Programación Lineal

Felipe Pérez Vargas

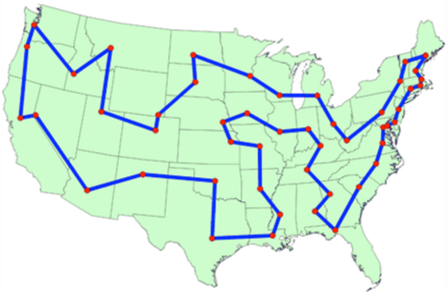
Universidad de la Salle

1 de junio de 2021

REDES DE OPTIMIZACIÓN

Traveling Salesman Problem

£cuál es la ruta más corta posible que visita cada ciudad exactamente una vez y al finalizar regresa a la ciudad origen?



Introducción

Hay una multitud de situaciones, en investigación de operaciones, que se pueden modelar y resolver como redes (nodos conectados por ramas). Algunas encuestas recientes informan que hasta el 70 % de los problemas de programación matemática en el mundo real se pueden representar como modelos relacionados con redes.

Introducción

La lista siguiente ilustra algunas aplicaciones posibles de las redes.

- Diseño de una red de gasoductos marinos para conectar bocas de pozos en el Golfo de México con un punto de entrega en tierra. El objetivo del modelo es minimizar el costo de construcción del gasoducto.
- Determinación de la ruta más corta entre dos ciudades, en una red de carreteras
- Determinación del programa de flujo con costo mјnimo desde los campos petroleros hasta las refinerјas a través de una red de oleoductos.
- Determinación del cronograma (fechas de inicio y terminación) de las actividades en la construcción de un proyecto.

Universidad DeLaSalle Bajío

Introducción

La solución de esas situaciones y otras parecidas se logra con los siguientes algoritmos.

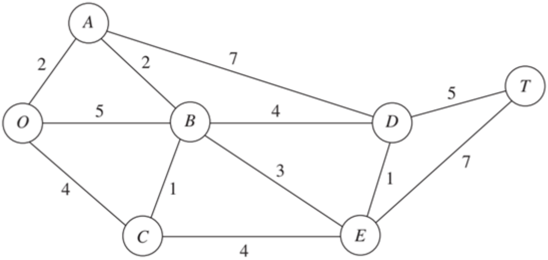
1. Árbol de expansión mjnima
2. Algoritmo de la ruta más corta
3. Algoritmo del flujo máximo
4. Algoritmo de red capacitada con costo mjnimo
5. Algoritmo de la ruta crjtica

Universidad DeLaSalle Bajío

Caso Práctico

En fecha reciente se reservó el área de SEERVADA PARK para paseos y campamentos. No se permite la entrada de automóviles, pero existe un sistema de caminos angostos y sinuosos para tranvjas y para "jeeps" conducidos por los guardabosques. En la figura se muestra este sistema de caminos —sin las curvas—, en donde O es la entrada al parque; las otras letras representan la localización de las casetas de los guardabosques y otras instalaciones de servicio. Los números son las distancias en millas de estos caminos accidentados.

El parque contiene un mirador a un hermoso paisaje en la estación T. Unas cuantas camionetas transportan a los visitantes desde la entrada a la estación T y viceversa.



En este momento la administración del parque se enfrenta a tres problemas. Uno consiste en determinar qué ruta, desde la entrada del parque a la estación T, es la que representa la distancia total más corta para la operación de los tranvjas.

El segundo problema consiste en que deben instalarse lj́neas telefónicas subterráneas para establecer comunicación entre todas las estaciones, incluso la entrada. Debido a que la instalación es cara y perturba la ecologj́a, se deben instalar lj́neas que sigan sólo los caminos necesarios para obtener comunicación entre cualquier par de estaciones. La pregunta es por dónde deben tenderse las lj́neas para lograr este objetivo con el mj́nimo número total de millas de cable instalado.

El tercer problema se ref ere a que, durante la temporada pico, hay más personas que quieren tomar un tranvja a la estación T que aquellas a las que se les puede dar servicio. Para evitar la perturbación indebida de la ecologja y de la vida silvestre de la región, se ha impuesto un racionamiento estricto al número de viajes al dja que pueden hacer los tranvjas en cada camino.

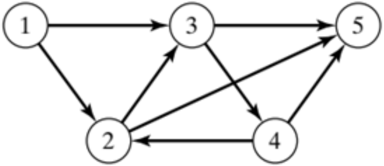
De esta forma, durante la temporada pico, se pueden seguir varias rutas, sin tomar en cuenta la distancia, para aumentar el número de viajes de tranvja diarios. La pregunta es cómo planear las rutas de los distintos viajes, de manera que se maximice el número total de viajes que se pueden hacer al dja, sin violar los ljmites impuestos sobre cada camino.

Definición

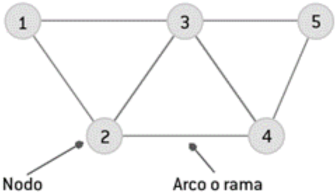
Una red consiste en una serie de nodos enlazados con arcos. La notación para describir una red es (N, A), donde N es el conjunto de nodos y A es el conjunto de arcos.

$$N = \{1,2,3,4,5\}$$
$$A = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,5),(3,4),(3,5),(4,2),(4,5)\}$$

Ejemplo de una red (N, A)



Ejemplo



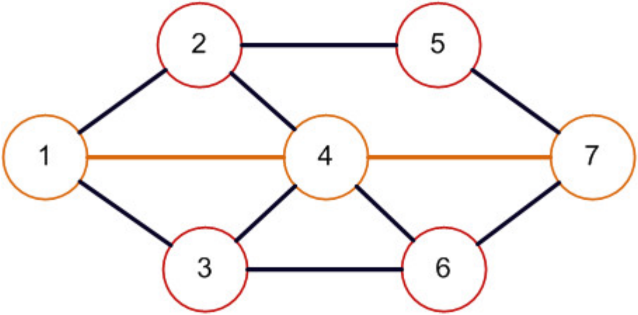
$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A = \{(1,3)\ (1,2)\ (3,5)\ (3,4)\ (4,5)\ (2,3)\ (2,4)\}$$

Definición

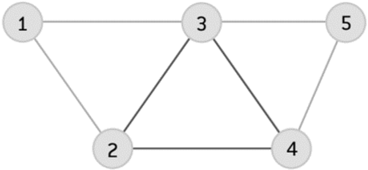
Ruta

Secuencia de ramas diferentes que enlazan dos nodos sin que importe la dirección del flujo de cada rama.



Lazo o Ciclo

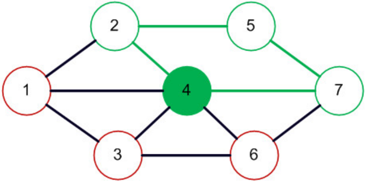
Secuencia de ramas diferentes que enlazan dos nodos sin que importe la dirección del flujo de cada rama.



Definición

Lazo o Ciclo

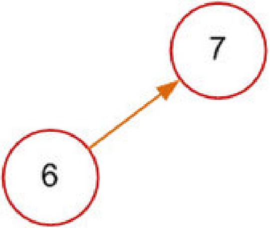
Secuencia de ramas diferentes que enlazan dos nodos sin que importe la dirección del flujo de cada rama.



Definición

Lazo Dirigido

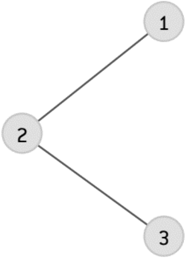
Cjrculo en el que todas las ramas se orientan en la misma dirección.



Definición

Árbol

Red conectada que puede contener sólo un subconjunto de todos los nodos de la red.

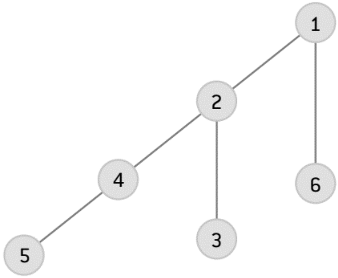


Árbol

Definición

Árbol de expansión

El que une todos los nodos sin permitir ningún lazo.

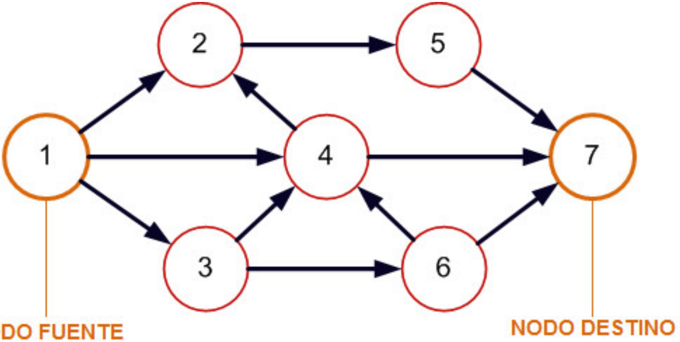


Árbol de expansión

Definición

Nodo Fuente y Destino

El nodo fuente es aquel nodo en el cual todos sus ramales se encuentran orientados hacia afuera. y el nodo destino es aquel nodo en el cual todos sus ramales se encuentran orientados hacia él.



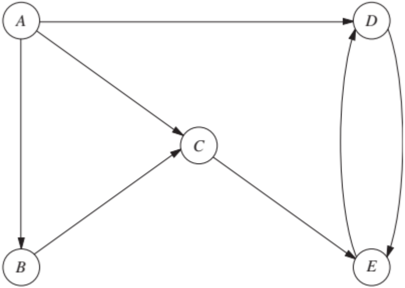
Ejemplo

Trace la red definida por :

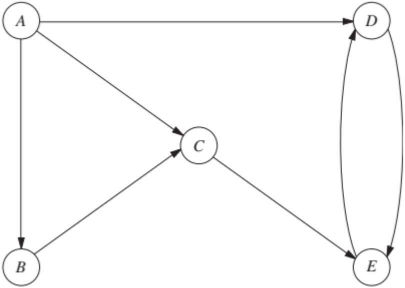
$$N = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$A = (1,2), (1,5)(2,3), (2,4), (3,5), (3,4), (4,3)(4,6), (5,2), (5,6)$$

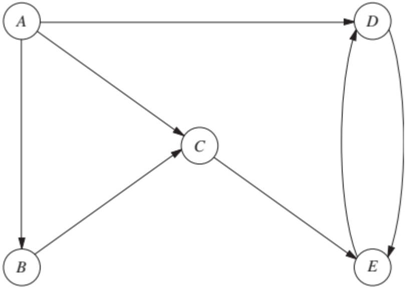
Para ilustrar estas definiciones, la figura muestra una red dirigida común, donde los nodos A y B representan dos fábricas y los nodos D y E representan dos almacenes, el nodo C es un centro de distribución y los arcos representan las rutas de embarque.



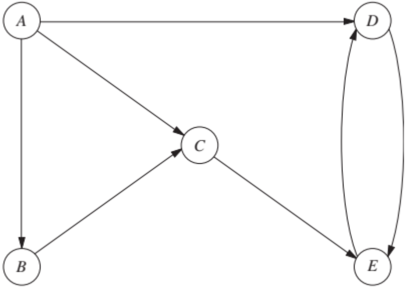
La sucesión de arcos AB–BC–CE es una trayectoria dirigida (A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ C $\rightarrow$ E) del nodo A al nodo E, puesto que el flujo hacia el nodo E en toda esta trayectoria es factible.



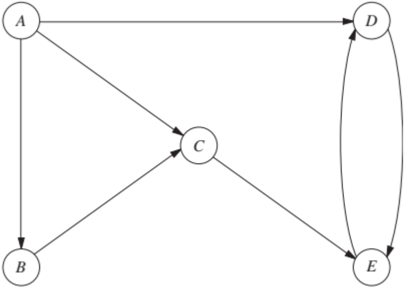
Por otro lado, BC–AC–AD ($B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow D$) no es una trayectoria dirigida del nodo B al nodo D, porque la dirección del arco AC es desde el nodo D (sobre esta trayectoria).



No obstante, B $\to$ C $\to$ A $\to$ D es una trayectoria no dirigida del nodo B al nodo D, debido a que la secuencia de arcos BC–AC–AD conecta a estos dos nodos (aun cuando la dirección del arco AC evita el flujo a través de esta trayectoria).

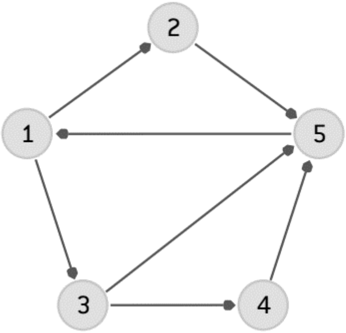


Un ciclo es una trayectoria que comienza y termina en el mismo nodo. Por ejemplo, en la figura, DE–ED es un ciclo dirigido. Por el contrario, AB–BC–AC no es un ciclo dirigido puesto que la dirección del arco AC es opuesta a la de los arcos AB y BC.



Ejemplo

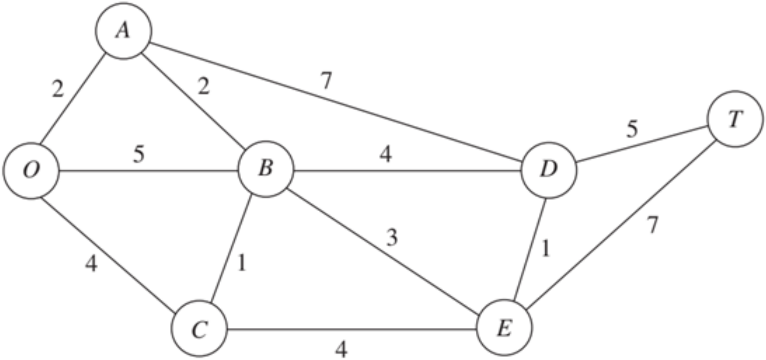
En el caso de la siguiente figura, determine el conjunto de N, A y determine una ruta, un árbol de expansión, un árbol y un lazo o circuito.



Ejemplo

Componentes de redes

Nodos	Arcos	Flujo
Cruceros	Caminos	Vehículos
Aeropuertos	Líneas aéreas	Aviones
Puntos de conmutación	Cables, canales	Mensajes
Estaciones de bombeo	Tuberías	Fluidos
Centros de trabajo	Rutas de manejo de materiales	Trabajos


A
O
B
C
D
E
T
2
2
7
5
4
5
4
1
3
1
7
4

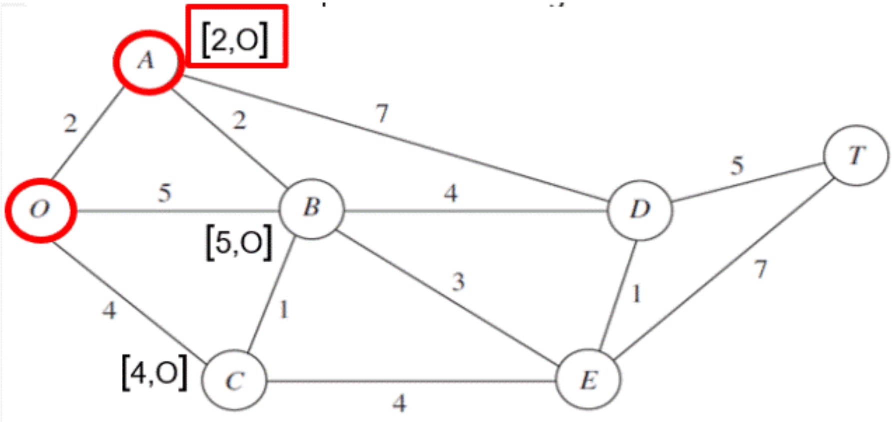
Algoritmo de Dijkstra

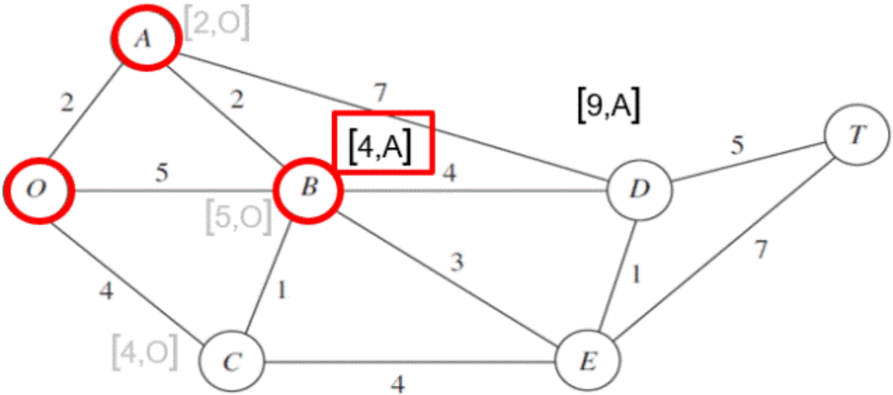
Los cálculos del algoritmo de Dijkstra avanzan de un nodo i a un nodo siguiente j, por medio de un procedimiento especial de clasificación. La clasificación de nodos de acuerdo con el algoritmo de Dijkstra se representa en dos formas:

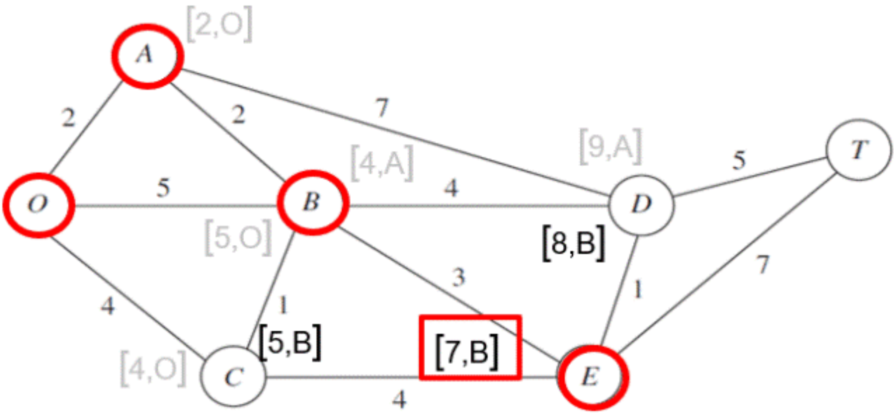
- Temporales
- Permanentes

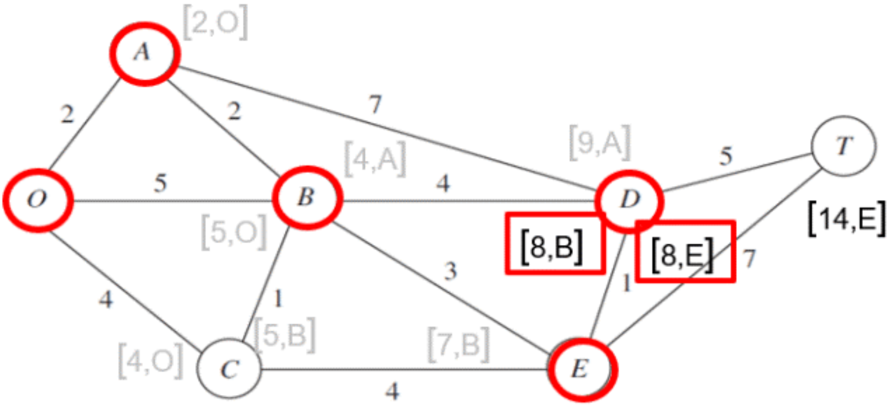
algoritmo de Dijkstra

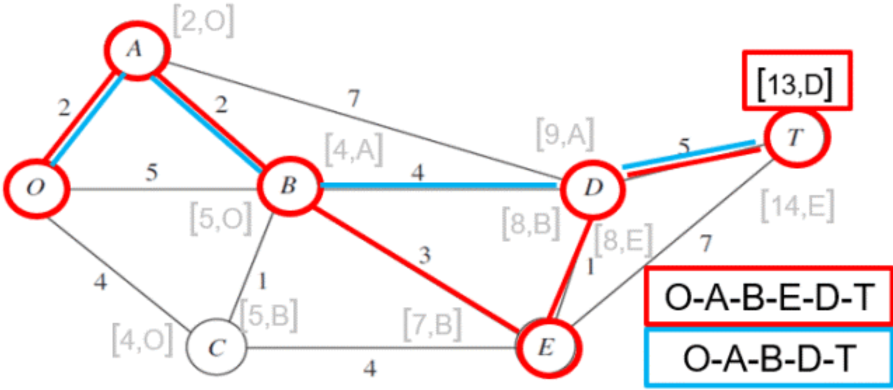
- Paso 1. Clasifique el nodo del punto de origen (nodo 1) en la clasificación permanente.
- Paso 2. Calcule las clasificaciones temporales de cada nodo j al que puede llegarse desde el nodo i, siempre y cuando j no esté clasificado como permanente. Si el nodo j es temporal y el nuevo valor es menor que el que tenja, entonces se reemplaza con el nuevo.
- Paso 3. Si todos tienen clasificaciones permanentes, deténgase. De lo contrario, seleccione la clasificación con la distancia más corta de entre todas las temporales.


[2,O]
A
2
2
7
O
5
B
4
D
5
T
[5,O]
3
1
4
1
7
[4,O]
C
4
E


[2,O]
A
2
2
7
[9,A]
T
O
5
[4,A]
B
4
D
5
[5,O]
3
7
4
1
1
[4,O]
C
4
E


[2,O]
A
2
2
7
[9,A]
T
5
O
5
[4,A]
B
4
D
[5,O]
[8,B]
3
7
1
4
1
[5,B]
[7,B]
[4,O]
C
E
4

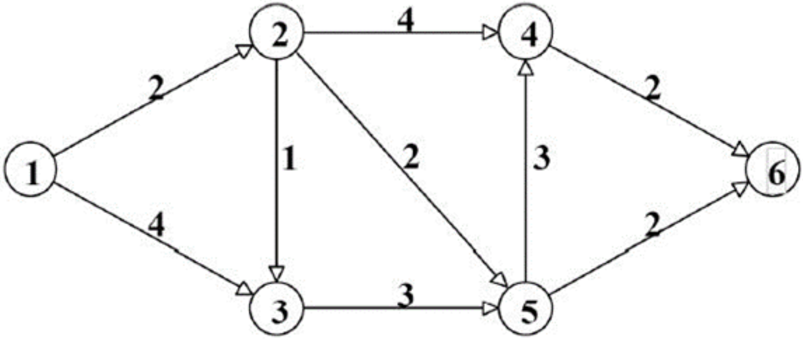

[2,O]
A
2
2
7
[9,A]
T
5
[4,A]
O
5
B
4
D
[14,E]
[5,O]
[8,B]
[8,E]
7
3
4
1
1
[5,B]
[7,B]
[4,O]
C
E
4


[2,O]
A
2
2
7
[13,D]
[9,A]
[4,A]
5
T
O
5
B
4
D
[5,O]
[8,B]
[14,E]
[8,E]
3
7
4
1
1
O-A-B-E-D-T
[5,B]
[7,B]
[4,O]
C
E
4
O-A-B-D-T

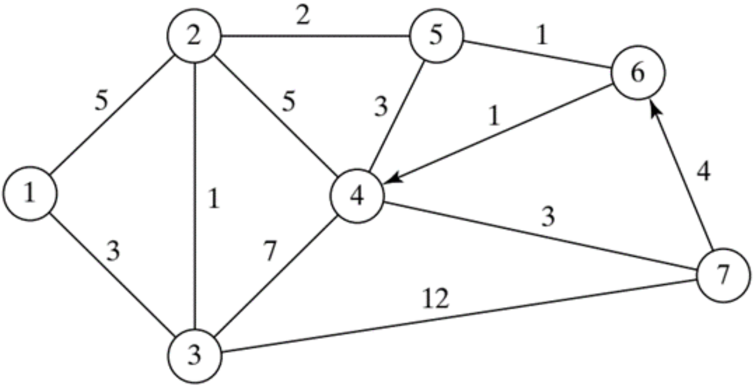
Ejemplo

n	Nodos resueltos conectados directamente a nodos no resueltos	Nodo no resuelto más cercano conectado	Distancia total involucrada	n-ésimo nodo más cercano	Distancia mínima	Última conexión
1	O	A	2	A	2	OA
2, 3	O A	C B	4 $2 + 2 = 4$	C B	4 4	OC AB
4	A B C	D E E	$2 + 7 = 9$ $4 + 3 = 7$ $4 + 4 = 8$	E	7	BE
5	A B E	D D D	$2 + 7 = 9$ $4 + 4 = 8$ $7 + 1 = 8$	D D	8 8	BD ED
6	D E	T T	$8 + 5 = 13$ $7 + 7 = 14$	T	13	DT

Ejemplo

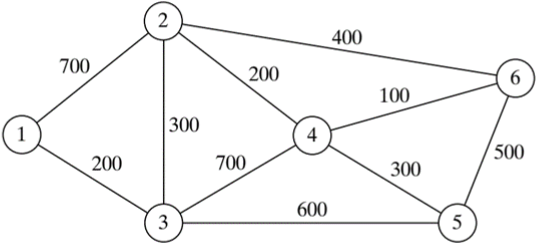


Ejemplo



Ejemplo

La telefónica Iusacell da servicio a seis áreas geográficas. Las distancias (en millas) de satélites entre las seis áreas se ven en la figura. Iusacell debe determinar las rutas de mensaje más eficientes que se van a establecer entre cada par de áreas en la red.



Algoritmo de la ruta más corta

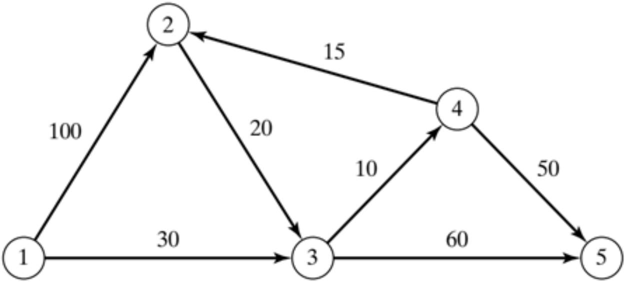
El problema de la ruta más corta determina la distancia menor entre un punto de origen y un punto de destino, existen dos algoritmos que se utilizan para resolver las redes crjticas y las acrjticas:

- Dijkstra
- Floyd

El algoritmo de Dijkstra es útil para determinar la ruta más corta entre el nodo del punto de origen y cada uno de los otros nodos de la red. Por otra parte, el algoritmo de Floyd es más general porque permite determinar la ruta más corta entre cualquier par de nodos de la red.

Ejemplo

Nodo	Etiqueta	Estado
1	**[0,—]**	**Permanente**
2	[0 + 100, 1] = [100, 1]	Temporal
3	[0 + 30, 1] = [30, 1]	Temporal



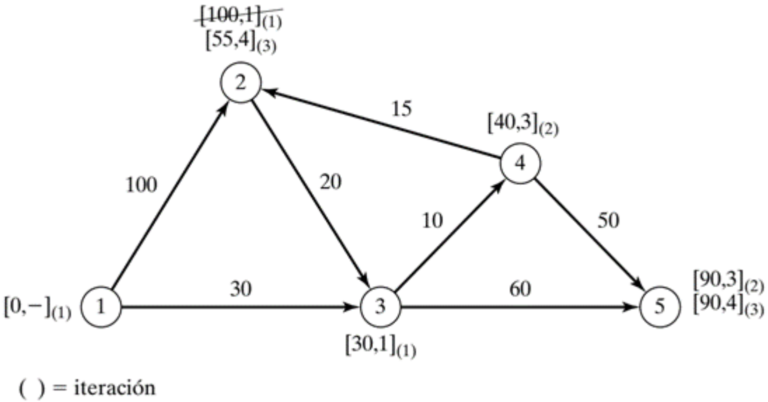
Ejemplo

Nodo	Etiqueta	Estado
1	**[0,—]**	Permanente
2	[100, 1]	Temporal
3	**[30, 1]**	**Permanente**
4	[30 + 10, 3] = [40, 3]	Temporal
5	[30 + 60, 3] = [90, 3]	Temporal

Ejemplo

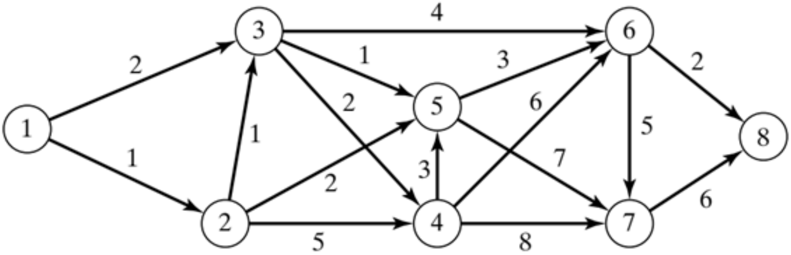
Nodo	Etiqueta	Estado
1	**[0,—]**	Permanente
2	[40 + 15, 4] = [55, 4]	Temporal
3	**[30, 1]**	Permanente
4	**[40, 3]**	**Permanente**
5	[90, 3] o [40 + 50, 4] = [90, 4]	Temporal

Ejemplo

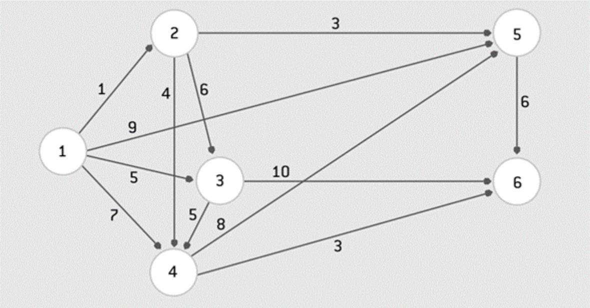


[100,1](1)
[55,4](3)
2
15
[40,3](2)
4
100
20
10
50
[90,3](2)
[90,4](3)
[0,−](1)
1
30
3
60
5
[30,1](1)
( ) = iteración

Ejemplo

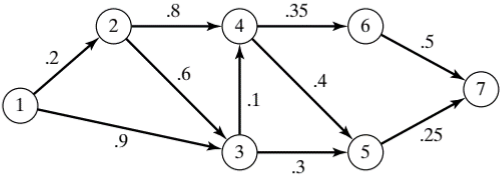


Una compañja de televisión por cable está en proceso de proporcionar servicio a cinco nuevas áreas habitacionales. La figura siguiente representa los enlaces posibles de televisión entre las cinco áreas. La extensión de los cables se muestra en cada uno de los arcos. Determine la red de cable más económica en las conexiones de cable de la compañja:



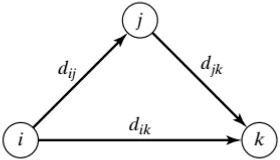
Ejercicio

I.Q. Smart conduce diariamente hacia su trabajo. Como acaba de terminar un curso de análisis de redes, puede determinar la ruta más corta. Desafortunadamente, la ruta seleccionada está muy patrullada por la policјa, y debido a las multas por manejar a alta velocidad, podrјa ser que la ruta más corta no sea la mejor elección. Smart decide entonces escoger una ruta que maximice la probabilidad de no ser detenido por la policјa.



Algoritmo de Floyd

El algoritmo de Floyd es más general que el de Dijkstra, porque determina la ruta más corta entre dos nodos cualquiera de la red. El algoritmo representa una red de n nodos como matriz cuadrada con n renglones y n columnas. El elemento (i,j) de la matriz expresa la distancia dij del nodo i al nodo j, que es finita si i está conectado directamente con j, e infinita en caso contrario.



El concepto del algoritmo de Floyd es directo. Dados tres nodos *i*, *j* y *k* en la figura 6.19, con las distancias entre sí indicadas en los tres arcos, es más corto ir a *k* desde *i* pasando por *j* si

$$d_{ij} + d_{jk} < d_{ik}$$

En este caso, lo óptimo es reemplazar la ruta directa de $i \rightarrow k$ por la ruta indirecta $i \rightarrow j \rightarrow k$. Este intercambio de **operación triple** se aplica en forma sistemática a la red, con los siguientes pasos:

PROBLEMA DE FLUJO MÁXIMO

ADMINISTRACIÓN DE LOS INVENTARIOS

PROBLEMAS ESPECIALES DE PROGRAMACIÓN LINEAL