CÁLCULO III

Professora: Juliette Zanetti

Novembro - 2023
Vila Velha, ES

Série $\neq$ Sequências

(Somatório) $\neq$ (Sucessão)

Série

A soma dos n primeiros termos de uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

é chamada **soma parcial**.

Ex: $0{,}333333\ \ldots$

$0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003$

$+\ 0{,}0003\ \ldots$

$S_1 = 0{,}3$

$S_2 = 0{,}3 + 0{,}03$

$S_3 = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003$

$\ldots$

Uma **série infinita**, ou simplesmente **série**, é obtida somando todos os termos de uma sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Denotamos a série

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots$$

por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{ou} \quad \sum a_n.$$

Série

Um dia, a professora de Karl Friedrich Gauss pediu que os alunos somassem todos os números de 1 a 100

$$a_n = \{1,2,3,4, \dots , 100\}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$$

$$S_m = \sum_{m=1}^{100} a_m = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}$$

Série

Gauss utilizou a seguinte estratégia:

1	2	3	...	49	50
+ 100	+ 99	+ 98	...	+ 52	+ 51
101	101	101		101	101

$$\sum_{i=1}^{100} a_i = \frac{101 \times 100}{2}$$

E se quisermos somar os n primeiros termos?

$$a_n = \{1,2,3,4, \dots, n\}$$

$$S_n = \frac{(n+1) \times n}{2}$$

Série

Determine as quatro primeiras somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Série

Determine as quatro primeiras somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$$

Série Geométrica

Ex: 1, 2, 4, 8, ...

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1.2^1$$
$$S_3 = 1.2^2$$
$$S_4 = 1.2^3$$
$$...$$

Série Geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a.r^n$$

Razão

1° Termo

Se $|r| < 1$, a soma converge e vale:

$$\frac{a}{1-r}$$

Se $|r| \geq 1$, a série diverge

Série Geométrica

Converge ou Diverge?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}}$$

Série Geométrica

Converge ou Diverge? Converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{2^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{6} \text{ pois } a_0 = \frac{1}{8} \text{ e } r = \frac{1}{4} \text{ com}$$

$|r| < 1.$

Série Geométrica

Converge ou Diverge?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{e^{3n+1}}$$

Série Geométrica

Converge ou Diverge? Converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{e^{3n+1}}$$

Série Geométrica

Converge ou Diverge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n}3^{1-n}$$

Série Geométrica

Converge ou Diverge?

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}$$

Como $r = 4/3 > 1$, a série diverge.

Série Geométrica

Converge ou Diverge? Se sim, calcule a soma.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1.\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

Série Geométrica

Converge ou Diverge? Se sim, calcule a soma.

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1.\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 2$$

Série Geométrica

Converge ou Diverge? Se sim, calcule a soma.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{4^k} =$$

Série Geométrica

Converge ou Diverge? Se sim, calcule a soma.

$$\sum_{k=2}^{\infty} 1.\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

Série Geométrica

Converge ou Diverge? Se sim, calcule a soma.

$$\sum_{k=2}^{\infty} 1.\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1}{2}$$

Série Geométrica

A série abaixo é convergente? Se sim, calcule a sua soma

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

Série Geométrica

A série abaixo é convergente? Se sim, calcule a sua soma

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

$$\frac{1}{6}$$

Série Geométrica

Converge ou Diverge? Se sim, calcule a soma.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{3k-1}}{9^k}$$

Série Geométrica

Converge ou Diverge? Se sim, calcule a soma.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{3k-1}}{9^k} = \frac{32}{9}$$

Série Geométrica

A série abaixo é convergente? Se sim, calcule a sua soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Série Geométrica

A série abaixo é convergente? Se sim, calcule a sua soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Série Geométrica

A série abaixo é convergente? Se sim, calcule a sua soma

$$\sum_{n \geq 1} \frac{3}{2^n}$$

Série Geométrica

A série abaixo é convergente? Se sim, calcule a sua soma

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3}{2^n}$$

$$\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\cdot 2 = 3.$$

Série Geométrica

A série abaixo é convergente? Se sim, calcule a sua soma

$$\sum_{n\geq 1} 3^{-n}$$

Série Geométrica

A série abaixo é convergente? Se sim, calcule a sua soma

$$\sum_{n \geq 1} 3^{-n}$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

Série Geométrica

A série abaixo é convergente? Se sim, calcule a sua soma

$$\sum_{n \geq 1} \left[5 \cdot (-3)^{-n}\right]$$

Série Geométrica

A série abaixo é convergente? Se sim, calcule a sua soma

$$\sum_{n\geq 1} \left[5 \cdot (-3)^{-n}\right]$$

A série numérica

$$\sum_{n\geq 1} \left[3\,(-1)^{n}\right] = -3 + 3 - 3 + 3 - 3 + \cdots$$

é uma série geométrica de razão $r = -1$. Dado que $r = -1 \notin \,]-1, 1[$ então a série é divergente.