (\sim p \vee q)) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
   e) $(p \wedge (\sim q \rightarrow p)) \wedge \sim((p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow q \vee \sim p)$

6) Sabendo-se que os valores lógicos das proposições p,q,r e s são respectivamente V,V,F e F, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:
   a) $\sim((r \rightarrow p) \vee (s \rightarrow q)$
   b) $r \rightarrow q \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow r)$
   c) $\sim(p \wedge q) \rightarrow \sim p \vee \sim q$
   d) $\sim((p \vee s) \wedge (s \wedge r)$
   e) $(q \wedge r) \wedge s \rightarrow (p \leftrightarrow s)$
   f) $p \rightarrow \sim q \leftrightarrow (p \vee r) \wedge s$

7) Suprimir o maior número possível de parêntesis nas seguintes proposições:
   a) $((p \leftrightarrow (r \vee p)) \leftrightarrow (q \wedge (\sim(\sim p))))$
   b) $((p \wedge (\sim(\sim r))) \leftrightarrow (r \leftrightarrow (q \vee r)))$
   c) $(((q \vee p) \rightarrow (\sim r)) \vee ((((\sim p) \wedge r) \wedge p)))$

Construção de Tabelas-Verdade

Tabela-Verdade de uma proposição composta

Com o emprego das tabelas-verdade das operações fundamentais, é possível construir a tabela-verdade correspondente a qualquer proposição composta dada e mostrar exatamente os casos em que a proposição composta será verdadeira (V) ou falsa (F), admitindo-se, como é sabido, que o seu valor lógico só depende dos valores lógicos das proposições simples componentes.

Número de linhas de uma tabela-verdade

O número de linhas da tabela-verdade de uma proposição composta depende do número de proposições simples que a integram, assim sendo:

Proposição composta de duas proposições simples: $2^2 = 4$ linhas

Proposição composta de três proposições simples: $2^3 = 8$ linhas
Proposição composta de quatro proposições simples: $2^4 = 16$ linhas

.
.
.
.

Proposição composta de n proposições simples: 2^n linhas

Logo, a tabela-verdade de uma proposição composta com n proposições simples componentes contém 2^n linhas.

Exemplos:

1) Construir a tabela-verdade da proposição: P(p,q): ~ (p → ~ q)
   1ª solução:

Forma-se, em primeiro lugar, as colunas correspondentes às duas proposições simples componentes p e q. Em seguida, formam-se as colunas das partes da proposição composta dada.

P	q	~ q	p→ ~ q	***~ (p → ~ q)***
V	V	F	F	***V***
V	F	V	V	***F***
F	V	F	V	***F***
F	*F*	*V*	*V*	***F***

Os valores lógicos da proposição composta encontram-se na última coluna à direita.

Logo:

P (V V) = V
P (V F) = F
P (F V) = F
P (F F) = F

2ª solução:

Formam-se primeiro as colunas correspondentes às duas proposições p e q. Em seguida, à direita, formam-se colunas para essas proposições e para os conectivos que aparecem na proposição composta dada. Depois, numa certa ordem, completam-se essas colunas, escrevendo em cada uma delas os valores lógicos convenientes:

p	q	**~**	(p	→	~	*q*)
V	V	**V**	V	F	F	*V*
V	F	**F**	V	V	V	*F*
F	V	**F**	F	V	F	*V*
F	F	**F**	F	V	V	*F*
1	*1*	*4*	*1*	*3*	*2*	*1*

Os valores lógicos da proposição composta encontram-se na coluna completada em último lugar (coluna 4)

Então: P(VV,VF,FV,FF) = VFFF

2) Construir a tabela verdade da proposição: P(p,q,r): (p → (~ q ∨ r)) ∧ ~ (q ∨ (p ↔ ~ r))
Neste caso, não compensa construir a tabela através da 1ª solução apresentada, porque ela tem muitas partes e a tabela teria muitas colunas. Vamos construí-la conforme a 2ª solução apresentada.

p	q	r	(p	$\rightarrow$	(~	q	$\vee$	r))	$\wedge$	~	(q	$\vee$	(p	$\leftrightarrow$	~	*r))*
V	V	V	V	V	F	V	V	V	**F**	F	V	V	V	F	F	*V*
V	V	F	V	F	F	V	F	F	**F**	F	V	V	V	V	V	*F*
V	F	V	V	V	V	F	V	V	**V**	V	F	F	V	F	F	*V*
V	F	F	V	V	V	F	V	F	**F**	F	F	V	V	V	V	*F*
F	V	V	F	V	F	V	V	V	**F**	F	V	V	F	V	F	*V*
F	V	F	F	V	F	V	F	F	**F**	F	V	V	F	F	V	*F*
F	F	V	F	V	V	F	V	V	**F**	F	F	V	F	V	F	*V*
F	F	F	F	V	V	F	V	F	**V**	V	F	F	F	F	V	*F*
1	*1*	*1*	*1*	*4*	*2*	*1*	*3*	*1*	*6*	*5*	*1*	*4*	*1*	*3*	*2*	*1*

Logo : P(VVV) = F
P(VVF) = F
P(VFV) = V
P(VFF) = F
P(FVV) = F
P(FVF) = F
P(FFV) = F
P(FFF) = V

Exercícios grupo C

1) Construir as tabelas – verdade das seguintes proposições:

a) $\sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$
b) $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow \sim p \wedge q$
c) $\sim ((p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q))$
d) $(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
e) $(p \wedge q \rightarrow r) \vee (\sim p \leftrightarrow q \vee \sim r)$
f) $p \rightarrow (p \rightarrow \sim r) \leftrightarrow q \vee r$
g) $(p \vee (q \rightarrow \sim r)) \wedge (\sim p \vee r \leftrightarrow \sim q)$
h) $(r \wedge (p \vee \sim q)) \wedge \sim (\sim r \vee (p \wedge q))$

Tautologias, Contradições e Contingências

1) **Tautologia** : Chama-se tautologia a proposição composta que é sempre verdadeira. Na tabela – verdade de uma proposição tautológica, a “última coluna”, contém somente a letra V (verdade).

Ex: A proposição "p ∧ q → (p ↔ q)" é uma tautologia, conforme mostra sua tabela-verdade:

p	q	p	∧	q	→	(p	↔	q)
V	V	V	V	V	**V**	V	V	*V*
V	F	V	F	F	**V**	V	F	*F*
F	V	F	F	V	**V**	F	F	*V*
F	F	F	F	F	**V**	F	V	*F*
1	*1*	*1*	*2*	*1*	***3***	*1*	*2*	*1*

2) **Contradição**: Chama-se contradição a proposição composta que é sempre falsa. Na tabela- verdade de uma proposição contraditória, a "última coluna", contém somente a letra F (falsidade).
Ex: A proposição " (~ p ∧ ~ r) ∧ (q ∧ r) " é contraditória, conforme mostra sua tabela-verdade:

p	q	r	(~	(p	∧	~	r)	∧	(q	∧	r)
V	V	V	F	V	F	F	V	**F**	V	V	*V*
V	V	F	F	V	F	V	F	**F**	V	F	*F*
V	F	V	F	V	F	F	V	**F**	F	F	*V*
V	F	F	F	V	F	V	F	**F**	F	F	*F*
F	V	V	V	F	F	F	V	**F**	V	V	*V*
F	V	F	V	F	V	V	F	**F**	V	F	*F*
F	F	V	V	F	F	F	V	**F**	F	F	*V*
F	F	F	V	F	V	V	F	**F**	F	F	*F*
1	*1*	*1*	*2*	*1*	*3*	*2*	*1*	*4*	*1*	*2*	*1*

3) **Contingência** : Chama-se contingência a proposição composta que pode ser verdadeira e pode ser falsa. Na tabela verdade de uma proposição contingente, a "última coluna" contém as letras V (verdade) e F (falsidade).
Ex: A proposição " p ∨ (p ∧ ~ q) " é uma contingência, conforme mostra sua tabela-verdade:

p	q	(p	∨	(p	∧	~	q)
V	V	V	**V**	V	F	F	*V*
V	F	V	**V**	V	V	V	*F*
F	V	F	**F**	F	F	F	*V*
F	F	F	**F**	F	V	V	*F*
1	*1*	*1*	*4*	*1*	*3*	*2*	*1*

Exercícios grupo D

1) Verificar se as proposições são tautológicas:
   a) $p \vee (p \rightarrow (q \wedge \sim q)$
   b) $(p \rightarrow (q \wedge r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$

2) Classificar as proposições em tautologia, contradição ou contingência:
   a) $(p \vee (p \wedge q)) \leftrightarrow p$ b) $(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \rightarrow q)$
   c) $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$ d) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \vee r) \leftrightarrow (q \wedge r)$
   e) $(p \rightarrow q) \vee (q \wedge r)$ f) $\sim ((p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow q) \vee r))$

....

Implicações Lógicas

Diz-se que uma proposição P (p,q,r,....) implica uma proposição Q (p,q,r,......) quando, em suas respectivas tabelas-verdade não aparece **V** na "ultima" coluna de P e F na ultima coluna de Q, com V e F em uma mesma linha.

Indica-se que a proposição P (p, q, r,...) implica a proposição Q (p, q, r,...) com a notação:

P (p, q, r,...) $\Rightarrow$ Q (p, q, r,...)

Obs.: O símbolo "$\rightarrow$" representa uma <u>operação</u> entre duas proposições, resultando uma nova proposição.

O símbolo "$\Rightarrow$" indica apenas uma relação entre duas proposições dadas.

Ex.: Verificar se $p \Rightarrow q \rightarrow p$

Resolução: construindo a tabela-verdade, temos:

p	q	q	$\rightarrow$	p
V	V	V	**V**	V
V	F	F	**V**	V
F	V	V	**F**	F
F	F	F	**V**	F

Comparando os valores lógicos da coluna de <u>p</u> com os valores lógicos da coluna "resultado" de $p \rightarrow q$, verificamos que não ocorre VF (nessa ordem) numa mesma linha. Logo $p \Rightarrow q \rightarrow p$

Ex: Dadas as proposições $p \wedge q$ e $p \leftrightarrow q$, vamos construir suas tabelas-verdade:

p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	V

Concluimos que:

$p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$ (Em nenhuma linha das duas tabelas aparece VF)

$p \nRightarrow p \wedge q$ (na 2ª linha das duas tabelas ocorre VF)

$p \nRightarrow p \leftrightarrow q$ (na 2ª linha das duas tabelas ocorre VF)

$q \nRightarrow p \wedge q$ (na 3ª linha das duas tabelas ocorre VF)

$q \nRightarrow p \leftrightarrow q$ (na 3ª linha das duas tabelas ocorre VF)

Propriedades das Implicações Lógicas:

1ª) A condição necessária e suficiente para que haja a implicação entre duas proposições é que a condicional associada-a elas seja uma tautologia.

Vimos anteriormente: $p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$

Vamos transformar a implicação, na operação lógica (condicional) e formando uma única proposição.

$(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

Construindo sua tabela verdade

A proposição é tautológica, logo existe a implicação

p	q	(p	$\wedge$	q)	$\rightarrow$	(p	$\leftrightarrow$	q)
	V	V	V	V	**V**	V	V	V
V	F	V	F	F	**V**	V	F	F
F	V	F	F	V	**V**	F	F	V
F	F	F	F	F	**V**	F	V	F
1	1	1	2	1	**3**	1	2	1

$p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$

2ª) Propriedade Reflexiva: $p \Rightarrow p$

3ª) Propriedade Transitiva: Se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow r$, então $p \Rightarrow r$

Exercícios Grupo E

1) Verificar se existe a implicação entre as proposições

a) $3^2 = 9$ e $2^3 = 8 \Rightarrow 2^3 = 4$ e $1^2 = 2$
b) ABC é um triângulo $\Rightarrow$ a soma dos ângulos internos A, B e C é igual a 180°
c) x é um número primo $\Rightarrow$ x é impar
d) $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$

2) Demonstrar que:

a) $q \Rightarrow p \rightarrow q$
b) $p \vee q \Rightarrow p$
c) $p \leftrightarrow \sim q \Rightarrow p \rightarrow q$
d) $(x = y \vee x < 4) \wedge x < 4 \Rightarrow x = y$
e) $(x \neq 0 \rightarrow x = y) \wedge x \neq y \Rightarrow x = o$
f) $p \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \vee r$

Equivalências Lógicas

Diz-se que uma proposição P (p, q, r, ...) é equivalente a uma proposição Q (p, q, r, ...) quando os "resultados" de suas tabelas verdades são idênticas. Indica-se que a proposição P (p, q, r,...) é equivalente a proposição Q (p, q, r, ...) com a notação:

P (p, q, r, ...) $\Leftrightarrow$ Q (p, q, r, ...)

Obs.: O símbolo $\leftrightarrow$ representa uma operação entre as duas proposições, resultando uma nova proposição.

O símbolo $\Leftrightarrow$ indica apenas uma relação entre as duas proposições dadas

Ex.: Verificar se $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

Construindo a tabela verdade, temos:

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
V	V	**V**	**V**
V	F	**F**	**F**
F	V	**V**	**V**
F	F	**v**	**v**

Comparando os valores lógicos da coluna de $p \rightarrow q$ com os valores lógicos da coluna de $\sim p \vee q$, verificamos que são idênticos. Logo $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

Propriedades das Equivalências Lógicas:

1ª) A condição necessária e suficiente para que haja a equivalência entre duas proposições é que a <u>bicondicional</u> associada a elas seja uma tautologia.

Vimos no exemplo anterior que: $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

Vamos transformar a equivalência, na operação lógica (bicondicional) formando uma única proposição:

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$

Construindo sua tabela-verdade:

(p	$\rightarrow$	q)	$\leftrightarrow$	(~	p	$\vee$	q)
V	V	V	**V**	F	V	V	V
V	F	F	**V**	F	V	F	F
F	V	V	**V**	V	F	V	V
F	v	F	**V**	V	F	V	F
1	2	1	4	2	1	3	1

A proposição é tautológica, logo existe a equivalência

$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

2ª) Reflexiva: $p \Leftrightarrow p$

3ª) Simétrica: Se $p \Leftrightarrow q$, então, $q \Leftrightarrow p$

4ª) Transitiva: Se $p \Leftrightarrow q$ e $q \Leftrightarrow r$, então, $p \Leftrightarrow r$

Equivalências Notáveis

1ª) Dupla Negação: $\sim\sim p \Leftrightarrow p$

p	~ p	~~p
V	**F**	V
F	**V**	F

Observe que os valores lógicos das colunas de ~~p e p são idênticos. Logo $\sim\sim p \Leftrightarrow p$
Portanto, a dupla negação equivale a afirmação.

2ª) Leis Idempotentes

a) $p \wedge p \Leftrightarrow p$

p	$p \wedge p$
V	V
F	F

b) $p \vee p \Leftrightarrow p$

p	$p \vee p$
V	V
F	F

Observe que nas duas tabelas, os valores lógicos da segunda coluna são os mesmos da primeira, logo: $p \wedge p \Leftrightarrow p$ e $p \vee p \Leftrightarrow p$

3ª) Leis Comutativas

a) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ b) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \vee q$	$q \vee p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	F

Observe que são idênticos os valores lógicos das colunas $p \wedge q$ e $q \wedge p$ e também são idênticos os valores lógicos das colunas $p \vee q$ e $q \vee p$, logo $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ e $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

4ª) Leis Associativas

a) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
b) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

5ª) Leis de Morgan

a) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
b) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

6ª) Leis Distributivas

a) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
b) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

7ª) Condicionais

Das Proposições:

a) $p \rightarrow q$ (Condicional)
b) $q \rightarrow p$ (Recíproca da Condicional)
c) $\sim p \rightarrow \sim q$ (Contraria da Condicional)
d) $\sim q \rightarrow \sim p$ (Contrapositiva da Condicional)

Resultam as duas seguintes equivalências notáveis:

1ª) $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ (A condicional é equivalente a sua contrapositiva)
2ª) $(q \rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$ (A recíproca da condicional é equivalente à contraria da condicional)

8ª) Bicondicional

$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

9ª) Negação Conjunta: $\sim p \wedge \sim q$

A Negação Conjunta também se indica pela notação "$p \downarrow q$". Portanto temos: $p \downarrow q \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	*V*	F
F	F	V

10ª) Negação Disjunta: $\sim p \vee \sim q$

A Negação Disjunta também se indica pela notação "$p \uparrow q$". Portanto temos: $p \uparrow q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

p	q	$p \uparrow q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

- Os símbolos "$\downarrow$" e "$\uparrow$" são chamados "Conectivos de Scheffer"

Exercícios Grupo F

1) Julgar se as proposições p e q são equivalentes ($p \Leftrightarrow q$) em cada um dos seguintes casos:

a) p: $7+ 1 = 8$ q: $(7+1)^2 = 64$
b) p: $3^0 = 1$ q: $0^3 = 1$

c) p: Sen $\pi/2 = 1$ q: Cos $\pi/2 = 0$
d) p: x é par q: x+1 é impar ($x \in z$)
e) p: $x \in \{a\}$ q: $x = a$

2) Demonstrar por tabelas-verdade as seguintes equivalências notáveis:

a) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
b) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
c) $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
d) $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
e) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
f) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
g) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

3) Demonstrar as equivalências:
a) $p \downarrow q \Leftrightarrow q \downarrow p$
b) $p \uparrow q \Leftrightarrow q \uparrow p$
c) $((p \uparrow \sim p) \uparrow (p \uparrow \sim p)) \Leftrightarrow p \wedge \sim p$

4) Sabendo que as proposições p e q são verdadeiras e que a proposição r é falsa, determinar o valor lógico (V ou F) das seguintes proposições:

a) $(\sim p \downarrow q) \wedge (q \uparrow \sim r)$
b) $((p \uparrow q) \vee (q \downarrow r)) \uparrow (r \downarrow p)$
c) $(\sim p \uparrow \sim q) \leftrightarrow ((q \downarrow r) \downarrow p)$
d) $((p \uparrow \sim p) \underline{\vee} q) \downarrow (q \wedge r)$

5) Usando as leis de Morgan, dê a negação em linguagem corrente das seguintes proposições:

a) Não está frio ou não está chovendo
b) O pai de Marcos é pernambucano ou sua mãe é gaúcha
c) Jorge estuda física mas não estuda química

6) Seja a condicional: “Se Pedro é professor então é pobre”, dar em linguagem corrente:

a) A sua Contrapositiva
b) A sua Recíproca
c) A Contrapositiva de sua Recíproca
d) A Recíproca de sua Contrapositiva
e) Sua Contraria
f) A Contrapositiva da sua Contrária

LÓGICA DA ARGUMENTAÇÃO

<u>Argumento</u>: Chama-se argumento, toda afirmação de que uma dada seqüência finita de proposições P_1, P_2,... Pn tem como consequência uma proposição final Q.

As proposições P_1, P_2,... Pn são chamadas de premissas do argumento, e a proposição final Q chama-se conclusão do argumento.

Um Argumento de premissas P_1, P_2,... Pn e conclusão Q é indicado na forma simbólica, por:

P_1, P_2, P_3, ... Pn $\vdash$ Q

E pode ser lida de uma das seguintes maneiras:

"P_1, P_2, P_3, ... Pn acarretam Q"
"Q decorre de P_1, P_2, ... Pn"
"Q se deduz de P_1, P_2, ... Pn"
"Q se enfere de P_1, P_2,... Pn"

O mesmo argumento, pode também ser indicado pela forma padronizada:

P_1
P_2
P_3
.
.
.
Pn_

Q

Exemplo:

Antonio é rico ou pobre, Antonio não é rico $\vdash$ Antonio é pobre

Na forma padronizada:

Antonio é rico ou pobre
Antonio não é rico
____
Logo, Antonio é pobre
Sendo p: Antonio é rico
q: Antonio é pobre

Escrevendo o argumento na forma simbólica temos:

$p \vee q, \sim p \vdash q$ ou

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim q \\ \hline q \end{array}$$

Validade de um Argumento:

Um argumento, P_2, ... Pn $\vdash$ Q é válido se somente a conclusão Q é verdadeira todas as vezes que as premissas P_1, P_2, ... Pn forem verdadeiras.

Portanto, todo argumento válido goza da seguinte propriedade: A verdade das premissas é incompatível com a falsidade da conclusão. As premissas dos argumentos são verdadeiras ou, pelo menos, admitidas como verdadeiras. Logo, afirmar que um dado argumento é válido significa afirmar que as premissas estão de tal modo relacionadas com a conclusão que não é possível ter a conclusão falsa se as premissas forem verdadeiras.

Quando um argumento é válido, a condicional associada ao argumento é uma tautologia.

Um Argumento P_1, P_2, ... Pn $\vdash$ Q é válido se, e somente se, a condicional $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge ...$ Pn $\rightarrow$ Q for tautológica.

A validade de um argumento pode ser verificada, demonstrada ou testada de diversas formas, estudaremos a validade ou não dos argumentos através das tabelas-verdade e das regras de inferência.

Validade de um Argumento através de Tabelas-Verdade:

Para demonstrar, ou verificar, ou testar se um determinado argumento é válido ou não, mediante tabelas-verdade, procede-se do seguinte modo:

a) Constrói-se a condicional associada ao argumento
b) Constrói-se a tabela-verdade e verifica-se se esta condicional é ou não uma tautologia. Se essa condicional é tautológica, então o argumento é válido, caso contrário diz-se que o argumento é não-válido ou sofisma.

Obs.: 1) Verdade e falsidade podem se predicados das proposições, nunca dos argumentos

2) Propriedades de validade ou não-validade só podem pertencer a argumentos, mas nunca à proposições
3) Num raciocínio dedutivo não é possível estabelecer a verdade da sua conclusão se as premissas não forem todas verdadeiras. Determinar a validade ou não–validade dos raciocínios está inteiramente dentro do domínio da Lógica. O lógico está interessado na validade até daqueles argumentos cujas premissas possam ser falsas.

Exercícios Resolvidos

1) Verificar se é válido o argumento:

Se é sábado, Paulo vai ao restaurante
Paulo não foi ao restaurante
____
Logo, não é sábado

Solução: Representando por p a proposição "É sábado" e por q a proposição "Paulo vai ao restaurante", o argumento dado, sob a forma simbólica escreve-se: $p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$

Vamos escrever a condicional associada ao argumento: $((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$

Construindo agora, a tabela-verdade, temos:

p	q	((p	→	q)	∧	~	q)	→	~	p
V	V	V	V	V	F	F	V	**V**	F	V
V	F	V	F	F	F	V	F	**V**	F	V
F	V	F	V	V	F	F	V	**V**	V	F
F	F	F	V	F	V	V	F	**V**	V	F

A condicional é tautológica,logo o argumento dado é válido.

2) Testar a validade do argumento:

Se 0 é par, então, 3 é divisor de 9
2 não é primo ou 3 é divisor de 9
Mas, 2 é primo

Portanto, 0 é ímpar

Solução: Seja p: 0 é par; q: 3 é divisor de 9; r: 2 é primo O argumento dado na forma simbólica, escreve-se:

$p \rightarrow q \ , \sim r \vee q \ , r \ \vdash \ \sim p$

A condicional associada ao argumento é: $((p \rightarrow q) \wedge (\sim r \vee q) \wedge r) \rightarrow \sim p$ então vamos construir sua tabela –verdade:

p	q	r	((p	→	q)	∧	(~	r	∨	q)	∧	r))	→	~	*p*
V	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	V	**F**	F	*V*
V	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V	F	F	**V**	F	*V*
V	F	V	V	F	F	F	F	V	F	F	F	V	**V**	F	*V*
V	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	F	F	**V**	F	*V*
F	V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	**V**	V	*F*
F	V	F	F	V	V	V	V	F	V	V	F	F	**V**	V	*F*
F	F	V	F	V	F	F	F	V	F	F	F	V	**V**	V	*F*
F	F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	F	F	**V**	V	*F*
1	*1*	*1*	*1*	*2*	*1*	*4*	*2*	*1*	*3*	*1*	*5*	*1*	*6*	*2*	*1*

Observamos que a condicional não é uma tautologia, logo o argumento é um sofisma, ou seja, não-válido.

Exercícios grupo G

1) Passar para a forma simbólica e testar a validade dos argumentos:
   a) Se trabalho, não posso estudar
      Trabalho ou sou aprovado no vestibular

   Trabalhei

   Logo, fui aprovado no vestibular

b) Se uma jovem é feia, ela é infeliz
Se uma jovem é infeliz, ela não casa

Logo, Jovens feias não casam

c) Se 5 é menor que 4, então, 5 não é primo
5 não é menor que 4

Logo, 5 é primo

d) Se 0 é par, então, 10 não divide 99
11 não é primo ou 10 divide 99
11 é primo

Portanto, 0 é ímpar

2) Usar tabelas-verdade para provar a validade ou não dos argumentos:

a) $p \to q \vdash \sim q \to \sim p$ b) $(p \vee q) \to (p \wedge q) \vdash (p \to q) \wedge (q \to p)$

c) $p \wedge q \to r,\ \sim p,\ \sim (p \wedge r) \to q \vdash r$ d) $p \vee \sim q,\ \sim p,\ \sim (p \wedge r) \to \ \vdash p \wedge r$

e) $p \to q \wedge r,\ \sim (q \wedge r),\ \sim p \to s \vdash r \wedge s$

3) Testar a validade dos argumentos, através de tabelas-verdade:

a) $x = 0 \to x \neq y,\ x = z \to x = y,\ x = z \vdash x \neq 0$

b) $x = 8 \to x > y,\ \sim (y > 7 \wedge x \neq 8),\ y > 7 \to x > y \vdash x > y$

c) $x \neq y \to x \neq z$
$x \neq z \to x \neq 0$
$x = 0$

$\therefore x = y$

d) $y > x \leftrightarrow x = 0$
$xy = 0 \leftrightarrow x = 0$
$y > x$

$\therefore xy \neq 0$

Prova de não-validade de um argumento

O método usual para **demonstrar, verificar** ou **testar** a não-validade de um argumento

$P_1, P_2, P_3, \ldots P_n \vdash Q$ consiste em encontrar uma atribuição de valores lógicos às proposições simples componentes do argumento,que torne todas as premissas $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ verdadeiras (V) e a conclusão Q falsa (F), o que equivale em encontrar pelo menos uma linha da tabela-verdade relativa ao argumento dado em que os valores lógicos das premissas $P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$ são todos **V** e a conclusão Q é **F**.

Sempre que for possível encontrar essa **atribuição de valores lógicos,** sem a construção da tabela-verdade completa relativa ao argumento dado,evita-se uma boa parte do trabalho.

Exemplos:

1) Demonstrar a não-validade do argumento:
$(p \to q) \vee \sim (r \wedge s),\ p \vee s \vdash r \to q$
Seria muito trabalhoso construir a tabela-verdade,vamos representar o argumento da seguinte forma:
1ª) $(p \to q) \vee \sim (r \wedge s)$
2ª) $p \vee s$

C) $r \rightarrow q$

Vamos atribuir valores lógicos às proposições simples componentes para obtermos premissas verdadeiras e conclusão falsa:

V	***F***
r	*Q*
s	*p*

Substituindo-se esses valores no argumento temos:

1ª) $(F \rightarrow F) \vee \sim (V \wedge V)$
$V \quad \vee \quad \sim V$
$V \quad \vee \quad F$

V

2ª) $F \vee V$ **V**

C) $V \rightarrow F$ **V**

Os valores das duas premissas são **V** e o valor lógico da conclusão é F. Logo, o argumento dado é não-válido (sofisma).

2) Demonstrar que não é válido o argumento:

1ª) $x \neq 0$
2ª) $x = 0 \vee \sim (x \not< 1 \vee y > x)$
3ª) $y > x \rightarrow y > 1 \wedge x + y > 2$

$\therefore\ y > 1 \rightarrow x < 1$

Vamos representar o argumento da seguinte forma:

1ª) $\sim p$
2ª) $p \vee \sim (q \vee \sim r)$
3ª) $r \rightarrow s \wedge t$

C) $s \rightarrow q$

Atribuindo-se valores lógicos às proposições simples componentes

V	***F***
s	*q*
r	*p*
t	

Substituindo-se esses valores no argumento, temos:

1ª) $\sim F$
V
2ª) $F \vee \sim (F \vee \sim V)$
$F \vee \sim (F \vee F)$
$F \vee \sim F$

$F \vee V$
V

3ª) $V \rightarrow V \wedge V$
$V \rightarrow V$
V
C) $V \rightarrow F$
F
Premissas verdadeiras e conclusão falsa, logo o argumento não é válido.

3) Demonstrar a não-validade do argumento:
Se 2 não é primo, então, 3 não é ímpar
Mas, 2 é primo

Logo, 3 é ímpar

Vamos representar o argumento na forma simbólica:

1ª) $\sim p \rightarrow \sim q$
2ª) p

C) q

Atribuindo-se os valores lógicos às proposições simples componentes:

V	***F***
p	*q*

Substituindo-se os valores atribuídos temos:

1ª) $\sim V \rightarrow \sim F$
$F \rightarrow V$
V
2ª) V
3ª) F
Premissas verdadeiras e conclusão falsa, logo o argumento é um sofisma.

Exercícios grupo H

1) Demonstrar a não-validade dos argumentos pelo "método de atribuição de valores lógicos:
a) $p \rightarrow q,\ r \rightarrow s,\ p \vee s \vdash q \vee r$
b) $\sim (p \wedge q),\ \sim p \wedge \sim q \rightarrow r \wedge s,\ s \rightarrow r \vdash r$
c) $p \leftrightarrow q \vee r,\ q \leftrightarrow p \vee r,\ r \leftrightarrow p \vee q,\ \sim p \vdash q \vee r$
d) $p \rightarrow q \vee r,\ s \leftrightarrow r,\ \sim p \vee q \vdash \sim p \wedge q$
e) $(p \rightarrow q) \rightarrow r,\ r \rightarrow \sim s \vee t,\ (s \rightarrow t) \rightarrow u,\ u \vdash p \rightarrow q$
f) $p \rightarrow (q \rightarrow r),\ s \rightarrow (t \rightarrow u),\ q \rightarrow s \wedge t,\ \sim (q \wedge u) \vdash p \leftrightarrow r$

2) Passar para a forma simbólica e demonstrar a não-validade dos argumentos:
a) Se trabalho, não posso estudar Trabalho ou serei aprovado em Lógica Trabalhei

---

Logo, fui reprovado em Lógica

b) Se $m = 0$, então $m + n = n$
Se $n = 0$, então $m + n = m$

Logo, se $m = 0$ então $n \neq 0$

c) Se 0 não é par, então, 7 não é ímpar
Mas 0 é par

Logo 7 é primo

d) Se 5 é menor que 4, então 5 não é primo
5 não é menor que 4

Logo, 5 é primo

Regras de Inferência

Regras de Interferência são argumentos válidos fundamentais usados para executar os "passos" de uma dedução ou demonstração, sendo habitual escrevê-los na forma padronizada colocando as premissas sobre um traço horizontal e, em seguida, a conclusão sob o mesmo traço.

I- Regra da adição (AD): Dada uma proposição p, dela se pode deduzir a sua disjunção com qualquer outra proposição.

a) $\dfrac{\mathbf{p}}{\mathbf{p \vee q}}$ **b)** $\dfrac{\mathbf{p}}{\mathbf{q \vee p}}$

Exemplos:

a) $\dfrac{p}{p \vee \sim q}$ b) $\dfrac{\sim p}{q \vee \sim p}$ c) $\dfrac{p \wedge q}{(p \wedge q) \vee s}$ d) $\dfrac{x \neq 2}{x \neq 2 \vee x < 1}$

II- Regra da simplificação (SIMP): Da conjunção $p \wedge q$ de duas proposições se pode deduzir cada uma das proposições ,p ou q.

a) $\dfrac{\mathbf{p \wedge q}}{\mathbf{p}}$ **b)** $\dfrac{\mathbf{p \wedge q}}{\mathbf{q}}$

Exemplos:

a) $\dfrac{p \wedge \sim q}{p}$ b) $\dfrac{(p \wedge q) \wedge r}{r}$ c) $\dfrac{x > 1 \wedge x \neq 3}{x > 1}$ d) $\dfrac{x \in A \wedge x \in B}{x \in B}$

III- Regra da conjunção (CONJ): Permite deduzir de duas proposições p e q (premissas) a sua conjunção $p \wedge q$ ou $q \wedge p$ (conclusão).

a) **p** **b)** **p**

$$\frac{q}{p \wedge q} \qquad \frac{q}{q \wedge p}$$

Exemplos:

a) $\dfrac{\begin{array}{c} p \vee r \\ \sim q \end{array}}{(p \vee r) \wedge \sim q}$ b) $\dfrac{\begin{array}{c} p \vee q \\ q \vee r \end{array}}{(q \vee r) \wedge (p \vee q)}$ c) $\dfrac{\begin{array}{c} x < 4 \\ x > 1 \end{array}}{x < 4 \wedge x > 1}$ d) $\dfrac{\begin{array}{c} x \notin A \\ x \in B \end{array}}{x \notin A \wedge x \in B}$

IV- Regra da absorção (ABS): Permite, dada uma condicional $p \rightarrow q$ (premissa) deduzir como conclusão, uma outra condicional com o mesmo antecedente p e cujo conseqüente é uma conjunção $p \wedge q$ das duas proposições que integram a premissa.

Exemplos:

$$\frac{p \rightarrow q}{p \rightarrow (p \wedge q)}$$

a) $\dfrac{(p \vee q) \rightarrow r}{(p \vee q) \rightarrow (p \vee q \wedge r)}$ b) $\dfrac{x = 1 \rightarrow x < 2}{x = 1 \rightarrow x = 1 \wedge x < 2}$ c) $\dfrac{x \in A \rightarrow x \in A \cup B}{x \in A \rightarrow x \in A \wedge x \in A \cup B}$

V- Regra Modus ponens (MP): Permite deduzir q (conclusão) a partir de $p \rightarrow q$ e p (pemissas).

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ p \end{array}}{q}$$

Exemplos:

a) $\dfrac{\begin{array}{c} \sim p \rightarrow \sim q \\ \sim p \end{array}}{\sim q}$ b) $\dfrac{\begin{array}{c} p \rightarrow q \wedge r \\ p \end{array}}{q \wedge r}$ c) $\dfrac{\begin{array}{c} \sim p \vee q \rightarrow r \wedge \sim s \\ \sim p \vee q \end{array}}{r \wedge \sim s}$ d) $\dfrac{\begin{array}{c} x = 0 \rightarrow x + y > 2 \\ x = 0 \end{array}}{x + y > 2}$

VI- Regra Modus tollens (MT): Permite, deduzir a conclusão ~p (negação do antecedente), a partir de $p \rightarrow q$ (condicional) e ~q (negação do conseqüente).

$p \rightarrow q$

$$\frac{\begin{array}{l}\boldsymbol{\sim q}\end{array}}{\boldsymbol{\sim p}}$$

Exemplos:

a) $\dfrac{\begin{array}{l} p \wedge r \rightarrow s \\ \sim s \end{array}}{\sim (p \wedge r)}$ b) $\dfrac{\begin{array}{l} p \rightarrow \sim q \\ \sim\sim q \end{array}}{\sim p}$ c) $\dfrac{\begin{array}{l} p \rightarrow q \leftrightarrow r \\ \sim (q \leftrightarrow r) \end{array}}{\sim p}$ d) $\dfrac{\begin{array}{l} x \neq 0 \rightarrow x = y \\ x \neq y \end{array}}{x = 0}$

VII- Regra do silogismo disjuntivo (SD): Permite deduzir da disjunção $p \vee q$ de duas proposições e da negação $\sim p$ ou $\sim q$, de uma delas a outra proposição (q ou p).

a) $\dfrac{\begin{array}{l} \boldsymbol{p \vee q} \\ \boldsymbol{\sim p} \end{array}}{\boldsymbol{q}}$ **b)** $\dfrac{\begin{array}{l} \boldsymbol{q \vee p} \\ \boldsymbol{\sim q} \end{array}}{\boldsymbol{p}}$

Exemplos:

a) $\dfrac{\begin{array}{l} (p \wedge r) \vee q \\ \sim q \end{array}}{(p \wedge r)}$ b) $\dfrac{\begin{array}{l} \sim p \vee \sim q \\ \sim \sim p \end{array}}{\sim q}$ c) $\dfrac{\begin{array}{l} x = 2 \vee x = 0 \\ x \neq 0 \end{array}}{x = 2}$ d) $\dfrac{\begin{array}{l} \sim (p \leftrightarrow q) \vee r \\ \sim\sim (p \leftrightarrow q) \end{array}}{r}$

VIII- Regra do silogismo hipotético (SH):Esta regra permite, dadas duas condicionais: $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow r$ (premissas), deduzir uma terceira condicional $p \rightarrow r$(conclusão).

$$\frac{\begin{array}{l} \boldsymbol{p \rightarrow q} \\ \boldsymbol{q} \rightarrow r \end{array}}{\boldsymbol{p \rightarrow r}}$$

Exemplos:

a) $\dfrac{\begin{array}{l} \sim p \rightarrow \sim q \\ \sim q \rightarrow \sim r \end{array}}{\sim p \rightarrow \sim r}$ b) $\dfrac{\begin{array}{l} \sim p \rightarrow q \vee r \\ q \vee r \rightarrow \sim s \end{array}}{\sim p \rightarrow \sim s}$ c) $\dfrac{\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \rightarrow r \\ r \rightarrow (q \wedge s) \end{array}}{(p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge s)}$ d) $\dfrac{\begin{array}{l} |x| = 2 \rightarrow x = 2 \\ x = 2 \rightarrow x + 2 = 4 \end{array}}{|x| = 2 \rightarrow x + 2 = 4}$

IX- Regra do dilema construtivo (DC): Nesta regra, as premissas são duas condicionais e a disjunção dos seus antecedentes, e a conclusão é a disjunção dos conseqüentes destas condicionais.

$$\begin{array}{c} \mathbf{p \rightarrow q} \\ \mathbf{r \rightarrow s} \\ \mathbf{p \vee r} \\ \hline \mathbf{q \vee s} \end{array}$$

Exemplos:

a)
$$\begin{array}{c} (p \wedge q) \rightarrow \sim r \\ s \rightarrow t \\ (p \wedge q) \vee s \\ \hline \sim r \vee t \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{c} x = y \rightarrow x > 1 \\ x \neq y \rightarrow x = 1 \\ x = y \vee x \neq y \\ \hline x > 1 \vee x = 1 \end{array}$$

X- Regra do dilema destrutivo (DD): Nesta regra, as premissas são duas condicionais e a disjunção da negação dos seus conseqüentes, e a conclusão é a disjunção da negação dos antecedentes destas condicionais.

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \sim q \vee \sim s \\ \hline \mathbf{\sim p \vee \sim r} \end{array}$$

Exemplos:

a)
$$\begin{array}{c} \sim q \rightarrow r \\ p \rightarrow \sim s \\ \sim r \vee \sim\sim s \\ \hline \sim\sim q \vee \sim p \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{c} x + y = 7 \rightarrow x = 2 \\ y - x = 2 \rightarrow x = 3 \\ x \neq 2 \vee x \neq 3 \\ \hline x + y \neq 7 \vee y - x \neq 2 \end{array}$$

Exercícios grupo I

1) Indicar a regra de inferência que justifica a validade dos seguintes argumentos:

a) $p \rightarrow q \vdash (p \rightarrow q) \vee \sim r$ b) $\sim p \wedge (q \leftrightarrow r) \vdash \sim p$

c) $p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r \vdash p \rightarrow \sim r$ d) $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \vdash q \rightarrow r$

e) $(q \vee r) \rightarrow \sim p, p \vdash \sim(q \vee r)$ f) $p \rightarrow q, r \rightarrow \sim s \vdash (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \sim s)$

g) $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r), \sim(\sim p \wedge r) \vdash p \wedge q$ h) $p \rightarrow q \vee r \vdash p \rightarrow p \wedge (q \vee r)$

i) $x + y = z \rightarrow y + x = z, x + y = z \vdash y + x = z$

j) x e $y \in R \rightarrow x + y \in R, x + y \notin R \vdash x$ e $y \notin R$ k) $x \neq 0, x \neq 1 \vdash x \neq 0 \wedge x \neq 1$

2) Usar a regra "Modus ponens" para deduzir a conclusão de cada um dos seguintes pares de premissas:

a) $1 < 3 \rightarrow 1 < 4$
$1 < 3$
____

b) $x + 0 = y \rightarrow x = y$
$x + 0 = y$
____

c) $x = y \wedge y = z$
$(x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$
____

3) Usar a regra "Modus tollens" para deduzir a conclusão de cada um dos seguintes pares de premissas:

a) $x = y \rightarrow x \neq 1$
$x = 1$
____

b) $x = 0 \rightarrow x + y = y$
$x + y \neq y$
____

c) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow \sim(r \vee s)$
$\sim\sim(r \vee s)$
____

4) Usar a regra do Silogismo disjuntivo para deduzir a conclusão de cada um dos seguintes pares de premissas:

a) $x + 5 = 15 \vee x \neq 10$
$x + 5 \neq 15$
____

b) $r \vee (s \wedge t)$
$\sim r$
____

c) $x \neq 6 \vee x + y = 10$
$x + y \neq 10$
____

5) Usar a regra do Silogismo hipotético para deduzir a conclusão de cada um dos seguintes pares de premissas:

a) $p \rightarrow r \wedge \sim s$
$r \wedge \sim s \rightarrow t$
____

b) $x = 5 \rightarrow x > y$
$x > y \rightarrow x \neq 8$
____

c) $t \vee s \rightarrow q \wedge r$
$q \wedge r \rightarrow \sim p$
____

6) Usar a regra do Dilema construtivo para deduzir a conclusão de cada um dos seguintes ternos de premissas:

a) $p \rightarrow \sim r$
$\sim q \rightarrow s$
$p \vee \sim q$
----

b) $x = 8 \vee x < y$
$x = 8 \rightarrow x > 5$
$x < y \rightarrow z < 3$
----

c) $x = 1 \rightarrow x^2 = 1$
$x = 1 \vee y = 2$
$y = 2 \rightarrow y^2 = 4$
----

7) Usar a regra do Dilema destrutivo para deduzir a conclusão de cada um dos seguintes ternos de premissas:

a) $p \vee q \rightarrow r$
$p \rightarrow r \wedge s$
$\sim r \vee \sim (r \wedge s)$
----

b) $p \rightarrow \sim r \wedge q$
$\sim(\sim r \wedge q) \vee \sim s$
$\sim q \rightarrow s$
----

c) $y \neq 7 \vee y \neq 14$
$x = 1 \rightarrow y = 7$
$x = 6 \rightarrow y = 14$

Validade mediante Regras de Inferência

Exemplos:

1) Verificar a validade do argumento: $p \to q,\ p \wedge r \ \vdash\ q$

Resolução:

(1) $p \to q$
(2) $p \wedge r$

---

(3) p SIMP (2)
(4) q MP (1,3)

Da segunda premissa: $p \wedge r$, pela Regra da Simplificação (SIMP), inferimos p. De p e da primeira premissa: $p \to q$, pela Regra Modus ponens (MP) inferimos q, que é a conclusão do argumento dado.

Como a conclusão foi deduzida das duas premissas dadas por meio de duas Regras de Inferência, então o argumento dado é válido.

2) Verificar que é válido o argumento: $p \wedge q,\ p \vee r \to s \ \vdash\ p \wedge s$

Resolução:

(1)$p \wedge q$
(2)$p \vee r$

---

(3) p SIMP (1)
(4) $p \vee r$ AD (3)
(5) s MP (2,4)
(6) $p \wedge s$ CONJ (3,5)

Da primeira premissa: $p \wedge q$, pela regra da Simplificação, inferimos p. De p, pela regra da Adição, inferimos $p \vee r \to s$, pela regra Modus ponens, inferimos s. De p e de s, pela regra da Conjunção, inferimos $p \wedge s$, que é a conclusão do argumento dado.

Assim a conclusão pode ser deduzida das duas premissas do argumento dado por meio de quatro Regras de inferência, portanto o argumento dado é válido.

3) Verificar a validade do argumento: $p \to (q \to r),\ p \to q,\ p \ \vdash\ r$ Resolução:

(1) $p \to (q \to r)$
(2) $p \to q$
(3) p

---

(4) $q \to r$ MP (1,3)
(5) q MP (2,3)
6 r MP (4,5)

---

(5) Partindo das premissas, chegamos à conclusão. Portanto o argumento é válido

4) Verificar a validade do argumento: $p \wedge q \rightarrow r,\ r \rightarrow s,\ t \rightarrow \sim u\ ,\ t\ ,\ \sim s \vee u \ \vdash \ \sim(p \wedge q)$
Resolução:

(1) $p \wedge q \rightarrow r$
(2) $r \rightarrow s$
(3) $t \rightarrow \sim u$
(4) t
(5) $\sim s \vee u$

---

(6) $\sim u$ MP (3,4)
(7) $\sim s$ SD (5,6)
(8) $\sim r$ MT (2,7)
(9) $\sim (p \wedge q)$ MT (1,8)

Partindo das premissas, chegamos à conclusão dada. Logo, o argumento é válido.

5) Verificar a validade do argumento: $p \rightarrow q,\ q \rightarrow r,\ s \rightarrow t,\ p \vee s \ \vdash \ r \vee t$
Resolução:

(1) $p \rightarrow q$
(2) $q \rightarrow r$
(3) $s \rightarrow t$
(4) $p \vee s$

---

(5) $p \rightarrow r$ SH (1,2)
(6) $r \vee t$ DC (3,4,5)

Partindo das premissas, chegamos à conclusão dada. Portanto o argumento é válido.

6) Verificar a validade do argumento: $p \rightarrow q,\ \sim r \rightarrow (s \rightarrow t),\ r \vee (p \vee s),\ \sim r \vdash q \vee t$
Resolução:

(1) $p \rightarrow q$
(2) $\sim r \rightarrow (s \rightarrow t)$
(3) $r \vee (p \vee s)$
(4) $\sim r$

---

(5) $s \rightarrow t$ MP (2,4)
(6) $p \vee s$ SD (3,4)
(7) $q \vee t$ DC (1,5,6)

Partindo das premissas, chegamos à conclusão dada. Logo o argumento é válido.

7) Verificar a validade do argumento:
Se $x = y$, então $x = z$
Se $x = z$, então $x = t$
Ou $x = y$ ou $x = 0$
Se $x = 0$, então $x + u = 1$
Mas $x + u \neq 1$

Portanto, $x = t$
Resolução:

Primeiramente, vamos passar o argumento da linguagem corrente para a linguagem simbólica:

(1) $p \rightarrow q$
(2) $q \rightarrow r$
(3) $p \vee s$
(4) $s \rightarrow t$
(5) $\sim t$

---

(6) $p \rightarrow r$ SH (1,2)
(7) $\sim s$ MT (4,5)
(8) p SD (3,7)
(9) r MP(6,8)

Partindo das premissas, chegamos à conclusão do argumento r, que em linguagem corrente equivale a x = t, logo o argumento é válido.

Exercícios grupo J

1) Usar a regra Modus ponens, para demonstrar a validade de cada um dos seguintes argumentos:

a) $p \rightarrow q,\ q \rightarrow r,\ p \mid\!\!\text{——}\ r$

b) $p \rightarrow \sim q,\ p,\ \sim q \rightarrow r \mid\!\!\text{——}\ r$

c) $p \rightarrow q \wedge r,\ q \wedge r \rightarrow s,\ p \mid\!\!\text{——}\ s$

d) $\sim p \rightarrow q \vee r,\ s \vee t \rightarrow \sim p,\ s \vee t \mid\!\!\text{——}\ q \vee r$

e)
$x + 1 = 2$
$x + 1 = 2 \rightarrow y + 1 = 2$
$y + 1 = 2 \rightarrow x = y$

$\therefore x = y$

f)
$\sim p \rightarrow q$
$\sim p$
$\sim p \rightarrow r$
$r \rightarrow \sim t$

$\therefore \sim t$

2) Usar as regras Modus ponens e Modus tollens para demonstrar a validade dos seguintes argumentos:

a)
$p \rightarrow q$
$\sim p \rightarrow r$
$\sim q$

$\therefore r$

b)
$p \rightarrow \sim q$
$\sim\sim q$
$\sim p \rightarrow r \wedge s$

$\therefore r \wedge s$

c)
$p \rightarrow q$
$q \rightarrow \sim\sim r$
$s \rightarrow \sim r$
p
----

d)
$x \neq 0 \rightarrow y = 1$
$x = y \rightarrow y = t$
$y = t \rightarrow y \neq 1$
$x = y$

$\therefore \sim s$ $\qquad\qquad$ $\therefore x = 0$

3) Usar as regras da Conjunção,Simplificação, Modus ponens e Modus Tollens para verificar que são válidos os seguintes argumentos:

a) $p \wedge q,\ p \rightarrow r \vdash p \wedge r$ $\qquad$ b) $\sim p \wedge q,\ r \rightarrow p \vdash \sim p \wedge \sim r$

c) $r \rightarrow p,\ r \rightarrow q,\ r \vdash p \wedge q$ $\qquad$ d) $\sim p \rightarrow q,\ \sim (r \wedge s),\ p \rightarrow r \wedge s \vdash \sim p \wedge q$

4) Usar a regra do Silogismo disjuntivo para verificar que são válidos os seguintes argumentos:

a) $p,\ p \rightarrow \sim q,\ q \vee r \vdash p \wedge r$ $\qquad$ b) $p \wedge q,\ r \vee s,\ p \rightarrow \sim s \vdash r$

c) $\sim p,\ p \vee (q \vee r),\ \sim r \vdash q$ $\qquad$ d) $p \vee \sim q,\ \sim\sim q,\ p \rightarrow r \wedge s \vdash s$

e) $1 + 1 = 2 \wedge 2 + 1 = 3$
$3 - 2 = 1 \vee 2 - 1 \neq 1$
$1 + 1 = 2 \rightarrow 2 - 1 = 1$

$\therefore\ 3 - 2 = 1$

f) $x = 0 \vee x = y$
$x = y \rightarrow x = z$
$x \neq z$

$\therefore\ x = 0$

5) Usar a regra da Adição para verificar que são válidos os seguintes argumentos:

a) $\sim p,\ q \rightarrow p,\ \sim q \vee r \rightarrow s \vdash s$ $\qquad$ b) $p \wedge q \rightarrow s,\ r,\ r \rightarrow p \wedge q \vdash s \vee q$

c) $p \wedge \sim q,\ r \rightarrow q,\ r \vee s,\ p \vee s \rightarrow t \vdash t$

d) $x - 2 = 1 \wedge 2 - x \neq 1$
$x = 1 \rightarrow 2 - x = 1$
$x = 1 \vee x + 2 = 5$
$x + 2 = 5 \vee x - 2 = 1 \rightarrow x = 3$

$\therefore x = 3$

e) $x + 2 \neq 5 \vee 2x = 6$
$x + 2 \neq 5 \rightarrow x \neq 3$
$2x - 2 = 8 \rightarrow 2x \neq 6$
$x + 3 = 8 \wedge 2x - 2 = 8$

$\therefore\ x \neq 3 \vee x > 2$

6) Usar a regra do Silogismo hipotético para verificar que são válidos os seguintes argumentos:

a) $5x - 4 = 3x + 4 \rightarrow 5x = 3x + 8$
$2x = 8 \rightarrow x = 4$
$5x = 3x + 8 \rightarrow 2x = 8$

$\therefore 5x - 4 = 3x + 4 \rightarrow x = 4$

b) $x \neq y \rightarrow y < x$
$(x > 5 \rightarrow y < x) \rightarrow y = 5$
$y \neq 5 \vee x = 6$
$x > 5 \rightarrow x \neq y$

$\therefore x = 6 \vee x > 6$

c) $(x + y = 5 \rightarrow y = 3) \vee x + z = 3$
$z \neq 1 \vee (x + z = 3 \rightarrow x + y = 5$
$x + y \neq 5 \wedge z = 1$

$\therefore x + z = 3 \rightarrow y = 3$

d) $x = 3 \rightarrow x > y$
$x \neq 3 \rightarrow z = 5$
$(x = 3 \rightarrow x < z) \rightarrow x \geq z$
$x > y \rightarrow x < z$

$\therefore z = 5 \vee z > 5$

7) Usar a regra do Dilema construtivo para verificar a validade dos seguintes argumentos:

a)
$x \neq 6 \rightarrow (x = 2 \vee x = 8)$
$2x + 3y = 21 \wedge x \neq 6$
$x = 2 \rightarrow y = 9$
$x = 8 \rightarrow y = 1$

$\therefore\ y = 1 \vee y = 9$

b)
$y = 0 \rightarrow xy = 0$
$y = 0 \vee y \geq 1$
$xy = 0 \vee xy > 3 \rightarrow x \neq 4$
$y \geq 1 \rightarrow xy > 3$

$\therefore\ x \neq 4 \vee x > y$

c)
$2x^2 - 10x + 12 = 0 \wedge x < 4$
$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = 2 \vee x = 3$
$x = 2 \rightarrow x^2 = 4$
$x = 3 \rightarrow x^2 = 9$
$2x^2 - 10x + 12 = 0 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$

$\therefore\ x^2 = 4 \vee x^2 = 9$

d)
$x=5 \vee x < y$
$x > 3 \vee z < 2 \rightarrow z < x \vee y = 1$
$x < y \rightarrow z < 2$
$x = 5 \rightarrow x > 3$
$z < x \rightarrow x = 4$
$x > 3 \vee z < 2 \rightarrow y \neq 1$

$\therefore\ x = 4$

8) Usar as regras de Inferência para provar a validade dos argumentos:

a) $r \rightarrow p \vee q,\ r,\ \sim p \mid\!\!\!\text{——}\ q$

b) $p \rightarrow \sim q,\ \sim\sim q,\ \sim p \rightarrow r \mid\!\!\!\text{——}\ r$

c) $p \wedge q,\ p \rightarrow r,\ q \rightarrow s \mid\!\!\!\text{——}\ r \wedge s$

d) $p \rightarrow q,\ \sim q,\ \sim p \rightarrow r \mid\!\!\!\text{——}\ r$

e) $p \rightarrow q,\ \sim q,\ p \vee r \mid\!\!\!\text{——}\ r$

f) $\sim p \vee \sim\sim q,\ \sim\sim p,\ \sim r \rightarrow \sim q \mid\!\!\!\text{——}\ \sim\sim r$

g) $p \rightarrow \sim q \wedge r,\ p,\ s \rightarrow q,\ s \vee t \mid\!\!\!\text{——}\ t$

h) $p \wedge q,\ p \rightarrow r,\ r \wedge s \rightarrow \sim t,\ q \rightarrow s \mid\!\!\!\text{——}\ \sim t$

i)
$x + 8 = 12 \vee x \neq 4$
$x = 4 \wedge y < x$
$x + 8 = 12 \wedge y < x \rightarrow y + 8 < 12$

$\therefore\ y + 8 < 12$

j)
$x < y \vee x = y$
$x = y \rightarrow y \neq 5$
$x < y \wedge y = 5 \rightarrow x < 5$
$y = 5$

$\therefore\ x < 5$

k)
$2x + y = 5 \rightarrow 2x = 2$
$2x + y = 5 \vee y = 3$
$2x = 2 \rightarrow x = 1$
$y = 3 \rightarrow 2x = 2$

$\therefore\ x = 1$

l)
$x = 3 \vee x = 4$
$x = 3 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$
$x = 4 \rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$
$x^2 - 7x + 12 = 0 \rightarrow x > 2$
$x^2 < 9 \rightarrow x \leq 2$
$x^2 \geq 9 \rightarrow x^2 = 9 \vee x^2 > 9$

$\therefore\ x^2 = 9 \vee x^2 > 9$

m) $p \vee q \rightarrow \sim r,\ p,\ s \rightarrow r \mid\!\!\!\text{——}\ \sim s$

n) $p \vee q \rightarrow \sim r,\ q,\ s \wedge t \rightarrow r \mid\!\!\!\text{——}\ \sim (s \wedge t)$

o) $p \vee (q \wedge r),\ q \rightarrow s,\ r \rightarrow t,\ s \wedge t \rightarrow p \vee r,\ \sim p \mid\!\!\!\text{——}\ r$

p) $p \vee q \rightarrow (p \rightarrow s \wedge t),\ p \wedge r \mid\!\!\!\text{——}\ t \vee u$

Lógica de Predicados

Sentenças abertas

Sentença aberta com uma variável:

Definição : Chama-se sentença aberta ou função proposicional com uma variável em um conjunto A, uma expressão p (x) tal que p (a) é falsa (F) ou verdadeira (V) para todo a $\in$ A.

O conjunto A recebe o nome de conjunto-universo (ou domínio) da variável x e qualquer elemento
a $\in$ A diz-se um valor da variável x.

Exemplos: São sentenças abertas em N = {0,1,2,3,......,n,....} as seguintes expressões:

a) $x + 2 > 10$ b) $x^2 - 3x - 4 = 0$ c) $2x + 3 = 7$
d) x é par e) x é divisor de 12

Conjunto-verdade de uma sentença aberta com uma variável

Definição : O conjunto-verdade de uma sentença aberta p(x) em um conjunto A é o conjunto de todos os elementos a $\in$ A tais que p (a) é uma proposição verdadeira (V). Representa-se este conjunto por Vp . Simbolicamente, temos: $Vp = \{x \mid x \in A \wedge p(x) \text{ é } V\}$

É evidente que Vp é sempre um subconjunto de A ou seja $Vp \subset A$.

Exemplos:

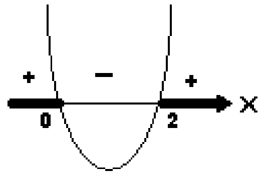
1) Seja a sentença aberta $x + 2 > 7$ em N
$Vp = \{ x \mid x \in N \wedge x + 2 > 7 \} = \{ 6,7,8,9,....\} \subset N$

2) Para a sentença aberta $x + 5 < 4$ em N:
$Vp = \{x \mid x \in N \wedge x + 5 < 4\} = \varnothing \subset N$

3) Seja a sentença aberta “x é divisor de 9’ em N, temos:
$Vp = \{x \mid x \in N \wedge$ “x é divisor de 9”$\} = \{1,3,9\} \subset N$

4) Para se determinar o conjunto-verdade da sentença aberta $x^2 - 2x > 0$ em Z (conjunto dos números inteiros)
Resolução:

$x^2 - 2x = 0$
$x (x - 2) = 0$
$x' = 0$
$x'' = 2$



$Vp = \{x \mid \in Z \wedge x^2 - 2x > 0\} = Z - \{0,1,2\}$

Sentenças abertas com duas variáveis

Definição: Dados dois conjuntos A e B, chama-se sentença aberta ou função proposicional com duas variáveis em A x B, uma expressão p (x,y) tal que p (a,b) é falsa (F) ou verdadeira (V) para todo par ordenado $(a,b) \in A \times B$. O conjunto A x B recebe o nome de conjunto-universo das variáveis x e y, e qualquer elemento (a,b) diz-se um par de valores das variáveis x e y.

Exemplos: Sejam os conjuntos $A = \{1,2\}$ e $B = \{3,4,5\}$.

São sentenças abertas em $A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4),(2,5)\}$:

a) x é menor que y ($x < y$)
b) x é divisor de y ($x \mid y$)
c) y é o dobro de x ($y = 2x$)
d) m.d.c (x,y) = 1

Conjunto-verdade de uma sentença aberta com duas variáveis

Definição : O conjunto-verdade de uma sentença aberta p(x,y) em A x B, é o conjunto de todos os elementos $(a,b) \in A \times B$ tais que p (a,b) é uma proposição verdadeira (V).

Simbolicamente temos:

$Vp = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B \text{ e } p(x,y) \text{ é V}\}$

O conjunto-verdade Vp de uma sentença aberta p (x,y) em A x B é sempre um subconjunto do conjunto A x B
($Vp \subset A \times B$).

Exemplos:

1) Sejam os conjuntos $A = \{ 1,2,3,4 \}$ e $B = \{ 2,3,5 \}$
   a) O conjunto-verdade da sentença aberta $x > y$ em A x B é:
      $Vp = \{(x,y) \in A \times B \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x > y \} = \{(3,2), (4,2)\}$
   b) O conjunto-verdade da sentença aberta $x + 1 < y$ em A x B é:
      $Vp = \{ (x,y) \in A \times B \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x + 1 < y \} = \{ (1,3), (1,5), (2,5), (3,5)\}$

2) O conjunto-verdade da sentenca aberta $2x + y = 10$ em N x N , é:

$Vp = \{ (x,y) \in N \times N \mid x,y \in N \wedge 2x + y = 10 \} = \{ (0,10), (1,8), (2,6), (3,4, (4,2), (5,0) \}$

3) O conjunto-verdade da sentença-aberta $x^2 + y^2 = 1$ em Z x Z é:
   $Vp = \{(x,y) \mid x,y \in Z \wedge x^2 + y^2 = 1\} = \{ (0,1), (1,0), (-1,0) (0,-1) \} \subset ZxZ$

Sentenças abertas com n variáveis

Sejam os n conjuntos A_1, A_2,.........A_n e o seu produto cartesiano $A_1 x A_2 x$ ....xA_n. Chama-se sentença aberta ou função proposicional com n variáveis em A_1, A_2,.. ....x A_n, uma expressão p (x_1, x_2, ...x_n) tal que p (a_1, a_2,...........,a_n) é falsa (F) ou verdadeira (V) para toda n-upla (a_1, a_2,........., a_n) $\in$ A_1 x A_2 x ....x A_n)

Exemplo: A expressão $2x + 3y – z < 15$ é uma sentença aberta em N x N x N. O terno ordenado (1,3,4) $\in$ N x N x N um dos ternos ordenados que satisfazem esta sentença aberta.

Conjunto-verdade de uma sentença aberta com n variáveis

Definição: O conjunto-verdade de uma sentença aberta p (x_1, x_2, ...,x_n) em A_1 x A_2 x.......x A_n é o conjunto de todas as n-uplas (a_1, a_2, ...a_n) $\in$ A_1 x A_2 x...........x A_n tais que p (a_1, a_2,............a_n) é uma proposição verdadeira (V).

Simbolicamente: Vp = { (x_1, x_2,.....x_n) $\in$ A_1 x A_2 x......A_n | p (x_1, x_2, ...x_n) é V }

Exercícios grupo K

1) Determinar o conjunto-verdade em N de cada uma das seguintes sentenças-abertas:
   a) $8x = 120$ b) $x – 2 < 6$ c) $3x^2 – 5x + 2 = 0$ d) $x^2 – 4x = 0$
2) Determinar o conjunto-verdade em Z de cada uma das seguintes sentenças abertas:
   a) $x^2 – 16 = 0$ b) $3x^2 + 7x = 0$ c) $x^2 \le 25$ d) $| 2x – 1 | = 9$ e) $| x – 1 | + | x + 6 | = 13$
3) Determinar o conjunto-verdade em A = { 1,2,5,7,9,12 } de cada uma das seguintes sentenças abertas:
   a) $x + 2 \in A$ b) $x – 4$ é ímpar c) x é divisor de 10 d) $| 2x – 3 | < 3$ e) $x^3 – 7x^2 = 0$
4) Determinar em R , o conjunto-verdade de cada uma das seguintes sentenças abertas:
   a) $| 5x + 6 | = 3x – 2$ b) $| x^2 – 3x | = | x – 3 |$ c) $x^2 – 2 | x | - 3 = 0$ d) $x^3 + x = 0$
5) Determinar o conjunto-verdade da sentença aberta $x + y > 5$ em A x B, sendo A = {1.3,4 } e B = { 2,3,5}
6) Determinar o conjunto-verdade da sentença aberta m.d.c..(x,y) = 3 em AxA, sendo A = { 2,3,6,9 }

Operações Lógicas sobre sentenças abertas

1) Conjunção:

Sejam p (x) e q (x) duas sentenças abertas em um conjunto A. Se um elemento a $\in$ A satisfaz ao mesmo tempo as sentenças p (x) e q (x) em A, então p (x) $\wedge$ q (x) é verdadeira.

Portanto, o conjunto-verdade da sentença aberta ($p(x) \wedge q(x)$) em A é a **intersecção** dos conjuntos-verdade Vp e Vq.

Simbolicamente, temos: $\mathbf{V(p \wedge q) = Vp \cap Vq}$

Exemplo: Sejam as sentenças abertas em Z:

$p(x) = x^2 + x - 6 = 0$ e $q(x) = x^2 - 9 = 0$

$\Delta = 25$

$x = \dfrac{-1 \pm 5}{2}$

$x' = 2$ e $x'' = -3$

$Vp = \{-3, 2\}$

$x^2 = 9$

$x = \pm 3$

$Vq = \{-3, 3\}$

$V(p \wedge q) = Vp \cap Vq$

$V(p \wedge q) = \{-3, 2\} \cap \{-3, 3\}$

$V(p \wedge q) = \{-3\}$

2) Disjunção:

Sejam p(x) e q(x) duas sentenças abertas em A. Se um elemento $x \in A$ satisfaz pelo menos uma das sentenças p(x) e q(x) então p(x) ou q(x) é verdadeira.

Portanto, o conjunto-verdade da sentença aberta $p(x) \vee q(x)$ em A é a **união** dos conjuntos-verdade Vp e Vq.

Simbolicamente, temos: $\mathbf{V(p \vee q) = Vp \cup Vq}$

Exemplo: Sejam as sentenças abertas em Z:

$p(x) = x^2 + x - 2 = 0$ raízes -2 e 1 $Vp = \{-2, 1\}$

$q(x) = x^2 - 4 = 0$ raízes -2 e 2 $Vq = \{-2, 2\}$

$V(p \vee q) = Vp \cup Vq$

$V(p \vee q) = \{-2, 1\} \cup \{-2, 2\}$

$V(p \vee q) = \{-2, 1, 2\}$

3) Condicional:

Sejam p(x) e q(x) duas sentenças abertas em A. Ligando-se ambas as sentenças pelo conectivo $\rightarrow$, obtemos uma nova sentença aberta em A: $p(x) \rightarrow q(x)$.

Lembrando que $p(x) \rightarrow q(x) \Leftrightarrow \sim p(x) \vee q(x)$, podemos dizer que o conjunto-verdade da sentença aberta $p(x) \rightarrow q(x)$ em A coincide com o conjunto-verdade da sentença aberta $\sim p(x) \vee q(x)$ em A e, que é a união dos conjuntos-verdade das sentenças $\sim p(x)$ e q(x) em A.

Simbolicamente,temos:

$V(p \to q) = V\sim p \cup Vq$

Exemplo: Sejam as sentenças abertas em N (conjunto dos números naturais):

p(x): $x \mid 12$ (x é divisor de 12)
q(x): $x \mid 45$ (x é divisor de 45)
temos: $Vp = \{1,2,3,4,6,12\}$ $Vq = \{1,3,5,9,15,45\}$ $V\sim p = N - \{1,2,3,4,6,12\}$
$V(p \to q) = V\sim p \cup Vq = N - \{2,4,6,12\}$

4) Bicondicional:

Sejam p(x) e q(x) duas sentenças abertas em A. Ligando-se ambas as sentenças pelo conectivo $\leftrightarrow$, obtemos uma nova sentença aberta em A = $p(x) \leftrightarrow q(x)$.

Lembrando que $p(x) \leftrightarrow q(x) \Leftrightarrow (p(x) \to q(x)) \wedge (q(x) \to p(x))$, então o conjunto-verdade da sentença $p(x) \leftrightarrow q(x)$ em A, coincide com o conjunto-verdade da sentença aberta $(p(x) \to q(x)) \wedge (q(x) \to p(x))$. Logo, é a intersecção dos conjuntos-verdade das sentenças abertas em A: $p(x) \to q(x)$ e $q(x) \to p(x)$. Simbolicamente temos:

$V(p \leftrightarrow q) = V(p \to q) \cap V(q \to p) = (V\sim p \cup Vq) \cap (V\sim q \cup Vp)$.
Exemplo: Sejam as sentenças abertas em A = $\{0,1,2,3,4,5\}$
p(x): $x^2 - 4x = 0$ e q(x): $x^2 - 25 = 0$
temos: $Vp = \{0,4\}$ $Vq = \{5\}$ $V\sim p = \{1,2,3,5\}$ $V\sim q = \{0,1,2,3,4\}$
$V(p \leftrightarrow q) = (V\sim p \cup Vq) \cap (V\sim q \cup Vp)$
$V(p \leftrightarrow q) = \{1,2,3,5\} \cap \{0,1,2,3,4\}$
$V(p \leftrightarrow q) = \{1,2,3,\}$

Exercícios grupo L

1) Determinar o conjunto-verdade em A = $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ de cada uma das seguintes sentenças abertas compostas:
a) $x < 9 \wedge$ x é ímpar b) x é par $\wedge\ x + 3 \leq 11$ c) $5 \mid x \wedge x \leq 10$ d) $(x + 5) \in A \wedge (x^2 - 36) \notin A$

2) Determinar o conjunto-verdade em A = $\{0,1,2,3,4,5\}$ de cada uma das seguintes sentenças abertas compostas:
a) $x^2 - 4x = 0 \vee x^2 = x$ b) x é ímpar $\vee\ x^2 < 9$ c) x é primo $\vee\ (x + 5) \in A$
d) $x^2 \geq 25 \vee x^2 - 6x + 5 = 0$ e) $\sim(x \leq 2)$ f) $\sim(x \mid 10)$ g) $\sim(x^2 - 3x = 0)$

3) Determinar o conjunto-verdade em A = $\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ de cada uma das seguintes sentenças abertas compostas:
a) Se x é ímpar $\to x^2 - 4 = 0$ b) $(x + 6) \notin A \to x < 0$
c) $x^2 + 2x - 8 < 0 \to x^2 - 4 = 0$ d) $x \mid 12 \to$ x é primo

4) Determinar o conjunto-verdade em $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ de cada uma das seguintes sentenças abertas compostas:

a) $x^2 – 4x = 0 \leftrightarrow x^2 – x = 0$ b) x é primo $\leftrightarrow (x + 4) \in A$

c) x ´ímpar $\leftrightarrow x^2 < 10$ d) $x^2 > 15 \leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$

5) Sejam as sentenças abertas em R: $p(x): 3x – 4 \le 0$ e $q(x): x + 2 \ge 0$ determinar:

a) o conjunto-verdade de $p(x) \wedge q(x)$

b) o conjunto-verdade de $p(x) \rightarrow q(x)$

6) Sejam as sentenças abertas em R: $p(x) : 36x^2 – 19x – 6 = 0$ e $q(x) : 18x^2 + 13x + 2 = 0$ determinar:

a) $p(x) \wedge q(x)$ b) $p(x) \vee q(x)$

Quantificadores

Considerando por exemplo, o conjunto $A = \{8, 9, 11, 13, 14\}$, podemos dizer:

- qualquer que seja o elemento de A, ele é um número natural;
- existe elemento de A que é número par;
- existe um único elemento de A que é múltiplo de 3;
- não existe elemento de A menor que 8.

Em Lógica e em Matemática há símbolos próprios, chamados quantificadores, usados para representar expressões do tipo das elencadas acima. Existem dois tipos de quantificadores : universal e existencial.

Quantificador universal: Símbolo: $\forall$ (lê-se: “para todo”, “qualquer que seja”)

Quantificador existencial: Símbolo: $\exists$ (lê-se: “existe”).

Para negar que existe, usa-se o símbolo $\exists$ (lê-se: “não existe”).

Observe que quando dizemos:”Existe um x tal que ...”, não estamos dizendo que esse x é único. Por exemplo, a sentença: “Existe um x tal que x < 11” é verdadeira, embora haja mais de um número que é menor que 11.

Vamos voltar ao conjunto $A= \{8,9,11,13,14\}$, usando os quantificadores, podemos dizer:

$\forall x \in A$, x é natural.
$\exists x \in A$ | x é par.
$\exists x \in A$ | x é múltiplo de 3.
$\sim\exists x \in A$ | $x < 8$.

Os quantificadores são usados para transformar sentenças abertas em proposições.

Seja p(x) uma sentença aberta em um conjunto A, não vazio.Essa sentença aberta com qualquer quantificador antes dela, torna-se uma proposição e, portanto, tem um valor lógico V ou F.

Para o quantificador universal ($\forall$), a proposição ($\forall$ x $\in$ A) (p(x)) é:

a) VERDADEIRA, se Vp = A
b) FALSA, se Vp $\neq$ A

Para o quantificador existencial ($\exists$), a proposição ($\exists$ x $\in$ A)(p(x))é:

a) VERDADEIRA, se Vp $\neq \varnothing$
b) FALSA, se Vp = $\varnothing$

Observe algumas sentenças abertas transformadas em proposições acompanhadas dos respectivos valores lógicos.

Sentença aberta	**Proposição**	**Valor lógico**
$x^2 \geq 0$	$(\forall x \in \mathbb{N})(x^2 \geq 0)$	V
$x^2 - 9 = 0$	$(\exists x \in \mathbb{N})(x^2 - 9 = 0)$	V
$x + 5 = 2x - 1$	$(\exists x \in \Re)(x + 5 = 2x - 1)$	V
$5x + 3 > x + 4$	$(\sim \exists x \in \Re)(5x + 3 > x + 4)$	F
$x + 5 > 12$	$(\forall x \in \Re)(x + 5 > 12)$	F

Exercícios grupo M

1) Sendo R o conjunto dos números reais, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

a) $(\forall x \in R)(|x| = x$
b) $(\exists x \in R)(x^2 = x)$
c) $(\exists x \in R)\ |x| = 0$
d) $(\exists x \in R)(x + 2 = x)$
e) $(\forall x \in R)(x + 1 > x)$
f) $(\forall x \in R)(x^2 = x)$
g) $(\exists x \in R)(2x = x)$
h) $(\exists x \in R)(x^2 + 3x = 2$
i) $(\exists x \in R)(x^2 + 5 = 2x)$

2) Sendo A = $\{1,2,3,4\}$, determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

a) $(\exists x \in A)(x + 3 = 10)$
b) $(\exists x \in A)(x + 3 < 5$
c) $(\exists x \in A)(3^x > 72)$
d) $(\forall x \in A)(x + 3 < 10)$
e) $(\forall x \in A)(x + 3 \leq 7)$
f) $(\exists x \in A)(x^2 + 2x = 15$
g) $(\exists x \in A)(x^2 + x - 6 = 0$
h) $(\exists x \in A)(x^2 + x \neq 6)$
i) $(\forall x \in A)(x^2 + 3x \neq 1)$
j) $(\forall x \in A)((x + 1)^2 = x^2 + 1)$
k) $(\forall x \in A)(x + 3 < 6)$
l) $(\forall x \in A)(x^2 - 10 \leq 8)$
m) $(\exists x \in A)(2x^2 + x = 15)$
n) $(\forall x \in A)$ (x é primo)
o) $(\exists x \in A)(x \mid 12)$

Proposições categóricas

Vamos estudar as relações lógicas geradas pelos quantificadores **todo** e **algum** e consideraremos o quantificador negado **nenhum.**

Alguns argumentos válidos nem sempre dependem unicamente das operações lógicas através dos conectivos **não, e, ou, se....então e se,e somente se,** para provar a sua validade. Tais argumentos não podem ser justificados somente através da lógica proposicional, as proposições necessitam de estrutura interna.

Exemplo: Observe o seguinte argumento válido:

Alguns quadrúpedes são leões
Todos os leões são carnívoros

Logo, alguns quadrúpedes são carnívoros

As proposições do exemplo dado têm estruturas internas, as quais constituem uma forma válida. Contudo, essas estruturas não se compõem de conectivos entre as proposições, mas de relações de atributos que denotam conjuntos ou classes com as próprias proposições.

Vamos representar o argumento dado no exemplo acima da seguinte forma:

Algum Q é L
Todo L é C
Logo, algum Q é C

As letras Q, L e C não representam sentenças, mas, sim, classes de atributos, tais como leão, carnívoro e quadrúpede.Uma classe de atributos denota um conjunto de objetos. O termo leão denota o conjunto de todos os leões e o termo carnívoro, o conjunto de todos os carnívoros. Qualquer substituição de uma classe de atributos por essas letras(substituindo cada ocorrência da mesma letra por uma mesma classe de atributos) produz um argumento válido.

Silogismos Categóricos

Um silogismo categórico é uma argumento composto de três proposições categóricas e que contêm três termos, cada um dos quais ocorre em duas das três proposições.

Exemplo: Nenhum estudante é vadio.
Algumas pessoas são vadias.

Logo, algumas pessoas não são estudantes.

Nele figura duas vezes os termos estudante, pessoas e vadio. A conclusão de um silogismo categórico é uma proposição categórica que contém dois dos três termos do silogismo.

Para testar a validade de um silogismo categórico, os diagramas de Euler/Venn constituem um teste rápido e eficaz .

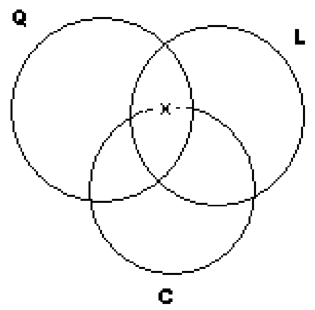
Para construirmos o diagrama de uma forma silogística, desenhamos três círculos que se interceptam, os quais representam os três termos diferentes existentes nas duas premissas. Diagramamos uma premissa de cada vez. Se ao diagramar as premissas tivermos automaticamente, diagramado também a conclusão, então o argumento é válido; caso contrário, o argumento é não-válido.

Exemplo1) Através do diagrama de Euler/Venn, determinar se é válido o seguinte argumento:

Alguns quadrúpedes são leões.
Todos os leões são carnívoros.

Portanto, alguns quadrúpedes são carnívoros.

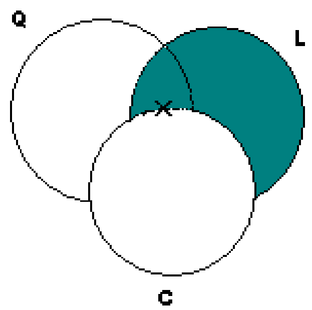
Solução:



A primeira premissa declara que o conjunto dos quadrúpedes tem pelo menos um elemento em comum com o conjunto dos leões, portanto, colocamos um x na região que é interceptada pelos dois círculos.

Entretanto, essa região está dividida em duas partes pelo círculo C. Precisamos saber em qual dessas duas partes deve ser colocado o x. Como sabemos que os leões são carnívoros, então poderíamos pensar em colocar o x na região comum aos três círculos. Mas seria um erro, pois estamos diagramando apenas a primeira premissa, e ela não indica que os leões de quatro pés são ou não carnívoros.

Assim, para levar em conta essa afirmação, colocamos o x na fronteira entre os carnívoros e os não carnívoros.



A segunda premissa declara que o conjunto dos leões é um subconjunto do conjunto dos carnívoros. Para diagramar esse fato, hachuramos a região que representa os leões que não são carnívoros.Ao diagramar a segunda premissa fizemos com que o x não representasse um não-carnívoro.Assim, podemos ver que o x (que representa pelo menos um leão de quatro pés) deve ficar na região comum aos três círculos. È válido também dizer que as premissas indicam que pelo menos um leão de quatro pés é carnívoro. Mas isso é exatamente o que a conclusão afirma.

Portanto ao diagramar as premissas, diagramamos também a conclusão, logo, o argumento é válido.

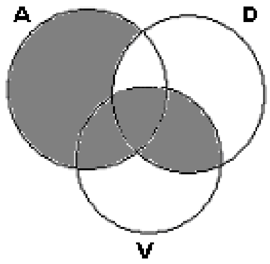
Exemplo2) Através do diagrama de Euler/Venn, testar a validade do argumento:

Todos os bons atletas são dedicados ao seu esporte.
Nenhum atleta que é dedicado ao seu esporte é viciado em drogas.

Portanto, nenhum atleta que é viciado em drogas é um bom atleta.

Solução:

Seja: A: atleta D: dedicado V: viciado



Para diagramar a primeira premissa hachuramos a região do círculo A que é externa ao círculo D. Para diagramar a segunda premissa hachuramos a região comum aos círculos D e V. Isso, deixa automaticamente hachurada a região comum aos círculos V e A(que é a região da conclusão). Portanto o argumento é válido.

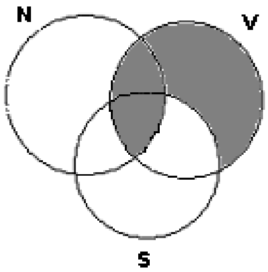
Exemplo3) Testar a validade do argumento através do diagrama de Euler/Venn:

Nenhum navio de passeio viaja debaixo d’agua.
Todos os navios que viajam debaixo d’agua são submarinos.

Portanto, nenhum submarino é navio de passeio.

Solução:

Seja: N: navio de passeio V: viaja debaixo d’agua S: submarino



Para diagramar a primeira premissa hachuramos a região comum aos círculos N e V. Para diagramar a segunda premissa hachuramos toda parte de V que não esteja contida em S. Após hachurarmos as duas premissas, a região comum aos círculos N e S não ficou hachurada e, esta é a região da conclusão. Logo, o silogismo dado não é válido (sofisma).

Exercícios Grupo N

Testar a validade dos seguintes argumentos, através de diagramas de Euler/Venn:

1) Tudo o que ela fala é bobagem.
   Toda bobagem é desprezível.

   Portanto, tudo o que ela fala é desprezível.

2) Nenhum dos alunos foi castigado.
   Alguns dos alunos erraram os problemas.

   Logo, ninguém que errou os problemas ficou castigado.

3) Alguns deputados são ricos.
   Alguns ricos são desonestos.

   Logo, alguns deputados são desonestos

4) Todos os advogados são alfabetizados.
   Alguns advogados são incompetentes.

   Logo, alguns incompetentes são alfabetizados

5) Todos os gatos são mamíferos.
   Todos os ratos são mamíferos.

   Logo, todos os ratos são gatos

6) Todos os gatos são mamíferos.
   Nenhum rato é gato.

   Portanto, nenhum rato é mamífero

7) Todos os professores consagrados são profissionais profundamente dedicados ao magistério.
   Nenhum professor profundamente dedicado ao magistério aceita passivamente o descalabro educacional existente no país.

   Logo, nenhum professor que aceita passivamente o descalabro educacional existente no país é um professor consagrado.

8) Nenhum brasileiro é africano.
   Nenhum africano é sul-americano.

   Portanto, nenhum brasileiro é sul-americano.

9) Todos os artistas são alegres.
   Alguns artistas são ricos.

   Portanto,alguns ricos são alegres

10) Não existem industriais pobres.
    Todos os mendigos são pobres.

    Logo, não existem mendigos industriais

Apostila de Lógica